

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
(Mestrado)

RENATA YURI YOKOSAWA FUJISAWA

MECANISMOS ARTICULADOS GERADORES DE  
RETAS

Maringá-PR

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# MECANISMOS ARTICULADOS GERADORES DE RETAS

RENATA YURI YOKOSAWA FUJISAWA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração: Geometria Analítica.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

Maringá-PR

2023

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)**

F961m Fujisawa, Renata Yuri Yokosawa  
Mecanismos articulados geradores de retas / Renata  
Yuri Yokosawa Fujisawa. -- Maringá, 2023.  
x,76 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática, 2023.

1. Mecanismos articulados. 2. Retas. 3. Mecanismo de  
Watt. 4. Mecanismo de Tchebychev. 5. Mecanismo de  
Peaucellier. 6. Mecanismo de Hart. I. Neves, Eduardo de  
Amorim, orient. II. Universidade Estadual de Maringá.  
Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.  
III. Título.

CDD 22.ed. 516.352

Edilson Damasio CRB9-1.123

# RENATA YURI YOKOSAWA FUJISAWA

## MECANISMOS ARTICULADOS GERADORES DE RETAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

### COMISSÃO JULGADORA:



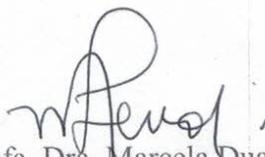
Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves  
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dr. Valter Soares Camargo  
UNESPAR - Universidade Estadual do Paraná



Prof. Dra. Luana Paula Goulart de Menezes  
UEM - Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dra. Marcela Duarte Ferrari  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 25 de agosto de 2023

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática – Bloco F67 (sala 217)

*À minha mãe, Neri Okada Yokosawa  
(in memoriam).*

## Agradecimentos

Agradeço ao professor Dr. Eduardo de Amorim Neves pela orientação, pela paciência e apoio; pelas inestimáveis dicas, correções, instruções e sugestões que permitiram tanto o desenvolvimento quanto a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao meu marido, Daniel, pelo estímulo e pela compreensão pelas incontáveis horas de ausência.

Agradeço aos meus pais, João e Neri (in memoriam), e aos meus irmãos, Paula e Daniel, pelo apoio de sempre.

Agradeço a todos os professores do ProfMat-UEM com quem tive o prazer de ter sido aluna por terem oferecido a base e o rigor matemático necessário para este trabalho.

Agradeço às amigas do mestrado, Fernanda e Juliana, que compartilharam tanto esta caminhada quanto o conhecimento.

Renata Yuri Yokosawa Fujisawa

## Resumo

Neste trabalho, estudamos quatro sistemas articulados geradores de retas, afim de verificar matematicamente por que eles funcionam. Esses mecanismos são formados por um conjunto de hastes rígidas, articuladas em suas extremidades, contendo ao menos uma extremidade fixa e uma extremidade móvel. Dentre os sistemas existentes, foram estudados os mecanismos de Watt (1784), Tchebychev (1850), Peaucellier (1864) e Hart (1874). Os dois primeiros, mecanismos de Watt e de Tchebychev, apresentam curvas próximas de uma reta, enquanto os dois últimos mecanismos, de Peaucellier e Hart, apresentam soluções exatas ao problema.

**Palavras-chave:** Mecanismos articulados. Retas. Mecanismo de Watt. Mecanismo de Tchebychev. Mecanismo de Peaucellier. Mecanismo de Hart.

## Abstract

In this work, we studied four articulated systems that generate straight lines, in order to mathematically verify why they work. These mechanisms are formed by a set of rigid rods, articulated at their ends, containing at the least one fixed end and one movable end. Among the existing systems, we studied Watt's(1784), Tchebychev's (1850), Peaucellier's (1864) and Hart's mechanism. The first two, Watt's and Tchebychev's mechanisms, present curves close to a straight line, while the last two mechanisms, by Peaucellier and Hart, present exact solutions to the problem.

**Keywords:** Articulated mechanisms. Straight lines. Watt's linkage. Tchebychev's linkage. Peaucellier's linkage. Hart's inversor.

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Curvas parametrizadas . . . . .	3
1.2 Inversão circular no plano . . . . .	9
<b>2 Mecanismo de Watt</b>	<b>19</b>
2.1 Contexto histórico . . . . .	19
2.2 A curva de Watt . . . . .	22
2.3 Construção no GeoGebra . . . . .	32
<b>3 Mecanismo de Tchebychev</b>	<b>36</b>
3.1 Contexto histórico . . . . .	36
3.2 A curva de Tchebychev . . . . .	38
3.3 Construção no GeoGebra . . . . .	51
<b>4 Mecanismo de Peaucellier</b>	<b>55</b>
4.1 Contexto histórico . . . . .	55
4.2 A Curva de Peaucellier . . . . .	57
4.3 Construção no GeoGebra . . . . .	59

<b>5 Mecanismo de Hart</b>	<b>62</b>
5.1 Contexto histórico . . . . .	62
5.2 A Curva de Hart . . . . .	63
5.3 Construção no GeoGebra . . . . .	70
<b>6 Conclusão</b>	<b>74</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>74</b>

---

## INTRODUÇÃO

Se traçarmos duas circunferências, uma usando uma moeda, outra usando um compasso, sabemos que o resultado obtido com o segundo é melhor e mais preciso do que aquele usando a moeda. Essa diferença qualitativa ocorre porque o compasso é um **instrumento** para a criação de uma circunferência, ao passo que a moeda é apenas um **perfil** [3].

Um perfil, como se nota, é um objeto que contém em si a própria curva (como a moeda contém em si a forma circular); de sua vez, o instrumento explora alguma propriedade da curva (como o compasso vale-se da equidistância dos pontos ao centro da circunferência, marcado pela ponta seca). Daí o motivo por que o instrumento apresenta resultados melhores do que um perfil.

No caso da reta, vemos que a régua atua também como um mero perfil para traçá-la, e não como um instrumento. Isso é assim porque a régua já contém em si uma forma retilínea e, portanto, para produzir a própria régua foi necessário forjar sua forma. Desse modo, embora a régua seja o objeto mais utilizado para traçar retas, ela não constitui um instrumento para traçá-las.

**Então, cabe a pergunta: é possível criar um instrumento que descreva um movimento retilíneo? Em caso positivo, como?**

É esta pergunta que motivou matemáticos a estudarem o tema e buscar solucioná-lo.

Dentre os matemáticos que se debruçaram sobre a questão, foram estudados neste trabalho os mecanismos criados por Watt (1784), Tchebychev (1850), Peaucellier (1864)

e Hart (1874).

A pesquisa concentrou-se na pesquisa por instrumentos (e não perfis) capazes de traçar retas ou aproximações de retas. Mais especificamente, foram estudados sistemas articulados geradores de retas, que são sistemas são formados pelo conjunto de hastes rígidas, articuladas em suas extremidades, contendo ao menos uma extremidade fixa e uma extremidade móvel. O compasso é um exemplo de sistema articulado gerador de circunferências.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, foram feitos estudos preliminares necessários à fundamentação matemática e ao melhor entendimento dos mecanismos estudados.

O capítulo 2 foi dedicado ao estudo do mecanismo criado por James Watt em 1783. Iniciou-se com uma breve parte histórica, seguida da parametrização da curva gerada pelo mecanismo e a indicação da equação geral da curva. Por fim, foi feita a descrição da construção do mecanismo no GeoGebra.

No capítulo 3, estudou-se o mecanismo de Tchebychev criado em 1850, igualmente iniciando com uma breve introdução histórica seguida da parametrização da curva gerada pelo mecanismo. Ao final, também foi feita a descrição da construção do mecanismo no GeoGebra.

Nos capítulos 4 e 5 foram estudados, respectivamente, os mecanismos de Peucellier (1864) e Hart (1874). Ambos os capítulos iniciaram com uma breve preliminar histórica, seguida pelo estudo de cada mecanismo e do motivo por que eles descrevem uma reta perfeita. No fim de cada capítulo, fizemos a descrição da construção dos mecanismos no GeoGebra.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

Neste capítulo iniciaremos estudando as curvas parametrizadas e a sua curvatura. Este estudo foi feito nas seções 1.1 a 1.4 deste capítulo e foram baseadas no livro *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* de PERDIGÃO DO CARMO (2005), limitando o estudo a curvas no plano.

Na sequência, estudaremos a inversão circular no plano com base no artigo "A inversão circular e sistemas articulados" (GARCIA e MUREB SALLUM, 2009). Este estudo preliminar se justifica pela necessidade dessa teoria na demonstração de que as curvas de Peacellier e de Hart de fato são retas perfeitas, como será visto nos capítulos 4 e 5.

### 1.1 Curvas parametrizadas

**Definição 1.1.** *Uma curva diferenciável parametrizada no plano é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  da reta real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ .*

O termo *diferenciável* usado na definição 1.1 indica que  $\alpha$  é uma correspondência que leva cada  $t \in I$  a um ponto  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  de modo que as funções reais  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis. Neste caso, a variável  $t$  é o *parâmetro* da curva. O termo *intervalo* é utilizado em sentido amplo, também incluindo os casos  $a = -\infty, b = +\infty$ .

A primeira derivada de  $x(t)$  e de  $y(t)$  em um ponto  $t$  serão denotadas por  $x'(t)$  e  $y'(t)$ , respectivamente, e, assim, o vetor  $(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^2$  é chamado de *vetor tangente* ou *vetor velocidade* da curva plana  $\alpha$ .

A imagem  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$  é chamado *traço* da curva  $\alpha$ .

**Exemplo 1.2.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (at + b, ct + d)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável parametrizada cujo traço é uma reta, e com equação de equação geral  $y = \frac{c}{a}x + \frac{ad - cb}{a}$ .

De fato:

$$\begin{aligned} x = at + b &\Leftrightarrow t = \frac{x - b}{a} \\ y = ct + d &= c \frac{x - b}{a} + d \Leftrightarrow y = \frac{c}{a}x + \frac{ad - cb}{a} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.3.** A aplicação  $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável parametrizada cujo traço é uma circunferência de raio  $r$  e centro  $(0, 0)$ .

Veja que  $r \cdot \cos(t)$  e  $r \cdot \sin(t)$  estão sempre limitados ao intervalo  $[-r, r]$ . Além disso, se calcularmos o vetor tangente dessa aplicação temos:

$$\alpha'(t) = (-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t)).$$

De sua vez, a norma do vetor tangente é:

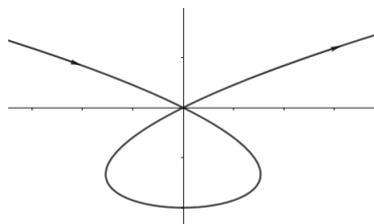
$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(-r \cdot \sin t)^2 + (r \cdot \cos t)^2} = \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{r^2} = r.$$

O que se tem, portanto, é que a norma do vetor tangente mede sempre  $r$  para todo parâmetro  $t$  e essa condição descreve, justamente, uma circunferência.

**Exemplo 1.4.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável parametrizada cujo traço está esboçado na figura a seguir. Note que  $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$ ; isto é, a aplicação  $\alpha$  não é biunívoca.

**Exemplo 1.5.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, |t|)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , não é uma curva diferenciável parametrizada, pois  $|t|$  não é diferenciável em  $t = 0$ .

Figura 1.1: Curva diferenciável parametrizada



Fonte: A autora.

Agora, devemos recordar algumas propriedades do produto interno de vetores em  $\mathbb{R}^2$ .

Seja  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ; definimos a sua norma (ou comprimento) por

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Geometricamente,  $|u|$  é a distância do ponto  $(u_1, u_2)$  à origem  $O = (0, 0)$ .

Sejam, agora,  $u = (u_1, u_2)$   $v = (v_1, v_2)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , e seja  $0 \leq \theta \leq \Pi$ , o ângulo formado pelos segmentos  $Ou$  e  $Ov$ . O produto interno  $u \cdot v$  é definido por

$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta.$$

Valem as seguintes propriedades:

1. Sejam  $u$  e  $v$  vetores não nulos. Então  $u \cdot v = 0$  se, e somente se,  $u$  é ortogonal a  $v$ .
2.  $u \cdot v = v \cdot u$ .
3.  $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$ .
4.  $u \cdot (u + w) = u \cdot v + u \cdot w$

Sejam  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . Verifica-se facilmente que  $e_i \cdot e_j = 1$  se  $i = j$  e que  $e_i \cdot e_j = 0$  se  $i \neq j$ , onde  $i, j = 1, 2$ .

Desse modo, se escrevermos

$$u = u_1e_1 + u_2e_2$$

$$v = v_1e_1 + v_2e_2$$

e utilizarmos as propriedades 3 e 4, obtemos

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Da expressão acima, temos que, se  $u(t)$  e  $v(t)$ ,  $t \in I$ , são curvas diferenciáveis então  $u(t) \cdot v(t)$  é uma função diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$$

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável parametrizada. Para cada  $t \in I$  tal que  $\alpha' \neq 0$ , há uma reta bem definida contendo o ponto  $\alpha(t)$  e o vetor  $\alpha'(t)$ . Essa reta é chamada de *reta tangente* a  $\alpha$  e  $t$ .

Ainda, chamaremos de *ponto singular* de  $\alpha$  um ponto  $t \in I$ , onde  $\alpha'(t) = 0$ .

**Definição 1.6.** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é chamada regular se  $\alpha' \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

Daqui em diante, serão consideradas apenas curvas diferenciáveis parametrizadas regulares e o termo diferenciável será omitido.

Dado  $t_0 \in I$ , o *comprimento de arco* de uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , a partir do ponto  $t_0$ , é por definição

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ . Como  $\alpha'(t) \neq 0$  (porque a curva parametrizada é regular), o comprimento do arco  $s$  é uma função diferenciável em  $t$  e  $ds/dt = |\alpha'(t)|$ .

Pode acontecer do parâmetro  $t$  já seja o comprimento de arco medido a partir de um certo ponto. Neste caso,  $ds/dt = 1 = |\alpha'(t)|$ ; isto é, o vetor velocidade tem comprimento constante igual a 1.

Reciprocamente, se  $|\alpha'(t)| = 1$ , então

$$s = \int_{t_0}^t dt = t - t_0;$$

isto é,  $t$  é o comprimento de arco de  $\alpha$  medido a partir de algum ponto.

Vamos nos restringir às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco  $s$  doravante.

**Exemplo 1.7.** Seja a aplicação  $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (at + b, ct + d)$ , cujo traço, como já vimos, é uma reta.

A norma do vetor tangente  $|\alpha'(t)|$  é igual a  $|\alpha'(t)| = |(a, c)| = \sqrt{a^2 + c^2}$ . Agora, vamos calcular o comprimento de arco, isto é:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + c^2} dt \\ &= t\sqrt{a^2 + c^2} \Big|_0^t = t\sqrt{a^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{s(t)}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Note que: quando  $t = 0$ , temos que  $s = s(0) = 0$ ; quando  $t = +\infty$ , temos que  $s = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = +\infty$ .

Logo, a aplicação pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco da seguinte forma:  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(s) = \left( a \frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}} + b, c \frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}} + d \right)$ .

**Exemplo 1.8.** Seja a aplicação  $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ , cujo traço, como já vimos, é uma circunferência de raio  $r$ .

Também já vimos que a norma do vetor tangente  $|\alpha'(t)|$  é igual a  $r$ . Agora, vamos

calcular o comprimento de arco, isto é:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_{t_0}^t r dt \\ &= rt \Big|_0^t = rt \\ \Leftrightarrow t &= \frac{s(t)}{r} \end{aligned}$$

Note que: quando  $t = 0$ , temos que  $s = s(0) = 0$ ; quando  $t = 2\pi$ , temos que  $s = 2\pi r$ .

Logo, a aplicação pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco da seguinte forma:  $\alpha : (0, 2\pi r) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(s) = \left(r \cdot \cos \frac{s}{r}, r \cdot \sin \frac{s}{r}\right)$ .

Seja  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Como o vetor tangente  $\alpha'(s)$  é unitário, o módulo  $|\alpha''(s)|$  da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em  $s$ . Assim,  $|\alpha''(s)|$  resulta numa medida do quão rapidamente a curva se afasta da tangente em  $t$ , em uma vizinhança de  $s$ . Isso sugere a definição a seguir.

**Definição 1.9.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $t \in I$ . O número  $|\alpha''(t)| = k(t)$  chama-se **curvatura** de  $\alpha$  em  $t$ .

**Teorema 1.10.** Uma curva parametrizada é uma reta se, e somente se, sua curvatura é zero para todo parâmetro.

*Demonstração.* Inicialmente, vimos no exemplo 1.2 que, se uma aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por duas equações de primeiro grau,  $\alpha(t) = (at + b, ct + d)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , então a aplicação possui o traço como reta cuja equação geral é  $y = \frac{c}{a}x + \frac{ad - cb}{a}$ .

De outro lado, suponha que  $\alpha$  seja uma reta com equação geral  $\alpha : mx + ny + p = 0$ , onde  $m, n, p \in \mathbb{R}$ . Neste caso,  $x = -\left(\frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right)$ .

Se fizermos  $t = \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}$  então  $x = -t$  e  $y = \frac{m}{n}t - \frac{p}{n}$ .

Portanto,  $\alpha$  pode ser parametrizada em função do parâmetro  $p$  da seguinte forma  $\alpha : \left(-t, \frac{m}{n}t - \frac{p}{n}\right)$ .

Isso mostra que  $\alpha$  pode ser parametrizada por duas equações de primeiro grau em função de  $t$ .

Feitas essas considerações iniciais, vamos à prova do teorema.

Se  $\alpha$  é uma reta, então podemos escrevê-la como uma aplicação  $\alpha(t) = (at+b, ct+d)$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Neste caso, como já vimos,  $\alpha$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco da seguinte forma:  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(s) = \left( a \frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}} + b, c \frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}} + d \right)$ .

Daí,  $|\alpha'(s)| = 1$  e  $\alpha''(s) = (0, 0)$  e, portanto,  $|\alpha''(s)| = 0$ .

Logo, se  $\alpha$  é uma reta, a curvatura é zero para todo  $t$ .

Recíproca: Se  $\alpha$  é uma curva cuja curvatura é igual a 0, isso indica que  $\alpha''(t) = (0, 0)$ , para todo  $t$ . Desse modo, integrando  $\alpha''(t)$  temos que a primeira derivada (vetor tangente) é constante, isto é,  $\alpha'(t) = (a, c)$ , onde  $a, c \in \mathbb{R}$ . Agora, integrando o vetor tangente, temos que  $\alpha(t) = (at + b, ct + d)$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Nessas condições,  $\alpha$  é uma reta. ■

**Exemplo 1.11.** Se  $\alpha$  é uma circunferência de raio  $r$  e centro em  $(0, 0)$ , sua equação parametrizada é  $\alpha(t) : (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ . Daí, como já vimos, a aplicação pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco da seguinte forma:  $\alpha : (0, 2\pi r) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(s) = \left( r \cdot \cos \frac{s}{r}, r \cdot \sin \frac{s}{r} \right)$ . Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left( -r \cdot \sin \left( \frac{s}{r} \right) \frac{1}{r}, r \cdot \cos \left( \frac{s}{r} \right) \frac{1}{r} \right) = \left( -\sin \left( \frac{s}{r} \right), \cos \left( \frac{s}{r} \right) \right) \\ \alpha''(s) &= \left( -\cos \left( \frac{s}{r} \right) \frac{1}{r}, -\sin \left( \frac{s}{r} \right) \frac{1}{r} \right) \\ |\alpha''(s)| &= \sqrt{\frac{1}{r^2} \left( \cos^2 \left( \frac{s}{r} \right) + \sin^2 \left( \frac{s}{r} \right) \right)} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Logo, a curvatura de  $\alpha$  é  $\frac{1}{r}$ .

## 1.2 Inversão circular no plano

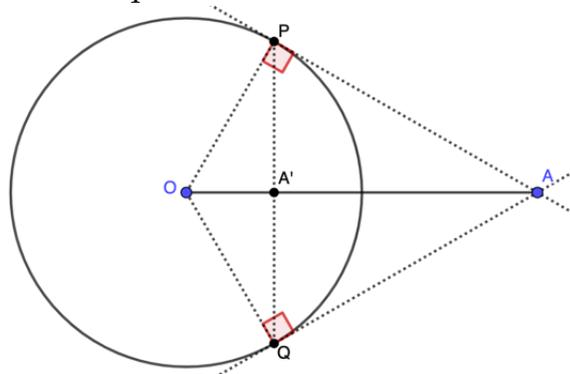
Agora, ainda nas preliminares, vamos estudar as inversões circulares no plano. Este estudo é importante porque, nos capítulos 4 e 5, justificamos matematicamente, a partir dessa teoria, o funcionamento dos mecanismos lá estudados.

Esta seção foi baseada no artigo "A inversão circular e sistemas articulados"(GARCIA e MUREB SALLUM, 2009).

**Definição 1.12.** A *inversão* em relação a uma circunferência  $C(O, r)$ , de centro  $O$  e raio  $r$ , é a transformação do plano sem o ponto  $O$ , em si mesmo que leva um ponto  $A$  em seu inverso  $A'$  conforme se segue:

- i) Se  $A$  está no exterior de  $C(O, r)$ : trace as duas tangentes a  $C(O, r)$  passando por  $A$ ; trace o segmento ligando os pontos de tangência  $P$  e  $Q$ , que corta o segmento  $OA$  no ponto  $A'$ . Então dizemos que  $A'$  é a inversão do ponto  $A$ ;

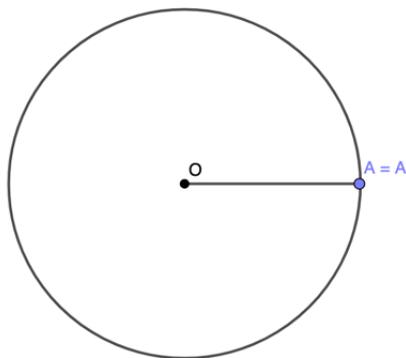
Figura 1.2: Inversão quando  $A$  está no exterior da circunferência



Fonte: A autora.

- ii) Se  $A \in C(O, r)$ : a inversão  $A'$  do ponto  $A$  é o próprio ponto  $A$ ;

Figura 1.3: Inversão quando  $A$  pertence à circunferência

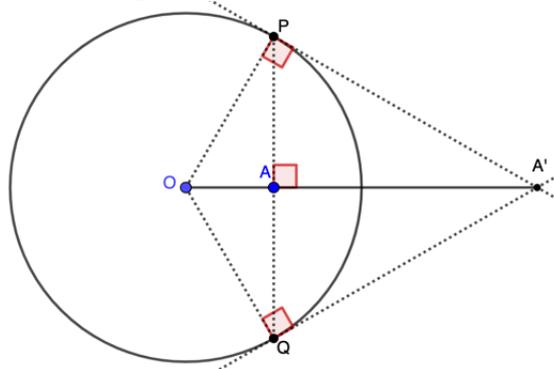


Fonte: A autora.

- iii) Se  $A$  está no interior de  $C(O, r)$ , com  $A \neq O$ : trace a semirreta  $OA$  e a reta  $s$ , perpendicular a  $OA$  passando por  $A$ ; marque os pontos  $P$  e  $Q$  nas interseções

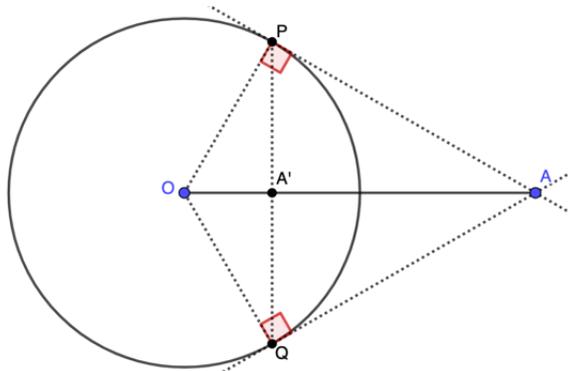
entre  $C(O, r)$  e  $s$ ; trace as tangentes a  $C(O, r)$  passando por  $P$  e  $Q$ , que se cortam no ponto  $A'$ , que é a inversão do ponto  $A$ .

Figura 1.4: Inversão quanto  $A$  está no interior da circunferência



Fonte: A autora.

**Proposição 1.13.** Se  $A$  está no exterior de  $C(O, r)$ , e sejam  $P$  e  $Q$  os pontos de tangência das duas retas tangentes a  $C(O, r)$  passando por  $A$ . Então  $PQ \perp OA$ .

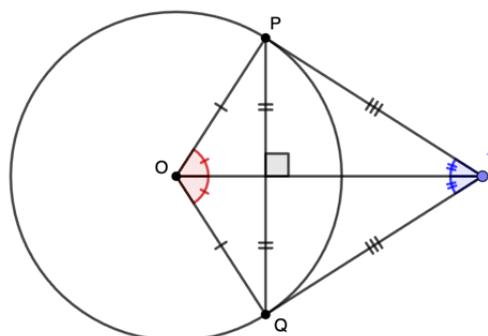


Fonte: A autora.

*Demonstração.*  $\overline{OP} = \overline{OQ}$  e  $m(\angle OPA) = m(\angle OQA) = 90^\circ$ . Logo, pelo caso especial de congruência cateto-hipotenusa, temos que os triângulos  $\triangle OPA$  e  $\triangle OQA$  são congruentes. Em particular,  $m(\angle POA) = m(\angle QOA)$ . Logo, o segmento  $OA'$  é a bissetriz do ângulo  $\angle POQ$ . Como o triângulo  $\triangle POQ$  é isósceles, então o segmento  $OA'$ , além de bissetriz, é também a altura do triângulo  $\triangle POQ$ . Sendo assim,  $PQ \perp OA'$  e, como  $A' \in OA$  de consequência,  $PQ \perp OA$ . ■

**Lema 1.14.** Seja  $\gamma$  um círculo de centro  $O$  e seja  $T$  um ponto exterior ao círculo. Se  $P$  e  $Q$  mostrados na figura abaixo são tais que  $TP$  e  $TQ$  são tangentes a  $\gamma$  então:

Figura 1.5: Lema 1.14



Fonte: A autora.

- (a)  $\overline{TP} = \overline{TQ}$ ;
- (b)  $TO$  é a mediatriz de  $PQ$ ;
- (c)  $TO$  é a bissetriz dos ângulos  $\angle POQ$  e  $\angle PTQ$ ;
- (d)  $TO \perp PQ$ .

*Demonstração.* A prova das asserções acima está na proposição 3.28 da referência [10].

■

**Proposição 1.15.** Se  $A'$  é a inversão circular de  $A$ , que está no interior de  $C(O, r)$ , com  $A \neq O$ , então  $A'$  pertence à reta  $OA$ .

*Demonstração.* Conforme lema 1.14, item (d), podemos afirmar que  $OA' \perp PQ$ . De sua vez, por construção,  $A \in PQ$  e  $OA \perp PQ$ . Sendo assim, temos duas retas perpendiculares à reta  $PQ$  passando por  $O$ . Sabemos que, dada uma reta  $r$  e um ponto  $T$  fora dela, existe uma única reta perpendicular a  $r$  passando pelo ponto  $T$ . Com isso, concluímos que  $OA$  e  $OA'$  são coincidentes e, portanto,  $A' \in OA$ , como queríamos demonstrar.

■

**Proposição 1.16.** Se  $A \neq O$  então  $(A')' = A$  e, portanto, a inversão é uma aplicação bijetora  $f : \mathbb{R}^2 - \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{O\}$ ;  $f(A) = A'$ .

*Demonstração.* Vamos provar que a função é injetora. Para isso, vamos dividir em 3 situações: quando  $A'$  está no exterior à circunferência, quando  $A'$  está na circunferência e quando  $A'$  está no interior da circunferência.

Caso 1 - Se  $A' = B'$ , ambos no exterior de  $C(O, r)$ : Nesta caso, significa que os pontos  $P$  e  $Q$ , que marcam a interseção da circunferência com a reta  $s$ , perpendicular à semirreta  $OA$ , são os mesmos para  $A'$  e  $B'$ . De consequência, a reta  $PQ$  é única e indica que  $A = B$ .

Caso 2 - Se  $A' = B'$ , ambos pertencentes a  $C(O, r)$ : Neste caso, por definição,

$$A = A' = B' = B.$$

Caso 3 - Se  $A' = B'$ , ambos no interior de  $C(O, r)$ : Nesta caso, significa que os pontos  $P$  e  $Q$ , que tangenciam a circunferência e passam por  $A' = B'$  são os mesmos para  $A'$  e  $B'$ . De consequência, as retas tangentes a  $P$  e a  $Q$  são únicas e se encontram no ponto  $A = B$ .

Agora, vamos provar que a função é sobrejetora, também dividindo em 3 casos.

Caso 1: Seja  $B$  pertencente ao plano  $\Pi - \{O\}$ , que é o plano que contém a circunferência  $C(O, r)$ , com  $B \neq O$ .

Se  $B$  pertence a  $C(O, r)$ , então tomemos  $A$  pertencente ao plano  $\Pi - \{O\}$  como sendo o próprio  $B$ . De outro lado, temos pela definição da inversão que  $A = A'$ . Desse modo, temos que  $B = A = A'$ .

Caso 2: Se  $B$  está no interior de  $C(O, r)$ , então trace a semirreta  $OB$  e a reta  $s$ , perpendicular a  $OB$  passando por  $B$ ; marque os pontos  $P$  e  $Q$  nas interseções entre  $C(O, r)$  e  $s$ ; trace as tangentes a  $C(O, r)$  passando por  $P$  e  $Q$ , que se cortam no ponto  $A$ . Agora, veja que  $A$  é exterior a  $C(O, r)$  e, fazendo a construção de seu inverso e em relação a  $C(O, r)$  veremos que  $A' = B$ . Logo, dado  $B$  no interior de  $C(O, r)$ , existe  $A$  tal que  $A' = B$ .

Caso 3: Se  $B$  está no exterior de  $C(O, r)$ , trace as duas tangentes a  $C(O, r)$  passando por  $B$ ; trace o segmento ligando os pontos de tangência  $P$  e  $Q$ , que corta o segmento  $OB$  no ponto  $A$ . Agora, veja que  $A$  é interior a  $C(O, r)$  e, fazendo a construção do seu inverso em relação a  $C(O, r)$  veremos que  $A' = B$ . Logo, dado  $B$  no exterior de  $C(O, r)$ , existe  $A$  tal que  $A' = B$ . ■

**Proposição 1.17.** *A inversão em relação à circunferência  $\gamma = C(O, r)$  é a transformação do plano, sem o centro  $O$ , que leva a cada ponto  $A \neq O$  em um ponto  $B$  da semirreta  $OA$  tal que*

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2.$$

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  inversos um do outro. Vamos dividir em dois casos:

- i) Se  $A = B$  então  $A, B \in C(O, r)$  e  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ .
- ii) Se  $A \neq B$ , os triângulos  $\triangle OBP$  e  $\triangle OPA$  são semelhantes pelo caso AA e, assim,  $\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$ . Logo, como  $\overline{OP} = r$ , então  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ .

■

A recíproca da última proposição também é válida. Isto é, se  $A$  e  $B$  são pontos de uma semirreta por  $O$ , tais que  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ , o ponto  $A$  é o inverso de  $B$ .

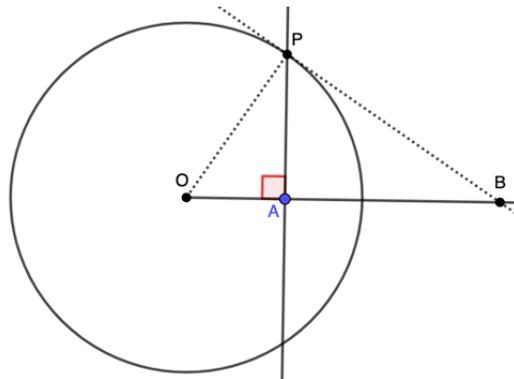
De fato.

Sem perda de generalidade, supomos que  $A$  está em  $\gamma$ . Então,  $\overline{OA} = r$  e, se  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ , então  $\overline{OB} = r$ , o que significa que  $B \in \gamma$  e, assim,  $A = B$ .

Agora, antes de avançarmos, veja que: um dos pontos está no interior de  $\gamma$  se, e somente se, o outro está no exterior. Suponha que  $A$  está no interior de  $\gamma$  e, por absurdo, suponha que  $B$  está em  $\gamma$  ou no interior de  $\gamma$ . Assim,  $\overline{OA} < r$  e  $\overline{OB} \leq r$ . De consequência,  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} < r^2$ , o que contradiz a hipótese de que  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ . De outro lado, suponha que  $A$  está no exterior de  $\gamma$  e, por absurdo, suponha que  $B$  está em  $\gamma$  ou no exterior de  $\gamma$ . Assim,  $\overline{OA} > r$  e  $\overline{OB} \geq r$ . De consequência,  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} > r^2$ , o que contradiz a hipótese de que  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ .

Agora, finalizando a prova da recíproca, suponha  $A$  no interior de  $\gamma$ .

Traçando  $PA \perp OB$  temos que  $\triangle POA \sim \triangle A'OP$  pelo caso de semelhança LAL.



Fonte: A autora.

Isso porque, por hipótese,  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ . Logo,  $\frac{\overline{OB}}{r} = \frac{r}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = k$ . Isso mostra que  $OB \sim OP$  e  $OP \sim OA$ . Além disso,  $\angle AOP \equiv \angle POA'$ .

Portanto,  $m(\angle OPB) = 90^\circ$  e  $B = A'$ , isto é,  $B$  é o inverso de  $A$ .

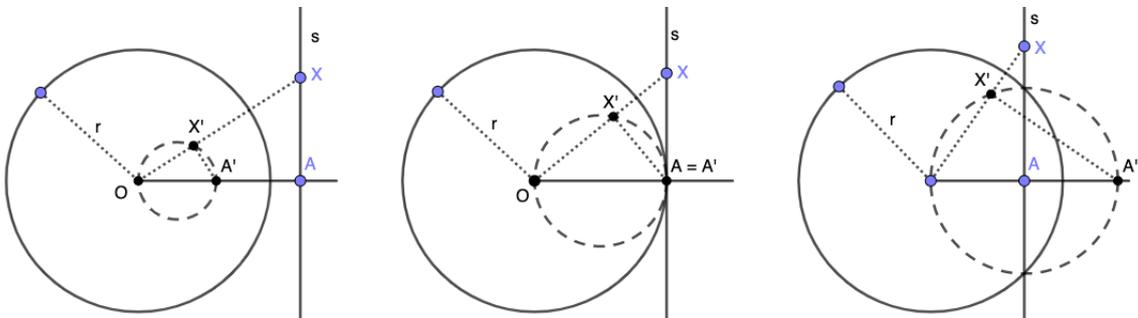
**Proposição 1.18.** *A inversão, em relação a uma circunferência  $\gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$ , leva uma reta que passa por  $O$ , sem esse ponto, nela mesma;*

*Demonstração.* Segue da definição de inversão. ■

**Proposição 1.19.** *(Inversão reta-circunferência) A inversão, em relação a uma circunferência  $\gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$ , leva:*

1. *uma reta que não passa por  $O$  em uma circunferência que passa por  $O$ ;*
2. *uma circunferência que passa por  $O$ , sem esse ponto, em uma reta que não passa por  $O$ ;*

*Demonstração.* 1. Dada uma reta  $s$  que não passa por  $O$ , trace a semirreta  $OA$  perpendicular a  $s$  no ponto  $A$  e marque o ponto  $A'$ , inverso de  $A$ .

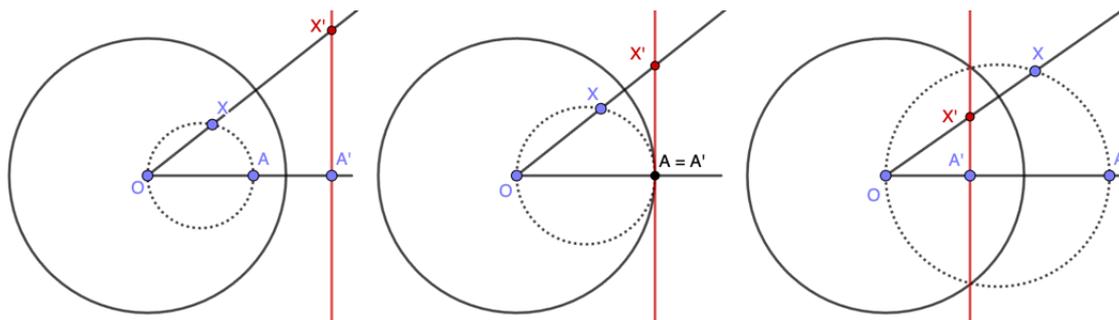


Fonte: A autora.

Para cada  $X \in s, X \neq A$ , trace o seu inverso  $X'$ .

Como já vimos por proposição, podemos afirmar que  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OX} \cdot \overline{OX'} = r^2$ . Logo, os triângulos  $\triangle OX'A'$  e  $\triangle OAX$  são semelhantes pelo caso LAL. De consequência, o triângulo  $\triangle OX'A'$  é retângulo em  $X'$ .

Neste ponto, é válido recordar que todo triângulo retângulo é inscritível numa circunferência, sendo que a hipotenusa é o diâmetro dessa circunferência. Desse modo, segue que  $X'$  está na circunferência de diâmetro  $OA'$ .



Fonte: A autora.

2. Considere uma circunferência que passa por  $O$ , de diâmetro  $OA$  e  $A'$  o inverso de  $A$  em  $\gamma$ . Marque nela o ponto  $A \neq O$  e trace o seu inverso  $A'$ . Para cada ponto  $X$  dessa circunferência, trace seu inverso  $X'$ .

Os triângulos  $\triangle OAX$  e  $\triangle OX'A'$  são semelhantes pelo caso LAL, pois  $\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$ . Assim, como  $m(\angle OXA) = 90^\circ$  então  $m(\angle OA'X) = 90^\circ$ . Isso significa que, enquanto  $X$  pertence à circunferência que passa por  $O$ , de diâmetro  $OA$ , seu inverso  $X'$  descreve uma reta perpendicular à reta  $OA$ . ■

A proposição a seguir não tem utilidade para as demonstrações futuras e foram mantidas no trabalho a título de curiosidade. Caso o leitor queira, pode omiti-la.

**Proposição 1.20.** (*Inversão circunferência-circunferência*) *A inversão, em relação a uma circunferência  $\gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$ , leva:*

1. *uma circunferência perpendicular à circunferência  $\gamma$  de inversão sobre si mesma;*
2. *qualquer circunferência que não passa por  $O$  em uma circunferência.*

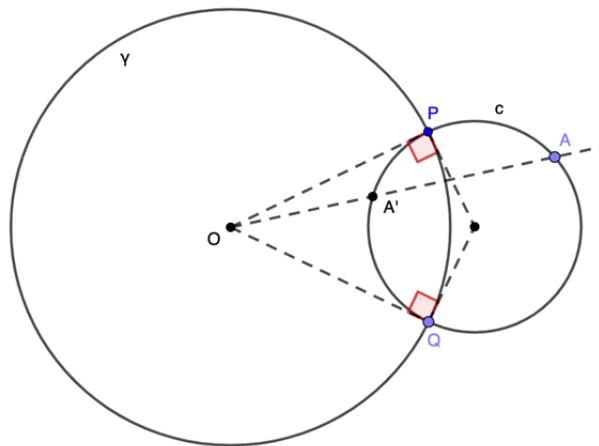
1. Dizemos que uma circunferência  $C(O, r)$  e  $C(O', r')$  é perpendicular a outra se as circunferências são secantes e os pontos de interseção  $P$  e  $Q$  têm as seguintes propriedades:  $OP$  é perpendicular a  $O'P$  e  $OQ$  é perpendicular a  $O'Q$ .

Posto isso, seja  $c$  a circunferência perpendicular à circunferência  $\gamma$  de inversão e seja  $P$  e  $Q$  os pontos de interseção de  $c$  e  $\gamma$ .

Os segmentos  $OP$  e  $OQ$  são tangentes a  $c$ .

Para cada  $A \in c$ , seja  $A'$  o outro ponto de interseção de  $c$  com a semirreta  $OA$ .

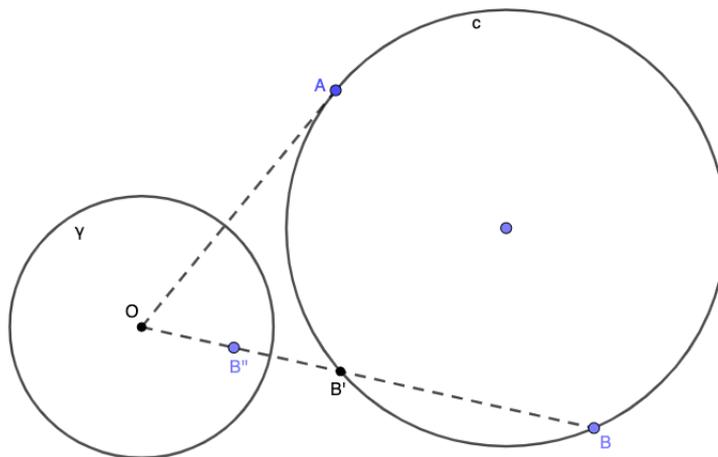
Como  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP}^2 = r^2$  pelo Teorema das Cordas, segue que  $A'$  é o inverso de  $A$ .



Fonte: A autora.

2. Seja  $c$  uma circunferência que não passa pelo centro  $O$  da circunferência  $\gamma$  de inversão.

1º caso:  $O$  está no exterior de  $c$ .



Fonte: A autora.

Trace  $OA$  tangente a  $c$ .

Para cada ponto  $B \in c$ , considere  $B'$  o outro ponto de encontro de  $c$  com a semirreta  $OB$ . Tem-se que

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA}^2. \quad (1-1)$$

Se  $B''$  é o inverso de  $B'$  em relação à circunferência  $\gamma$ , que tem raio  $r$ , então

$$\overline{OB'} \cdot \overline{OB''} = r^2. \quad (1-2)$$

De 1-1 e 1-2 segue que  $\overline{OB''} = (r/\overline{OA})^2 \cdot \overline{OB}$ .

Logo, o inverso da circunferência  $c$ , em relação a  $\gamma$ , é a sua imagem pela homotetia de centro  $O$  e razão  $(r/\overline{OA})^2$ .

Assim, a inversão leva a circunferência  $c$ , com  $O \notin c$ , numa circunferência  $c'$ .

2º caso:  $O$  está no interior de  $c$ .

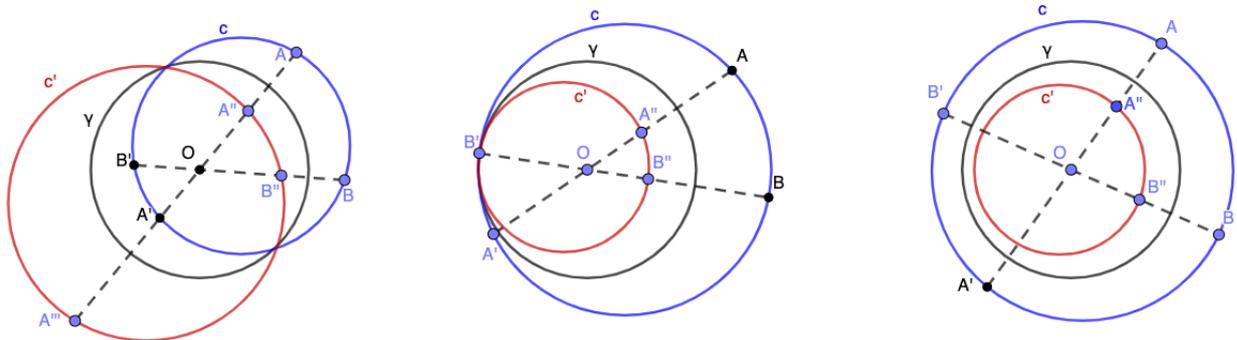
Fixe um ponto  $B \in c$  e trace  $B'$  o outro ponto de interseção da reta  $OB$  com  $c$  e considere  $k = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ .

Para cada  $A \in c$ , seja  $A'$  o outro ponto de interseção da reta  $OA$  com  $c$ .

Pelo teorema da Potência de Ponto, sabemos que  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k$ .

Se  $A''$  é o inverso de  $A' \in c$ , em relação a  $\gamma$ , então  $\overline{OA'} \cdot \overline{OA''} = r^2$ , onde  $r$  é o raio de  $\gamma$ . Logo,  $\overline{OA''} = (r^2/k) \cdot \overline{OA}$ .

Assim, a inversão, em relação a  $\gamma$ , leva  $c$  na sua imagem homotética de centro  $O$  e razão  $r^2/k$ , onde  $k = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ , e, portanto, numa circunferência  $c'$ .



Fonte: A autora.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## MECANISMO DE WATT

Neste capítulo, vamos estudar o mecanismo criado por James Watt em 1783. Iniciaremos com um breve contexto histórico, seguido da parametrização da curva gerada pelo mecanismo e a indicação da equação geral da curva. Por fim, faremos a construção do mecanismo no GeoGebra.

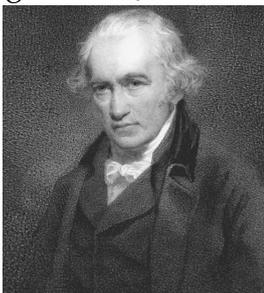
Este capítulo tem como principal referência o artigo "O Mecanismo de Watt" (CAPUTI, GERÔNIMO e NIRO, 2008).

### 2.1 Contexto histórico

James Watt (1736 - 1819) foi um inventor e engenheiro mecânico escocês, mundialmente reconhecido pelos aprimoramentos que fez na máquina a vapor inicialmente inventada por Thomas Newcomen em 1712.

De acordo com o livro "The life of James Watt" (MUIRHEAD, 1858), em 28/04/1774, Watt deu entrada no pedido de patente de diversas melhorias na máquina a vapor, tais como rodas a vapor, balanceamento das hastes da bomba, comunicação de movimento do mesmo motor para dois eixos primários separados e a criação de aparelhos para abrir as válvulas reguladoras com rapidez. Não bastassem esses aprimoramentos,

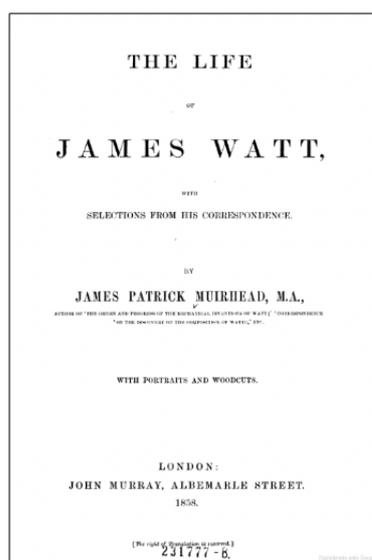
Figura 2.1: James Watt



Fonte: Kingsford, 2023

nessa mesma patente ele registrou diversos métodos para converter um movimento circular em um movimento retilíneo (MUIRHEAD, 1858, p. 293).

Figura 2.2: Capa do livro "The life of James Watt"



Fonte: MUIRHEAD, 1858

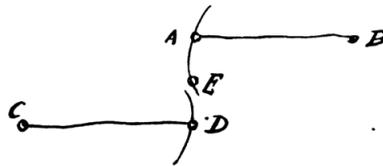
Sobre esta invenção, Watt escreveu para seu filho, também chamado James Watt, em 10/11/1808:

*"... após um tempo, ocorreu-me que, sendo AB e CD, com raios de mesma medida girando nos centros B e C, conectados entre si por uma haste AD, ao se moverem por meio de arcos de certos comprimentos, as variações da linha reta seriam quase iguais e opostas, e que o ponto E descreveria uma linha quase reta, e que se por conveniência o raio CD fosse apenas metade de AB, movendo o ponto E para mais perto de D, o mesmo ocorreria; e a partir disso a construção daquilo que foi*

posteriormente chamado de 'o movimento paralelo' foi derivada. Embora eu não esteja muito ansioso pela fama, estou mais orgulhoso do 'movimento paralelo' do que qualquer outra invenção mecânica que já fiz" (MUIRHEAD, 1858, p. 294).

Eis o esboço que acompanhou a carta:

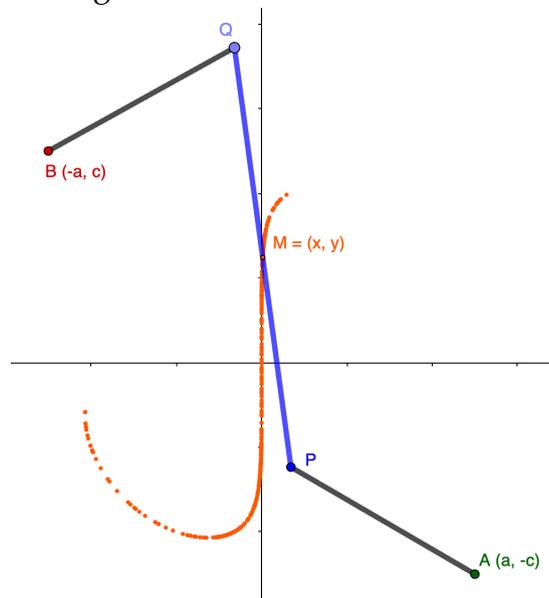
Figura 2.3: Esboço feito por Watt



Fonte: MUIRHEAD, 1858, p. 294

Como mencionado por Watt, seu mecanismo é formado por três hastes, digamos  $AP$ ,  $BQ$  e  $PQ$ , fixas nos pontos  $A$  e  $B$ . O ponto  $M$ , ponto médio da haste  $PQ$ , descreve um percurso quase retilíneo, embora a trajetória completa de  $M$  assemelhe-se a desenho do infinito.

Figura 2.4: Mecanismo de Watt



Fonte: A autora.

No tópico a seguir, iremos analisar com detalhes a curva descrita pelo ponto  $M$ .

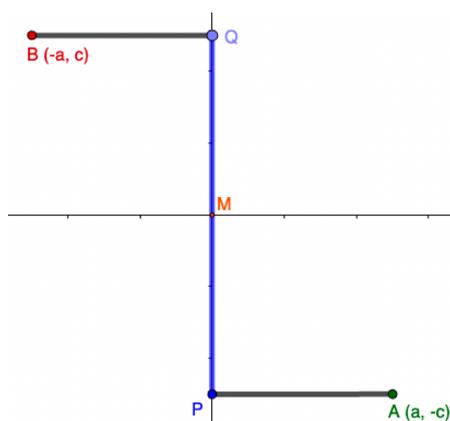
## 2.2 A curva de Watt

Neste t3pico vamos estudar a curva de Watt, buscando parametriz3-la e apresentar sua equa33o geral. Como mencionado anteriormente, o estudo foi embasado no artigo "O Mecanismo de Watt" (CAPUTI, GER3NIMO e NIRO, 2008). Nossa contribui33o neste t3pico foi a corre33o de um erro nos c3lculos contidos no referido trabalho; al3m disso, abrimos os c3lculos aos m3nimos detalhes e tamb3m constru3mos o mecanismo no GeoGebra para viabilizar a sua manipula33o.

Feitas essas considera33es iniciais, vamos ao estudo da curva.

Para isso, consideramos o sistema articulado formado pelos piv3s  $A = (a, -c)$  e  $B = (-a, c)$ , com  $a, c \in \mathbb{R}_+^*$ , os pontos m3veis  $P$  e  $Q$ , as barras m3veis  $AP$ ,  $BQ$  e  $PQ$  e o tra3o determinado pelo ponto  $M$ , tamb3m m3vel, que 3 o ponto m3dio de  $PQ$ . Vamos supor que  $AP$  3 congruente e  $BQ$ , com medida  $a$  e que, quando  $AP$  3 paralelo a  $BQ$ , temos  $PQ$  perpendicular a ambos. Vamos supor que a posi33o inicial das barras, ambas m3veis,  $AP_0$  e  $BQ_0$  sejam tais que  $AP_0$  3 paralelo a  $BQ_0$ , conforme figura que se segue.

Figura 2.5: Mecanismo de Watt - posi33o inicial



Fonte: A autora.

A manipula33o do mecanismo de Watt pode ser feita virtualmente atrav3s do link ou do qr-code abaixo:

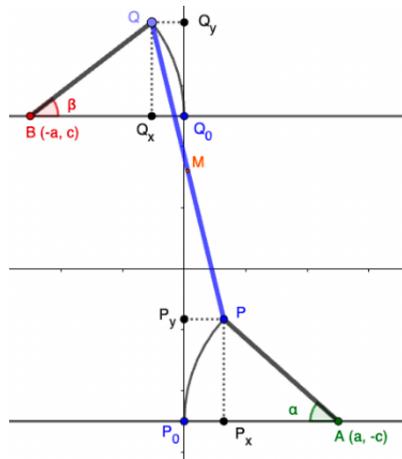
<https://www.geogebra.org/classic/tmggnhnp>



Se a barra  $AP$  rotacionar a um 3ngulo  $\alpha$  no sentido hor3rio e a barra  $BQ$  rotacionar

um ângulo  $\beta$  no sentido anti-horário em torno dos pontos A e B, respectivamente, obtemos o desenho conforme figura a seguir.

Figura 2.6: Mecanismo de Watt - rotação de AP



Fonte: A autora.

Se consideramos as coordenadas de  $P$  como sendo  $(P_x, P_y)$  e se  $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$  temos:

$$|P_x A| = a \cdot \cos \alpha \Rightarrow P_x = a - a \cdot \cos \alpha \quad (2-1)$$

$$|P_y P_0| = a \cdot \sin \alpha \Rightarrow P_y = -c + a \cdot \sin \alpha \quad (2-2)$$

Obs.: Em relação a  $P_y$ , note que a expressão acima é válida mesmo quando  $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$  porque  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ .

Ainda, se considerarmos as coordenadas de  $Q$  como sendo  $(Q_x, Q_y)$  e  $-90^\circ < \beta < 90^\circ$  temos:

$$|BQ_x| = a \cdot \cos \beta \Rightarrow Q_x = -a + a \cdot \cos \beta \quad (2-3)$$

$$|QQ_x| = a \cdot \sin \beta \Rightarrow Q_y = c + a \cdot \sin \beta \quad (2-4)$$

Obs.: Em relação a  $Q_y$ , note que a expressão acima é válida mesmo quando  $-90^\circ < \beta < 0^\circ$  porque  $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$ .

Agora, sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $M$ .

Como  $M$  é o ponto médio do segmento  $PQ$  então podemos afirmar que

$$x = \frac{P_x + Q_x}{2}$$

e

$$y = \frac{P_y + Q_y}{2}$$

Sendo assim, usando as equações 2-1, 2-2, 2-3 e 2-4, obtemos:

$$x = \frac{a - a\cos\alpha - a + a\cos\beta}{2} = \frac{a}{2}(\cos\beta - \cos\alpha) = -a \cdot \sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (2-5)$$

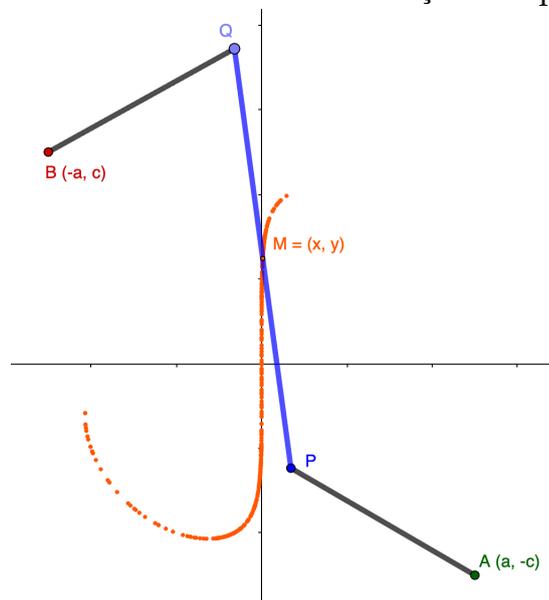
$$y = \frac{-c + a\sin\alpha + c + a\sin\beta}{2} = \frac{a}{2}(\sin\beta + \sin\alpha) = a \cdot \sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (2-6)$$

As equações 2-5 e 2-6 são as *equações paramétricas* do ponto  $M$ . Isto é, podemos escrever  $M$  a dois parâmetros como a função:

$$\Phi(\alpha, \beta) : \left( -a \cdot \sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right), a \cdot \sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \right) \quad (2-7)$$

O traçado do ponto  $M$ , ao variarmos  $\alpha$  e  $\beta$  é o seguinte:

Figura 2.7: Mecanismo de Watt - Traçado do ponto  $M$



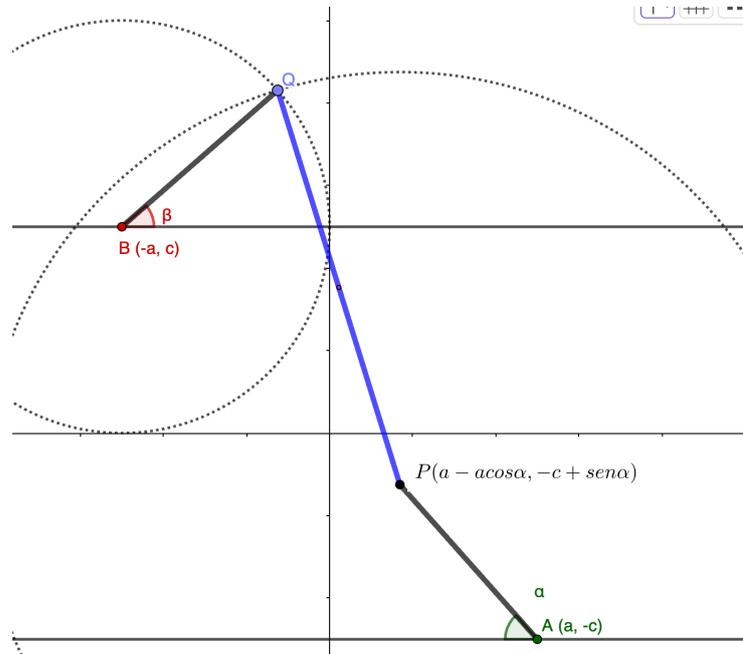
Fonte: A autora.

Agora, vamos buscar estabelecer uma relação entre  $\alpha$  e  $\beta$  para que as equações 2-5 e 2-6 tenham apenas um parâmetro. Aqui, lembramos que o ângulo  $\alpha \neq 0$  corresponde a uma rotação da barra  $AP$ , onde o ponto  $A$  é o pivô. Ao fazer esse movimento, o ponto

$P$ , que inicialmente se encontrava na posição  $(0, -c)$  passa para a posição

$$(a - a\cos\alpha, -c + a\sin\alpha),$$

como já vimos acima (equações 2-1 e 2-2).



Fonte: A autora.

Como as barras  $PQ$  e  $BQ$  têm comprimento fixo, então, fixado  $\alpha$ , a posição do ponto  $Q$  deve ser igual a uma das interseções entre a circunferência  $C(P, 2c)$ , de centro em  $P$  e raio de medida  $2c$ , e a circunferência  $C(B, a)$ , de centro em  $B$  e raio de medida  $a$ .

Veja que:

$$C(P, 2c) : (x - (a - a\cos\alpha))^2 + (y - (a\sin\alpha - c))^2 - 4c^2 = 0.$$

E que:

$$C(B, a) : (x + a)^2 + (y - c)^2 - a^2 = 0.$$

Sendo assim, igualando as duas últimas equações, temos o seguinte:

$$(x - (a - a\cos\alpha))^2 + (y - (a\sin\alpha - c))^2 - 4c^2 = (x + a)^2 + (y - c)^2 - a^2.$$

Para que a expressão algébrica não fique tão extensa e para facilitar o desenvolvi-

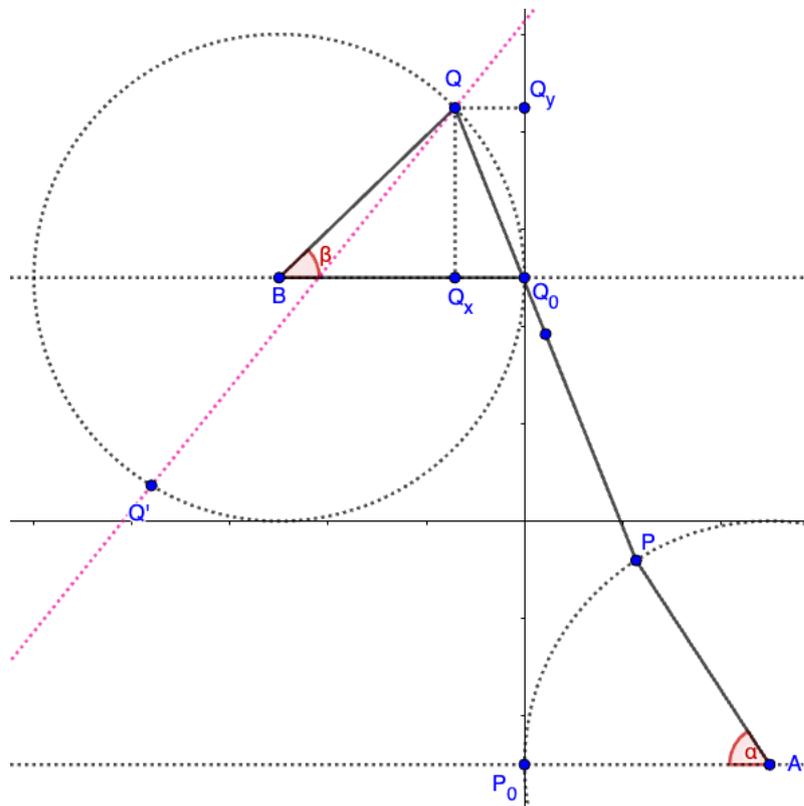
mento, vamos fazer a mudança de variável:  $t = \cos\alpha$  e  $v = \sin\alpha$ . Temos, assim:

$$x^2 - 2x(a - at) + (a - at)^2 + y^2 - 2y(av - c) + (av - c)^2 - 4c^2 = x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - 2cy + c^2 - a^2.$$

Agora, isolando  $y$ , temos:

$$y = \frac{2ax(2 - t) - (a - at)^2 - (av - c)^2 + 5c^2}{4c - 2av} \quad (2-8)$$

A equação 2-8 acima é a equação da reta que passa pelos dois pontos de interseção entre a circunferência  $C(B, a)$  e a circunferência  $C(P, 2c)$ . Na figura, trata-se da reta tracejada em rosa:



Fonte: A autora.

Abrindo a equação da circunferência  $C(B, a)$  temos:

$$\begin{aligned}
(x+a)^2 + (y-c)^2 &= a^2 \\
\Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 + (y-c)^2 &= a^2 \\
\Leftrightarrow x^2 + 2ax + (y-c)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Agora, substituindo o valor de  $y$  das equações 2-8 na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + 2ax + (y-c)^2 \\
&= x^2 + 2ax + \left( \frac{2ax(2-t) - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 5c^2}{4c-2av} - c \right)^2 \\
&= x^2 + 2ax + \left( \frac{1}{4c-2av} \right)^2 (2ax(2-t) - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 5c^2 - 4c^2 + 2acv)^2 \\
&= x^2 + 2ax + \frac{1}{(4c-2av)^2} (2ax(2-t) + c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)^2 \\
&= x^2 + 2ax + \frac{1}{(4c-2av)^2} [4a^2x^2(2-t)^2 + 4ax(2-t)(c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv) \\
&\quad + (c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)^2] \\
&= x^2 \left[ 1 + \frac{4a^2(2-t)^2}{(4c-2av)^2} \right] + x \left[ 2a + \frac{4a(2-t)(c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)}{(4c-2av)^2} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{(c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)^2}{(4c-2av)^2} \right]
\end{aligned}$$

Se  $4c - 2av = R$ , temos:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 \left[ 1 + \frac{4a^2(2-t)^2}{R^2} \right] + x \left[ 2a + \frac{4a(2-t)(c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)}{R^2} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{(c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)^2}{R^2} \right]
\end{aligned}$$

Agora, vamos fazer outra substituição de variável:

$$\begin{aligned}
m &= 1 + \frac{4a^2(2-t)^2}{R^2} \\
n &= 2a + \frac{4a(2-t)(c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)}{R^2} \\
p &= \frac{(c^2 - (a-at)^2 - (av-c)^2 + 2acv)^2}{R^2}
\end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4mp}}{2m}$$

Esse resultado acima corresponde às coordenadas  $x$  dos pontos  $Q$  e  $Q'$ . Note que o ponto  $Q'$  sempre estará à esquerda do ponto  $Q$  e, como nos interessa apenas a coordenada deste último, consideraremos apenas o maior resultado de  $x$ , que é quando há a adição do discriminante acima (e não a subtração dele). A coordenada  $y$  desse mesmo ponto é o resultado da aplicação desse valor de  $x$  na equação 2-6, isto é, o ponto  $Q$  tem coordenadas:

$$Q_x = \frac{-n + \sqrt{n^2 - 4mp}}{2m}$$

$$Q_y = \frac{2a(2-t)\left(\frac{-n + \sqrt{n^2 - 4mp}}{2m}\right) - (a - at)^2 - (av - c)^2 + 5c^2}{4c - 2av}$$

Sendo assim, temos que a medida do segmento  $QQ_x$  é igual a

$$\overline{QQ_x} = Q_y - c = \frac{2a(2-t)\left(\frac{-n + \sqrt{n^2 - 4mp}}{2m}\right) - (a - at)^2 - (av - c)^2 + 5c^2}{4c - 2av} - c$$

Por fim, concluímos que

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\overline{QQ_x}}{a}\right).$$

Então, podemos dizer que  $\beta$  é uma função de  $\alpha$ , isto é:

$$\beta = f(\alpha). \tag{2-9}$$

Desse modo, temos a curva de Watt pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\Phi(\alpha) : \left( -a \cdot \sin\left(\frac{f(\alpha) + \alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{f(\alpha) - \alpha}{2}\right), a \cdot \sin\left(\frac{f(\alpha) + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{f(\alpha) - \alpha}{2}\right) \right).$$

Na sequência, temos por objetivo encontrar uma equação geral do ponto  $M(x, y)$ , em função dos valores de  $a$  e  $b$ . Inicialmente, é válido relembrar as seguintes identida-

des trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin a \pm \sin b &= 2 \sin \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2} \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2} \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2} \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a medida do segmento  $PQ$  usando as coordenadas de  $P$  e de  $Q$ .

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= |Q - P| \\ &= |(-a + a \cos \beta, c + a \sin \beta) - (a - a \cos \alpha, -c + a \sin \alpha)| \\ &= |(-a + a \cos \beta - a + a \cos \alpha, c + a \sin \beta + c - a \sin \alpha)| \\ &= |(-2a + a(\cos \beta + \cos \alpha), 2c + a(\sin \beta - \sin \alpha))| \\ &= \left| \left( -2a + 2a \left( \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \right), 2c + 2a \left( \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \right) \right) \right| \\ &= 2 \left| \left( -a + a \left( \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \right), c + a \left( \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \right) \right) \right| \\ &= 2 \sqrt{\left( -a + a \left( \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \right) \right)^2 + \left( c + a \left( \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \right) \right)^2} \end{aligned}$$

De outro lado, sabemos que  $\overline{PQ} = 2c$ . Então, igualando a última expressão acima a

2c, temos:

$$\begin{aligned}
2c &= 2\sqrt{\left(-a + a\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right)^2 + \left(c + a\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\right)^2} \\
\Rightarrow c^2 &= \left(-a + a\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right)^2 + \left(c + a\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\right)^2 \\
\Leftrightarrow c^2 &= a^2 - 2a^2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + a^2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + c^2 + \\
&\quad + 2ac\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right) + a^2\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= a^2 - 2a\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\left(a\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - c\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + \\
&\quad + a^2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + a^2\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= a - 2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\left(a\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - c\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + \\
&\quad + a\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + a\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= a - 2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\left(a\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - c\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \\
&\quad + a\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left[\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow 0 &= a - 2\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\left(a\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - c\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + a\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2
\end{aligned}
\tag{2-10}$$

Agora, elevando as equações paramétricas 2-5 e 2-6 ao quadrado e somando-as, temos:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= a^2\left(\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + a^2\left(\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 \\
&= a^2\left(\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left[\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\right] \\
&= a^2\left(\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Daí, extraímos que:

$$\sin \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \quad (2-11)$$

A partir da mesma expressão e, usando a identidade trigonométrica  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , obtemos também:

$$\cos \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a} \quad (2-12)$$

Agora, utilizando os resultados de 2-11 e 2-12 nas equações 2-5 e 2-6, obtemos também expressões para  $e$  em função de  $x$  e  $y$ . Veja:

$$\begin{aligned} x &= -a \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\beta - \alpha}{2} &= \frac{-x}{a \sin \frac{\beta + \alpha}{2}} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\beta - \alpha}{2} &= \frac{-x}{a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\beta - \alpha}{2} &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned} y &= a \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\beta - \alpha}{2} &= \frac{y}{a \sin \frac{\beta + \alpha}{2}} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\beta - \alpha}{2} &= \frac{y}{a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\beta - \alpha}{2} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (2-14)$$

Por fim, utilizando os resultados de 2-11, 2-12, 2-13 e 2-14 e fazendo as substituições

na equação 2-10 temos:

$$\begin{aligned}
 a + a \left( \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \right)^2 &= 2 \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \left( a \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - c \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right) \\
 \Leftrightarrow a + a \frac{(a^2 - x^2 - y^2)}{a^2} &= \frac{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a} \left( a \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + c \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
 \Leftrightarrow a + \frac{(a^2 - x^2 - y^2)}{a} &= \frac{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}(ay + cx)}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \Leftrightarrow \frac{a^2 + (a^2 - x^2 - y^2)}{a} &= \frac{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}(ay + cx)}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \Leftrightarrow \left( \frac{2a^2 - x^2 - y^2}{a} \right)^2 &= \frac{4(a^2 - x^2 - y^2)(ay + cx)^2}{a^2(x^2 + y^2)} \\
 \Leftrightarrow \frac{(2a^2 - x^2 - y^2)^2}{a^2} &= \frac{4(a^2 - x^2 - y^2)(ay + cx)^2}{a^2(x^2 + y^2)} \\
 \Leftrightarrow (2a^2 - x^2 - y^2)^2 &= \frac{4(a^2 - x^2 - y^2)(ay + cx)^2}{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 4a^4x^2 - 8a^3cxy - 4a^2c^2x^2 - 4a^2x^4 - 4a^2x^2y^2 + 8acx^3y + 8acxy^3 + 4c^2x^4 + \\
 4c^2x^2y^2 + x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 0
 \end{aligned} \tag{2-15}$$

Esta última equação é a equação geral da curva de Watt, cujo traço é mostrado na seguinte figura:

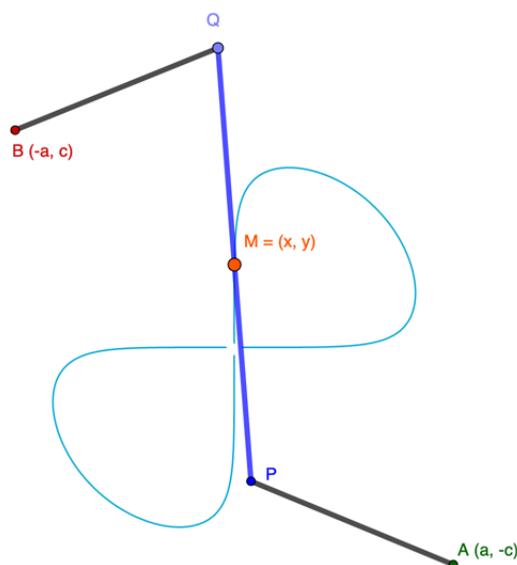
Observe que a curva se aproxima de uma reta em intervalos que se aproximam da origem dos eixos. Como encaminhamento futuro, sugere-se o estudo dos intervalos específicos em que a curva se aproxima de uma reta e quão próximo de uma reta é este intervalo da curva.

No capítulo a seguir, vamos relacionar o passo a passo para a construção do mecanismo de Watt no GeoGebra.

## 2.3 Construção no GeoGebra

A manipulação do mecanismo de Watt pode ser feita virtualmente através do link ou do qr-code abaixo:

Figura 2.8: Curva de Watt



Fonte: A autora.

<https://www.geogebra.org/classic/tmeggnnhp>



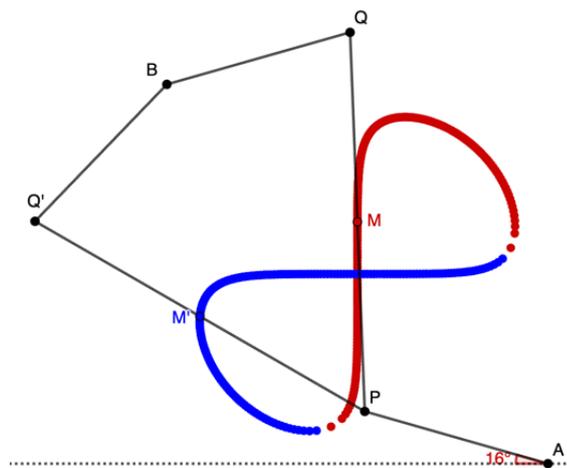
Consideramos o sistema articulado formado pelos pivôs  $A = (a, -c)$  e  $B = (-a, c)$ , os pontos móveis  $P$  e  $Q$ , as barras móveis  $AP$ ,  $PQ$  e  $BQ$  e o traço determinado pelo ponto  $M$ , também móvel, que é o ponto médio de  $PQ$ .

A construção no GeoGebra deve seguir os seguintes passos:

- Crie um controle deslizante para um número denominado  $a$ , com valores variando de 0 a +5;
- Marque o ponto  $A$  com coordenadas  $(a, -c)$  e o ponto  $B$  com coordenadas  $(-a, c)$ ;
- Crie uma circunferência  $C(A, a)$  de centro em  $A$  e raio  $a$  e a circunferência  $C(B, a)$  de centro em  $B$  e raio  $a$ ;
- Crie um controle deslizante para um ângulo denominado  $\alpha$  variando de  $-90^\circ$  a  $180^\circ$ ;
- Marque o ponto  $C$  na interseção da circunferência  $C(A, a)$  e o eixo  $y$ ;
- Trace a reta  $AC$  e deixe-a pontilhada;

- Crie um ângulo com amplitude fixa: selecione o ponto  $C$ , o vértice  $A$ , defina a amplitude como sendo  $\alpha$  e selecione o sentido horário. O GeoGebra marcará, automaticamente, um ponto na circunferência  $C(A, a)$  que denominaremos de  $P$ ;
- Crie a circunferência  $C(P, 2c)$  de centro em  $P$  e raio  $2c$ ;
- Ajuste o ângulo  $\alpha$  e a medida  $c$  para que a interseção entre  $C(P, 2c)$  e  $C(B, a)$  seja igual a dois pontos distintos;
- Marque os pontos  $Q$  e  $Q'$  na interseção entre  $C(P, 2c)$  e  $C(B, a)$ ;
- Oculte todas as circunferências criadas e o ponto  $C$ ;
- Trace os segmentos  $AP, PQ, PQ', BQ$  e  $BQ'$ ;
- Marque o ponto médio do segmento  $PQ$  e nomeie-o  $M$ ;
- Marque o ponto médio do segmento  $PQ'$  e nomeie-o  $M'$ ;
- Habilite o rastro dos pontos  $M$  e  $M'$ ;
- Por fim, clique sobre o controle deslizante de  $\alpha$  e acione a sua animação para deixá-lo variar;
- O rastro gerado pelos pontos  $M$  e  $M'$  descrevem a "Curva de Watt".

Figura 2.9: Curva de Watt



Fonte: A autora.

Convidamos o leitor a refletir sobre o seguinte questionamento: dadas as medidas  $a$  e  $c$ , qual é o intervalo do ângulo  $\alpha$  para que o mecanismo exista?

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## MECANISMO DE TCHEBYCHEV

Neste capítulo, vamos estudar o mecanismo criado por Tchebychev em 1850. Iniciaremos com um breve contexto histórico, seguido da parametrização da curva gerada pelo mecanismo. Por fim, faremos a construção do mecanismo no GeoGebra. Este capítulo tem como principais referências os artigos "A Geometria das Curvas"(CAPUTI, 2001) e "Curve e meccanismi"(CONTI, 2000).

### 3.1 Contexto histórico

De acordo com CONTI (2000, p. 44), o matemático russo Pafnuti Lvovich Tchebychev (1821 - 1894) é conhecido por resultados fundamentais em teoria das probabilidades e teoria dos números. Ele foi um dos matemáticos que se dedicou a encontrar uma solução exata para o problema do movimento retilíneo, explorado neste trabalho.

Ainda segundo CONTI (2000, p. 44), "Sylvester escreve que, após esforços em vão, Tchebychev chegou à convicção de que não havia mecanismo capaz de dar uma solução exata para o problema"(tradução livre).

Em 1850, Tchebychev conseguiu determinar outra solução aproximada para o problema, mais precisa que a de Watt. Esse mecanismo criado por Tchebychev foi usado

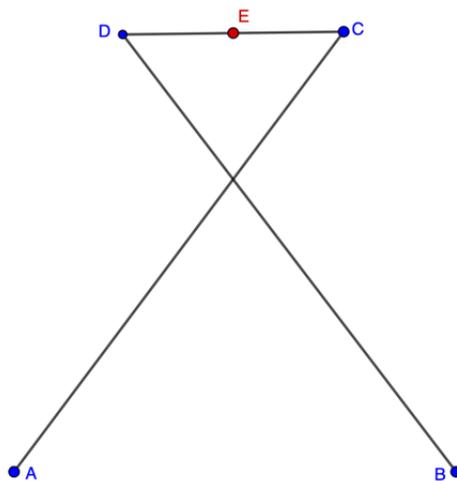
Figura 3.1: Pafnuti Lvovich Tchebychev



Fonte: BRITANNICA

para conduzir o movimento das lâminas de serra para cortar toras.

Ele consiste de 3 hastes  $AC$ ,  $CD$  e  $DC$ , com  $A$  e  $B$  fixos,  $\overline{AC} = \overline{BD}$  e com as distâncias envolvidas tais que  $\overline{AC} : \overline{AB} : \overline{CD} = 5 : 4 : 2$ .



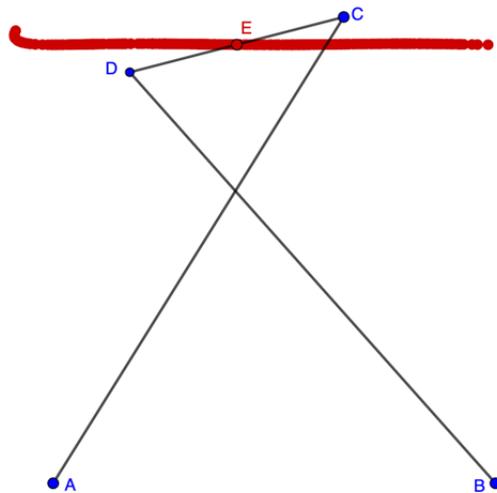
Fonte: A autora.

A manipulação do mecanismo de Tchebychev pode ser feita virtualmente através do link ou do qr-code abaixo:

<https://www.geogebra.org/classic/h5pwjcka>



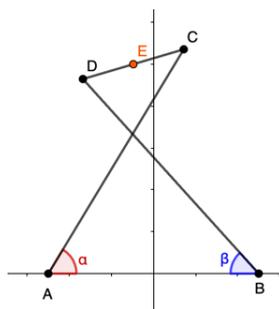
O ponto  $E$ , ponto médio da haste  $CD$ , descreve um percurso quase retilíneo, embora a trajetória completa de  $E$  assemelhe-se a um semicírculo.



Fonte: A autora.

### 3.2 A curva de Tchebychev

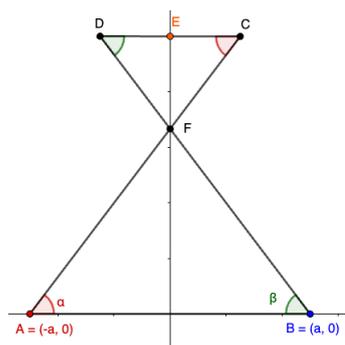
Como dissemos anteriormente, este capítulo tem como principais referências os artigos "A Geometria das Curvas" (CAPUTI, 2001) e "Curve e meccanismi" (CONTI, 2000). Ambos os artigos descrevem o mecanismo de Tchebychev e apresentam um contexto histórico; nenhum deles, todavia, apresenta as contas para a parametrização da curva. Sendo assim, a principal contribuição deste trabalho é justamente a parametrização da parte mais linear da curva de Tchebychev em funções dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  da figura abaixo.



Fonte: A autora.

Para isso, determinamos que a posição inicial das barras sejam tais que  $AB$  é paralelo a  $CD$ , conforme figura a seguir:

Desse modo, por se tratar de retas paralelas cortadas por uma transversal, sabemos que  $\alpha$  é congruente ao ângulo  $\angle ACD$ , e  $\beta$  é congruente ao ângulo  $\angle BDC$  nesta posição inicial, já que são ângulos alternos internos. Ainda, pelo caso de semelhança AA

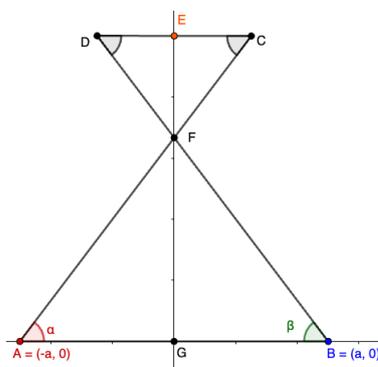


Fonte: A autora.

(ângulo-ângulo), temos que os triângulos  $\triangle ABF$  e  $\triangle CDF$  são semelhantes. Considerando que a proporção entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  é de  $4 : 2$ , podemos concluir que  $\overline{AF} = 2\overline{CF}$  e  $\overline{BF} = 2\overline{DF}$ . Ainda, como a proporção entre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{AC}$  é  $4 : 5 : 5$  e como a barra  $AB$  mede  $2a$ , temos que a medida das barras  $AC$  e  $BD$  é  $5a/2$ . Desse modo, é possível concluir o seguinte:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AF} + \overline{FC} \\ &= \overline{AF} + \frac{\overline{AF}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{5a}{2} &= \frac{3\overline{AF}}{2} \\ \Leftrightarrow \overline{AF} &= \frac{5a}{3} \end{aligned}$$

De consequência,  $CF$  tem comprimento de medida  $5a/6$ . Analogamente, temos que  $\overline{BF} = 5a/3$  e  $\overline{DF} = 5a/6$  e, portanto, os triângulos  $\triangle ABF$  e  $\triangle CDF$  são isósceles. Assim, a reta  $EG$  abaixo (eixo  $y$ ) é não só mediana dos lados  $AB$  e  $CD$ , como também é sua altura.

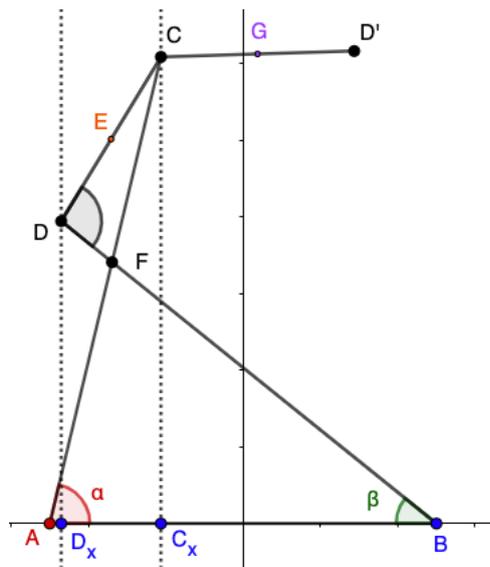


Fonte: A autora.

Sendo assim, podemos concluir que:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\frac{5a}{3}}\right) = \arccos\frac{3}{5} \approx 53,13^\circ.$$

Se a barra  $AC$  rotacionar no sentido anti-horário, a barra  $BD$  irá rotacionar no mesmo sentido em torno dos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, conforme figura, obtemos o seguinte:



Fonte: A autora.

Neste ponto da explicação, vamos adicionar também a barra  $CD'$  (cujo ponto médio é  $G$ ) que é uma barra de mesma medida que  $CD$  e tal que  $\overline{BD} = \overline{BD'}$ . Essa barra adicional se justifica porque a curva de Tchebychev somente é completa juntando-se os traços dos pontos  $E$  e  $G$ . Originalmente, essa barra adicional não faz parte do mecanismo de Tchebychev e somente será usada quando for relevante.

Feita essa observação, na figura acima, os pontos  $C_x$  e  $D_x$  são as projeções ortogonais dos pontos  $C$  e  $D$ , respectivamente, na reta  $AB$ .

Considerando o triângulo  $\triangle ACC_x$ , temos que

$$\overline{CC_x} = \overline{AC} \sin \alpha = 5 \frac{a}{2} \sin \alpha.$$

Ainda, que

$$\overline{AC_x} = \overline{AC} \cos \alpha = 5 \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Se  $0 < \alpha < 90^\circ$ , podemos afirmar que o ponto  $C$  tem coordenadas  $(-a + 5\frac{a}{2}\cos\alpha, 5\frac{a}{2}\sin\alpha)$ .

Agora, considerando o triângulo  $\triangle BDD_x$ , temos que

$$\overline{DD_x} = \overline{DB}\sin\beta = 5\frac{a}{2}\sin\beta.$$

Ainda, que

$$\overline{BD_x} = \overline{DB}\cos\beta = 5\frac{a}{2}\cos\beta.$$

Como  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , podemos afirmar que o ponto  $D$  tem coordenadas  $(a - 5\frac{a}{2}\cos\beta, 5\frac{a}{2}\sin\beta)$ .

Agora, sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $E$ , que é o ponto médio do segmento  $CD$ . Então, podemos afirmar que:

$$x = \frac{-a + 5\frac{a}{2}\cos\alpha + a - 5\frac{a}{2}\cos\beta}{2} \quad (3-1)$$

$$\Leftrightarrow x = 5\frac{a}{4}(\cos\alpha - \cos\beta). \quad (3-2)$$

Ainda, que:

$$y = \frac{5\frac{a}{2}\sin\alpha + 5\frac{a}{2}\sin\beta}{2} \quad (3-3)$$

$$\Leftrightarrow y = 5\frac{a}{4}(\sin\alpha + \sin\beta). \quad (3-4)$$

As equações 3-2 e 3-4 são as equações paramétricas do ponto  $E$ , para  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  e  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ . Assim, podemos parametrizar:

$$\Phi(\alpha, \beta) = 5\frac{a}{4}(\cos\alpha - \cos\beta, \sin\alpha + \sin\beta). \quad (3-5)$$

Agora, se  $\alpha = 90^\circ$ , temos que os pontos  $D$  e  $F$  são coincidentes, os pontos  $A$ ,  $C$  e  $D$  são colineares e que o triângulo  $\triangle ABD$  é retângulo em  $D$ .

Assim, o ponto  $C$  tem coordenadas  $(-a, 5a/2)$ . De sua vez, aplicando o Teorema de

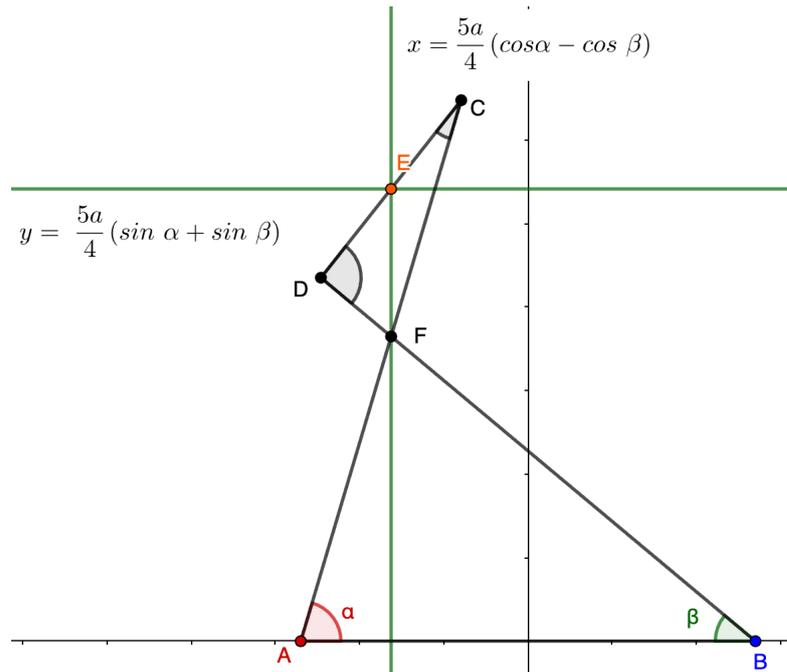
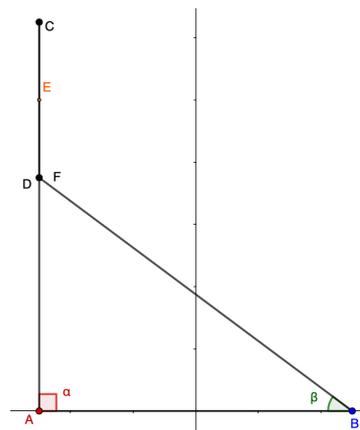


Figura 3.2: ...



Fonte: A autora.

Pitágoras no triângulo  $\triangle ABD$ , temos que:

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{BD}^2 - \overline{AB}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= \left(5\frac{a}{2}\right)^2 - (2a)^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= \frac{25a^2}{4} - \frac{16a^2}{4} \\ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= \frac{9a^2}{4} \\ \Rightarrow \overline{AD} &= \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$



Agora, considerando o triângulo  $\triangle ACC_x$ , temos que:  $\overline{CC_x} = \overline{AC} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{5a}{2} \sin \alpha$  e  $\overline{AC_x} = \overline{AC} \cos(180^\circ - \alpha) = \left| -\frac{5}{2} a \cos \alpha \right|$ .

Assim, como  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , podemos afirmar que o ponto  $C$  tem coordenadas  $(-a - \frac{5}{2} a \cos \alpha, \frac{5}{2} a \sin \alpha)$ .

Já em relação ao ponto  $D$ , como  $0 < \beta < 90^\circ$ , temos que mais uma vez tem coordenadas  $(a - \frac{5}{2} a \cos \beta, \frac{5}{2} a \sin \beta)$ .

Agora, sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $E$ , que é o ponto médio do segmento  $CD$ . Então, podemos afirmar que:

$$x = \frac{-a - 5\frac{a}{2} \cos \alpha + a - 5\frac{a}{2} \cos \beta}{2} \quad (3-6)$$

$$\Leftrightarrow x = -5\frac{a}{4} (\cos \alpha + \cos \beta). \quad (3-7)$$

Ainda, que:

$$y = \frac{5\frac{a}{2} \sin \alpha + 5\frac{a}{2} \sin \beta}{2} \quad (3-8)$$

$$\Leftrightarrow y = 5\frac{a}{4} (\sin \alpha + \sin \beta). \quad (3-9)$$

Importante notar que, quando  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , a fórmula paramétrica 3-5 continua válida. Isso porque, neste caso,  $0^\circ < \beta < 90^\circ$  e, fazendo  $0^\circ < \theta = 180^\circ - \alpha < 180^\circ$ , temos que  $\sin \alpha = \sin \theta$  e  $\cos \alpha = -\sin \theta$ .

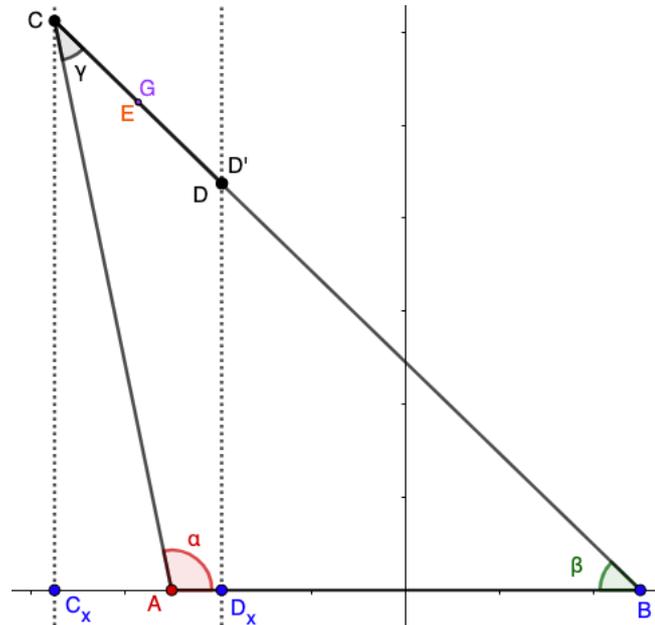
Daí, usando a fórmula paramétrica 3-5 para  $0 < \theta, \beta < 90^\circ$ , temos:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \beta) &= 5\frac{a}{4} (\cos \theta - \cos \beta, \sin \theta + \sin \beta) \\ &= 5\frac{a}{4} (-\cos \alpha - \cos \beta, \sin \alpha + \sin \beta) \\ &= \left( -5\frac{a}{4} (\cos \alpha + \cos \beta), 5\frac{a}{4} (\sin \alpha + \sin \beta) \right). \end{aligned}$$

Em resumo, podemos inferir que a equação paramétrica 3-4 é verdadeira para o seguinte intervalo:  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

Na sequência, precisamos estabelecer para quais valores de  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  os

pontos  $C$ ,  $D$  e  $D'$  estão definidos e, de consequência  $E$  e  $G$  também estão definidos.



Fonte: A autora.

Como as barras  $AC$ ,  $BD$ ,  $CD$  e  $CD'$  têm comprimento fixo, a máxima extensão se obtém quando os pontos  $B$ ,  $D$  e  $C$  são colineares, e, de consequência,  $E$  e  $G$  são coincidentes, assim como  $D$  e  $D'$ . Essa será, portanto, a abertura máxima do ângulo  $\alpha$  no sentido anti-horário.

Neste caso,  $D \in BC$  e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  formam um triângulo de lados com as seguintes medidas:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 2a \\ \overline{AC} &= \frac{5a}{2} \\ \overline{BC} &= \frac{5a}{2} + a = \frac{7a}{2}\end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos, temos:

$$\begin{aligned}
 \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{ABAC}\cos\alpha \\
 \Leftrightarrow \frac{49}{4}a^2 &= \frac{25}{4}a^2 + 4a^2 - 2(2a)\frac{5a}{2}\cos\alpha \\
 \Leftrightarrow 49 &= 41 - 40\cos\alpha \\
 \Leftrightarrow \cos\alpha &= -\frac{1}{5} \\
 \Leftrightarrow \alpha &= \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \\
 \Rightarrow \alpha &\approx 101,537^\circ
 \end{aligned}$$

Sendo assim, os pontos  $C$ ,  $D$  e  $E$  existem se  $0 < \alpha < \arccos(-1/5)$ .

Além disso, temos também que estabelecer para quais valores de  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  os pontos  $C$  e  $D$  estão definidos e, de consequência  $E$  também está definido.

Por inspeção, verificamos que a menor abertura de  $\alpha$  tal que os pontos  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $G$  existem é aquela quando os pontos  $C$ ,  $F$  e  $D$  estão alinhados.

Neste caso, como já calculamos anteriormente,  $\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36,870^\circ$ .

Portanto, reunindo as informações acima, temos que a parte definida pelo ponto  $E$  da curva de Tchebychev está definida para

$$36,870^\circ \approx \arctan(3/4) < \alpha < \arccos(-1/5) \approx 101,537^\circ$$

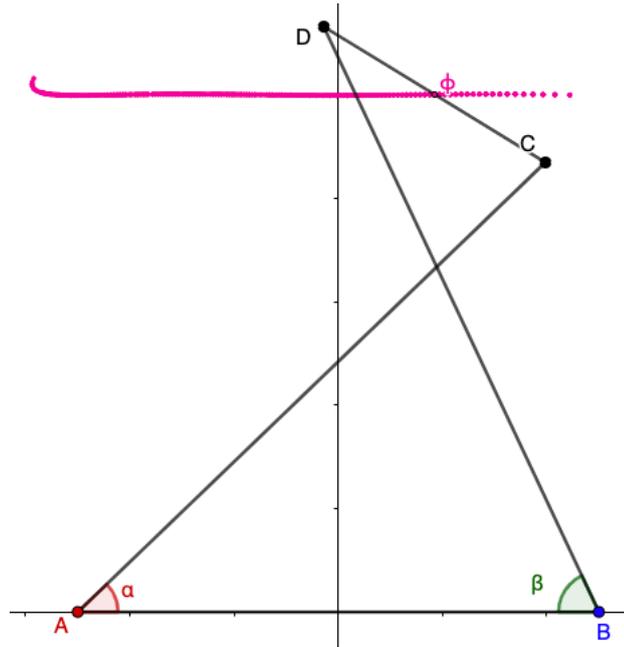
e sua equação paramétrica em função de  $\alpha$  e  $\beta$  é

$$\Phi(\alpha, \beta) = 5\frac{a}{4}(\cos\alpha - \cos\beta, \sin\alpha + \sin\beta). \quad (3-10)$$

Veja o desenho definido por essa equação paramétrica:

Para finalizar, vamos buscar estabelecer uma relação entre  $\alpha$  e  $\beta$  para que a equação 3-10 tenha apenas um parâmetro.

Aqui, lembramos que o ângulo  $\alpha \geq \arctan(3/4)$  corresponde a uma rotação da barra  $AC$  no sentido anti-horário, onde o ponto  $A$  é o pivô.



Fonte: A autora.

Fixado  $\alpha$ , temos que  $C(C, a)$  tem equação:

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = a^2 \quad (3-11)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + a - \frac{5a}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(y - \frac{5a}{2}\sin\alpha\right)^2 = a^2 \quad (3-12)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(25a^2\cos^2\alpha - 20a^2\cos\alpha + 25a^2\sin^2\alpha - 20ax\cos\alpha - 20ays\sin\alpha + 8ax + 4x^2 + 4y^2) = 0 \quad (3-13)$$

$$\Leftrightarrow \frac{25a^2\cos^2\alpha}{4} - 5a^2\cos\alpha + \frac{25a^2\sin^2\alpha}{4} - 5ax\cos\alpha - 5ays\sin\alpha + 2ax + x^2 + y^2 = 0 \quad (3-14)$$

De sua vez,  $C(B, 5a/2)$  tem equação:

$$(x - B_x)^2 + (y - B_y)^2 = \left(\frac{5a}{2}\right)^2 \quad (3-15)$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y)^2 = \left(\frac{5a}{2}\right)^2 \quad (3-16)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - \frac{25a^2}{4} = 0 \quad (3-17)$$

Agora, para facilitar as contas, vamos fazer a mudança de variável  $t = \cos\alpha$  e  $v =$

*sin* $\alpha$ . Daí, igualando as equações 3-14 e 3-17 acima, teremos:

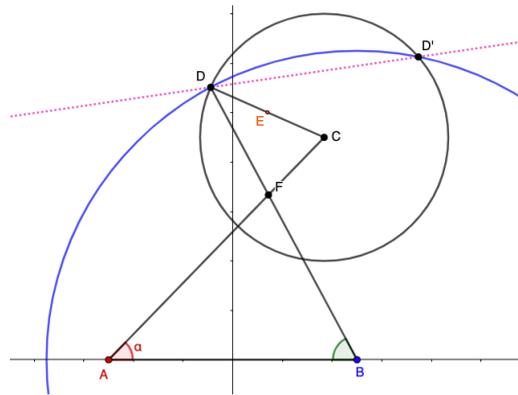
$$\frac{1}{4}(25a^2t^2 - 20a^2t + 25a^2v^2 - 20axt - 20yv + 8ax) + x^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - \frac{25a^2}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{21a^2}{4} - 5a^2t + \frac{25a^2t^2}{4} + \frac{25a^2v^2}{4} + 4ax - 5atx - 5avy = 0.$$

Isolando  $y$ , temos:

$$y = \frac{5at^2}{4v} - \frac{at}{v} + \frac{5av}{4} - \frac{xt}{v} + \frac{4x}{5v} + \frac{21a}{20v} \quad (3-18)$$

A equação 3-18 acima é a equação da reta que passa pelos dois pontos  $D$  e  $D'$  para  $36,870^\circ \approx \arctan(3/4) < \alpha < \arccos(-1/5) \approx 101,537^\circ$ , onde  $D$  e  $D'$  são os pontos de interseção entre a circunferência  $C(C, a)$  e a circunferência  $C(B, 5a/2)$ . Na figura, trata-se da reta tracejada em rosa:



Fonte: A autora.

Na sequência, usando o valor de  $y$  de 3-18 e substituindo-o na equação 3-17 chegamos à seguinte equação de segundo grau:

$$x^2 \left( \frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1 \right) +$$

$$+ x \left( -\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2} \right) +$$

$$+ \frac{25a^2t^4}{16v^2} - \frac{5a^2t^3}{2v^2} + \frac{29a^2t^2}{8v^2} + \frac{25a^2t^2}{8} - \frac{21a^2t}{10v^2} - \frac{5a^2t}{2} + \frac{25a^2v^2}{16} + \frac{441a^2}{400v^2} - \frac{21a^2}{8} =$$

$$= 0$$

Na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1 \\ \bar{b} &= -\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2} \\ \bar{c} &= \frac{25a^2t^4}{16v^2} - \frac{5a^2t^3}{2v^2} + \frac{29a^2t^2}{8v^2} + \frac{25a^2t^2}{8} - \frac{21a^2t}{10v^2} - \frac{5a^2t}{2} + \frac{25a^2v^2}{16} + \frac{441a^2}{400v^2} - \frac{21a^2}{8}\end{aligned}$$

Calculando o discriminante  $\Delta$  da equação do segundo grau acima, temos:

$$\begin{aligned}\Delta &= \left( -\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2} \right)^2 \\ &\quad - 4 \left( \frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1 \right) \\ &\quad \left( \frac{25a^2t^4}{16v^2} - \frac{5a^2t^3}{2v^2} + \frac{29a^2t^2}{8v^2} + \frac{25a^2t^2}{8} - \frac{21a^2t}{10v^2} - \frac{5a^2t}{2} + \frac{25a^2v^2}{16} + \frac{441a^2}{400v^2} - \frac{21a^2}{8} \right)\end{aligned}$$

Desse modo, os valores de  $x$  são:

$$x = \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}}$$

Esse resultado acima corresponde às coordenadas  $x$  dos pontos  $D$  e  $D'$ . Note que o ponto  $D$  sempre estará à esquerda do ponto  $D'$  e, como nos interessa apenas a coordenada do primeiro, consideraremos apenas o menor resultado de  $x$ , que é quando há a subtração do discriminante acima (e não a adição dele).

A coordenada  $y$  desse mesmo ponto é o resultado da aplicação desse valor de  $x$  na equação 3-18, isto é, o ponto  $D$  tem coordenadas:

$$D_x = \frac{-\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) - \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)} \quad (3-19)$$

$$D_y = \frac{5at^2}{4v} - \frac{at}{v} + \frac{5av}{4} + \frac{21a}{20v} + \left(-\frac{t}{v} + \frac{4}{5v}\right)(D_x) \quad (3-20)$$

Sendo assim, se  $D_x$  é também a projeção do ponto  $D$  no eixo  $x$  temos que o ponto

$D_x$  tem coordenadas

$$D_x = \left( \frac{-\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) - \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)}, 0 \right). \quad (3-21)$$

De consequência, lembrando que o ponto  $B$  tem coordenadas  $(a, 0)$ , temos que a medida do segmento  $D_x B$  é igual a

$$\begin{aligned} \overline{D_x B} &= \sqrt{\left( a - \frac{-\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) - \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)} \right)^2} \\ &= a - \frac{-\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) - \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)} \\ &= a + \frac{\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) + \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)} \end{aligned}$$

Por fim, notamos que  $\beta$  equivale ao  $\arccos\left(\frac{\overline{D_x B}}{DB}\right)$  isto é

$$\beta = \arccos\left(\frac{\overline{D_x B}}{DB}\right) \quad (3-22)$$

$$= \arccos\left(\frac{D_x B}{\frac{5a}{2}}\right) \quad (3-23)$$

$$= \arccos\left(\frac{2\overline{D_x B}}{5a}\right) \quad (3-24)$$

$$= \arccos\left(\frac{2\overline{D_x B}}{5a}\right) \quad (3-25)$$

$$= \arccos\left[\frac{2}{5a} \left( a + \frac{\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) - \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)} \right)\right] \quad (3-26)$$

$$= \arccos\left(\frac{2}{5} + \frac{\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) - \sqrt{\Delta}}{5a\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)}\right) \quad (3-27)$$

$$= \arccos\left(\frac{2}{5} + \frac{\left(-\frac{5at^3}{2v^2} + \frac{4at^2}{v^2} - \frac{37at}{10v^2} - \frac{5at}{2} + \frac{42a}{25v^2}\right) - \sqrt{\Delta}}{5a\left(\frac{t^2}{v^2} - \frac{8t}{5v^2} + \frac{16}{25v^2} + 1\right)}\right). \quad (3-28)$$

Sendo assim, a equação paramétrica da curva de Tchebychev para  $36, 870^\circ \approx \arctan(3/4) < \alpha < \arccos(-1/5) \approx 101, 537^\circ$  é:

$$\Phi(\alpha) = 5\frac{a}{4}(\cos\alpha - \cos\beta, \sin\alpha + \sin\beta), \quad (3-29)$$

onde  $\beta$  equivale a 3-28.

Para finalizar esta seção, é importante observar que a curva se aproxima de uma reta quando  $36,87^\circ < \alpha < 101,537^\circ$ .

Além disso, é importante registrar que, neste estudo, buscou-se sem sucesso encontrar a equação geral da curva de Tchebychev. Sendo assim, este é também um estudo futuro que pode ser realizado na continuidade.

### 3.3 Construção no GeoGebra

A manipulação do mecanismo de Tchebychev pode ser feito virtualmente através do link ou do qr-code abaixo:

<https://www.geogebra.org/classic/yzcxhja8>

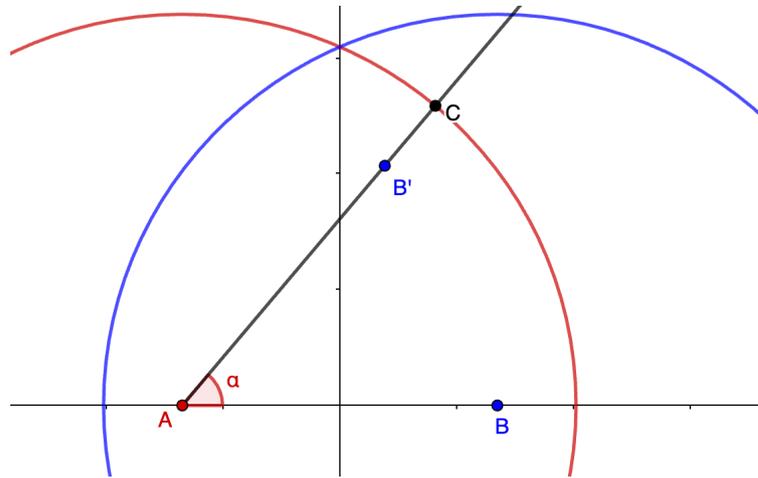


Consideramos o sistema articulado formado pelos pivôs  $A = (-a, 0)$  e  $B = (a, 0)$ , os pontos móveis  $C$  e  $D$ , as barras móveis  $AC$ ,  $BD$  e  $CD$  e o traço determinado pelo ponto  $E$ , também móvel, que é o ponto médio de  $CD$ . Marcamos, também, o ponto  $F$ , que é o ponto de interseção entre as barras  $AC$  e  $BD$ . As barras  $AB$ ,  $AC$ ,  $BD$  e  $CD$  devem seguir a proporção  $4 : 5 : 5 : 2$ .

A construção no GeoGebra deve seguir os seguintes passos:

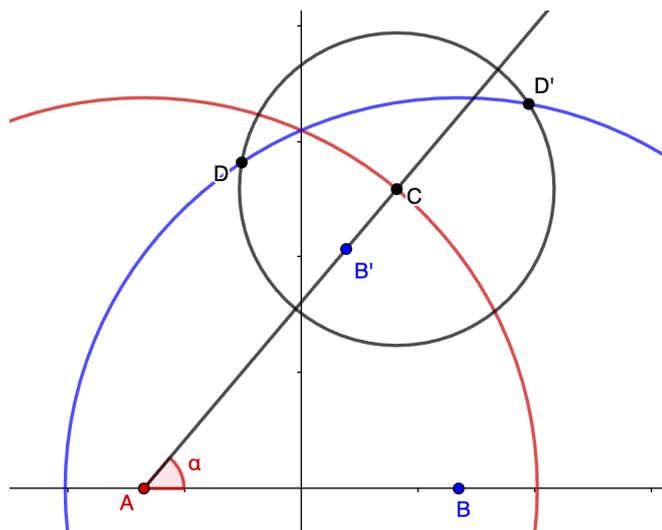
- Crie um controle deslizante para um número denominado  $a$ , com valores variando de 0 a +5;
- Marque o ponto  $A$  com coordenadas  $(-a, 0)$  e o ponto  $B$  com coordenadas  $(+a, 0)$ ;
- Crie uma circunferência  $C(A, 5a/2)$  de centro em  $A$  e raio  $5a/2$  e a circunferência  $C(B, 5a/2)$  de centro em  $B$  e raio  $5a/2$ ;
- Crie um controle deslizante para um ângulo denominado  $\alpha$  variando de  $36,87^\circ$  a  $101,83^\circ$ , com incremento de 0,01;
- Crie um ângulo com amplitude fixa: selecione o ponto  $B$ , o vértice  $A$ , sentido anti-horário e defina a amplitude como sendo  $\alpha$ . O GeoGebra marcará, automaticamente, o ponto  $B'$ ;

- Trace a semirreta de origem em  $A$  passando por  $B'$ ;
- Marque o ponto  $C$  na interseção entre a semirreta mencionada no passo anterior e a circunferência  $C(A, 5a/2)$ ;



Fonte: A autora.

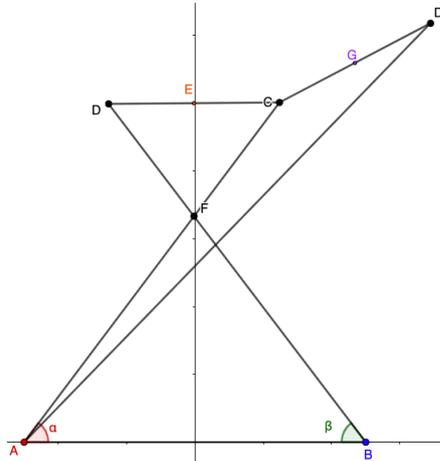
- Crie uma circunferência  $C(C, a)$  de centro em  $C$  e raio  $a$ ; Note que a circunferência  $C(C, a)$  intercepta a circunferência  $C(B, 5a/2)$  em dois pontos:  $D$  e  $D'$ , onde  $D$  é o ponto à esquerda;



Fonte: A autora.

- Trace os segmentos  $AC$ ,  $BD$ ,  $CD$  e  $CD'$ ;
- Oculte todas as circunferências, a semirreta  $AC$  e o ponto  $B'$ ;

- Marque os pontos  $E$  e  $G$ , pontos médios dos segmentos  $CD$  e  $CD'$ , respectivamente. Os pontos  $E$  e  $G$  são aqueles cujos rastros vão definir a “Curva de Tchebychev”;

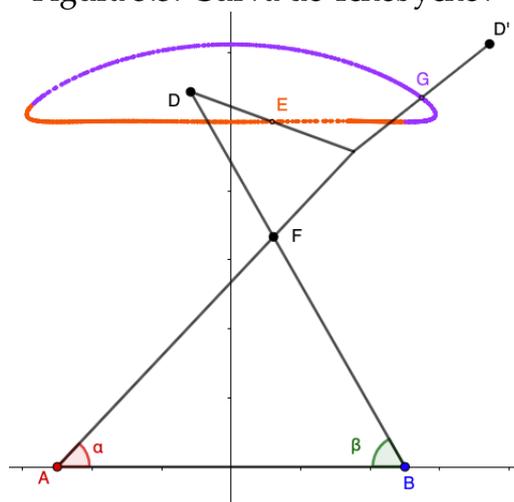


Fonte: A autora.

- Habilite o rastro dos pontos  $E$  e  $G$ ;
- Crie o ângulo  $\angle ABD$  e denomine-o de  $\beta$ ;
- Por fim, clique sobre o controle deslizante de  $\alpha$  e acione sua animação para deixá-lo variar;
- Os rastros gerados pelos pontos  $E$  e  $G$  estão em laranja e em roxo, respectivamente, na imagem abaixo e descrevem a “Curva de Tchebychev”.

Para finalizar, após a construção do mecanismo e sua exploração, é interessante notar que, diferente da curva de Watt, o intervalo de  $\alpha$  em que o mecanismo se aproxima de uma reta independe do tamanho  $a$  das hastes.

Figura 3.3: Curva de Tchebychev



Fonte: A autora.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## MECANISMO DE PEAUCELLIER

Neste capítulo, vamos estudar o mecanismo criado por Peaucellier em 1864. Iniciaremos com um breve contexto histórico, seguido pelo estudo da curva e do motivo por que ela descreve uma reta perfeita. Por fim, faremos a construção do mecanismo no GeoGebra. Este capítulo tem como principais referências os artigos "Curve e meccanismi" (CONTI, 2000), "A inversão circular e sistemas articulados" (GARCIA e MUREB SALLUM, 2009), e "Uma questão da matemática no período da Revolução Industrial" (WANDERLEY, 2001).

### 4.1 Contexto histórico

Como vimos, apesar dos seus esforços, Tchebychev não conseguiu encontrar um mecanismo capaz de dar uma solução exata para o problema de traçar retas.

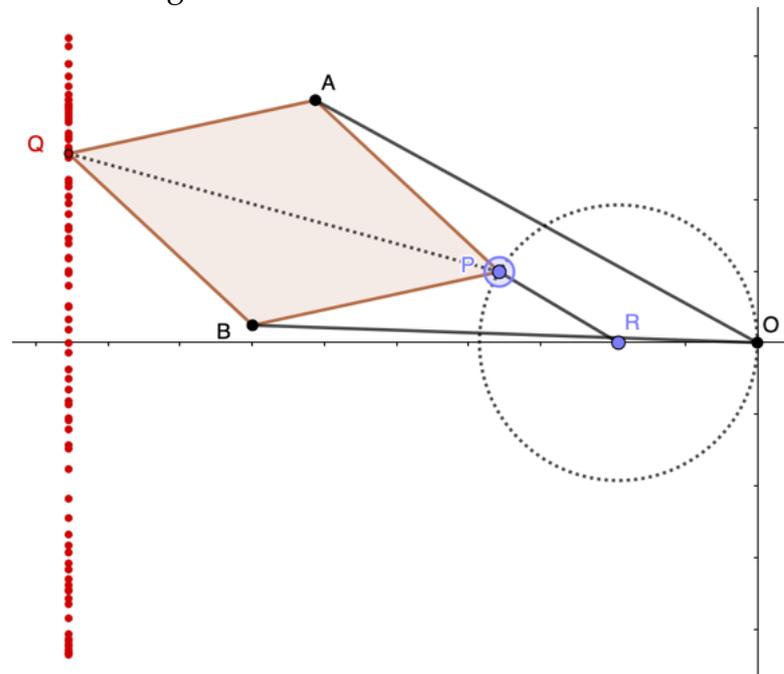
Conforme narra CONTI (2000, p. 45), a solução exata foi descoberta em 1864 por Charles-Nicolas Peaucellier (1832 – 1919), um engenheiro francês graduado pela École Polytechnique, e foi publicada na revista *Nouvelles Annales de Mathématiques* e passou quase despercebida.

Além disso, em 1871, o matemático Yom-Tov Lipman Lipkin encontrou independentemente a mesma solução encontrada por Peaucellier. Desta vez, grandes honras

foram prestadas a Lipkin pelo governo russo pela suposta originalidade de sua invenção. Embora tardiamente, o mérito de Peaucellier também foi reconhecido e ele recebeu um importante prêmio do Instituto de France, o prêmio Montyon.

O mecanismo consiste em sete hastes articuladas: quatro delas, do mesmo comprimento, formam um losango; duas outras, mais longas, são articuladas a dois vértices opostos do losango e entre si em um ponto fixo  $O$ .

Figura 4.1: Mecanismo de Peaucellier



Fonte: A autora.

A manipulação do mecanismo de Peaucellier pode ser feita virtualmente através do link ou do qr-code abaixo:

<https://www.geogebra.org/classic/f9wnz6n8>

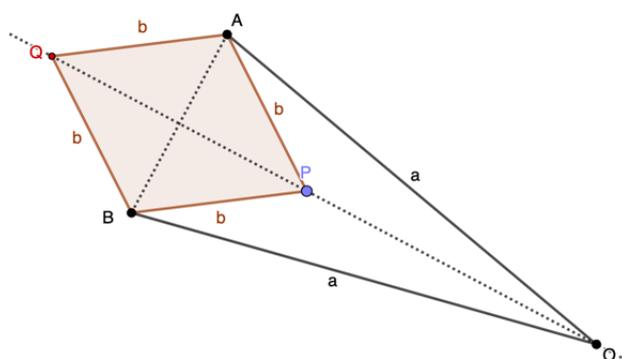


Uma propriedade da inversão circular, já demonstrada na parte preliminar, é que as circunferências que passam pelo centro de inversão (no nosso caso, o ponto  $O$ ) são enviadas em linhas retas. Isso explica o funcionamento do mecanismo de Peaucellier: se uma sétima haste for adicionada, forçando  $P$  a descrever um círculo passando por  $O$ , então o ponto  $Q$  descreverá uma reta. Uma reta de verdade, não sua aproximação.

## 4.2 A Curva de Peaucellier

Usando a transformação descrita na parte preliminar, Peaucellier construiu seu dispositivo prático. Com ele, a partir de um movimento circular, obtém-se um movimento retilíneo.

Seu mecanismo é, inicialmente, formado por 6 hastes articuladas conforme figura abaixo, com  $a > b > 0$ , que formam um papagaio  $BOAQ$  e um losango  $APBQ$ . As duas varetas maiores (de medida  $a$ ) ficam presas num ponto fixo  $O$  e pivotam juntas.



Fonte: A autora.

O leitor poderá utilizar a construção que fizemos no GeoGebra para visualizar melhor através do link ou do qr-code abaixo:

<https://www.geogebra.org/classic/f9wnz6n8>



Note, inicialmente, que os pontos  $P$  e  $Q$  ficam sempre em linha reta com  $O$ .

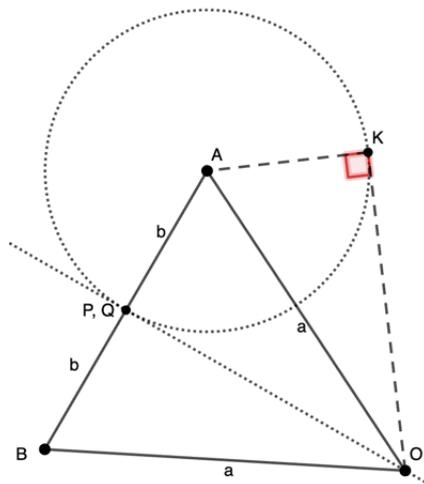
Isso porque  $Q$ ,  $P$  e  $O$  estão na reta mediatriz de  $AB$ , que é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $AB$ .

Mostraremos, agora, que os pontos  $P$  e  $Q$  são inversos um do outro pela circunferência de centro  $O$  e raio  $\sqrt{a^2 - b^2}$ .

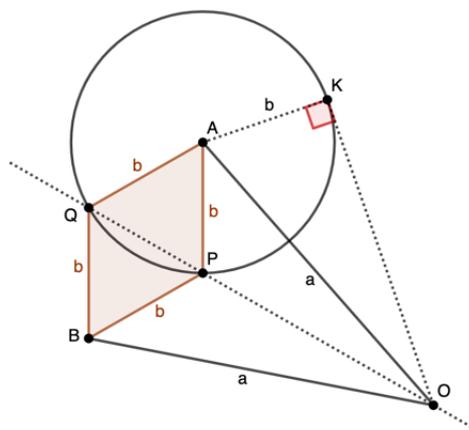
Se fizermos  $P$  coincidir com  $Q$ , traçamos uma perpendicular à circunferência  $C(A, b)$  que passa pelo ponto  $O$  e marcamos o ponto  $K$ . Temos o seguinte desenho:

Veja que o triângulo  $\triangle OAB$  é isósceles de base  $AB$  e que  $P = Q$  é o ponto médio da base. Logo, o segmento  $OP$  é não só a mediana do triângulo em relação à base, como também é a altura do triângulo  $\triangle OAB$ . Isso significa que  $m(\angle OPQ) = 90^\circ$ .

Daí,  $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OK}^2 = a^2 - b^2$ , por Pitágoras. Logo,  $\overline{OP} = \sqrt{a^2 - b^2}$ .



Fonte: A autora.



Fonte: A autora.

Agora, em qualquer posição do mecanismo, é importante notar primeiro que, pelo caso limite do Teorema das Cordas, temos que  $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OK}^2$ .

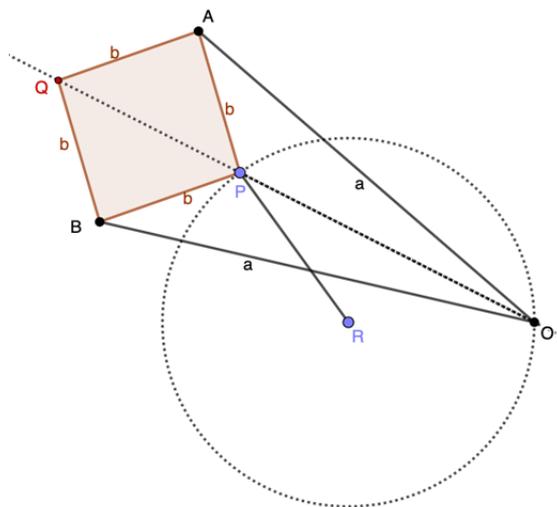
De outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $\triangle AKO$ , temos que  $\overline{OK}^2 = a^2 - b^2$ .

Sendo assim, temos que  $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = a^2 - b^2$ .

Ainda, segue da Propriedade 2 da Proposição 1.19 que, se  $P$  percorrer um arco de circunferência que passa por  $O$ , então o ponto  $Q$  percorrerá um segmento de reta.

Para isso, acrescentamos uma haste em  $P$  fixa na outra extremidade em algum ponto  $R$ , tal que  $\overline{OR} = \overline{RP} = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Tem-se, assim, um sistema articulado de 7 hastes, com os pontos  $R$  e  $O$  fixados no plano. Ainda, ao movimentarmos  $P$  na circunferência de centro  $R$  e raio de medida  $\overline{RO}$ , o ponto  $Q$  descreve um movimento retilíneo.



Fonte: A autora.

### 4.3 Construção no GeoGebra

A manipulação do mecanismo de Peaucellier pode ser feita virtualmente através do link ou do qr-code abaixo:

<https://www.geogebra.org/classic/f9wnz6n8>

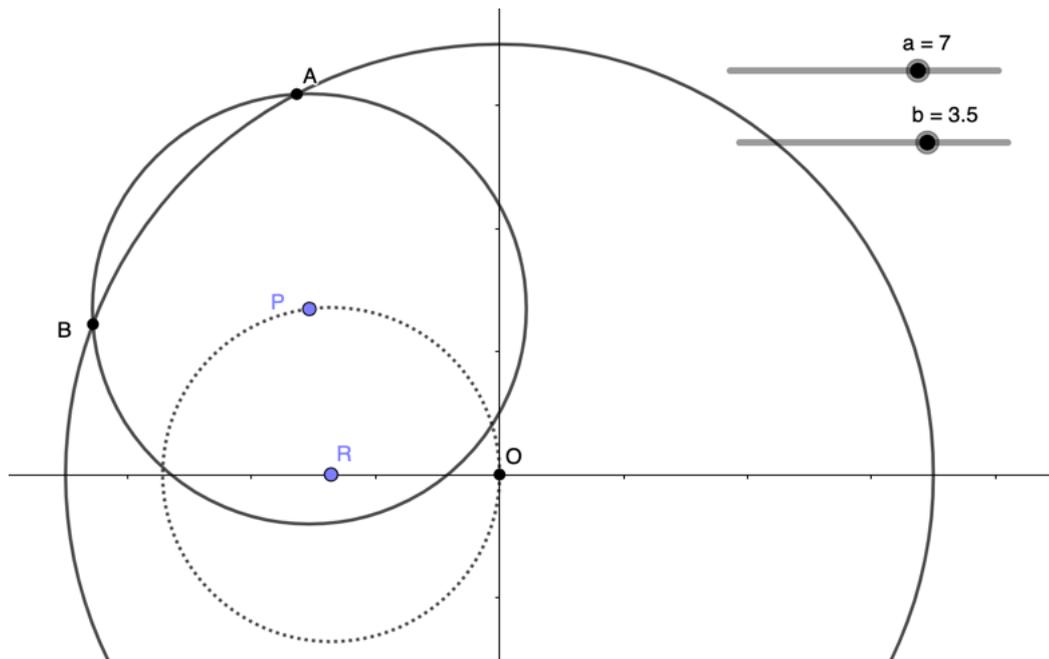


Como dissemos anteriormente, o mecanismo consiste em sete hastes articuladas: quatro delas, do mesmo comprimento, formam um losango; duas outras, mais longas, são articuladas a dois vértices opostos do losango e entre si em um ponto fixo.

A construção no GeoGebra deve seguir os seguintes passos:

- Marque o ponto  $O = (0, 0)$ ;
- Marque o ponto  $R$  em algum ponto do eixo  $x$  diferente de  $(0, 0)$ , fixo;
- Crie uma circunferência  $C(O, r)$  de centro em  $R$  e raio  $r = \overline{OR}$ ;
- Marque o ponto  $P$  tal que  $P \in C(O, r)$ ;
- Crie o controle deslizante  $a$  variando de 0 a 10;
- Escolha um valor de  $a$  tal que  $a > r$ ;
- Crie uma circunferência  $C(O, a)$ ;

- Crie o controle deslizante  $b$  variando de 0 a 5;
- Crie a circunferência  $C(O, a)$ ;
- Crie a circunferência  $C(P, b)$  e defina os valores de  $a$  e  $b$  de modo que  $C(O, a) \cap C(P, b)$  seja igual a dois pontos distintos, designados  $A$  e  $B$  conforme figura;



Fonte: A autora.

- Trace o segmento  $AB$ ;
- Trace a reta  $t$  perpendicular a  $AB$ , passando por  $P$ ;
- Crie a circunferência  $C(A, b)$  de centro em  $A$  e raio  $b$  e marque o ponto  $Q$  conforme figura;
- Oculte os elementos acessórios:  $C(A, b)$ ,  $C(P, b)$ ,  $C(O, a)$ , segmento  $AB$  e reta  $t$ ;
- Crie o losango  $APBQ$ ;
- Trace os segmentos  $QP$ ,  $BO$ ,  $AO$  e  $PQ$ ;
- Habilite o rastro do ponto  $Q$ ;



---

---

# CAPÍTULO 5

---

## MECANISMO DE HART

Neste capítulo, vamos estudar o mecanismo criado por Hart no fim do século XIX. Iniciaremos com um breve contexto histórico, seguido pelo estudo da curva e do motivo por que ela descreve uma reta perfeita. Por fim, faremos a construção do mecanismo no GeoGebra. Este capítulo tem como principais referências o livro "Oltre il Compasso - La geometria delle curve" (CONTI, 2000) e os artigos "A inversão circular e sistemas articulados" (GARCIA e MUREB SALLUM, 2009), e "Uma questão da matemática no período da Revolução Industrial"(WANDERLEY, 2001).

### 5.1 Contexto histórico

Não foram encontradas muitas referências biográficas relativas ao matemático Harry Hart, inventor do mecanismo que leva seu nome. Das pesquisas que fizemos (PEOPLE PILL, 2023), Harry Hart (1848-1920) foi um matemático inglês, formado pela Universidade de Cambridge em 1871 e com doutorado pela Trinity College de Cambridge em 1874.

O mecanismo de Hart foi desenvolvido no fim do século XIX e tem a vantagem de só necessitar 5 barras.

O mecanismo é baseado num paralelogramo que é conhecido como "Paralelogramo

Figura 5.1: Mecanismo de Hart, por Martin Schilling, série 24, modelo 11, número 350.



Fonte: SMITHSONIAN, 2023

cruzado" de Hart, onde  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ,  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Depois,  $O$ ,  $P$  e  $P'$  são três pontos colineares escolhidos nas hastes  $AD$ ,  $AB$  e  $CD$ , respectivamente, alinhados de forma que a reta sobre a qual eles se encontram seja paralela a  $AC$ . Por fim, se  $O$  é fixo, os pontos  $P$  e  $P'$  correspondem a uma inversão circular dada pelo círculo de centro  $O$  e de um determinado raio que veremos mais adiante. Assim, se  $P$  se move em uma circunferência que passa por  $O$ , o ponto  $P'$  descreve uma linha reta.

A manipulação do mecanismo de Hart pode ser feita virtualmente através do link ou do qr-code abaixo:

<https://www.geogebra.org/classic/jary75ky>

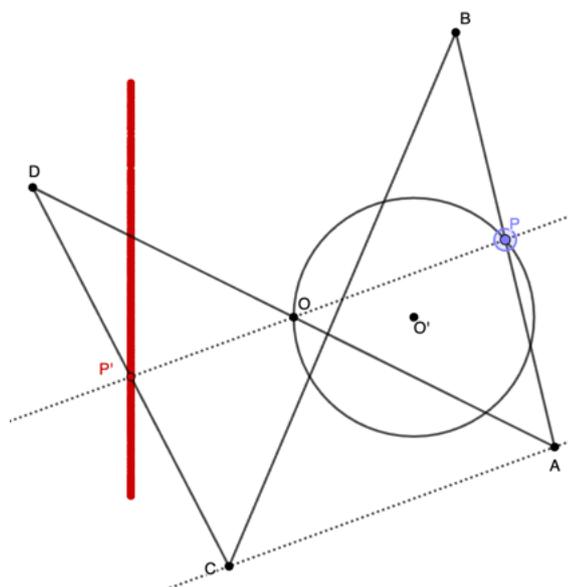


## 5.2 A Curva de Hart

Começamos com um paralelogramo  $ABCD$  articulado nos vértices e arestas de medida fixa.

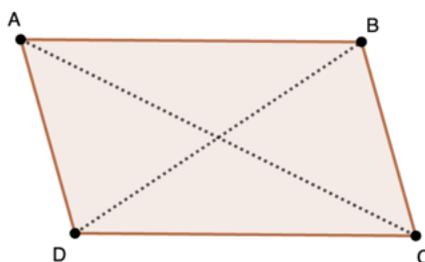
Rotacionamos, então, o vértice  $D$  em torno de  $A$  no sentido anti-horário e obtemos diferentes posições do paralelogramo quando  $D$  e  $C$  estão no mesmo semiplano de-

Figura 5.2: Mecanismo de Hart



Fonte: A autora.

Figura 5.3: Paralelogramo



Fonte: A autora.

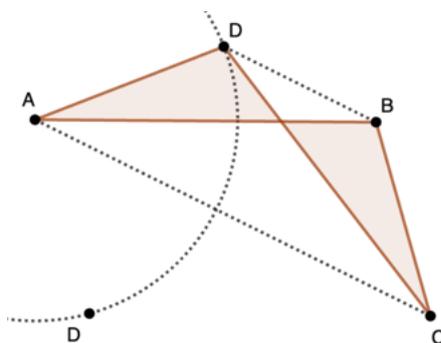
terminando pela reta  $AB$  e obtemos diferentes posições do chamado “paralelogramo cruzado” quando  $D$  e  $C$  estão em semiplanos opostos, como mostra a figura abaixo:

Afirmamos que, quando estamos na posição de “paralelogramo cruzado”, os segmentos  $AC$  e  $BD$  são paralelos.

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle CDA$ . Considerando o paralelogramo na sua posição normal, é fácil verificar que os referidos triângulos são congruentes pelo caso lado-lado-lado, já que  $AC$  é lado comum e, por construção,  $AB = CD$  e  $AD = BC$ .

Quando o paralelogramo está cruzado, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle CDA$  continuam a

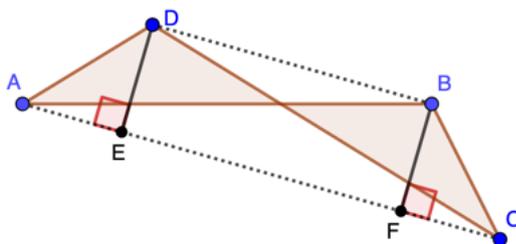
Figura 5.4: Paralelogramo cruzado



Fonte: A autora.

ser congruentes, já que todos os lados continuam a ter as mesmas medidas.

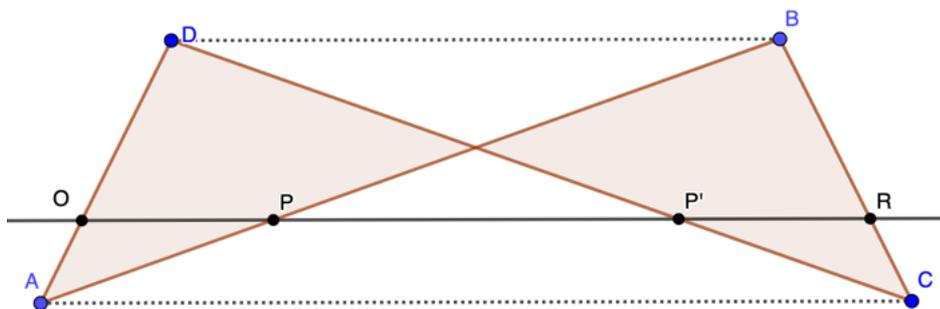
Sendo assim, as alturas dos triângulos relativamente à base  $AC$  são congruentes.



Fonte: A autora.

Sendo assim,  $AC \perp DE$  e  $AC \perp BF$  e, de consequência,  $DE \parallel BF$ . Como  $\overline{DE} = \overline{BF}$ , então  $BDEF$  é um retângulo e  $DB$  é paralelo a  $AC$ , como queríamos demonstrar. ■

Continuando na configuração do paralelogramo cruzado, consideremos a reta paralela a  $AC$  que intersecta o paralelogramo cruzado nos pontos  $O, P, P'$  e  $R$ .



Fonte: A autora.

Agora, relembremos o que enuncia o Teorema de Tales [7]:

**Teorema 5.1.** *Se três ou mais paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais.*

A prova do Teorema acima está na página 122 da referência [7].

Assim, aplicando o teorema Teoremas de Tales ao caso temos que:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AP}{PB} \quad (5-1)$$

Ainda, que

$$\frac{CP'}{P'D} = \frac{CR}{RB} \quad (5-2)$$

e

$$\frac{AO}{OD} = \frac{CP'}{P'D}. \quad (5-3)$$

Note que, como os pontos  $O$ ,  $P$ ,  $P'$  e  $R$  são fixos nas barras, as razões acima são invariantes à medida que o paralelogramo cruzado se move.

**Teorema 5.2.** *Tome  $O$ ,  $P$ ,  $P'$  e  $R$  tais que as proporções 5-1, 5-2 e 5-3 são mantidas. Para qualquer posição do paralelogramo cruzado, os pontos  $O$ ,  $P$ ,  $P'$  e  $R$  são colineares e a reta que os contém é sempre paralela a  $DB$  e  $AC$ .*

*Demonstração.* De 5-1, usando a recíproca do Teorema de Tales, temos que  $OP \parallel DB$ . De 5-2, analogamente, temos que  $P'R \parallel DB$ . De 5-3, temos que  $OP' \parallel AC$ .

Como  $AC \parallel DB$ , então  $OP' \parallel DB$ .

Como  $OP' \parallel DB$  e  $P'R \parallel DB$  então  $OP' \parallel P'R$ .

Como  $OP' \parallel DB \parallel OP$ , então  $P \in OP'$ .

Como  $OP'$  e  $P'R$  têm um ponto em comum e  $OP' \parallel P'R$  então  $OP'$  é colinear a  $P'R$ . Portanto, os pontos  $O$ ,  $P$ ,  $P'$  e  $R$  são sempre colineares, qualquer que seja o movimento do paralelogramo cruzado e a reta por eles formada é paralela a  $AC$  e  $DB$ . ■

Vamos, agora, mostrar que  $P$  e  $P'$  são inversos relativamente a uma circunferência de centro  $O$ . Para isso, precisamos mostrar que  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'}$  é igual a uma constante.

Como os triângulos  $\triangle AOP$  e  $\triangle ADB$  são semelhantes, temos que:  $\frac{\overline{OP}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AD}}$ .

Do mesmo modo, para os triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle ODP'$ , temos que:  $\frac{\overline{OP'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{DA}}$ .

Multiplicando as razões, temos que:  $\frac{\overline{OP}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DO}}{\overline{DA}}$ , isto é,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{AC} \cdot \overline{DB} \cdot \frac{\overline{AO} \cdot \overline{DO}}{(\overline{AD})^2}. \quad (5-4)$$

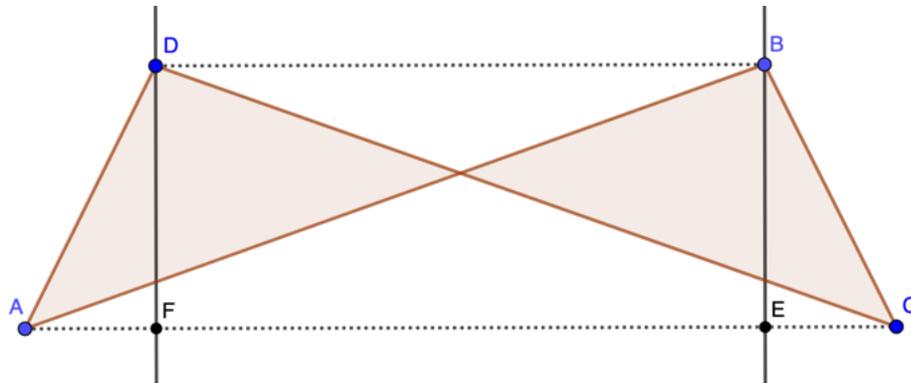
Para que os pontos  $P$  e  $P'$  sejam inversos relativamente a uma circunferência de centro  $O$ , a expressão 5-4 tem que ser uma constante igual ao quadrado do raio dessa circunferência, como vimos nas preliminares.

Agora, lembremos que as barras  $AD$ ,  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$  são fixas; ainda, fixemos o ponto  $O$  na barra  $AD$ . Assim, temos que  $\overline{AO}$ ,  $\overline{DO}$  e  $\overline{AD}$  são constantes fixas determinadas pela construção do mecanismo. No entanto,  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$  são variáveis, a depender da movimentação do mecanismo. Temos, portanto, que mostrar que  $\overline{AC} \cdot \overline{DB}$  é constante.

Para isso, consideremos a reta perpendicular a  $AC$  passando pelo ponto  $B$  e seja  $E$  o pé dessa perpendicular na reta  $AC$ . Consideremos também a reta perpendicular a  $AC$  passando pelo ponto  $D$  e seja  $F$  o pé dessa perpendicular na reta  $AC$ .

Há 3 casos a considerar:  $\overline{DB} < \overline{AC}$ ,  $\overline{DB} > \overline{AC}$  e  $\overline{DB} = \overline{AC}$ .

1º caso:  $\overline{DB} < \overline{AC}$ :



Fonte: A autora.

Note que  $AF \equiv EC$  porque  $\triangle AFD \equiv \triangle ECB$  pelo critério LAA, pois:

- $AD \equiv BC$  por construção;
- $\angle DAF \equiv \angle BCE$  porque  $\triangle ADC \equiv \triangle ABC$ ;
- $\angle AFD \equiv \angle CEB$  (ângulos retos).

Como  $DB \equiv FE$  por construção, então, podemos afirmar que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \overline{AC} \cdot \overline{EF} \quad (5-5)$$

$$= (\overline{AE} + \overline{EC}) \cdot (\overline{AE} - \overline{AF}) \quad (5-6)$$

$$= (\overline{AE} + \overline{EC}) \cdot (\overline{AE} - \overline{EC}) \quad (5-7)$$

$$= \overline{AE}^2 - \overline{EC}^2 \quad (5-8)$$

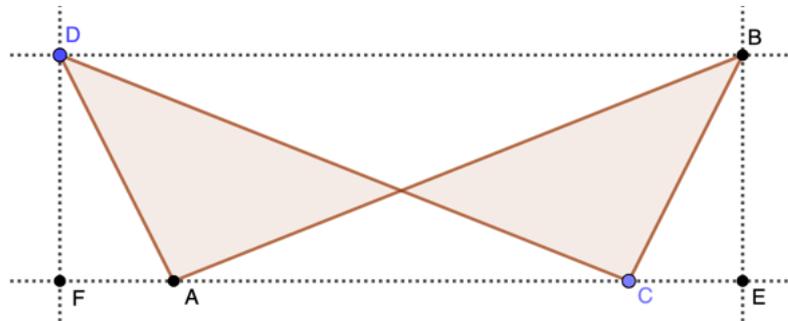
Por outro lado, aplicado o Teorema de Pitágoras nos triângulos  $\triangle AEB$  e  $\triangle BEC$ , sabemos que  $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2$  e que  $\overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{BC}^2$ . Portanto,

$$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = (\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2) - (\overline{BE}^2 + \overline{EC}^2) = \overline{AE}^2 - \overline{EC}^2 \quad (5-9)$$

De 5-8 e 5-9 vêm que  $\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$  e esta diferença é uma constante, pois  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  são constantes.

Portanto,  $\overline{AC} \cdot \overline{DB}$  é uma constante!

2º caso:  $\overline{DB} > \overline{AC}$ :



Fonte: A autora.

Aqui, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{DB} &= \overline{AC} \cdot \overline{EF} = (\overline{AE} - \overline{EC}) \cdot (\overline{AE} + \overline{AF}) = (\overline{AE} - \overline{EC}) \cdot (\overline{AE} + \overline{EC}) \\ &= \overline{AE}^2 - \overline{EC}^2 \end{aligned}$$

Analogamente, conclui-se que  $\overline{AC} \cdot \overline{DB}$  é uma constante!

3º caso:  $\overline{DB} = \overline{AC}$



## 5.3 Construção no GeoGebra

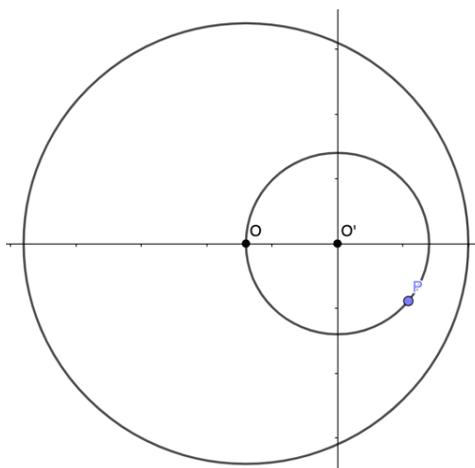
A manipulação do mecanismo de Hart pode ser feita virtualmente através do link ou do qr-code abaixo:

<https://www.geogebra.org/classic/jary75ky>



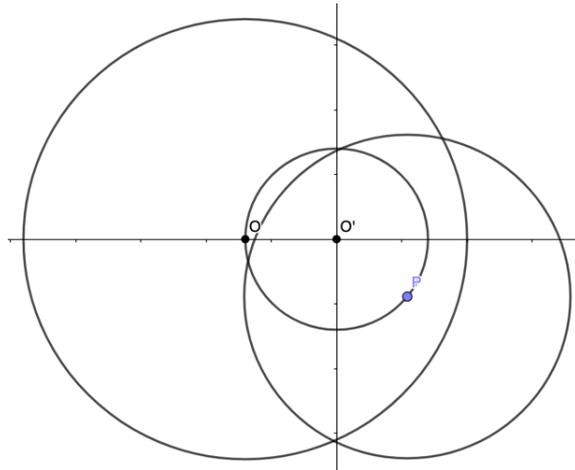
A construção no GeoGebra deve seguir os seguintes passos:

- Crie os controles deslizantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  com variações de 0 a 5, 0 a 10 e 0 a 15, respectivamente;
- Crie o ponto  $O' = (0, 0)$ ;
- Crie a circunferência de centro em  $O'$  e raio  $a$ ;
- Marque o ponto  $O$  na interseção à esquerda entre a circunferência  $C(O', a)$  e o eixo  $x$ ;
- Marque o ponto  $P$  como ponto móvel da circunferência  $C(O', a)$ ;
- Crie a circunferência de centro em  $O$  e raio  $b > a$  de modo que a circunferência  $C(O, b)$  contenha a circunferência  $C(O', a)$ ;



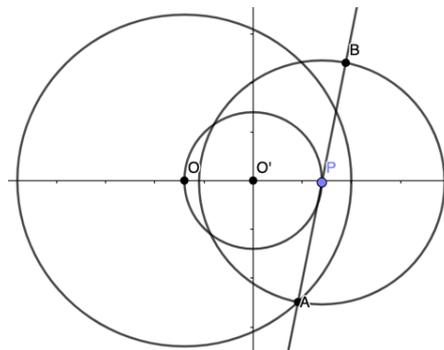
Fonte: A autora.

- Crie a circunferência de centro em  $P$  e raio  $c$  de tamanho tal que a circunferência  $C(P, c)$  intersecte a circunferência  $C(O, b)$  em dois pontos distintos;



Fonte: A autora.

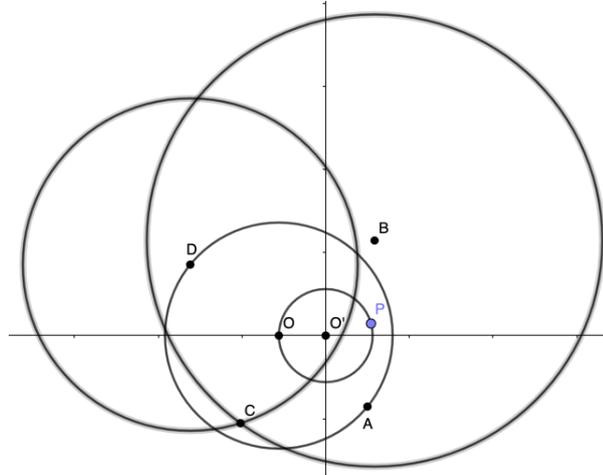
- Marque o ponto  $A$  em uma das interseções entre  $C(O, b)$  e  $C(P, c)$ ;
- Trace a reta  $AP$  que passa por  $A$  e  $P$  e marque o ponto  $B$  na interseção entre  $AP$  e  $C(P, c)$  oposta ao ponto  $A$ ;



Fonte: A autora.

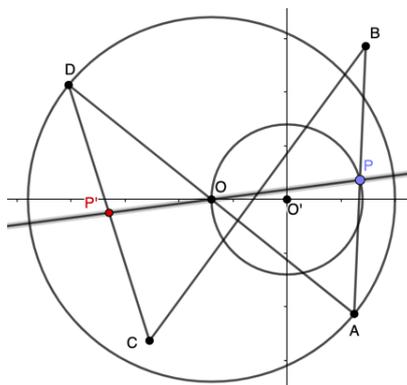
- Oculte a circunferência  $C(P, c)$ ;
- Trace a reta  $AO$  que passa por  $A$  e  $O$  e marque o ponto  $D$  na interseção entre a reta  $AO$  e  $C(O, b)$  oposta ao ponto  $A$ ;
- Oculte a circunferência  $C(O, b)$ ;
- Usando o recurso do compasso, crie a circunferência  $C(D, d)$  de centro em  $D$  e raio de medida  $d = \overline{AB}$ ;
- Usando o recurso do compasso, crie a circunferência  $C(B, e)$  de centro em  $B$  e raio de medida  $e = \overline{AD}$ ;

- Marque o ponto  $C$  na interseção entre  $C(D, d)$  e  $C(B, e)$  tal que  $C$  está no mesmo semiplano que  $A$  considerando a divisão do plano feito pela reta  $DB$ ;



Fonte: A autora.

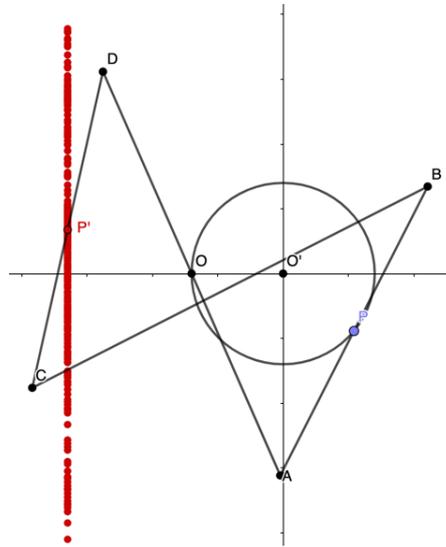
- Oculte as circunferências  $C(D, d)$  e  $C(B, e)$ ;
- Crie o paralelogramo cruzado  $ABCD$ ;
- Crie a reta  $PO$  que passa por  $P$  e por  $O$ . Esta reta intersectará o segmento  $CD$ . Marque o ponto  $P'$  nessa interseção;
- Troque a cor de  $P'$  para vermelho e habilite o rastro de  $P'$ ;



Fonte: A autora.

- Usando a função "mover", mova o ponto  $P$  ao longo da circunferência  $C(O', a)$ , movimentando o mecanismo;

Figura 5.6: Mecanismo de Hart



Fonte: A autora.

- O rastro do ponto  $P'$  é uma reta.

Para finalizar, fica a indicação de se estudar quais são as medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  para que o mecanismo exista.

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos os mecanismos de Watt (1784), Tchebychev (1850), Peaucellier (1864) e Hart (1874).

No estudo do mecanismo de Watt, fizemos a parametrização da curva e obtivemos a equação geral da curva gerada pelo mecanismo.

De sua vez, no estudo do mecanismo de Tchebychev, fizemos a parametrização da curva, mas, apesar dos nossos esforços, não obtemos êxito em encontrar a equação geral da curva gerada pelo mecanismo. Por essa razão, esse estudo pode ser um viés a ser seguido em estudos futuros.

Também estudamos neste trabalho os mecanismos de Peaucellier e Hart, ambos capazes de criar retas perfeitas e baseados na teoria da inversão circular, estudada no capítulo preliminar.

Como encaminhamentos futuros, também podem ser estudados os mecanismos de Hoekens e Roberts, cujos resultados são próximos de uma reta, o mecanismo de Sarrus, que é capaz de gerar uma reta perfeita tridimensionalmente, e o mecanismo de Kempe, que dá solução exata à construção da reta no plano.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRITANNICA. **Pafnuty Chebyshev**. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Pafnuty-Lvovich-Chebyshev>>, acesso em 20/05/2023.
- [2] CAPUTI, Armando. **A Geometria das curvas**. In: XII Semana da Matemática. Universidade Estadual de Maringá, 2001.
- [3] CAPUTI, Armando. GERÔNIMO, João Roberto. ORGANISTA, Juniormar. NIRO, Kleber Luciano. **Traçando retas**. In: Matemática: Exposição Interativa de Matemática. Projeto n. 1490/2004, 11/2010.
- [4] CAPUTI, Armando. GERÔNIMO, João Roberto. NIRO, Kleber Luciano. **O Mecanismo de Watt**. In: Matemática: Exposição Interativa de Matemática. Projeto n. 1490/2004, 02/2008.
- [5] CONTI, Franco. **Curve e Meccanismi**. In: Oltre il Compasso - La geometria delle curve. Polistampa, Florença, 2000, p. 37-53.
- [6] GARCIA, Sonia Regina Leite. MUREB SALLUM, Elvia. **A inversão circular e sistemas articulados**. In: 4o. Encontro da RPM, 2009.
- [7] GERÔNIMO, João Roberto. FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria plana e espacial: um estudo axiomático**. Maringá, Eduem, 2010.

- [8] KINGSFORD, Peter W. **Later years of James Watt**. In: Britânica. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/James-Watt/Later-years>>, acesso em 20/05/2023.
- [9] MUIRHEAD, J. P. **The Life of James Watt: With Selections from His Correspondence**. Reino Unido: J. Murray, 1858. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=\\_b8GAAAAYAAJ](https://books.google.com.br/books?id=_b8GAAAAYAAJ)>, acesso em 18/09/2022.
- [10] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria**. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [11] PERDIGÃO DO CARMO, Manfredo. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [12] PEOPLE PILL. **Harry Hart**. Disponível em: <<https://peoplepill.com/people/harry-hart-1>>, acesso em 20/05/2023.
- [13] SMITHSONIAN. **Hart Inversor, Kinematic Model by Martin Schilling, series 24, model 11, number 350**. Disponível em: <<https://www.si.edu/object/hart-inversor-kinematic-model-martin-schilling-series-24-model-11-number-350:nmah-1214011>>, acesso em 15/07/2023.
- [14] WANDERLEY, Augusto J. M. Uma questão da matemática no período da Revolução Industrial. **Revista Uniandrade**, Curitiba, vol. 02, n. 03, 2001.