UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ EDVAN DA SILVA FERREIRA

UM ESTUDO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E SUAS VARIAÇÕES

REDENÇÃO
2023

JOSÉ EDVAN DA SILVA FERREIRA

UM ESTUDO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E SUAS VARIAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

REDENÇÃO - CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Ferreira, José Edvan da Silva.

F383e

Um estudo das progressões aritméticas, geométricas e suas variações / José Edvan da Silva Ferreira. - Redenção, 2023.
52fi: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Sequências. 2. Progressões. 3. Progressões Aritmético-Geométricas. 4. Progressões Geométrico-Aritméticas. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510.7

JOSÉ EDVAN DA SILVA FERREIRA

UM ESTUDO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E SUAS VARIAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 29/08/2023

BANCA EXAMINADORA

Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dr. Rui Eduardo Brasileiro Paiva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado resiliência para enfrentar os momentos mais difíceis.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

A minha mãe Maria Irene da Silva Ferreira e ao meu pai Francisco Evangelista Ferreira (*in memoriam*), pelas contribuições e suportes dados durante minha vida estudantil.

Ao Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela excelente orientação e dedicação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho e Prof. Dr. Rui Eduardo Brasileiro Paiva pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores e funcionários que trabalham na mesma instituição de ensino que eu, pelas valiosas ajudas dadas, em especial ao professores de Ciências da Natureza e Matemática.

Aos colegas da turma de Mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

A todos os professores do curso PROFMAT-UNILAB, pelos valiosos conhecimentos transmitidos, em especial ao Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório e a Profª Drª Amanda Angélica Feltrin Nunes, pelas contribuições nos momentos mais difíceis do curso.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não é a posse, mas o ato de chegar lá, que nos dá a maior satisfação.”

Carl Friedrich Gauss.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar as sequências conhecidas como Progressões Aritméticas e Geométricas de primeira e segunda ordens, construídas a partir de relações de recorrências de seus termos gerais, bem como suas propriedades e algumas aplicações na resolução de problemas. Além disso, realiza-se um estudo de suas variações denominadas aqui como Progressões Harmônicas de primeira e segunda ordens e as progressões mistas, construídas a partir do produto dos termos de uma Progressão Aritmética com uma Progressão Geométrica (Progressões Aritmético-Geométricas) e a partir da soma dos termos das Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas (Progressões Geométrico-Aritméticas). Por fim, é abordado a aplicabilidade dos conteúdos desta dissertação, em particular das Progressões Harmônicas e das Progressões Mistas, no Ensino Básico, para que possa melhorar a compreensão dos discentes nestes assuntos.
Palavras-chave: Sequências. Progressões. Progressões Aritmético-Geométricas. Progressões Geométrico-Aritméticas.

ABSTRACT

The objective of this work is to study the sequences known as Arithmetic and Geometric Progressions of the first and second orders, constructed from recurrence relations of their general terms, as well as their properties and some applications in problem solving. In addition, a study is made of their variations, known here as first and second order Harmonic Progressions and mixed progressions, constructed from the product of the terms of an Arithmetic Progression with a Geometric Progression (Arithmetic-Geometric Progressions) and from the sum of the terms of Arithmetic Progressions and Geometric Progressions (Geometric-Arithmetic Progressions). Finally, the applicability of the contents of this dissertation, in particular Harmonic Progressions and Mixed Progressions, in Basic Education is addressed, so as to improve students' understanding of these subjects.
Keywords: Sequences. Progressions. Arithmetic-Geometric Progressions. Geometric-Arithmetic Progressions.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa apresenta uma abordagem sobre Progressões Aritméticas (PAs) e Geométricas (PGs) de primeira e segunda ordens e a partir destas outras progressões que são formadas somando ou multiplicando termos de PAs e PGs e considerando os inversos dos termos de PAs. Assim obteremos propriedades e aplicações dessas duas progressões tomadas com seus termos misturados formando Progressões Mistas, Progressões Geométrico-Aritmética e Progressão Aritmético-Geométrica. Existem poucos trabalhos realizados sobre Progressão Harmônica, Progressão Aritmético-Geométrica e Geométrico-Aritmética. Diante disso, torna-se necessário abordar, em um único trabalho, Progressão Harmônica, Aritmético-Geométrica e Geométrico-Aritmética e outros tipos de progressões, considerando a importância desses assuntos para o estudo das progressões matemáticas. Nesse sentido, uma das contribuições dessa pesquisa para os estudos matemáticos consiste na apresentação e exposição de ideias concepções sobre a temática das progressões que, por sua vez pode significar uma inserção de conteúdos para a pesquisa sobre progressões, assim como para o ensino desse assunto no Ensino Médio.

O objetivo geral deste trabalho é estudar as propriedades das Progressões Aritméticas e Geométricas. Com a intenção de se cumprir esse objetivo geral, definiu-se os seguintes objetivos específicos: mostrar que é possível combinar as PAs e PGs originando novas sequências chamadas Progressões Mistas, no caso as Progressões Harmônicas, Progressões Geométrico-Aritméticas (PAGs) e Progressões Aritmético-Geométricas (PGAs); analisar as progressões de segunda ordem harmônicas, aritméticas, geométricas, PAGs e PGAs para estas últimas serão analisados os casos de primeira ordem sem deixar de falar sobre a existência de ordens superiores; proporcionar um aprofundamento de conhecimentos das principais sequências estudadas no Ensino Básico.

Este trabalho a partir de sua estrutura está organizado, resumidamente, da seguinte forma: no capítulo 2 são apresentadas algumas noções sobre Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas e Progressões Harmônicas; no capítulo 3 algumas noções sobre progressões de segunda ordem para Progressões Aritméticas, Geométricas e Harmônicas; e no capítulo 4 algumas noções sobre progressões mistas.

2 PROGRESSÕES

Neste capítulo iremos discutir as Progressões Ariméticas, Geométricas e as Progressões Harmônicas, que são obtidas a partir das Progressões Aritméticas. As notações e resultados estão baseados principalmente em Morgado (2015), Oliveira (2021) e Neto *et al.* (2009).

Definição 2.1. Uma sequência numérica é uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número $n \in \mathbb{N}$, com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, associa um número $a(n)$, ou como também é escrito na maioria das vezes (a_n). Os números a_n são chamados termos da sequência, assim a_1 é o primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo termo da sequência e consequentemente a_n é o n-ésimo termo da sequência. A sequência $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, será representada por, $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ ou simplesmente como (a_n). A notação (a_n) será muito usada neste trabalho para denotar sequências numéricas.

Exemplo 2.1. A sequência definida por $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ possui o termo geral representado pela expressão $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. E dessa forma nessa sequência teremos: $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{4}$, $a_4 = \dfrac{1}{8}$ e assim respectivamente.

2.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Nesta seção falaremos sobre as Progressões Aritméticas começando com a sua definição e algumas propriedades, com a formalização do termo geral por recorrências e por último faremos a demonstração da soma dos seus termos usando Indução Matemática.

Definição 2.2. Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo é igual ao anterior somado com um valor constante denominado razão r da PA. Da mesma forma podemos dizer que uma sequência é uma PA, se a diferença entre dois termos consecutivos é constante e chamamos essa constante de razão r da PA.

Assim, podemos escrever os seguintes termos:

a) $a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 - a_1 = r$
b) $a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 - a_2 = r$
c) $a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 - a_3 = r$
d) $a_5 = a_4 + r \Rightarrow a_5 - a_4 = r$

De modo geral, vale a seguinte relação entre os termos de uma PA:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Somando as $(n-1)$ equações de um lado e do outro das igualdades e fazendo os cancelamentos possíveis chegamos a equação $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, que representa o termo geral de uma PA, com primeiro termo a_1 e razão r conhecidos. Podemos também escrever qualquer termo de uma Progressão Aritmética em função de um termo qualquer conhecido, denominado a_k e da razão r. Assim dada a Progressão Aritmética, $(a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots, a_n)$, podemos escrever:

$$\begin{array}{rcl} a_{k+1} & = & a_k + r \\ a_{k+2} & = & a_{k+1} + r \\ & \vdots & \\ + \ \underline{a_n} & = & \underline{a_{n-k} + r} \\ a_n & = & a_k + (n-k) \cdot r. \end{array} \qquad (1)$$

Somando as $(n-k)$ equações do lado esquerdo e do lado direito das igualdades e fazendo os cancelamentos possíveis chegamos a equação $a_n = a_k + (n-k) \cdot r$, que representa o termo geral de uma PA, conhecidos um termo a_k e a razão r. A equação $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ representa um caso particular da equação (1) . Assim a partir da equação (1) de modo geral, para passar de um termo de ordem k para um de ordem n, somamos a_k com $(n-k)$ vezes a razão r. Assim podemos dizer, que ao passar do termo a_k para o termo a_n, quando $n > k$ avançamos $(n-k)$ termos da sequência, caso contrário retrocedemos $(n-k)$ termos.

De acordo com o valor da razão r, uma PA poderá ser:

a) **Crescente**, se $r > 0$;
b) **Decrescente**, se $r < 0$;
c) **Estacionária**, se $r = 0$.

Exemplo 2.2. Escrever o termo a_{10} de uma PA conhecendo o termo a_2 e a razão r.
Solução: Pela equação (1) podemos escrever:

$$a_{10} = a_2 + (10-2) \cdot r = a_2 + 8 \cdot r.$$

■

Dessa forma podemos observar que para escrever a_{10} em função de a_2, somamos 8 vezes a razão, ou seja, avançamos 8 termos dessa sequência.

Exemplo 2.3. Considerando uma PA em que $a_5 = -3$ e $r = 5$, calcular o termo a_{25}.
Solução: Pela equação (1) podemos escrever:

$$a_{25} = a_5 + (25-5) \cdot r = a_5 + 20 \cdot r = -3 + 20 \cdot 5 = 97.$$

■

Exemplo 2.4. Escrever o termo a_4 de uma PA conhecendo o termo a_{10} e a razão r.
Solução: Pela equação (1) podemos escrever a_4 da seguinte forma:

$$a_4 = a_{10} + (4 - 10) \cdot r = a_{10} - 6 \cdot r.$$

■

Dessa forma observamos que para escrever a_4 em função de a_{10}, subtraímos 6 vezes a razão, ou seja, retrocedemos 6 termos dessa sequência.

Exemplo 2.5 (MORGADO, 2015)**.** Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ podem pertencer a mesma Progressão Aritmética?

Solução: Supondo sem perda de generalidade que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são termos de uma Progressão Aritmética crescente, então podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \sqrt{2} + m \cdot r \\ \sqrt{5} = \sqrt{2} + n \cdot r \end{cases}, m, n \in \mathbb{N}.$$

A partir dessas relações, igualando os valores de r em função de m e n, obtemos:

$$r = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{m} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{n},$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ \frac{n}{m} &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \\ \frac{n}{m} &= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{10} - 2}{3 - 2} \\ \frac{n}{m} &= \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2. \end{aligned}$$

Daí devemos ter $\frac{n}{m} = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$, mas $\frac{n}{m}$ é um número racional pois $n, m \in \mathbb{N}$ e o número $\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$ é irracional, para verificar a irracionalidade deste número veja Niven (2012). Portanto não é possível $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ serem termos de uma mesma Progressão Aritmética. ■

Exemplo 2.6. Determinar uma PA de três termos consecutivos cuja soma de seus termos é 39 e o produto é 2145.

Solução: Note que três termos consecutivos de uma PA podem ser escritos na forma $a-r, a, a+r$, assim:

$$\begin{cases} a-r+a+a+r=39 \\ (a-r)\cdot a\cdot(a+r)=2145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=39 \Rightarrow a=13 \\ (a^2-r^2)\cdot a=2145. \end{cases}$$

Substituindo $a=13$ em $(a^2-r^2)\cdot a=2145$, obtemos:

$$(169-r^2)\cdot 13=2154 \Rightarrow 169-r^2=165 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=\pm 2.$$

Assim, para $r=2$ obtemos os termos 11,13 e 15 e para $r=-2$ obtemos os termos 15,13 e 11. ■

Proposição 2.1. O termo geral de uma Progressão Aritmética é expresso por um polinômio de grau 1, em $n\in\mathbb{N}$. Reciprocamente, um polinômio de grau 1, em $n\in\mathbb{N}$, expressa o termo geral de uma Progressão Aritmética.

Demonstração: Dado o termo geral de uma Progressão Aritmética, $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$, assim temos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)\cdot r \\ a_n &= a_1+nr-r \\ a_n &= rn+(a_1-r). \end{aligned}$$

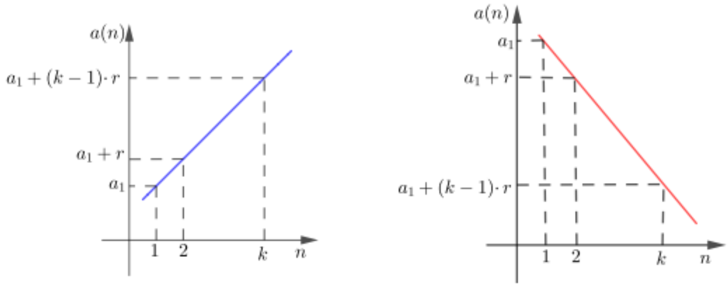
Fazendo $A=r$ e $B=a_1-r$, temos o termo geral da sequência, dado por um polinômio do 1º grau, visto que :

$$a(n)=An+B.$$

Reciprocamente desde que $P(n)=an+b$ é um polinômio de grau 1, comparando com a equação $a_n=rn+(a_1-r)$, temos $a=r$ e $b=a_1-r$. Assim $P(n)$ expressa o termo geral de uma Progressão Aritmética de razão $r=a$ e $a_1=b+a$. ■

A Figura 1 mostra uma função polinomial do 1º grau que contém pontos (n,a_n) de uma PA nos casos em que a razão $r>0$ e $r<0$:

Figura 1 – Representação geométrica de uma PA



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos destacar algumas propriedades das Progressões Aritméticas conhecidos alguns de seus termos, que podem ser encontradas em (OLIVEIRA, 2021) e (LOPES, 1998).

1. (OLIVEIRA, 2021) Seja três termos de uma Progressão Aritmética (a_p, a_q, a_r) com razão $r \neq 0$, então a igualdade $a_p + a_r = 2a_q$ acontece se e somente se, $p + r = 2q$.

   Demonstração: Seja (a_p, a_q, a_s) uma PA satisfazendo $a_p + a_r = 2a_q$, usando a fórmula do termo geral de uma PA, temos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot [a_1 + (q-1) \cdot r] &= a_1 + (p-1) \cdot r + a_1 + (s-1) \cdot r \\ \Leftrightarrow 2a_1 + 2qr - 2r &= a_1 + pr - r + a_1 + sr - r \\ \Leftrightarrow 2a_1 + 2qr - 2r &= 2a_1 + pr + sr - 2r \\ \Leftrightarrow 2q &= p + s. \end{aligned}$$

   ■

2. (OLIVEIRA, 2021) Seja $p < q < s < t$ os índices de quatro termos de uma Progressão Aritmética (a_n) com razão $r \neq 0$, então a relação entre os índices $p+t = q+s$ é válida se e somente se, $a_q + a_s = a_p + a_t$. Em particular, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

   Demonstração: Seja (a_p, a_q, a_s, a_t) quatro termos de uma PA, satisfazendo $a_q + a_s = a_p + a_t$. Usando a fórmula do termo geral de uma PA, obtemos:

$$\begin{aligned} a_q + a_s &= a_p + a_t \\ \Leftrightarrow a_1 + (q-1) \cdot r + a_1 + (s-1) \cdot r &= a_1 + (p-1) \cdot r + a_1 + (t-1) \cdot r \\ \Leftrightarrow 2a_1 + qr + sr - 2r &= 2a_1 + pr + tr - 2r \\ \Leftrightarrow qr + sr &= pr + tr \\ \Leftrightarrow p + t &= q + s. \end{aligned}$$

   ■

3. (LOPES, 1998) Em uma PA de razão $r \neq 0$, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

   Demonstração: Considere a PA $(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \cdots, a_n)$.

   Sabendo que a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, então usando o termo geral da PA, temos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_1 + (k+1-1)r; \qquad (2) \\ a_{n-k} &= a_1 + (n-k-1)r. \qquad (3) \end{aligned}$$

Somando (2) e (3), obtemos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + a_1 + (n-1)r \\ \Rightarrow a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.2. Dada uma Progressão Aritmética (a_n), a soma dos seus n primeiros termos será dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

Demonstração: Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética, vamos mostrar por Indução Matemática que:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Para $n = 1$, temos:

$$S_1 = a_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2}.$$

Portanto a proposição é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos agora que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \tag{4}$$

seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, devemos mostrar a validade para $n + 1$. Somando a_{n+1} a ambos os lados de (4) temos:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + a_{n+1}$$

Usando a relação do termo geral da PA (1), temos $a_{n+1} = a_1 + nr$, logo:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + a_1 + nr \\ &= \frac{na_1 + na_n + 2a_1 + 2nr}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot a_1 + (a_n + r) \cdot n + a_1 + nr}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot a_1 + na_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot a_1 + (n+1) \cdot a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, por Indução Matemática, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Definição 2.3. Podemos representar a soma dos termos de uma sequência (a_n) usando o simbolo $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ chamado somatório, que representa a soma dos termos a_k, para k variando de 1 até n. Assim podemos escrever uma soma da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

A partir dessa definição podemos escrever algumas propriedades do somatório:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k.$

Demonstração: Iremos demonstrar essa propriedade por indução em n. Então para $n = 1$, temos:

$\sum\limits_{k=1}^{1} (a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} a_1 + \sum\limits_{k=1}^{1} b_1.$

Suponhamos agora a validade para um n natural, devemos então demonstrar a validade para $n+1$. Observe que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) + a_{n+1} + b_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1} + b_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_k + \sum_{k=1}^{n+1} b_k.
\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é válida para $n+1$ e daí por Indução Matemática é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} Ca_k = C \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, com $C \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Iremos demonstrar essa propriedade por indução em n. Então para $n = 1$, temos:

$\sum\limits_{k=1}^{1} Ca_k = Ca_1 = C \sum\limits_{k=1}^{1} a_1$. Suponhamos agora a validade para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar a validade para $n+1$. Observe que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} Ca_k &= \sum_{k=1}^{n} Ca_k + Ca_{n+1} \\
&= C\sum_{k=1}^{n} a_k + Ca_{n+1} \\
&= C\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right) \\
&= C\sum_{k=1}^{n+1} a_k.
\end{aligned}$$

Portanto a propriedade é válida para $n+1$ e daí segue por Indução Matemática a validade pra todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Os próximos exemplos mostram as aplicações de somatórios e Progressões Aritméticas na resolução de problemas.

Exemplo 2.7. Determinar a soma dos n primeiros números naturais pares.

Solução: Devemos calcular $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + \cdots + 2n$, sabendo que os termos dessa soma formam uma PA de razão $r = 2k - 2(k-1) = 2$, usando a fórmula da soma dos termos da PA, temos:

$$S_n = \frac{(2+2n)\cdot n}{2} = \frac{2n^2+2n}{2} = n^2 + n.$$

■

Exemplo 2.8. Determinar a soma dos n primeiros números naturais impares.

Solução: Devemos calcular $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$. Sabendo que esse somatório forma uma PA de razão $r = (2n-1) - (2n-3) = 2$ e usando a fórmula da soma dos termos de uma PA, obtemos:

$$S_n = \frac{[1 + (2n-1)]\cdot n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

■

Exemplo 2.9. Determinar a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais.

Solução: Escrevendo em notação de somatório temos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Notando que:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1, \tag{5}$$

por outro lado,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3. \tag{6}$$

De (6), (7) e desde que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)\cdot n}{2},$$

concluímos que

$$(n+1)^3 = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)+2n+2}{2} \\
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2} \\
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{(n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2]}{2} \\
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2} \\
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.10 (MORGADO, 2015)**.** Calcular a soma dos n primeiros termos da sequência:

$$(1^3, 2^3, 3^3, \cdots, n^3).$$

Solução: Escrevendo em forma de somatório temos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

Note que:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1, \tag{7}$$

e, por outro lado,
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 + (n+1)^4. \tag{8}$$
De (8) e (9), concluímos que:
$$(n+1)^4 = n + 1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k. \tag{9}$$
Desde que,
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)\cdot n}{2}, \tag{10}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}. \tag{11}$$
Concluímos que:
$$(n+1)^4 = n + 1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{(1+n)\cdot n}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 &= (n+1)^4 - n\cdot(n+1)\cdot(2n+1) - 2n\cdot(n+1) - n \\
4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

■

2.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Nesta seção falaremos sobre as Progressões Geométricas definindo seu termo geral, o produto de seus termos e demonstraremos a soma de seus termos usando Indução Matemática.

Definição 2.4. Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência em que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado com um valor constante denominado razão q.

Em uma PG de razão q se conhecermos um termo é possível escrevermos todos os outros termos em função deste e da razão q. De modo geral, supondo $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, podemos escrever as seguintes relações entre os termos de uma PG:

$$\times \begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ a_4 = a_3 \cdot q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q. \end{cases}$$

E agora multiplicando os termos do lado direito e esquerdo das $n-1$ equações e cancelando os termos iguais de lados opostos chegamos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \cancel{a_4} \cdots a_n &= a_1 \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdots \cancel{a_{n-1}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdots q}_{(n-1)\ fatores} \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (12) \end{aligned}$$

Assim a equação (12) representa a fórmula do termo geral da Progressão Geométrica, dados $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$. Podemos também escrever de um modo mais geral qualquer termo de uma Progressão Geométrica em função de outro termo dado. Assim, dada a Progressão Geométrica $(a_1, a_2, a_3, \cdots a_k \cdots a_n, \cdots)$, podemos escrever:

$$\times \begin{cases} a_{k+1} = a_k \cdot q \\ a_{k+2} = a_{k+1} \cdot q \\ a_{k+3} = a_{k+2} \cdot q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q. \end{cases}$$

Multiplicando de um lado e do outro as $(n-k)$ equações e cancelando os termos iguais, obtemos:

$$\begin{aligned} \cancel{a_{k+1}} \cdot \cancel{a_{k+2}} \cdot \cancel{a_{k+3}} \cdots a_n &= a_k \cdot \cancel{a_{k+1}} \cdot \cancel{a_{k+2}} \cdots \cancel{a_{n-1}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdots q}_{(n-k\ fatores)} \\ a_n &= a_k \cdot q^{n-k}. \qquad (13) \end{aligned}$$

A equação (12) é um caso particular da equação (13) em que $k = 1$ e representa uma PG de primeiro termo a_1. Quando $q > 1$ a Progressão Geométrica será crescente e quando $0 < q < 1$ será decrescente.

Exemplo 2.11. Em uma Progressão Geométrica tem-se $a_5 = 160$ e $a_9 = 2560$. Calcular o primeiro termo e a razão dessa PG.

Solução: Sabendo que $a_9 = a_5 \cdot q^{9-5}$, então:

$$2560 = 160 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2.$$

Usando o fato de que $a_5 = a_1 \cdot q^4$, temos:

$$160 = a_1 \cdot 2^4 \Rightarrow a_1 = \frac{160}{16} = 10.$$

■

Exemplo 2.12. Quantos termos devemos inserir entre 12 e 1536 para obtermos uma PG de razão 2?

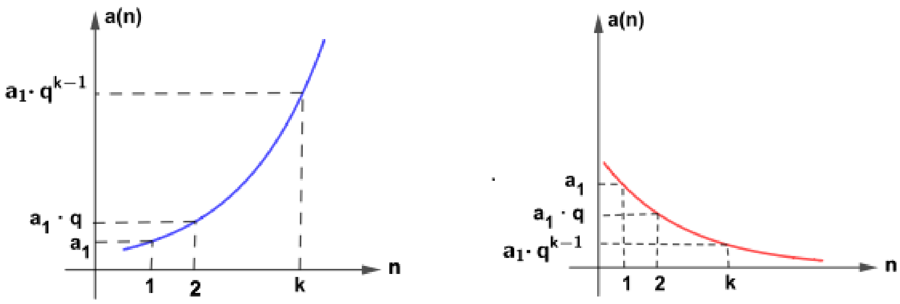
Solução: Considerando a PG $(12, \cdots, 1536)$, temos que $a_1 = 12$, $a_n = 1536$ e $q = 2$. Como queremos inserir termos entre 12 e 1536, então devemos ter $n = k + 2$, onde k é a quantidade de termos inseridos. Dessa forma, substituindo esses valores na equação (12):

$$\begin{aligned} 1536 &= 12 \cdot 2^{k+1} \Rightarrow \\ 128 &= 2^{k+1} \Rightarrow k = 6, \end{aligned}$$

logo devemos inserir 6 termos entre 12 e 1536. ■

A representação geométrica de uma Progressão Geométrica está relacionada com o gráfico de uma Função Exponencial. A Figura 2 mostra a representação geométrica de uma Função Exponencial em que possui os pontos (n, a_n) nos casos em $q > 1$ e em que $0 < q < 1$.

Figura 2 – Representação geométrica de uma PG para $q > 1$ e $0 < q < 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2.3. Se (a_n) é uma Progressão Geométrica com termos positivos, então (b_n) definida como $b_n = \log a_n$ é uma Progressão Aritmética.

Demonstração: Seja q a razão da Progressão Geométrica (a_n). Logo, $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Portanto,

$$b_{n+1} - b_n = \log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log q.$$

Assim, (b_n) é uma PA de razão $r = \log q$.

$\blacksquare$

Proposição 2.4. Se (a_n) é uma Progressão Aritmética então (b_n) definida como, $b_n = e^{a_n}$ é uma Progressão Geométrica.

Demonstração: Seja r a razão da PA (a_n) logo temos, $r = a_{n+1} - a_n$. Portanto,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1}-a_n} = e^r.$$

Assim (b_n) é uma PG de razão $q = e^r$. $\blacksquare$

Proposição 2.5. A soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica (a_n) é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{14}$$

Demonstração: Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica, vamos mostrar por Indução Matemática que:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Para $n = 1$, temos:

$$S_1 = a_1 = \frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1}.$$

Portanto, o resultado é verdadeiro para n = 1. Suponhamos agora que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \tag{15}$$

seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, devemos mostrar a validade para $n + 1$. Somando a_{n+1} a ambos os lados de (15) temos:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} + a_{n+1}.$$

Usando a relação do termo geral da PG (13), temos $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, logo:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} + a_1 \cdot q^n \\
&= \frac{a_1(q^n - 1) + a_1 \cdot q^n(q-1)}{q-1} \\
&= \frac{a_1 \cdot q^n + a_1 \cdot q^{n+1} - a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1} \\
&= \frac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, por Indução Matemática, $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 2.13. Calcular a soma dos 20 primeiros termos da Progressão Geométrica $(2, 4, 8, \ldots)$.

Solução: Considerando que $a_1 = 2$ e $q = 2$, temos:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{21} - 2.$$

■

O próximo Teorema será utilizado na demonstração de Teorema 2.2.

Teorema 2.1 (Desigualdade de Bernoulli)**.** Se $x > -1$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Iremos demonstrar essa desigualdade por indução em n. Para $n = 1$, teremos:

$$(1+x)^1 = 1 + 1x.$$

Suponhamos agora que $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então devemos demonstrar que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$. Como $x > -1$, daí $1 + x > 0$, então multiplicando ambos os lados da desigualdade por $1 + x$, temos, por hipote de indução:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Desde que $x > -1$ obtemos

$$\begin{aligned}
(1+x)(1+x)^n &\geq (1+nx)(1+x) \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + (1+n)x + nx^2 \geq 1 + (1+n)x.
\end{aligned}$$

Logo, por Indução Matemática, a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

A demonstração do próximo Teorema tem como referência Morgado (2015).

Teorema 2.2. Se $n \to \infty$ e $|q| < 1$, então o $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Demonstração: Considere $q = 0$, então escolhendo $\epsilon > 0$, temos:

$$|q^n - 0| < \epsilon.$$

Agora dado $q \neq 0$, para todo $\epsilon > 0$ pondo $h = \dfrac{1}{|q|} - 1$ e aplicando a desigualdade de Bernoulli 2.1, temos:

$$h = \frac{1}{|q|} - 1 \Rightarrow |q| = \frac{1}{h+1},$$

logo

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{(1+nh)} < \frac{1}{(nh)} < \epsilon,$$

se $n > \dfrac{1}{\epsilon h}$. Dessa forma a partir de $n > \dfrac{1}{\epsilon h}$, teremos os termos bem próximos de 0. Portanto para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ com, $|q| < 1$. ■

Corolário 2.1. A soma de todos os termos de uma Progressão Geométrica infinita com razão $|q| < 1$ é:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração: Na equação $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$, aplicando o limite quando $n \to \infty$ e considerando que o $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ para $|q| < 1$, obtemos:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(\cancelto{0}{q^n} - 1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

■

Exemplo 2.14 (MORGADO, 2015)**.** Sendo $x > 0$, calcule $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}}$.

Solução: Observando que $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{1}{16}} \cdots = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots}$, então a soma dos expoentes de x , $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots$ é a soma de uma PG infinita, em que $a_1 = \dfrac{1}{2}$ e $q = \dfrac{1}{2}$. Pelo corolário 2.1 segue que:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1.$$

Assim, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}} = x$. ■

Exemplo 2.15. Determine a fração geratriz da dízima periódica $0,252525\cdots$.

Solução: Escrevendo a dízima $0,252525\cdots$ como uma soma de frações, obtemos:

$$0,252525\cdots = \frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \frac{25}{1000000} + \cdots .$$

Usando a soma dos termos da PG infinita, temos $a_1 = \dfrac{25}{100}$ e $q = \dfrac{1}{100}$, logo:

$$0,252525\cdots = \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{25}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{25}{99}.$$

■

Proposição 2.6. O produto dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica é dado por:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{16}$$

Demonstração: Seja $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$, o produto dos n primeiros termos de uma PG. Usando a fórmula do termo geral da PG, podemos escrever o seguinte produto:

$$\begin{aligned}
P_n &= a_1 \cdot a_1 q \cdots a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^{n-1} \Rightarrow \\
P_n &= \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdots a_1)}_{n\ vezes} \cdots (q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdots q^{n-3} \cdot q^{n-2} \cdot q^{n-1}) \Rightarrow \\
P_n &= {a_1}^n \cdot q^{[1+2+3+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)]}.
\end{aligned}$$

Como o expoente, $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$ é a soma dos termos de uma PA, então:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

■

Exemplo 2.16. Determinar o produto das n potências de 2.

Solução: Considerando a sequência formada pelas n potências de 2, $(a_n) = (2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n)$ e sabendo que essa sequência forma uma Progressão Geométrica de razão $q = 2$. Usando a equação (16), obtemos o seguinte produto:

$$\begin{aligned} P_n &= 2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}} \\ &= 2^{\frac{n^2-n+2n}{2}} \\ &= 2^{\frac{n^2+n}{2}}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.17 (MORGADO, 2015)**.** Quanto vale o produto $P = (a) \cdot (aq) \cdot (aq^2) \cdot (aq^3) \cdots (aq^{n-1})$?

Solução: Considerando que a sequência $(q, q^2, q^3, \ldots, q^{n-1})$ é uma Progressão Geométrica de razão q e $n-1$ termos . Usando a equação (16), obtemos:

$$\begin{aligned} P &= a^n \cdot q^{n-1} \cdot q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \\ &= a^n \cdot q^{\frac{(n-1)(n-2)+2(n-1)}{2}} \\ &= a^n \cdot q^{\frac{n^2-n}{2}}. \end{aligned}$$

■

2.3 PROGRESSÕES HARMÔNICAS

Nesta seção começamos definindo Progressão Harmônica a partir de sua relação com as Progressões Ariméticas e falaremos ainda sobre a definição de Triângulo Harmônico e sua construção.

Definição 2.5. Uma sequência é uma Progressão Harmônica (PH) quando os inversos dos seus termos formam uma Progressão Aritmética. Assim, $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma PH se, e somente se, $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}, \cdots\right)$ é uma PA.

Pela expressão do termo geral da PA, temos:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot r.$$

Desde que $r = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$, onde r é a razão da PA, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) \\
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 \cdot a_2}\right) \\
\frac{1}{a_n} &= \frac{a_2 + (n-1) \cdot (a_1 - a_2)}{a_1 \cdot a_2} \\
a_n &= \frac{a_1 \cdot a_2}{a_2 + (n-1) \cdot (a_1 - a_2)},
\end{aligned}$$

que é o termo geral de uma Progressão Harmônica para $n \geq 2$.

Exemplo 2.18 (NETO *et al.*, 2009)**.** Determinar o 20° termo da PH $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \ldots\right)$.

Solução: Sabendo que $a_n = \frac{a_1 \cdot a_2}{a_2 + (n-1) \cdot (a_1 - a_2)}$, $a_1 = \frac{3}{2}$ e $a_2 = \frac{2}{5}$ temos:

$$\begin{aligned}
a_{20} &= \frac{\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{2}}{5}\right)}{\frac{2}{5} + (20-1) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5}\right)} \\
a_{20} &= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\frac{2}{5} + (19) \cdot \left(\frac{15-4}{10}\right)} \\
a_{20} &= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4+209}{10}} \\
a_{20} &= \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{10}}{213} \\
a_{20} &= \frac{6}{213}.
\end{aligned}$$

■

A definição a seguir leva em consideração a soma infinita dos termos de uma Progressão Harmônica onde $r = 1$, e será bastante útil para a definição do próximo resultado chamado Triângulo Harmônico ou Triângulo de Leibniz.

Definição 2.6. A série harmônica (S_h) é a soma dos inversos de infinitos números naturais. Assim podemos escrever:

$$S_h = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots .$$

Definição 2.7. O Triângulo Harmônico é formado a partir dos elementos da série harmônica, de tal forma que a primeira coluna é constituída por esses elementos em ordem decrescente de cima para baixo. E os elementos das demais colunas são obtidos fazendo a diferença entre o elemento de cima e o elemento debaixo a esquerda destes.

Figura 3 – Triângulo Harmônico.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & & & & & & & \\[6pt]
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\[6pt]
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & & & & & \\[6pt]
\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & & & & \\[6pt]
\frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & & & \\[6pt]
\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & & \\[6pt]
\frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{1}{105} & \frac{1}{140} & \frac{1}{105} & \frac{1}{42} & \frac{1}{7} & \\[6pt]
\frac{1}{8} & \frac{1}{56} & \frac{1}{168} & \frac{1}{280} & \frac{1}{280} & \frac{1}{168} & \frac{1}{56} & \frac{1}{8} \\[6pt]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 2.1. Observe que na 3ª coluna, o elemento $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}$; enquanto que na 6ª coluna o elemento, $\dfrac{1}{168} = \dfrac{1}{105} - \dfrac{1}{280}$.

Observação 2.2. Os elementos da 1ª coluna de um Triângulo Harmônico e da diagonal mais externa formam uma Progressão Harmônica.

3 PROGRESSÕES DE SEGUNDA ORDEM

Neste capítulo iremos falar sobre as Progressões Aritméticas, Geométricas e Harmônicas de segunda ordem. Iremos mostrar que existe uma relação entre as Progressões Aritméticas de segunda ordem e os polinômios de grau 2 e que existe uma relação entre Progressões Geométricas de segunda Ordem e Progressões Aritméticas de segunda ordem envolvendo sequência formada por logaritmos. Ao fim veremos que é possível expandir essas progressões pra uma ordem k, embora nosso objetivo seja estudar os casos de ordem 2. Teremos como base de pesquisa Morgado (2015), Diógenes e Lima (2020), Lopes (2017) e Martins (2015).

3.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE SEGUNDA ORDEM

Para definirmos as Progressões Aritméticas de segunda ordem precisamos definir o operador diferença, que é fundamental para a generalização das Progressões Ariméticas para uma ordem k.

Definição 3.1. Para uma sequência (a_n), podemos definir o operador diferença da seguinte forma:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

De acordo com o operador diferença, dizemos que uma sequência (a_n) é uma PA, se e somente se, (Δa_n) formar uma sequência de termos constantes. Podemos usar o operador diferença para definir as Progressões Aritméticas de ordem 2 que será vista na próxima definição.

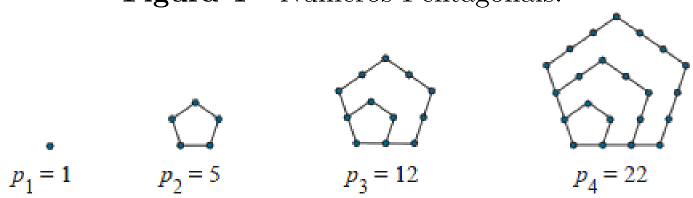
Definição 3.2. Uma Progressão Aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) onde a sequência formada pelo operador diferença, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, forma uma Progressão Aritmética não-estacionária, ou seja, com razão $r \neq 0$. De outro modo podemos dizer que (a_n) é uma Progressão Aritmética de segunda ordem se $\Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$ for igual a uma sequência constante.

Exemplo 3.1. A sequência definida por $(a_n) = (0, 2, 6, 12, 20, 30, \cdots)$ é uma Progressão Aritmética de segunda ordem.

Solução: De fato, $(\Delta a_n) = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$ forma uma Progressão Aritmética não-estacionária de razão $r = 2$. ■

Exemplo 3.2. Os Números Pentagonais representados pela fórmula, $P(n) = \dfrac{3n^2 - n}{2}$, geram uma PA de 2ª ordem.

Figura 4 – Números Pentagonais.



Fonte: Gabrielli e Monteiro (RPM 68).

Solução: De fato, calculando $\Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &= \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2} - \left(\frac{3n^2 - n}{2}\right) \\
&= \frac{3n^2 + 6n + 3 - n - 1 - 3n^2 + n}{2} = 3n + 1 \\
\Delta(\Delta a_n) &= 3 \cdot (n+1) + 1 - [3n + 1] = 3.
\end{aligned}$$

Como $\Delta(\Delta a_n) = 3$ é constante, então a fórmula $P(n) = \dfrac{3n^2 - n}{2}$ é uma PA de 2ª ordem.

■

A demonstração da próxima proposição foi baseada em Diógenes e Lima (2020).

Proposição 3.1. O termo geral de uma Progressão Aritmética de segunda ordem é um polinômio de grau 2.

Demonstração: De fato, dada uma Progressão Aritmética de segunda ordem (a_n) , a sequência (Δa_n) forma uma PA de razão $r \neq 0$. Assim pela fórmula do termo geral de uma PA podemos escrever $\Delta a_n = \Delta a_1 + (n-1) \cdot r$. De modo geral, podemos escrever as seguintes recorrências:

$$\begin{aligned}
\Delta a_1 &= \Delta a_1 + 0 \cdot r \\
\Delta a_2 &= \Delta a_1 + 1 \cdot r \\
\Delta a_3 &= \Delta a_1 + 2 \cdot r \\
\Delta a_4 &= \Delta a_1 + 3 \cdot r \\
&\vdots \\
\Delta a_{n-1} &= \Delta a_1 + (n-2) \cdot r.
\end{aligned}$$

Somando os termos do lado esquerdo e do lado direito , obtemos:

$$\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4 + \cdots + \Delta a_{n-1} = (n-1) \cdot \Delta a_1 + r[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2)]. \quad (17)$$

Observando que pelo operador diferença Δa_n, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta a_1 &= a_2 - a_1\\
\Delta a_2 &= a_3 - a_2\\
\Delta a_3 &= a_4 - a_3\\
\Delta a_4 &= a_5 - a_4\\
&\vdots\\
\Delta a_{n-1} &= a_n - a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Podemos reescrever a equação (17), como:

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1}) = (n-1)\cdot\Delta a_1+r[1+2+3+\cdots+(n-2)].$$

Cancelando os termos dos parenteses consecutivos do lado esquerdo e considerando o fato de que:

$$1+2+3+\cdots+(n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

, temos:

$$\begin{aligned}
a_n - a_1 &= (n-1)\cdot\Delta a_1 + r\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}\\
a_n &= a_1 + n\cdot\Delta a_1 - \Delta a_1 + r\cdot\frac{(n^2-3n+2)}{2}\\
a_n &= \frac{r}{2}\cdot n^2 + \left(\Delta a_1 - \frac{3r}{2}\right)n + (r + a_1 - \Delta a_1). \qquad (18)
\end{aligned}$$

Como $r \neq 0$, a_n representa um polinômio de grau 2, e portanto o termo geral de uma Progressão Aritmética é um polinômio de grau 2.

Vale a recíproca da Proposição 3.1. $\blacksquare$

Proposição 3.2. Todo polinômio de grau 2 em n, expressa o termo geral de uma Progressão Aritmética de segunda ordem.

Demonstração: Seja $a_n = an^2 + bn + c$ um polinômio de grau 2, logo $a \neq 0$. Calculando o $\Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$, obtemos:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - an^2 - bn - c = 2an + a + b \Rightarrow$$
$$\Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = 2a(n+1) + a + b - 2an - a - b = 2a.$$

Como $\Delta(\Delta a_n) = 2a$, que é constante e diferente de zero, então temos uma Progressão Aritmética de segunda ordem. $\blacksquare$

Proposição 3.3. Seja (a_n) uma Progressão Aritmética de $2^{\underline{a}}$ ordem, então da equação (18) seu termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}, \tag{19}$$

em que $b_1 = \Delta a_1$ e r é a razão da PA (Δa_n).

Podemos generalizar as Progressões Aritméticas para ordens superiores, para isso basta que generalizemos o operador diferença Δa_n para ordens superiores. Pela definição de Δa_n podemos escrever para PAs de $2^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}}$ e consequentemente de k-ésima ordem:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 a_n &= \Delta(\Delta^1 a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n \\
\Delta^3 a_n &= \Delta(\Delta^2 a_n) = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n \\
&\vdots \\
\Delta^k a_n &= \Delta(\Delta^{k-1} a_n) = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n.
\end{aligned}$$

Assim, observa-se que basta fazermos o operador diferença $\Delta^k a_n$, k vezes até obtermos uma Progressão Aritmética estacionária, com isso diremos que (a_n) é uma Progressão Aritmética de ordem k.

Exemplo 3.3. A sequência $(a_n) = (4, 34, 138, 388, 880, 1734, 3094, 5128, \cdots)$ é uma Progressão Arimética de $4^{\underline{a}}$ ordem.

Solução: De fato, calculando os valores de (Δa_n), $(\Delta^2 a_n) = (\Delta(\Delta a_n))$, $(\Delta^3 a_n) = (\Delta(\Delta^2 a_n))$ e $(\Delta^4 a_n) = (\Delta(\Delta^3 a_n))$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\Delta a_n) &= (30, 104, 250, 492, 854, 1360, 2034, \cdots). \\
(\Delta^2 a_n) &= (74, 146, 242, 362, 506, 674, \cdots). \\
(\Delta^3 a_n) &= (72, 96, 120, 144, 168, \cdots). \\
(\Delta^4 a_n) &= (24, 24, 24, 24, 24, \cdots).
\end{aligned}$$

Portanto como $(\Delta^4 a_n)$ é constante, então (a_n) é uma Progressão Aritmética de $4^{\underline{a}}$ ordem.

■

De acordo com essa generalização do operador diferença para Progressões Aritméticas de ordem k, podemos escrever a definição a seguir.

Definição 3.3. Diz-se que uma **Progressão Aritmética** é de **ordem** k, onde $k > 2$, se a sequência formada entre a diferença de cada termo e o seu anterior, forma uma **Progressão Aritmética** não-estacionária de **ordem** $k-1$.

Exemplo 3.4. No Exemplo 3.3 verificou-se que $(a_n) = (4, 34, 138, 138, 388, 880, 1734, \ldots)$

era uma progressão de $4^{\underline{a}}$ ordem, consequentemente $(\Delta a_n) = (30, 104, 250, 492, 854, \cdots)$ é uma Progressão Aritmética não-estacionária de $3^{\underline{a}}$ ordem.

3.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS DE SEGUNDA ORDEM

Para definirmos as Progressões Geométricas de segunda ordem é necessário definir o operador quociente, que é fundamental para uma possível generalização das Progressões Geométricas de segunda ordem.

Definição 3.4. Em uma sequência (b_n) definimos o **operador quociente**, como:

$$\nabla b_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{20}$$

De acordo com a Definição 3.4, uma sequência (b_n) é uma PG se e somente se, a sequência formada pelos operadores quociente (∇b_n), formarem uma sequência de termos constantes e diferentes de 1.

Exemplo 3.5. A sequência $(b_n) = (5, 15, 90, 1080, 25920, \ldots)$ forma uma Progressão Geométrica de $2^{\underline{a}}$ ordem.

Solução: Usando a Definição 3.4, temos:

$$\begin{aligned} (\nabla b_n) = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) &= \left(\frac{15}{5}, \frac{90}{15}, \frac{1080}{90}, \frac{25920}{1080}, \cdots\right) = (3, 6, 12, 24, \cdots). \\ (\nabla(\nabla b_n)) &= \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{6}, \frac{24}{12}, \cdots\right) = (2, 2, 2, \cdots). \end{aligned}$$

Logo, a sequência é uma PG de segunda ordem pois $(\nabla(\nabla b_n))$ é uma sequência constante.

Proposição 3.4. Seja (b_n) uma Progressão Geométrica de $2^{\underline{a}}$ ordem, então o seu termo geral é dado por:

$$b_n = b_1 \cdot {q_1}^{(n-1)} \cdot q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}, \tag{21}$$

onde $q_1 = \frac{b_2}{b_1}$ e q é a razão da PG (∇b_n).

Demonstração: Como (b_n) é uma Progressão Geométrica de $2^{\underline{a}}$ ordem, seja a sequência $(q_n) = (q_1, q_2, \cdots, q_{n-1})$ tal que $q_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, então podemos escrever as seguintes recorrências:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 \cdot q_1 \\ b_3 &= b_2 \cdot q_2 \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= b_{n-2} \cdot q_{n-2} \\ b_n &= b_{n-1} \cdot q_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo os fatores comuns do lado esquerdo e direito, obtemos:

$$b_n = b_1 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_{n-2} \cdot q_{n-1}. \tag{22}$$

Como $(\nabla b_n) = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}, q_{n-1})$ forma uma PG de razão q, então escrevendo cada termo em função de q_1 e de q, obtemos:

$$\begin{aligned}
q_2 &= q_1 \cdot q \\
q_3 &= q_1 \cdot q^2 \\
q_4 &= q_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
q_{n-2} &= q_1 \cdot q^{n-3} \\
q_{n-1} &= q_1 \cdot q^{n-2}.
\end{aligned}$$

Multiplicando e cancelando os fatores comuns de ambos os lados ficamos com:

$$q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdots q_{n-2} \cdot q_{n-1} = q_1^{n-2} \cdot q^{(1+2+\cdots+n-3+n-2)}. \tag{23}$$

Substituindo em (22), obtemos:

$$\begin{aligned}
b_n &= b_1 \cdot q_1 \cdot q_1^{n-2} \cdot q^{(1+2+\cdots+n-3+n-2)} \\
b_n &= b_1 \cdot {q_1}^{n-1} \cdot q^{\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.5. Se (b_n) é uma Progressão Geométrica de 2ª ordem, então $(\log b_n)$ é uma Progressão Aritmética de 2ª ordem.

Demonstração: Da Proposição 3.4 segue que (b_n) pode ser escrito como:

$$b_n = b_1 \cdot {q_1}^{(n-1)} \cdot q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}. \tag{24}$$

Logo, aplicando logaritmos a ambos os membros da equação(24), obtemos o seguinte polinômio:

$$\begin{aligned}
\log b_n &= \log\left(b_1 \cdot {q_1}^{(n-1)} \cdot q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\right) \\
&= \log b_1 + (n-1) \cdot \log q_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \log q \\
&= \frac{(n^2-3n+2)}{2} \cdot \log q + (n-1) \cdot \log q_1 + \log b_1.
\end{aligned}$$

Como $\log b_n$ é um polinômio de grau 2 em n, então aplicando a Proposição 3.2, temos que

$(\log b_n)$ é uma Progressão Aritmética de 2ª ordem. ■

A proposição a seguir nos diz que uma função exponencial do tipo $f(x) = kx^n$, transforma uma PA de 2ª ordem em uma PG também de 2ª ordem.

Proposição 3.6. Se (a_n) é uma Progressão Aritmética de 2ª ordem, então $(b_n) = (k \cdot r^{a_n})$ é uma Progressão Geométrica de 2ª ordem.

Demonstração: Se (a_n) é uma Progressão Aritmética de 2ª ordem então pela Proposição 3.1 $a_n = a_1n^2 + b_1n + c$, logo aplicando logaritmos em $b_n = k \cdot r^{a_1n^2+b_1n+c}$, temos:

$$\begin{aligned}
\log b_n &= \log\left(k \cdot r^{a_1n^2+b_1n+c}\right) \\
\log b_n &= \log k + (a_1n^2 + b_1n + c)\log r \\
b_n &= 10^{logk+(a_1n^2+b_1n+c)\log r}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Definição 3.4, vamos verificar se (b_n) é uma Progressão Geométrica de 2ª ordem:

$$\begin{aligned}
\nabla b_n &= \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{10^{\log k+(a_1n^2+2a_1n+a_1+b_1n+b_1+c)\log r}}{10^{\log k+(a_1n^2+b_1n+c)\log r}} \\
&= 10^{(2a_1n+a_1+b_1)\log r}. \\
\nabla^2 b_n &= \frac{\nabla b_{n+1}}{\nabla b_n} = \frac{10^{(2a_1n+2a_1+a_1+b_1)\log r}}{10^{(2a_1n+a_1+b_1)\log r}} \\
&= 10^{2a_1\cdot\log r} \\
&= 10^{\log r^{2a_1}} \\
&= r^{2a_1}.
\end{aligned}$$

Portanto, como $\nabla^2 b_n$ é constante, então (b_n) é uma Progressão Geométrica de 2ª ordem. ■

Observação 3.1. É possível generalizar o operador quociente para uma ordem k, e assim obter expressões para Progressões Geométrica de ordem k, o que se pode ver em Nunes e Gomes (2020).

3.3 PROGRESSÕES HARMÔNICAS DE SEGUNDA ORDEM

Como na definição de Progressão Harmônica que depende de uma Progressão Aritmética, as Progressões Harmônicas de segunda ordem dependem das Progressões Aritméticas de segunda ordem.

Definição 3.5. Uma sequência (h_n) é uma Progressão Harmônica de segunda ordem se o inverso de seus termos formarem uma Progressão Aritmética de segunda ordem. Assim se $(h_n) = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ for uma Progressão Harmônica de segunda ordem, então

$(a_n) = \left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \cdots, \frac{1}{h_n}\right)$ é uma Progressão Aritmética de segunda ordem.

Proposição 3.7. O termo geral de uma Progressão Harmônica de segunda ordem é dado por:

$$h_n = \frac{1}{a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}}, \tag{25}$$

onde a_1 é o primeiro termo da PA de segunda ordem associada a PH, $b_1 = \Delta a_1$ e r é a razão da PA (Δa_n).

Demonstração: Pela Definição 3.5 , temos que $(h_n) = \left(\frac{1}{a_n}\right)$ onde a_n é uma PA de segunda ordem. Pela Proposição 3.3, temos que $a_n = a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$. Daí segue o resultado. ■

Exemplo 3.6. Determinar o termo geral de um Progressão Harmônica de 2ª ordem formada a partir dos termos da Progressão Aritmética de 2ª ordem, $(a_n) = (4, 8, 14, 22, \ldots)$.

Solução: Como (a_n) é de 2ª ordem então, $(b_n) = (4, 6, 9, \ldots)$ é uma PA de 1ª ordem de razão $r = 2$ e primeiro termo $b_1 = 4$. Daí substituindo na equação (25), obtemos o seguinte termo geral da Progressão Harmônica de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{4 + (n-1)\cdot 4 + \frac{(n-1)(n-2)\cdot 2}{2}} \\ &= \frac{1}{n^2 + n + 2}. \end{aligned}$$

Escrevendo alguns termos dessa Progressão Harmônica de 2ª ordem obtemos a seguinte sequência $(h_n) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{14}, \frac{1}{22}, \cdots\right)$, onde observamos que se trata dos inversos dos termos da Progressão Aritmética de 2ª ordem (a_n). ■

Observação 3.2. Assim como nas PAs é possível da mesma forma generalizar as Progressões Harmônicas para uma ordem k.

Observação 3.3. Retornando à Definição 2.7 de Triângulo Harmônico (Figura 3) é possível observar que a 2ª coluna forma uma Progressão Harmônica de segunda ordem, bem como a diagonal logo abaixo da diagonal superior. De modo geral pode-se ver em Martins (2015) que a coluna k de um Triângulo Harmônico é formada por uma Progressão Harmônica de ordem k.

4 PROGRESSÕES MISTAS

Neste capítulo veremos como formar novas sequências a partir das Progressões Ariméticas e Geométricas. Para isso iremos multiplicar e somar os termos destas e formar Progressões Mistas chamadas, respectivamente, Progressões Arimético-Geométricas e Geométrico-Ariméticas. Veremos que existe uma relação entre as Progressões Aritmético-Geométricas e as relações de recorrência homogêneas cujas equações características possuem raízes iguais. Aplicaremos essas novas relações que envolvem PA e PG para resolver alguns problemas propostos nos livros Matemática Discreta, de Morgado (2015) e Noções de Matemática, de Neto *et al.* (2009). As definições e demostrações aqui estudadas são baseadas nos artigos de Paiva (2010) e Carneiro e Moreira (2002).

4.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

De acordo com Paiva (2010) dada uma PA de termos consecutivos $(a, a+r, a+2r, \cdots, a+(n-1)\cdot r, \cdots)$ e uma PG de termos consecutivos $(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots)$, cujo primeiro termo é igual a 1, multiplicando os termos dessas progressões ordenadamente formamos uma nova sequência $(a, (a+r)\cdot q, (a+2r)\cdot q^2, \ldots, [a+(n-1)\cdot r]\cdot q^{n-1}, \ldots)$, chamada **Progressão Aritmético-Geométrica (PAG)**.

Definição 4.1. Uma **Progressão Aritmético-Geométrica** é uma sequência cujo termo geral é da forma:

$$a_n = [a+(n-1)r]q^{n-1}. \tag{26}$$

Em que a, r e q são constantes não nulas e $q \neq 1$.

Observamos que se $q = 1$ em (26) teríamos o termo geral de uma Progressão Aritmética $a_n = a + (n-1)\cdot r$, onde $a_1 = a$. E se $r = 0$, teríamos o termo geral de uma Progressão Geométrica $a_n = a \cdot q^{n-1}$, com $a_1 = a$.

Proposição 4.1. Se o primeiro termo da PG, ou seja b_1, que multiplica a PA no termo geral da Progressão Aritmético-Geométrica não for igual a 1, então é sempre possível inserir este termo na PA afim de se adequar ao formato da equação (26).

Demonstração: De fato, seja a PA de termo geral $c_n = c_1 + (n-1)r$ e a PG de termo geral $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, pela equação (26) podemos escrever a seguinte PAG:

$$\begin{aligned} a_n &= [c_1 + (n-1)\cdot r]\cdot[b_1 \cdot q^{n-1}] \\ a_n &= [b_1 \cdot c_1 + (n-1)\cdot b_1 \cdot r]\cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Observe que com isso formamos uma nova PA de razão $b_1 \cdot r$. O próximo exemplo mostra como ocorre essa transformação na prática.

Exemplo 4.1. Dadas a PA $(2, 4, 6, \ldots)$ e a PG $(3, 9, 27, \ldots)$, escrever o termo geral da PAG formada pelo produto dos termos dessas progressões.

Solução: Escrevendo o termo geral da PA e da PG respectivamente, $a_n = 2 + (n-1)\cdot 2$ e $b_n = 3\cdot 3^{n-1}$ e multiplicando os termos dessas progressões temos:

$$\begin{aligned} a_n \cdot b_n &= [2 + (n-1)\cdot 2]\cdot[3\cdot 3^{n-1}] \\ a_n \cdot b_n &= [6 + (n-1)\cdot 6]\cdot 3^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Assim, podemos escrever a partir dos termos geral da PA e da PG o termo geral da PAG, $c_n = [6 + (n-1)\cdot 6]\cdot 3^{n-1}$. Alguns termos dessa sequência são:

- Para $n = 1$, $c_1 = [6 + (1-1)\cdot 6]\cdot 3^{1-1} = 6$.
- Para $n = 2$, $c_2 = [6 + (2-1)\cdot 6]\cdot 3^{2-1} = [6+6]\cdot 3 = 36$.
- Para $n = 3$, $c_3 = [6 + (3-1)\cdot 6]\cdot 3^{3-1} = [6+12]\cdot 3 = 162$.

Adiante damos mais alguns exemplos de Progressões Aritmético-Geométricas (PAG), bem como seus respectivos termos gerais.

Exemplo 4.2. A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \cdots\right)$, é uma PAG em que seu termo geral é da forma $a_n = [1 + (n-1)\cdot 2]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, com $a = 1$, $r = 2$ e $q = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4.3. A sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-3, 10, -28, 72, -176, \cdots)$, é uma PAG onde seu termo geral é $b_n = [-3 + (n-1)\cdot(-2)]\cdot(-2)^{n-1}$, com $a = -3$, $r = -2$ e $q = -2$.

Exemplo 4.4. A sequência $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}, \frac{3}{16}, \frac{11}{96}, \cdots\right)$, é uma PAG de termo geral $c_n = \left[\frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{3}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, com $a = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4.5. A sequência $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5, -2, -12, 56, -176, \cdots)$, é uma PAG de termo geral $d_n = [5 + (n-1)\cdot(-4)]\cdot(-2)^{n-1}$, com $a = 5$, $r = -4$ e $q = -2$.

Proposição 4.2. Seja $([a + (n-1)r]q^{n-1})$ uma Progressão Aritmético-Geométrica. Então a soma S_n dos n primeiros termos da PAG é dada por:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2}. \tag{27}$$

Demonstração: Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, a soma dos n primeiros termos de uma

Progressão Aritmético-Geométrica, vamos mostrar por Indução Matemática que:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\left[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\right]}{(1-q)^2}.$$

Para $n = 1$, temos:

$$S_1 = a_1 = \frac{a(1-q^1)}{1-q} + \frac{rq[1 - 1q^{1-1} + (1-1)q^1]}{(1-q)^2} = a.$$

Portanto, o resultado é verdadeiro para $n = 1$. Suponhamos agora que

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\left[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\right]}{(1-q)^2}. \tag{28}$$

é verdadeiro, para algum $n \in \mathbb{N}$, devemos mostrar a validade para $n+1$. Somando a_{n+1} a ambos os lados de (28) temos:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\left[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\right]}{(1-q)^2} + a_{n+1}$$

Usando a relação do termo geral da PAG (26), temos $a_{n+1} = (a + nr)q^n$, logo:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + a_{n+1} &= \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\left[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\right]}{(1-q)^2} + (a+nr)q^n \\ &= \frac{a(1-q^n)}{1-q} + aq^n + \frac{rq\left[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\right]}{(1-q)^2} + nrq^n \\ &= \frac{a(1-q^n) + (1-q)aq^n}{1-q} + \frac{rq\left[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\right] + (1-q)^2 nrq^n}{(1-q)^2} \\ &= \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} + \frac{rq[1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}]}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, por Indução Matemática, $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} + \dfrac{rq[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2}$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

O corolário a seguir será muito utilizado na resolução de PAGs com infinitos termos e $|q| < 1$, onde q é a razão da PG associada a essa PAG. Lembrando que conforme Teorema 2.2, quando $|q| < 1$ temos $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Corolário 4.1. Seja $([a + (n-1) \cdot r] \cdot q^{n-1})$, uma Progressão Aritmético-Geométrica com infinitos termos e $|q| < 1$. Então a soma dos seus termos é dada por:

$$S = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}.$$

Afim de exemplificar a aplicação da fórmula da soma de uma PAG, resolveremos alguns exercícios propostos nos livros Noções de Matemática (NETO, 2009) e Matemática Discreta (MORGADO, 2015). Vale ressaltar que o assunto aqui abordado não se encontra nos livros em questão.

Exemplo 4.6 (MORGADO, 2015)**.** Calcule o valor da soma de n parcelas $1 + 11 + \cdots + 111\cdots 1$.

Solução: Desmembrando os termos das parcelas da soma observamos que:

$$\begin{aligned} 1 + 11 + \cdots + 111\cdots 1 &= 1 + (1+10) + (1+10+10^2) \\ &\quad + \cdots + (1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}) \\ &= n\cdot 10^0 + (n-1)\cdot 10^1 + (n-2)\cdot 10^2 \\ &\quad + \cdots + [n-(n-1)]\cdot 10^{n-1} \\ &= n\cdot 10^0 + (n-1)\cdot 10^1 + (n-2)\cdot 10^2 + \cdots + 1\cdot 10^{n-1}. \end{aligned}$$

Observando ainda que cada termo da soma acima forma uma PAG de termo geral conforme a equação (26) igual a, $a_k = [n + (k-1)\cdot(-1)]\cdot 10^{k-1}$ com $1 \leq k \leq n$, em que a razão da PA é $r = -1$, com $a_1 = n$ e a razão da PG é $q = 10$. Usando a equação (27), temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\cdot(1-10^n)}{1-10} + \frac{(-1)\cdot 10\cdot[1 - n\cdot 10^{n-1} + (n-1)\cdot 10^n]}{(1-10)^2} \\ S_n &= \frac{-n + n10^n}{9} + \frac{-10 + 10\cdot n\cdot 10^{n-1} - 10\cdot n\cdot 10^n + 10\cdot 10^n}{81} \\ S_n &= \frac{-9\cdot n + 9\cdot n\cdot 10^n - 10 + n\cdot 10^n - n\cdot 10^{n+1} + 10^{n+1}}{81} \\ S_n &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.7 (NETO *et al.*, 2009)**.** Determine a soma dos n primeiros termos da sequência $(1, 2\cdot 3, 3\cdot 3^2, 4\cdot 3^3, \ldots)$.

Solução: Considerando a soma:

$$S_n = 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^{n-1} + \cdots ,$$

temos que o termo geral dessa sequência é dado por, $a_n = [1 + (n-1)\cdot 1]\cdot 3^{n-1}$ que representa uma PAG em que $r = 1$, $q = 3$ e $a = 1$. Usando a fórmula da soma dos termos de uma PAG conforme a equação (27), temos:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1\cdot(1-3^n)}{1-3}+\frac{1\cdot 3\cdot[1-n\cdot 3^{n-1}+(n-1)\cdot 3^n]}{(1-3)^2}\\
S_n &= \frac{(3^n-1)}{2}+\frac{3\cdot[1-n\cdot 3^{n-1}+(n-1)\cdot 3^n]}{4}\\
S_n &= \frac{2\cdot 3^n-2+3-n\cdot 3^n+3n\cdot 3^n-3\cdot 3^n}{4}\\
S_n &= \frac{1+2n\cdot 3^n-3^n}{4}=\frac{1+(2n-1)\cdot 3^n}{4}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.8 (NETO *et al.*, 2009)**.** Calcule a soma dos n primeiros termos da sequência $(1, 3\cdot 3, 5\cdot 3^2, 7\cdot 3^3, 9\cdot 3^4, \ldots)$.

Solução: Sabendo que a soma:

$$S_n = 1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+7\cdot 3^3+9\cdot 3^4+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}+\cdots,$$

e observando que o termo geral dessa sequência é $a_n = [1+(n-1)\cdot 2]\cdot 3^{n-1}$, representa uma PAG em que $r = 2$, $q = 3$ e $a = 1$. Usando então agora a fórmula da soma dos termos de uma PAG conforme equação (27), temos:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1\cdot(1-3^n)}{1-3}+\frac{2\cdot 3\cdot[1-n\cdot 3^{n-1}+(n-1)\cdot 3^n]}{(1-3)^2}\\
S_n &= \frac{3^n-1}{2}+\frac{6\cdot(1-n\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n-3^n)}{4}\\
S_n &= \frac{3^n-1+3\cdot(1-n\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n-3^n)}{2}\\
S_n &= \frac{2+2\cdot n\cdot 3^n-2\cdot 3^n}{2}\\
S_n &= 1+(n-1)\cdot 3^n.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.9 (MORGADO, 2015)**.** Determine o valor da soma, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\frac{9}{32}+\cdots$.

Solução: Observamos que a sequência tem numeradores em Progressão Aritmética de razão 2, enquanto que os denominadores estão em Progressão Geométrica de razão também igual a 2. Trata-se de uma Progressão Aritmético-Geométrica (PAG) de termo geral igual a $a_n = \left[\frac{1}{2}+(n-1)\cdot 1\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, com $a = \frac{1}{2}, r = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. Pelo Corolário 4.1 como temos uma soma infinita de termos de uma PAG, segue que:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1+2 = 3.$$

■

Exemplo 4.10 (NETO *et al.*, 2009)**.** Calcule $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^{n-1}}$.

Solução: Sabendo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^{n-1}} = \dfrac{1}{3^0} + \dfrac{3}{3^1} + \dfrac{5}{3^2} + \dfrac{7}{3^3} + \cdots$, observamos que os termos dos numeradores do desenvolvimento do somatório formam uma PA de razão 2, enquanto que os denominadores uma PG de razão 3. A sequência de termos representa uma PAG de termo geral, $a_n = [1 + (n-1) \cdot 2] \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, onde $a = 1$, $r = 2$ e $q = \dfrac{1}{3}$. Aplicando o Corolário 4.1 na soma dos termos de uma PAG equação (27), temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = 3.$$

Portanto, temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^{n-1}} = 3$. ■

Exemplo 4.11 (MORGADO, 2015)**.** Calcule $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^{2n}}$.

Solução: Sabendo que o desenvolvimento de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^{2n}} = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{3}{3^4} + \dfrac{5}{3^6} + \dfrac{7}{3^8} + \cdots$, observamos que os termos dos numeradores do desenvolvimento do somatório formam uma PA de razão 2, enquanto que os denominadores uma PG de razão 9. A sequência de termos representa portanto uma PAG de termo geral, $a_n = \left[\dfrac{1}{9} + (n-1) \cdot \dfrac{2}{9}\right] \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$, onde $a = \dfrac{1}{9}$; $r = \dfrac{2}{9}$ e $q = \dfrac{1}{9}$. Considerando o Corolário 4.1 e a soma dos termos de uma PAG equação (27) , temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{2n}} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} + \frac{\frac{2}{81}}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{8} + \frac{2}{\cancel{81}} \cdot \frac{\cancel{81}}{64} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}.$$

■

Exemplo 4.12 (MORGADO, 2015)**.** Determine o limite da soma $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$, com $-1 < x < 1$.

Solução: O termo geral da sequência é $a_n = n \cdot x^{n-1} = [1 + (n-1) \cdot 1] \cdot x^{n-1}$, que representa o termo de uma PAG, em que $a = 1$, $r = 1$ e $q = x$. Usando agora o Corolário 4.1, obtemos:

$$S = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

■

Exemplo 4.13 (MORGADO, 2015). Determine o valor de, $\sum\limits_{n=1}^{n} k \cdot 2^k$.

Solução: Sabendo que $\sum\limits_{n=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + 8 + 24 + 64 + \cdots + n \cdot 2^n$ e possui termo geral que pode ser escrito da seguinte forma $a_k = [2 + (k-1) \cdot 2] \cdot 2^{k-1}$ que representa uma PAG em que $a = 2$, $r = 2$ e $q = 2$, assim usando a fórmula da soma dos termos de uma PAG equação (27), temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{n} k \cdot 2^k &= \frac{2 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} + \frac{2 \cdot 2[1 - n \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^n]}{(1-2)^2} \\
&= 2^{n+1} - 2 + 4 - n \cdot 2^{n+1} + 2n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} \\
&= 2^{n+1} + 2 - n \cdot 2^{n+1} + 2n \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} \\
&= n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \\
&= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.
\end{aligned}$$

■

Antes de enunciar o próximo resultado, vamos relembrar um Teorema sobre as soluções das recorrências lineares homogêneas.

Teorema 4.1. Sejam r_1 e r_2 raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, com $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência linear homogênea $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma da forma $(C_1 + C_2 n) \cdot r^n$, onde C_1 e C_2 são constantes.

Uma demonstração desse Teorema pode ser verificada em Carvalho e Morgado (2015).

Teorema 4.2. Uma sequência é uma PAG se, e somente se, ela satisfaz uma recorrência linear de 2ª ordem com coeficientes constantes cuja equação característica tem raízes iguais.

Demonstração: Seja a_n satisfazendo a recorrência linear $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, cuja equação característica $x^2 + p \cdot x + q = 0$ e que possui raízes $r_1 = r_2 = s$. Então a_n é da forma $a_n = (C_1 + C_2 \cdot n) \cdot s^n$, conforme Teorema(4.1). Reescrevendo essa expressão, temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= (C_1 + C_2 \cdot n) \cdot s^n \\
a_n &= [C_1 + C_2 \cdot (n-1) + C_2] \cdot s \cdot s^{n-1} \\
a_n &= [(C_1 + C_2)s + (n-1) \cdot C_2 \cdot s] \cdot s^{n-1}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, de acordo com a equação (26) $a = (C_1 + C_2)s$, $r = C_2 s$ e $q = s$. Portanto, (a_n) é uma PAG.

Reciprocamente, suponha que (a_n) é uma PAG, então $a_n = [a + (n-1) \cdot r] \cdot q^{n-1}$, logo

$a + (n-1)\cdot r = \dfrac{a_n}{q^{n-1}}$ é uma PA. Daí, $\dfrac{a_{n+2}}{q^{n+1}} - \dfrac{a_{n+1}}{q^n} = \dfrac{a_{n+1}}{q^n} - \dfrac{a_n}{q^{n-1}}$. Portanto,

$$\frac{a_{n+2}}{q^{n+1}} = 2\cdot\frac{a_{n+1}}{q^n} - \frac{a_n}{q^{n-1}}. \tag{29}$$

Multiplicando a equação (29) por q^{n+1}, obtemos a seguinte equação:

$$a_{n+2} = 2\cdot q\cdot a_{n+1} - q^2\cdot a_n \Rightarrow$$

$$a_{n+2} - 2\cdot q\cdot a_{n+1} + q^2\cdot a_n = 0.$$

Assim temos uma recorrência de 2ª ordem com coeficientes constantes, cuja equação característica é $r^2 - 2\cdot q\cdot r + q^2 = 0$, que possui raízes $r_1 = r_2 = q$. ∎

4.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICO-ARITMÉTICAS

Segundo Paiva (2010) se somarmos os termos da Progressão Geométrica, $(a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, \cdots)$ ordenadamente com os termos da Progressão Aritmética de primeiro termo nulo, $(0, r, 2r, \cdots, (n-1)r, \cdots)$ obtemos uma nova sequência chamada Progressão Geométrico-Aritmética (PGA).

Definição 4.2. Uma **Progressão Geométrico-Aritmética** é uma sequência cujo termo geral é da forma:

$$a_n = a\cdot q^{n-1} + (n-1)\cdot r, \tag{30}$$

com a, q e r constantes não nulas e $q \neq 1$.

Exemplo 4.14. Dada uma PG de termos $(3, 6, 12, 24, \ldots)$ e uma PA de primeiro termo nulo $(0, 3, 6, 9, \ldots)$. Determine o termo geral da PGA formada pela soma dessas progressões.

Solução: Considerando o termo geral da PG de acordo com a sequência escrito como $b_n = 3\cdot 2^{n-1}$ e o termo geral da PA escrito $c_n = (n-1)\cdot 3$. Usando a equação (30), temos o termo geral da PGA $a_n = 3\cdot 2^{n-1} + (n-1)\cdot 3$.

Exemplo 4.15. A sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4, 11, 22, 41, 76, \cdots)$, com termo geral da forma $b_n = 4\cdot 2^{n-1} + (n-1)\cdot 3$ e $a = 4$, $r = 3$ e $q = 2$ é uma Progressão Geométrico-Aritmética.

Exemplo 4.16. A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-3, 4, -16, 18, -56, \cdots)$, com termo geral da forma $a_n = (-3)\cdot(-2)^{n-1} + (n-1)\cdot(-2)$ e $a = -3$, $r = -2$ e $q = -2$ é uma Progressão Geométrico-Aritmética.

Exemplo 4.17. A sequência $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{13}{12}, \frac{37}{24}, \frac{97}{48}, \cdots\right)$, com termo geral da forma $d_n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ para $a = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$ é uma Progressão

Geométrico-Aritmética.

Exemplo 4.18. A sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5, -14, 12, -52, 64, \cdots)$, com termo geral da forma $f_n = 5 \cdot (-2)^{n-1} + (n-1) \cdot (-4)$ e $a = 5$, $r = -4$ e $q = -2$ é uma Progressão Geométrico-Aritmética.

Proposição 4.3. Dada uma Progressão Geométrico-Aritmética cujo termo geral é dado por $a_n = aq^{n-1} + (n-1)r$. A soma de seus n primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{a \cdot (1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1) \cdot nr}{2}. \tag{31}$$

Demonstração: Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrico-Aritmética, vamos mostrar por Indução Matemática que:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2}.$$

Para $n = 1$, temos:

$$S_1 = a_1 = \frac{a(1-q^1)}{1-q} + \frac{(1-1)1r}{2} = a.$$

Portanto, o resultado é verdadeiro para $n = 1$. Suponhamos agora que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2} \tag{32}$$

seja verdadeiro, para algum $n \in \mathbb{N}$, devemos mostrar a validade para $n+1$. Somando a_{n+1} a ambos os lados de (32) temos:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2} + a_{n+1}$$

Usando a relação do termo geral da PGA (30), temos $a_{n+1} = aq^n + nr$, logo:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} &= \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2} + aq^n + nr \\
&= \frac{a(1-q^n) + aq^n(1-q)}{1-q} + \frac{(n-1)nr + 2nr}{2} \\
&= \frac{a - aq^n + aq^n - aq^{n+1}}{1-q} + \frac{n^2r - nr + 2nr}{2} \\
&= \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} + \frac{n(n+1)r}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, por Indução Matemática, $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} + \dfrac{(n-1)nr}{2}$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Exemplo 4.19. Determinar a soma dos n primeiros termos da Progressão Geométrico-Aritmética, $(a_n) = (5, 17, 49, 132, 413, \ldots)$:

Solução: Os termos dessa sequência são formados pela soma dos termos da PA $(0, 2, 4, \ldots)$ e da PG $(5, 15, 45, \ldots)$ e seu termo geral é da forma:

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + (n-1) \cdot 2,$$

onde $a = 5$, $r = 2$ e $q = 3$. Assim, usando a equação (31) a soma de seus termos é dado por:

$$S_n = \frac{5 \cdot (1 - 3^n)}{1 - 3} + \frac{(n-1) \cdot n \cdot 2}{2}$$

$$S_n = \frac{5 \cdot (3^n - 1) + 2 \cdot (n-1) \cdot n}{2}. \quad (33)$$

■

Observação 4.1. Rocha (2019), discorre sobre a generalização de PGAs e PAGs considerando PAs de ordem k, formando as PGA^ks e PA^kGs. Dessa forma, é possível sugerir a combinação de PAs de ordem k com PGs de ordem k, para formar PG^kA^ks e PA^kG^ks.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa apresentou uma análise de Progressões Aritméticas (PAs), Progressões Geométricas (PGs) e Progressões Harmônicas (PH) de primeira e segunda ordens a partir de suas propriedades e da construção das relações entre seus termos usando recorrências de primeira ordem. A partir das Progressões Aritméticas e Geométricas construímos as progressões mistas PGAs e PAGs.

Com as propriedades das PGAs e PAGs, resolvemos alguns problemas que envolviam sequências que tinham seus termos que se confundiam com uma PA e, às vezes, se confundiam com uma PG, não ficando muito claro qual era a sequência. Obtivemos assim, mais uma forma de resolver e obter os termos de sequências que tinham seus termos misturados. Assim, resolvemos alguns exercícios propostos nos livros de Matemática Discreta de Morgado (2015) e Progressões e Logaritmos de Neto *et al*(2009), sabendo que este primeiro livro não possui essa teoria, mas possui vários exercícios que são facilmente resolvidos com o uso dela.

Vimos também que existia uma relação entre as Progressões Aritmético-Geométricas e as recorrências de segunda ordem homogêneas com equações características que possuíam raízes iguais, fato este, que possibilita concluir a grande relevância e aplicabilidade desta sequência mista.

No penúltimo capítulo falamos sobre as Geométrico-Aritméticas que são formadas pela soma dos termos consecutivos de PAs e PGs. Vimos que estas, diferentemente das PGAs possuíam uma aplicação mais reduzida e tinham até a presente pesquisa poucas informações sobre aplicações e propriedades.

Além dessas duas sequências Mistas, vimos também as Progressões Harmônicas e sua aplicação na construção do chamado Triângulo Harmônico ou de Leibniz. Sendo que as diagonais deste eram formadas por Progressões Harmônicas.

Em relação às progressões aritméticas e geométricas, a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio – BNCC (BRASIL, 2018, p.533) define as seguintes habilidades:

a) EM13MAT507: Identificar e associar Progressões Aritméticas a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
b) M13MAT508: Identificar e associar Progressões Geométricas a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Nesse sentido, segundo a BNCC (BRASIL, 2018), entende-se que a resolução de problemas configura uma ação metodológica necessária para a compreensão das Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas considerando as habilidades propostas para o entendimento destas, conforme esse documento. Dessa forma sugerimos o trabalho em sala de aula com as Progressões Mistas no sentido de melhorar a capacidade dos alunos com respeito à compreensão de como são formadas as sequências e suas recorrências que, em geral, no Ensino Básico são passadas para os estudantes usando somente fórmulas, dificultando assim a assimilação dos comportamentos das sequências. Por exemplo, no fato de multiplicarmos uma PA com uma PG para formarmos as Progressões Aritmético-Geométricas poderiam muito bem ser aplicadas aos estudantes do Ensino Básico para expandir seus conhecimentos sobre o assunto e instigar a curiosidade dos estudantes na busca de novas sequências.

Assim como Rocha (2019) sugere em seu artigo para futuras pesquisas a combinação de PAs e PGs para formar Progressões Geométrico-Aritméticas alternadas, também podemos sugerir o estudo de PG^2A^2, ou seja, Progressão Geométrico-Aritmética de segunda ordem, considerando PGs e PAs de segunda ordens. E de modo mais geral considerarmos o caso das PG^kA^ks, Progressões Geométrico-Aritméticas de ordem k. O mesmo raciocínio sendo sugerido para os casos de PA^kG^ks.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio**. Brasília, 2018.

CARNEIRO, J. P.; MOREIRA, C. G.: **Sequências aritmético-geométricas. EUREKA!**, n. 14, p. 32-34, 2002. Disponível em: `https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka14.pdf`. Acesso em: 05 jul. 2023.

DIÓGENES, R. J. P.; LIMA, E. J. S. **Progressões Aritméticas de Ordem Superior e Recorrências Lineares**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 1, p. 1-12, 3 jun. 2020. Disponível em: `https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3700/2602`. Acesso em: 05 jul. 2023.

GABRIELLI, A. M. **Atividades com Números Poligonais e Sequências.RPM 68**. Disponível em: `https://www.rpm.org.br/cdrpm/68/2.html`. Acesso em: 05 jul. 2023.

LOPES, F. H. **O Ensino de Progressão Geométrica de Segunda Ordem no Ensino Médio**. 2017. 67f. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto-SP, 2017. Disponível em: `https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/920c8f7d-cce6-4a4c-b8f0-acb0a037019b/content`. Acesso em: 05 jul. 2023.

LOPES, L. **Manual de progressões**. Rio de Janeiro: Interciência, 1998, 126p.

MARTINS, D. P. **Progressão harmônica e o triângulo de Leibniz**. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37, Ed. Especial PROFMAT, p. 426-438, 2015. Disponível em: `https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14661/pdf/88200`. Acesso em: 05 jul. 2023.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015, 294 p.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI S.C. **Progressões e Matemática Financeira** .6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015, 161 p.

NETO, A. A.; SAMPAIO, J. L. P.; LAPA, N.; CAVALLANTE, S. L.**Progressões e logaritmos**. 2º grau. 2. ed. Vol. 2. Fortaleza: Editora Vestseller, 2009.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

NUNES, R. S. O.; GOMES, J. S. **Progressões aritméticas e geométricas de ordem**

superior e suas relações. PMO, v. 8, p. 551, 2020. Disponível em:https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/10/art40_vol8_PMO_SBM__2020.pdf. Acesso em: 05 jul. 2023.

OLIVEIRA, M. R. **Elementos da Matemática**. 3. ed., Vol. 3. Fortaleza: Editora Vestseller, 2021.

PAIVA, R. E. B. **Progressões Aritmético-Geométricas (PAG) e Progressões Geométrico-Aritméticas (PGA)**. RPM 73. Disponível em:https://rpm.org.br/cdrpm/73/12.html. Acesso em: 05 jul. 2023.

ROCHA, R. **Progressões geométrico-aritméticas e aritmético-geométricas generalizadas**. PMO, v. 7, n. 1, p. 37-45, 2019. Disponível em: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/11/art3_vol7_2019_PMO_SBM.pdf. Acesso em: 05 jul. 2023.