UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOABE DOS SANTOS DAMASCENO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO JOGOS MATEMÁTICOS

REDENÇÃO

2023

JOABE DOS SANTOS DAMASCENO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO JOGOS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

REDENÇÃO-CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Damasceno, Joabe Dos Santos.

D155e

Equações diofantinas lineares: uma proposta de sequência didática para o ensino médio utilizando jogos matemáticos / Joabe Dos Santos Damasceno. - Redenção, 2023.
92fl: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientadora: Profª Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes.

1. Equações Diofantinas Lineares. 2. Sequência Didática. 3. Gamificação. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 512.5

JOABE DOS SANTOS DAMASCENO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO JOGOS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 25/09/2023

BANCA EXAMINADORA

Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dr. Danilo de Jesus Ferreira
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB

Documento assinado eletronicamente por **AMANDA ANGELICA FELTRIN NUNES**, **PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 29/09/2023, às 17:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **JOSERLAN PEROTE DA SILVA**, **PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 29/09/2023, às 18:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **DANILO DE JESUS FERREIRA**, **Usuário Externo**, em 30/09/2023, às 21:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0777438** e o código CRC **55604989**.

Dedico este trabalho à minha família, em especial à minha mãe, Creusa, por todos os ensinamentos e à minha esposa, Camila Maria, pelo incentivo em todos os momentos do curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, por me conceder saúde, por ter me tornado capaz de superar as dificuldades até aqui e pela conquista de mais um sonho.

Aos meus pais, em especial à minha mãe, Creusa, pelos ensinamentos ao longo de minha vida e por sempre preocupar-se com a minha educação.

Aos meus irmãos, Gean, George, Jeilson e Joelcy por sempre acreditarem no meu potencial.

À minha esposa, Camila, por entender os momentos de ausência devido às dificuldades do curso e por todo o apoio dado durante as disciplinas, que contribuíram para que eu chegasse até aqui.

À Profª. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes, pela paciência, pelo tempo concedido, pelas inúmeras contribuições para o desenvolvimento deste trabalho. Enfim, pela excelente orientação, sem a qual esta dissertação não teria chegado neste ponto.

A todos os professores do PROFMAT-UNILAB, por compartilhar tantos conhecimentos e experiências, o que enriqueceu a minha formação de maneira inestimável.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (UNILAB) e Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira (UFRB) pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões que, certamente, enriqueceram o trabalho.

Aos colegas da turma de mestrado, em especial aos meus amigos Jefferson Torres, Márcio de Lacerda e Paulo César, pelo companheirismo e pelos ricos e divertidos momentos de estudo em grupo.

A todos os professores e gestores da EEMTI Adahil Barreto Cavalcante que, de alguma forma, contribuíram com a minha jornada durante todo o curso.

Aos alunos da EEMTI Adahil Barreto Cavalcante que participaram espontaneamente de etapas importantes desta pesquisa.

A Matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas.
(Gauss)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar se é razoável ministrar o assunto Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio de maneira satisfatória. Neste sentido, foram destacadas, da própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC), algumas habilidades do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que possuem uma relação com as equações em questão e, desta forma, foi verificado que os alunos do Ensino Médio tiveram acesso aos principais pré-requisitos para estudar as Equações Diofantinas Lineares como, por exemplo, divisão euclidiana e máximo divisor comum. No decorrer do trabalho, apresentamos, também, a Teoria Elementar dos Números e em seguida, abordamos aspectos matemáticos e históricos sobre as Equações Diofantinas Lineares. Amparados pela metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática e pela Metodologia Ativa da Gamificação chegamos a outro objetivo da pesquisa que foi elaborar uma sequência didática sobre as Equações Diofantinas Lineares para alunos do Ensino Médio, utilizando jogos de tabuleiro. Uma vez elaborada a sequência didática e confeccionados os jogos, foram selecionados dois grupos de alunos da EEMTI Adahil Barreto Cavalcante, formados por alunos do 1º ano e 3º ano do Ensino Médio. Após a aplicação das etapas da sequência conclui-se que os estudantes foram instigados, ainda que de maneira superficial, a conhecerem detalhes sobre as Equações Diofantinas Lineares e algumas de suas aplicações no cotidiano. Além disso, percebeu-se que é possível abordar este assunto no Ensino Médio, mas que devem ser consideradas restrições como escolher preferencialmente turmas que tenham matemática em seu itinerário formativo.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares. Sequência Didática. Gamificação.

ABSTRACT

This work aims to investigate whether it is reasonable to teach the subject Linear Diophantine Equations in High School in a satisfactory manner. In this sense, some skills from Elementary and High School that have a relationship with the equations in question were highlighted from the National Common Curricular Base (BNCC) itself and, in this way, it was verified that High School students had access to main prerequisites for studying Linear Diophantine Equations such as, for example, Euclidean division and greatest common divisor. During the work, we also present the Elementary Theory of Numbers and then we address mathematical and historical aspects of the Linear Diophantine Equations. Supported by the research methodology known as Didactic Engineering and the Active Gamification Methodology, we reached another research objective, which was to develop a didactic sequence on Linear Diophantine Equations for high school students, using board games. Once the didactic sequence was developed and the games were created, two groups of students from EEMTI Adahil Barreto Cavalcante were selected, made up of 1st year and 3rd year high school students. After applying the steps in the sequence, it is concluded that the students were encouraged, albeit superficially, to learn details about the Linear Diophantine Equations and some of their applications in everyday life. Furthermore, it was realized that it is possible to address this subject in high school, but that restrictions must be considered, such as preferably choosing classes that have mathematics in their training itinerary.

Keywords: Linear Diophantine Equations. Didactic Sequence. Gamification.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PNE	Plano Nacional de Educação
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	Programme for International Student Assessment
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
AEE	Atendimento Educacional Especializado

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Educação Básica vem sofrendo mudanças significativas no Brasil com a implementação do Novo Ensino Médio e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). As mudanças dizem respeito ao aumento da carga horária a que os alunos são submetidos, ao uso dos itinerários formativos e à reorganização curricular. Todas essas novidades se configuram, em parte, como um esforço para resolver os problemas de aprendizagem dos estudantes. Historicamente, os alunos obtém péssimos resultados em avaliações externas em escala nacional e internacional, em particular na matemática. Tais resultados são atribuídos a forma com que a disciplina é ensinada, conforme Pontes (2021) quando afirma que

> Na contemporaneidade, as dificuldades deparadas por educadores e educandos no ato de ensinar e aprender matemática, respectivamente, são inúmeras e bastante conhecidas. O professor, mediador do conhecimento, busca a todo o momento encontrar estratégias que possam minimizar as consternações de seus aprendizes. Por outra direção, esse próprio aluno, não alcança assimilar e compreender os modelos matemáticos propostos por seu professor. Em resumo, o processo de ensino e aprendizagem de matemática fica limitado à utilização de práticas metodológicas, quase sempre tradicionais, e efetivamente perde-se a construção do pensamento matemático tão demandado entre pesquisadores nos diversos congressos de Educação Matemática (Pontes, 2021, p. 83).

Em relação à reorganização curricular da Educação Básica, apresentamos aspectos da BNCC, que é um documento oficial, de nível nacional, que propõe o desenvolvimento de competências e habilidades no Ensino Infantil, Ensino Fundamental e no Ensino Médio, de modo que neste último nível de ensino sejam consolidadas as aprendizagens essenciais desenvolvidas na etapa anterior, com o objetivo de que os estudantes sejam capazes de aplicar a matemática ao cotidiano. Ressaltamos que no Ensino Fundamental trabalhamos com a Área de Matemática e no Ensino Médio trabalhamos com a Área de Matemática e suas Tecnologias.

Foi nesse contexto de mudanças que cursei a disciplina do PROFMAT, MA14 – Aritmética e, a partir disso, surgiram para mim, professor de matemática do Ensino Médio, os dois principais fatores que motivaram esta pesquisa, a saber: por que as Equações Diofantinas Lineares não são abordadas oficialmente na Educação Básica, já que os pré-requisitos são assuntos básicos e vistos durante o Ensino Fundamental e através de qual metodologia ativa, seria possível lecionar esse assunto para alunos do Ensino Médio, de forma satisfatória?

No Capítulo 2 mostramos como a Área de Matemática e suas Tecnologias e os pré-requisitos das Equações Diofantinas Lineares estão inseridos na BNCC, justificamos o uso de Metodologias Ativas e Gamificação através da apresentação dos resultados de avaliações externas e, por fim, abordamos características da Engenharia Didática, em especial, das Sequências Didáticas.

No Capítulo 3 trabalhamos os conceitos básicos sobre Teoria dos Números relativos às Equações Diofantinas Lineares, apresentando desde a definição de divisibilidade até os teoremas que permitem, se possível, resolver tais equações.

No Capítulo 4 exibimos informações sobre a instituição em que foram desenvolvidas as atividades e detalhamos as etapas da Sequência Didática aplicada com os estudantes.

No Capítulo 5 analisamos os dados relativos à Avaliação Diagnóstica e à Avaliação Final e, finalmente, no Capítulo 6 fazemos as considerações finais, onde avaliamos, principalmente, como foi o desempenho dos estudantes durante a aplicação da Sequência Didática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A BNCC E A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Recentemente, mudanças vêm sendo feitas na organização curricular da Educação Básica, graças à implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que

> [...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (Brasil, 2018, p.7).

Além disso, a BNCC está embasada legalmente pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) e busca desenvolver nos alunos competências e habilidades, para que estes estejam plenamente aptos a viverem em sociedade. Assim,

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p.8).

Na BNCC, o Ensino Fundamental está organizado em cinco áreas do conhecimento, a saber:

- Linguagens;
- Matemática;
- Ciências da Natureza;
- Ciências Humanas;
- Ensino Religioso.

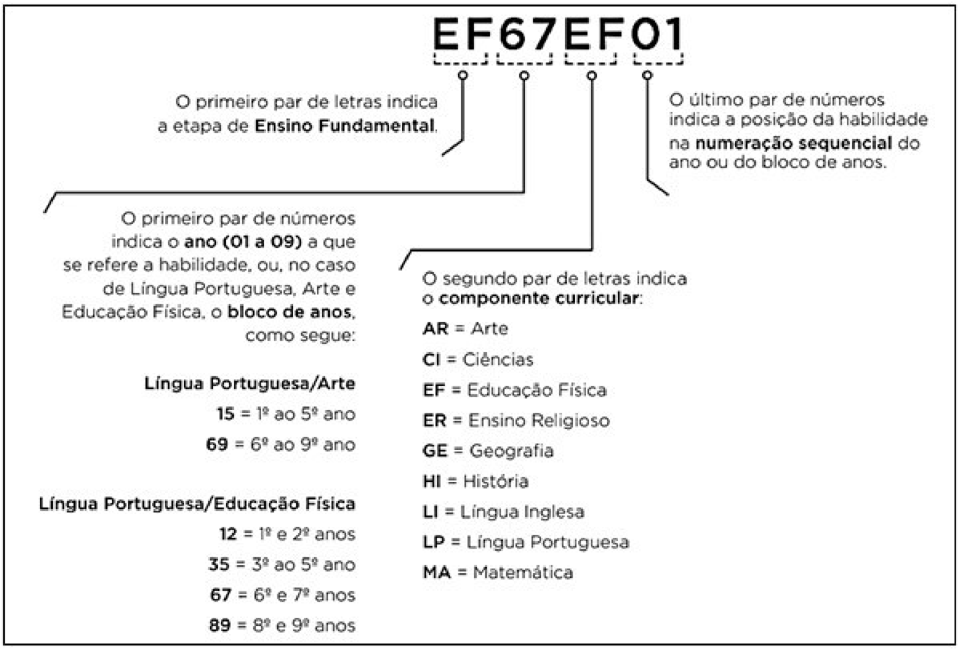
Já o Ensino Médio está organizado em quatro áreas do conhecimento, conforme determina a LDB, a saber:

- Linguagens e suas Tecnologias;
- Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

No Ensino Fundamental e no Ensino Médio, as áreas do conhecimento possuem competências específicas e cada uma delas possui habilidades a serem alcançadas. Isso está de acordo com a BNCC, onde se explica que cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dessas etapas. Para assegurar o desenvolvimento dessas competências, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes nesses níveis de ensino (Brasil, 2018).

No Ensino Fundamental, cada habilidade é identificada por um código alfanumérico que possui a seguinte composição:

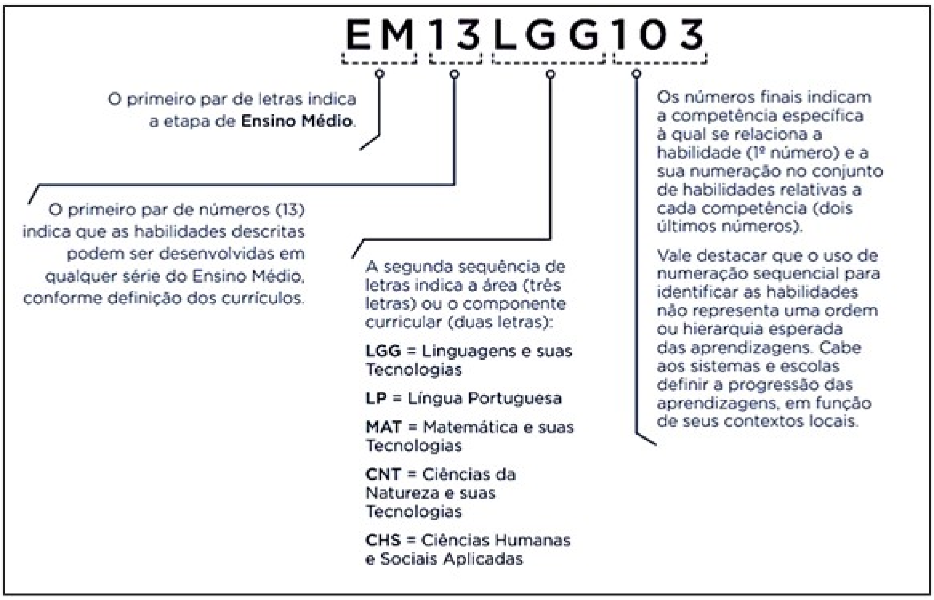
Figura 1 – Identificação das habilidades no Ensino Fundamental



Fonte: BRASIL (2018, p.30).

Segundo esse critério, o código EF06MA06, por exemplo, refere-se à sexta habilidade do 6º ano de Matemática, enquanto o código EF07MA13 indica a décima terceira habilidade do 7º ano de Matemática. Já no Ensino Médio, cada habilidade é identificada por um código alfanumérico que possui a seguinte composição:

Figura 2 – Identificação das habilidades no Ensino Médio



Fonte: BRASIL (2018, p.34).

Segundo esse critério, o código EM13MAT301, por exemplo, refere-se à primeira habilidade proposta na área de Matemática e suas Tecnologias relacionada à competência específica 3, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018, p. 31), é importante "destacar que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades de cada ano ou bloco de anos não representa uma ordem ou hierarquia esperada das aprendizagens."

Além disso, no documento se afirma que

> Também é preciso enfatizar que os critérios de organização das habilidades do Ensino Fundamental na BNCC (com a explicitação dos objetos de conhecimento aos quais se relacionam e do agrupamento desses objetos em unidades temáticas) expressam um arranjo possível (dentre outros). Portanto, os agrupamentos propostos não devem ser tomados como modelo obrigatório para o desenho dos currículos (Brasil, 2018, p. 31).

Em particular, a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para isso, sugere explorar de modo mais profundo os conhecimentos vistos na etapa anterior, com o objetivo de que os estudantes consigam usar a Matemática aplicada ao cotidiano.

2.1.1 Equações Diofantinas Lineares e a BNCC

Vejamos a relação entre as Equações Diofantinas Lineares e a BNCC, principalmente no que diz respeito aos pré-requisitos do assunto e se este está presente na Base Nacional Comum Curricular. Assim, poderemos analisar se é razoável inserir o assunto em questão na Educação Básica.

De acordo com a BNCC, as habilidades da área de Matemática do Ensino Fundamental estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). No Ensino Médio, espera-se que esses conhecimentos sejam ampliados, tornando os estudantes capazes de consumir, com um olhar crítico, as muitas informações disponíveis. Neste sentido, a BNCC explica que a área de Matemática e suas Tecnologias têm a

> [...] responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum (Brasil, 2018, p. 518).

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, a BNCC acrescenta que os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

Reforçamos que, durante o mestrado PROFMAT, na disciplina MA14 – Aritmética, surgiram questionamentos relativos às Equações Diofantinas Lineares, como:

• Por que este tópico de Aritmética não é abordado oficialmente na Educação Básica, já que os pré-requisitos são assuntos básicos e vistos durante o Ensino Fundamental?

• Através de qual metodologia ativa, seria possível lecionar esse assunto para alunos do Ensino Médio, de forma satisfatória?

Mesmo que não consigamos responder à primeira pergunta de forma objetiva, buscamos, na BNCC, os pré-requisitos de Equações Diofantinas Lineares e encontramos as habilidades do Ensino Fundamental exibidas na Tabela 1:

Tabela 1 – Habilidades do Ensino Fundamental relacionadas às Equações Diofantinas.

Série	**Unidade**	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidade**
6º ANO	**Números**	Operações com números naturais; Divisão euclidiana.	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
		Números primos e compostos.	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
		Múltiplos e divisores de um número natural.	(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
7º ANO	**Números**	Múltiplos e divisores de um número natural.	(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
	Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
		Equações polinomiais do 1º grau.	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de BRASIL (2018).

No que diz respeito ao Ensino Médio, sabemos que as Equações Diofantinas Lineares não aparecem de maneira explícita na BNCC. No entanto, destacamos a competência 3 que trata sobre "utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" (Brasil, 2018, p. 531).

Destacamos, dentro dessa competência, a habilidade EM13MAT301: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Portanto, mesmo com as mudanças propostas pela BNCC, percebemos que os pré-requisitos para se compreender Equações Diofantinas Lineares são entendidos como conteúdos essenciais, como, por exemplo, divisão euclidiana, múltiplos e divisores de um número natural, números primos, máximo divisor comum, linguagem algébrica e equações polinomiais do 1º grau. No entanto, é importante destacar que vários alunos têm dificuldade nos momentos em que é necessária a interpretação da situação-problema apresentada. Neste sentido, Weber (2012), afirma que

> [...] os alunos criam, durante o tempo em que estudam Matemática e resolvem problemas, um sistema de memorização de algoritmos e fórmulas resolutivas que se transformam num tabulário mental que decoram sem, no entanto, compreenderem as relações entre estes algoritmos e fórmulas e aquilo que se apresenta nos enunciados dos problemas. Isso os torna dependentes das fórmulas de um modo tão intenso que eles chegam a necessitar da sua explicitação direta no enunciado do problema, do contrário, não são capazes de proporem a resolução (Weber, 2012, p.65-66).

Essa condição pode dificultar as atividades a serem desenvolvidas, uma vez que as equações diofantinas lineares serão aplicadas em situações reais. Ainda assim, percebemos que é possível, pelo menos teoricamente, que os alunos do Ensino Médio tenham acesso a esse conteúdo e, portanto, precisamos buscar métodos de ensino adequados à realidade atual.

2.2 METODOLOGIAS ATIVAS

É comum, nas aulas de matemática do ensino básico, os alunos apresentarem dificuldades em relação à disciplina e, pior do que isso, demonstrarem desinteresse em estudá-la. Os estudantes estão inseridos em uma realidade em que o uso de jogos e redes sociais é frequente, enquanto as aulas de matemática ainda apresentam um teor conteudista e os conteúdos são repassados de forma tradicional. Neste sentido, Diesel (2017, p. 270), afirma que "[...] é ainda muito comum a influência do método tradicional de ensino, centrado no docente e na transmissão de conteúdos, em que os estudantes mantêm uma postura passiva, apenas recebendo e memorizando as informações numa atitude de reprodução."

As transformações sociais, culturais e tecnológicas dos últimos anos têm refletido em mudanças significativas na vida das pessoas, em especial na forma de se comunicar, nas relações dentro do mundo do trabalho e, claro, na escola. Mesmo com tais mudanças, o ambiente escolar necessita de alterações no que diz respeito às metodologias utilizadas em sala de aula, visto que os resultados de avaliações externas, tanto a nível nacional quanto a nível internacional, não são nada animadores. Morán (2015) entende que

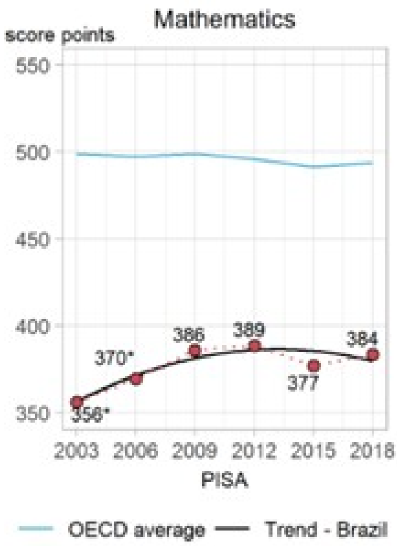
> A escola padronizada, que ensina e avalia a todos de forma igual e exige resultados previsíveis, ignora que a sociedade do conhecimento é baseada em competências cognitivas, pessoais e sociais, que não se adquirem da forma convencional e que exigem proatividade, colaboração, personalização e visão empreendedora (Morán, 2015, p.16).

Vemos, a seguir, os últimos resultados das principais avaliações externas da educação básica no Brasil (PISA, SAEB/IDEB) e, mais especificamente, no Estado do Ceará (SPAECE).

O PISA é o Programa da OCDE para Avaliação Internacional de Estudantes, lançado em 2000. Esta avaliação, aplicada a cada três anos, mede a capacidade dos jovens de 15 anos de usar seus conhecimentos e habilidades em leitura, matemática e ciências para enfrentar os desafios da vida real.

A seguir, são apresentados os resultados de matemática no período de 2003 a 2018, comparando os resultados do Brasil com a média da OCDE.

Figura 3 – Resultados de matemática PISA 2003/2018.



Fonte: OCDE (2019).

Verificamos que os resultados do Brasil estão aquém do esperado, uma vez que a nota dos alunos brasileiros variou entre 356 e 389 pontos, enquanto a média da OCDE, tida como referência, é de, aproximadamente, 500 pontos.

O SAEB é uma avaliação em larga escala a nível nacional que engloba língua portuguesa e matemática, que oferece subsídios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas educacionais. Esta avaliação permite que os diversos níveis governamentais avaliem a qualidade da educação praticada no país, a partir de evidências.

Considerando as faixas de desempenho no SAEB, apresentadas na Tabela 2, trazemos os últimos resultados divulgados desta avaliação, relativos à matemática:

Tabela 2 – Faixas de desempenho SAEB - Matemática / Ensino Médio.

Faixa de desempenho	Proficiência Média
Abaixo do básico	Abaixo de 275
Básico	Entre 275 e 350
Adequado	Entre 350 e 400
Avançado	Entre 400 e 450

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 3 – Resultados SAEB Matemática - Ensino Médio (2017/2021).

Ano	Proficiência Média	Faixa de desempenho
2017	269,74	Abaixo do básico
2019	277,34	Abaixo do básico
2021	272,09	Abaixo do básico

Fonte: Adaptado de Inep (2022b).

O IDEB é um indicador sintético que relaciona as taxas de aprovação escolar, obtidas no Censo Escolar, com as médias de desempenho em língua portuguesa e matemática dos estudantes no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Desta forma, apresentam melhores resultados no IDEB os sistemas que alcançam, de forma concomitante, maiores taxa de aprovação e proficiência nas avaliações. Segue, abaixo, os últimos resultados deste índice e as respectivas metas que deveriam ser alcançadas.

Tabela 4 – Resumo de desempenho no IDEB – Brasil (Ensino Médio - 2017/2021).

Ano	Meta	Resultado
2017	4,7	3,8
2019	5,0	4,2
2021	5,2	4,2

Fonte: Adaptado de Inep (2022a).

O SPAECE, na vertente Avaliação de Desempenho Acadêmico, caracteriza-se como avaliação externa em larga escala que avalia as competências e habilidades dos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio do estado do Ceará, em Língua Portuguesa e Matemática. As informações coletadas a cada avaliação identificam o nível de proficiência e a evolução do desempenho dos alunos que são classificados em quatro níveis: muito crítico, crítico, intermediário e adequado. Trazemos abaixo os últimos resultados publicados desta avaliação.

Tabela 5 – Resumo de desempenho no SPAECE (Matemática – Ensino Médio).

Edição	**Proficiência Média**	**Indicação do Padrão de Desempenho**
2012	260,7	Crítico
2013	267,8	Crítico
2014	266,3	Crítico
2016	265,4	Crítico
2017	269,1	Crítico
2018	272,5	Crítico
2019	274,6	Crítico
2022	274,4	Crítico

Fonte: Adaptado de SEDUC (2022).

Em relação ao SAEB, IDEB e SPAECE, verificamos que não houve avanços significativos ao longo dos períodos exibidos. Vale destacar que os resultados de 2021 e 2022, foram fortemente afetados pela pandemia da Covid-19. Sugere-se que a leitura e a análise dos resultados apresentados sejam voltadas a apoiar políticas públicas que visem a melhoria do processo educacional, em particular, no cenário pós-pandemia. Com isso, fica clara a necessidade de alterações que impactem na qualidade da educação básica.

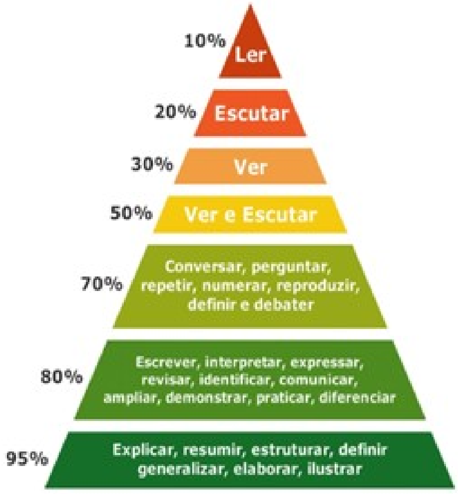
Diante desse contexto, é razoável imaginarmos que o processo de ensino-aprendizagem se torna mais eficiente quando os seus principais sujeitos, professor e aluno, participam com a mesma empolgação. Aliás, quem primeiro se mostra desanimado é o estudante, por se ver em um ambiente que reflete, em poucos aspectos, a sua realidade. Nessa direção, Diesel (2017) acredita

> [...] que toda e qualquer ação proposta com a intenção de ensinar deve ser pensada na perspectiva daqueles que dela participarão, que via de regra, deverão apreciá-la. Desse modo, o planejamento e a organização de situações de aprendizagem deverão ser focados nas atividades dos estudantes, posto que é a aprendizagem destes, o objetivo principal da ação educativa (Diesel, 2017, p.270).

Conforme Glasser (2001), psiquiatra americano, que desenvolveu uma pirâmide para explicar a forma como o ser humano aprende, é possível obter a aprendizagem, indo além da memorização dos conceitos, usando estratégias que tornem as aulas mais práticas, ou seja, que os estudantes não sejam simplesmente receptores de informações.

Na Figura 4, apresentamos a Pirâmide de Aprendizagem de Glasser, onde estão indicadas as porcentagens de aprendizado para cada uma práticas. Assim, por exemplo, de acordo com o autor, uma pessoa aprende 10% de uma leitura, aprende 20% de algo que ela escuta e aprende 95% ao explicar, resumir, estruturar, definir, generalizar, elaborar ou ilustrar um assunto.

Figura 4 – Pirâmide de Aprendizagem de Willian Glasser.



Fonte: Garcia e Morais (2020).

Com base nessas ideias, é necessário que os professores busquem alternativas e novas metodologias de ensino que centrem no protagonismo e autonomia dos estudantes, e que permitam uma motivação dos mesmos.

As metodologias ativas figuram como uma possibilidade para encarar os desafios citados, pois tais metodologias fazem com que o estudante possua papel ativo e seja corresponsável pelo seu próprio aprendizado, conforme explica Medeiros (2014)

> O método envolve a construção de situações de ensino que promovam uma aproximação crítica do aluno com a realidade; a opção por problemas que geram curiosidade e desafio; a disponibilização de recursos para pesquisar problemas e soluções; bem como a identificação de soluções hipotéticas mais adequadas à situação e a aplicação dessas soluções. Além disso, o aluno deve realizar tarefas que requeiram processos mentais complexos, como análise, síntese, dedução, generalização (Medeiros, 2014, p.43).

Conforme Garcia e Morais (2020, p.10), as metodologias ativas mais comuns utilizadas são as seguintes:

- Sala de aula invertida (Flipped Classroom);
- Instrução pelos Colegas (Peer Instruction);
- Ensino sob Medida (Just-in Time Teaching);
- Gamificação;
- Aprendizagem baseada em projetos (Project Based Learning);
- Aprendizagem baseada em problemas (Problem Based Learning).

No caso deste trabalho, acreditamos que uma das metodologias capazes de fazer a conexão atrativa entre as aulas de matemática e os estudantes é a gamificação. A propósito, vejamos o que é gamificação e suas principais características.

2.2.1 Gamificação

Segundo Fardo (2013, p.63), a palavra gamificação "foi cunhada pela indústria de mídias digitais e seus primeiros usos datam de 2008, porém, somente na segunda metade de 2010 é que o termo ganhou popularização devido à sua introdução em conferências sobre mídias digitais."

De acordo com Mozer e Nantes (2019, p.3) "na esfera escolar, a gamificação se aplica aos objetos de aprendizagem, sendo que estes são apresentados com a estrutura e as características dos jogos". Além disso, quando queremos aplicar a gamificação na matemática não somos obrigados a usar um jogo por completo. Podemos selecionar, se desejarmos, os elementos de tal jogo que sejam pertinentes e que contribuam para atingir o objetivo da aplicação. Neste sentido, Mcgonigal (2011, apud Fardo, 2013) explica que os jogos apresentam quatro elementos fundamentais: objetivo, regras, sistema de feedback e participação voluntária. Segundo a autora, objetivo é o que os jogadores trabalham para alcançar e fornece um "senso de propósito" para o jogo. As regras colocam limitações em como os jogadores podem alcançar esse objetivo, fazendo-os explorar os espaços de possibilidades oferecidos, o que libera a criatividade e motiva o pensamento estratégico. O sistema de feedback fornece uma visualização aos jogadores de qual é o seu estado perante o objetivo do jogo e, finalmente, a participação voluntária requer que todos que estejam jogando aceitem essas regras, objetivos e feedbacks.

Mozer e Nantes (2019) mostram que é possível aplicar a gamificação de modo efetivo, no formato de jogo ou atividade gamificada. As autoras concluem, em sua pesquisa, que o uso de jogos é capaz de proporcionar melhora no processo de ensino-aprendizagem e sugerem

> [...] a aplicação de jogos na prática pedagógica, porém com objetivos específicos e direcionados, com o intuito de propiciar condições prazerosas de ensino aos alunos, de forma que eles percebam que antes de a Matemática adentrar na esfera escolar, a mesma já está presente nas diversificadas práticas sociais (Mozer e Nantes, 2019, p.27).

Vale destacar que, por atividade gamificada, entendemos ser aquela em que são usados elementos de jogos digitais para atrair a atenção dos estudantes e motivá-los, conforme expõem Martins e Giraffa (2015), quando afirmam que

> Dentre os elementos de jogos digitais, consideramos significativos no contexto educacional aqueles que desenvolvidos em atividades gamificadas possam aprimorar competências relevantes ao estudante, tais como: colaboração, cooperação, reflexão (pensamento crítico), autonomia, domínio de conteúdo, hábitos de estudo, limites, etc. (Martins e Giraffa, 2015, p.16).

Evidenciamos até aqui algumas vantagens no uso da gamificação, tais como a motivação dos alunos, tornar o aluno ativo perante o processo de aprendizagem e o poder de socialização entre os estudantes. No entanto, conforme explica Grando (2000), sintetizamos, na tabela 6, outras vantagens e até desvantagens no uso da gamificação:

Tabela 6 – Vantagens e desvantagens no uso da gamificação.

<table>
<tr><th>Vantagens</th><th>Desvantagens</th></tr>
<tr><td>Fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora.</td><td rowspan="2">Quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório. Dessa forma, os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber por que jogam.</td></tr>
<tr><td>Introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão.</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos).</td><td rowspan="2">O tempo gasto com a as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo.</td></tr>
<tr><td>O jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento.</td></tr>
<tr><td>O jogo favorece a socialização entre os alunos e a conscientização do trabalho em equipe.</td><td>A perda da “ludicidade” do jogo pela interferência constante do professor.</td></tr>
<tr><td>A utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos.</td><td>A coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo.</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de GRANDO (2000, p.35).

Analisando os prós e contras das metodologias ativas, percebemos que há um bom custo-benefício em se utilizá-las. Além disso, escolhemos associá-las ao uso de uma outra metodologia conhecida como Engenharia Didática.

2.3 ENGENHARIA DIDÁTICA

Este trabalho se baseia na Engenharia Didática para atingir os seus objetivos. Vemos, a seguir, um pouco sobre o surgimento desta metodologia e quais as suas características. Para isso, usamos os estudos de Artigue (1988), Almouloud e Coutinho (2008) e Almouloud e Silva (2012).

De acordo com Almouloud e Silva (2012),

> [...] a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1988, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica (Almouloud e Silva, 2012, p.26).

É importante destacar que, segundo Artigue (1988),

> O termo “engenharia didática” foi concebido para o trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de sua área, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar objetos bem mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, enfrentar, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (Artigue, 1988, apud Almouloud e Silva, 2012, p.26).

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008),

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em ”realizações didáticas”em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori (Almouloud e Coutinho, 2008, p.66).

Para Artigue (1988), uma pesquisa, seguindo os princípios de uma Engenharia Didática, realiza as seguintes etapas:

> 1. Análises preliminares: considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão, incluem a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática.
> 2. Concepção e análise a priori das situações didáticas: o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas) [...].
> 3. Experimentação: consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação.
> 4. Análise a posteriori e validação: a análise a posteriori consiste em uma análise de um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo. Nessa análise, se faz necessário sua confrontação com a análise a priori para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação (Artigue, 1988, apud Almouloud e Silva, 2012, p.26-27).

Vejamos uma breve descrição de como se desenvolveram cada uma dessas quatro etapas.

2.3.1 Análises preliminares

Nesta etapa estudamos o contexto histórico sobre as Equações Diofantinas

Lineares, investigamos as dificuldades dos alunos em assuntos pré-requisitos através de uma Avaliação Diagnóstica e citamos problemas na estrutura da escola que dificultaram a execução das atividades.

2.3.2 Concepção e análise a priori das situações didáticas

Nesta etapa delimitamos as seguintes variáveis (microdidáticas):

• A produção de uma sequência didática, com o uso da gamificação, sobre as Equações Diofantinas Lineares;

• E depois da execução da sequência didática e da análise dos resultados, a verificação se é possível implementar este conteúdo, de forma satisfatória, em turmas do Ensino Médio.

2.3.3 Experimentação

Durante esta fase foi feita a aplicação da sequência didática, cujas etapas e cronograma serão apresentados mais adiante. Foi neste momento que foi feito o contrato didático com os estudantes, mostrando que eles estavam participando de um projeto de pesquisa e deixando claro todos os objetivos. Os dados foram coletados através de imagens, anotações feitas pelo autor e o armazenamento dos materiais utilizados pelos alunos (Avaliação Diagnóstica, Avaliação Final e Formulário de Satisfação).

2.3.4 Análise a posteriori e validação

Por fim, foi feita a confrontação da análise a priori com a análise a posteriori e, baseados na análise dos dados da pesquisa foi possível argumentar sobre a validação do estudo e indicar, com ressalvas, a reprodutibilidade das atividades em outros estabelecimentos de ensino.

2.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Um dos objetivos deste trabalho consiste em apresentar uma sequência didática sobre Equações Diofantinas Lineares para ser aplicada no Ensino Médio. Assim, é importante a compreensão, com mais detalhes, dessa etapa da Engenharia Didática.

Zabala (1998) entende que as atividades ou tarefas como, por exemplo, uma exposição, um debate, uma leitura, uma aplicação ou um exercício são uma das unidades mais elementares que constituem os processos de ensino e aprendizagem e que "apesar de concentrarem a maioria das variáveis educativas que intervêm na aula, podem ter um valor ou outro segundo o lugar que ocupem quanto às outras atividades, as de antes e as de depois" (Zabala, 1998, p.17). Assim, o autor julga que a ordem e as relações entre as atividades determinam o tipo de ensino.

Com isso, Zabala (1998, p.18) define que a Sequência Didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” e, além disso, elas são capazes de reunir toda a complexidade da prática educativa podendo incluir as três fases de toda intervenção reflexiva: planejamento, aplicação e avaliação.

Ainda de acordo com Zabala (1998), vemos que em uma Sequência Didática podem constar fases como: apresentação de uma situação problemática, proposição de problemas ou questões, diálogo entre professor e aluno, busca da informação, elaboração das conclusões, generalização das conclusões e síntese, exercícios, prova ou exame e avaliação.

3 TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS

Apresentamos, neste capítulo, conceitos básicos da Teoria Elementar dos Números que são essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Os teoremas, proposições e demonstrações exibidos foram baseados nos estudos feitos por Santos (2010), Hefez (2016) e Milies (2001).

Abordaremos conceitos de divisibilidade e suas principais propriedades. Na sequência demonstramos o Algoritmo da Divisão e os principais resultados que envolvem o Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois números inteiros. Finalizando o capítulo, definimos a equação diofantina linear e apresentamos resultados importantes que permitem, se possível, resolver tais equações e, além disso, desenvolvemos alguns exemplos.

3.1 DIVISIBILIDADE

Divisibilidade é um conceito simples, mas de fundamental importância para o entendimento dos próximos tópicos como, por exemplo, a definição de MDC e reconhecer quando uma equação diofantina linear possui soluções inteiras.

Definição 3.1 *Sejam a e b dois números inteiros, dizemos que a divide b e indicamos por $a|b$, se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$. Neste caso, dizemos que a é um divisor de b, que b é divisível por a ou ainda que b é múltiplo de a. Por outro lado, se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.*

Observação 3.1 *Convém observar que, se $a \neq 0$, o inteiro k nas condições da definição é único. De fato, se existisse outro k' tal que $b = k'a$ teríamos que $ka = k'a$ e, cancelando, vem que $k = k'$. O inteiro assim definido chama-se quociente de b por a e é indicado por $k=b/a=\frac{b}{a}$.*

Por outro lado, note que $0 \mid$ b se, e somente se, $b = 0$. Nesse caso, o quociente não é único, pois $0 = \mathrm{k} \cdot 0$ para todo inteiro k. Por causa disso, admitiremos sempre que todos os divisores considerados são diferentes de zero.

Vejamos alguns exemplos que sucedem imediatamente da Definição 3.1.

Exemplo 3.1 *Dados os inteiros 7 e -63, note que $7 \mid -63$, pois $-63 = (-9) \cdot 7$. Porém, $-63 \nmid 7$, pois não existe um inteiro k tal que $7 = k \cdot (-63)$.*

Exemplo 3.2 *Temos que*

a) $\pm 1 \mid 0$, $\pm 2 \mid 0$, $\pm 3 \mid 0$, $\ldots$;
b) $\pm 1 \mid 6$, $\pm 2 \mid 6$, $\pm 3 \mid 6$, $\pm 6 \mid 6$;
c) $0 \nmid 6$, $\pm 4 \nmid 6$, $\pm 5 \nmid 6$, $\pm 8 \nmid 6$.

Abordaremos, agora, as principais propriedades sobre divisibilidade expostas nas próximas quatro proposições.

Proposição 3.1 *Sejam os inteiros a, b e c. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.*

Demonstração: De fato, se $a|b$ e $b|c$, então existem os inteiros k e q tais que $b = ka$ e $c = qb$. Substituindo o valor de b em $c = qb$ obtemos $c = q(ka) = (qk)a$. Como $qk \in \mathbb{Z}$, concluímos que $a|c$. ■

Exemplo 3.3 *Como* $4|80$ *e* $80|3200$, *então* $4|3200$, *em virtude da Proposição 3.1.*

Proposição 3.2 *Sejam os inteiros a, b e c. Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.*

Demonstração: Note que, se $a|b$ e $c|d$ então existem os inteiros k e q tais que $b = ka$ e $d = qc$. Multiplicando as igualdades termo a termo, obtemos que $bd = (ka) \cdot (qc) = (ac) \cdot (kq)$. Como $kq \in \mathbb{Z}$, então $ac|bd$. ■

Exemplo 3.4 *Veja que* $3|15$ *e* $4|8$, *então* $12|120$, *em virtude da Proposição 3.2.*

A seguinte proposição nos diz que se um certo número inteiro é divisor de outros dois, então continua sendo divisor de qualquer combinação linear formada por esses dois outros números inteiros.

Proposição 3.3 *Sejam os inteiros a, b e c. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$, para todos os inteiros x e y.*

Demonstração: Note que, se $a|b$ e $a|c$ então existem os inteiros k e q tais que $b = ka$ e $c = qa$. Assim, $bx + cy = (kax) + (qay) = (kx + qy) \cdot a$. Como $(kx + qy) \in \mathbb{Z}$, então $a|(bx + cy)$. ■

Exemplo 3.5 *Como* $4|12$ *e* $4|20$, *então* $4|(12 \cdot 2 + 20 \cdot 3)$, *ou seja,* $4|84$.

Exemplo 3.6 *Como* $4|12$ *e* $4|20$, *então* $4|[12 \cdot (-2) + 20 \cdot (-4)]$, *ou seja,* $4| - 104$.

Proposição 3.4 *Dados os inteiros a e b, com $b \neq 0$ temos que se $a|b$, então $|a| \leq |b|$.*

Demonstração: Veja que, se $a|b$ então existe um inteiro k tal que b = ka e em termos de módulo, temos que

$$|b| = |ka| = |k||a|.$$

Como b $\neq$ 0, temos que k $\neq$ 0, logo $1 \leq |k|$. Multiplicando esta desigualdade por $|a|$, obtemos

$$|a| \leq |k||a|.$$

Portanto, concluímos que

$$|a| \leq |k||a| = |b|,$$

ou seja,

$$|a| \leq |b|.$$

■

A seguir, apresentamos o Princípio da Boa Ordem que será utilizado, posteriormente, na demonstração do Algoritmo de Euclides na seção 3.2.

Definição 3.2 *Diremos que um subconjunto S de $\mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq x$ para todo $x \in S$.*

Definição 3.3 *Diremos que $a \in S$ é um menor elemento se $a \leq x$ para todo $x \in S$.*

Axioma 3.1 *(Princípio da Boa Ordem) Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.*

Vejamos uma proposição e o Princípio de Eudoxius, úteis na demonstração do Algoritmo da Divisão Euclidiana.

Proposição 3.5 *Não existe nenhum número inteiro n tal que $0 < n < 1$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista n com essa propriedade. Logo, o conjunto $S = \{\text{n} \in \mathbb{Z};\ 0 < \text{n} < 1\}$ é não vazio, além de ser limitado inferiormente. Portanto, S possui um menor elemento a, com $0 < a < 1$. Multiplicando esta última desigualdade por a, obtemos $0 < a^2 < a < 1$. Logo, $a^2 \in S$ e $a^2 < a$, uma contradição. Portanto, não existe um inteiro n entre 0 e 1. ■

Axioma 3.2 *(Princípio de Eudoxius) Dados a e b inteiros, com $b \neq 0$, então a é um múltiplo de b ou está compreendido entre dois múltiplos consecutivos de b. Em símbolos, para cada par de inteiros a e b, com $b \neq 0$, existe um inteiro q tal que,*

$$bq \leq a < b \cdot (q+1), \quad \textit{para } b > 0 \quad \textit{e}$$
$$bq \leq a < b \cdot (q-1), \quad \textit{para } b < 0.$$

Na sequência, demonstramos o Algoritmo da Divisão Euclidiana, útil quando queremos expressar a divisão entre dois números inteiros, pois tal algoritmo mostra a existência e a unicidade do quociente e do resto nesta situação.

Teorema 3.1 *(Algoritmo da Divisão Euclidiana) Sejam a e b dois inteiros, com $b > 0$. Existe um único par de inteiros q (quociente) e r (resto) tais que*

$$a = bq + r, \quad \textit{com} \quad 0 \leq r < b.$$

Demonstração: Pelo Princípio de Eudoxius, como $b > 0$, existe $q \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$bq \leq a < b \cdot (q + 1),$$

ou seja,

$$bq \leq a < bq + b.$$

Subtraindo, membro a membro, bq na desigualdade acima, obtemos

$$0 \leq a - bq < b.$$

Com efeito, tomando $r = a - bq$, garantimos a existência de q e r.

Provemos, agora, a unicidade de q e r. Suponhamos que na divisão de a por b, exista outro quociente q' e outro resto r' tais que

$$a = q'b + r', \quad \text{com} \quad 0 \leq r' < b.$$

Mas, do fato de também $a = bq + r$, segue que

$$\begin{aligned} bq + r = bq' + r' &\Rightarrow bq - bq' = r' - r \\ &\Rightarrow (q - q') \cdot b = r' - r. \end{aligned} \tag{1}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $r' \geq r$. Como $r' < b$, então temos que $r' - r < b$. Substituindo esta desigualdade na equação (1), obtemos

$$(q - q') \cdot b < b,$$

e, tomando módulos e utilizando propriedades de módulo temos,

$$0 \leq |q - q'| \cdot |b| < |b|.$$

Como $|b| > 0$, segue que

$$0 \leq |q - q'| < 1.$$

Logo, pela Proposição 3.5, $q - q' = 0$ e, consequentemente, $q = q'$. Substituindo na equação (1), obtemos

$$0 = r' - r \Rightarrow r' = r.$$

■

Corolário 3.1 *Sejam a e b dois inteiros, com $b \neq 0$. Existe um único par de inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \quad \textit{com} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração: O caso $b > 0$ já foi provado no Teorema 3.1. Agora, supondo $b < 0$, temos que $|b| > 0$, e portanto, pelo Teorema 3.1, existem e são únicos $q', r \in \mathbb{Z}$ que satisfazem as condições:

$$a = |b| \cdot q' + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Como $|b| = -b$, então

$$a = -bq' + r = b \cdot (-q') + r, \quad \text{onde} \quad (-q') \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, existem e são únicos os inteiros $q = -q'$ e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq \text{r} < |b|$. ■

Ressaltamos que em algumas literaturas, o Algoritmo da Divisão Euclidiana aparece em um único teorema. No entanto, optamos aqui em dividir em dois casos, quando $b \geq 0$ (Teorema 3.1) e $b \neq 0$ (Corolário 3.1).

A seguir, temos exemplos de aplicação do Algoritmo da Divisão Euclidiana.

Exemplo 3.7 *Qual o quociente e o resto na divisão de 225 por 5?*

Solução: Note que $225 = 5 \cdot 45 + 0$. Assim, $q = 45$ e $r = 0$ (ou seja, $5|225$).

Exemplo 3.8 *Qual o quociente e o resto na divisão de 140 por 3?*

Solução: Note que $140 = 3 \cdot 46 + 2$. Assim, $q = 46$ e $r = 2$.

Exemplo 3.9 *Qual o quociente e o resto na divisão de 82 por -5?*

Solução: Note que $82 = (-5) \cdot (-16) + 2$. Assim, $q = -16$ e $r = 2$.

3.2 MÁXIMO DIVISOR COMUM

Abordaremos outro tópico de grande importância para o desenvolvimento das equações diofantinas lineares. Na Educação Básica, o máximo divisor comum entre dois números inteiros é abordado desde o Ensino Fundamental como se verifica na seguinte habilidade, presente na BNCC: EF07MA01 – "Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos." Os principais livros didáticos usados neste nível de ensino calculam o MDC através da decomposição em fatores primos dos números envolvidos. Aqui, além desse método, usaremos o método das divisões sucessivas, proposto por Euclides de Alexandria.

Apresentamos o conceito de MDC que, segundo Hefez (2016), é essencialmente a definição dada por Euclides nos Elementos. O MDC será usado, por exemplo, para compreender o importantíssimo Teorema de Bézout e para determinar se uma equação diofantina linear possui soluções inteiras.

Definição 3.4 *Diremos que um número inteiro $d > 0$ é um máximo divisor comum dos inteiros a e b, denotado por $mdc(a, b)$, se possuir as seguintes propriedades:*

i) $d|a$ e $d|b$;

ii) Se $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

Ou seja, dizemos que o MDC entre dois inteiros a e b é o maior inteiro d que divide a e que divide b. Para Santos (2010), "a caracterização do máximo divisor comum dada pela definição anterior apresenta algumas vantagens. Entre outras, é mais fácil de ser usada e simplificará algumas das demonstrações que se seguem."

Exemplo 3.10 *Vamos calcular $mdc(56, 160)$.*

Solução: Note que $8|56$ e $8|160$, ou seja, 8 é um divisor comum de 56 e 160. Assim, a condição i) está satisfeita. Agora, seja c tal que $c|56$ e $c|160$. Como $c \in A$, onde $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$ implica que $c|8$ para qualquer $c \in A$. Ou seja, a condição ii) está satisfeita. Assim, o $mdc(56, 160) = 8$.

Observação 3.2 *De forma prática, um modo de calcular o MDC de a e b é considerar os divisores comuns aos dois números e selecionar o maior deles.*

A seguir, ilustramos o cálculo do MDC entre dois números inteiros relativamente pequenos através de um exemplo.

Exemplo 3.11 *Consideremos os inteiros 56 e 160. Ambos têm como divisores comuns*

$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, *sendo que 8 é o maior deles. Assim, o* $mdc(56, 160)$ *= 8.*

Uma outra forma de calcular o mesmo mdc é listar todos os divisores positivos de 56 e de 160 e selecionar o maior número em comum aos dois conjuntos. Note que

$$D(56) = \{1, 2, 4, 8, 28, 56\}$$
$$D(160) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}.$$

Assim, vemos que $mdc(56, 160)$ *= 8. Tal método é o primeiro contato que os alunos do Ensino Básico tem com o cálculo de MDC.*

Observação 3.3 *Podemos calcular o MDC entre dois ou mais números inteiros usando o método da fatoração simultânea, que consiste em decompor os números em fatores primos e o produto dos divisores comuns aos números dados é exatamente o MDC procurado. Tal método se justifica pelo Teorema Fundamental da Aritmética e é bastante utilizado no Ensino Básico.*

Observação 3.4 *Se a é um número inteiro, não é difícil ver que*

$$mdc(0, a) = |a|$$
$$mdc(1, a) = 1$$
$$mdc(a, a) = |a|.$$

Observação 3.5 *Note que* $mdc(a, b) = mdc(b, a)$*, ou seja, o mdc de a e b não depende da ordem em que eles são tomados.*

Observação 3.6 *Dados a,* $b \in \mathbb{Z}$*, se existir o* $mdc(a, b)$ *de a e b, então*

$$(a, b) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b).$$

Assim, para efeito de cálculo do MDC de dois números, podemos sempre supô-los não negativos.

Exemplo 3.12 *Sejam os números inteiros a = 25 e b = 35. Os divisores comuns de 25 e 35 são 1 e 5, e como o maior deles é o 5, temos que o mdc(25, 35) = 5. Assim, observamos que:*

$$mdc(25, 35) = mdc(-25, 35) = mdc(25, -35) = mdc(-25, -35) = 5.$$

Definição 3.5 *Dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos são primos entre si se, e somente se, o $mdc(a, b) = 1$, ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é 1.*

Vejamos um exemplo que sucede imediatamente da Definição 3.5.

Exemplo 3.13 *Os números inteiros:* 3 *e* 11*;* 17 *e* 30*;* -18 *e* 25*, são primos entre si, pois temos que*

$$mdc(3, 11) = mdc(17, 30) = mdc(-18, 25) = 1.$$

Vejamos um lema importante usado na demonstração do Algoritmo de Euclides.

Lema 3.1 *(Lema de Euclides) Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$ e $a = bq + r$ com q, $r \in \mathbb{Z}$ então*

$$mdc(a, b) = mdc(b, r).$$

Demonstração: De $a = bq + r$, concluímos que todo divisor de b e r é divisor de a e que $r = a - bq$, ou seja, todo divisor de a e b é divisor de r. Logo, o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e r, o que garante o resultado. ■

Hefez (2016), afirma que o Lema 3.1 "é efetivo para calcular MDC e é fundamental para estabelecer o Algoritmo de Euclides, que permitirá, com muita eficácia, calcular o MDC de dois números naturais quaisquer."

Exemplo 3.14 *Calcule, usando o Lema de Euclides, o valor de mdc(56,160).*
Solução: *Temos que*

$$\begin{aligned} mdc(56, 160) &= mdc(56, 160 - 2 \cdot 56) \\ &= mdc(56, 48) = mdc(48, 56 - 1 \cdot 48) \\ &= mdc(48, 8) = mdc(8, 48 - 6 \cdot 8) = mdc(8, 0) = 8. \end{aligned}$$

Ainda, de acordo com Hefez, temos a seguir a prova construtiva da existência do MDC dada por Euclides. O autor afirma "ainda que tal algoritmo é um primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios."

Teorema 3.2 *(Algoritmo de Euclides) Dados a e b números naturais, se o Lema de Euclides for aplicado sucessivamente, então o último resto não nulo r_n, satisfaz a seguinte igualdade $mdc(a, b) = r_n$.*
Demonstração: Dados a, $b \in \mathbb{N}$, podemos supor $b \leq a$. Se $b = 1$ ou $b = a$, ou ainda

$b|a$, temos que $\text{mdc}(a, b) = a$. Suponhamos, então, que $1 < b < a$ e que $b \nmid a$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever:

$$a = bq_1 + r_1, \quad com \quad 0 < r_1 < b.$$

Temos duas possibilidades:
a) $r_1 \mid b$: Em tal caso, pela definição de $\text{mdc}(a, b)$ e o Lema de Euclides temos que

$$r_1 = mdc(b, r_1) = mdc(b, a - q_1 \cdot b) = mdc(b, a) = mdc(a, b),$$

e termina o algoritmo, ou

b) $r_1 \nmid b$: Nesse caso, podemos efetuar divisão de b por r_1, obtendo

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, temos duas possibilidades:
a') $r_2 \mid r_1$: Nesse caso, novamente pela definição de mdc(a,b) e pelo Lema de Euclides, temos

$$r_2 = mdc(r_1, r_2) = mdc(r_1, b - q_2 r_1) = mdc(r_1, b) = mdc(a - q_1 b, b) = mdc(a, b)$$

e paramos, pois, termina o algoritmo.
b') $r_2 \nmid r_1$: Nesse caso, podemos efetuar divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Continuamos esse procedimento até que pare. Isso sempre ocorre, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 > \ldots$ que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Axioma 3.1 (Princípio da Boa Ordem). Logo, para algum n, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, o que implica que $mdc(a, b) = r_n$. ■

Temos abaixo um dispositivo prático onde aparecem os números a e b, os quocientes e restos das divisões sucessivas que são feitas até encontrar o r_n.

Figura 5 – Dispositivo prático do Algoritmo de Euclides.

	q_1	q_2	q_3	...	...	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n = mdc
r_1	r_2	r_3	...	...	r_n	0	

Fonte: Adaptado de Hefez (2016).

Mostramos, nos dois próximos exemplos, a aplicação do Algoritmo de Euclides.

Exemplo 3.15 *Calcule, usando o Algoritmo de Euclides, o* $mdc(372, 162)$.

Solução: Note que

$$\begin{aligned} 372 &= 162 \cdot 2 + 48 \\ 162 &= 48 \cdot 3 + 18 \\ 48 &= 18 \cdot 2 + 12 \\ 18 &= 12 \cdot 1 + 6 \\ 12 &= 6 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Logo, mdc(372, 162) $= 6$.

De maneira alternativa podemos utilizar o dispositivo prático para calcular o $mdc(372, 162)$.

Figura 6 – Cálculo do $mdc(372, 162)$.

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6 = mdc
48	18	12	6	0	

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Exemplo 3.16 *Encontrar, pelo Algoritmo de Euclides, o* $mdc(-75, 12)$.

Solução: Note, inicialmente, que $mdc(-75, 12) = mdc(75, 12)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} 75 &= 12 \cdot 6 + 3 \\ 12 &= 3 \cdot 4 + 0. \end{aligned}$$

Logo, mdc $(-75, 12) = 3$.

De maneira alternativa podemos utilizar o dispositivo prático para calcular o mdc $(-75, 12)$.

Figura 7 – Cálculo do $mdc(-75, 12)$.

	6	4
75	12	3 = mdc
3	0	

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Temos, a seguir, um teorema que nos dá uma outra demonstração da existência do MDC de dois números inteiros. Ressaltamos que tal teorema não fornece um método para que o MDC seja calculado.

Teorema 3.3 *(Teorema de Bézout) Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$. Então existem m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$d = mdc(a, b) = ma + nb.$$

Demonstração: Seja B o conjunto de todas as combinações lineares $xa + yb$, com x, y $\in \mathbb{Z}$. Claramente, este conjunto contém números negativos, positivos e também o zero. Vamos escolher m e n tais que $c = ma + nb$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto B. Provaremos, por contradição, que $c|a$ e $c|b$. Supondo que $c \nmid a$, então, pela Divisão Euclidiana, existem q e r tais que

$$a = qc + r, \text{ com } 0 < r < c.$$

Portanto, $r = a - qc = a$ - $q \cdot (ma + nb) = (1$ - $qm) \cdot a + (-qn) \cdot b$. Isto mostra que $r \in B$, pois $(1 - qm)$ e $(-qn)$ são inteiros, o que é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ e, por hipótese, c é o menor elemento positivo de B. Logo $c|a$ e de forma análoga se prova que $c|b$.

Como d é o máximo divisor comum de a e b, então existem q_1, $q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = q_1 d \quad e \quad b = q_2 d$$

e, portanto,

$$c = ma + nb = m \cdot q_1 d + n \cdot q_2 d = d \cdot (mq_1 + nq_2),$$

o que implica $d|c$, pois $(mq_1 + nq_2) \in \mathbb{Z}$. Logo, pela proposição 3.4, $d \leq c$ (ambos são positivos), e como $d < c$ não é possível, uma vez que d é o máximo divisor comum, segue que $c = d = ma + nb$. ■

Na demonstração deste teorema mostramos, não apenas que o máximo divisor comum de a e de b pode ser expresso como combinação linear desses números, mas que este número é o menor valor positivo dentre todas estas combinações lineares.

Exemplo 3.17 *Calcule o mdc*$(202, 3)$ *e em seguida encontre números inteiros x e y, tais que* $202x + 3y = mdc(202, 3)$.

Solução: Temos inicialmente, pelo Algoritmo de Euclides, que:

$$202 = 3 \cdot 67 + 1$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

Logo, mdc $(202, 3) = 1$. Assim, podemos escrever $1 = 202x + 3y$ com x, $y \in \mathbb{Z}$. Por inspeção, temos que $1 = 202 \cdot (1) + 3 \cdot (-67)$, logo $x = 1$ e $y = -67$.

Note que, no último exemplo, descobrimos os valores x e y por inspeção. Posteriormente, veremos um método mais eficiente para encontrar tais valores.

Observação 3.7 *Vale destacar que, para o Teorema de Bézout, apenas a ida é válida. Assim, podem existir $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $ma + nb = d$, onde $d \neq mdc(a,\ b)$. Ilustramos essa ideia por meio dos dois exemplos a seguir.*

Exemplo 3.18 *Note que a equação $2m+4n = 8$ é satisfeita, por exemplo, quando $m = 2$ e $n = 1$, mas $8 \neq mdc(2, 4)$.*

Exemplo 3.19 *Note que a equação $5m+3n = 36$ é satisfeita, por exemplo, quando $m = 6$ e $n = 2$, mas $36 \neq mdc\ (5, 3)$.*

Corolário 3.2 *Dados a, b e t números inteiros, tem-se que*

$$mdc(ta, tb) = |t| \cdot mdc(a, b).$$

Demonstração: Analisemos os casos:

- $t > 0$: Pelo Teorema de Bézout, mdc(ta, tb) é o menor valor positivo de

  $$m \cdot (ta) + n \cdot (tb),$$

  (m e n inteiros), que é igual a t vezes o menor valor positivo de

  $$ma + nb = t \cdot mdc(a, b) = |t| \cdot mdc(a, b).$$

- $t < 0$: Neste caso temos que $-t > 0$, o que implica em $|t| = -t$. Como vimos no caso anterior, o mdc(ta, tb) é o menor valor positivo de

  $$m \cdot (-ta) + n \cdot (-tb),$$

  (m e n inteiros), que é igual a $-t$ vezes o menor valor positivo de

  $$ma + nb = -t \cdot mdc(a, b) = |t| \cdot mdc(a, b).$$

■

Corolário 3.3 *Dados a, $b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, com $d = mdc(a, b)$ tem-se que*

$$mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

Demonstração: Pelo Corolário 3.2, temos que

$$d \cdot mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = mdc\left(d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}\right) = mdc(a, b) = d,$$

que implica em

$$mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

■

Teorema 3.4 *Dois números inteiros a e b, são primos entre si, e somente se, existem x e y números inteiros tais que $ax + by = 1$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Suponha que a e b são primos entre si, então o $\text{mdc}(a, b) = 1$. Pelo Teorema de Bézout existem números inteiros x e y tais que $ax + by = \text{mdc}(a, b) = 1$.
$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que existam números inteiros x e y tais que

$$ax + by = 1.$$

Se $\text{mdc}(a, b) = d$, então $d|a$ e $d|b$. Logo,

$$d|(ax + by), \text{ isto é, } d|1$$

que implica em

$$0 < d \leq 1 \Rightarrow d = 1,$$

ou seja, $\text{mdc}(a, b) = 1$, isto é, a e b são primos entre si. ■

Teorema 3.5 *(Euclides) Sejam a, b, c números inteiros. Se $a|bc$ e $mdc(a, b) = 1$, então $a|c$.*

Demonstração: Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, então pelo Teorema 3.4, existem x, $y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$xa + yb = 1.$$

Multiplicando os dois lados dessa última equação por c segue que

$$x \cdot (ac) + y \cdot (bc) = c.$$

Como $a|ac$ e, por hipótese, $a|bc$, então, pela Proposição 3.3,

$$a|(x \cdot (ac) + y \cdot (bc)),$$

ou seja, $a|c$. ■

3.3 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Vejamos, inicialmente, um pouco sobre a história de Diofanto e, em seguida, introduzimos as Equações Diofantinas Lineares, onde apresentamos sua definição e resultados importantes para a sua resolução.

3.3.1 Diofanto de Alexandria

Pouco sabemos sobre a vida de Diofanto e esta incerteza é tão grande que não se sabe exatamente em que século viveu. No entanto, segundo Eves (2011), a maioria dos historiadores acredita que ele viveu por volta do século III d.C. e que sua carreira se desenvolveu na cidade grega de Alexandria, ficando conhecido, então, como Diofanto de Alexandria.

Abaixo temos um relato sobre Diofanto, retirado de uma coleção de problemas chamada "Antologia Grega", como descrito a seguir:

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de consolar sua dor com a ciência dos números por quatro anos, ele terminou sua vida (Cohen e Drabkin, 1958, p.2, apud Boyer, 2012 pág.133).

A equação que resolve tal enigma é:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Assim, de acordo com o enigma acima e resolvendo a equação, Diofanto viveu oitenta e quatro anos.

Em sua obra Arithmetica, Diofanto é reconhecido por introduzir uma linguagem diferente da que era usada pelos gregos que o antecederam na resolução de equações. Neste sentido, Boyer afirma que

> A Arithmetica de Diofanto era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e de engenho. Neste aspecto, o livro pode ser comparado aos grandes clássicos da Idade Alexandrina anterior; no entanto, quase nada tem em comum com esses ou, na verdade, com

> qualquer matemática grega tradicional. Representa essencialmente um novo ramo e usa uma abordagem diferente (Boyer, 2012, pág.134).

De acordo com Eves (2011), Diofanto se interessava apenas por respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema. Eves também cita que em Arithmetica, o primeiro livro de seis livros se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais, em sua maioria, de equações indeterminadas de segundo grau e assim, os problemas algébricos indeterminados em que se devem achar apenas as soluções racionais tornaram-se conhecidos como problemas diofantinos. No entanto, o uso atual dessa terminologia muitas vezes impõe a restrição de que as soluções sejam inteiras.

3.3.2 Equações Diofantinas Lineares

As Equações Diofantinas Lineares podem ser utilizadas para modelar problemas cotidianos. Definimos, a seguir, as Equações Diofantinas Lineares e resultados importantes que auxiliam na resolução de tais equações.

Definição 3.6 *Dados* a*,* b*,* $c \in \mathbb{Z}$*, chamamos de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas as equações do tipo* $aX + bY = c$*, com* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*.*

Definição 3.7 *Todo par* x*,* $y \in \mathbb{Z}$ *que substituem* X *e* Y *satisfazendo a igualdade* $aX+bY = c$ *são chamados de soluções particulares da equação.*

Exemplo 3.20 *Note que a equação* $2x + 4y = 8$ *é satisfeita, por exemplo, quando tomamos*

$$x = 4 \quad e \quad y = 0 \quad ou \quad x = 2 \quad e \quad y = 1.$$

Portanto, $(x, y) = (4, 0)$ *e* $(x, y) = (2, 1)$ *são soluções particulares da equação dada.*

Observação 3.8 *De modo geral, ao resolvermos uma equação diofantina linear buscamos todas as soluções inteiras. No entanto, em alguns casos, a depender do contexto, há restrições que permitem apenas soluções inteiras não negativas. Além disso, é importante destacar que nem sempre as equações possuem solução.*

Exemplo 3.21 *A equação* $20x + 2y = 3$*, não possui nenhuma solução* x_0*,* y_0 *nos números inteiros, pois, caso contrário, teríamos* $20 \cdot x_0 + 2 \cdot y_0$ *par e, portanto, nunca igual a* 3*, que é ímpar.*

Assim, estamos interessados em saber quando uma equação diofantina tem solução, e caso as tenha, em como determiná-las. Para resolver essas dúvidas, temos os teoremas e as proposições a seguir.

Teorema 3.6 *Dados a, b, $c \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, a equação diofantina $aX + bY = c$ admite solução se, e somente se, mdc(a, b) divide c.*

Demonstração: Suponha a existência de solução na equação, ou seja, que existam x_0, $y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Temos que $\text{mdc}(a, b)|a$ e $\text{mdc}(a, b)|b$ e, portanto, $\text{mdc}(a, b)$ divide qualquer combinação linear formada por a e b. Assim, $\text{mdc}(a, b)|(ax_0 + by_0)$, logo $\text{mdc}(a, b)|c$.

Reciprocamente, fazendo $d = \text{mdc}(a, b)$, temos, por hipótese, que $d|c$. Então, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $c = qd$. Pelo Teorema de Bézout, existem x_0, $y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax_0 + by_0 = d.$$

Multiplicando por q ambos os lados da igualdade, obtemos

$$(ax_0) \cdot q + (by_0) \cdot q = dq.$$

Portanto,

$$(ax_0) \cdot q + (by_0) \cdot q = c,$$

e assim, podemos afirmar que a equação diofantina ax + by = c admite pelo menos uma solução: $x = x_0 \cdot$ q e $y = y_0 \cdot q$. ∎

Observação 3.9 *Uma consequência deste teorema é o fato de que quando mdc$(a, b) = 1$ a equação apresentará infinitas soluções, já que 1 é divisor de qualquer número real.*

Observação 3.10 *Quando a equação diofantina linear possui solução e mdc$(a, b) \neq 1$ podemos dividir ambos os membros da igualdade por um valor conveniente de modo que mdc$(a, b) = 1$, ou seja, chamando mdc$(a, b) = d$, a equação $aX + bY = c$ pode ser reduzida para a forma*

$$\frac{aX}{d} + \frac{bY}{d} = \frac{c}{d},$$

sendo que as soluções das duas equações coincidem. Além disso, pelo Corolário 3.3, sabemos que mdc $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. Logo, é suficiente estudar as equações do tipo $\tilde{a}X + \tilde{b}Y = \tilde{c}$, com mdc$(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ onde $\tilde{a} = \frac{a}{d}$, $\tilde{b} = \frac{b}{d}$ e $\tilde{c} = \frac{c}{d}$.

Proposição 3.6 *Seja x_0, y_0 uma solução particular da equação $aX + bY = c$, onde $mdc(a, b) = 1$. Então todas as soluções inteiras x, y da equação são da seguinte forma:*

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at, \text{ onde } t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Seja x, y uma solução da equação $aX + bY = c$. Assim,

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c.$$

Portanto,

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y). \tag{2}$$

Da última equação, temos que

$$b|a(x - x_0).$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue, pelo Teorema 3.5, que $b|(x - x_0)$. Logo, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x - x_0 = bt,$$

ou seja,

$$x = x_0 + bt, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo $(x - x_0)$ por bt em (2), obtém-se

$$y_0 - y = at, \quad \text{ou seja,} \quad y = y_0 - at.$$

Por outro lado, x, y como no enunciado, é solução, pois

$$ax + by = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 = c,$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 3.11 *O número inteiro t é também chamado de parâmetro, sendo que para cada valor de t, tem-se uma solução distinta para a equação diofantina.*

Vejamos aplicações da Proposição 3.6.

Exemplo 3.22 *Resolva a equação diofantina $2x + 15y = 60$.*

Solução: Como o $mdc(2, 15) = 1$ e $1|60$, temos que a equação acima admite solução. Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $2 \cdot m + 15 \cdot n = 1$. Pelo Algoritmo de

Euclides, temos

$$15 = 2 \cdot 7 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= 15 - 2 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot (-7) + 15 \cdot 1. \end{aligned}$$

Logo, $m = -7$ e $n = 1$. Multiplicando ambos os lados de $2 \cdot (-7) + 15 \cdot 1 = 1$ por 60, segue que $2 \cdot (-420) + 15 \cdot 60 = 60$ isto é, $x_0 = -420$ e $y_0 = 60$ é uma solução de $2x + 15y = 60$. Portanto, a solução geral da equação diofantina é dada por

$$x = -420 + 15t \quad \text{e} \quad y = 60 - 2t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso, as outras soluções são determinadas pelo parâmetro t.

Exemplo 3.23 *Resolva a equação diofantina* $22x + 60y = 40$.

Solução: Como o $mdc(22, 60) = 2$ e $2|40$, temos que a equação acima admite solução. Assim, podemos simplificar a equação para a forma $11x+30y = 20$, onde $mdc(11, 30) = 1$. Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $11 \cdot m + 30 \cdot n = 1$. Pelo Algoritmo de Euclides, temos

$$\begin{aligned} 30 &= 11 \cdot 2 + 8 \\ 11 &= 8 \cdot 1 + 3 \\ 8 &= 3 \cdot 2 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (8 - 3 \cdot 2) \\ &= 3 \cdot 3 - 8 \\ &= 3 \cdot (11 - 8 \cdot 1) - 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4 \cdot (30 - 11 \cdot 2) \\ &= 11 \cdot 11 + 30 \cdot (-4). \end{aligned}$$

Logo, $m = 11$ e $n = -4$. Multiplicando ambos os lados de $11 \cdot 11 + 30 \cdot (-4) = 1$ por 20, segue que $11 \cdot 220 + 30 \cdot (-80) = 20$ isto é, $x_0 = 220$ e $y_0 = -80$ é uma solução de $11x + 30y = 20$. Portanto, pela Observação 3.10, a solução geral da equação diofantina é dada por

$$x = 220 + 30t \quad \text{e} \quad y = -80 - 11t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso, as outras soluções são determinadas pelo parâmetro t.

Observação 3.12 *Generalizando o resultado da Proposição 3.6, temos:*
Considerando a equação diofantina linear $ax + by = c$ tal que $d = mdc(a, b)$ divide c e escrevendo d na forma $d = ma + nb$, com m, $n \in \mathbb{Z}$, temos que toda solução é da forma

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t, \quad \textit{onde} \quad t \in \mathbb{Z}$$

e $x_0 = m \cdot \frac{c}{d}$, $y_0 = n \cdot \frac{c}{d}$. Assim, fazendo $d = 1$ retornamos à equação da Proposição 3.6. Reciprocamente, para todo $t \in \mathbb{Z}$ os valores x e y dados pelas fórmulas acima são soluções da equação. Para demonstração e mais detalhes deste resultado ver Milies (2001).

Vejamos uma aplicação direta da Observação 3.12.

Exemplo 3.24 *Resolva a equação diofantina* $56x + 72y = 40$.

Solução: Como o $mdc(56, 72) = 8$ e $8|40$, temos que a equação acima admite solução. Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $56 \cdot m + 72 \cdot n = 8$. Pelo Algoritmo de Euclides, temos

$$\begin{aligned} 72 &= 56 \cdot 1 + 16 \\ 56 &= 16 \cdot 3 + 8. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 8 &= 56 - (16 \cdot 3) \\ &= 56 - (72 - 56) \cdot 3 \\ &= 56 - 3 \cdot 72 + 3 \cdot 56 \\ &= 56 \cdot 4 - 72 \cdot 3 \\ &= 56 \cdot 4 + 72 \cdot (-3). \end{aligned}$$

Logo, $m = 4$ e $n = -3$. Multiplicando por $\frac{40}{8} = 5$, temos uma solução particular: $x_0 = 20$ e $y_0 = -15$. Calculando $\frac{56}{8} = 7$ e $\frac{72}{8} = 9$, temos que toda outra solução é da forma

$$x = 20 + 9t \quad \text{e} \quad y = -15 - 7t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Em muitas situações, apenas as soluções inteiras não negativas de uma equação diofantina são de interesse, ou seja, soluções x e y sendo números inteiros, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Veremos isto nos próximos exemplos.

Exemplo 3.25 *É possível comprar selos de R\$ 3,00 e R\$ 12,00 dispondo de R\$ 135,00 sem que haja troco? Se for possível, quantas são as maneiras de se comprar os selos?*

Solução: Para resolver o problema, sejam x o número de selos de R\$ 3,00 e y o número de selos de R\$ $12,00$. Assim, temos a equação diofantina

$$3x + 12y = 135.$$

Como o $\text{mdc}(3, 12) = 3$ e $3|135$, temos que a equação possui solução e dividindo a equação por 3 obtemos

$$x + 4y = 45.$$

Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $1 \cdot m + 4 \cdot n = 1$. Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$4 = 4 \cdot 1 + 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + 4 &= 4 \cdot 1 + 1 \\ 1 &= 1 + 4 - 4 \cdot 1 \\ 1 &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot \{1 + (-1)\} \\ 1 &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0. \end{aligned}$$

Logo, temos que $m = 1$ e $n = 0$ é uma solução de $1 \cdot m + 4 \cdot n = 1$. Assim, multiplicando ambos os lados de $1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1$ por 45, segue que

$$1 \cdot 45 + 4 \cdot 0 = 45.$$

Isto é, $x_0 = 45$ e $y_0 = 0$ é uma solução de $x + 4y = 45$. Portanto, a solução geral da equação diofantina é dada por

$$x = 45 + 4t, y = 0 - t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$x = 45 + 4t, y = -t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para todas as soluções do problema, devemos ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então devemos ter

$$45 + 4t \geq 0 \quad \text{e} \quad -t \geq 0,$$

o que implica em

$$t \geq -11,25 \quad \text{e} \quad t \leq 0.$$

Logo,

$$-11,25 \leq t \leq 0, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, para cada valor de t inteiro no intervalo acima, obtemos valores para x e y que são soluções inteiras não negativas e estão discriminadas na Tabela 7, abaixo:

Tabela 7 – Soluções da equação $3x + 12y = 135$.

t	x	y
0	45	0
-1	41	1
-2	37	2
-3	33	3
-4	29	4
-5	25	5
-6	21	6
-7	17	7
-8	13	8
-9	9	9
-10	5	10
-11	1	11

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Logo, temos 12 maneiras de comprar os selos sem que haja troco.

Exemplo 3.26 *Uma padaria vende bolos de R\$ 12,00 e R\$ 16,00. Dispondo de R\$ 200,00 quantas são as maneiras de se comprar os bolos, sem que haja troco?*

Solução: Para resolver o problema, sejam x o número de bolos de R\$ 12,00 e y o número de bolos de R\$ $16,00$. Assim, temos a equação diofantina

$$12x + 16y = 200.$$

Como o $\text{mdc}(12, 16) = 4$ e $4|200$, temos que a equação possui solução e dividindo a equação por 4 obtemos

$$3x + 4y = 50.$$

Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $3 \cdot m + 4 \cdot n = 1$. Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$4 = 3 \cdot 1 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\ 1 &= 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1. \end{aligned}$$

Logo, temos que $m = -1$ e $n = 1$ é uma solução de $3 \cdot m + 4 \cdot n = 1$. Assim, multiplicando ambos os lados de $3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 1$ por 50, segue que

$$3 \cdot (-50) + 4 \cdot 50 = 50.$$

Isto é, $x_0 = -50$ e $y_0 = 50$ é uma solução de $3x + 4y = 50$. Portanto, a solução geral da equação diofantina é dada por

$$x = -50 + 4t, y = 50 - 3t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para todas as soluções do problema, devemos ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então devemos ter

$$-50 + 4t \geq 0 \quad \text{e} \quad 50 - 3t \geq 0,$$

o que implica em

$$t \geq 12,5 \quad \text{e} \quad t \leq 16,6.$$

Logo,

$$12,5 \leq t \leq 16,6, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, para cada valor de t inteiro no intervalo acima, obtemos valores para x e y que são soluções inteiras não negativas e estão discriminadas na Tabela 8, abaixo:

Tabela 8 – Soluções da equação $12x + 16y = 200$.

t	x	y
13	2	11
14	6	8
15	10	5
16	14	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Logo, temos 4 maneiras de comprar os bolos sem que haja troco.

Exemplo 3.27 *Maria deu R$ 100,00 a sua filha para ela comprar figurinhas da Copa do Mundo de futebol feminino. Sabendo que as figurinhas são vendidas em envelopes que custam R$ 2,00 e R$ 5,00 e que o dinheiro deve ser gasto totalmente, quantos envelopes de cada tipo podem ser comprados?*

Solução: Para resolver o problema, sejam x o número de envelopes de R$ 2,00 e y o número de envelopes de R$ 5,00. Assim, temos a equação diofantina

$$2x + 5y = 100.$$

Como o $\text{mdc}(2, 5) = 1$ e $1|100$, temos que a equação possui solução.

Logo, devemos determinar $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $2 \cdot m + 5 \cdot n = 1$. Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1. \end{aligned}$$

Logo, $m = -2$ e $n = 1$. Multiplicando ambos os lados de $2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 1$ por 100, segue que

$$2 \cdot (-200) + 5 \cdot (100) = 100.$$

Isto é, $x_0 = -200$ e $y_0 = 100$ é uma solução de $2x + 5y = 100$. Portanto, a solução geral da equação diofantina é dada por

$$x = -200 + 5t \quad \text{e} \quad y = 100 - 2t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para todas as soluções do problema, devemos ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então devemos ter

$$-200 + 5t \geq 0 \quad \text{e} \quad 100 - 2t \geq 0$$

o que implica em

$$t \geq 40 \quad \text{e} \quad t \leq 50.$$

Logo,

$$40 \leq t \leq 50, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, para cada valor de t inteiro no intervalo acima, obtemos valores para x e y que são soluções inteiras não negativas e estão discriminadas na Tabela 9, abaixo:

Tabela 9 – Soluções da equação $2x + 5y = 100$.

t	x	y
40	0	20
41	5	18
42	10	16
43	15	14
44	20	12
45	25	10
46	30	8
47	35	6
48	40	4
49	45	2
50	50	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Logo, temos 11 maneiras de comprar os envelopes nas condições dadas.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, primeiramente, descrevemos o ambiente escolar onde as atividades foram desenvolvidas citando desde os aspectos físicos da escola até os aspectos profissionais e o corpo discente. Depois, apresentamos detalhes das etapas da Sequência Didática aplicada a dois grupos de alunos: um grupo de 1° ano (16 estudantes) e outro de 3° ano (11 estudantes), ambos do Ensino Médio. As etapas foram Avaliação Diagnóstica, Revisão de assuntos básicos, Jogo Equacione, Introdução às Equações Diofantinas Lineares, Jogo Aritmetik, Avaliação Final e Formulário de Satisfação.

4.1 O AMBIENTE DA AÇÃO

As atividades foram desenvolvidas na escola EEMTI Adahil Barreto Cavalcante, localizada na Avenida Vereador Edimilson Marques s/n - Conjunto Timbó – Maracanaú/Ce. Foi construída em 1982 e autorizada por decreto governamental no dia 27 de abril de 1983, ano que iniciou suas atividades letivas.

Em 2020, todas as turmas passaram a funcionar em período integral, ou seja, os estudantes permanecem das 7 : 00 hs às 16 : 40 hs na escola[1] , totalizando 9 horas/aula. Neste formato, são servidos aos alunos um lanche pela manhã, um almoço e um lanche à tarde.

Em 2023, sob a direção da Professora Sheila Pinto Lopes Linhares, a escola possui matrícula de 570 alunos distribuídos nas três séries do Ensino Médio, onde a maioria deles são residentes no Conjunto Timbó, bairro em que a escola se localiza, e em bairros vizinhos.

4.1.1 Aspectos Físicos da Escola

A escola conta com 33 dependências, distribuídas em 3 blocos:

- Bloco 01: 01 sala de direção, 01 sala de coordenação, 01 sala dos professores com banheiro masculino e feminino, 01 sala de apoio aos professores, 01 secretaria e 01 sala de multimeios.
- Bloco 02: 08 salas de aula, 01 Laboratório de informática, 02 banheiros para alunos (masculino e feminino), 01 banheiro para cadeirante e 01 pátio interno.
- Bloco 03: 04 salas de aulas[2] , 01 laboratório de ciências, 01 sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE), 01 almoxarifado, 01 cozinha, 02 dispensas para

[1]Durante a pandemia de COVID-19, as aulas ocorreram de forma remota (2020) e híbrida (2021) e, assim, os horários de permanência dos alunos na escola sofreram alterações. A partir de 2022, esses horários foram normalizados.

[2]Durante a execução deste trabalho, duas salas de aulas deste bloco passaram por reformas para ampliação do número de salas na escola. Esta reforma iniciou-se na segunda semana de fevereiro e alterou a logística de aplicação planejada inicialmente.

condicionar merenda escolar, 01 pátio interno para o intervalo, 01 quadra coberta e 02 salas/depósitos.

4.1.2 Clientela Escolar

A EEMTI Adahil Barreto Cavalcante atende alunos oriundos das escolas públicas municipais e escolas particulares mais próximas. Tais alunos são, em grande parte, de baixa renda, sendo filhos de operários, pequenos comerciantes e trabalhadores autônomos e vale destacar que a clientela escolar vive em uma comunidade que não tem muitas oportunidades de lazer e espaços saudáveis. Ressaltamos que vários alunos são provenientes de famílias desestruturadas e economicamente vulneráveis, motivos que contribuem com à evasão e à repetência escolar, comprometendo a qualidade do trabalho pedagógico.

4.2 AS ETAPAS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos, a seguir, como foi a aplicação das etapas da Sequência Didática citadas no início deste capítulo. Ressaltamos que antes de iniciarmos a aplicação de tais etapas, foi explicado aos estudantes que o presente trabalho fazia parte de uma dissertação do mestrado PROFMAT. As turmas em que houve o convite para participar foram 1° A, 1° B, 1° C, 1° D e 3° A. A quantidade de alunos de cada turma que aceitou o convite se encontra na Tabela 10:

Tabela 10 – Quantidade de alunos que aceitou participar da Sequência Didática.

Turma	**Número de alunos**
1° A	3
1° B	8
1° C	4
1° D	1
3° A	11

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Assim, surgiram os grupos citados no início do capítulo, um de 1° ano (16 estudantes) e outro de 3° ano (11 estudantes) que chamaremos, respectivamente, de Grupo 1 e Grupo 2. A partir daí, as mesmas etapas foram desenvolvidas com tais grupos, mas, obviamente, cada grupo obteve resultados diferentes, como descreveremos adiante.

4.2.1 Avaliação Diagnóstica

Durante a aplicação desta avaliação (ver Apêndice A) percebeu-se um maior desconforto no Grupo 1. Acreditamos que o Grupo 2, por ter um pouco mais de experiência e maturidade na disciplina obteve um desempenho mais satisfatório. Alunos de ambos os grupos relataram que não lembravam como calcular o MDC entre dois números inteiros. A seguir, apresentamos dados relativos ao desempenho dos alunos dos grupos 1 e 2 na Avaliação Diagnóstica.

Figura 8 – Alunos realizando a Avaliação Diagnóstica (à esquerda está o Grupo 1 e à direita está o Grupo 2).

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 11 – Percentual de alunos do Grupo 1 que deixaram questão em branco e aqueles que registraram alguma solução.

QUESTÃO/ASSUNTO		DEIXOU EM BRANCO	REGISTROU SOLUÇÃO
1	Múltiplos	12,50%	87,50%
	Divisores	6,25%	93,75%
2	Restos	0,00%	100,00%
3	MMC	12,50%	87,50%
	MDC	75,00%	25,00%
4	Montar equação	31,25%	68,75%
5	Resolver problema usando equação	25,00%	75,00%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 12 – Percentual de alunos do Grupo 1 que, dentre os que registraram alguma solução, acertaram totalmente, acertaram parcialmente ou erraram as questões.

QUESTÃO/ASSUNTO		ACERTOU TOTALMENTE	ACERTOU PARCIALMENTE	ERROU
1	Múltiplos	7,14%	35,71%	57,15%
	Divisores	6,66%	53,34%	40,00%
2	Restos	56,25%	37,50%	6,25%
3	MMC	14,29%	21,42%	64,29%
	MDC	25,00%	25,00%	50,00%
4	Montar equação	18,18%	9,09%	72,73%
5	Resolver problema usando equação	16,67%	8,33%	75,00%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 13 – Percentual de alunos do Grupo 2 que deixaram questão em branco e aqueles que registraram alguma solução.

QUESTÃO/ASSUNTO		DEIXOU EM BRANCO	REGISTROU SOLUÇÃO
1	Múltiplos	0,00%	100,00%
	Divisores	0,00%	100,00%
2	Restos	0,00%	100,00%
3	MMC	0,00%	100,00%
	MDC	54,55%	45,45%
4	Montar equação	18,19%	81,81%
5	Resolver problema usando equação	18,19%	81,81%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 14 – Percentual de alunos do Grupo 2 que, dentre os que registraram alguma solução, acertaram totalmente, acertaram parcialmente ou erraram as questões.

QUESTÃO/ASSUNTO		ACERTOU TOTALMENTE	ACERTOU PARCIALMENTE	ERROU
1	Múltiplos	36,36%	63,64%	0,00%
	Divisores	27,27%	63,64%	9,09%
2	Restos	100,00%	0,00%	0,00%
3	MMC	81,81%	18,19%	0,00%
	MDC	80,00%	20,00%	0,00%
4	Montar equação	44,44%	0,00%	55,56%
5	Resolver problema usando equação	66,67%	0,00%	33,33%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

De fato, quando observamos a Tabela 11 e a Tabela 13 vemos que 75% dos alunos do Grupo 1 deixaram a questão sobre MDC em branco, enquanto 54,55% dos alunos do Grupo 2 fizeram o mesmo, ou seja, das questões avaliadas, o assunto MDC foi aquele que os estudantes obtiveram o menor desempenho.

Outro assunto que merece atenção é o de equações do primeiro grau que foi cobrado nas questões 4 e 5, pois tal tópico é crucial quando trabalhamos com problemas envolvendo equações diofantinas lineares aplicadas no cotidiano. Note que, no Grupo 1, o registro de alguma solução foi de 68,75% e 75,00% nas questões 4 e 5, respectivamente, sendo que 72,73% e 75,00% destes registros estavam errados. Já no Grupo 2, o registro de alguma solução foi de 81,81% tanto na questão 4 quanto na questão 5, sendo que 55,56% e 33,33% destes registros estavam errados. Consideramos estas taxas de erro altas, dada a simplicidade das questões propostas.

Diante deste contexto, justificamos a execução da próxima etapa da Sequência Didática, que se trata de uma revisão sobre os assuntos básicos abordados na Avaliação Diagnóstica.

4.2.2 Revisão de assuntos básicos

Nesta etapa, fizemos uma revisão sobre os assuntos abordados na Avaliação Diagnóstica, que foram: múltiplos e divisores de um número, Algoritmo da Divisão, MMC e MDC de números naturais e resolver problemas envolvendo equações do 1° grau (ver Material de Revisão – Apêndice B). Julgamos esta etapa essencial no trabalho, uma vez que o aprendizado dos estudantes estava claramente comprometido em relação aos assuntos revisados. Durante a revisão, percebemos que, de modo geral, os alunos do Grupo 1 tiveram mais dificuldade que os alunos do Grupo 2.

Figura 9 – Alunos na aula de revisão sobre assuntos básicos (à esquerda está o Grupo 1 e à direita está o Grupo 2).

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

4.2.3 Jogo Equacione

A terceira etapa foi a utilização de um jogo de tabuleiro, chamado de Equacione, que abordava a resolução de equações diofantinas lineares pelos alunos (para regras do Jogo Equacione ver Apêndice C). Como eles não tinham conhecimento de como resolver tais equações usando algoritmos, então esperávamos que eles usassem o método de tentativa e erro para chegar às soluções e foi o que justamente aconteceu. Ressaltamos que cada um dos grupos teve a oportunidade de jogar quatro partidas e que nas duas últimas os alunos sugeriram mudança em uma das regras. A mudança se referiu a regra que determinava a posse de uma carta por parte das equipes durante toda a partida. Os alunos sugeriram que houvesse uma troca constante de cartas pelas equipes. Em todo caso, destacamos que os alunos participaram empolgados dos jogos e, inclusive, manifestaram interesse de jogar além do tempo que tínhamos disponível. A seguir, temos imagens dos alunos praticando o Jogo Equacione:

Figura 10 – Grupo 1 praticando o Jogo Equacione.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 11 – Grupo 2 praticando o Jogo Equacione.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

4.2.4 Introdução às Equações Diofantinas Lineares

Nesta etapa, foi ministrado aos alunos o assunto Equações Diofantinas Lineares usando como referência o material apresentado no Apêndice D. Como os estudantes já haviam passado pela segunda etapa (revisão de assuntos básicos) então eles não apresentaram grandes dificuldades com o conteúdo desta quarta etapa. Percebemos que os alunos atingiram um certo grau de entendimento sobre as Equações Diofantinas, mas constatamos que seria necessário mais tempo para que os estudantes se apropriassem efetivamente do conteúdo trabalhado, conforme veremos na análise dos resultados da Avaliação Final. A seguir, temos imagens dos alunos na aula sobre Equações Diofantinas Lineares:

Figura 12 – Grupo 1 na aula sobre Equações Diofantinas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 13 – Grupo 2 na aula sobre Equações Diofantinas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

4.2.5 Jogo Aritmetik

Nesta etapa aplicamos um outro jogo de tabuleiro chamado de Aritmetik, semelhante àquele aplicado na 3^a etapa (para regras do Jogo Aritmetik ver Apêndice E). Desta vez, o jogo abordou a montagem e resolução de equações diofantinas lineares e, além disso, havia perguntas sobre divisibilidade, números primos e MDC, ou seja, foi abordado o conteúdo principal e, além disso, os pré-requisitos vistos na etapa 2. Os alunos estavam ansiosos por este jogo, pois ficaram com uma boa expectativa quando participaram do Jogo Equacione, na etapa 3. Como as regras dos dois jogos são parecidas, então os estudantes desenvolveram esta etapa de maneira satisfatória. A seguir, na figura 14, temos os alunos praticando o Jogo Aritmetik:

Figura 14 – Alunos praticando o Jogo Aritmetik (à esquerda está o Grupo 1 e à direita está o Grupo 2).

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

4.2.6 Avaliação Final e Formulário de Satisfação

No Grupo 1, do total de 16 alunos, 7 realizaram a Avaliação Final e preencheram o Formulário de Satisfação (ver Apêndices F e G), sendo que as atividades foram realizadas no mesmo dia. Os alunos demonstraram maior desconforto nas questões 2 e 5 da avaliação, onde era solicitado que eles calculassem o MDC entre dois números e resolvessem uma equação diofantina em $\mathbb{N} \cup \{0\}$, respectivamente. No Grupo 2, do total de 11 alunos, 7 realizaram a Avaliação Final e preencheram o Formulário de Satisfação e, assim como no Grupo 1, as atividades foram realizadas no mesmo dia. Desta vez, os alunos demonstraram maior desconforto na questão 5 da avaliação, onde era solicitado que eles resolvessem uma equação diofantina em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

No que diz respeito ao Formulário de Satisfação, os estudantes avaliaram positivamente o material didático utilizado, onde 100% deles [3] se declarou satisfeito ou muito satisfeito. A organização das aulas também foi avaliada de forma positiva, pois 92,85% deles se declarou satisfeito ou muito satisfeito. No quesito tempo, 85,71% avaliaram que a duração das atividades foi suficiente. Por fim, os alunos reconheceram a importância das Equações Diofantinas Lineares ao dizerem que elas poderiam ser usadas para resolver problemas do cotidiano. Na Figura 15, trazemos os alunos realizando a Avaliação Final e o Formulário de Satisfação.

Figura 15 – Alunos realizando Avaliação Final e Formulário de Satisfação (à esquerda está o Grupo 1 e à direita está o Grupo 2).

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

4.2.7 Cronogramas de aplicação

Para finalizar o capítulo, trazemos os Cronogramas de aplicação da Sequência Didática para o Grupo 1 e para o Grupo 2 (tabelas 15 e 16, respectivamente), contendo as etapas de aplicação, as datas e a carga horária utilizada em cada uma das etapas realizadas.

Tabela 15 – Cronograma de aplicação da Sequência Didática para o Grupo 1.

Etapas	Data	Horas/aula
1 - Avaliação Diagnóstica	07/03/23	2
2 - Revisão de assuntos básicos	21/03/23	1
2 - Revisão de assuntos básicos	23/03/23	1
3 - Jogo Equacione	26/04/23	1
4 - Introdução às Equações Diofantinas Lineares	10/05/23	2
5 - Jogo Aritmetik	07/06/23	2
6 - Avaliação Final	14/06/23	1
7 - Formulário de Satisfação	14/06/23	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

[3]Estamos considerando todos os alunos dos Grupos 1 e 2.

Tabela 16 – Cronograma de aplicação da Sequência Didática para o Grupo 2.

Etapas	**Data**	**Horas/aula**
1 - Avaliação Diagnóstica	07/03/23	2
2 - Revisão de assuntos básicos	31/03/23	1
2 - Revisão de assuntos básicos	13/04/23	1
3 - Jogo Equacione	19/04/23	1
4 - Introdução às Equações Diofantinas Lineares	04/05/23	2
5 - Jogo Aritmetik	11/06/23	2
6 - Avaliação Final	17/06/23	1
7 - Formulário de Satisfação	17/06/23	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Destacamos que as etapas tiveram a mesma duração para ambos os grupos, apesar de o tempo total de aplicação ter sido diferente devido aos rodízios das turmas.

5 ANÁLISE DOS DADOS

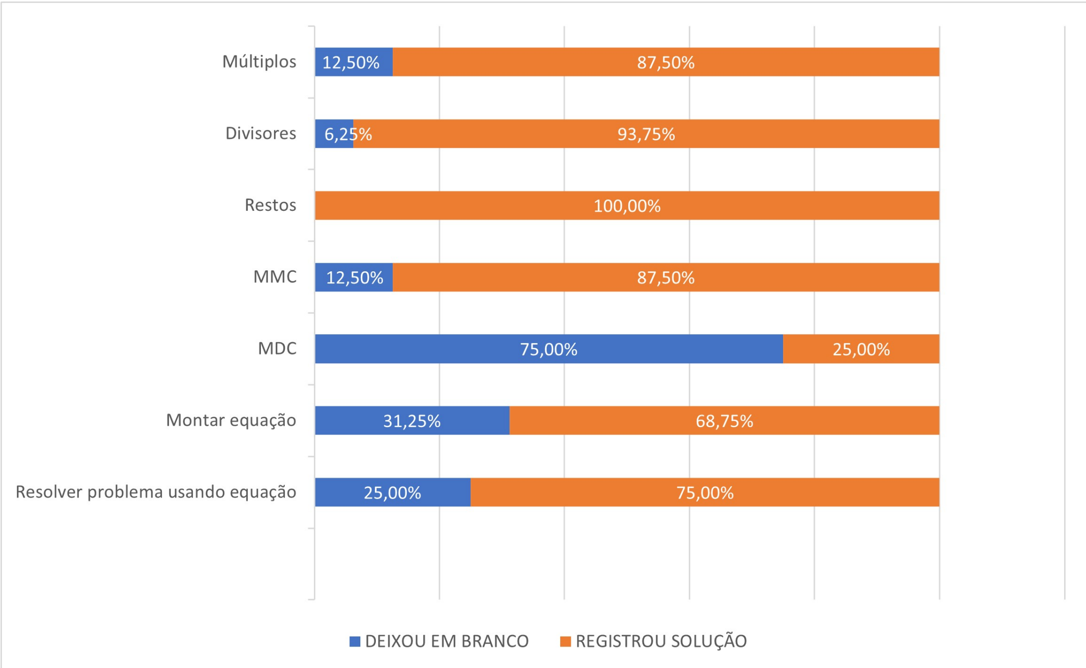
Neste capítulo, os dados da Avaliação Diagnóstica e da Avaliação Final serão confrontados com o objetivo de concluirmos se houve melhora no desempenho dos alunos entre um teste e outro e, mais do que isso, a fim de verificarmos se as Equações Diofantinas Lineares podem ser ensinadas no Ensino Básico.

Analisaremos gráficos gerados a partir dos resultados da Avaliação Diagnóstica apresentados no capítulo anterior, assim como gráficos gerados a partir dos resultados da Avaliação Final.

5.1 ANÁLISE DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Inicialmente, trataremos dos resultados do Grupo 1. A partir das Tabelas 10 e 11 foram gerados os Gráficos 1 e 2, respectivamente, apresentados abaixo.

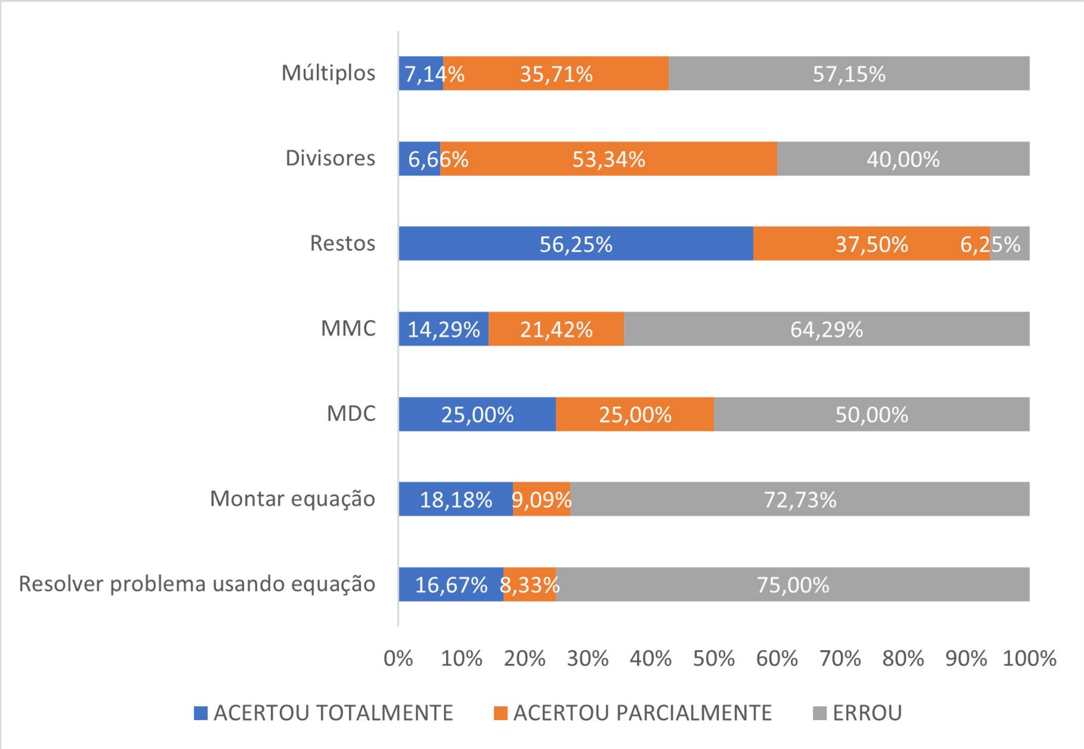
Gráfico 1 – Avaliação Diagnóstica do Grupo 1 - alunos que deixaram a questão em branco ou registraram alguma solução.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O Gráfico 1 mostra que os estudantes do Grupo 1 tiveram bastante dificuldade em responder as questões relativas ao MDC, pois 75% deles não conseguiu ao menos elaborar alguma solução, assim como nas questões relativas às equações do 1° grau, onde 31,25% não conseguiu montar uma equação, dada uma situação e 25% não registrou nenhuma solução quando foi solicitado resolver um problema usando equação do 1° grau. Vejamos o Gráfico 2:

Gráfico 2 – Percentual de alunos do Grupo 1 que, dentre os que registraram alguma solução, acertaram totalmente, acertaram parcialmente ou erraram as questões.



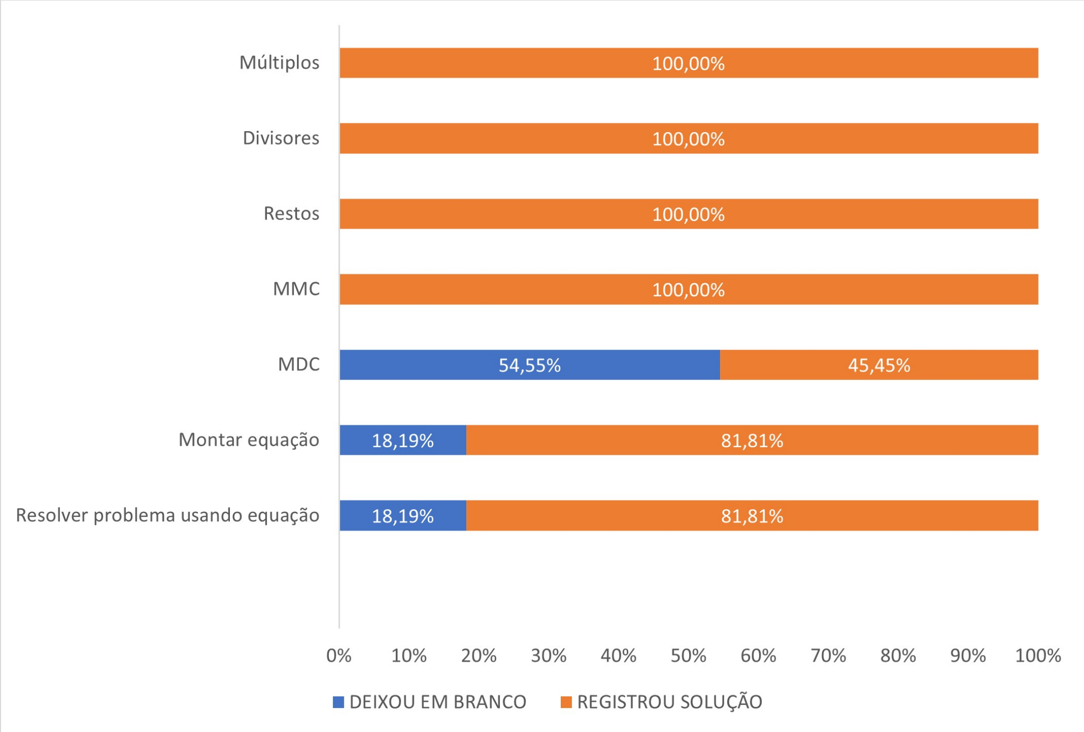
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O Gráfico 2 revela que, dentre os alunos que registraram alguma solução, apenas a questão que envolvia o cálculo do resto de uma divisão obteve uma taxa de acerto total [4] mediana, de 56,25%. No entanto, para as demais questões, as taxas de acerto total foram menores ou iguais que 25% e isso indica que os estudantes não sabiam ou não lembravam dos assuntos abordados. Os conteúdos onde a taxa de acerto total foi mais baixa foram múltiplos e divisores de um número natural com taxas de 7,14% e 6,66%, respectivamente. Assim, analisando os Gráficos 1 e 2, simultaneamente, destacamos que o assunto MDC foi o que gerou o resultado mais crítico e na sequência temos o assunto equações do 1° grau.

Agora, trataremos dos resultados do Grupo 2. A partir das Tabelas 12 e 13 foram gerados os Gráficos 3 e 4, respectivamente, apresentados a seguir.

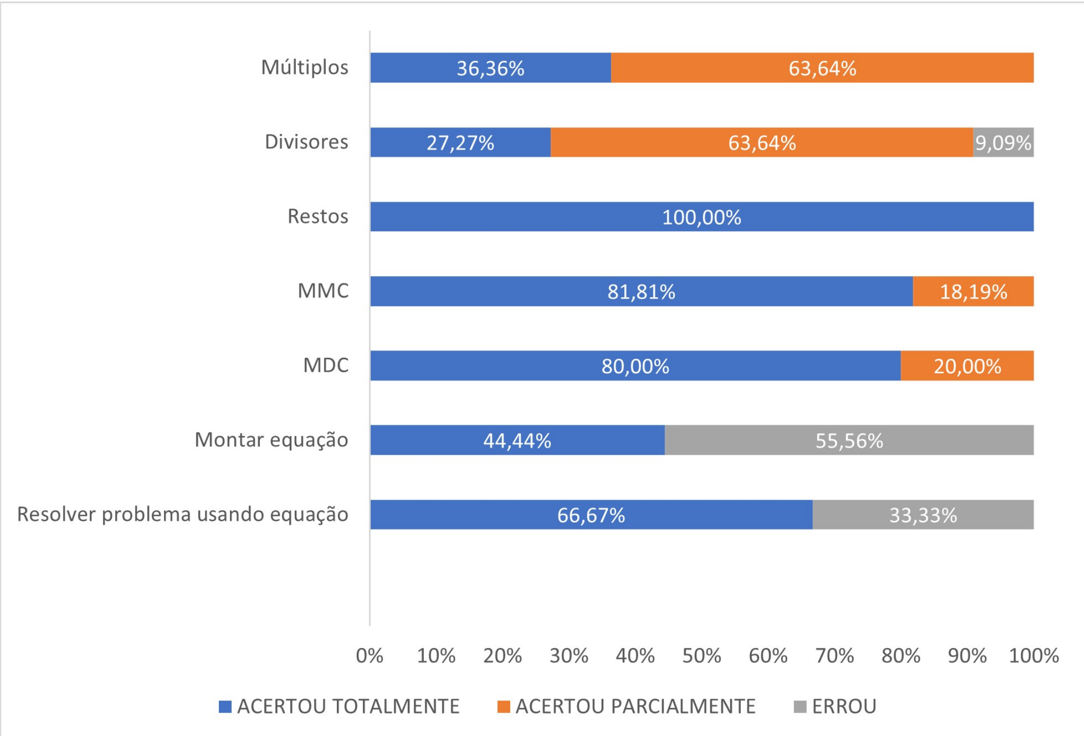
[4] Aqui estamos considerando as questões em que os alunos acertaram a resposta integralmente.

Gráfico 3 – Avaliação Diagnóstica do Grupo 2 - alunos que deixaram a questão em branco ou registraram alguma solução.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Gráfico 4 – Percentual de alunos do Grupo 2 que, dentre os que registraram alguma solução, acertaram totalmente, acertaram parcialmente ou erraram as questões.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O Gráfico 3 reforça que os estudantes do Grupo 2 também tiveram dificuldade em responder as questões relativas ao MDC, pois 54,55% deles não conseguiu ao menos elaborar alguma solução. Nas questões relativas às equações do 1° grau 18,19% não conseguiu montar uma equação dada uma situação e 18,19% não registrou nenhuma solução quando foi solicitado resolver um problema usando equação.

O Gráfico 4 revela que, dentre os alunos que registraram alguma solução, as questões que envolviam o cálculo do resto de uma divisão, o MMC, o MDC e resolver problema usando equação obtiveram uma taxa de acerto total[5] de 100%, 81,81%, 80% e 66,67%, respectivamente. No entanto, devemos considerar que a taxa de acerto total de 80%, relativa ao MDC, corresponde à apenas 36,36% de todos os alunos avaliados no Grupo 2. Portanto, assim como aconteceu no Grupo 1, o Grupo 2 apresentou mais dificuldade nos assuntos MDC e equações do 1° grau. Além disso, destacamos que as taxas de acerto total das questões sobre múltiplos e divisores foram mais baixas do que para as outras questões.

5.2 ANÁLISE DA AVALIAÇÃO FINAL

Através da Avaliação Final, verificamos que os alunos do Grupo 1 conseguiram, identificar equações diofantinas lineares, modelar um problema usando tais equações e justificar se elas possuem solução em $\mathbb{Z}$. No entanto, tiveram dificuldade em calcular o MDC, pois 57,14% dos alunos erraram a questão relativa a este assunto. Com relação ao Grupo 2, verificamos que os alunos conseguiram calcular o MDC, identificar equações diofantinas e modelar um problema usando tais equações. No entanto, tiveram dificuldade em justificar se uma equação diofantina possui solução em $\mathbb{Z}$, pois 100% dos alunos responderam corretamente quanto à existência e apenas 28,57% conseguiram justificar.

Quanto à resolução das equações diofantinas, os estudantes conseguiram resolvê-las em $\mathbb{Z}$ usando o método de achar uma solução particular, por inspeção e, depois usando as fórmulas da solução geral. No entanto, mostraram dificuldade em resolver a mesma equação em $\mathbb{N} \cup \{0\}$, pois apenas 14,28% de cada um dos grupos acertou a questão que envolvia tal assunto.

[5] Aqui estamos considerando as questões em que os alunos acertaram a resposta integralmente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Motivados por questionamentos já apresentados na introdução deste trabalho, tínhamos como objetivo investigar se é possível abordar as Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio de maneira satisfatória e, a fim de chegar a uma conclusão, foi planejada e aplicada uma Sequência Didática sobre o assunto, onde as etapas foram executadas para o Grupo 1 e para o Grupo 2 de acordo com os cronogramas apresentados nas Tabelas 15 e 16, respectivamente. Destacamos que estes não foram os cronogramas ideais, mas que, devido à logística de funcionamento da escola, foi feito o melhor possível.

Outro ponto importante a ser levado em consideração é a questão do tempo, pois em vários momentos sentimos a necessidade de dispor de uma carga horária maior, haja vista a dificuldade dos alunos em assuntos considerados pré-requisitos e o fato de os estudantes estarem vendo alguns assuntos pela primeira vez, demandando mais tempo para que eles fixassem efetivamente o conteúdo.

Feitas essas considerações, percebemos, por meio dos resultados da Avaliação Final, que a maioria dos estudantes avaliados obtiveram ou relembraram conhecimentos relevantes como, por exemplo, reconhecer uma Equação Diofantina Linear, calcular o MDC entre dois números, modelar um problema usando uma Equação Diofantina Linear e determinar se ela possui solução em $\mathbb{Z}$. Percebemos ainda que, na resolução das equações em $\mathbb{Z}$, os estudantes optaram por usar o método de buscar uma solução particular, por meio de inspeção, e depois usar as fórmulas para chegar à solução geral, ou seja, os alunos não demonstraram segurança em resolver as equações usando o método mais geral que inclui o Algoritmo de Euclides.

Um fato importante é que no período de aplicação da sequência didática houve, na mesma escola, uma mostra de ciências onde um grupo de alunos do 1° ano, envolvidos na pesquisa, decidiu apresentar um trabalho intitulado Equações Diofantinas Lineares com Duas Incógnitas. O objetivo, segundo a equipe, foi divulgar um assunto da matemática pouco conhecido, que desperta interesse e que contribui com o aprendizado dos demais alunos. Assim, percebemos que a pesquisa atinge resultados positivos inesperados, uma vez que os participantes da pesquisa passaram a ser divulgadores do conhecimento abordado.

Portanto, concluímos que atingimos parcialmente o objetivo, pois os alunos conheceram as Equações Diofantinas Lineares e entenderam aspectos básicos importantes. Quanto à resolução das equações, acreditamos que seria necessário dedicar mais tempo para que os estudantes se apropriassem efetivamente de todo o processo. Assim, concluímos que é possível abordar as Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio, mas é preciso ter o cuidado de inserir o assunto em turmas pertencentes a um itinerário formativo adequado, em que uma das áreas de foco seja a matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOLOUD, S.A.; COUTINHO, C.Q.S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática , Florianópolis, 3(1), 62-77, 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62. Acesso em: 18 maio 2023.

ALMOLOUD, S.A.; SILVA, M.J.F. **Engenharia Didática: Evolução e Diversidade**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática , 7(2), 26- 27, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22/23452. Acesso em: 18 maio 2023.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília, 2018.

COREN, M. R.; DRABKIN, I. E. **A Source Book in Greek Science**. Cambridge, MA: Harvard University Press, reimpressão da ed. de 1948, 1958.

DIESEL, A.; SANTOS BALDEZ, A. L.; NEUMANN MARTINS, S. **Os princípios das metodologias ativas de ensino:** uma abordagem teórica. Revista Thema, Pelotas, v. 14, n. 1, p. 268–288.DOI: 10.15536/thema.14.2017.268-288.404, 2017. Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/404. Acesso em: 9 jan. 2023.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. tradução Hygino H. Domingues - 5. ed. - Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011.

FARDO, Marcelo Luis. **A gamificação como estratégia pedagógica: estudo de elementos dos games aplicados em processos de ensino e aprendizagem.** 2013. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2013.

GARCIA, Suely da Cruz; MORAIS, Fábio Rogério de. **Análise dos Domínios Cognitivos no Ensino Híbrido:** ensino e aprendizagem sob a perspectiva da Taxonomia Digital de Bloom. XVII Congresso Virtual de Administração, 2020. Disponível em: https://www.convibra.org/congresso/res/uploads/pdf/artigo22796_20201703.pdf.

Acesso em: 10 jan. 2023.

GLASSER, Willian. **Teoria da Escolha: uma nova psicologia de liberdade pessoal**. São Paulo: Mercuryo, 2001.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. 224 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação – Campinas, SP, 2000.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética (Coleção PROFMAT)**. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **IDEB:** Resultados. Disponível em: `https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados`. Acesso em 05 jan. 2023, 2022a.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **SAEB:** Resultados. Disponível em: `https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados`. Acesso em 05 jan. 2023, 2022b.

MARTINS, C.; GIRAFFA, L. M. M. **Gamificação nas práticas pedagógicas em tempos de cibercultura:** proposta de elementos de jogos digitais em atividades gamificadas. Anais do Seminário de Jogos Eletrônicos, Educação e Comunicação, 2015. Disponível em: `https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/8683/2/Gamificacao_nas_praticas_pedagogicas_em_tempos_de_cibercultura_proposta_de_elementos_de_jogos_digitais_em_atividades_gamificadas.pdf`. Acesso em: 12 jan. 2023.

MCGONIGAL, Jane. **Reality Is Broken: Why Games Make Us Better and How They Can Change The World**. Nova Iorque: The Penguin Press, 2011.

MEDEIROS, Amanda. **Docência na socioeducação**. Brasília: Universidade de Brasília, Campus Planaltina, 2014.

MILIES, Francisco César Polcino; COELHO, Sônia Pitta. **Números: Uma Introdução à Matemática**. 3 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (orgs.) **Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania:** aproximações jovens. Vol. II. PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: `http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran`. Acesso em: 08 jan.2023.

MOZER, Merris; NANTES, Eliza Adriana Sheuer. **Gamificação no Ensino de Matemática: das diretrizes curriculares do paraná à sala de aula, via plano de trabalho docente.** *Research, Society And Development*, v. 8, n. 4, p. 1–30, 2019.

OCDE. **PISA 2018 Results (Volume II):** Where All Students Can Succeed, PISA, OECD Publishing, Paris, 2019. Disponível em: https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf. Acesso em 03 jan. 2023.

PONTES, E. A. S. **A Práxis do Professor de Matemática por Intermédio dos Processos Básicos e das Dimensões da Aprendizagem de Knud Illeris**. Rebena - Revista Brasileira De Ensino E Aprendizagem , 2, 78–88, 2021. Disponível em: https://rebena.emnuvens.com.br/revista/article/view/19. Acesso em 12 jan. 2023.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

SEDUC. **Resultados da 3ª Séries do Ensino Médio em Matemática:** Ceará, Credes, Regionais de Fortaleza, Municípios e Escolas, 2022. Disponível em: https://www.seduc.ce.gov.br/ensino-medio/. Acesso em 03 jan. 2023.

WEBER, Rajane Gomes. **Estudo das dificuldades de leitura e interpretação de textos matemáticos em enunciados de problemas por alunos do ensino médio.** 2012. 84 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/92274. Acesso em 02 set. 2023, 2012.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre, RS: Artmed, 1998.

APÊNDICE A - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Questão 1: Responda as perguntas sobre múltiplos e divisores:

a) Quais os múltiplos positivos de 3?

b) Quais os múltiplos de 7, localizados entre 100 e 150?

c) Quais os divisores de 25? Quais os divisores positivos de 25?

Questão 2: Responda cada uma das perguntas:

a) Qual o resto da divisão de 24 por 3?

b) Qual o resto da divisão de 25 por 3?

c) Qual o resto da divisão de 26 por 3?

d) Qual o resto da divisão de 27 por 3?

Questão 3: Usando os seus conhecimentos sobre MMC e MDC, responda:

(a) Qual o mmc e o mdc entre 2 e 15?

(b) Qual o mmc e o mdc entre 3 e 60?

Questão 4: Monte uma equação que represente a situação: João gasta um terço do seu salário com alimentação, metade com moradia e ainda lhe sobram R$ 1200,00.

Questão 5: Carlos e Manoela são irmãos gêmeos. A metade da idade de Carlos mais um terço da idade de Manoela é igual a 10 anos. Qual é a soma das idades dos irmãos?

APÊNDICE B – MATERIAL DE REVISÃO

MÚLTIPLOS E DIVISORES

Definição 1: Sejam a e b dois números inteiros, dizemos que a divide b e indicamos por $a \mid b$, se existir um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$. Neste caso, dizemos que a é um divisor de b, que b é divisível por a ou ainda que b é múltiplo de a. Por outro lado, se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.

Exemplo 1:

a) 2 divide 16, pois $16 = 8 \cdot 2$. Assim, escrevemos $2|16$ ou 16 é um múltiplo de 2.

b) $\pm 1|0, \pm 2|0, \pm 3|0, ...$

c) $\pm 1|6, \pm 2|6, \pm 3|6, \pm 6|6$.

d) Múltiplos de 2: M(2) = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

e) Divisores de 100: D(100) = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

DIVISÃO EUCLIDIANA

Teorema 1: Sejam a e b dois inteiros com b $\neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \quad com \quad 0 \leq r < |b|.$$

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de a por b. Da divisão euclidiana, temos que o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, b divide a.

Exemplo 2:

a) O quociente e o resto da divisão de 19 por 5 são q = 3 e r = 4.

b) O quociente e o resto da divisão de 25 por 3 são q = 8 e r = 1.

CONCEITOS DE MMC E MDC

Definição 2: O mínimo múltiplo comum (MMC) de dois inteiros a e b é o menor inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente de a e de b.

Exemplo 3:

a) MMC (2,5) = 10, pois M(2) = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... e M(5) = 5, 10, 15, ...

b) MMC (6,21) = 42, pois M(6) = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ... e M(21) = 21, 42, 63, 84, ...

Método alternativo para calcular MMC (Fatoração simultânea): Dada a fatoração em primos de cada um dos números dados, destaca-se aquelas potências de maior expoente e o produto entre elas é o MMC entre os números dados.

Exemplo 4: Como $6 = 2^1.3^1.7^0$ e $21 = 2^0.3^1.7^1$, então MMC $(6, 21) = 2^1.3^1.7^1 = 42$.

Definição 3: O máximo divisor comum (MDC) de dois ou mais números inteiros é o maior divisor inteiro comum a todos eles.

Exemplo 5:

a) MDC $(2, 5) = 1$, pois D(2) = ±1, ±2 e D(10) = ±1, ±5, ±10.

b) MDC $(16, 36) = 4$, pois D(16) = $1, 2, 4, 8, 16$ e D(36) =$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 36$.

Método alternativo para calcular MDC (Fatoração simultânea): Dada a fatoração em primos de cada um dos números dados, destaca-se aquelas potências de menor expoente e o produto entre elas é o MDC entre os números dados.

Exemplo 6: Como $6 = 2^1.3^1.7^0$ e $21 = 2^0.3^1.7^1$, então MDC $(6, 21) = 2^0.3^1.7^0 = 3$.

RESOLVER SITUAÇÕES ENVOLVENDO EQUAÇÃO DO 1° GRAU

Definição 5: As equações de primeiro grau são sentenças matemáticas que estabelecem relações de igualdade entre termos conhecidos e desconhecidos (incógnitas), representadas sob a forma:

$$ax + by = c,$$

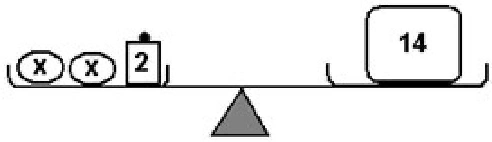
onde a, b e c são números reais, sendo a um valor diferente de zero e x, y representam valores desconhecidos. Nessas equações, o expoente da(s) incógnita(s) é, no máximo, igual a 1.

Exemplo 7:

a) 2x+3 = 11
b) x+3 = 0
c) 2x+5y = 100
d) 3x+4y = 60

Exemplo 8: A balança abaixo está em equilíbrio. Qual equação traduz esta situação?

Figura 16 – Balança em equilíbrio.



Fonte: Autor desconhecido.

Exemplo 9: Escreva uma equação que expressa a seguinte situação: Se a mãe de Murilo triplicar o valor pago de sua mesada e descontar 5 reais, ele ficará com R\$ $40,00$.

Exemplo 10: Escreva uma equação que expressa a seguinte situação: Maria gasta um terço do seu salário com alimentação, metade com moradia e ainda lhe sobram R\$ $1200,00$.

Exemplo 11: Carlos e Manoela são irmãos gêmeos. A metade da idade de Carlos mais um terço da idade de Manoela é igual a 10 anos. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Para cada afirmação, coloque C se estiver correto e E se estiver errado:

   a) 958 é múltiplo de 3 (   )
   b) 55 é múltiplo de 8 (   )
   c) 70 é múltiplo de 2 (   )
   d) 25 é múltiplo de 5 (   )

2. Determine os elementos dos seguintes conjuntos:

   a) M(14) =
   b) M(40) =
   c) D(14) =
   d) D(40) =

3. Calcule o valor do:
   a) MMC (14,40) e MDC (14,40).

   b) MMC (40,100) e MDC (40,100).

4. João tem R\$ $25,00$ e deseja comprar doces que custam R\$ $2,00$ e R\$ $5,00$. Se todo o dinheiro deve ser gasto, quantos doces de cada tipo podem ser comprados por João?

5. Em um estacionamento há triciclos e carros, cujo total de pneus é igual a 60. Quantos veículos de cada tipo podem existir?

APÊNDICE C – REGRAS DO JOGO EQUACIONE

Informações gerais:

O jogo é composto por:

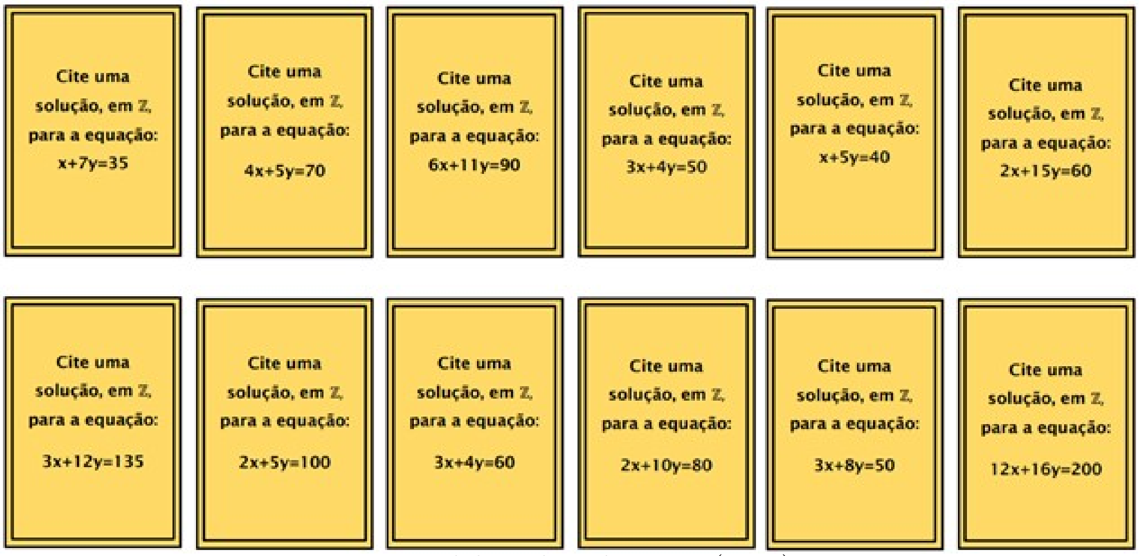
- um tabuleiro que possui um trajeto com 23 casas, conforme a Figura 17;
- 12 cartas-pergunta, conforme a Figura 18;
- 12 cartas-resposta, conforme a Figura 19;
- Um dado cúbico, numerado de 1 a 6;
- 6 peças de cores diferentes (para identificação das equipes).

Observação 1: Há um espaço, no centro do tabuleiro, para serem colocadas as 12 cartas-pergunta;

Figura 17 – Tabuleiro do jogo Equacione.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

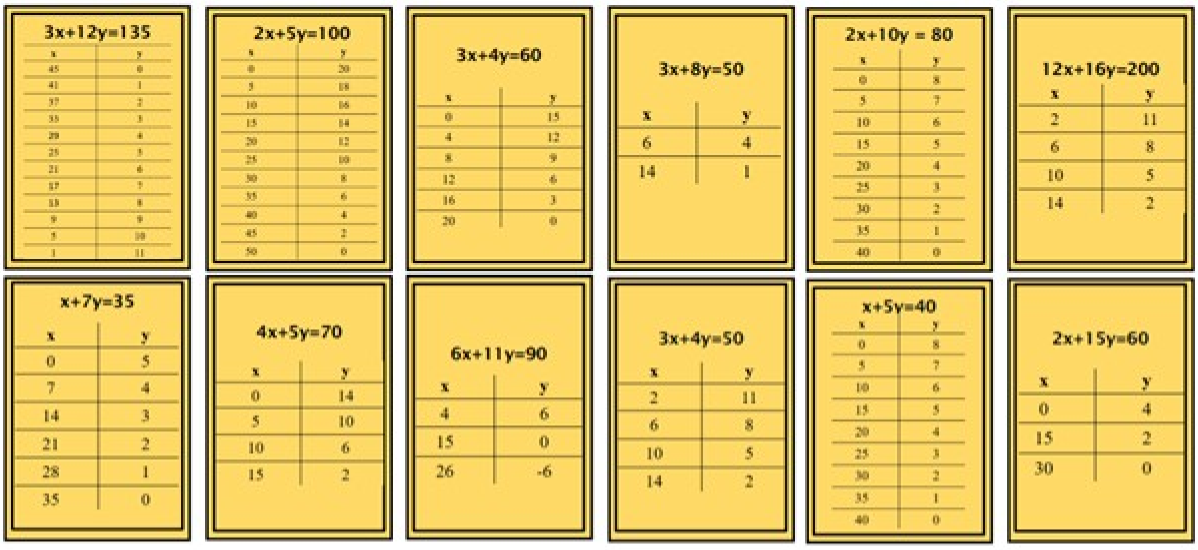
Figura 18 – Cartas-pergunta do jogo Equacione.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observação 2: As cartas-resposta, que constam na figura 19, apresentam apenas algumas soluções possíveis de suas respectivas equações associadas e como buscamos resolvê-las em $\mathbb{Z}$, sabemos que tais equações possuem infinitas soluções dadas pela Proposição 3.6.

Figura 19 – Cartas-resposta do jogo Equacione.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observação 3: Com relação às casas, existem cinco categorias, conforme consta na figura 20:

Figura 20 – Identificação das casas do Tabuleiro do jogo Equacione.

CATEGORIA DA CASA	IMAGEM
Casas de início e fim	INÍCIO FIM
Casas amarelas	
Casas de avanço	+1 +2 +3
Casas das cartas	
Espaço central	CARTAS

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Regras do jogo:

1. Os estudantes devem ser divididos em, no máximo, 6 equipes compostas por, aproximadamente, 3 componentes.
2. Cada equipe escolhe uma peça para representá-la e põe na casa Início.
3. Um componente de cada equipe lança o dado uma única vez e observa-se o número obtido. Quem obtiver o maior valor inicia o jogo, quem obtiver o segundo maior valor joga em segundo lugar e assim por diante. Em caso de empate, as equipes empatadas jogam o dado novamente até tirarem números diferentes.
4. Na sequência, as cartas-pergunta devem ser embaralhadas e colocadas em monte no espaço central com as perguntas voltadas para baixo. As cartas-resposta ficam na posse do professor/mediador.
5. De acordo com a ordem estabelecida, as equipes retiram uma carta-pergunta superior do monte que deve ser mantida em sua posse;
6. As equipes jogam o dado, de acordo com a ordem estabelecida, e percorrem as casas correspondentes ao número obtido, observando os seguintes critérios:
   (a) Caso a peça seja movida para uma casa amarela, a próxima equipe joga o dado e continua a partida;
   (b) Caso a peça seja movida para uma casa das cartas, a equipe deve citar em, no máximo, 60 segundos, uma solução inteira para a equação presente na

carta-pergunta que está em sua posse. Se a solução estiver correta, a peça da equipe permanece na casa das cartas e a próxima equipe continua a partida. Caso contrário, a peça deve voltar para a última casa em que estava antes do lançamento do dado e a próxima equipe continua a partida;

(c) Caso a peça seja movida para uma casa de avanço, a equipe avança a sua peça imediatamente de acordo com o valor apresentado. Caso, ao avançar, a peça caia na casa das cartas segue-se o procedimento descrito na regra 6b.

Observação 4: Quando a peça for movida para uma casa das cartas, a equipe terá até 60 segundos para citar uma solução, onde o tempo será cronometrado pelo professor/mediador.

Observação 5: As equipes têm o direito, a partir da segunda rodada, de trocar a sua carta-pergunta, no máximo, uma vez durante a partida. A carta trocada deve ser colocada na parte inferior do monte e o controle é feito pelo professor/mediador.

Observação 6: Caso a peça de uma equipe pare em uma casa das cartas duas ou mais vezes e a equação a ser solucionada ainda seja a mesma, a equipe deve citar uma solução diferente daquela apresentada anteriormente. O controle das soluções já citadas será feito pelo professor/mediador.

7. Vence a equipe que chegar na casa Fim em primeiro lugar.

APÊNDICE D – INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

ALGORITMO DE EUCLIDES

Exemplo 1: Calcule, usando o Algoritmo de Euclides o mdc(60, 8).
Solução: Note que

$$60 = 8 \cdot 7 + 4$$
$$8 = 4 \cdot 2 + 0$$

Logo $\text{mdc}(60, 8) = 4$.

Exemplo 2: Encontrar, pelo Algoritmo de Euclides o mdc(75, 12).
Solução: Note que

$$75 = 12 \cdot 6 + 3$$
$$12 = 3 \cdot 4 + 0$$

Logo mdc (75, 12) = 3.

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Dados a, b, $c \in \mathbb{Z}$, chamamos de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas as equações do tipo $aX + bY = c$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Todo par x, $y \in \mathbb{Z}$ que substituem X e Y satisfazendo a igualdade $ax+by = c$ são chamados de soluções particulares da equação.

Exemplo 3: Note que a equação $2x + 4y = 8$ é satisfeita, por exemplo, quando tomamos

$$x = 4 \quad \text{e} \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2 \quad \text{e} \quad y = 1.$$

Portanto, $(x, y) = (4, 0)$ e $(x, y) = (2, 1)$ são soluções particulares da equação dada.

Observação 1: De modo geral, ao resolvermos uma equação diofantina linear buscamos todas as soluções inteiras. No entanto, em alguns casos, a depender do contexto, há restrições que permitem apenas soluções inteiras não negativas. Além disso, é importante destacar que nem sempre as equações possuem solução.

Exemplo 4: A equação $20x + 2y = 3$, não possui nenhuma solução x_0, y_0 nos números inteiros, pois, caso contrário, teríamos $20 \cdot x_0 + 2 \cdot y_0$ par e, portanto, nunca igual a 3, que é ímpar.

Assim, estamos interessados em saber quando uma equação diofantina tem solução, e caso as tenha, em como determiná-las. Para resolver essas dúvidas, temos os resultados a seguir.

Resultado 1: Dados a, b, $c \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, a equação diofantina linear $aX + bY = c$ admite solução se, e somente se, $\text{mdc}(a, b)$ divide c.

Resultado 2: Seja x_0, y_0 uma solução particular da equação $aX + bY = c$, onde $mdc(a, b) = 1$. Então todas as soluções inteiras x, y da equação são da seguinte forma:

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at, \quad \text{onde} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5: Resolva a Equação Diofantina $7x + 9y = 5$.
Solução: Como o $mdc(7, 9) = 1$ e $1|5$, temos que a equação acima admite solução. Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $7 \cdot m + 9 \cdot n = 1$. Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$\begin{aligned} 9 &= 7 \cdot 1 + 2 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - (2 \cdot 3) \\ &= 7 - (9 - 7) \cdot 3 \\ &= 7 - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \\ &= 7 \cdot 4 - 9 \cdot 3 \\ &= 7 \cdot 4 + 9 \cdot (-3). \end{aligned}$$

Logo, $m = 4$ e $n = -3$. Multiplicando ambos os lados de $7 \cdot 4 + 9 \cdot (-3) = 1$ por 5, segue que $7 \cdot 20 + 9 \cdot (-15) = 5$ isto é, $x_0 = 20$ e $y_0 = -15$ é uma solução de $7x + 9y = 5$. Portanto, a solução geral da equação diofantina linear é dada por

$$x = 20 + 9t \quad \text{e} \quad y = -15 - 7t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso, as outras soluções são determinadas pelo parâmetro t.

Exemplo 6: Resolver a Equação Diofantina $11x + 30y = 20$.
Solução: Como o $\text{mdc}(11, 30) = 1$ e $1|20$, temos que a equação acima admite solução. Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $11 \cdot m + 30 \cdot n = 1$. Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$\begin{aligned}
30 &= 11 \cdot 2 + 8 \\
11 &= 8 \cdot 1 + 3 \\
8 &= 3 \cdot 2 + 2 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \\
&= 3 - (8 - 3 \cdot 2) \\
&= 3 \cdot 3 - 8 \\
&= 3 \cdot (11 - 8 \cdot 1) - 8 \\
&= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 \\
&= 3 \cdot 11 - 4(30 - 11 \cdot 2) \\
&= 11 \cdot 11 + 30 \cdot (-4).
\end{aligned}$$

Logo, $m = 11$ e $n = -4$. Multiplicando ambos os lados de $11 \cdot 11 + 30 \cdot (-4) = 1$ por 20, segue que $11 \cdot 220 + 30 \cdot (-80) = 20$ isto é, $x_0 = 220$ e $y_0 = -80$ é uma solução de $11x + 30y = 20$. Portanto, a solução geral da equação diofantina linear é dada por

$$x = 220 + 30t \quad \text{e} \quad y = -80 - 11t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso, as outras soluções são determinadas pelo parâmetro t.

Observação 2: Em muitas situações, apenas as soluções inteiras não negativas de uma equação diofantina são de interesse, ou seja, soluções x e y sendo números inteiros, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Veremos isto nos dois próximos exemplos.

Exemplo 7: É possível comprar selos de R\$ 3,00 e R\$ 12,00 dispondo de R\$ 135,00 sem que haja troco? Se for possível, quantas são as maneiras de se comprar os selos?
Solução: Para resolver o problema, sejam x o número de selos de R\$ 3,00 e y o número de selos de R\$ $12,00$. Assim, temos a equação diofantina linear

$$3x + 12y = 135.$$

Como o $\text{mdc}(3, 12) = 3$ e $3|135$, temos que a equação possui solução e dividindo a equação por 3 obtemos

$$x + 4y = 45.$$

Logo, devemos determinar m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $1 \cdot m + 4 \cdot n = 1$. Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$4 = 4 \cdot 1 + 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + 4 &= 4 \cdot 1 + 1 \\ 1 &= 1 + 4 - 4 \cdot 1 \\ 1 &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + (-1) \\ 1 &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0. \end{aligned}$$

Logo, temos que $m = 1$ e $n = 0$ é uma solução de $1 \cdot m + 4 \cdot n = 1$. Assim, multiplicando ambos os lados de $1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1$ por 45, segue que

$$1 \cdot 45 + 4 \cdot 0 = 45.$$

Isto é, $x_0 = 45$ e $y_0 = 0$ é uma solução de $x + 4y = 45$. Portanto, a solução geral da equação diofantina linear é dada por

$$x = 45 + 4t \quad \text{e} \quad y = 0 - t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$x = 45 + 4t \quad \text{e} \quad y = -t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para todas as soluções do problema, devemos ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então devemos ter

$$45 + 4t \geq 0 \quad \text{e} \quad -t \geq 0,$$

o que implica em

$$t \geq -11,25 \quad \text{e} \quad t \leq 0.$$

Logo,

$$-11,25 \leq t \leq 0, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, os valores de t, x, y para todas as soluções inteiras não negativas estão apresentados na Tabela 17.

Tabela 17 – Material de introdução às Equações Diofantinas Lineares - Soluções da equação $3x + 12y = 135$.

t	x	y
0	45	0
-1	41	1
-2	37	2
-3	33	3
-4	29	4
-5	25	5
-6	21	6
-7	17	7
-8	13	8
-9	9	9
-10	5	10
-11	1	11

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Logo, temos 12 maneiras de comprar os selos sem que haja troco.

Exemplo 8: Maria deu R$ 100,00 a sua filha para ela comprar figurinhas da Copa do Mundo de futebol feminino. Sabendo que as figurinhas são vendidas em envelopes que custam R$ 2,00 e R$ 5,00 e que o dinheiro deve ser gasto totalmente, quantos envelopes de cada tipo podem ser comprados?
Solução: Para resolver o problema, sejam x o número de envelopes de R$ 2,00 e y o número de envelopes de R$ 5,00. Assim, temos a equação diofantina linear

$$2x + 5y = 100.$$

Como o $\text{mdc}(2, 5) = 1$ e $1|100$, temos que a equação possui solução. Logo, devemos determinar $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $2 \cdot m + 5 \cdot n = 1$. Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1. \end{aligned}$$

Logo, $m = -2$ e $n = 1$. Multiplicando ambos os lados de $2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 1$ por 100, segue que

$$2 \cdot (-200) + 5 \cdot (100) = 100.$$

Isto é, $x_0 = -200$ e $y_0 = 100$ é uma solução de $2x + 5y = 100$. Portanto, a solução geral da equação diofantina linear é dada por

$$x = -200 + 5t \quad \text{e} \quad y = 100 - 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para todas as soluções do problema, devemos ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então devemos ter

$$-200 + 5t \geq 0 \quad \text{e} \quad 100 - 2t \geq 0$$

o que implica em

$$t \geq 40 \quad \text{e} \quad t \leq 50.$$

Logo,

$$40 \leq t \leq 50, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, os valores de t, x, y para todas as soluções inteiras não negativas estão apresentados na Tabela 18.

Tabela 18 – Material de introdução às Equações Diofantinas Lineares - Soluções da equação $2x + 5y = 100$.

t	x	y
40	0	20
41	5	18
42	10	16
43	15	14
44	20	12
45	25	10
46	30	8
47	35	6
48	40	4
49	45	2
50	50	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Logo, temos 11 maneiras de comprar os envelopes nas condições dadas.

APÊNDICE E – REGRAS DO JOGO ARITMÉTIK

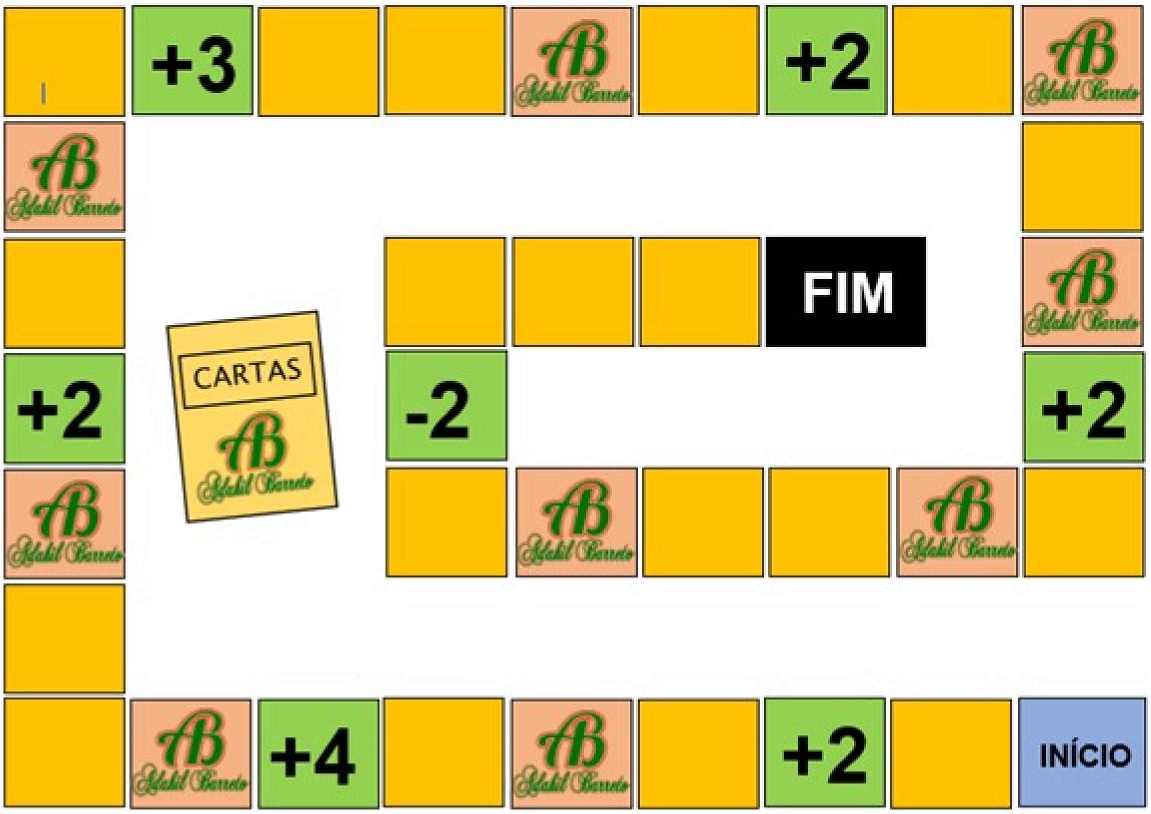
Informações gerais:

O jogo é composto por:

- um tabuleiro que possui um trajeto com 37 casas, conforme a Figura 21;
- 12 cartas-pergunta (as mesmas do jogo Equacione), conforme a Figura 18;
- 12 cartas-resposta (as mesmas do jogo Equacione), conforme a Figura 19;
- 24 cartas pergunta/resposta, conforme a Figura 22;
- Um dado cúbico, numerado de 1 a 6;
- 6 peças de cores diferentes (para identificação das equipes).

Observação 1: Há um espaço, no tabuleiro, para serem colocadas as 12 cartas-pergunta e as 24 cartas pergunta/resposta;

Figura 21 – Tabuleiro do jogo Aritmétik.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observação 2: Este jogo utiliza as mesmas 24 cartas do Jogo Equacione acrescentando-se 24 cartas pergunta/resposta (estas já vem com a resposta na própria carta, conforme a Figura 22);

Figura 22 – Cartas pergunta/resposta do jogo Aritmétik.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observação 3: Com relação às casas, existem cinco categorias, conforme consta na Figura 23:

Figura 23 – Identificação das casas do Tabuleiro do jogo Aritmétik.

CATEGORIA DA CASA	IMAGEM
Casas de início e fim	INÍCIO FIM
Casas amarelas	
Casas de avanço	-2 +2 +3 +4
Casas das cartas	
Espaço central	CARTAS

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Regras do jogo:

1. Os estudantes devem ser divididos em, no máximo, 6 equipes compostas por, aproximadamente, 3 componentes.
2. Cada equipe escolhe uma peça para representá-la e põe na casa Início.
3. Um componente de cada equipe lança o dado uma única vez e observa-se o número obtido. Quem obtiver o maior valor inicia o jogo, quem obtiver o segundo maior valor joga em segundo lugar e assim por diante. Em caso de empate, as equipes empatadas jogam o dado novamente até tirarem números diferentes.
4. Na sequência, as 12 cartas-pergunta e as 24 cartas pergunta/resposta devem ser embaralhadas e colocadas em monte no espaço central com as perguntas voltadas para baixo. As cartas-resposta ficam na posse do professor/mediador.
5. As equipes jogam o dado, de acordo com a ordem estabelecida, e percorrem as casas correspondentes ao número obtido, observando os seguintes critérios:
   (a) Caso a peça seja movida para uma casa amarela, a próxima equipe joga o dado e continua a partida;
   (b) Caso a peça seja movida para uma casa das cartas, o professor/mediador retira a carta superior do monte e faz a pergunta à equipe, que deve responder em, no máximo, 60 segundos. Se a solução estiver correta, a peça da equipe permanece na casa das cartas e a próxima equipe continua a partida. Caso contrário, a peça deve voltar para a última casa em que estava antes do lançamento do dado e a próxima equipe continua a partida;

(c) Caso a peça seja movida para uma casa de avanço, a equipe move a sua peça imediatamente de acordo com o valor apresentado. Caso a peça caia na casa das cartas segue-se o procedimento descrito na regra 5b.

Observação 4: Quando a peça for movida para uma casa das cartas, a equipe terá 60 segundos para citar uma solução, onde o tempo será cronometrado pelo professor/mediador.

Observação 5: Caso uma equipe tenha que responder à mesma equação duas ou mais vezes, ela deve citar uma solução diferente daquela apresentada anteriormente. O controle das soluções já citadas será feito pelo professor/mediador.

6. Vence a equipe que chegar na casa Fim em primeiro lugar.

APÊNDICE F – AVALIAÇÃO FINAL

Questão 01: Classifique as afirmações em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) (   ) $x + 2 = 100$ é um exemplo de equação diofantina linear.

b) (   ) $2x + 3y = 100$ é um exemplo de equação diofantina linear.

c) (   ) Todas as equações diofantinas lineares possuem solução em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

d) (   ) Todas as equações diofantinas lineares possuem solução em $\mathbb{Z}$.

Questão 02: Calcule o $\text{mdc}(150, 1050)$.

Questão 03: A equação $2x + 5y = 100$ possui solução em $\mathbb{Z}$? Justifique.

Questão 04: Carlos sacou R$ 200,00 em um caixa eletrônico que disponibilizava cédulas de 10 e 20 reais. Monte uma equação que represente a quantidade de tais cédulas que Carlos poderá receber?

Questão 05: Resolva a equação $2x + 5y = 100$ em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

APÊNDICE G – FORMULÁRIO DE SATISFAÇÃO

As perguntas a seguir serão usadas para obter feedback da atividade aplicada e visam medir os níveis de satisfação dos participantes e obter algumas ideias sobre como melhorar para uma eventual aplicação futura.

1. Sexo: ______________________________

2. Série: ______________________________

3. Qual o seu grau de satisfação com o material didático utilizado durante a atividade?
   (   ) Muito insatisfeito
   (   ) Insatisfeito
   (   ) Satisfeito
   (   ) Muito satisfeito

4. Qual o seu grau de satisfação com a organização das aulas durante a atividade?
   (   ) Muito insatisfeito
   (   ) Insatisfeito
   (   ) Satisfeito
   (   ) Muito satisfeito

5. Quão fácil foi entender a linguagem ou os termos usados pelo professor?
   (   ) Muito fácil
   (   ) Moderadamente fácil
   (   ) Moderadamente difícil
   (   ) Muito difícil

6. Você acha que a duração da atividade foi boa o suficiente para atender às suas expectativas de aprendizado?

   (   ) Sim
   (   ) Não

7. Na sua opinião, o objetivo da atividade foi claramente explicado antes de sua aplicação?

   (   ) Sim
   (   ) Não

8. Você considera importante estudar sobre equações diofantinas? Justifique abaixo.

9. Você gostou de estudar sobre equações diofantinas? Justifique.