

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sobre o Cálculo de Áreas
e o Teorema de Pick

Francisco Silvério da Silva Junior



Instituto de Matemática

Maceió, Agosto de 2013



PROFMAT



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Sobre o Cálculo de Áreas e o Teorema de Pick

Francisco Silverio da Silva Junior

Maceió
2013

FRANCISCO SILVERIO DA SILVA JUNIOR

Sobre o Cálculo de Áreas e o Teorema de Pick

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira
Micena

Maceió
2013

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586s Silva Junior, Francisco Silverio da.
Sobre o cálculo de áreas e o teorema de Pick / Francisco Silverio da Silva Junior. – 2013.
92 f. : il.

Orientador: Fernando Pereira Micena.
Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 91-92.

1. Polígonos simples. 2. Geometria plana – Figuras semelhantes. 3. Pick, teorema de. 4. Formula de Euler para planos. 5. Matemática – Ensino.
I. Título.

CDU: 514.112:37.025

SOBRE O CÁLCULO DE ÁREAS E O TEOREMA DE PICK

Francisco Silverio da Silva Junior

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 10 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Fernando Pereira Micena (Orientador - UFAL)



Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi (UFAL)



Prof. Dr. Ana Lucia Pinheiro Lima (UFBA)

*A Deus por tudo, aos meus familiares e a todos os que
fizeram o PROFMAT 2011.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo amor e por tudo.

Aos meus familiares e ao amigo José Monteiro, pela força e apoio, especialmente nos momentos de desânimo e tristeza.

Ao professor Fernando Micena pelas aulas ministradas com grande dedicação nas disciplinas de Matemática Discreta e Geometria Analítica e sobretudo pela orientação neste trabalho.

Ao professor José Adonai, pela grandeza de suas aulas, sempre ministradas com grande inspiração e paixão, pela orientação no trabalho final da graduação e sobretudo pela integridade com que se dedica à função de professor, o que sempre me fez tê-lo como um referencial.

À minha namorada, Priscila Moraes, pela paciência, compreensão, companheirismo e pelas palavras de sabedoria e esperança, especialmente nos momentos mais difíceis e decisivos.

Ao meu amigo e colega de PROFMAT, Gelsivânio Souza pelas conversas, experiências e por todo o companheirismo nesses dois anos de PROFMAT.

Ao meu amigo e colega de PROFMAT, Elizângelo Lopes, por toda ajuda prestada no blog do curso, e especialmente durante a digitação deste trabalho.

Ao meu irmão, Fábio Luciano, pela ajuda indispensável para o término deste trabalho.

Também sou muito grato a todos os outros colegas de PROFMAT, que de alguma maneira dividiram comigo o fardo e os momentos mais tensos durante estes dois anos de curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro.

Aos diretores e coordenadores locais e nacionais do PROFMAT.

Aos professores da UFAL que lecionaram à turma do PROFMAT 2011.

A todos os professores da UFAL que contribuíram, de alguma forma, para o meu crescimento matemático.

"O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos."

—G. GALILEI (1564-1642)

Resumo

Este trabalho visa apresentar uma proposta alternativa para o ensino do conceito e do cálculo de área de polígonos diversos. Antes, nos esforçamos para tentar mostrar a importância do ensino de Geometria e do conceito de área, e tentamos analisar, à luz de PAVANELLO, um fenômeno educacional brasileiro: o abandono do ensino de Geometria. Posteriormente, seguimos com as definições e conceitos básicos necessários ao tratamento do conceito e do cálculo da área de polígonos mais elementares como quadrados, retângulos, triângulos, etc. No terceiro capítulo, apresentamos alguns resultados que podem ser demonstrados com as proposições do capítulo anterior, como o Teorema de Pitágoras, a Lei dos Senos e o Limite Fundamental trigonométrico. Depois apresentamos o Teorema de Pick, suas versões para polígonos com "buracos" e para polígonos com vértices de coordenadas racionais e sua surpreendente equivalência com a fórmula de Euler para polígonos no plano. No quinto capítulo, apresentamos alguns resultados interessantes que podem ser obtidos utilizando-se o Teorema de Pick, como por exemplo, uma estimativa para o valor de π , e encontrar uma solução inteira para a equação diofantina $mp - nq = 1$, em que p e q sejam primos entre si. Finalmente, no sexto capítulo, apresentamos uma proposta educacional para o tratamento do conceito de área de polígonos, que faz uso do site Google Maps e do software Geogebra, juntamente com o Teorema de Pick e da relação entre áreas de figuras semelhantes. Nesta atividade, propomos aos alunos calcular a área aproximada de mapas de regiões (como o Estado de Alagoas, a cidade de Maceió) apenas utilizando os resultados apresentados em sala de aula, sob a orientação do professor. Ao fim do trabalho, segue-se um apêndice com um pequeno resumo sobre a teoria das integrais e sua relação com o cálculo de área sob o gráfico de funções e a definição da função logarítmica.

Palavras-chave: Polígonos Simples. Figuras Semelhantes. Teorema de Pick. Fórmula de Euler para Planos.

Abstract

This work aims to introduce an alternative proposal for the teaching of the concept and calculation of the area of several polygons. Before, we strove to try showing the importance of the Geometry teaching and of the concept of area, and we tried to analyze, in the light of PAVANELLO, a Brazilian education phenomenon: the abandonment of Geometry teaching. After, we follow with the definitions and basic concepts required to the treatment of the concept and calculation of the more elementary polygons area as squares, rectangles, triangles, etc. On third chapter, we showed some results that can be demonstrated with the propositions of the previous chapter, as the Pythagoras's Theorem, The Law of Sines and the Fundamental trigonometric limit. After we introduce the Pick's Theorem, its versions for the polygons with "holes" and for polygons with vertices of reasonable coordinates and its surprising equivalence with the Euler's Formula for polygons in plan. On the fifth chapter, we show some interesting results that can be obtained by using the Pick's Theorem, like, for instance, an estimate for the value of π , and find a entire solution for the diophantine equation $mp - nq = 1$, where p e q are coprime. Finally, on the sixth chapter, we introduce an educational proposal for the treatment of the concept of polygon's area, that makes use of the Google Maps site and of the Geogebra Software, together with the Pick's Theorem and of the relation between areas of similar figures. At this activity, we propose to the students calculate the approximated area of regions (as the State of Alagoas, the city of Maceio) just using the results presented at classroom, under the supervision of the teacher. At the end of work, it follows an appendix with a small abstract about the integrals theory and its relation with the calculation of area under the graphic of functions and the definition of the logarithmic function.

Keywords: Simple Polygons. Similar Figures. Pick's Theorem. Euler's Formula for plans.

Lista de Figuras

1	Linha poligonal	23
2	Exemplos de polígonos.	24
3	Polígono: reunião de um número finito de regiões triangulares não sobrepostas e coplanares.	24
4	Quadrado elementar.	25
5	Quadrado de lado m	26
6	Paralelogramo de base a e altura h	29
7	Paralelogramo de base 4 cm e altura 3 cm.	30
8	Triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$	31
9	Triângulo de base 7 cm e altura 4 cm.	31
10	$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(A'BC)$ para $\overline{AA'}$ paralela a \overline{BC}	32
11	Fórmula de Heron.	32
12	Triângulo de lados 6, 8 e 10 cm.	34
13	Triângulo de lados 5, 8 e ângulo 30°	36
14	Triângulo no plano xOy	37
15	Trapézio de lados paralelos a e b e altura h	39
16	Trapézio de bases $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\overline{CD} = 4\text{ cm}$ e altura $h = 2\text{ cm}$	39
17	Losango de diagonais AC e BD	40
18	Losango de diagonais $\overline{AC} = 2\text{ cm}$ e $\overline{DB} = 4\text{ cm}$	40
19	Polígonos semelhantes.	41
20	Círculo inscrito ao polígono regular P	41
21	Octógono regular.	42
22	Triângulos semelhantes.	43
23	Quadriláteros semelhantes.	44
24	Polígonos regulares inscritos ao círculo.	46
25	Triângulo isósceles cujos lados congruentes são raios do círculo.	47
26	Área do Setor Círcular	49
27	Área do Segmento Círcular	49

28	Quadrado de lado $(b + c)$	53
29	Demonstração do Teorema de Pitágoras.	53
30	Generalização do Teorema de Pitágoras.	54
31	Problema de Hipócrates	55
32	Intersecções das semicircunferências	56
33	Lei dos Senos.	56
34	Círculo trigonométrico de raio 1.	58
35	Área do triângulo pela fórmula de Pick.	61
36	Polígono P que apresenta autointersecção.	62
37	Caso em que ponto A pertence ao interior de uma aresta do polígono P	63
38	Caso em que o ponto A é um vértice do polígono P	64
39	Se \overline{AC} intersceta P , então B pode ser conectado a algum outro vértice.	64
40	Q' está inteiramente no interior de P (à direita), ou no exterior de P (à esquerda).	66
41	O Teorema de Pick para triângulos retângulos.	68
42	O Teorema de Pick para triângulos quaisquer.	69
43	Polígono de vértices com coordenadas inteiras.	70
44	Triângulos elementares.	71
45	Fórmula de Euler para planos.	72
46	Triângulo elementar (em azul) em uma das faces do polígono.	74
47	Soma dos ângulos dos vértices interiores.	78
48	Região poligonal com 2 buracos.	80
49	Tetraedro com coordenadas inteiras.	81
50	Solução da equação dionfantina $mp - nq = 1$	84
51	Gráfico do segmento determinado por A e B	86
52	Quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio 1.	88
53	Quadrado circunscrito ao círculo de raio 1.	88
54	Octógono aproximando o círculo de raio 3.	89
55	Polígono que aproxima o círculo de raio 10.	89
56	Polígonos usuais em papel milimetrado.	93
57	Polígonos irregulares em papel milimetrado.	94
58	Alagoas no Google Maps.	95
59	Ajustando a malha no Geogebra.	95
60	Imagem do Google no Geogebra.	96
61	O polígono que aproxima o mapa de Alagoas.	96
62	O polígono que aproxima o mapa de Maceió.	98
63	Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio.	103
64	Partição do intervalo $[a, b]$	104

65	Estimando a área da região R	104
66	Área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$	105
67	Partição do intervalo $[a, b]$	106
68	Soma de Riemann de uma função com imagem positiva.	106
69	Soma de Riemann: diferença das somas das áreas dos retângulos que estão acima e abaixo do eixo x	107
70	Área da região sob o gráfico da função $f(x) = x^2$	111
71	Área da região sob o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$	112
72	Área entre o eixo x e o gráfico de uma função com imagem negativa.	113
73	Área entre o eixo x e o gráfico de uma função com imagens negativas e positivas.	113
74	Área da região determinada pelo intervalo $[-1, 1]$ e o gráfico da função x^3	114
75	Interpretação geométrica da função $\ln x$	115
76	Interpretação geométrica de propriedade da função logarítmica.	116

Sumário

1	Introdução	13
2	Sobre o Conceito de Área e o Ensino de Geometria	15
2.1	A importância do ensino de Geometria	15
2.2	Sobre o abandono do ensino de Geometria no Brasil	17
2.3	História do conceito de área	19
3	A Área do Círculo e de Polígonos Conhecidos	22
3.1	Conceitos e definições iniciais	22
3.2	Áreas dos polígonos mais conhecidos	25
3.3	Razão entre Áreas de Figuras Semelhantes	42
3.4	A Área do Círculo	45
4	Aplicações do Conceito de Área	52
4.1	O Teorema de Pitágoras	52
4.2	Lei dos Senos	56
4.3	Limite Fundamental Trigonométrico.	57
5	O Teorema de Pick	60
5.1	A Fórmula de Pick: Observações iniciais	60
5.2	O Teorema de Pick	68
5.3	Equivalência entre o Teorema de Pick e a Fórmula de Euler para planos	71
5.4	O Teorema de Pick para Polígonos com 'Buracos'	79
5.5	O Teorema de Pick para Vértices de Coordenadas Racionais	82
6	Aplicações do Teorema de Pick	84
6.1	Uma Aplicação Aritmética	84
6.2	Outra Aplicação	86
6.3	Estimativa para o valor de π	87

7	Proposta Educacional	91
A	Teoria das Integrais	102
A.1	Partição de um Intervalo	102
A.2	Cálculo de Áreas	104
A.3	Soma de Riemann	106
A.4	Definição da Integral de Riemann	108
A.5	A Função $\ln x$	114
	A.5.1 Interpretação Geométrica	114
	A.5.2 Propriedades da Função Logaritmo	115

1

Introdução

O conceito de área de figuras surge na Educação Infantil ao lado de outros conceitos de Geometria e do cálculo de medidas, e permanece nos currículos de Matemática até o Ensino Médio.

O material auxiliar mais utilizado para o ensino do conceito de área é o livro didático, que apresenta a área de uma superfície como um número associado à mesma. O ensino para a obtenção desse número geralmente se inicia através da decomposição de figuras mais complexas em figuras mais elementares (como retângulos, quadrados e triângulos). A partir desta decomposição são deduzidas as diferentes fórmulas para o cálculo de áreas de diferentes figuras, em geral, de polígonos.

No entanto, quase nenhum tratamento é dado ao cálculo de área de figuras mais irregulares e não poligonais (com exceção do círculo) que apresentam contornos mais complexos como curvas, por exemplo. Além disso, geralmente não há citação ou valorização dos aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de áreas, conhecimentos estes que poderiam ser bastante úteis para o entendimento do conceito de área por parte dos alunos.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta alternativa para o tratamento do ensino de áreas de polígonos diversos, desde os mais conhecidos até as de figuras mais irregulares e mais complexas que apresentam contornos formados por segmentos e curvas (como mapas de regiões) com a utilização do Teorema de Pick.

Antes disto, buscamos valorizar e relembrar os aspectos históricos da construção do conceito de área, além de tentar mostrar algumas razões pelas quais se deve dar especial atenção ao ensino de Geometria. Além disso, buscou-se trazer de volta um tema recorrente em trabalhos de Educação Matemática, que é o fenômeno do abandono do Ensino de Geometria no Brasil.

A seguir, buscamos deduzir as fórmulas mais usuais para o cálculo da área de polígonos simples, e da área do círculo através de uma demonstração que tem como base o princípio

de Eudoxo Arquimedes. No capítulo seguinte, provamos alguns resultados com a ajuda do conceito de área, como o Teorema de Pitágoras, a Lei dos Senos e o problema de Hipócrates.

No quarto capítulo, introduzimos alguns resultados auxiliares que serviram de base para o tratamento do Teorema de Pick, cuja demonstração é apresentada logo a seguir, assim como sua relação com a Fórmula de Euler para planos e sua versão para polígonos com "buracos" e para polígonos de vértices com coordenadas racionais.

A seguir, tentamos mostrar como o Teorema de Pick pode ser utilizado em alguns problemas interessantes, como resolver a equação diofantina $mp - nq = 1$, quando p e q forem primos entre si, e estimar um valor para π .

No último capítulo, apresentamos o principal objetivo deste trabalho. Buscamos construir uma proposta de ensino para o tratamento do conceito de áreas de polígonos diversos e de figuras mais irregulares como mapas, utilizando-se para isso o Teorema de Pick, o software Geogebra e imagens retiradas do Google Maps de diferentes regiões.

Ao fim do trabalho, colocamos como apêndice um breve tratamento do conceito de integral definida e sua relação com o cálculo de área de figuras sob gráficos. Neste apêndice, veremos como se calcular a área sob o gráfico de algumas funções e apresentamos a definição da função logaritmo como a integral de uma função específica.

Esperamos que este trabalho, de alguma maneira, sirva como instrumento para uma nova visão sobre o ensino do conceito de área, aprofundando os conhecimentos de professores e alunos e valorizando o cálculo de áreas de figuras planas, especialmente de figuras mais irregulares e complexas, tornando o conceito de área mais atraente e "palpável" para o aluno.

2

Sobre o Conceito de Área e o Ensino de Geometria

2.1 A importância do ensino de Geometria

Este trabalho tem como objetivo tratar, de uma maneira alternativa, o conceito de áreas de polígonos.

Para isso, mostraremos métodos para se calcular a área de polígonos diversos através das fórmulas usuais e apresentaremos o Teorema de Pick, uma ferramenta surpreendente e de grande utilidade no cálculo de polígonos mais complexos e irregulares, pois discretiza uma grandeza de natureza contínua ao calcularmos a área de polígono contando pontos.

Mas, antes de tudo, vem à tona a seguinte questão: Qual a real importância do ensino de Geometria no ensino básico, especialmente?

Sabemos que o papel da educação é, acima de tudo, formar e instruir pessoas capazes de analisar e interpretar a sua realidade, crítica e honestamente, de modo que possam se transformar em verdadeiros agentes de mudança e cidadãos conscientes.

Para isso, é indispensável o conhecimento da linguagem materna, das diferentes formas de manifestações culturais, dos conhecimentos básicos da ciência moderna e da linguagem matemática. E é sob esta perspectiva que se encontra o motivo fundamental pelo qual a Geometria se faz presente nos currículos educacionais em todo o mundo.

O estudo da Geometria se faz necessário pela sua clara presença nas formas dos objetos presentes no nosso dia à dia, na arquitetura, nos organismos vivos, nas artes, nas construções modernas.

Estudar Geometria é procurar conhecer um aspecto significativo do mundo no qual esta-

mos inseridos, pois só assim poderemos identificar, manipular e quantificar as diferentes formas existentes à nossa volta.

Enfim, podemos afirmar que a Geometria é um ramo indispensável e significativo do conhecimento, que precisamos para poder nos posicionarmos frente à realidade.

O ensino de Geometria deve despertar no aluno o desenvolvimento do raciocínio geométrico e de habilidades essenciais, em especial, a capacidade de discriminação de formas e a manipulação destas, sendo capaz de classificar as diferentes formas geométricas, identificar padrões, calcular perímetros, áreas e volumes e assim por diante.

No processo de ensino de Geometria é indispensável que o professor considere os conhecimentos prévios dos alunos, especialmente aqueles presentes nas crianças e jovens, pois estes já possuem idéias básicas e intuitivas das diferentes formas presentes fora do ambiente escolar (conhecimentos informais) e que devem ser formalizados de acordo com as definições e conceitos geométricos mais modernos.

Assim os conhecimentos vão sendo construídos de forma investigativa e gerando no aluno um raciocínio espacial mais formal.

Então como nós professores devemos agir para que a criança consiga ultrapassar o espaço perceptivo (mundo sensível) para um espaço não perceptivo (estrutura no mundo geométrico)? Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, BRASIL (1997):

É multiplicando suas experiências sobre os objetos do espaço em que vive, que a criança aprenderá a construir uma rede de conhecimentos relativos à localização, à orientação, que lhe permitirá penetrar no domínio da representação dos objetos e, assim, distanciar-se do espaço sensorial ou físico. É o aspecto experimental que colocará em relação esses dois espaços: o sensível e o geométrico. De um lado, a experimentação permite agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível, e, de outro, possibilita o trabalho sobre as representações dos objetos do espaço geométrico e, assim, desprender-se da manipulação dos objetos reais para raciocinar sobre representações mentais.

Portanto, através de um ensino baseado na liberdade de investigação e experimentação, o aluno pode participar do seu próprio processo de aprendizagem, dando significado aos conceitos estudados e alterando seus conhecimentos prévios que servem como ancoragem para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem. Para FREUDENTHAL (1973):

"A Geometria só pode ser cheia de significado se explora a relação da Geometria com o espaço experimentado". Assim a Geometria: - presta-se à aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes"; - tem ainda a capacidade para fazer

as crianças sentirem, a partir da necessidade lógica das suas conclusões, "a força do espírito humano, ou seja, do seu próprio espírito".

No entanto, para que essa liberdade de ensino e de construção dos conceitos através da investigação possa ter sucesso, é necessário que o professor conheça profundamente os conteúdos estudados, que os objetivos propostos para os alunos estejam bem claros e que os conteúdos e atividades estejam condizentes com o nível dos alunos em questão.

Também é importante salientar que neste processo de ensino, o erro do aluno é fundamental para o sucesso da sua aprendizagem, e este erro deve ser respeitado e utilizado como sintoma de eficiência deste processo. Os alunos devem ter total liberdade para levantar hipóteses, conjecturas, errar e discutir seus erros com a ajuda do professor.

2.2 Sobre o abandono do ensino de Geometria no Brasil

Nas últimas décadas, a educação brasileira vem passando por transformações estruturais e ideológicas, grande parte destas, devido às mudanças da realidade sócio-política-econômica no país e de novas concepções pedagógicas.

Como consequência disto, o ensino de Geometria no país e também ao redor do mundo vem sofrendo alterações de metodologias e de valorização.

Há defensores modernos que afirmam que a Geometria poderia dar o seu lugar a outro ramo da Matemática moderna durante o ensino básico. Já outros matemáticos reiteram que o ensino de Geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento matemático do aluno por ser a Geometria um estudo direto do mundo espacial e de suas formas, e por estar a Geometria ligada a outras áreas da Matemática moderna, sendo portanto uma valiosa ponte durante o processo de ensino aprendizagem de diversos conteúdos em Álgebra, Aritmética, etc.

No entanto, o que se vem observando nas últimas décadas é um claro abandono e desvalorização da Geometria nas escolas brasileiras, e isto fica claro quando observamos o despreparo que nossos alunos apresentam no tocante ao estudo dos conceitos geométricos mais básicos.

O ensino de Geometria, nos vários níveis de ensino, tem sido colocado à margem do ensino de outras áreas da Matemática moderna. PAVANELLO (1993) apontou esse fenômeno como uma realidade global e afirma que isto é o resultado da ausência deste tema nos programas escolares e do esquecimento da importância do ensino de Geometria.

Esse abandono da Geometria nas escolas brasileiras é evidenciado de forma bem sucinta e clara em seu artigo "O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências" (revista Zetetiké - 1993). Pavanello apresenta rapidamente como se deram as mudanças de

concepções pedagógicas na últimas décadas, e mostra que foi uma consequência das mudanças políticas e econômicas pelas quais passou a sociedade brasileira.

O ensino brasileiro passou por mudanças ideológicas profundas desde o início do século XX, adotando métodos tradicionais de ensino, em que o aluno era considerado mero espectador e um participante passivo do processo ensino aprendizagem, passando pelo modelo da escola tecnicista, em que se buscava principalmente a qualificação da mão de obra para o seu rápido ingresso no mercado de trabalho, até concepções mais modernas de educação, em que o papel social e político da educação começou a ser valorizado. Tudo isto acompanhado de reformulações do ensino (como as provocadas pelas Leis 4024/61, 5540/68, 5692/71) e de reformas educacionais, como a Reforma Universitária com o Decreto 477/69.

No entanto, mesmo com todas estas transformações e alterações, o ensino de Geometria de qualidade sempre foi negligenciado, especialmente por atitudes governamentais que nunca mostraram o real compromisso com um ensino de Matemática de qualidade, ou mesmo com a qualidade do ensino brasileiro como um todo.

Como afirma PAVANELLO (1993):

O abandono do ensino de Geometria deve, portanto, ser caracterizado como uma decisão equivalente às medidas governamentais, em seus vários níveis, com relação à educação.

No entanto, o que se observou na década de 70 foi a aplicação de diversas experiências com o objetivo comum de resgatar o ensino de Geometria.

A necessidade da volta da Geometria no ensino da Matemática é unânime entre os educadores matemáticos. No entanto, não existe um consenso quanto a quais propostas devem ser adotadas para o seu ensino, tanto nas salas de aula do ensino regular quanto nos cursos de formação inicial e continuada de professores que a ensinarão (em curso de Licenciatura em Matemática e em cursos de Licenciatura em Pedagogia).

A atual realidade da educação mostra que não se busca valorizar, nos novos conteúdos abordados em sala de aula, os conhecimentos prévios dos alunos, o que torna a aprendizagem, mecânica, e que por sua vez leva os alunos a decorarem o conteúdo e ao simples acúmulo de informações desconexas com os conceitos teóricos que deveriam ser mais valorizados.

Desta forma, a aprendizagem da Matemática se transforma em uma mera repetição de leis e fórmulas que, muitas vezes, após a avaliação, são esquecidos.

No entanto, segundo D'AMBRÓSIO (2002):

A educação nessa transição não pode focalizar a mera transmissão de conteúdos obsoletos, na sua maioria desinteressantes e inúteis, e inconsequentes na formação de uma nova

sociedade. O que podemos fazer para as nossas crianças é oferecer a elas os instrumentos comunicativos, analíticos e materiais para que elas possam viver, com capacidade crítica, numa sociedade multicultural e impregnada de tecnologia.

Assim, podemos afirmar que a abordagem no ensino de Geometria deve ser baseada na experimentação, na desvalorização do mecanicismo e memorização das fórmulas, e na valorização dos conhecimentos prévios dos alunos em sala de aula, de modo que o próprio aluno se torne o principal responsável no seu processo de ensino aprendizagem, valorizando seus questionamentos, hipóteses e equívocos, contribuindo para a construção dos conceitos mais modernos das diferentes áreas da Matemática de forma palpável, democrática e contextualizada.

2.3 História do conceito de área

O conceito de área surgiu naturalmente nas primeiras sociedades humanas, assim como ocorreu com o desenvolvimento do conceito numérico.

As primeiras civilizações humanas eram formadas por nômades que se instalavam em uma determinada região até que por motivos climáticos ou por escassez de recursos, migrassem para outra região que pudesse ser mais favorável para a sua sobrevivência. Suas principais atividades eram a caça, pesca e a colheita, que garantiam a sobrevivência da comunidade.

Com essa intensa atividade e deslocamentos em busca de regiões mais favoráveis, surge a necessidade natural de se medir ou comparar as extensões territoriais das regiões.

Os primeiros registros históricos do conceito de área surgiram nas civilizações antigas da Mesopotâmia e do Egito há cerca de 3 ou 4 mil anos a.C.. Documentos antigos mostram que nestas regiões, à beira dos rios Nilo, Tigre e Eufrates, já existiam civilizações que se utilizavam de técnicas agrícolas, de engenharia e drenagem, assim como de mensuração de extensões territoriais.

O famoso geógrafo e historiador grego, nascido no século V a.C, Heródoto, afirmava que com as inundações frequentes do Nilo, os marcos que dividiam e limitavam as propriedades eram destruídos e apagados, criando diversas disputas à cerca dos impostos e direitos de propriedade, o que levou diretamente à criação de uma classe de agrimensores.

Foi esta realidade egípcia que motivou e desenvolveu os estudos sobre o conceito de área, levando vários agrimensores a desenvolverem técnicas de mensuração e do cálculo de áreas de regiões.

Alguns dos principais documentos que ratificam os conhecimentos geométricos das antigas civilizações são os papiros de Moscou (ou Golenishev) e Rhind (ou Ahmes), datados de

1850 e 1650 a.C., respectivamente.

Esses papiros mostram que os egípcios possuíam vários conhecimentos geométricos, utilizando-se destes conhecimentos para resolver problemas geométricos. De acordo com EVES (1997), dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind, 26 são problemas geométricos. Muitos deles utilizando-se de fórmulas para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos.

Segundo BOYER (1974), o papiro Ahmes contém problemas geométricos, como o problema 51, que mostra o cálculo da área de um triângulo isósceles através da multiplicação da metade da medida da base pela medida da altura, e o problema 52, que calcula a área de um trapézio isósceles de modo análogo.

Documentos históricos mostram também que egípcios e babilônios conheciam formas de se calcular a área do círculo, de triângulos, retângulos e trapézios, e as utilizavam para calcular, com boas aproximações, as medidas de terrenos cultivados que apresentavam formas mais irregulares.

A unidade de medida de área utilizada por estas civilizações era um quadrado, ou então dividia-se a figura da qual se pretendia calcular a área em triângulos ou retângulos e calculava-se a área da figura como a soma das áreas dos triângulos ou retângulos decompostos. No entanto, não se sabe ao certo por qual motivo esta teria sido a unidade adotada. Acredita-se que uma possível explicação é a de que esta escolha teria sido baseada na arte de tecer cestas ou, ainda teria sido inspirada no uso de ladrilhos de mosaicos hindus e chineses, e há estudiosos que afirmam que teriam surgido dos padrões quadriculados das cerâmicas babilônicas.

Por volta de 300 anos a.C, na Grécia antiga, Euclides escreve "Os Elementos", um livro impactante e revolucionário que reunia todo o conhecimento matemático mais significativo da época criado e descoberto pelos seus antecessores, especialmente os egípcios e babilônios. Surgia, então, um modo de se fazer matemática que se baseava na argumentação e demonstração rigorosa de seus resultados, através do método axiomático dedutivo. Método que é utilizado ainda nos dias de hoje.

"Os Elementos" tratava-se de uma obra formada por 13 livros, dos quais 6 livros eram de Geometria plana (Livros I a VI), 3 livros de Aritmética (Livros VII a IX) e 3 livros de Geometria espacial (Livros XI a XIII). Mais tarde foram adicionados mais dois livros. Em "Os Elementos", segundo ROQUE e PITOMBEIRA (2012) não se media áreas de regiões como fazemos hoje, mas havia diversos resultados que buscavam sistematizar procedimentos relativos à equivalência entre áreas. Agrimensores, arquitetos, cobradores de impostos e outros burocratas sabiam calcular áreas, mas o cálculo de áreas não era um objeto de estudo de grande interesse da Matemática pura dos gregos.

Para comparar comprimentos e grandezas, os gregos transformavam por exemplos duas regiões S_1 e S_2 em dois quadrados equivalentes Q_1 e Q_2 com mesmas áreas de S_1 e S_2 respecti-

vamente. Assim eles sabiam identificar qual região apresentava maior ou menor área, ou se as áreas das duas regiões eram exatamente iguais. Este processo é chamado de "fazer a quadratura", e deu origem, posteriormente, ao problema conhecido como "quadratura do círculo", que consiste em construir um quadrado com área exatamente igual à de um círculo dado.

Segundo HOGBEN (1958), uma das principais estratégias utilizadas por Euclides em suas demonstrações era a decomposição das figuras em triângulos, dando especial atenção às suas propriedades e às formas de se obter sua área (apesar de não conter em "Os Elementos" nenhuma fórmula explícita como as que conhecemos hoje).

Euclides também demonstrou que qualquer figura limitada por lados retos pode ser dividida em triângulos. Esse recurso foi amplamente utilizado na demonstração das áreas de figuras planas (e também foi regularmente utilizado nas demonstrações de alguns resultados desta dissertação).

Entre os chineses, o cálculo de área aparece em diversos problemas da obra "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática", do Séc. I d.C.. Nesta obra podemos encontrar problemas de mensuração, engenharia, impostos, soluções de equações e geometria, e de áreas de figuras planas a partir da manipulação de peças como um quebra cabeça da mesma natureza do famoso Tangran.

3

A Área do Círculo e de Polígonos Conhecidos

O conceito de área é um conceito matemático fundamental da humanidade. Seu surgimento foi tão natural quanto o surgimento do conceito de número.

Os primeiros registros datam de 3 ou 4 mil anos antes de Cristo, nas civilizações antigas da Mesopotâmia e do Egito. Estas civilizações possuíam uma cultura agrícola, conheciam técnicas de drenagem e engenharia e com isso calculavam áreas de territórios à beira dos rios Nilo, Tigre e Eufrates.

Além disso, os babilônios também calculavam áreas de figuras planas, entre elas a do círculo, utilizando para isso uma constante que dava a aproximação 3 para o número π . Já os egípcios, utilizavam o cálculo de áreas com grande desenvoltura, especialmente durante as inundações do rio Nilo em determinadas épocas do ano, para demarcarem as áreas das plantações dos diferentes proprietários.

Inicialmente formalizaremos o cálculo de área através de alguns postulados, seguindo-se com alguns resultados que poderão ser omitidos no ensino básico. Outros, porém, podem ser demonstrados para alunos do ensino fundamental e médio por utilizarem conteúdos mais básicos (se já tiverem sido ensinados nas séries anteriores).

3.1 Conceitos e definições iniciais

Antes de iniciarmos as apresentações dos resultados sobre o conceito e o cálculo de área de polígonos diversos, vamos enunciar algumas definições e admitir a veracidade de alguns postulados que serão úteis para o desenvolvimento dos resultados posteriores.

Consideraremos a área de uma superfície qualquer como um número que possa ser associado a essa superfície. De uma maneira um tanto informal e redundante, a área de uma superfície seria um número real que mede a "quantidade de superfície" associada à superfície dada, ou por um abuso de linguagem, seria o número real que representa a quantidade de "espaço" delimitado pelo contorno da figura (perímetro).

Sempre consideraremos a existência de uma unidade de medida que será utilizada para medir o comprimento do contorno da superfície. Esta unidade de medida quando não expressa, será representada simplesmente por *u.c.* (unidade de comprimento).

Do mesmo modo, a unidade de área será a mesma unidade utilizada para o cálculo do comprimento do contorno da figura, mas elevada ao quadrado. Se a unidade não for expressa claramente, esta será representada simplesmente por *u.a.* (unidade de área).

Neste trabalho, especialmente nas proposições e com exceção dos exemplos, tomaremos a liberdade de omitir as unidades de medidas (de comprimento e de área), acreditando que com esta omissão, não haverá qualquer dificuldade no entendimento de qualquer proposição deste trabalho.

Vamos enunciar algumas definições e admitir alguns postulados, sobre os quais se sustentará o conceito de área apresentado neste trabalho.

Definição 1. Chamaremos de \overline{AB} , o segmento de reta que tem *A* e *B* como pontos extremos.

Definição 2. Chamaremos de interior do segmento \overline{AB} , o conjunto dos pontos de \overline{AB} que são distintos de *A* e *B*.

Definição 3. Dado um número finito de pontos V_1, V_2, \dots, V_n no plano, chamaremos de linha poligonal com extremos em V_1 e V_n , a união dos segmentos $\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, \dots, \overline{V_{n-1}V_n}$.

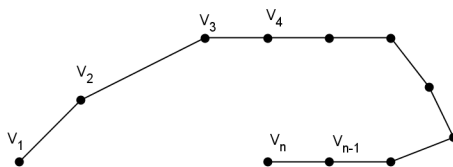


Figura 1: Linha poligonal.

Definição 4. Um polígono ou linha poligonal fechada com vértices nos pontos V_1, V_2, \dots, V_n de um plano é a união de segmentos, também chamados arestas, $\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, \dots, \overline{V_{n-1}V_n}, \overline{V_nV_1}$.

Neste trabalho, sempre consideraremos que três vértices consecutivos de um polígono nunca são colineares.

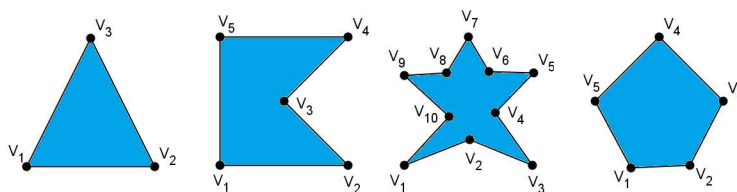


Figura 2: Exemplos de polígonos.

Poderíamos também definir polígono como a reunião de um número finito de triângulos não sobrepostos e coplanares, já que podemos dividir um polígono qualquer em triângulos, traçando-se algumas de suas diagonais.

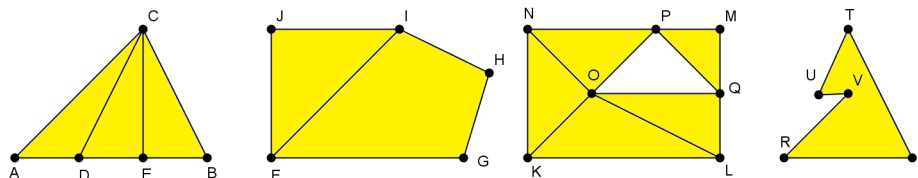


Figura 3: Polígono: reunião de um número finito de regiões triangulares não sobrepostas e coplanares.

Em particular, um triângulo é um polígono, além disso, uma região poligonal pode conter "buracos".

Definição 5. Um polígono P é dito *convexo* quando dado qualquer segmento \overline{AB} formado por dois pontos quaisquer A e B pertencentes ao polígono, todos os pontos pertencentes a \overline{AB} também pertencem ao polígono P .

Postulado 1. Polígonos congruentes tem áreas iguais.

Postulado 2. Se um polígono convexo for dividido em outros polígonos menores, a área do polígono maior é igual a soma das áreas dos polígonos menores.

Postulado 3. A área de um quadrado de lado 1 cm é 1 cm^2 .

A noção de congruência entre dois polígonos A e B que consideraremos aqui é a de que podemos transladar rigidamente um polígono A de modo que ele possa ser sobreposto a um outro polígono B e coincidir com este.

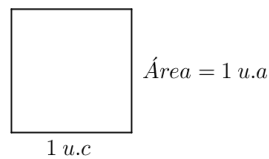


Figura 4: Quadrado elementar.

Também iremos supor que são conhecidas as relações de congruências de triângulos da Geometria Plana.

Dos postulados acima, podemos obter uma primeira proposição:

Proposição 3.1.1. *Se um polígono maior contém outro menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.*

Demonstração. Se um polígono B contiver outro polígono menor B_1 em seu interior, então B pode ser decomposto em polígonos menores de tal forma que um destes polígonos menores seja B_1 . Ou seja,

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n.$$

Mas, pelo Postulado 2,

$$\text{Área}(B) = \text{Área}(B_1) + \text{Área}(B_2) + \dots + \text{Área}(B_n).$$

E segue-se que

$$\text{Área}(B) > \text{Área}(B_1).$$

□

3.2 Áreas dos polígonos mais conhecidos

Agora, podemos dar início ao cálculo de áreas das regiões interiores determinadas pelos polígonos mais conhecidos como quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos, etc. Sempre que cometermos o abuso de linguagem de nos referirmos ao cálculo da área de algum polígono P , deve-se ficar claro que estaremos interessados no cálculo da área da região poligonal do plano determinada por P .

Proposição 3.2.1 (Área do Quadrado). *A área do quadrado de lado l é l^2 .*

Demonstração. Primeiramente vamos analisar o caso em que o quadrado tem lado l natural. Como l é natural, podemos particionar cada lado do quadrado em l segmentos de medida 1. Dessa forma, teremos l^2 quadrados de área 1.

Pelos Postulados 1, 2 e 3, temos que

$$A_l = l^2,$$

onde A_l representa o quadrado de lado l .

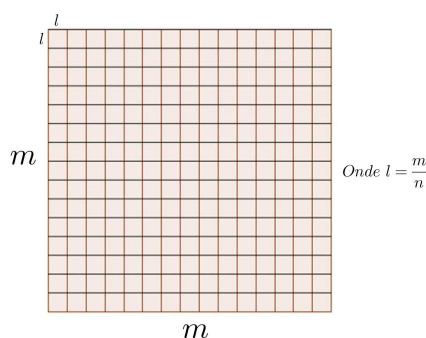


Figura 5: Quadrado de lado m

Agora, vamos calcular a área (A_l) de um quadrado com lado $l = \frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$.

Se fizermos uma fila com n quadrados de lado l e em seguida, tomarmos n filas de n quadrados de lado l , sobrepostas, formaremos um quadrado maior de lado m (Figura 5), logo pelo que vimos anteriormente,

$$A_m = m^2.$$

Mas, este quadrado de lado m é formado por n^2 quadrados menores de área A_l . Logo,

$$A_m = (n^2)A_l.$$

Portanto, das duas últimas igualdades, podemos concluir que

$$A_l = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Assim, a princípio, nos parece que a área de qualquer quadrado de lado $l \in \mathbb{R}$ é igual l^2 , que já foi demonstrado para os casos em que $l \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{Q}$. Resta-nos então demonstrar que a proposição é válida quando $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Então, seja A_l a área do quadrado de lado l , onde $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Podemos aproximar l por dois números racionais x e y tais que

$$x_k < l < y_k \quad \text{e} \quad y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

Como já foi demonstrado anteriormente as áreas dos quadrados de lados racionais x_k e y_k são respectivamente x_k^2 e y_k^2 , portanto pela Proposição 3.1.1, considerando o quadrado de lado x_k como sendo um quadrado contido no quadrado de lado l e o quadrado de lado y_k como sendo um quadrado que contém o quadrado de lado l , teremos

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Mas, como $x_k < l < y_k$, temos que

$$x_k^2 < l^2 < y_k^2.$$

Logo, os números A_l e l^2 pertencem ao intervalo (x_k^2, y_k^2) .

Assim, segue-se que

$$|A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2 = (y_k + x_k)(y_k - x_k) < \frac{1}{k}(y_k + x_k) = \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k).$$

Mas

$$y_k - x_k < \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad y_k - l < \frac{1}{k} \Rightarrow y_k + l < \frac{1}{k} + 2l.$$

Logo,

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2l \right).$$

Como a desigualdade acima vale para todo k , tomando k suficientemente grande (limite quando k tende ao infinito), teremos

$$0 \leq |A_l - l^2| \leq 0.$$

Portanto, podemos concluir que

$$A_l = l^2.$$

□

Esta prova nos dá a base para o cálculo da área de um retângulo qualquer. Vamos a ela.

Proposição 3.2.2 (Área do Retângulo). *A área do retângulo de lados m e n é igual mn .*

Demonstração. Sejam m e n números naturais. Do mesmo modo como fizemos com o quadrado de lado l , podemos particionar o lado m em m segmentos de medida 1, e o lado n em n segmentos de medida 1. Teremos então mn quadrados de lado 1.

Logo, pelas Proposições 3.1.1 e 3.2.1, teremos que

$$A_{m,n} = mn.$$

Agora, considere os lados $m = \frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{d}$ do retângulo, do qual queremos calcular sua área, onde a, b, c e d são números naturais.

Tomando então bd retângulos enfileirados e sobrepostos convenientemente, formaremos um novo retângulo de lados a e c . Pelo Postulado 2 e pelo que foi demonstrado logo acima segue-se que

$$A_{a,c} = ac.$$

Mas, o retângulo de lados a e c é formado por bd retângulos de área $A_{m,n}$, portanto

$$bdA_{m,n} = ac \quad \Rightarrow \quad A_{m,n} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \frac{c}{d} = mn.$$

Resta-nos, como fizemos na Proposição 3.2.1, demonstrar que a área do retângulo de lado m e n é igual a mn também nos casos em que m e/ou n são números irracionais.

Então considere o retângulo de lados m e n onde $m, n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam x_k, y_k, u_k e v_k números racionais tais que

$$\begin{aligned} x_k < m < y_k, & \quad u_k < n < v_k, \\ y_k - x_k < \frac{1}{k}, & \quad v_k - u_k < \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Seja $A_{m,n}$ a área do retângulo de lado m e n . Como foi feito na demonstração da proposição 3.2.1, podemos afirmar que o retângulo de lados m e n contém o retângulo de lados x_k e u_k e está contido no retângulo de lados y_k e v_k . Ou seja,

$$x_k u_k < A_{m,n} < y_k v_k.$$

Além disso, pelas desigualdades $x_k < m < y_k$, $u_k < n < v_k$, segue-se que

$$x_k u_k < mn < y_k v_k.$$

Portanto, $A_{m,n}$ e mn pertencem ao intervalo $(x_k u_k, y_k v_k)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} |A_{m,n} - mn| &< y_k v_k - x_k u_k = (v_k - u_k)y_k + u_k(y_k - x_k) < \frac{1}{k}(y_k + u_k) < \\ &< \frac{1}{k}(y_k + x_k + u_k + v_k) < \frac{1}{k}[(y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k] < \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2m + 2n\right). \end{aligned}$$

Logo, como a desigualdade acima é válida para todo $k \in \mathbb{N}$, tomando k suficientemente grande, temos que

$$0 \leq |A_{m,n} - mn| \leq 0.$$

Assim, segue-se que

$$A_{m,n} = mn.$$

Os casos em que $m \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são provados de maneira análoga. □

Proposição 3.2.3 (Área do Paralelogramo). *A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah .*

Demonstração. Considere um paralelogramo $ABCD$, e sejam os pontos E e F , os pés da perpendiculars baixadas de D e C à reta \overleftrightarrow{AB} , respectivamente. Suponhamos também, sem perda de generalidade, que $E \in \overline{AB}$.

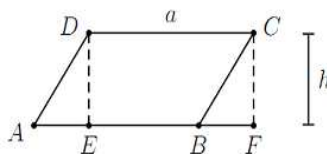


Figura 6: Paralelogramo de base a e altura h

Os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso LAA , pois $\overline{AD} = \overline{BC}$ (por hipótese), $\widehat{DAE} = \widehat{CBF}$ (ângulos formados por lados paralelos entre si) e $\widehat{AED} = \widehat{BFC}$ (por construção), logo, $\overline{AE} = \overline{BF}$ e pelo Postulado 1,

$$\text{Área}(ADE) = \text{Área}(BCF).$$

Além disso, temos que

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ADE) + \text{Área}(BEDC) = \text{Área}(BCF) + \text{Área}(BEDC) = \text{Área}(EFCD).$$

Mas $EFCD$ consiste num retângulo de altura h e base EF .

Como $\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a$, segue-se que

$$\text{Área}(ABCD) = ah.$$

□

Exemplo 1. Calcular a área do paralelogramo $ABCD$ de base 4 cm e altura 3 cm.

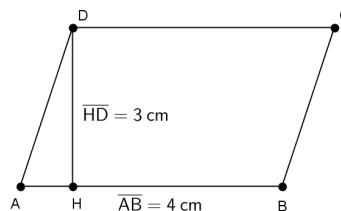


Figura 7: Paralelogramo de base 4 cm e altura 3 cm.

Solução. Como a base \overline{AB} mede 4 cm e a altura \overline{HD} mede 3 cm, pela Proposição 3.2.3:

$$\text{Área}(ABCD) = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2.$$

Proposição 3.2.4 (Área do Triângulo). Dado o triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e alturas h_a , h_b e h_c relativas aos lados a , b e c , respectivamente, teremos

$$\text{Área}(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Demonstração. Seja D o ponto de intersecção das paralelas passando por A e paralela a \overline{BC} , e passando por C e paralela a \overline{AB} .

Vemos então pela figura 8, que $ABCD$ é um paralelogramo, logo os triângulos ABC e ADC são congruentes pelo caso LLL , pois

$$\overline{AB} = \overline{DC} \text{ (por construção), } \overline{BC} = \overline{AD} \text{ (por construção) e } \overline{AC} \text{ é comum.}$$

Portanto, pelo Postulado 1:

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(ADC).$$

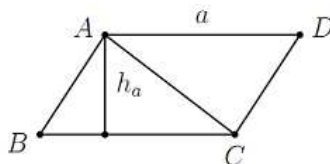


Figura 8: Triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Assim,

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ADC) = 2\text{Área}(ABC).$$

Mas pela Proposição 3.2.3:

$$\text{Área}(ABCD) = ah_a.$$

Daí, segue-se que

$$2\text{Área}(ABC) = ah_a.$$

Portanto,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{ah_a}{2}.$$

As outras duas igualdades são mostradas de modo completamente análogo. \square

Com a última Proposição, temos agora uma forte ferramenta para o cálculo da área de qualquer polígono, pois basta dividi-lo em triângulos, construindo segmentos que unam 2 de seus vértices não consecutivos e utilizando o resultado anterior juntamente com o postulado 2.

Exemplo 2. Calcular a área do triângulo ABC de base 7 cm e altura 4 cm.

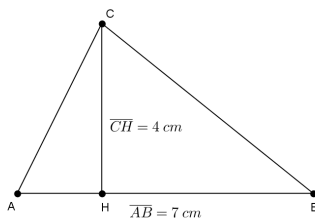


Figura 9: Triângulo de base 7 cm e altura 4 cm.

Solução. Como a base \overline{AB} tem medida 7 cm e a altura \overline{CH} mede 4 cm, pela Proposição 3.2.4, temos

$$\text{Área}(ABC) = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14 \text{ cm}^2.$$

Corolário 3.2.1. Dados os triângulos ABC e $A'BC$ tais que $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Então

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(A'BC).$$

Demonstração. Seja d a distância entre as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e \overleftrightarrow{BC} . Então pela Proposição anterior, teremos:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot d = \text{Área}(A'BC).$$

□

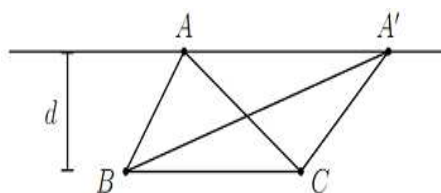


Figura 10: $\text{Área}(ABC) = \text{Área}(A'BC)$ para $\overline{AA'}$ paralela a \overline{BC} .

Vamos agora demonstrar uma famosa Proposição que nos dá a área de um triângulo qualquer conhecendo-se as medidas dos seus lados.

Proposição 3.2.5 (Heron). Dado um triângulo ABC , tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, a área do triângulo ABC é dada por

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)},$$

onde $p = \frac{(a+b+c)}{2}$.

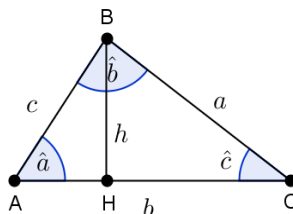


Figura 11: Fórmula de Heron.

Demonstração. Por uma questão de conveniência (para termos uma altura interna ao triângulo), vamos tomar a altura (BH) em relação ao maior lado (AC) do triângulo ABC . No entanto,

a demonstração é inteiramente análoga se tomarmos qualquer outra altura do triângulo. No triângulo AHB da figura 11 é válido que:

$$c^2 = h^2 + (\overline{AH})^2 \Rightarrow (\overline{AH})^2 = c^2 - h^2 \Rightarrow \overline{AH} = \sqrt{c^2 - h^2}.$$

Assim, como $\cos \hat{A} = \frac{\overline{AH}}{AB}$, teremos

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c}.$$

No triângulo ABC , aplicamos a lei dos cossenos relativa ao ângulo \hat{A} e obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Substituindo o valor de $\cos \hat{A}$ na expressão anterior, segue-se

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2b\sqrt{c^2 - h^2} &= b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow \sqrt{c^2 - h^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \Rightarrow c^2 - h^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2. \quad (3.1)$$

Pela Proposição 3.2.4, a área do triângulo ABC é dada por

$$\text{Área}(ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos

$$\text{Área}^2(ABC) = \frac{b^2 h^2}{4}. \quad (3.2)$$

Agora, substituindo (3.1) em (3.2), vem

$$\begin{aligned} \text{Área}^2(ABC) &= \frac{b^2 [c^2 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b})^2]}{4} \Rightarrow \text{Área}^2(ABC) = \frac{b^2 c^2 - b^2 [\frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}]}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Área}^2(ABC) &= \frac{4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}. \end{aligned}$$

E, então

$$\text{Área}^2(ABC) = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}.$$

Agora, pela diferença de dois quadrados,

$$\begin{aligned} \text{Área}^2(ABC) &= \frac{[(2bc) - (b^2 + c^2 - a^2)][(2bc) + (b^2 + c^2 - a^2)]}{16} = \\ &= \frac{[-(b^2 - 2bc + c^2) + a^2][(b^2 + 2bc + c^2) - a^2]}{16} = \frac{[a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]}{16} = \\ &= \frac{(a - (b - c))(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{16} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{16} = \\ &= \frac{(a - b + c)}{2} \frac{(a + b - c)}{2} \frac{(b + c - a)}{2} \frac{(b + c + a)}{2} = \\ &= \frac{(a + b + c - 2b)}{2} \frac{(a + b + c - 2c)}{2} \frac{(a + b + c - 2a)}{2} \frac{(b + c + a)}{2}. \end{aligned}$$

Mas, como $p = \frac{a + b + c}{2}$, segue-se que

$$\text{Área}^2(ABC) = \frac{(2p - 2b)}{2} \frac{(2p - 2c)}{2} \frac{(2p - 2a)}{2} \frac{2p}{2}.$$

E assim,

$$\text{Área}^2(ABC) = (p - b)(p - c)(p - a)p.$$

Daí, podemos concluir que

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{p(p - b)(p - c)(p - a)}.$$

□

Exemplo 3. Calcular a área do triângulo ABC cujos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} medem, respectivamente, 10 cm, 8 cm e 6 cm.

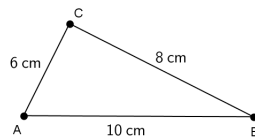


Figura 12: Triângulo de lados 6, 8 e 10 cm.

Solução. Calculando-se $p = \frac{a+b+c}{2}$, teremos

$$p = \frac{6+8+10}{2} = 12.$$

Portanto, pela Proposição 3.2.5:

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}^2.$$

Além das duas Proposições anteriores que nos dão a área de um triângulo qualquer, mostraremos a seguir um resultado que nos ajudará a calcular a área de um triângulo qualquer conhecendo-se apenas dois de seus lados e o seno do ângulo compreendido entre eles.

Proposição 3.2.6. *Dado um triângulo qualquer ABC , tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, a área do triângulo ABC é dada por*

$$\text{Área}(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen}\hat{A}}{2} = \frac{ac \operatorname{sen}\hat{B}}{2} = \frac{ab \operatorname{sen}\hat{C}}{2}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar a primeira igualdade. Sabemos pela Proposição 3.2.4 que a área do triângulo ABC é dada por:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Mas, na figura 11, vemos que $h = c \operatorname{sen}\hat{A}$, logo substituindo na igualdade anterior, teremos

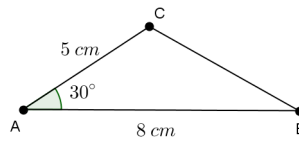
$$\text{Área}(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen}\hat{A}}{2}.$$

As demais igualdades são provadas de maneira totalmente análoga, bastando considerar as outras alturas relativas aos outros lados. □

Exemplo 4. *Calcular a área do triângulo ABC cujos lados \overline{AB} , \overline{AC} , medem, respectivamente, 8 cm e 5 cm e o ângulo compreendido entre esses lados mede 30° .*

Solução. Como $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$ e o ângulo compreendido entre esses lados mede 30° , pela Proposição 3.2.6, teremos

$$\text{Área}(ABC) = \frac{5 \cdot 8 \operatorname{sen}30^\circ}{2}.$$

Figura 13: Triângulo de lados 5, 8 e ângulo 30° .

Como $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$, segue-se que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}^2.$$

Considerando agora um triângulo cujas coordenadas de seus vértices no \mathbb{R}^2 são conhecidas, veremos mais um modo de calcular a área de um triângulo, agora por meio de determinantes. Para isto, consideremos que são conhecidas as fórmulas da distância entre dois pontos, de um ponto a uma reta, que saibamos encontrar a equação geral de uma reta que passa por dois pontos e que saibamos calcular determinantes de matrizes quadradas.

Proposição 3.2.7. *Dado um triângulo de vértices A, B e C pertencentes ao \mathbb{R}^2 tais que $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, a área do triângulo ABC é dada por*

$$\text{Área}(ABC) = \frac{|D|}{2},$$

onde D é o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

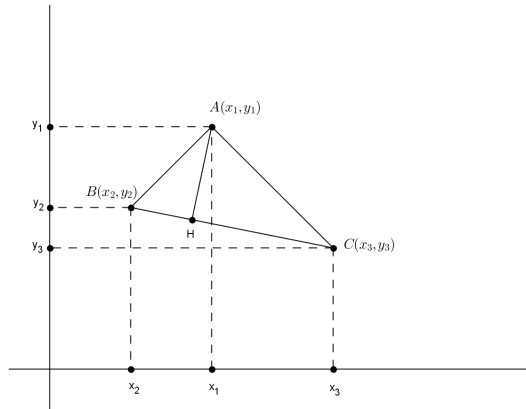
Demonstração. Pela figura 14 e Proposição 3.2.4 temos que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH}, \quad (3.3)$$

onde H é a projeção do ponto A sobre \overline{BC} , ou seja \overline{AH} é a altura do triângulo ABC relativa à base \overline{BC} .

Por outro lado, a distância de B a C é dada por

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}. \quad (3.4)$$

Figura 14: Triângulo no plano xOy .

Além disso, a equação da reta que passa por B e C é dada por

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

De onde, segue-se que

$$(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0.$$

Esta última igualdade pode ser escrita como o determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Além disso, a distância d do ponto A à reta \overleftrightarrow{BC} é dada por

$$d = \left| \frac{(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \right| = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}.$$

Então, neste caso, teremos

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}. \quad (3.5)$$

Mas $d = \overline{AH}$. Assim, substituindo (3.5) e (3.4) em (3.3), segue-se que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}},$$

de onde podemos concluir que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{|D|}{2},$$

onde

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

□

Observação. Na verdade, o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

representa uma condição de colinearidade de 3 pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Se $D = 0$, significa que o triângulo ABC tem área nula, ou seja, que os três pontos estão alinhados (triângulo degenerado). Se $D \neq 0$, então os pontos A, B e C formam um triângulo não degenerado.

Exemplo 5. Calcular a área do triângulo que tem vértices $A(4, 0)$, $B(0, 0)$, $C(2, 2)$.

Solução. Calculando-se o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

teremos pela Proposição 3.2.7 que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}|D| = \frac{8}{2} = 4 \text{ u.a..}$$

Proposição 3.2.8 (Área do Trapézio). Seja $ABCD$ um trapézio de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$ e altura h , então

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{(a+b)}{2}h.$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a > b$. Considere o ponto E tal que $\overline{AE} = b$.

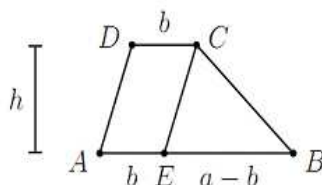


Figura 15: Trapézio de lados paralelos a e b e altura h .

O quadrilátero $ADCE$ tem dois lados paralelos e iguais $\overline{AE} = \overline{CD} = b$. Traçando-se a diagonal \overline{AC} , temos que os triângulos ADC e AEC são congruentes pelo caso LAL , já que

$$\overline{AE} = \overline{CD} = b, \overline{AC} \text{ é comum e } \widehat{ACD} = \widehat{CAE} \text{ (pois são ângulos correspondentes)}.$$

Logo $\overline{AD} = \overline{CE}$ e portanto $ADCE$ é um paralelogramo, de modo que

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ADCE) + \text{Área}(EBC) = bh + \frac{(a-b)}{2}h = \frac{(a+b)}{2}h.$$

□

Exemplo 6. Calcular a área do trapézio $ABCD$ de altura $h = 2 \text{ cm}$ e cujas bases \overline{AB} e \overline{CD} medem 6 cm e 4 cm , respectivamente.

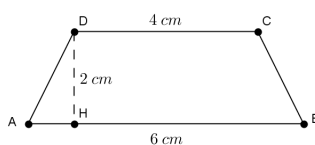


Figura 16: Trapézio de bases $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 4 \text{ cm}$ e altura $h = 2 \text{ cm}$.

Solução. Como as bases do trapézio medem 6 cm e 4 cm e como a altura do mesmo mede 2 cm , pela Proposição 3.2.8, temos

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{(4+6)}{2}2 = 10 \text{ cm}^2.$$

Proposição 3.2.9 (Área do Losango). Dado o losango $ABCD$ de diagonais $\overline{AC} = d_1$ e $\overline{BD} = d_2$, sua área é dada por

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Demonstração. Em um losango qualquer, suas diagonais têm a propriedade de serem perpendiculares entre si, intersectando-se no ponto médio M de AC e BD , já que $ABCD$ também é um paralelogramo.

Como os triângulo ADC e ABC são congruentes pelo caso LLL , teremos

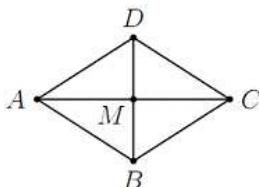


Figura 17: Losango de diagonais AC e BD .

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ADC) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BM} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot (\overline{BM} + \overline{DM}).$$

Portanto,

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

□

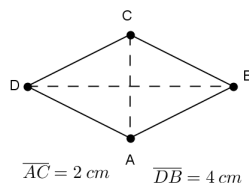


Figura 18: Losango de diagonais $\overline{AC} = 2 \text{ cm}$ e $\overline{DB} = 4 \text{ cm}$.

Exemplo 7. Calcular a área do losango $ABCD$ que apresenta diagonais $\overline{AC} = 2 \text{ cm}$ e $\overline{DB} = 4 \text{ cm}$.

Solução. Como $\overline{AC} = 2 \text{ cm}$ e $\overline{DB} = 4 \text{ cm}$, pela Proposição 3.2.9 segue-se que

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2}4 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2.$$

Definição 6. Dizemos que dois polígonos com o mesmo número de lados são semelhantes quando é possível fazer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus ângulos internos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes, proporcionais.

Definição 7. Chama-se razão de semelhança, o quociente entre as medidas dos comprimentos de quaisquer dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} correspondentes, respectivamente pertencentes a duas figuras P e Q , semelhantes entre si.

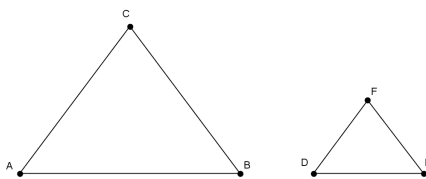


Figura 19: Polígonos semelhantes.

Definição 8. Um polígono é dito *regular* quando todas as suas arestas são congruentes e todos os seus ângulos são também congruentes.

Definição 9. Chama-se *perímetro* de um polígono P , a soma de todas as arestas do mesmo.

Definição 10. Dizemos que um círculo C é *inscrito* a um polígono P quando a circunferência de C tangencia cada aresta de P .

Definição 11. Dizemos que um círculo C é *circunscrito* a um polígono P quando todos os vértices de P pertencem à circunferência de C .

Definição 12. Chama-se *apótema* de um polígono regular P , o raio do círculo inscrito a P .

Vamos agora deduzir uma fórmula para calcular a área de qualquer polígono regular em função do perímetro e do apótema do mesmo.

Proposição 3.2.10. A área de um polígono regular P é dado pela metade do produto da medida do perímetro de P pelo seu apótema.

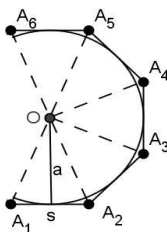


Figura 20: Círculo inscrito ao polígono regular P .

Demonstração. Dado um polígono regular P de n vértices $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, seja O o centro do círculo C_1 inscrito ao polígono P e seja a seu raio (distância de O a cada aresta de P). Considere agora C_2 o círculo circunscrito ao polígono P . O círculo C_2 passará por todos os vértices de P e como este é regular, o centro de C_2 coincidirá com o centro de C_1 , o que implica dizer que

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3} = \overline{OA_n} = r,$$

onde r é o raio de C_2 .

Mas, como P é regular,

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_nA_1} = s.$$

Portanto, $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}, \dots, \overline{OA_n}$ dividem o polígono P em n triângulos congruentes cujas alturas são iguais a a e cuja área de cada um deles é dada por $\frac{sa}{2}$. Logo,

$$\text{Área}(P) = \frac{nsa}{2},$$

onde ns é o perímetro de P e a é o apótema de P . □

Exemplo 8. Calcular a área do octógono regular cujos lados medem $2 u.c$ e com apótema igual a $2,4 u.c$ (Figura 21).

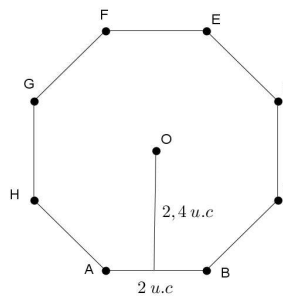


Figura 21: Octógono regular.

Solução. Como os lados do octógono regular (o qual chamaremos de P) medem $2 u.c$ e como o apótema do mesmo mede $2,4 u.c$, pela Proposição 3.2.10 segue-se que

$$\text{Área}(P) = \frac{8 \cdot 2 \cdot 2,4}{2} = 19,2 u.a..$$

3.3 Razão entre Áreas de Figuras Semelhantes

Provaremos utilizando as próximas proposições, que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Este resultado será bastante útil nos capítulos posteriores (especialmente nna proposta educacional).

Proposição 3.3.1. Dados ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes, seja k a razão de semelhança de ABC e $A'B'C'$. Então

$$\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(A'B'C')} = k^2.$$

Demonstração. Sejam $\overline{BC} = a$, $(\overline{B'C'}) = a'$, e h e h' as alturas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente, relativas aos lados BC e $B'C'$

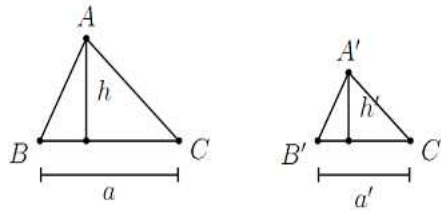


Figura 22: Triângulos semelhantes.

Como $a = a'k$ e $h = h'k$, teremos

$$\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(A'B'C')} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a'k \cdot h'k}{a'h'} = k^2.$$

□

Do mesmo modo, a relação entre as áreas de dois quadrados, retângulos, círculos, e polígonos quaisquer que sejam semelhantes é sempre o quadrado da razão de semelhança.

Vamos demonstrar este resultado para dois polígonos semelhantes que tenham um número finito de lados. Ao fim deste capítulo, mostraremos que o mesmo também é válido para círculos.

Proposição 3.3.2. *A razão entre áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. A razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes pode ser encontrada pela razão entre dois lados quaisquer que sejam correspondentes nos polígonos.

Vamos provar o resultado por indução sobre n .

Para um triângulo qualquer, o resultado foi provado na Proposição anterior.

Considere dois quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$ semelhantes entre si, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{HE}} = c.$$

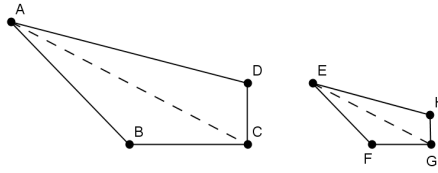


Figura 23: Quadriláteros semelhantes.

Vamos dividir os quadriláteros em triângulos, traçando as diagonais \overline{AC} e \overline{EG} (ou \overline{BD} e \overline{FH}). Chamaremos este processo de *triangulação de polígono*. Assim, teremos,

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ACD) \text{ e}$$

$$\text{Área}(EFGH) = \text{Área}(EFG) + \text{Área}(EGH).$$

Mas,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = c \quad \text{e} \quad \hat{A}BC = \hat{E}FG.$$

Logo, os triângulos ABC e EFG são semelhantes pelo caso LAL e assim pela Proposição 3.3.1:

$$\text{Área}(ABC) = c^2 \cdot \text{Área}(EFG).$$

Argumentando de modo análogo, veremos que os triângulos ACD e EGH são semelhantes, assim

$$\text{Área}(ACD) = c^2 \cdot \text{Área}(EGH).$$

Portanto, teremos

$$\text{Área}(ABCD) = c^2 \text{Área}(EFG) + c^2 \text{Área}(EGH) = c^2 (\text{Área}(EFG) + \text{Área}(EGH)).$$

Do que se segue,

$$\frac{\text{Área}(ABCD)}{\text{Área}(EFGH)} = c^2 \frac{\text{Área}(EFG) + \text{Área}(EGH)}{\text{Área}(EFG) + \text{Área}(EGH)} = c^2.$$

Agora, suponhamos que o resultado seja válido para todos os polígonos semelhantes com k lados, onde $k \leq n$ e vamos provar que também é válido para quaisquer outros polígonos semelhantes com $(n+1)$ lados, onde $n \in \mathbb{N}$.

Considere então dois polígonos semelhantes $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ e $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n+1}$ com $(n+1)$ lados cada um e com razão de semelhança c .

Traçando-se em cada um dos polígonos, uma diagonal que divida cada polígono inicial em um polígono com $(n-1)$ lados e um triângulo, de modo que os polígonos de $(n-1)$ lados sejam semelhantes e que os triângulos também sejam semelhantes. Sem perda de generalidade, sejam $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{B_1B_3}$ estas diagonais.

Pela Proposição 3.3.1, teremos:

$$\frac{\text{Área}(A_1A_2A_3)}{\text{Área}(B_1B_2B_3)} = c^2.$$

Mas, por hipótese,

$$\frac{\text{Área}(A_1A_3 \dots A_{n+1})}{\text{Área}(B_1B_3 \dots B_{n+1})} = c^2.$$

Como, por construção,

$$\text{Área}(A_1A_2A_3 \dots A_{n+1}) = \text{Área}(A_1A_2A_3) + \text{Área}(A_1A_3 \dots A_{n+1}) \text{ e}$$

$$\text{Área}(B_1B_2B_3 \dots B_{n+1}) = \text{Área}(B_1B_2B_3) + \text{Área}(B_1B_3 \dots B_{n+1}),$$

segue-se que

$$\frac{\text{Área}(A_1A_2A_3 \dots A_{n+1})}{\text{Área}(B_1B_2B_3 \dots B_{n+1})} = \frac{\text{Área}(A_1A_2A_3) + \text{Área}(A_1A_3 \dots A_{n+1})}{\text{Área}(B_1B_2B_3) + \text{Área}(B_1B_3 \dots B_{n+1})}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\frac{\text{Área}(A_1A_2A_3 \dots A_{n+1})}{\text{Área}(B_1B_2B_3 \dots B_{n+1})} = \frac{c^2 \text{Área}(B_1B_2B_3) + c^2 \text{Área}(B_1B_3 \dots B_{n+1})}{\text{Área}(B_1B_2B_3) + \text{Área}(B_1B_3 \dots B_{n+1})} = c^2.$$

O que prova que o resultado vale para um polígono com $(n+1)$ lados, e pelo princípio de indução finita, o resultado vale para todos os polígonos semelhantes entre si com n lados. \square

3.4 A Área do Círculo

É natural querermos encontrar uma fórmula que nos ajude a calcular a área de um círculo. Vamos demonstrar que a fórmula de um círculo de raio r é πr^2 nos baseando fortemente

em conceitos demonstrados por Eudoxo, Euclides e Antífonte. Além disso vamos demonstrar alguns resultados para o cálculo da área de um setor circular e do segmento circular.

Proposição 3.4.1 (Área do Círculo). *A área de um círculo de raio r é πr^2 .*

Demonstração. Considere um círculo C e um quadrado inscrito no mesmo. Pelo ponto médio de cada arco determinado por 2 vértices consecutivos, construímos um octógono inscrito. Continuando com este processo, construiremos polígonos regulares (p_n) com $2n$ lados, inscritos ao círculo C , onde $n \geq 2$, ou seja, p_2 é o quadrado inscrito, p_3 é o octógono, p_4 é o hexadecágono inscrito a C e assim por diante.

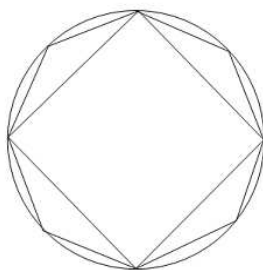


Figura 24: Polígonos regulares inscritos ao círculo.

Seja a_n a área de p_n . Por construção,

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots \quad (3.6)$$

A área do círculo C é o $\lim a_n$ quando $n \rightarrow \infty$, se este limite existir.

Mas observamos que a sequência formada pelos termos da desigualdade (23.6) é claramente crescente e que só há 2 possibilidades, ao tomarmos n cada vez maior: ou ela converge para algum número real, ou apenas cresce infinitamente.

Tomando-se o quadrado circunscrito ao círculo C , sua área será dada por $(2r)^2$, e é maior que a área de qualquer polígono inscrito a C . Ou seja,

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 4r^2.$$

Portanto, a sequência formada por (3.6), não pode crescer infinitamente, ou seja, é convergente para algum número real.

Para calcularmos o número para o qual este limite converge, observemos inicialmente que o polígono regular inscrito p_n , tem 2^n lados, logo é formado pela união de 2^n triângulos

isósceles congruentes. Seja l_n e h_n os comprimentos da base (lado de p_n) e da altura relativa a base destes triângulos, respectivamente.

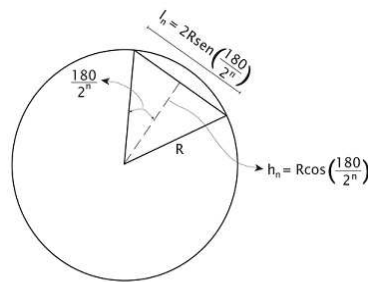


Figura 25: Triângulo isósceles cujos lados congruentes são raios do círculo.

O ângulo do vértice oposto ao lado do polígono vale $\frac{360}{2^n}$. Além disso, pelas definições de seno e cosseno, obtemos

$$l_n = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right) \quad \text{e} \quad h_n = R \operatorname{cos}\left(\frac{180}{2^n}\right).$$

Assim, como h_n é o apótema do círculo inscrito a p_n , pela Proposição 3.2.10, é válido

$$a_n = 2^n \left(\frac{1}{2} l_n h_n\right) = 2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{180}{2^n}\right).$$

Logo, a área do círculo C é dada por

$$A(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{180}{2^n}\right).$$

Mas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{cos}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right) = \operatorname{cos}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{180}{2^n}\right)\right) = 1.$$

Consequentemente,

$$A(C) = R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right).$$

Então, se um círculo C_1 tem raio R_1 , teremos

$$a_n = 2^n (R_1)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{180}{2^n}\right)$$

e a área de C_1 será dada por

$$A(C_1) = (R_1)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \operatorname{sen} \left(\frac{180}{2^n} \right) \right).$$

Se um círculo C_2 tiver raio R_2 , teremos

$$a_n = 2^n (R_2)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{180}{2^n} \right) \cos \left(\frac{180}{2^n} \right)$$

e a área de C_2 será dada por

$$A(C_2) = (R_2)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \operatorname{sen} \left(\frac{180}{2^n} \right) \right).$$

Portanto,

$$\frac{A(C_1)}{(R_1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \operatorname{sen} \left(\frac{180}{2^n} \right) \right) = \frac{A(C_2)}{(R_2)^2}.$$

Ou seja, qualquer que seja o círculo, a razão $\frac{A(C)}{R^2}$ dará sempre o mesmo número. Chamando-se a este número de π , ou seja, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \operatorname{sen} \left(\frac{180}{2^n} \right) \right) = \pi,$$

obtemos

$$\text{Área}(C) = \pi R^2.$$

□

Observação. Na verdade, a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \operatorname{sen} \left(\frac{180}{2^n} \right) \right) = \pi \tag{3.7}$$

pode ser provada formalmente admitindo-se que o perímetro de um círculo de raio r é $2\pi r$ juntamente com alguns conceitos de cálculo diferencial, como o Teorema do Confronto. Como sabemos, π é um número irracional, cujo valor é de aproximadamente 3,14159265...

Corolário 3.4.1 (Área do Setor Circular). *Dado um círculo C de raio r , a área do setor circular (A_c) determinado pelo ângulo central \hat{A} em radianos é dada por*

$$\text{Área}(A_c) = \frac{\hat{A}r^2}{2}.$$

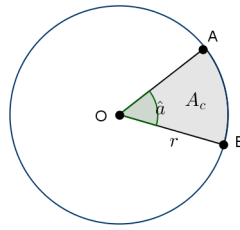


Figura 26: Área do Setor Circular

Demonstração. A área do setor circular é proporcional à medida do ângulo central, logo aquela pode ser calculada por uma regra de três simples, sabendo-se que a área do setor circular de ângulo 2π é πr^2 , teremos

$$\frac{2\pi}{\pi r^2} = \frac{\hat{A}}{\text{Área}(A_c)}.$$

E assim,

$$\text{Área}(A_c) = \frac{\hat{\alpha} r^2}{2}.$$

□

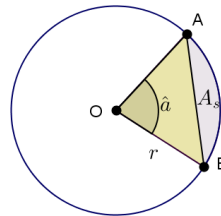


Figura 27: Área do Segmento Circular

Corolário 3.4.2 (Área do Segmento Circular). *Dado um círculo C de raio r e centro O , a área do segmento circular A_s determinado pelo arco do ângulo central \hat{A} (formado pelos segmentos \overline{OA} e \overline{OB}) e por uma corda que intersecta C em A e B é dada por*

$$\text{Área}(A_s) = \frac{r^2}{2}(\hat{A} - \text{sen}\hat{A}).$$

Demonstração. A área do segmento circular é determinada pela diferença entre a área do setor circular (A_c) e a área do triângulo OAB , ou seja

$$\text{Área}(A_s) = \text{Área}(A_c) - \text{Área}(OAB).$$

Mas, pelo corolário anterior,

$$\text{Área}(A_c) = \frac{\hat{A}r^2}{2},$$

e pela Proposição 3.2.6

$$\text{Área}(OAB) = \frac{r^2 \sin \hat{A}}{2}.$$

Logo,

$$\text{Área}(A_s) = \frac{\hat{A}r^2}{2} - \frac{r^2 \sin \hat{A}}{2} = \frac{r^2}{2}(\hat{A} - \text{sen} \hat{A}).$$

□

Exemplo 9. Calcular a área do setor e do segmento circular A_c e A_s , respectivamente, determinados pelo ângulo central 45° e comprimento do raio igual a 12 cm.

Solução. O ângulo 45° corresponde a $\frac{\pi}{4}$ radianos. Como o raio do círculo mede 12 cm, pelo Corolário 3.4.1 vem

$$\text{Área}(A_c) = \frac{\pi 12^2}{8} = 18\pi \cong 18 \cdot 3,1415 \cong 56,52 \text{ cm}^2.$$

Para calcularmos, a área do segmento circular determinado pelo ângulo, utilizamos o Corolário 3.4.2 e encontramos

$$\text{Área}(A_s) = \frac{12^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \text{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 72 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cong 5,6 \text{ cm}^2.$$

Agora, vamos mostrar que a Proposição 3.3.2 também é verdadeira para círculos.

Corolário 3.4.3. A razão entre as áreas de dois círculos é igual ao quadrado da razão entre os raios.

Demonstração. Isto verifica-se facilmente. Considere um círculo C_1 de raio R e outro círculo C_2 de raio r .

A área do círculo C_1 é πR^2 . A área do círculo C_2 é πr^2 .

Logo,

$$\frac{\text{Área}(C_1)}{\text{Área}(C_2)} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Portanto, dois círculos são sempre semelhantes entre si e a razão de semelhança é dada pela razão entre seus raios, o que confirma a validade da Proposição 3.2.12 também para círculos. □

Observações. Na verdade, é possível provar que a Proposição 3.2.12 é válida para quaisquer figuras semelhantes, não apenas para polígonos e círculos. Para isso, basta aproximar duas figuras quaisquer F_1 e F_2 não poligonais (que apresentem uma linha de contorno com alguma curvatura) semelhantes entre si por 2 polígonos P_1 e P_2 de n lados cada e também semelhantes entre si, com razão de semelhança k . Como

$$\frac{\text{Área}(P_1)}{\text{Área}(P_2)} = k^2$$

e como

$$\text{Área}(F_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Área}(P_1) \text{ e } \text{Área}(F_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Área}(P_2),$$

segue-se, pela convergência dos limites acima, que

$$\frac{\text{Área}(F_1)}{\text{Área}(F_2)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Área}(P_1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Área}(P_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Área}(P_1)}{\text{Área}(P_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} k^2 = k^2.$$

4

Aplicações do Conceito de Área

Veremos neste capítulo, alguns resultados que podem ser provados utilizando-se os conceitos apresentados no capítulo anterior sobre o cálculo de área de polígonos diversos.

4.1 O Teorema de Pitágoras

Talvez o Teorema mais popular, seja o chamado Teorema de Pitágoras. Sua demonstração mais conhecida faz uso do cálculo de área de quadrados e triângulos.

O Teorema leva o nome de Pitágoras de Samos (527 - 497) a.C. por provavelmente terem sido os pitagóricos os primeiros a demonstrarem formalmente o resultado, apesar deste já ser conhecido por outras civilizações mais antigas.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Pitágoras). *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

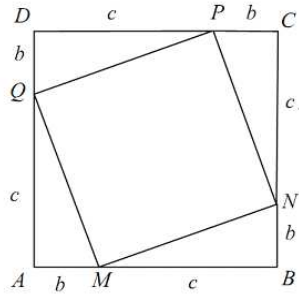
Demonstração. Considere um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede a e cujos catetos medem b e c . Queremos provar que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Considere agora um quadrado de lado $(b + c)$. Sobre seus lados, marque pontos M, N, P e Q de modo que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = b$ e $\overline{MB} = \overline{NC} = \overline{PD} = \overline{QA} = c$, conforme a figura 28.

Observa-se que os triângulos retângulos DPQ, CNP, BMN e AQM são congruentes entre si pelo caso LAL e conseqüentemente são congruentes ao triângulo dado inicialmente. Logo

$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM} = a.$$

Figura 28: Quadrado de lado $(b + c)$.

Além disso, como os ângulos agudos α e β dos triângulos retângulos congruentes citados acima, têm soma igual a 90° , os ângulos internos do quadrilátero $QMNP$ são retos.

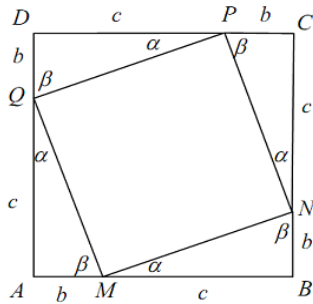


Figura 29: Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Logo, $QMNP$ é um quadrado de lado a . Assim, a área do quadrado de lado $(b + c)$ é igual a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos congruentes e do quadrado de lado a . Ou seja,

$$(b + c)^2 = 4 \frac{bc}{2} + a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2.$$

Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Observação. Como a^2 é a área de um quadrado de lado a , b^2 é a área de um quadrado de lado b , e c^2 é a área de um quadrado de lado c , o Teorema de Pitágoras pode ser enunciado da seguinte forma:

2ª versão do Teorema de Pitágoras: A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Agora vamos demonstrar uma generalização da 2ª versão do Teorema de Pitágoras, construindo quaisquer figuras semelhantes entre si, sobre os lados do triângulo retângulo.

Proposição 4.1.1. *Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c . Considere A , B e C figuras semelhantes entre si, construídas respectivamente sobre os lados a, b e c do triângulo, conforme a figura 30. Então*

$$\text{Área}(A) = \text{Área}(B) + \text{Área}(C).$$

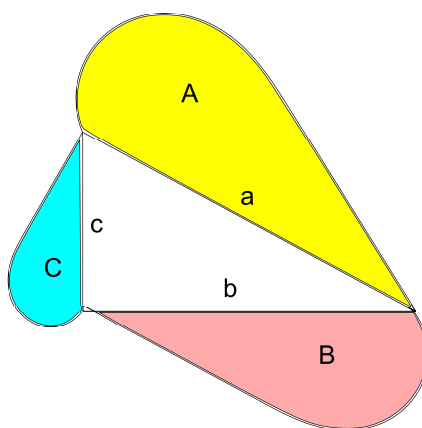


Figura 30: Generalização do Teorema de Pitágoras.

Demonstração. Por hipótese, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Sabemos pela observação feita ao final do capítulo 3, que a Proposição 3.3.2 é válida para quaisquer figuras semelhantes, ou seja, a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança, logo

$$\frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(B)} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(C)} = \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Reorganizando, teremos

$$\frac{\text{Área}(A)}{a^2} = \frac{\text{Área}(B)}{b^2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{Área}(A)}{a^2} = \frac{\text{Área}(C)}{c^2}.$$

Assim, segue-se que

$$\frac{\text{Área}(A)}{a^2} = \frac{\text{Área}(B)}{b^2} = \frac{\text{Área}(C)}{c^2}.$$

Mas, da propriedade das proporções, temos

$$\frac{\text{Área}(A)}{a^2} = \frac{\text{Área}(B) + \text{Área}(C)}{(b^2 + c^2)}.$$

E, como $a^2 = b^2 + c^2$, pelo teorema de Pitágoras, podemos concluir que

$$\text{Área}(A) = \text{Área}(B) + \text{Área}(C).$$

□

Ou seja, se construirmos figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo qualquer, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

Um caso particular ocorre quando construímos sobre os lados de um triângulo retângulo, semicírculos que são figuras semelhantes com razão de semelhança igual a razão entre os raios do círculos compreendidos.

Problema 1 [de Hipócrates]. Dado um triângulo retângulo ABC e três semicircunferências cujos centros são os pontos médios dos lados de ABC e cujos diâmetros são os lados de ABC . Vamos provar que a soma das áreas das lúnulas (regiões em vermelho) determinadas pela intersecção do semicírculo de diâmetro \overline{AB} com os semicírculos de diâmetros \overline{BC} e \overline{AC} é igual a área do triângulo dado (em amarelo).

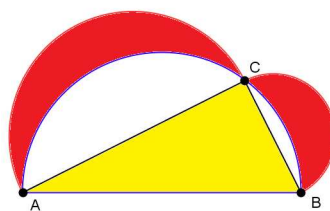


Figura 31: Problema de Hipócrates

Demonstração. Seja T a área do triângulo. Sejam P e Q as áreas das lúnulas em vermelho na figura 31 e sejam U e V as áreas compreendidas entre as lúnulas e os catetos do triângulo.

Pelo Corolário 3.4.3, dois círculos quaisquer são semelhantes entre si, assim como os semicírculos por eles determinados. Logo, pela Proposição anterior segue-se que

$$T + U + V = (P + U) + (V + Q).$$

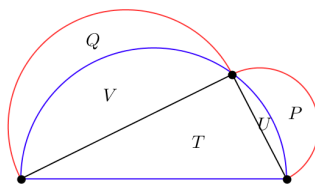


Figura 32: Intersecções das semicircunferências.

E, portanto,

$$T = P + Q.$$

□

Ou seja, a soma das áreas das lúnulas é igual a área do triângulo, como afirmado.

4.2 Lei dos Senos

Podemos também, provar a Lei dos Senos calculando a área de um triângulo de diferentes formas. Vejamos.

Proposição 4.2.1 (Lei dos Senos). *Dado um triângulo ABC . Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam também γ , β e α os ângulos opostos aos lados \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente. Então*

$$\frac{\text{sen}\gamma}{c} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\alpha}{a}.$$

Demonstração. Considere h_c , h_b e h_a as alturas do triângulo ABC em relação aos lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, respectivamente.

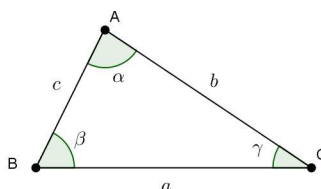


Figura 33: Lei dos Senos.

Sabemos pela Proposição 3.2.4, que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Logo,

$$h_a = \frac{bh_b}{a} = \frac{ch_c}{a}.$$

Isso nos leva às igualdades

$$\frac{h_a}{bc} = \frac{h_b}{ac} = \frac{h_c}{ab}. \quad (4.1)$$

Mas, pela Proposição 3.2.6, temos

$$\text{Área}(ABC) = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{ac \cdot \sin\beta}{2}.$$

Então, igualando, convenientemente, as expressões que nos dão a área do triângulo, teremos

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABC) &= \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{ch_c}{2} \Rightarrow \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{h_c}{ab}; \\ \text{Área}(ABC) &= \frac{ab \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{ah_a}{2} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{h_a}{bc}; \\ \text{Área}(ABC) &= \frac{ac \cdot \sin\beta}{2} = \frac{bh_b}{2} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{b} = \frac{h_b}{ac}. \end{aligned}$$

E, pelas igualdades anteriores, juntamente com as igualdades (4.1), segue-se que

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}.$$

□

4.3 Limite Fundamental Trigonométrico

Vamos mostrar que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Demonstração. Considere o arco determinado pelo ângulo θ (medido em *radianos*) no círculo trigonométrico de centro O e raio 1. Considere também o triângulo retângulo OAB onde $\overline{AB} = \sin\theta$ e $\overline{OB} = 1$ é a hipotenusa. Considere também o triângulo retângulo OCD de hipotenusa \overline{OD} e onde $\overline{CD} = \text{tg}\theta$.

Pela figura 34, podemos ver que a área do setor circular OCB determinado pelo ângulo

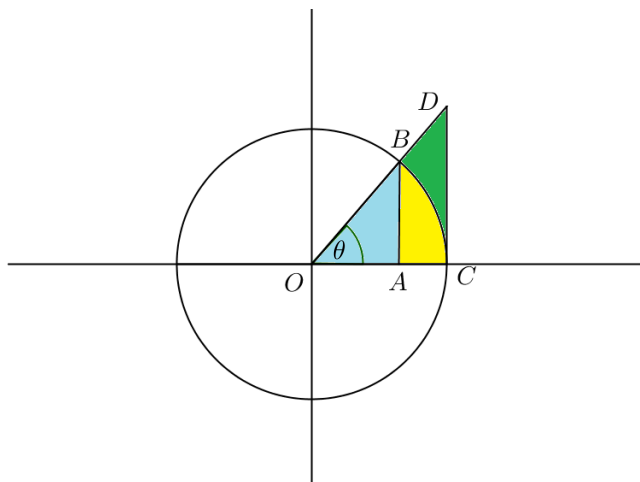


Figura 34: Círculo trigonométrico de raio 1.

θ está compreendido entre as áreas dos triângulos OAB e OCD , ou seja,

$$\text{Área}(OAB) \leq \text{Área}(OCB) \leq \text{Área}(OCD).$$

Mas, como o raio do círculo é igual a 1, temos que

$$\text{Área}(OCB) = \frac{\theta}{2}.$$

Além disso,

$$\text{Área}(OAB) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{2},$$

$$\text{Área}(OCD) = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}}{2} = \frac{\tan \theta}{2}.$$

Assim,

$$\frac{\cos \theta \sin \theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan \theta}{2} \Rightarrow \cos \theta \sin \theta \leq \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Disto, segue-se que

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}.$$

Agora, fazendo θ tender a 0, teremos

$$1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1,$$

o que implica, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

□

5

O Teorema de Pick

O Teorema de Pick foi publicado pela primeira vez num artigo de 1899 em Praga. Georg Alexander Pick, natural de Viena em 1859, escreveu cerca de 67 artigos até sua morte no campo de concentração de Theresienstadt em 1942.

Veremos como o cálculo de áreas de polígonos diversos, se satisfeitas as hipóteses do teorema, pode ser feito com uma mera contagem de pontos. Seria uma maneira de discretizar uma grandeza até então, de natureza contínua.

Portanto, considerando suas hipóteses como válidas, o Teorema de Pick se transforma numa ferramenta bastante útil no cálculo de áreas, além de poder ser utilizada em outros resultados em Matemática, como na Aritmética, por exemplo.

Vamos inicialmente definir alguns conceitos, demonstrar alguns resultados preliminares e seguiremos com a demonstração do Teorema de Pick por indução sobre n , sua relação com a Fórmula de Euler para planos, sua versão para polígonos com "buracos" e terminaremos com uma generalização do Teorema de Pick para polígonos com vértices de coordenadas racionais.

5.1 A Fórmula de Pick: Observações iniciais

Dado um polígono P com vértices cujas coordenadas no plano cartesiano são números inteiros, o Teorema de Pick nos diz que sua área pode ser calculada pela fórmula

$$\text{Área}(P) = i + \frac{b}{2} - 1, \quad (5.1)$$

onde i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras interiores ao polígono e b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas do polígono.

Exemplo 10. *Vamos calcular a área do triângulo ABC a seguir, utilizando o Teorema de Pick.*

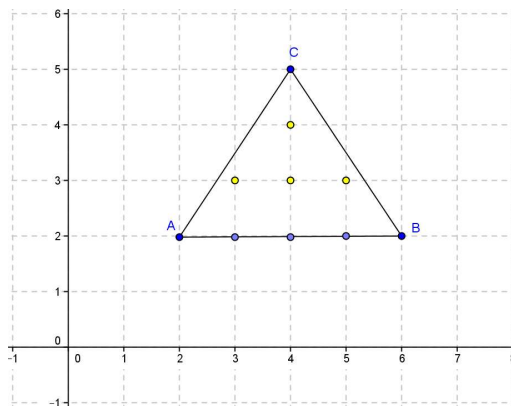


Figura 35: Área do triângulo pela fórmula de Pick.

Solução. Como os vértices do triângulo são pontos do plano com coordenadas inteiras, podemos aplicar o Teorema de Pick. Observando a figura 35, vemos que o triângulo apresenta quatro pontos de coordenadas inteiras em seu interior (em amarelo) e seis pontos de coordenadas inteiras em suas arestas (em azul).

Portanto,

$$\text{Área}(ABC) = 4 + \frac{6}{2} - 1 = 6 \text{ u.a.}$$

Este resultado também pode ser verificado com a Proposição 3.2.4.

Exemplo 11. Agora vamos tentar calcular a área do polígono P da figura 36 com o Teorema de Pick.

Solução. Antes disso, vamos calcular a área de P de um outro modo.

Como o polígono P é formado por dois triângulos congruentes de bases 4 u.c. e alturas 2 u.c. , pela Proposição 3.2.4 e pelo Postulado 2, a área de P é dada por:

$$\text{Área}(P) = 2 \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} = 8 \text{ u.a.}$$

Agora, se considerarmos que cada unidade da malha da figura 36 corresponde a 1 unidade inteira de comprimento, o polígono P terá vértices de coordenadas inteiras com dois pontos de coordenadas inteiras em seu interior (em amarelo) e quinze pontos de coordenadas inteiras em suas arestas (em azul).

Então utilizando a fórmula (5.1), segue-se que

$$\text{Área}(P) = 2 + \frac{15}{2} - 1 = \frac{17}{2} \text{ u.a.}$$

que é um resultado diferente do calculado anteriormente, e falso.

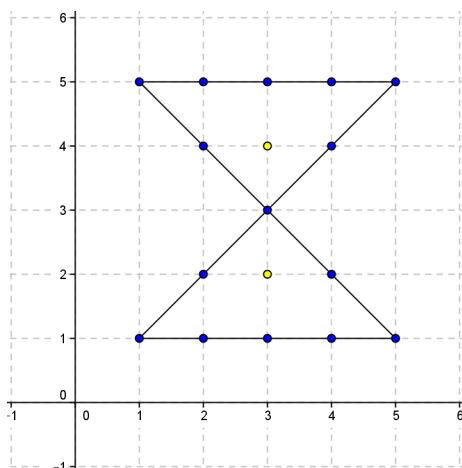


Figura 36: Polígono P que apresenta autointersecção.

De fato, o Teorema de Pick falha no polígono anterior, porque este não é um polígono simples (apresenta autointersecção).

Portanto devemos considerar que os polígonos, dos quais queremos calcular a área com a Fórmula de Pick, são polígonos simples.

Definição 13. Dizemos que um polígono é simples se não possuir "buracos" e a intersecção de um par de arestas não consecutivas do polígono for sempre vazia. Em outras palavras, um polígono é simples se suas arestas não consecutivas, não se intersectarem.

Observamos também que duas arestas consecutivas de um polígono P são formadas por três vértices consecutivos. Além disso, o polígono P divide o plano em duas regiões: o interior I de P , e o exterior E de P .

Definição 14. O interior de um polígono P é o conjunto de todos os pontos do plano pertencentes à região poligonal interna a P .

Definição 15. O exterior de um polígono P é o conjunto de todos os pontos do plano pertencentes à região poligonal externa a P .

Essas regiões por sua vez, têm as seguintes propriedades:

Propriedade 1. Dois pontos A e B do plano fora do polígono P formam uma linha poligonal que não intersecta P , se e somente se, A e B pertencem ao interior ou ao exterior de P .

Propriedade 2. A região interior I de P é uma região limitada, a região exterior E de P é ilimitada e P é a fronteira comum de ambas as regiões.

É possível demonstrar estes dois fatos, mas omitiremos tais demonstrações por fugir um pouco do objetivo do trabalho e por considerarmos tais fatos bastante intuitivos.

É importante lembrar que sempre que nos referirmos a um polígono P , estaremos nos referindo à *linha poligonal fechada* P .

Lema 5.1.1. *Dado um polígono P , qualquer ponto A de P pode ser ligado a qualquer ponto B da região interior I de P por uma linha poligonal, cujos pontos, exceto A , são todos pertencentes a I .*

Demonstração. Vamos analisar dois casos: O ponto A pertence ao interior de uma aresta L de P , e o caso em que o ponto A é um vértice do polígono.

Suponhamos então que A pertença ao interior de uma aresta L de P e A não seja um vértice de P . Então podemos tomar um disco D de centro A e raio suficientemente pequeno de tal forma que a intersecção de D com o polígono P seja um diâmetro de D contido em L .

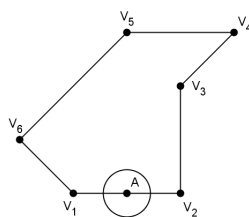


Figura 37: Caso em que ponto A pertence ao interior de uma aresta do polígono P .

O complementar desse diâmetro em D é formado por dois semidiscos D_1 e D_2 . Como A pertence à fronteira de I , existe um ponto A_1 talque

$$A_1 \in I \cap (D_1 \cup D_2).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $A_1 \in D_1$. Se existe outro ponto $A_2 \in D_1$, então o segmento $\overline{A_1A_2}$ está todo contido em D_1 e não intersecta P , já que D_1 está contido em $(D_1 \cup D_2)$, o complementar do diâmetro de D .

Portanto $A_2 \in I$, o que implica que $D_1 \subset I$.

Então, podemos ligar A a A_1 por uma linha poligonal toda contida em I (com exceção de A), pela definição de I . Esta é a linha poligonal que procurávamos.

Agora suponhamos que o ponto A seja vértice do polígono P , tal que V_1 , A e V_2 sejam vértices consecutivos. Neste caso, tomando um disco D de raio suficientemente pequeno, a intersecção de D com o polígono P será formada por dois segmentos: $\overline{AP_1}$ inteiramente contido na aresta $\overline{AV_1}$ e $\overline{AP_2}$ inteiramente contido na aresta $\overline{AV_2}$.

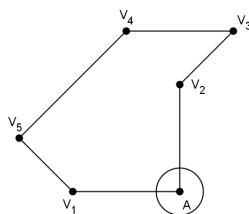


Figura 38: Caso em que o ponto A é um vértice do polígono P .

O complementar de $D \cap P$ é uma região formada por duas regiões C_1 e C_2 . Como A pertence à fronteira de I , existe um ponto A_1 tal que

$$A_1 \in I \cap (C_1 \cup C_2).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $A_1 \in C_1$. Se existe outro ponto $A_2 \in C_1$, então o segmento A_1A_2 está todo contido em C_1 e não intersecta P , já que C_1 está todo contido no complementar $D \cap P$ que é $C_1 \cup C_2$.

Portanto $A_2 \in I$, o que implica que $C_1 \subset I$.

Então, podemos ligar A a A_1 por uma linha poligonal toda contida em I , pela definição de I . Esta é a linha poligonal que procurávamos. \square

Lema 5.1.2. *Num polígono simples com mais de três vértices, existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta o polígono.*

Demonstração. Sejam A, B e C vértices consecutivos e ordenados de um polígono simples P que possui mais de três vértices.

O segmento \overline{AC} não é uma aresta pois A e C não são vértices consecutivos, já que P tem mais de três vértices.

Se o interior de \overline{AC} não intersecta o polígono, A e C são os vértices procurados. Então suponhamos que \overline{AC} intersecte o polígono, ou seja, \overline{AC} intersecta alguma aresta l de P .

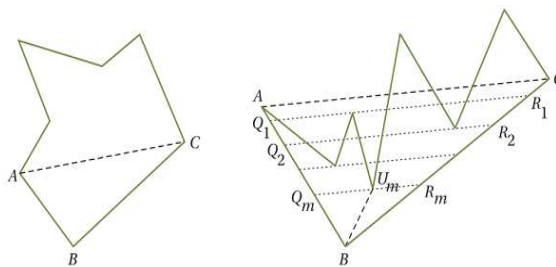


Figura 39: Se \overline{AC} intersecta P , então B pode ser conectado a algum outro vértice.

Como l intersecta \overline{AC} , ou l intersecta também um dos outros dois lados do polígono (\overline{AB} ou \overline{BC}), ou l tem um extremo num ponto R pertencente ao interior do triângulo ABC .

A primeira constatação não é possível, pois se supusermos o contrário, como estamos admitindo que l intersecta \overline{AC} , existirão dois pontos R e S distintos de A e C no exterior no triângulo ABC tais que a aresta l será definida por estes pontos, ou seja, $\overline{RS} = l$ e l intersectará \overline{AB} ou \overline{BC} , além de \overline{AC} . Então $\overline{RS} = l$ será uma aresta não consecutiva a \overline{AB} e \overline{BC} que intersectará \overline{AB} ou \overline{BC} , logo o polígono não seria simples. Contrariando a nossa hipótese.

Assim, resta-nos assumir que l tem pelo menos um ponto (ponto extremo R) pertencente ao interior do triângulo ABC .

Logo, \overline{BR} não é uma aresta (pois B e R não são consecutivos), une dois vértices de P e seu interior não intersecta o polígono P .

Se existir mais de um vértice U_1, U_2, \dots, U_n da poligonal P no interior do triângulo ABC , as retas paralelas a \overline{AC} passando por U_i , tal que $i = 1, 2, \dots, n$ intersectam os lados \overline{AB} e \overline{AC} nos pontos R_i e S_i respectivamente, formando os triângulos $T_i = BR_iS_i$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.

Seja T_m o menor destes triângulos, de acordo com a ordem da inclusão, ou seja,

$$T_m = \bigcap_{i=1}^n T_i. \quad (5.2)$$

Caso hajam dois ou mais triângulos que satisfaçam (5.2), escolhemos qualquer um deles. Então o segmento $\overline{U_mB}$ une dois vértices de P , não é aresta, pois U_m e B não são vértices consecutivos, e o interior de $\overline{U_mB}$ está contido no interior do triângulo AU_mB que por construção não contém nenhum vértice de P . Logo, U_m e B são os vértices que satisfazem a nossa tese.

Se alguma aresta t intersectasse $\overline{U_mB}$, ela intersectaria um dos segmentos $\overline{R_mB}$ ou $\overline{Q_mB}$, mas estes estão contidos no interior de duas arestas BC e AB respectivamente, logo teríamos duas arestas não consecutivas t e \overline{AB} (ou \overline{BC}) se intersectando, o que não é possível, pois o polígono é simples. \square

Proposição 5.1.1 (Propriedade Aditiva da Fórmula de Pick). *Sejam P e Q polígonos simples no plano cuja intersecção é uma aresta comum. Então, se a fórmula (5.1) é válida para P e Q , ela também é válida para o polígono $P \cup Q$.*

Demonstração. Considere dois polígonos P e Q com coordenadas inteiras no plano, e tais que os vértices de P sejam V_1, V_2, \dots, V_n . Como Q tem apenas uma aresta de intersecção com P , sejam os vértices de Q , os pontos $V_1, V_2, U_1, U_2, \dots, U_m$.

Considere $P \cup Q$, o polígono formado pelos polígonos P e Q , ou seja, $P \cup Q$ é o polígono de vértices $V_1, V_2, \dots, V_n, U_1, U_2, \dots, U_m$.

Sejam i_1, i_2 e i a quantidade de pontos de \mathbb{Z}^2 no interior de P , Q e $P \cup Q$, respectivamente.

Sejam b_1, b_2 e b a quantidade de pontos de \mathbb{Z}^2 que pertencem às arestas de P , Q e $P \cup Q$, respectivamente.

Seja Q' o complementar da aresta $\overline{V_1V_2}$ em Q . Neste caso, Q' é a união de linhas poligonais com extremos pertencentes ao polígono P . Como as arestas de P e Q se intersectam apenas na aresta $\overline{V_1V_2}$, nós temos duas possibilidades: ou Q' está inteiramente contido no interior de P , ou Q' está inteiramente contido no exterior de P .

Vamos considerar primeiramente o caso em que Q' está inteiramente contido no exterior de P e os interiores I_p e I_q de P e Q respectivamente, não se intersectam (Ver figura 40).

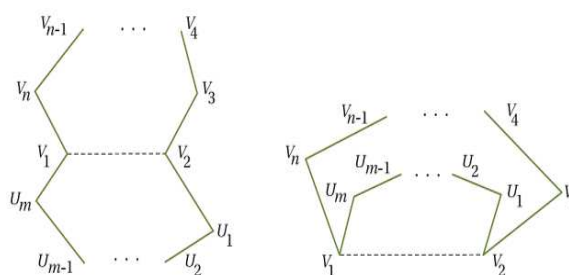


Figura 40: Q' está inteiramente no interior de P (à direita), ou no exterior de P (à esquerda).

Neste caso, o interior de $P \cup Q = I_p \cup I_q \cup I_a$, onde I_a designa o interior da aresta $\overline{V_1V_2}$, e de modo que $V_1 \notin I_a$ e $V_2 \notin I_a$.

Esta afirmação pode ser justificada com o auxílio do Lema 5.1.1. De fato, dado um ponto C qualquer da aresta $\overline{V_1V_2}$, podemos ligá-lo a um ponto B qualquer no interior de Q por uma linha poligonal que está inteiramente contida em I_q , com exceção de C . Do mesmo modo, podemos ligar C a um ponto D qualquer do interior de P por outra linha poligonal que está inteiramente contida em I_p (com exceção de C). A união das duas linhas poligonais forma uma linha poligonal que não intersecta $P \cup Q$ e liga B e D . Assim, a área do polígono $P \cup Q$ é igual a soma das áreas dos polígonos P e Q . Portanto, queremos mostrar que

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1 \right) + \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1 \right). \quad (5.3)$$

Como o interior de $P \cup Q$ é formada pela união disjunta dos interiores de P , Q e $\overline{V_1V_2}$, temos que $i = i_1 + i_2 + b_3$, onde b_3 denota o número de pontos de \mathbb{Z}^2 contidos em I_a .

A linha poligonal, $P \cup Q$ é igual à união de P com Q subtraída de I_a . Como $P \cap Q = \overline{V_1V_2}$, o número de pontos de \mathbb{Z}^2 contidos em $P \cap Q$ é igual $b_3 + 2$ (todos os pontos que pertencem ao

interior de $\overline{V_1V_2}$ além de V_1 e V_2 , já que V_1 e $V_2 \in \mathbb{Z}^2$, por hipótese). Logo,

$$b = b_1 - (b_3 + 2) + b_2 - (b_3 + 2) + 2 = b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1).$$

Disto, segue-se que

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (i_1 + i_2 + b_3) + \frac{(b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1))}{2} - 1 = (i_1 + i_2) + \frac{(b_1 + b_2)}{2} - 2,$$

o que demonstra (5.3).

Agora, vamos supor que Q' está contido no interior de P . Queremos provar que

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) - \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right). \quad (5.4)$$

Neste caso, o interior de P é formado pela união disjunta do interior de $P \cup Q$ com o interior de Q e com o complementar de V_1V_2 em Q (Ver figura 40). Portanto,

$$i_1 = i + i_2 + [b_2 - (b_3 + 2)],$$

ou seja,

$$i = i_1 - i_2 - b_2 + (b_3 + 2).$$

Como no caso anterior, teremos:

$$b = b_1 - (b_3 + 2) + b_2 - (b_3 + 2) + 2 = b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1).$$

E daí, segue-se que

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (i_1 - i_2 - b_2 + (b_3 + 2)) + \frac{(b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1))}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) - \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right).$$

O que demonstra (5.4).

O caso em que P está contido no interior de Q' é análogo ao anterior. \square

Observação. Importante notarmos que os argumentos apresentados e as igualdades (5.3) e (5.4), nos garantem que se a fórmula (5.1) vale para $P \cup Q$ e para P , então ela também é válida para Q . Este fato já era conhecido para polígonos convexos, pelo Postulado 2 apresentado no Capítulo 3. A partir de agora, o mesmo será válido para dois polígonos quaisquer simples e com apenas uma aresta comum de intersecção.

5.2 O Teorema de Pick

Vamos agora demonstrar que a fórmula (5.1) vale para triângulos quaisquer.

A Fórmula de Pick para triângulos. Seja T um triângulo retângulo com vértices em \mathbb{Z}^2 e catetos paralelos aos eixos coordenados.

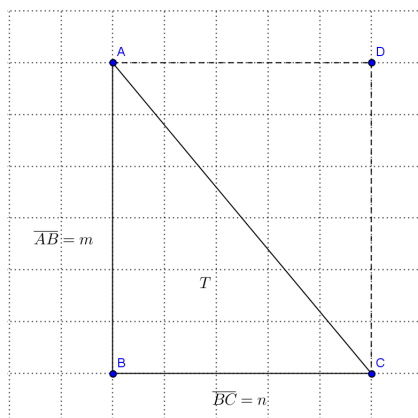


Figura 41: O Teorema de Pick para triângulos retângulos.

Seja R o retângulo que tem os catetos de T como dois de seus lados. Sejam também m e n os comprimentos dos catetos de T , i o número de pontos de \mathbb{Z}^2 no interior de T e b_h o número de pontos de \mathbb{Z}^2 no interior da hipotenusa de T .

O número de pontos de \mathbb{Z}^2 no interior de R é $(m-1)(n-1)$. Disto segue-se que

$$i = \frac{(m-1)(n-1) - b_h}{2}.$$

O número b de pontos de \mathbb{Z}^2 em T é igual $m+n+b_h+1$, logo

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{(m-1)(n-1) - b_h}{2} + \frac{(m+n+b_h+1)}{2} - 1 = \frac{mn}{2}.$$

O que confirma o resultado que pode ser obtido com a Proposição 3.2.4, já que podemos tomar qualquer um dos catetos como base e o outro como altura do triângulo.

Portanto, a fórmula vale para triângulos retângulos cujos catetos são paralelos aos eixos coordenados.

Como todo retângulo R pode ser formado por dois triângulos retângulos T_1 e T_2 , pela Proposição 5.1.1 e pelo que acabamos de demonstrar, a fórmula (5.1) vale também para todo

retângulo de vértices em \mathbb{Z}^2 cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

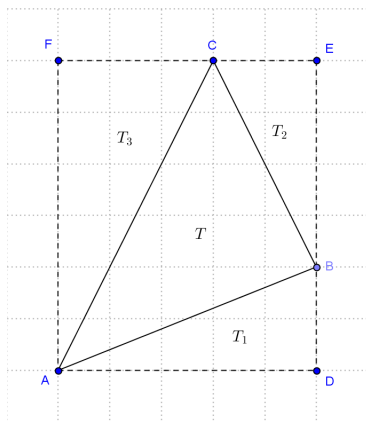


Figura 42: O Teorema de Pick para triângulos quaisquer.

Agora considere um triângulo T qualquer com vértices em \mathbb{Z}^2 . Podemos formar um retângulo R com vértices em \mathbb{Z}^2 , tal que $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$, onde T_1, T_2, T_3 sejam triângulos retângulos convenientes com catetos paralelos aos eixos coordenados (em alguns casos, menos de três triângulos retângulos são necessários, mas o argumento é análogo). (Ver figura 42)

Como a fórmula (5.1) vale para R, T_1, T_2 e T_3 , ela vale também para o triângulo T , pela observação feita na demonstração da proposição 5.1.1

Agora temos todas as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema de Pick.

Teorema 5.2.1 (Teorema de Pick). *Dado um polígono simples P com vértices de coordenadas inteiras, a área de P será dada por*

$$\text{Área}(P) = i + \frac{b}{2} - 1,$$

onde i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras interiores ao polígono, e b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras nas arestas do polígono.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n . Vimos no caso de triângulos, que a fórmula (5.1) é válida, ou seja, para polígonos com 3 vértices de coordenadas inteiras.

Suponhamos então, que a fórmula (5.1) seja válida para qualquer polígono simples com k vértices, todos com coordenadas inteiras, onde $k \leq n$ e $k, n \in \mathbb{N}$.

Considere então um polígono P com $(n+1)$ vértices $(V_1, V_2, \dots, V_{n+1})$. Pelo Lema 5.1.2, P possui um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta P .

Sem perda de generalidade, sejam V_1 e V_p este par de vértices, seja P_1 o polígono de vértices V_1, V_2, \dots, V_p e seja P_2 o polígono de vértices $V_1, V_p, V_{p+1}, \dots, V_n$. A fórmula (5.1) vale

tanto para P_1 como para P_2 , pois cada um dos polígonos tem no máximo n vértices, logo pela Proposição 5.1.1, a fórmula (5.1) vale também para P , o que prova que ela é válida para todo polígono simples com n vértices de coordenadas inteiras. \square

Exemplo 12. Calcular a área do polígono P da figura 43.

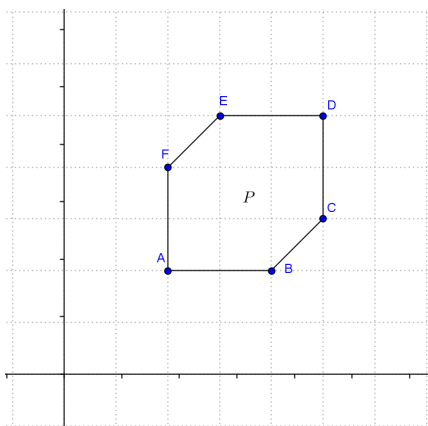


Figura 43: Polígono de vértices com coordenadas inteiras.

Solução. Pela figura 43, vemos que P é um polígono simples que apresenta seus vértices em pontos de coordenadas inteiras, logo, pelo Teorema de Pick, como há dez pontos de coordenadas inteiras em suas arestas e quatro pontos de coordenadas inteiras no interior de P , teremos:

$$\text{Área}(P) = \frac{10}{2} + 4 - 1 = 8 \text{ u.a.}$$

Definição 16. Um polígono é chamado *elementar* (ou *fundamental*) se possui vértices de coordenadas inteiras e se não contém (nem em seu interior, nem no interior de suas arestas) pontos de coordenadas inteiras.

Corolário 5.2.1. Qualquer triângulo fundamental tem área igual a $\frac{1}{2}$.

Demonstração. Pela definição anterior, vemos que dado um triângulo fundamental T , o número de coordenadas inteiras de suas arestas é o número de vértices do triângulo, ou seja, $f = 3$.

Além disso, também pela mesma definição, o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do triângulo T é 0, ou seja $i = 0$. Logo pela fórmula (5.1), segue-se que a área do triângulo fundamental é dada por

$$\text{Área}(T) = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

\square

O Corolário 5.2.1 pode ser ilustrado pela figura a seguir, pois vemos que a base b e altura h de quaisquer desses triângulos podem ser tomadas de modo que tenham medidas iguais a 1. Logo pela Proposição 3.2.4, teremos

$$\text{Área}(T) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

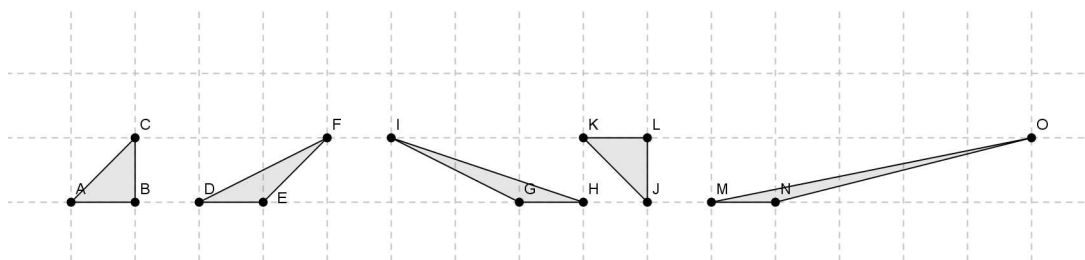


Figura 44: Triângulos elementares.

5.3 Equivalência entre o Teorema de Pick e a Fórmula de Euler para planos

O Teorema de Pick possui aplicações que vão além do simples cálculo de áreas de polígonos. Veremos no próximo capítulo, como a fórmula de Pick pode ser utilizada para se estimar o valor de π e como podemos encontrar uma solução da equação $mp - nq = 1$ utilizando o Teorema de Pick, entre outros resultados.

Nesta seção, vamos apresentar a Fórmula de Euler para planos e sua equivalência com a Fórmula de Pick.

Terminaremos a seção com uma extensão do Teorema de Pick para polígonos com "buracos" e para polígonos com vértices de coordenadas racionais.

Proposição 5.3.1 (Fórmula de Euler para planos). *Considere uma figura plana P simples formada por polígonos simples (chamadas faces de P) em número finito, que se sobrepõem pelas respectivas arestas, de modo que duas faces quaisquer, quando se intersectam, o fazem ou segundo um vértice comum ou segundo uma aresta comum. Se F representa o número de faces, A o número de arestas e V o número de vértices da figura plana P , então*

$$V - A + F = 1. \quad (5.5)$$

Esta demonstração se deve a Cauchy.

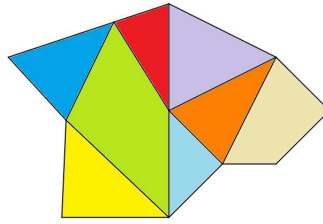


Figura 45: Fórmula de Euler para planos.

Demonstração. Primeiramente vamos triangular P , ou seja, para cada face de P que já não seja um triângulo, traçamos diagonais a ponto de todas as faces de P se tornarem triângulos. Observamos então que estas diagonais não alteram a característica de Euler de P , já que ao acrescentar uma diagonal, A e F aumentam uma unidade cada e assim, a soma $V - A + F$ permanece inalterada.

Observamos também que cada triângulo pode ter 1, 2 ou 0 arestas livres e quando tiramos um dos triângulo com uma aresta livre, o número de faces de P diminui uma unidade, assim como o número de arestas. Mas então a soma

$$V - (A - 1) + (F - 1) = V - A + F.$$

permanece a mesma.

Quando retiramos da figura, um dos triângulos com duas arestas livres, o número de faces e de vértices de P diminuem uma unidade cada e o número de arestas diminui 2 unidades, mas neste caso a característica de Euler será

$$(V - 1) - (A - 2) + (F - 1) = V - A + F,$$

ou seja, permanece inalterada.

Através de uma seqüência apropriada das duas operações anteriores, podemos reduzir P a um único triângulo que tem como característica de Euler,

$$V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1.$$

□

Observação. A fórmula (5.5) é chamada *fórmula de Euler para planos*. A expressão à esquerda da igualdade (5.5) é chamada *característica de Euler* da figura plana P e geralmente é

representada por $\chi(P)$. Assim, numa figura plana poligonal simples P ,

$$\chi(P) = 1.$$

Já, em um poliedro convexo,

$$\chi(P) = 2.$$

Antes de mostrarmos a surpreendente equivalência entre as Fórmulas de Euler e de Pick, mostraremos uma extensão do resultado anterior a polígonos com "buracos".

Corolário 5.3.1. *Seja P uma figura poligonal plana com b "buracos" poligonais. Sejam A , V e F , respectivamente o número de arestas, vértices e faces de P . Então característica de Euler de P é dada por*

$$\chi(P) = F - A + V = 1 - b.$$

Demonstração. Considere a figura plana P' que se obtem "completando" a figura poligonal P ao se preencher os seus buracos com novas faces.

A figura poligonal é simples e portanto sua característica de Euler, pela Proposição 5.3.1 é igual a 1.

O seu número de faces é $F + b$, enquanto que o número de vértices e arestas continuam o mesmo, portanto

$$(F + b) - A + V = 1.$$

E daí, segue-se que

$$\chi(P) = F - A + V = 1 - b.$$

□

Observação. É importante salientar, que na Proposição 5.3.1 e no Corolário anterior, não estamos considerando a região exterior do polígono como uma face.

Se assim o fizermos, a característica de Euler passará a ser a mesma dos poliedros convexos, 2. Ou seja, teremos

$$\chi(P) = F - A + V = 2 - b,$$

onde b representará o número de buracos de P , V será o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces (ou regiões) da figura plana poligonal P , incluindo entre elas, a região exterior ilimitada do plano.

Vamos agora mostrar a equivalência da Fórmula de Euler com o Teorema de Pick para polígonos simples com coordenadas inteiras.

Para isso procederemos enunciando duas Proposições, uma que admite o Teorema de Pick como hipótese e a Fórmula de Euler como tese, e outra que mostra a implicação contrária.

Mas antes vamos provar um resultado preliminar que será útil na demonstração da primeira Proposição:

Lema 5.3.1. *Seja P uma figura poligonal simples com vértices de coordenadas inteiras tal que a característica de Euler $\chi(P)$ seja 1. Então se triangularmos P de modo elementar (ou seja se dividirmos todas as faces de P em triângulos elementares), a característica de Euler da nova figura poligonal P' após a triangulação de P , será a mesma, ou seja,*

$$\chi(P') = F - A + V = 1.$$

Demonstração. Faremos a demonstração deste fato por indução. Considere uma figura poligonal simples P e de coordenadas inteiras, cuja característica de Euler é

$$\chi(P) = F - A + V.$$

Se em uma de suas faces, construirmos um triângulo elementar como na figura 46, a nova figura P_1 terá mais uma face, mais duas arestas e mais um vértice. Assim a característica de Euler será

$$\chi(P_1) = (F + 1) - (A + 2) + V + 1 = F - A + V,$$

ou seja, se mantém.

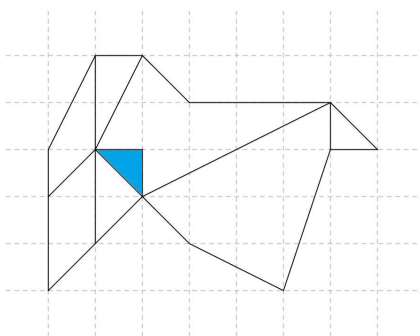


Figura 46: Triângulo elementar (em azul) em uma das faces do polígono.

Agora, suponhamos que na figura P construamos n triângulos elementares como anteriormente, de modo que eles (ou eles unidos com outros polígonos) o componham. Com isso, teremos uma nova figura poligonal P_n com mais n faces além de F , $2n$ arestas além de A e n

novos vértices além de V . Neste caso, sua característica de Euler se manterá. De fato,

$$\chi(P_n) = (F + n) - (A + 2n) + V + n = F - A + V.$$

Agora, criando mais um triângulo elementar, como antes, em uma das faces de P_n , formaremos mais uma face além das $(F + n)$ anteriores, duas novas arestas além das $(A + 2n)$ anteriores e um novo vértice além dos $(F + n)$ anteriores. Portanto,

$$\chi(P_{n+1}) = (F + n + 1) - (A + 2n + 2) + V + n + 1 = F - A + V.$$

Ou seja, a característica de Euler de P_n implica na característica de Euler de P_{n+1} . Logo, por indução sobre n , a característica de Euler sempre se manterá.

□

Proposição 5.3.2 ("Pick" \Rightarrow "Euler para planos"). *Seja P uma figura poligonal simples com vértices de coordenadas inteiras, cuja área é dada por*

$$\text{Área}(P) = i + \frac{b}{2} - 1,$$

onde b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas exteriores de P , e i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras no interior de P .

Então

$$\chi(P) = V - A + F = 1,$$

onde V, A , e F representam o número de vértices, arestas e faces de P , respectivamente.

Demonstração. Vamos primeiramente triangular P em triângulos primitivos ou elementares. Isto é possível porque P possui coordenadas inteiras, bastando para isto, ligar 3 vértices não colineares e dois a dois vizinhos, como fizemos na figura 46. Seja P' esta nova figura poligonal triangulada.

Como o número de faces de P' é o número de triângulos elementares, pela Proposição 5.1.1 e pelo Corolário 5.2.1, a área de P é dada por

$$\text{Área}(P') = \text{Área}(P) = \frac{1}{2}F', \quad (5.6)$$

onde F' representa o número de faces de P' .

Pelo Teorema de Pick, teremos

$$\text{Área}(P) = \frac{1}{2}b + i - 1.$$

Disto, e de (5.6), segue-se que

$$\frac{1}{2}F' = \frac{1}{2}b + i - 1.$$

Logo,

$$F' = b + 2i - 2. \quad (5.7)$$

Além disso, cada face de P' é um triângulo elementar (formado por 3 arestas) e possui arestas tais que cada aresta interior pertence a exatamente 2 faces e cada aresta exterior pertence a apenas uma face. Logo multiplicando o número de faces por 3 nós teremos contado o número total de arestas interiores (n_i) e de arestas exteriores (n_e), mas o número de arestas interiores será contado duas vezes (pois cada aresta interior pertence a exatamente 2 triângulos).

Portanto,

$$3F' = 2n_i + n_e. \quad (5.8)$$

Mas, como b é o número de vértices nas arestas exteriores de P , b também é o número de arestas exteriores de P' , pois P' é formado apenas por faces que são triângulos primitivos.

Além disso, em P' , o número de arestas interiores é igual ao número total de arestas menos o número de arestas exteriores. Portanto por isto, e pela igualdade (5.8), segue-se que

$$3F' = 2(A' - b) + b.$$

E assim,

$$A' = \frac{1}{2}(3F' + b). \quad (5.9)$$

onde A' representa o número de arestas de P' .

Mas o número V' de vértices da figura P' é igual a soma entre o número de vértices de coordenadas inteiras nas arestas exteriores de P e o número de vértices de coordenadas inteiras interiores a P , ou seja

$$V' = b + i. \quad (5.10)$$

Então, pelas igualdades (5.7), (5.9) e (5.10), segue-se que

$$\begin{aligned} \chi(P') &= V' - A' + F' = (b + i) - \frac{1}{2}(3F' + b) + (b + 2i - 2) = \\ &= (b + i) - \frac{1}{2}(3(b + 2i - 2) + b) + (b + 2i - 2) = 1. \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 5.3.1, temos que

$$\chi(P') = \chi(P).$$

Portanto,

$$\chi(P) = V - A + F = 1.$$

□

Proposição 5.3.3 ("Euler" \Rightarrow "Pick"). *Seja P uma figura poligonal simples com vértices de coordenadas inteiras, cuja característica de Euler é igual a 1, ou seja,*

$$\chi(P) = V - A + F = 1,$$

onde V, A , e F representam o número de vértices, arestas e faces de P , respectivamente. Então

$$\text{Área}(P) = i + \frac{b}{2} - 1,$$

onde b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas exteriores de P , e i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras no interior de P .

Demonstração. Como na proposição anterior, vamos triangular a figura poligonal P em triângulos elementares, e seja P' esta nova figura cujas quantidades de faces, arestas e vértices são F', A' e V' respectivamente. A igualdade (5.6) da proposição anterior diz que

$$\text{Área}(P) = \frac{1}{2}F'.$$

Pelo Lema 5.3.1, como $\chi(P) = V - A + F = 1$, segue-se que

$$\chi(P') = V' - A' + F' = 1.$$

Agora, pelas igualdades (5.9), (5.10) e as anteriores, teremos

$$\frac{1}{2}F' = \frac{1}{2}(A' - V' + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(3F' + b) - (b + i) + 1 \right).$$

E assim

$$\frac{F'}{4} = \frac{b}{4} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2}.$$

Disto, e de (5.6), podemos concluir que

$$\text{Área}(P) = \frac{1}{2}F' = \frac{1}{2}b + i - 1.$$

E chegamos ao Teorema de Pick. □

René Descartes, usando o fato que a área de um triângulo elementar é igual a $\frac{1}{2}$, conseguiu chegar a prova simultânea do Teorema de Pick e da Fórmula de Euler. Vejamos.

Proposição 5.3.4. *Se P é uma figura poligonal simples com vértices em pontos de coordenadas inteiras, então:*

i) $\text{Área}(P) = \frac{b}{2} + i - 1;$

ii) $\chi(P) = V - A + F = 1.$

Demonstração. Se triangularmos P em triângulos elementares, teremos um nova figura P' , de modo que sabemos que $\text{Área}(P) = \text{Área}(P')$ e $\chi(P) = \chi(P')$. Portanto, vamos considerar já de antemão, que a figura P esteja triangulada de forma elementar. Assim,

$$\text{Área}(P) = \frac{1}{2}F.$$

Se somarmos todos os ângulos internos de todas as faces de P obtemos πF radianos (já que cada triângulo tem como soma de seus ângulos internos igual a π).

Fazendo a mesma soma, mas adicionando os ângulos vértices à vértice, vemos que a soma dos ângulos de cada um dos vértices interiores é 2π , logo a soma total dos ângulos dos vértices interiores é $2\pi i$ (já que cada vértice do polígono triangulado tem coordenada inteiras).

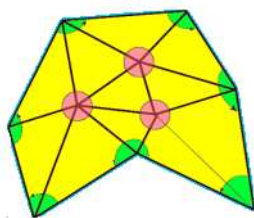


Figura 47: Soma dos ângulos dos vértices interiores.

Os ângulos de vértices de fronteira são os ângulos internos de um polígono de b arestas, logo sua soma é $\pi(b - 2)$.

Portanto,

$$\pi F = 2\pi i + \pi(b - 2),$$

$$F = b + 2i - 2.$$

E assim,

$$\text{Área}(P) = \frac{1}{2}F = \frac{b}{2} + i - 1,$$

o que prova (i).

Agora, pelas igualdades (5.7), (5.9) e pela igualdade (5.10), teremos:

$$F + 2A = 3F + 2b + 2i - 2 = 3F + 2V - 2.$$

E portanto,

$$F + V = A + 1.$$

que prova (ii) □

5.4 O Teorema de Pick para Polígonos com 'Buracos'

É natural agora, tentarmos responder às seguintes perguntas: Será que o Teorema de Pick também pode calcular a área de polígonos com "buracos"? Ou ainda: Será que o Teorema de Pick também vale no espaço \mathbb{R}^3 , ou seja, podemos calcular o volume de algum poliedro com a fórmula de Pick?

Vamos responder a primeira pergunta com um Teorema que estende o Teorema de Pick para polígonos com buracos, e responderemos à segunda, com um contra exemplo que mostra que a fórmula de Pick na pode ser aplicável para o cálculo de volumes.

Teorema 5.4.1 (Extensão do Teorema de Pick). *Seja P uma figura poligonal com vértices de coordenadas inteiras (simples ou não). Então a área de P é dada pela fórmula de Pick generalizada:*

$$\text{Área}(P) = \frac{B}{2} + i - 1 + b,$$

onde i representa o número de pontos de coordenadas inteiras interiores a P , B é o número de vértices de coordenadas inteiras pertencentes às arestas exteriores de P e b é o número de buracos de P .

Demonstração. Supomos mais uma vez que a figura poligonal P seja triangulada em F triângulos elementares, de modo que $\text{Área}(P) = \frac{1}{2}F$.

Pelo Corolário 5.3.1, $X(P) = F - A + V = 1 - b$.

Por esta igualdade e pelas igualdade (5.9) e (5.10), teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F &= \frac{1}{2}(A - V + 1 - b) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(3F + B) - (B + i) + 1 - b \right) = \\ &= 3\frac{F}{4} - \frac{B}{4} - \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{F}{4} = \frac{B}{4} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{b}{2}.$$

E, portanto,

$$\text{Área}(P) = \frac{F}{2} = \frac{B}{2} + i - 1 + b,$$

que é a fórmula de Pick generalizada.

□

Exemplo 13. Calcular a área da região da figura 48.

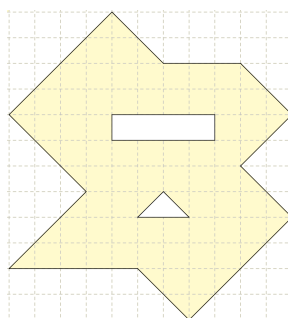


Figura 48: Região poligonal com 2 buracos.

Solução: Pela figura 48, P apresenta dois "buracos" e com vértices de coordenadas inteiras, de modo que $i = 48$, $B = 46$, e $b = 2$. Logo, a área da região P é dada por

$$\text{Área}(P) = \frac{46}{2} + 48 - 1 + 2 = 72 \text{ u.a.}$$

Se tomarmos pontos do \mathbb{R}^3 de coordenadas inteiras, é natural imaginar que possa existir uma fórmula semelhante à fórmula de Pick que calcule o volume de um poliedro com vértices de coordenadas inteiras em função do número de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas e dos pontos de coordenadas inteiras interiores a P .

Vamos verificar que a fórmula (5.1) não é válida no \mathbb{R}^3 , através do seguinte exemplo.

Exemplo 14. Considere o tetraedro T de vértices $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$ e $D(0,1,1)$ no \mathbb{R}^3 . Calcule o volume de T .

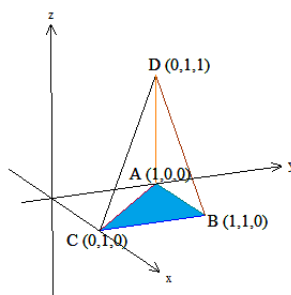


Figura 49: Tetraedro com coordenadas inteiras.

Solução. Analisando a figura 49, observamos que no triângulo ABC , os únicos pontos de coordenadas inteiras pertencentes ao seu interior ou às suas arestas são os seus 3 vértices, pois ABC é um triângulo elementar.

Na aresta \overline{CD} , existem 2 pontos de coordenadas inteiras em seu interior, a saber C e D :

Na aresta \overline{BD} , há apenas dois pontos de coordenadas inteiras pertencentes à mesma, B e D , pois \overline{BD} é a diagonal do quadrado $BCDG$, cuja equação é dada por $(1-t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se $t = 0$ teremos o ponto B , para $t = 1$ teremos o ponto D e para qualquer outro valor de $t \in (0, 1)$, $(1-t, 1, t)$ não será um ponto de coordenadas inteiras.

Já, na aresta \overline{AD} , os únicos pontos de coordenadas inteiras são os vértices A e D , isto fica claro, considerando que o segmento \overline{AD} tem equação $(1-t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se $t = 0$ teremos o ponto A , para $t = 1$ teremos o ponto D e para qualquer outro valor de $t \in (0, 1)$, $(1-t, t, t)$ não será um ponto de coordenadas inteiras, logo não entra na contagem dos pontos com coordenadas inteiras.

Agora, verificando o interior do tetraedro $ABCD$, vemos que aí não há pontos de coordenadas inteiras. Isto também fica claro ao observarmos que o interior do tetraedro $ABCD$ pertence ao interior de um cubo de aresta unitária e cujo interior também não possui pontos de coordenadas inteiras.

Portanto, nas arestas e vértices do tetraedro, temos os 2 pontos pertencentes à aresta \overline{CD} e os pontos A e B que possuem coordenadas inteiras, ou seja, $b = 4$.

Já no interior do tetraedro não há pontos de coordenadas inteiras, logo, $i = 0$.

Se aplicarmos a fórmula (5.1), supondo-a válida para o cálculo do volume do tetraedro T , teremos

$$V(T) = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{4}{2} + 0 - 1 = 1 \text{ u.v.}$$

Mas, pelo cálculo usual do volume de um tetratedro, temos que

$$V(T) = \frac{1}{3}A(b).h = \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6} u.v.,$$

onde $A(b)$ representa a área da base do prisma (ABC), h a altura do mesmo e $u.v$ é unidade de volume.

Portanto, para poliedros tridimensionais não existe uma fórmula simples como a (5.1), que nos dê os volumes dos mesmos, apenas contando-se seus pontos internos e os pontos pertencentes às suas faces. Para generalizar a fórmula (5.1) é necessário utilizar um outro tipo de reticulado. Ver referência KOLODZIEJCZYKA, K. REAYB, J., (2008).

5.5 O Teorema de Pick para Vértices de Coordenadas Racionais

Outro questionamento natural é se com a Fórmula de Pick, podemos calcular a área de uma região poligonal simples cujas coordenadas dos vértices não são todas números inteiros?

Mostraremos que caso estas coordenadas sejam todas números racionais, com o auxílio do Teorema de Pick para coordenadas inteiras e com a Proposição 3.3.2 torna-se possível calcular a área da região.

Inicialmente, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 5.5.1. *Considere um polígono P no plano \mathbb{R}^2 . Se multiplicarmos todas as coordenadas de seus vértices por um mesmo número n , teremos um novo polígono Q cujas medidas dos lados sofrerão um aumento (ou diminuição) por um fator de n em relação às medidas dos lados de P .*

Demonstração. Basta mostrarmos que ao se multiplicar as coordenadas de dois vértices consecutivos quaisquer por um número n , a nova distância entre eles ficará multiplicada também por n . De fato:

Seja $A(x_i, y_i)$ e $B(x_j, y_j)$ dois vértices consecutivos quaisquer de um polígono P . A distância entre A e B é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}.$$

Se multiplicarmos as coordenadas de A e B por n , teremos $\tilde{A}(nx_i, ny_i)$ e $\tilde{B}(nx_j, ny_j)$, logo

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{(nx_j - nx_i)^2 + (ny_j - ny_i)^2} = \sqrt{n^2[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]} = nd(A, B).$$

□

Proposição 5.5.1 (Teorema de Pick para coordenadas racionais). *Seja P um polígono simples de n vértices com coordenadas racionais $A_1 \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{r_1}{s_1} \right), A_2 \left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{r_2}{s_2} \right), \dots, A_n \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{r_n}{s_n} \right)$ no \mathbb{R}^2 . A área de P é dada por*

$$\text{Área}(P) = \frac{\text{Área}(Q)}{n^2},$$

onde n é o mmc($q_1, s_1, q_2, s_2, \dots, q_n, s_n$) e Q é o polígono que se obtém ao multiplicarmos todas as coordenadas de P por n .

Demonstração. Multiplicando-se todas as coordenadas de P por n , construiremos um novo polígono simples Q cujos vértices terão todos eles, coordenadas inteiras.

Mas neste caso, pelo Lema 5.5.1, as medidas dos lados de Q serão iguais as respectivas medidas dos lados correspondentes de P multiplicados por n , ou seja, os polígonos Q e P são semelhantes, cuja razão de semelhança é n .

Logo aplicando o Teorema de Pick a Q , encontraremos $\text{Área}(Q)$, mas pela Proposição 3.3.2:

$$\frac{\text{Área}(Q)}{\text{Área}(P)} = n^2,$$

ou seja,

$$\text{Área}(P) = \frac{\text{Área}(Q)}{n^2}.$$

□

Observações. Na verdade, para podermos utilizar a Fórmula de Pick, basta que tenhamos um reticulado (ou malha), cuja distância entre seus pontos consecutivos seja constante e de modo que o polígono do qual se deseja calcular a área, possua todos os seus vértices em pontos do reticulado.

6

Aplicações do Teorema de Pick

Neste capítulo, mostraremos algumas aplicações interessantes do Teorema de Pick, como por exemplo, encontrar uma solução para um tipo de equação diofantina e calcular uma estimativa do valor de π .

6.1 Uma Aplicação Aritmética

Problema 1. Sejam p e q números inteiros positivos, tais que $\text{mdc}(p, q) = 1$. Encontrar inteiros m e n tais que:

$$mp - nq = 1.$$

Solução. Não conhecemos nenhuma fórmula para calcular os valores de m e n que satisfaçam a igualdade acima. O que podemos fazer é aplicar o algoritmo de Euclides a cada (p, q) para encontrar uma solução (m, n) .

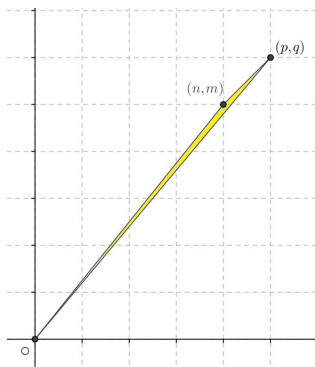


Figura 50: Solução da equação diofantina $mp - nq = 1$.

O cálculo de m e n , no entanto pode ser feito com o auxílio do Teorema de Pick, como

se segue.

Sejam p e q números primos entre si e considere o segmento de reta que une à origem $O(0,0)$ ao ponto $P(p,q)$ no \mathbb{R}^2 .

Como p e q são primos entre si, afirmamos que não existe qualquer outro ponto de coordenadas inteiras neste segmento de reta. De fato, suponhamos que exista tal ponto (a,b) neste segmento diferente de (p,q) , com a e b números inteiros. Como os pontos (x,y) que pertencem ao seguimento \overline{OP} satisfazem as desigualdades:

$$0 \leq x \leq p \text{ e } 0 \leq y \leq q,$$

e como estamos supondo (a,b) diferente de O e P , deveremos ter:

$$a < p \text{ e } b < q.$$

Mas a equação deste segmento de reta é $y = \frac{p}{q}x$. Assim, teremos

$$b = \frac{p}{q}a \Rightarrow bq = pa.$$

Além disso, a e b são inteiros positivos e como $\text{mdc}(p,q) = 1$, segue-se que:

$$p|b \Rightarrow p < b \quad \text{e}$$

$$q|a \Rightarrow q < a.$$

E como $a < p$ e $b < q$, segue-se que $p < q$ e $q < p$. Absurdo! Portanto não existe tal ponto de coordenadas inteiras no segmento citado.

Agora, trasladando-se o segmento paralelamente (para cima) a sua posição inicial até encontrar um primeiro ponto $M(n,m)$ qualquer, de coordenadas inteiras, veremos que os pontos O, P e M formam um triângulo elementar (T), pois não contém em seu interior nem na sua fronteira, pontos de coordenadas inteiras, exceto nos vértices. Sua área então é dada pela fórmula de Pick

$$\text{Área}(T) = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Na verdade, já havíamos provado no Corolário 5.2.1, que a área de um triângulo elementar é igual a $\frac{1}{2}$.

Além disso, pela Proposição 3.2.7, temos que

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2}(pm - qn).$$

Igualando as duas igualdades anteriores para $\text{Área}(T)$, segue-se que

$$mp - nq = 1.$$

6.2 Outra Aplicação

Problema 2. Seja n um número inteiro positivo. A linha que liga dois pontos $A(n, 0)$ e $B(0, n)$ no \mathbb{R}^2 tem uma equação simples, $x + y = n$. Portanto, ela contém todos os pontos da forma $(i, n - i)$, onde i é inteiro, e todos esses pontos pertencem a essa linha. Logo, existem $(n - 1)$ desses pontos entre A e B . Ligando cada um deles com a origem O , construiremos $(n - 1)$ segmentos que dividem o triângulo inicial OAB em n triângulos menores.

Prove que, para n primo, cada um dos n triângulos (com exceção dos dois triângulos que tem \overline{OA} e \overline{OB}) como um dos seus lados) contém exatamente o mesmo número de pontos com coordenadas inteiras em seu interior.

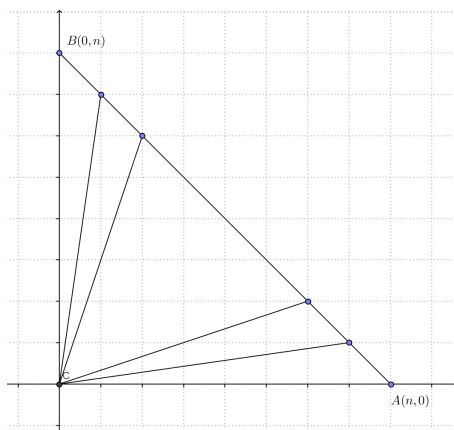


Figura 51: Gráfico do segmento determinado por A e B

Demonstração. Prova: Cada um dos $(n - 1)$ segmentos construídos, tem equação da forma

$$y = \frac{n - i}{i}x. \quad (6.1)$$

Se n é primo, então os números i e $(n - i)$ são primos entre si (pois se não o fosse, o

divisor comum a i e $(n - i)$) também dividiria n , o que seria um absurdo). Isto significa que a fração $\frac{i}{(n-i)}$ é irredutível.

Portanto, cada uma das $(n - 1)$ linhas construídas têm exatamente dois pontos de coordenadas inteiras, os pontos $O(0, 0)$ e $P_i(i, n - i)$. De fato, se supusermos que existe algum outro ponto de coordenadas inteiras diferente de O e P_i pertencente a qualquer uma dessas linhas, pela equação (6.1), este ponto deve ter coordenadas $\left(x, \frac{n-i}{i}x\right)$ e como i e $(n - i)$ são primos entre si, devemos ter $x = ai$ para algum $a \in \mathbb{N}$.

Assim $x > i$, contradizendo o fato de $x \in (i - 1, i)$, o que podemos ver pela figura acima.

Portanto, excluindo os triângulos pequenos OAM e OBN , para $M(n - 1, 1)$ e $N(1, n - 1)$, cada um dos demais possuem exatamente três pontos de coordenadas inteiras em suas arestas, O , $P_i(i, n - i)$ e $(i + 1, n - i - 1)$.

Agora, note que cada um dos pequenos triângulos têm a mesma base $\left(\frac{1}{n}AB\right)$ e a mesma altura. Assim, todos eles têm mesma área A . Como cada um dos triângulos em questão tem exatamente três pontos de coordenadas inteiras sobre suas arestas (em seus vértices), pelo Teorema de Pick, temos

$$A = i + \frac{3}{2} - 1.$$

E, portanto,

$$i = \frac{2}{3}(A + 1),$$

onde i representa a quantidade de pontos interiores a cada um dos triângulos pequenos que possuem apenas três pontos de coordenadas inteiras em suas arestas.

□

6.3 Estimativa para o valor de π .

Vamos agora, mostrar como o Teorema de Pick pode ser útil também para se estimar o valor de π .

Inicialmente sabemos que π está relacionado com a área do círculo (A_c) pela fórmula:

$$\pi = \frac{A_c}{r^2}. \quad (6.2)$$

Podemos estimar o valor de π utilizando o Teorema de Pick, através de polígonos que melhores se ajustem e aproximem o círculo dado.

Considere a figura 52 que representa círculo de raio 1.

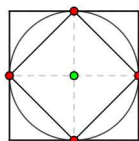


Figura 52: Quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio 1.

Este círculo está entre os quadrados inscritos e circunscritos a ele (ver figura 52). Vamos aproximar o valor de π pelas áreas dos dois polígonos. Para a aproximação pela área do polígono interno Q_1 , temos quatro pontos de coordenadas inteiras que pertencem às arestas de Q_1 , ou seja, $b = 4$ e um ponto interno a Q_1 , ou seja $i = 1$.

Logo,

$$\text{Área}(Q_1) = \frac{4}{2} + 1 - 1 = 2 \text{ u.a.}$$

Pela fórmula (6.2),

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{\text{Área}(Q_1)}{r^2} = \frac{2}{1^2} = 2.$$

que é uma aproximação muito ruim.

Agora considere o quadrado Q_2 circunscrito ao círculo de raio 1.

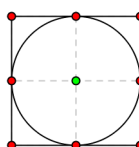


Figura 53: Quadrado circunscrito ao círculo de raio 1.

Em Q_2 temos oito pontos que pertencem às arestas de Q_2 , ou seja, $b = 8$ e um ponto interior a Q_2 , ou seja $i = 1$, portanto

$$\text{Área}(Q_2) = \frac{8}{2} + 1 - 1 = 4 \text{ u.a.}$$

Pela fórmula (6.2):

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{\text{Área}(Q_2)}{r^2} = \frac{4}{1^2} = 4.$$

que também é uma aproximação grosseira para π .

Mas podemos tomar a média aritmética das duas aproximações encontradas:

$$\pi \cong \frac{(2+4)}{2} \cong 3,$$

que é uma aproximação ainda ruim, mas bem melhor que as anteriores.

Agora vamos considerar um círculo de raio 3 e efetuar o mesmo procedimento. Neste caso, o octógono (P_1) é o polígono que melhor aproxima o círculo (Ver figura 54).

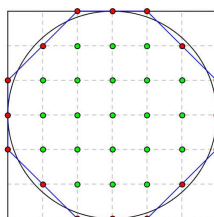


Figura 54: Octógono aproximando o círculo de raio 3.

Assim, $b = 16$ e $i = 21$. Logo,

$$\text{Área}(P_1) = \frac{16}{2} + 21 - 1 = 28 \text{ u.a.}$$

Pela fórmula (6.2) temos:

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{\text{Área}(P_1)}{r^2} = \frac{28}{3^2} = 3,111 \dots$$

que é uma aproximação bem melhor que as anteriores. Mas podemos aproximar ainda mais.

Considere agora um círculo de raio 10.

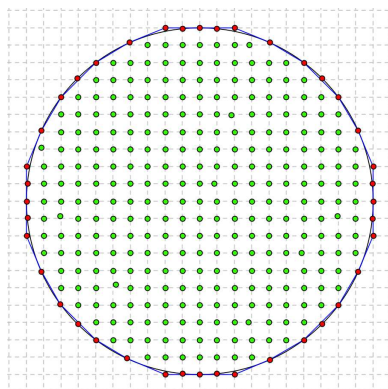


Figura 55: Polígono que aproxima o círculo de raio 10.

O polígono R que melhor aproxima o círculo é um polígono com 40 pontos de coordenadas inteiras em suas arestas e 293 pontos de coordenadas inteiras internos a R . Assim,

$$\text{Área}(R) = \frac{40}{2} + 293 - 1 = 312 \text{ u.a.}$$

Agora, pela fórmula (6.2):

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \simeq \frac{\text{Área}(R)}{r^2} = \frac{312}{10^2} = 3,12.$$

que já é uma aproximação razoável.

Mas este procedimento pode ser feito sucessivamente, aproximando manualmente, um círculo qualquer por polígonos que apresentem uma quantidade de pontos com coordenadas inteiras (em suas arestas e em seu interior) cada vez maior, de modo que esta quantidade de pontos tenda ao infinito, o que fará π se aproximar cada vez mais de seu valor real.

Proposta Educacional

Objetivos:

- Fazer o aluno identificar representações de diferentes polígonos e suas respectivas características, no ambiente escolar e no espaço como um todo;
- Tratar dos conceitos de perímetro e área de diferentes polígonos, de modo que o aluno mostre total domínio no cálculo da área de diferentes polígonos através das fórmulas usuais e da Fórmula de Pick;
- Mostrar a aplicabilidade da Fórmula de Pick no cálculo de áreas de regiões mais irregulares, como mapas de cidades, utilizando-se o site Google Maps e o software Geogebra.

Público alvo: 9º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos: Os alunos deverão conhecer as definições e as principais propriedades dos polígonos mais conhecidos, como triângulos, quadrados e retângulos. Eles também deverão ter noções de escala e de aproximação numérica.

Materiais e tecnologias: Site Google Maps, software Geogebra, papel milimetrado, papel ofício, giz, quadro negro, régua, fita métrica, lápis e/ou caneta. Caso falte alguns dos recursos computacionais anteriores, poderemos utilizar também papel seda.

Recomendações metodológicas: As atividades deverão ser abordadas através de aulas expositivas e dialogadas, abrindo espaço para debates de modo que os alunos possam propor hipóteses e fazer observações com relação ao assunto tratado. Para isso, os conhecimentos prévios dos alunos deverão ser valorizados e deve-se dar total liberdade ao aluno para que possa construir o

significado do conteúdo abordado.

Dificuldades previstas: É possível que na escola onde o professor aplicará a referida proposta, não haja conexão com internet, neste caso pode-se colher diferentes mapas previamente e levar aos computadores a serem utilizados, para depois podermos utilizar o software Geogebra. Para isso, devemos informar ao aluno, a escala da figura, para que este possa calcular a área do mapa da região pretendida, utilizando-se a relação entre as áreas de duas regiões semelhantes.

Caso, a escola não tenha o software Geogebra instalado em seus computadores, pode-se utilizar alternativamente o software Inkscape ou então o Paint, que pode ser encontrado em qualquer computador com sistema operacional Windows.

Caso, a escola não tenha laboratório de informática e computadores, o professor pode colher os mapas previamente, imprimi-los, recortá-los e levá-los à sala de aula juntamente com o papel seda e o papel milimetrado, para que os alunos possam aplicar a fórmula de Pick aos desenhos dos mapas feitos no papel transparente e aproximados por um polígono desenhado no papel milimetrado, ao qual se possa aplicar a fórmula de Pick. Evidentemente, o professor deve informar aos alunos, a escala do mapa das figuras a que se deve aplicar a fórmula de Pick.

Descrição geral: Para realizarmos a proposta deste trabalho, vamos dividi-la em passos que deverão ser realizadas ao longo de oito horas aula. Além disso, a turma será dividida em grupos que poderão ter entre 5 ou 6 alunos. Cada grupo registrará suas observações e atividades em folhas de papel ofício.

Inicialmente, o professor deve informar aos alunos que a grande motivação para a realização das próximas aulas será calcular áreas de regiões como cidades, estados, países e principalmente da escola em questão.

1º passo: Neste primeiro momento, o professor deve tratar da definição de polígono, deve dar exemplos dos polígonos mais conhecidos e suas principais características. Deve definir perímetro de um polígono como a soma dos lados do mesmo, ou alternativamente como o comprimento da linha que contorna o polígono. Deve-se nesse momento, pedir para os alunos calcularem o perímetro de diferentes polígonos, como quadrados, retângulos, triângulos, etc. Por fim, o professor deve propor aos alunos que estes calculem o perímetro de polígonos que possam estar presentes nos diferentes objetos de dentro da sala de aula, como o perímetro da capa do caderno, o perímetro do quadro, o perímetro da sala de aula, etc.

Ao fim da aula, é importante que o professor inicie um debate com a exposição das observações e possíveis dúvidas dos alunos de modo que haja a comparação dos cálculos realizados por cada grupo.

2º passo: O professor deve apresentar o conceito de área de uma região como um número que expresse a quantidade de superfície presente dentro do perímetro, ou de uma maneira um tanto informal, definir a área de um polígono como a quantidade de "espaço" delimitado pelo contorno ou perímetro da figura.

O professor deve explicar também sobre o surgimento do conceito de área de polígono, citando inclusive a necessidade dos agrimensores medirem áreas de regiões presentes no vale do Rio Nilo, que as inundava com certa regularidade. A seguir, o professor deve mostrar como se calcular a área de diferentes polígonos, dando especial atenção ao quadrado, retângulo e triângulo.

É interessante que neste momento, o professor inicie um debate com os seus alunos sobre a real importância do cálculo de área de regiões e proponha uma atividade na qual os alunos devam calcular as áreas de vários polígonos.

A seguir, o professor pode dar um breve passeio pela escola com os alunos, sugerindo que cada grupo calcule a área de diferentes regiões a seu gosto, como a área do pátio, a área do banheiro, a área da cozinha, etc, utilizando-se uma fita métrica.

Após este momento, o professor deve discutir as informações colhidas pelos grupos e confrontar o cálculo de regiões iguais de diferentes grupos durante um debate realizado ao final da aula.

3º passo: Apresentação da Fórmula de Pick e das hipóteses a serem satisfeitas. Mostrar aos alunos que a Fórmula de Pick é uma maneira alternativa para o cálculo de diferentes polígonos, especialmente de polígonos com formas mais irregulares. Depois disto, deve-se pedir aos alunos que eles calculem as áreas de triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, losangos, desenhados em papel milimetrado, como na Figura 56, utilizando Pick.

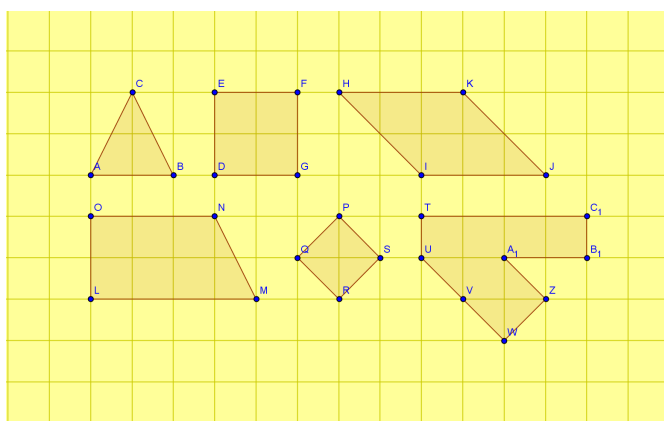


Figura 56: Polígonos usuais em papel milimetrado.

A seguir, propomos aos alunos calcular a área dos polígonos da Figura 57, utilizando Pick, desenhados no papel milimetrado a seguir.

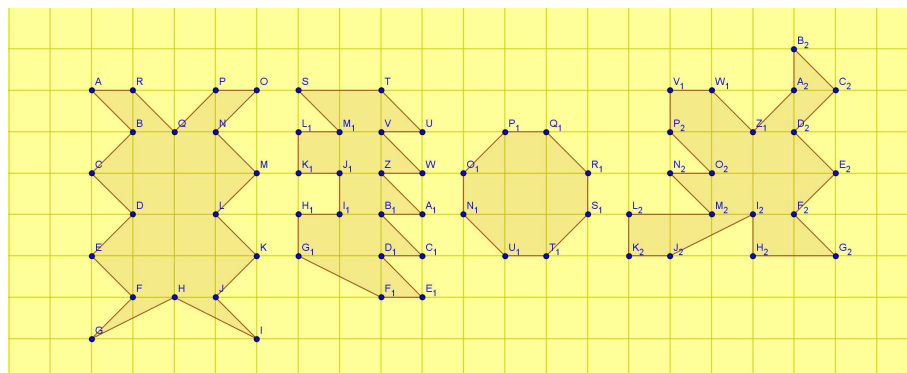


Figura 57: Polígonos irregulares em papel milimetrado.

Ao final da aula, é importante que o professor inicie um novo debate com exposição de dúvidas e observações pelos alunos, além da comparação dos cálculos realizados por cada grupo.

4º passo: Em sala de aula, fazer uma revisão sobre escalas. Explicar aos alunos que uma figura pode ser reduzida ou ampliada, bastando para isso, manter os ângulos correspondentes entre as duas figuras, iguais e de modo que a razão entre os comprimentos de quaisquer dois lados correspondentes seja sempre a mesma, chamando-se estas duas figuras de *figuras semelhantes*.

Além disso, o professor deve apresentar aos alunos a relação entre as áreas de duas figuras semelhantes (o quadrado da razão de semelhança), e fazer exemplos de polígonos semelhantes e da relação entre suas áreas.

No laboratório de informática, cada grupo deverá ficar em um computador para a realização das atividades. Os primeiros passos abaixo na operação do Geogebra podem ser feitos pelo próprio professor, mas seria importante que os alunos pudessem fazê-los, mesmo com a ajuda do professor:

- i Cada grupo deverá acessar o Google Maps e buscar o mapa de Alagoas, ajustando o zoom (no canto inferior esquerdo) para 20 km sobre 20 mi (milhas), como na Figura 58. Os 20 km é o valor que corresponde ao segmento de tamanho de 1,5 cm. Portanto a escala é a razão entre 20 km e 1,5 cm, ou seja, $13,333\dots$ km/cm. O valor aproximado de 13,33 é a razão de semelhança que utilizaremos para o cálculo aproximado da área real do Estado de Alagoas.
- ii Depois disto, o aluno responsável pela operação do computador deve pressionar as teclas *Alt + Prt sc* para copiar a imagem do mapa no google, abrir qualquer programa de edição

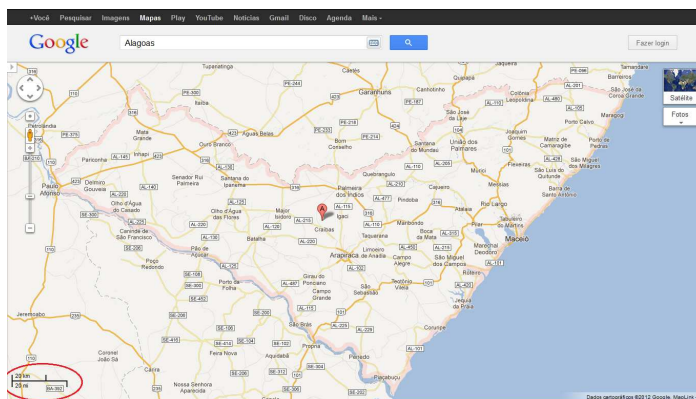


Figura 58: Alagoas no Google Maps.

de imagens (por exemplo, o Paint), colar a imagem copiada do Google Maps e salvar o arquivo numa pasta do computador.

- iii Agora o aluno deve abrir o software Geogebra, clicar no Menu *Opções*, depois *Configurações*, *Janela de Visualização* e clicar na aba *Malha*. Depois marcar *Exibir Malha* e deve-se ajustar a distância entre os pontos da malha, de modo que a distância fique a mais próxima possível de 1 cm. Essa medição pode ser feita com o auxílio de uma régua. Neste trabalho a distância que melhor se aproximou a 1 cm foi 0.9, como podemos ver na Figura 59.

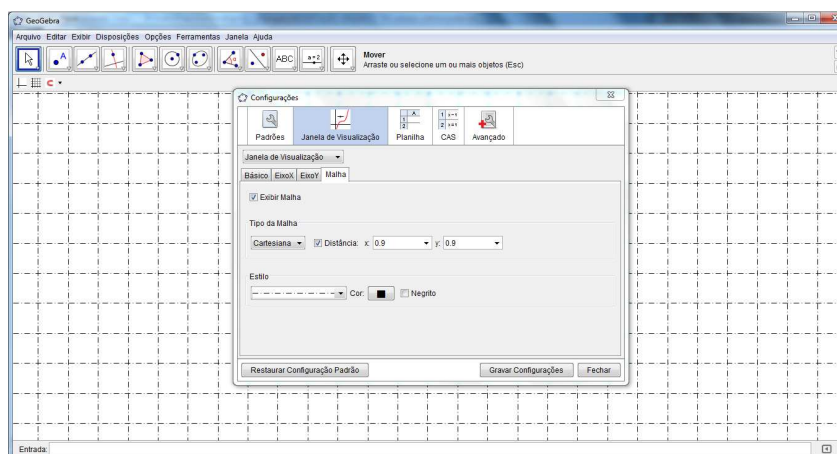


Figura 59: Ajustando a malha no Geogebra.

Depois de ajustada a malha, abaixo da barra de Menu, o aluno deve clicar no 10º botão e 4ª opção, clicar na tela e escolher a pasta do computador onde a imagem está salva, depois clicar com o botão direito do mouse em *Propriedades*, depois na guia *Básico*, *Imagem de Fundo* e *Fechar* (Ver figura 60).

- iv Agora o aluno deve aproximar o mapa de Alagoas por um polígono que tenha vértices com coordenadas inteiras (para respeitar as hipóteses do Teorema de Pick). Ele traçará seg-

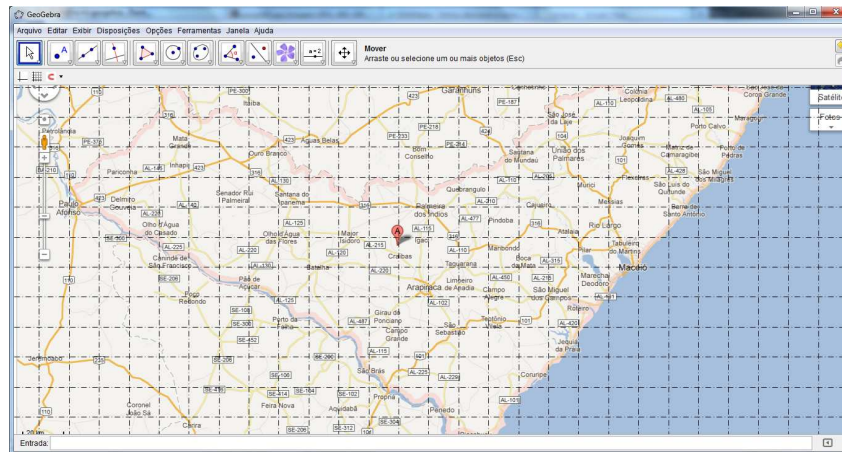


Figura 60: Imagem do Google no Geogebra.

mentos que unam dois vértices de coordenadas inteiras até que a união de todos estes segmentos formem um polígono que aproxime da melhor maneira possível, a região do mapa. Para isso, o aluno clicará no 3º botão abaixo da barra de Menu e depois em *Segmento definido por dois pontos*. Para fazer o papel da barra de rolagem (subir ou descer a tela do geogebra) deve-se usar as setas do teclado. A área do polígono é uma aproximação para a área do mapa. (Ver Figura 61).

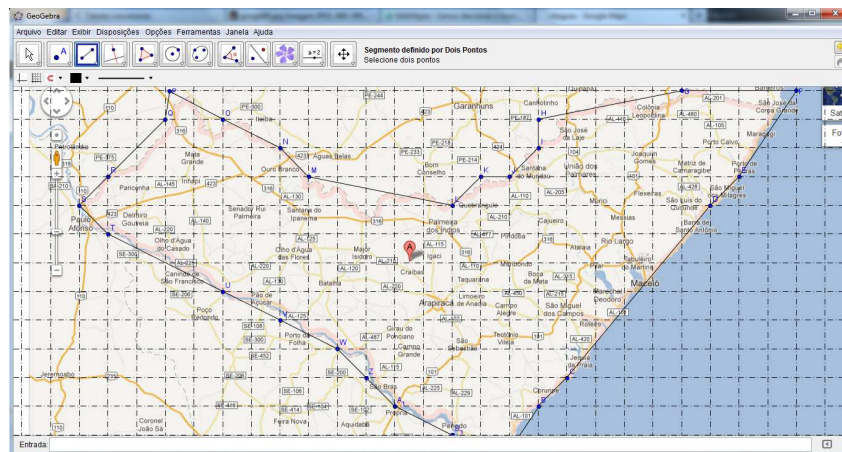


Figura 61: O polígono que aproxima o mapa de Alagoas.

- v Sabendo que o mapa é semelhante à superfície real do Estado, o grupo deve calcular a área aproximada de Alagoas utilizando a relação entre as áreas de duas figuras semelhantes que neste caso é o quadrado de 13,33 (razão de semelhança) e considerando que o polígono construído é uma aproximação para a figura do mapa.

Utilizando a Fórmula de Pick, podemos calcular a área do polígono (P) que construímos

anteriormente. Assim, como $b = 31$, $i = 134$, teremos

$$\text{Área}(P) = \frac{31}{2} + 134 - 1 = 148,5 \text{ cm}^2.$$

Se chamarmos a área real do mapa de Alagoas de A , e sabendo-se que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança (13,33 km/cm), segue-se que

$$\frac{A}{148,5} = 13,33^2 \Rightarrow A = 148,5 \times 177,6889 = 26.386,8 \text{ km}^2,$$

que é uma aproximação interessante se considerarmos que o método utilizado de aproximar o mapa por segmentos de retas foi um processo quase manual. A área real do mapa de Alagoas é de $27.778,506 \text{ km}^2$ (Fonte:<http://www.ibge.gov.br>).

Podemos também sugerir aos grupos, que eles calculem o mapa da cidade de Maceió, de maneira semelhante a que fizemos no mapa do Estado de Alagoas.

Utilizando-se o site do Google Maps com o zoom de 5 km sobre 5 mi (milhas), e polygonalizando a região do mapa no software Geogebra, utilizando uma malha com distância entre os pontos de $0,5 \text{ cm}$ (O ajuste da malha do Geogebra deve ser de 0.4 por 0.4), encontraremos a área da região poligonal que podemos ver na Figura 62 igual a 187 u.a (unidade de área, que no nosso caso é $0,5 \text{ cm}^2$).

Pela escala do mapa, como $0,5 \text{ cm}$ equivale a $1,676354 \text{ km}$ e pela relação das áreas de duas figuras semelhantes, teremos:

$$\frac{A}{187} = 1,676354^2 \Rightarrow A = 525,47 \text{ km}^2.$$

Onde A representa a aproximação encontrada para a área real da cidade de Maceió.

A área real da cidade de Maceió é 503 km^2 (Fonte:<http://www.ibge.gov.br>).

Ao fim da atividade, o professor pode iniciar um breve debate sobre a importância da Fórmula de Pick e como ela poderia ser utilizada por outros profissionais.

Neste momento, se o professor tiver acesso a planta baixa da escola, ele pode desafiar os grupos a tentarem calcular a área da superfície da escola utilizando a planta baixa da mesma.

Para isso, o professor deve informar aos alunos a escala do desenho, e sugerir que eles utilizem a fórmula de Pick e a razão entre as áreas de figuras semelhantes.

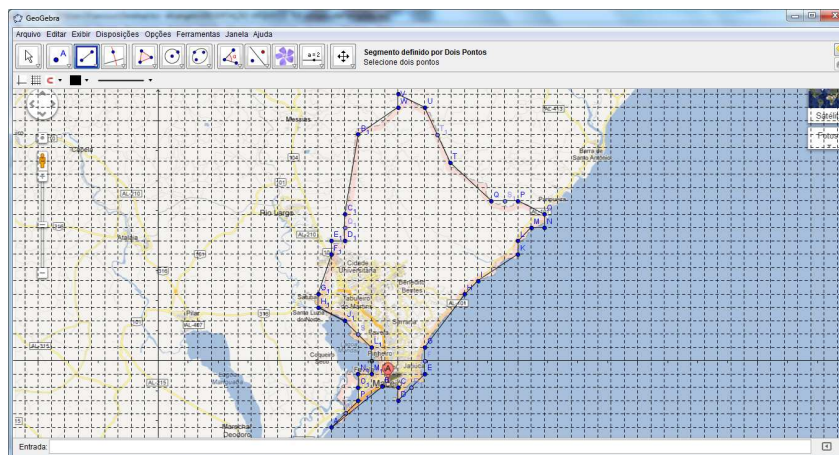


Figura 62: O polígono que aproxima o mapa de Maceió.

Ao final da aula, o professor deve iniciar um debate para o confrontamento dos cálculos realizados por cada grupo e para a exposição das observações e dúvidas que ainda possam existir.

Avaliação: A avaliação pode ser feita durante a realização da atividade e especialmente no ápice da proposta que é o cálculo da área aproximada do mapa de Alagoas.

Além disso, o professor pode também recolher as folhas de ofício e avaliar as observações de cada grupo ou ainda, submeter a classe a um teste escrito no qual se pesa o cálculo dos perímetros e das áreas de diversos polígonos pela fórmulas usuais e pela fórmula de Pick.

Possíveis continuações ou desdobramentos: Esta atividade poderia se tornar um ponto de ligação para o tratamento de vários outros conceitos do currículo de Matemática que necessitasse do conceito de áreas de polígonos, mas não apenas de Geometria, além de ser uma ótima oportunidade para a revisão de conceitos de Aritmética e propriedades dos números (ao tratarmos de aproximações numéricas no cálculo de figuras semelhantes e escalas) e de Álgebra (com as representações da quantidade de pontos nas arestas e no interior do polígono para a utilização da Fórmula de Pick, fórmula para o cálculo da área dos polígonos mais conhecidos), etc. O professor pode escolher a região da qual os grupos deverão calcular a área, podendo ser cidades, estados ou países. Também pode-se sugerir que cada grupo calcule a área de uma região distinta das demais regiões escolhidos pelos outros grupos. Ao final da aula, o professor pode calcular, juntamente com os grupos, qual grupo apresentou menor erro no cálculo aproximado da área da sua região. Esta proposta também pode ser realizada no Ensino médio ou no Ensino Superior.

Observações: O professor pode ficar responsável pelos itens 1, 2 e 3 do 4º passo, se achar que os alunos não apresentam a desenvoltura necessária com o computador, para o sucesso

da atividade. Os grupos podem ficar responsáveis apenas pela poligonalização do mapa no Geogebra e depois pelo cálculo da área do polígono e da área do mapa real. Pode-se também aumentar a precisão do processo, diminuindo-se o tamanho da unidade de medida da malha utilizada. Isto torna o processo de poligonalização do mapa ainda mais preciso, pelo fato de os quadrados da malha se tornarem menores. Escolhida a unidade da malha a ser adotada (u.m.), a escala deve ser dada em km por u.m, para que a área aproximada da região do mapa seja calculada corretamente em km^2 .

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, D., *Teorema de Pick*. Disponível em <<http://www.dma.uem.br/kit/pick/>>. Acesso em 10 dez. 2012.
- [2] BOYER, C. B., *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- [3] BRASIL., *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental., Brasília: 1997, p. 81-82.
- [4] CARVALHO, S. P., Colóquio de Matemática da Região Sudeste, I, 2011. Rio de Janeiro. *A Área e o Perímetro do Círculo*. Minas Gerais: UFMG, Abr. 2011. 58 p.
- [5] D'AMBROSIO, U., *Etnomatemática - Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [6] DE OLIVEIRA, J. A., *Teorema de Pitágoras*. 2008. 46 p. Monografia (Curso de Especialização em Matemática). Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2008.
- [7] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. Campinas: UNICAMP, 1997.
- [8] FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel, 1973.
- [9] GUIDORIZZI, H. L., *Um Curso de Cálculo*. 5 ed. São Paulo: USP, 2008. Vol. 1.
- [10] KOLODZIEJCZYKA, K. REAYB, J. Polynomials and spatial Pick-type theorems. *Expositiones Mathematicae*. V. 26, n.1, p. 41-53, 2008.
- [11] LIMA, E. L., *Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.
- [12] LORENZATO, S., *Para aprender Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2008. 2 edição.

- [13] O'LOUGHLIN, D., The Scarcity of Regular Polygons on the Integer Lattice. *Mathematics Magazine*. V. 75, n. 1, pp. 47-51, 2002. ISSN: 0025-570X
- [14] PAVANELLO, R. M., O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. *Zetetiké*. n.1, p. 07-17. Unicamp. mar. 1993.
- [15] PAVANELLO, R. M.; FRANCO, V. S., Encontro Nacional de Educação Matemática, IX. 2007. Belo Horizonte. *A Construção do Conhecimento Geométrico no Ensino Fundamental: Análise de um Episódio de Ensino*. Belo Horizonte: SBEM. 15 p.
- [16] PEREIRA, A. L.; Melo, S. T., Contando Áreas: O Teorema de Pick. *Revista do Professor de Matemática*. n.78, Ano 30, 2º quadrimestre, p. 36-42, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [17] ROQUE, T.; PITOMBEIRA J. B, *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM. 2012. Coleção PROFMAT.
- [18] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM. 2012. Coleção PROFMAT.
- [19] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM. 2011. Coleção PROFMAT.
- [20] TAVARES, J. N., *Teorema de Pick*. Disponível em < <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/>>. Acesso em 05 dez. 2012.
- [21] TONIOLO, C. T. B., *O Teorema de Pick e o Geogebra: Possibilidades para uma aprendizagem com significado de conceitos de geometria plana*. 2010. 49 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) Área de ciências tecnológicas do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010.

Teoria das Integrais

A.1 Partição de um Intervalo

Vamos revisar o essencial da Teoria das Integrais e como uma integral pode ser associada a área sob o gráfico de uma função.

Calcularemos em seguida, a área sob o gráfico de algumas funções bem conhecidas e depois veremos como a função logarítmica pode ser definida como a integral de uma função hiperbólica.

Para isto, consideraremos que são conhecidas as definições de limite, continuidade e de derivada de uma função, assim como os resultados referentes a estes conceitos. Vamos também enunciar o Teorema do Valor Médio, sem nos preocuparmos com sua demonstração, que pode ser encontrada em qualquer livro de cálculo ou Análise da Reta.

Teorema A.1.1 (Valor Médio). *Dada uma função f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , existe (pelo menos) um c em (a, b) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Onde $f'(c)$ representa a derivada de f em c .

Uma explicação geométrica deste teorema, é que dada uma função f que satisfaça as hipóteses do teorema, e chamando de s a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$ com $a < c < b$ tal que a reta tangente (T) ao gráfico de f , neste ponto, é paralela à reta s . De fato, como $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é o coeficiente angular de s e $f'(c)$ o de T . Pelo Teorema do Valor Médio:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

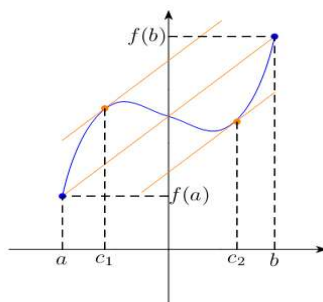


Figura 63: Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio.

Definição 17. Seja f uma função definida num intervalo I . Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I , tal que para todo x em I , tenhamos

$$F'(x) = f(x),$$

onde $F'(x)$ representa a derivada de F .

Proposição A.1.1. Sejam F e G duas primitivas da função f no intervalo I , então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = c$, para todo $x \in I$

Demonstração. Seja $H(x) = F(x) - G(x)$, então para todo $x \in I$, teremos

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, segue-se que para todo $x \in I$, $H(x) = c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$F(x) - G(x) = c.$$

□

Definição 18. Dado o intervalo $[a, b]$, definimos o conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, como uma partição de $[a, b]$.

Assim, uma partição P de $[a, b]$ divide $[a, b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Chamaremos a amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de Δx_i , ou seja:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

Figura 64: Partição do intervalo $[a, b]$.

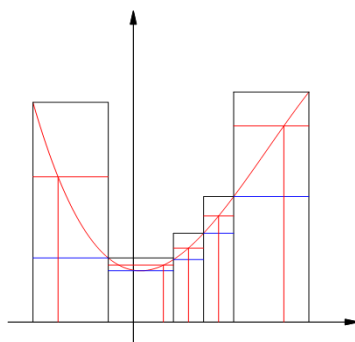
Esses números podem não ser todos iguais entre si. Representaremos o maior dos Δx_i por $\max \Delta x_i$.

Sempre que nos referirmos a uma partição P de um intervalo $[a, b]$, ela será representada por

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

A.2 Cálculo de Áreas

Considere uma função f contínua e positiva em $[a, b]$. Vamos tentar definir a área da região R limitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Figura 65: Estimando a área da região R .

Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam \bar{c}_i e $\bar{\bar{c}}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\bar{c}_i)$ seja o valor mínimo e $f(\bar{\bar{c}}_i)$ o valor máximo da função f em $[a, b]$.

Podemos estimar por falta, a área da região R sob o gráfico (em vermelho) da função $f(x)$ pela soma das áreas dos retângulos (com altura $f(\bar{c}_i)$ e lado superior em azul) que estão sob o gráfico da função f em $[a, b]$ e podemos estimar por excesso, a área da mesma região pela soma das áreas dos retângulos (com altura $f(\bar{\bar{c}}_i)$ e lado superior em preto) que estão sobre o gráfico da função f em $[a, b]$. Ou seja,

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \leq \text{Área}(R) \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{\bar{c}}_i) \Delta x_i.$$

Exemplo 15. Calcular a área da região sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

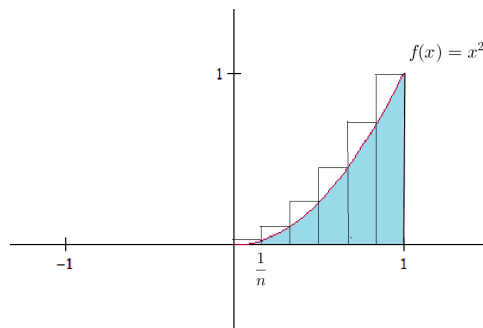


Figura 66: Área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

Solução. Seja R_n , a soma das áreas dos n retângulos de largura $1/n$ e cujas alturas são os valores da função $f(x) = x^2$, nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \dots, n/n$, ou seja, as alturas são respectivamente $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \dots, (n/n)^2$.

Assim,

$$R_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^2.$$

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Agora, pela fórmula da soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Teremos:

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Fazendo o número de intervalos (n) tender ao infinito, segue-se:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{2n+1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a área da região sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$ é igual a $\frac{1}{3}$.

Observação. É possível mostrar que se aproximarmos a área sob o gráfico, utilizando a soma das áreas dos retângulos inferiores (abaixo do gráfico) e tomando o limite (n) tendendo ao infinito, o valor encontrado também será $\frac{1}{3}$.

A.3 Soma de Riemann

Dada uma função f definida em um intervalo $[a, b]$ e $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição deste intervalo. Para cada i ($i = 1, 2, \dots, n$) considere c_i um número escolhido arbitrariamente em $[x_{i-1}, x_i]$.

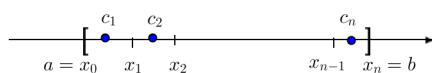


Figura 67: Partição do intervalo $[a, b]$.

Definição 19. Chamaremos o número

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

de soma de Riemann de f , relativa à partição P e aos números c_i .

Observamos então que:

- Se $f(c_i) > 0$, cada $f(c_i)\Delta x_i$ é a área do retângulo R_i determinado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$ e $y = f(c_i)$;

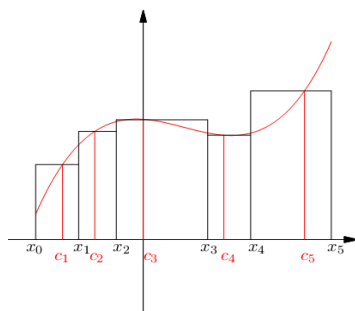


Figura 68: Soma de Riemann de uma função com imagem positiva.

- Se $f(c_i) < 0$, a área do retângulo R_i será $-f(c_i)\Delta x_i$.

Então geometricamente, a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

pode ser interpretada como a diferença entre as somas das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x , como podemos ver na figura 69.

Seja F uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ uma partição deste intervalo. O acréscimo $F(b) - F(a)$ que F sofre quando x varia de a para b é igual à soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Ou seja:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_4) - F(x_0) = \\ &= [F(x_4) - F(x_3)] + [F(x_3) - F(x_2)] + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^4 [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

De um modo geral,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})],$$

para $P : a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$.

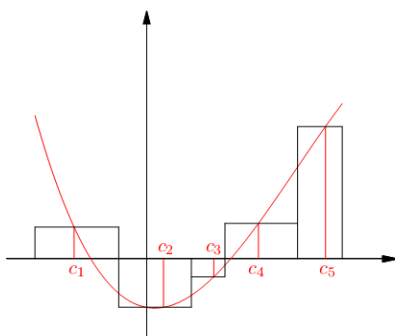


Figura 69: Soma de Riemann: diferença das somas das áreas dos retângulos que estão acima e abaixo do eixo x .

Exemplo 16. Sejam F e f duas funções definidas em $[a, b]$ e tais que $F' = f$ em $[a, b]$. Assim, F é uma primitiva de f em $[a, b]$. Considere $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição

de $[a, b]$. Prove que escolhendo c_i em $[x_{i-1}, x_i]$ de maneira conveniente, tem-se:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Demonstração. Pelo que acabamos de ver,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe c_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

E como $F' = f$ em $[a, b]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (\text{A.1})$$

□

A.4 Definição da Integral de Riemann

Definição 20. Dada f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ tende a L quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, ou seja

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ que só depende de ε e não da escolha dos c_i , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para toda partição P de $[a, b]$ com $\max \Delta x_i < \delta$.

Onde $\max \Delta x_i$ indica o maior número do conjunto formado pelos Δx_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Observe que ao considerarmos que $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ teremos que todos os Δx_i tendem a zero.

O número L quando existe é único (pela unicidade do limite) e chama-se *integral* (de Riemann) de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x) dx$. Ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Se $\int_a^b f(x) dx$ existe, diremos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$. Comumente, refere-se a $\int_a^b f(x) dx$ como a integral definida de f em $[a, b]$.

Vamos enunciar agora algumas definições e teoremas, dos quais omitiremos as demonstrações. Estas ferramentas serão úteis para o cálculo das integrais definidas das várias funções que apresentaremos a seguir.

Definição 21. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$, então:*

i) $\int_a^a f(x) dx = 0;$

ii) $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$

Teorema A.4.1. *Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então:*

i) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

ii) kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx;$$

iii) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0;$$

iv) Se $c \in (a, b)$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Teorema A.4.2 (Fundamental do Cálculo). *Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$. Então:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Pelo que foi demonstrado no exemplo 14, e supondo que f seja contínua em $[a, b]$, tomando os Δx_i suficientemente pequenos, qualquer escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, deve fazer os $f(c_i)$ diferirem entre si por um número infinitamente pequeno. Portanto, $F(b) - F(a)$ pode ser avaliado satisfatoriamente, por $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$, ou seja:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

A aproximação será ainda melhor tanto quanto forem menores os valores dos Δx_i . Na verdade, se f for uma função contínua, teremos:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Exemplo 17. Calcular $\int_1^2 x^2 dx$.

Solução. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ e f é contínua em $[1, 2]$, logo

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

ou seja,

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Exemplo 18. Calcular $\int_{-1}^3 4 dx$.

Solução.

$$\int_{-1}^3 4 dx = [4x]_{-1}^3 = 12 - 4(-1) = 16,$$

ou seja,

$$\int_{-1}^3 4 dx = 16.$$

Exemplo 19. Calcular $\int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx$.

Solução.

$$\int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x \right] \Big|_0^2 = \frac{16}{4} + \frac{12}{2} - 2 = 8.$$

Portanto,

$$\int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx = 8.$$

Exemplo 20. Calcular $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$.

Solução.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right] \Big|_1^2 = - \left[\frac{1}{x} \right] \Big|_1^2 = - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right] = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

Definição 22. A área da região R limitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$, onde f é uma função contínua e positiva em $[a, b]$, é dada por:

$$\text{Área}(R) = \int_a^b f(x) dx.$$

Na verdade, isto vale para toda função f integrável em $[a, b]$ e com $f(x) \geq 0$ neste intervalo.

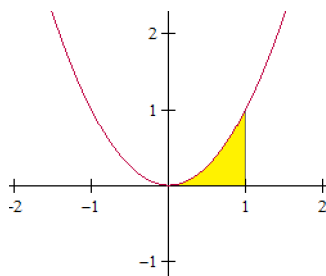


Figura 70: Área da região sob o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Exemplo 21. Calcular a área da região R do plano limitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e pelo gráfico da função $f(x) = x^2$, na figura 70.

Solução.

$$\text{Área}(R) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

O que confirma o valor encontrado no exemplo 15.

Exemplo 22. Calcular a área do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}$.

Solução. R é a região do plano limitada pelas retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f = \frac{1}{x^2}$.

Logo

$$\text{Área}(R) = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

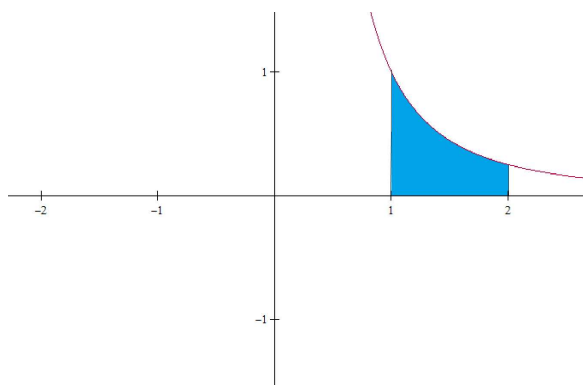


Figura 71: Área da região sob o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Podemos estender o conceito de área para funções $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$ e com $\int_a^b f(x) dx \leq 0$:

Definição 23. A área da região R limitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$, onde f é uma função contínua e tal que $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, é dada por:

$$\text{Área}(R) = - \int_a^b f(x) dx.$$

Também podemos encontrar a área sob o gráfico de funções contínuas que apresentem imagens positivas e negativas.

Considere uma função f contínua e tal que $f(x) \geq 0$ em $[a, c]$, $f(x) \leq 0$ em $[c, d]$ e $f(x) \geq 0$ em $[d, b]$.

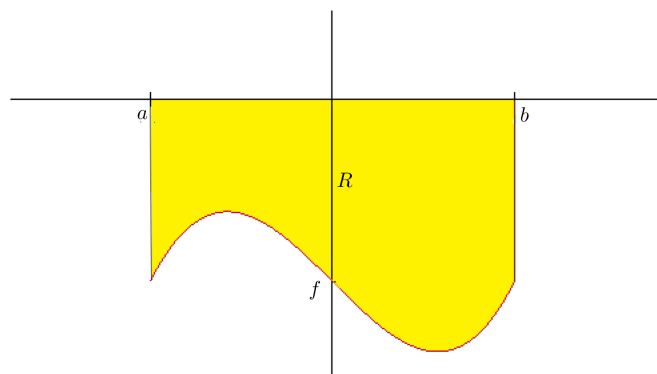


Figura 72: Área entre o eixo x e o gráfico de uma função com imagem negativa.

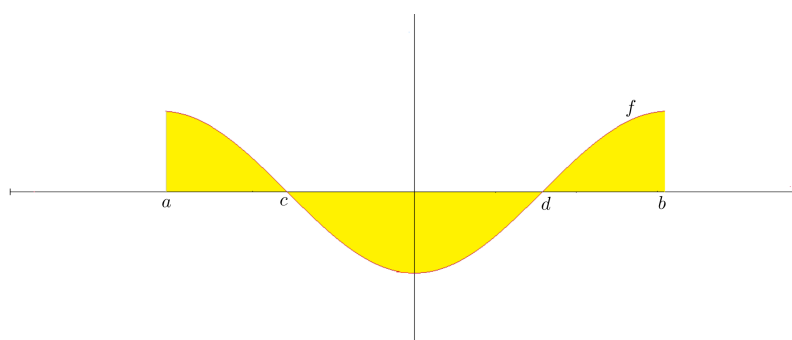


Figura 73: Área entre o eixo x e o gráfico de uma função com imagens negativas e positivas.

Então, pelas definições anteriores a área da região R do plano delimitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x)$ é dada pela diferença entre as somas das áreas das regiões delimitadas pelos gráficos de $f(x)$ acima e abaixo do eixo x , ou seja:

$$\text{Área}(R) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Portanto:

$$\text{Área}(R) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Exemplo 23. Calcular $\int_{-1}^1 x^3 dx$, e a área região R do plano delimitada pelas retas $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^3$.

Solução. Pela figura 74,

$$\text{Área}(R_1) = - \int_{-1}^0 x^3 dx = \frac{1}{4},$$

$$\text{Área}(R_2) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

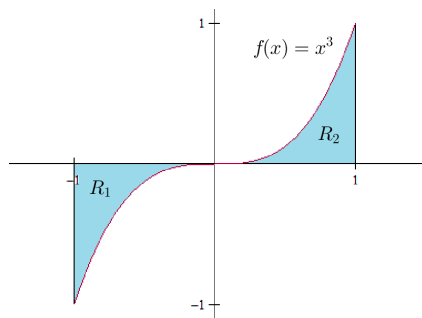


Figura 74: Área da região determinada pelo intervalo $[-1, 1]$ e o gráfico da função x^3 .

Então

$$\text{Área}(R) = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

E segue-se que

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 = \text{Área}(R_2) - \text{Área}(R_1).$$

A.5 A Função $\ln x$

Definição 24. A função $\ln x$ definida em $(0, +\infty)$ (e tal que $\ln 1 = 0$) é a primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x}$ definida em $(0, +\infty)$, ou seja:

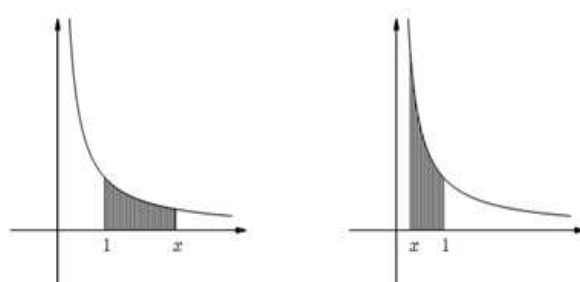
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

A.5.1 Interpretação Geométrica

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é estritamente positiva no intervalo $(0, +\infty)$. Já a função $\ln x$ é positiva de $x > 1$ e negativa se $0 < x < 1$.

Portanto, se $x > 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ é igual a área da região hachurada abaixo do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ na figura da esquerda.

Se $0 < x < 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ é igual ao negativo da área da região hachurada abaixo do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ na figura da direita. (Ver figura 75)

Figura 75: Interpretação geométrica da função $\ln x$

A.5.2 Propriedades da Função Logaritmo

Vamos agora provar algumas propriedades da Função Logaritmo, como o logaritmo do produto, o logaritmo do quociente e da potência. Mas para isso, precisamos demonstrar um resultado preliminar que será de grande utilidade para as demonstrações que se seguirão.

Lema A.5.1. *Sejam a e b número positivos, então*

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx.$$

Demonstração. Para demonstrar o resultado, vamos tomar duas partições convenientes que servirão para calcular os limites $\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx$ e $\int_1^b \frac{1}{x} dx$, e veremos que são iguais.

De fato, considere $P : 1 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[1, b]$ e escolhidos os c_i em cada $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \dots, n$, vamos tomar a partição $aP : a = y_0 = ax_0 < y_1 = ax_1 < ax_2 < ax_3 < \dots < y_n = ax_n = ab$ de $[a, ab]$ e escolher os d_i tal que $d_i = ac_i$ em cada $[y_{i-1}, y_i]$ para $i = 1, \dots, n$. Assim:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

e

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \lim_{\max \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta y_i.$$

Como $f(d_i) = \frac{1}{ac_i} = \frac{1}{a} f(c_i)$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = ax_i - ax_{i-1} = a \Delta x_i$, teremos

$$\lim_{\max \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(d_i) \max \Delta y_i = \lim_{\max a \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a} f(c_i) \max a \Delta x_i = \lim_{\max a \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \max \Delta x_i.$$

Mas, como $\max a\Delta x_i \rightarrow 0$ se, e somente se, $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ teremos

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx.$$

□

A representação geométrica deste lema é de que para $a > 1$ e $b > 1$, a área das duas regiões da figura 76 são iguais, ou seja, multiplicando-se intervalo $[1, b]$ por a , o crescimento provocado na base é compensado na diminuição da altura do gráfico.

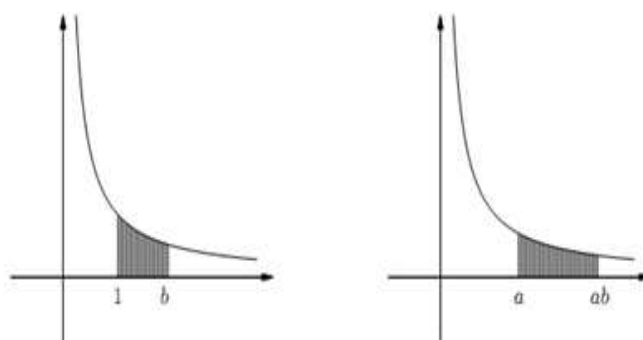


Figura 76: Interpretação geométrica de propriedade da função logarítmica.

Vamos agora demonstrar algumas propriedades da Função Logaritmo.

Proposição A.5.1 (Logaritmo do Produto). *Sejam a e b número positivos, então*

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

Demonstração.

$$\int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt = \ln a + \ln b.$$

□

Corolário A.5.1 (Logaritmo do Quociente). *Sejam a e b número positivos, então*

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

Demonstração. Basta aplicar a propriedade anterior a $\ln \frac{a}{b}$. De fato:

$$\ln a = \ln b \frac{a}{b} = \ln \frac{a}{b} + \ln b$$

e segue-se o resultado. \square

Proposição A.5.2 (Logaritmo da Potência). *Considere os números $a > 0$ e $r \in \mathbb{R}$. então*

$$\ln a^r = r \ln a.$$

Demonstração. Sejam f e g duas funções tais que $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por $f(x) = \ln x^r$ e $g(x) = r \ln x$. Pelas regras de derivação, teremos:

$$f'(x) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = r \frac{1}{x}$$

e

$$g'(x) = r \frac{1}{x}.$$

Portanto, $f'(x) = g'(x)$ em $(0, +\infty)$. Logo, pela Proposição A.1.1, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + k.$$

Como $f(1) = g(1) = 0$, segue-se que $k = 0$ e assim:

$$\int_1^a r \frac{1}{t} dt = \ln a^r = r \ln a.$$

\square