



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RÊMULO MÁRCIO GOMES DE OLIVEIRA

**A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE CONTEXTUALIZAÇÃO
NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM: Modelos Epidemiológicos e o
Uso do Software Excel no Estudo de Casos de Covid-19 no Município de
Colorado do Oeste – Rondônia.**

PORTO VELHO

2023

Rêmulo Márcio Gomes de Oliveira

**A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE CONTEXTUALIZAÇÃO
NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM: Modelos Epidemiológicos e o
Uso do Software Excel no Estudo de Casos de Covid-19 no Município de
Colorado do Oeste – Rondônia.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, polo da Universidade Federal de Rondônia-Unir, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Batista Simão.

PORTO VELHO

2023

Catalogação da Publicação na Fonte
Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR

O48m Oliveira, Remulo Marcio Gomes de.

A modelagem matemática como ferramenta de contextualização no processo de ensino-aprendizagem: modelos epidemiológicos e o uso do software excel no estudo de casos de Covid-19 no município de Colorado do Oeste - Rondônia / Remulo Marcio Gomes de Oliveira. - Porto Velho, 2023.

94 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Batista Simão.

Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Fundação Universidade Federal de Rondônia.

1. Modelagem matemática. 2. Contextualização. 3. Modelo SIR. 4. Excel. 5. Covid-19. I. Simão, Flávio Batista. II. Título.

Biblioteca Central

CDU 37:51(043.3)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE DISSERTAÇÃO

ATA Nº 66

ATA DA SEXAGÉSIMA SEXTA SESSÃO DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROFMAT/UNIR, POLO PORTO VELHO.

MESTRANDO: RÊMULO MARCIO GOMES DE OLIVEIRA

INÍCIO DO CURSO: março/2021

Aos seis dias do mês de setembro de dois mil e vinte e três, às dez horas, no Espaço Web/Videoconferência da Biblioteca Central do Campus da Universidade Federal de Rondônia de Porto Velho, foi realizada a sessão de defesa de dissertação do mestrando **Rêmulo Marcio Gomes de Oliveira**, como requisito obrigatório estabelecido no Regimento Interno do PROFMAT/UNIR. A Comissão Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa, foi composta pelos membros: Prof. Dr. Flávio Batista Simão (Orientador), Profa. Dra. Marizete Nink de Carvalho (Membra interna), Prof. Dr. Tomás Daniel Menendez Rodriguez (Membro interno) e Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva (Membro externo à Universidade), sob a presidência do primeiro, julgou o trabalho intitulado "**A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE CONTEXTUALIZAÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM: Modelos Epidemiológicos e o Uso do Software Excel no Estudo de Casos de Covid-19 no Município de Colorado do Oeste – Rondônia**". Após a defesa apresentada pelo mestrando e arguições pela Comissão, o trabalho foi considerado "APROVADO" e, em razão das recomendações dos membros da Comissão, o Senhor Presidente se comprometeu a orientar a sequência do processo da elaboração da versão final com a inclusão das recomendações realizadas. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e, para constar, foi lavrada a presente ATA, que vai assinada digitalmente pelos membros da Comissão Examinadora e o Mestrando.



Documento assinado eletronicamente por **FLAVIO BATISTA SIMAO, Docente**, em 12/09/2023, às 12:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARIZETE NINK DE CARVALHO, Coordenador(a)**, em 12/09/2023, às 12:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **SANDRO RICARDO PINTO DA SILVA, Usuário Externo**, em 12/09/2023, às 12:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **TOMAS DANIEL MENENDEZ RODRIGUEZ, Membro da Comissão**, em 12/09/2023, às 13:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **RÊMULO MÁRCIO GOMES DE OLIVEIRA, Usuário Externo**, em 12/09/2023, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.unir.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1477776** e o código CRC **93B0416F**.

Dedico este trabalho a minha família e a todos que de alguma forma contribuíram com a sua execução.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os docentes do PROFMAT, polo Porto Velho, pelo empenho e dedicação, que sem dúvida contribuem para o êxito deste programa. Em especial aos professores, que fazem parte da minha trajetória, enquanto discente, desde a graduação, Dr. Marinaldo Felipe da Silva, Dr. Tomas Daniel Menendez Rodriguez e Dr. Flávio Batista Simão, este último, fundamental, através de suas ideias e orientações na execução deste trabalho. Agradeço também ao IFRO, por oferecer condições e incentivar seus colaboradores a buscarem qualificação, e sem dúvida, agradeço a minha família, fonte de ânimo, motivação, bem como a toda e qualquer pessoa que tenha, mesmo que minimamente, contribuído para o sucesso da minha longa jornada no PROFMAT.

“Quem trabalha persevera, nunca é tarde, sempre espera. Mocidade é esperança, mocidade é primavera, quem trabalha sempre alcança.”

(Autor desconhecido).

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar, por meio de exemplo, a modelagem como ferramenta de contextualização, de modo que seu uso possibilite a integração da matemática a outras áreas do conhecimento, com vistas a dinamizar o processo de ensino-aprendizagem, estimulando a pesquisa, a experimentação, possibilitando aos alunos perceberem a importância da matemática. A pesquisa foi desenvolvida a partir da análise de relatórios com dados de casos de Covid-19, no município de Colorado do Oeste/RO, que foram usados na construção de modelos matemáticos epidemiológicos, através do editor de planilhas Microsoft Excel. A fim de dar suporte ao entendimento da dinâmica que envolve o estudo de modelos epidemiológicos, foi realizada uma pesquisa bibliográfica de conceitos matemáticos relacionados a esse assunto.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Contextualização. Modelo SIR. Excel. Covid-19.

ABSTRACT

The aim of this study is to show, by means of examples, modeling as a tool for contextualization, integrating mathematics with other areas of knowledge in order to make the process of teaching and learning more dynamic, stimulating research and experimentation, making it possible for students to notice the importance of mathematics. This research was developed based on data analysis from reports of COVID-19 cases, in the city of Colorado do Oeste in the state of Rondônia, which were used to build the epidemiological mathematical models through the Microsoft Excel spreadsheet editor. So as to support the understanding of the dynamics involved in the epidemiological models study, a bibliographic research with mathematical concepts related to this topic was carried out.

Keywords: Mathematical Models. Contextualization. SIR Model. Excel. Covid-19.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Processo de modelagem.....	23
Figura 2	- Etapas do processo de modelagem.....	24
Figura 3	- Uma solução de $x' = f(t, x)$, em U.....	37
Figura 4	- Retrato de fase de um sistema linear.....	43
Figura 5	- Retrato de fase de um sistema linear.....	45
Figura 6	- Retrato de fase de um sistema linear.....	46
Figura 7	- Variedades estável e instável.....	47
Figura 8	- Solução de uma equação diferencial.....	51
Figura 9	- Modelo SI, sem dinâmica vital.....	56
Figura 10	- Modelo SIS, sem dinâmica vital.....	57
Figura 11	- Modelo SIR, sem dinâmica vital.....	58
Figura 12	- Modelo SIRS, sem dinâmica vital.....	60
Figura 13	- Modelo de relatório epidemiológico.....	63
Figura 14	- Planilha Excel – modelo SIR.....	65
Figura 15	- Planilha Excel – modelo SIR.....	65
Figura 16	- Equações do modelo SIR, sem dinâmica vital.....	66
Figura 17	- Planilha Excel – atualização do modelo SIR.....	67
Figura 18	- Planilha Excel – tabelas modelo SIR.....	67
Figura 19	- Planilha Excel – tabelas modelo SIR.....	69
Figura 20	- Planilha Excel – tabelas modelo SIR.....	69
Figura 21	- Equações do modelo SIR, com taxa de letalidade.....	73
Figura 22	- Equações do modelo SIRS.....	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Casos e mortos pela Covid-19 no mundo.....	17
Tabela 2	- Casos e mortos pela Covid-19 no Brasil.....	18
Tabela 3	- Casos e mortos pela Covid-19 em Rondônia.....	19
Tabela 4	- Casos e mortos pela Covid-19 em Colorado do Oeste/RO.....	20
Tabela 5	- Fórmulas do modelo SIR.....	68
Tabela 6	- Fórmulas do modelo SIR.....	68

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1	- Casos e mortos pela Covid-19 no mundo.....	17
Gráfico 2	- Casos e mortos pela Covid-19 no Brasil.....	18
Gráfico 3	- Casos e mortos pela Covid-19 em Rondônia.....	19
Gráfico 4	- Casos e mortos pela Covid-19 em Colorado do Oeste/RO.....	20
Gráfico 5	- Representação modelo SIR.....	64
Gráfico 6	- Modelo SIR sem taxa de letalidade – 14 dias.....	70
Gráfico 7	- Modelo SIR sem taxa de letalidade – 10 dias.....	71
Gráfico 8	- Modelo SIR sem taxa de letalidade – 7 dias.....	72
Gráfico 9	- Modelo SIR com taxa de letalidade – 14 dias.....	74
Gráfico 10	- Modelo SIR com taxa de letalidade – 10 dias.....	75
Gráfico 11	- Modelo SIR com taxa de letalidade – 7 dias.....	76
Gráfico 12	- Modelo SIR com perda de imunidade – 14 dias.....	77
Gráfico 13	- Modelo SIR com perda de imunidade – 10 dias.....	78
Gráfico 14	- Modelo SIR com perda de imunidade – 7 dias.....	79
Gráfico 15	- Modelo SIR com perda de imunidade e taxa de letalidade.....	80
Gráfico 16	- Modelo SIR com perda de imunidade e taxa de letalidade.....	81
Gráfico 17	- Modelo SIR com perda de imunidade e taxa de letalidade.....	82
Gráfico 18	- Simulação x relatório epidemiológico.....	84

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
2. ASPECTOS GERAIS DA COVID-19.....	14
3. A PANDEMIA PELO MUNDO	17
3.1. A Pandemia no Brasil.....	18
3.2. A Pandemia em Rondônia.....	19
3.3. A Pandemia em Colorado do Oeste	20
4. MODELAGEM COMO FERRAMENTA DE CONTEXTUALIZAÇÃO.....	21
5. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA.....	25
5.1. Álgebra Linear.....	25
5.1.1. Vetor.....	25
5.1.2. Espaços e Subespaços Vetoriais.....	26
5.1.3. Combinação Linear	27
5.1.4. Dependência e Independência Linear	28
5.1.5. Base e Dimensão	28
5.1.6. Transformações Lineares	30
5.1.7. Autovalores e Autovetores.....	34
5.2. Equações Diferenciais	35
5.2.1. Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's).....	35
5.2.2. Equação Diferencial Linear	39
5.2.3. Teoria Planar.....	50
6. MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS.....	54
6.1. Modelo SI.....	56
6.2. Modelo SIS	57
6.3. Modelo SIR	58
6.4. Modelo SIRS	59
6.5. Equações Diferenciais do Modelo SIR sem Dinâmica Vital.....	60
7. CONSTRUÇÃO DO MODELO	63
7.1. Simulações.....	70
7.1.1. Simulação – 14 dias (sem taxa de letalidade).....	70
7.1.2. Simulação – 10 dias (sem taxa de letalidade).....	71
7.1.3. Simulação – 7 dias (sem taxa de letalidade).....	72
7.1.4. Simulação – 14 dias (com taxa de letalidade).....	73
7.1.5. Simulação – 10 dias (com taxa de letalidade).....	74
7.1.6. Simulação – 7 dias (com taxa de letalidade).....	75

7.1.7.	Simulação – 14 dias (com perda de imunidade)	76
7.1.8.	Simulação – 10 dias (com perda de imunidade)	78
7.1.9.	Simulação – 7 dias (com perda de imunidade)	79
7.1.10.	Simulação – 14 dias (com perda de imunidade e letalidade)	80
7.1.11.	Simulação – 10 dias (com perda de imunidade e letalidade)	81
7.1.12.	Simulação – 7 dias (com perda de imunidade e letalidade).....	82
7.2.	Simulação x relatório epidemiológico	83
8.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
9.	REFERÊNCIAS	86
	APÊNDICE – Relatório Epidemiológico (número de casos de Covid-19 do Município de Colorado do Oeste/RO).....	89

1. INTRODUÇÃO

Por vezes, ao iniciarmos diversos conteúdos matemáticos, nos deparamos com perguntas acerca da aplicação no mundo real, na vida cotidiana, ou ainda da necessidade de se estudar o que está sendo proposto.

A utilidade da Matemática é algo sempre questionado nas aulas dessa disciplina. Acreditamos que não é fácil para o professor justificar essa utilidade de maneira imediata, principalmente quando os alunos ainda não têm maturidade para compreender a amplitude dessa discussão. É uma resposta que necessita de tempo, leitura e experiência para que se possa compreendê-la de maneira clara e convincente, até mesmo para o professor (Souza, 2001, p. 27).

De modo geral, o estudo de conteúdos matemáticos se justifica por fomentar a abstração, o raciocínio lógico e etc. Além do que a Matemática é uma ferramenta essencial para diversas ciências no estudo de inúmeros fenômenos.

O ensino de Matemática é importante também pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo que ela exhibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios indutivos e dedutivos (Souza, 2001, p. 27) (Siqueira, 2019).

Contudo, a partir da perspectiva da LDB, em que *“A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social”* (Art.1º § 2º da Lei nº 9.394/96). Espera-se também que o ensino da Matemática conduza os alunos a [...] *“resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento”*; [...]. (Brasil, 2006).

Vislumbrando tal perspectiva, estabelecer uma maior conexão entre os conteúdos trabalhados em sala de aula, bem como tentar aproximar esses conteúdos às situações práticas do cotidiano podem funcionar como fator motivador em relação aos alunos.

[...] quanto mais relações os alunos conseguirem estabelecer entre os conteúdos estudados, melhor será sua aprendizagem. Essa relação entre os conteúdos já aprendidos e os novos conteúdos poderia se caracterizar, de acordo com nossa concepção, como contextualização. Essas relações podem ser mais representativas de acordo com o contexto em que as atividades se desenvolvem, podendo ocorrer também dentro da própria Matemática (Morais & Onuchic, 2011, p. 2).

Uma forma de estimular os alunos a estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula e a realidade vivenciada diariamente por cada um, é através de atividades de modelagem, como descrito por (Bassanezi, 2016, p. 16), “[...] a modelagem consiste na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem do mundo real”.

A partir da problemática apresentada, este trabalho tem como proposta mostrar um exemplo de desenvolvimento de conteúdos matemáticos durante ou a partir da modelagem matemática, de modo a proporcionar um ambiente estimulante e favorável ao processo de ensino-aprendizagem. Promovendo a pesquisa, a relação e a interação da Matemática com outras disciplinas, mostrando sua importância e sua conexão com temas importantes do cotidiano. Para tanto será feito o uso de planilhas eletrônicas (Excel) como ferramentas de construção dos modelos a serem estudados.

A pandemia da COVID-19 será o fio condutor da pesquisa e fonte de dados para o desenvolvimento desses modelos. A fim de delimitar os dados a serem utilizados, a análise se restringe aos casos de COVID-19 registrados na cidade de Colorado do Oeste-RO, entre junho de 2020 e janeiro de 2021, que compreende ao período anterior ao início da aplicação da vacina.

Este trabalho possui a seguinte organização: o **capítulo 2** apresenta os aspectos gerais da Covid-19, o **capítulo 3** apresenta os números de casos e óbitos no mundo, no Brasil, em Rondônia e no município de Colorado do Oeste, o **capítulo 4** apresenta a modelagem matemática como ferramenta de contextualização, no **capítulo 5** é apresentada a fundamentação matemática, o **capítulo 6** apresenta alguns modelos epidemiológicos, o **capítulo 7** apresenta várias simulações a partir de um modelo matemático construído com o programa Excel e no **capítulo 8** são apresentadas as considerações finais.

2. ASPECTOS GERAIS DA COVID-19.

Com base no informativo histórico da Organização Pan-Americana de Saúde (OPAS¹), no final de dezembro de 2019, a Organização Mundial de Saúde (OMS) foi alertada sobre o surgimento de vários casos de pneumonia² na cidade de Wuhan, localizada na província de Hubei, na República Popular da China.

De acordo com mesmo informativo, em janeiro de 2020, autoridades chinesas confirmaram a identificação de um novo tipo de coronavírus apontado então como causador da doença que ficaria conhecida como COVID-19, responsável pelos casos de pneumonia atípica registrados em Wuhan. Em fevereiro de 2020 esse novo tipo de coronavírus recebeu o nome de SARS-CoV-2, nome que faz referência a uma família de coronavírus (SARS-CoV) responsáveis por causar a chamada síndrome respiratória aguda grave, conhecida pela sigla em inglês, SARS (Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2).

Ainda em janeiro de 2020 a OMS declarou o surto do coronavírus uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII), sendo o mais alto nível de alerta da organização. A declaração de ESPII pressupõe um evento extraordinário com potencial de risco de saúde pública para outros países. Foi apenas a sexta vez na história que a ESPII foi declarada. Em 11 de março de 2020, a COVID-19 foi caracterizada pela OMS como uma pandemia, termo que é usado devido à distribuição geográfica de uma doença e não à sua gravidade, reconhecendo a existência de surtos de COVID-19 em várias regiões do mundo. Segundo informativo eletrônico publicado pelo Ministério da Saúde (MS³), o SARS-CoV-2, responsável pela COVID-19, assim como outros vírus respiratórios é transmitido principalmente por:

- Contato com gotículas respiratórias contendo vírus, de uma pessoa infectada para outra, quando ela tosse ou espirra, principalmente quando ela está a menos de 1 metro de distância;

¹<https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19>.

² Pneumonia é uma infecção que se instala nos pulmões, órgãos duplos localizados um de cada lado da caixa torácica. (VARELLA, Drauzio Varella, 2011).

³<https://bvsms.saude.gov.br/covid-19-2/>.

- Contato com gotículas respiratórias menores, chamadas aerossóis, que contêm os vírus e que podem permanecer suspensas no ar, serem levadas por distâncias maiores que 1 metro e por períodos mais longos (geralmente horas).
- Contato direto com uma pessoa infectada (por exemplo, durante um aperto de mão seguido do toque nos olhos, nariz ou boca), ou com objetos e superfícies contaminados, como maçanetas e corrimãos;

O mesmo informativo indica que a maioria das infecções se espalha por contato próximo (menos de 1 metro), principalmente por meio de gotículas respiratórias. E a partir do momento em que houve contato com o vírus, o início dos sintomas pode variar de 1 a 14 dias, mas, geralmente é de cinco a seis dias.

A COVID-19 apresenta como sintomas mais comuns, quadros leves de febre, cansaço e tosse seca. Outros sintomas menos comuns são: perda de paladar ou olfato, nariz entupido, conjuntivite, dor de garganta, dor de cabeça, dores nos músculos ou juntas, diferentes tipos de lesões na pele, náusea ou vômito, diarreia, calafrios ou tonturas. Há também pessoas que não apresentam qualquer sintoma.

Por outro lado, há indivíduos que desenvolvem quadros graves da doença, apresentando falta de ar, perda de apetite, confusão, dor persistente ou pressão no peito e alta temperatura (acima de 38 ° C). Outros sintomas menos comuns em quadros graves são: irritabilidade, confusão, consciência reduzida (às vezes com convulsões), ansiedade, depressão, distúrbios do sono, complicações neurológicas mais graves e raras (como acidentes vasculares cerebrais, inflamação do cérebro, delírio e danos aos nervos).

Ainda segundo o Ministério da Saúde (MS) aproximadamente 80% dos pacientes que apresentam sintomas se recuperam da doença sem precisar de tratamento hospitalar; 15% ficam gravemente doentes e precisam de oxigênio e 5% ficam gravemente doentes e precisam de cuidados intensivos. Complicações que levam à morte podem incluir insuficiência respiratória, síndrome do desconforto respiratório agudo, formação de coágulos nos vasos sanguíneos, infecção generalizada, insuficiência de múltiplos órgãos, incluindo lesão do coração, fígado ou

rins, em raras situações, as crianças podem desenvolver uma síndrome inflamatória grave algumas semanas após a infecção.

A partir do reconhecimento da COVID-19 como pandemia em 11 de março de 2020, a OMS:

[...]” instituiu as medidas essenciais para a prevenção e enfrentamento a serem adotadas. Elas incluíam a higienização das mãos com água e sabão sempre que possível e uso de álcool em gel nas situações em que o acesso à água e ao sabão não fosse possível. Também recomendavam evitar tocar olhos, nariz e boca, e proteger as pessoas ao redor ao espirrar ou tossir, com adoção da etiqueta respiratória, pelo uso do cotovelo flexionado ou lenço descartável. Além disso, a OMS indicou a manutenção da distância social (mínimo de um metro), que se evitassem aglomerações, e a utilização de máscara em caso de quadro gripal ou infecção pela COVID-19, ou se profissional de saúde no atendimento de pacientes suspeitos/infectados” (Oliveira AC, Lucas TC, Iquiapaza RA., 2020, p. 4).

Com o sequenciamento do material genético do novo coronavírus, o SARS-COV-2, deu-se início a uma corrida em busca de uma vacina. Ainda em dezembro de 2020 alguns países começaram a imunizar suas populações⁴. No Brasil o processo de imunização teve início em janeiro de 2021. Até o início de março de 2023 já haviam sido aplicadas um total de 508.881.686⁵ doses de vacina. Estudo publicado, em dezembro de 2021, pela fiocruz⁶ mostrou a efetividade das vacinas disponíveis no Brasil, apontando que em indivíduos com idade entre 20 e 80 anos, a proteção variou entre 83% e 99% para todos os imunizantes. Na população abaixo de 60 anos, todas as vacinas apresentaram proteção acima de 85% contra risco de hospitalização e acima de 89% para risco de óbito.

⁴<https://www.cnnbrasil.com.br/saude/quais-paises-ja-comecaram-a-vacinacao-contra-a-covid-19-e-quais-sao-os-proximos/>

⁵ https://infoms.saude.gov.br/extensions/DEMAS_C19_Vacina_v2/DEMAS_C19_Vacina_v2.html

⁶ <https://portal.fiocruz.br/noticia/covid-19-todas-vacinas-administradas-no-brasil-tem-efetividade>

3. A PANDEMIA PELO MUNDO

Registros de pneumonia, na China, no final de 2019, cuja origem até então era desconhecida, e que mais tarde receberia o nome de COVID-19. Segundo (Brito et al., 2020):

[...] “começaram a se propagar rapidamente pelo mundo, inicialmente pelo continente asiático, havendo relatados na Tailândia, Japão e Coreia do Sul nos dias 13, 15 e 20 de janeiro, respectivamente. Em seguida, o vírus foi importado para outros países e continentes. No dia 23 de janeiro, os primeiros casos da doença nos Estados Unidos da América (EUA) foram registrados (pp. 54-63).

Segundo Werneck e Carvalho (2020, p. 1), [...] “na metade do mês de abril, [...] já haviam ocorrido mais de 2 milhões de casos e 120 mil mortes no mundo por COVID-19”. Após quase três anos, desde o início da pandemia, relatório da OMS, apresenta dados atualizados até o dia 07 de março de 2023, conforme tabela abaixo:

Tabela 1 – número de casos e mortos no mundo

Casos confirmados	Óbitos
759.408.703	6.886.434

Fonte: OMS⁷

Gráfico 1 – número de casos e mortos no mundo.



Fonte: O próprio autor.

⁷<https://covid19.who.int/>

3.1. A Pandemia no Brasil

Segundo ((Oliveira AC, Lucas TC, Iquiapaza RA., 2020):

“No Brasil, dia 3 de fevereiro de 2020, foi declarada, por meio da Portaria nº 188 do Ministério da Saúde, Emergência em Saúde Pública de Importância Nacional, correspondendo a uma classificação de risco em nível 3, em decorrência da infecção humana pelo novo coronavírus (Sars-CoV-2). [...] O primeiro caso de infecção no Brasil pelo novo coronavírus foi notificado pelo Ministério da Saúde no dia 26 de fevereiro, em São Paulo, e todo país a partir desse momento entrou em alerta” (pp. 3-4).

Pelo relatório da OMS, até 07 de março de 2023 o Brasil registrou os seguintes números, conforme tabela abaixo:

Tabela 2 - número de casos e mortos no Brasil

Casos confirmados	Óbitos
37.076.053	699.276

Fonte: OMS

Gráfico 2 - número de casos e mortos no Brasil



Fonte: O próprio autor.

3.2. A Pandemia em Rondônia

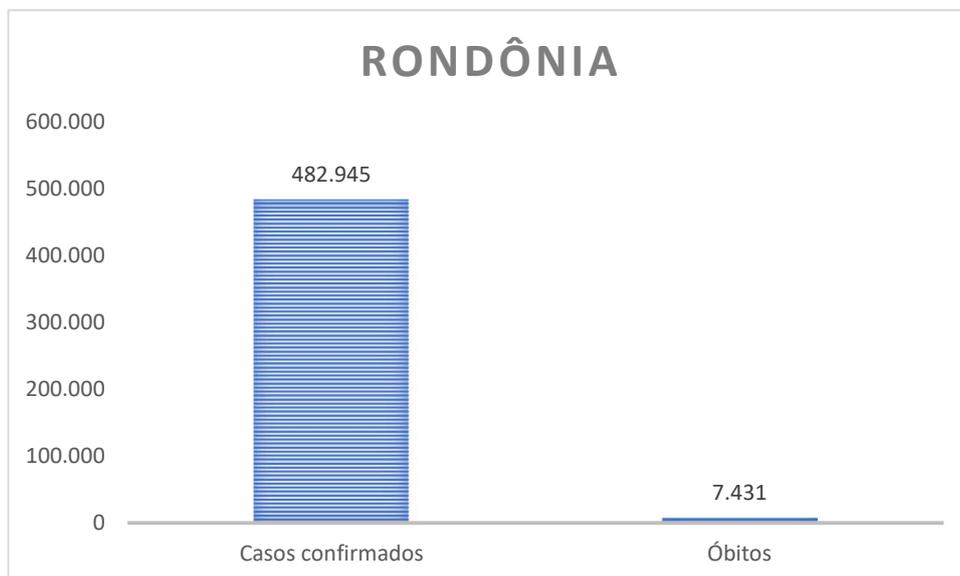
Em Rondônia, os primeiros casos de COVID-19 foram confirmados ainda em março de 2020, no início de maio o total de casos confirmados já ultrapassavam 1000, e um total de 37 óbitos àquela altura, conforme relatório de ações da Sala de Situação Integrada – COVID-19⁸. Rondônia foi o último estado brasileiro a receber a vacina contra a Covid-19, no dia 19 de janeiro de 2021⁹, momento em que o estado contabilizava 111.372 casos e 2044 óbitos. Até o dia 07 de março de 2023, Rondônia registrou os seguintes números:

Tabela 3 – número de caos e mortos pela Covid-19 em Rondônia

Casos confirmados	Óbitos
482.945	7.431

Fonte: Sala de Situação Integrada – COVID-19

Gráfico 3 - número de caos e mortos pela Covid-19 em Rondônia



Fonte: O próprio autor.

⁸<https://rondonia.ro.gov.br/wp-content/uploads/2020/05/Relat%C3%B3rio-07-de-maio.pdf>

⁹<https://www.rondonia.fiocruz.br/dois-anos-de-vacinacao-contra-a-covid-19-o-que-aprendemos-com-isso/>

3.3.A Pandemia em Colorado do Oeste

O município de Colorado do Oeste, localizado no sul de Rondônia, com população estimada de 15.663¹⁰ pessoas, teve os primeiros casos de COVID-19, confirmados no início de junho de 2020. Ao final daquele ano, Colorado do Oeste chegava a um total de 419 casos confirmados e 5 óbitos¹¹. Os dados atualizados até o início de março de 2023, aparecem na tabela abaixo.

Tabela 4 – número de casos e mortos pela Covid-19 em Colorado do Oeste/RO

Casos confirmados	Óbitos
4828	56

Fonte: Sala de Situação Integrada – COVID-19

Gráfico 4 - número de casos e mortos pela Covid-19 em Colorado do Oeste/RO



Fonte: O próprio autor.

¹⁰<https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/ro/colorado-do-oeste.html>

¹¹<https://rondonia.ro.gov.br/wp-content/uploads/2020/12/Relat%C3%B3rio-31-de-dezembro-2020.pdf>

4. MODELAGEM COMO FERRAMENTA DE CONTEXTUALIZAÇÃO

É inegável a importância da Matemática na vida humana, solucionando problemas dos mais triviais aos mais complexos. Todavia isso nem sempre é compreendido, principalmente por alunos que não possuem muita ou nenhuma afinidade com as ciências exatas, muitas vezes por conta da forma como determinado conteúdo chega, quase sempre de maneira bem distante da realidade.

A matemática é um conjunto de conhecimentos bastante abstratos. Ela existe para nos ajudar a entender o mundo à nossa volta. Mas se a pessoa não tiver como conectar esses saberes com a realidade concreta, então a matemática vai parecer uma lista esotérica de regras sem sentido. Infelizmente, o ensino da matemática nas escolas costuma enfatizar as regras, sem fornecer um entendimento transparente de por que razão elas são assim. Um exemplo são as operações com frações. Seria ótimo se fossem ensinadas com exemplos concretos, como fatias de pizza ou parcelas de terrenos” (Viana, 2023).¹²

Uma forma de sensibilizar àqueles que não se sentem atraídos, não percebem a importância ou ainda a beleza da Matemática, é mostrar o envolvimento dela em diversos aspectos e momentos da vida, usando para isso situações cotidianas, própria dos indivíduos.

A Matemática está inserida em todas as atividades humanas e deve ser compreendida como parte da vida do estudante. Seu aprendizado é primordial para um cabedal de conhecimentos, desenvolvendo o raciocínio lógico, despertando habilidades e competências no aluno de hoje, que o ajudarão a ser um grande profissional no futuro. A visão contextualizada de problemas matemáticos certamente terá uma parcela de grande importância desse processo educativo (Lima J. L., 2011, p. 82).

Assim, é importante, sempre que possível, estabelecer uma conexão entre os conteúdos estudados e elementos da cultura, do cotidiano dos envolvidos, essa relação estimula o processo de aprendizagem, favorece a apropriação do conhecimento, dá sentido ao que está sendo estudado, conforme (Souza J. F., 2009) e (D'Ambrosio, 2020).

¹²<https://www.itausocial.org.br/noticias/a-matematica-existe-para-nos-ajudar-a-entender-o-mundo/>

Essa mesma ideia aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), evidenciando a sua importância na aprendizagem.

A integração dos diferentes conhecimentos pode criar as condições necessárias para uma aprendizagem motivadora, na medida em que ofereça maior liberdade aos professores e alunos para a seleção de conteúdos mais diretamente relacionados aos assuntos ou problemas que dizem respeito à vida da comunidade (Brasil, 2000, p. 23).

Ainda nos PCNs, a contextualização aparece como sendo um meio pelo qual é possível estabelecer relações entre os mais diversos conhecimentos, oportunizando aos envolvidos, protagonismo no processo ensino-aprendizagem.

O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca por isso áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. As dimensões de vida ou contextos valorizados explicitamente pela LDB são o trabalho e a cidadania (Brasil, 2000, p. 78).

A integração entre diferentes conhecimentos, um convite a pesquisa, em conexão com temas relacionados a vida cotidiana pode ser estabelecida por meio da modelagem, segundo Barbosa (2001, p. 6) [...] “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”. Ainda segundo (Barbosa, 2001):

As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são “fins”, mas sim “meios” para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica (p. 4).

Então a modelagem é uma ferramenta de contextualização que propicia aos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, uma ampla gama de possibilidades, estimulando a investigação e o senso crítico, dando verdadeiro sentido ao que está sendo estudado.

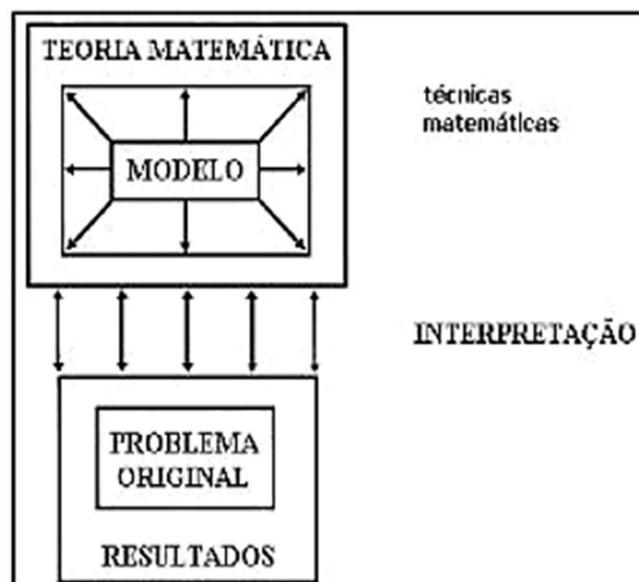
Os conhecimentos aprendidos no espaço escolar devem ser articulados com a prática social, com o mundo real, para que a atividade de estudo se constitua de fato, pois à medida que os estudantes conseguirem compreender porque devem aprender aqueles conteúdos e qual a importância deles para o desenvolvimento de seu pensamento e de sua compreensão de mundo, o ato de estudar terá sentido (Melo & Leonardo, 2019, p. 8).

É possível ainda perceber que a modelagem pode se tornar uma atividade que promova o engajamento dos alunos na busca por soluções aos problemas apresentados, ensejando a produção de conhecimento, o fazer ciência.

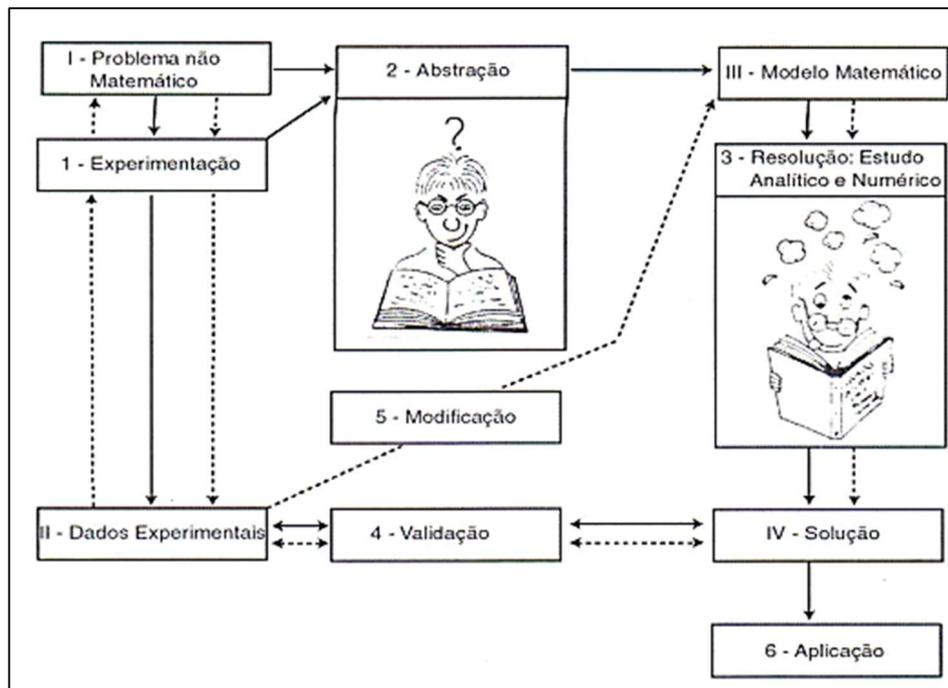
A modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, enquanto aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo o seu interesse e aguçando seu senso crítico (Biembengut & Hein, 2005, p. 18).

A modelagem matemática assim como outros processos metodológicos é constituído de etapas. Para Bassanezi (2016) o processo de modelagem pode ser esquematizado e seguir as seguintes etapas, conforme figuras abaixo.

Figura 1 – Processo de Modelagem



Fonte: (Bassanezi, 2016, p. 27)

Figura 2 – Etapas do Processo de Modelagem

Fonte: (Bassanezi, 2016, p. 27)

Segundo Bassanezi (2016) “[...] a aprendizagem de Matemática é um movimento permanentemente ativo e criativo, então, podemos afirmar que a Iniciação Científica, como a imaginamos, é a ponte de ligação natural entre o ensino e a pesquisa”.

Então a partir do lançamento de um problema, percorrendo várias etapas é possível desenvolver inúmeras habilidades, enriquecer o processo de ensino, proporcionando aos alunos experienciar algo próximo de uma iniciação científica¹³.

¹³modalidade de pesquisa acadêmica na qual os estudantes da graduação aprofundam seus estudos em torno de um determinado tema.

5. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Entender as condições de estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas de equações diferenciais, obtidos a partir de modelos epidemiológicos, são cruciais para a compreensão da dinâmica envolvida e essa análise se sustenta em conceitos e definições matemática que serão apresentadas a seguir de forma sucinta, tendo como base os seguintes materiais: (Doering & Lopes, 2010, 4ª edição), (Bronson & Costa, 2008), (Figueiredo & Neves, 1997.), (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021) (Boyce, Dijkstra, & Meade, 2020), (Steinbruch & Winterle, 2008), (Mattiuzzo, 2016) e (Boldrini, Costa, Figueiredo, & Wetzler, 1980), os quais poderão ser consultados para um maior aprofundamento, caso necessário.

5.1. Álgebra Linear

5.1.1. Vetor

Um vetor pode ser definido como o representante de uma classe de equivalência de segmentos orientados, e pode ser representado pelo seguinte conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, sendo o par (x, y) , também a representação de um ponto no plano cartesiano. A associação à representação geométrica se estende ao \mathbb{R}^3 , contudo para além disso não há representação geométrica, somente a algébrica, ou seja, $\mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$, são conjuntos de n -uplas ordenadas, onde

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\},$$

e satisfaz as seguintes propriedades:

Dados $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$ e um escalar α .

- a) $u = v \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$;
- b) $u + v = (u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \dots + u_n + v_n)$;
- c) $\alpha \cdot u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$;
- d) $u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$ (produto escalar);
- e) $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ (norma do vetor u).

Um vetor $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, é escrito na forma de matriz coluna com a seguinte notação:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ (matriz coluna } 3 \times 1)$$

5.1.2. Espaços e Subespaços Vetoriais

5.1.2.1. Definição: Um espaço vetorial real é um conjunto V , não vazio, munido de duas operações: soma, $V \times V \rightarrow V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:

- i. $(u + v) + w = u + (v + w)$
- ii. $u + v = v + u$
- iii. Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ (0 é chamado vetor nulo)
- iv. Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$
- v. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- vi. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- vii. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
- viii. $1u = u$

5.1.2.2. Definição: Dado um espaço vetorial V , um subconjunto W , não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

- i. Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.
- ii. Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$ tivermos $\alpha u \in W$.

Observações:

- As condições impostas pela definição garantem as operações de soma e multiplicação em W , ou seja, W é fechado para essas operações, ou ainda, não é possível obter vetor fora de W a partir dessas operações, com elementos do próprio W . Dessa forma pode-se considerar W um espaço vetorial, não sendo necessário a verificação das oito condições para a determinação de um espaço vetorial, visto que as mesmas são válidas em V , que por sua vez contém W .
- Qualquer subespaço W de V precisa necessariamente conter o vetor nulo (por conta da condição (ii) quando $\alpha = 0$).
- Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços, chamados espaços triviais, o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

5.1.3. Combinação Linear

5.1.3.1. Definição: Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ números reais ou complexos. Então, o vetor $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ é um elemento de V e é chamado de combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n .

5.1.4. Dependência e Independência Linear

5.1.4.1. Definição: Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. O conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LI se a equação $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. O que implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Caso exista algum $\alpha_i \neq 0$, o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é chamado de linearmente dependente (LD), ou ainda que os vetores v_1, \dots, v_n são LD.

Observação:

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

5.1.5. Base e Dimensão

5.1.5.1. Definição: Um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se:

i. $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI

ii. $\{v_1, \dots, v_n\} = V$

Observações:

- Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores não nulos que geram um espaço vetorial V . Então, dentre estes vetores é possível extrair uma base de V .

- Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores v_1, v_2, \dots, v_n . Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD.
- Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado dimensão de V , e denotado $\dim V$.
- Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V .
- Se $\dim V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V .
- Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $\dim U \leq \dim V$ e $\dim W \leq \dim V$. Além disso, $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.
- Dada uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n .
- Dado o conjunto $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, LI em \mathbb{R}^n , com $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Como todo vetor $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear de e_1, e_2, \dots, e_n , isto é:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (5.1)$$

Ou seja, B gera \mathbb{R}^n . Logo B é uma base de \mathbb{R}^n , chamada base canônica.

5.1.5.2. Definição: Sejam $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V e $v \in V$ onde $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Os números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as coordenadas de v em relação à base B e denotado por

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

5.1.6. Transformações Lineares

5.1.6.1. Definição: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função de V em W , $F: V \rightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:

i. Quaisquer que sejam u e v em V ,

$$F(u + v) = F(u) + F(v)$$

ii. Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$F(kv) = kF(v)$$

Observações:

- Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de V , $\{v_1, \dots, v_n\}$, sejam w_1, \dots, w_n elementos arbitrários de W . Então, existe uma única aplicação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$. Esta aplicação é dada por:

$$\text{Se } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad (5.3)$$

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) \quad (5.4)$$

$$= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

- Uma transformação linear de V em V é chamada operador linear de V .
- Em toda transformação linear $T: V \rightarrow W$, a imagem do vetor $0 \in V$ é o vetor $0 \in W$, ou seja, $T(0) = 0$.

5.1.6.2. Definição: Seja $T: V \rightarrow W$ uma aplicação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja $\text{Im} = \{w \in W; T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$.

5.1.6.3. Definição: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado núcleo de T , sendo denominado por $\ker(T)$. Isto é

$$\ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\} \quad (5.5)$$

5.1.6.4. Definição: Dada uma aplicação $T: V \rightarrow W$, diremos que T é injetora se dados $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Ou de forma equivalente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$. Ou ainda, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.

5.1.6.5. Definição: A aplicação $T: V \rightarrow W$ será sobrejetora se a imagem de T coincidir com W , ou seja, $T(V) = W$. Ou ainda T será sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Observações:

- Se $T: V \rightarrow W$, é uma aplicação linear. Então $\ker(T) = \{0\}$, se, e somente se T é injetora.
- Se $T: V \rightarrow W$, é uma aplicação linear. Então $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$.
- Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora se, e somente se T é sobrejetora.
- Sendo $T: V \rightarrow W$ é uma aplicação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base.
- Quando uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ for injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, recebe o nome de isomorfismo.

5.1.6.6. Definição: Seja $T: V \rightarrow W$, uma transformação linear, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ são bases de V e W , respectivamente, $[T]_B^A$ é uma matriz de ordem $m \times n$, onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores de A em relação à base B :

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & T(v_1)_B & T(v_2)_B & T(v_3)_B
 \end{array}$$

Observações:

- O símbolo $[T]$ é usado para representar a matriz de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ em relação às bases canônicas.
- Sejam V e W espaços vetoriais, A base de V , B base de W , e $T: V \rightarrow W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A \cdot [v]_A \quad (5.7)$$

- Seja $T: V \rightarrow W$ uma aplicação linear e A e B bases de V e W respectivamente. Então:

$$\dim \text{Im}(T) = \text{posto de } [T]_B^A \quad (5.8)$$

$$\dim \ker(T) = \text{nulidade de } [T]_B^A \quad (5.9)$$

$$= \text{número de colunas} - \text{posto de } [T]_B^A$$

- Sejam $T_1: V \rightarrow W$ e $T_2: W \rightarrow U$ transformações lineares e A, B e C bases de V, W e U respectivamente. Então a composta de T_1 com T_2 , $T_2 \circ T_1: V \rightarrow U$, é linear e

$$[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \cdot [T_1]_B^A \quad (5.10)$$

- Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear inversível, ou seja, T é um isomorfismo, e A e B são as bases de V e W , então $T^{-1}: W \rightarrow V$ é um operador linear e

$$[T^{-1}]_A^B = ([T]_B^A)^{-1} \quad (5.11)$$

- Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear e A e B bases de V e W . Então T é inversível se, e somente se $\det[T]_B^A \neq 0$.

5.1.7. Autovalores e Autovetores

5.1.7.1. Definição: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Tv = \lambda v$, λ é um autovalor de T e v um autovetor de T associado a λ .

Observações:

- De modo geral toda transformação

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \rightarrow \alpha v, \alpha \neq 0$$

tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v , e:

- i. $\alpha < 0$, inverte o sentido do vetor.
- ii. $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.
- iii. $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.
- iv. $\alpha = 1$, T é a identidade.

- Dada uma transformação $T: V \rightarrow V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ , qualquer vetor $w = \alpha v$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de T associado a λ .

5.1.7.2. Definição: O subespaço $V_\lambda = \{v \in V: T(v) = \lambda v\}$ é chamado o subespaço associado ao autovalor λ .

5.1.7.3. Definição: Dada a uma matriz quadrada, A , de ordem n , seus autovalor e autovetor, correspondem ao autovalor e autovetor da transformação linear $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, associada à matriz A em relação à base canônica, ou seja, $T_A(v) = A \cdot v$. Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$

de A , e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v$, $v \neq 0$.

Observações:

- Reescrevendo a equação $A \cdot v = \lambda v$, como $A \cdot v - \lambda v = 0$, e usando o fato de que $v = Iv$, onde I é a matriz identidade, temos que $Av - \lambda Iv = 0$ ou ainda $(A - \lambda I)v = 0$, para obter soluções não nulas, então $\det(A - \lambda I) = 0$.
- A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é chamada de equação característica do operador T ou da matriz A , e suas raízes são os autovalores do operador T ou da matriz A . O determinante $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ , chamado polinômio característico.

5.2. Equações Diferenciais

Para (Boyce, Diprima, & Meade, 2020):

Equações diferenciais são de interesse para, principalmente, não matemáticos por causa da possibilidade de serem usadas para investigar uma variedade de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais. Uma razão para isso é que modelos matemáticos e suas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e os parâmetros no problema. Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstâncias (p. 27).

5.2.1. Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

5.2.1.1. Definição: Dada uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto (t, x) de um aberto U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, a expressão

$$x' = f(t, x), \quad \text{onde } x' = \frac{dx}{dt} \quad (5.12)$$

é a equação diferencial ordinária em \mathbb{R}^n definida por f .

Observações:

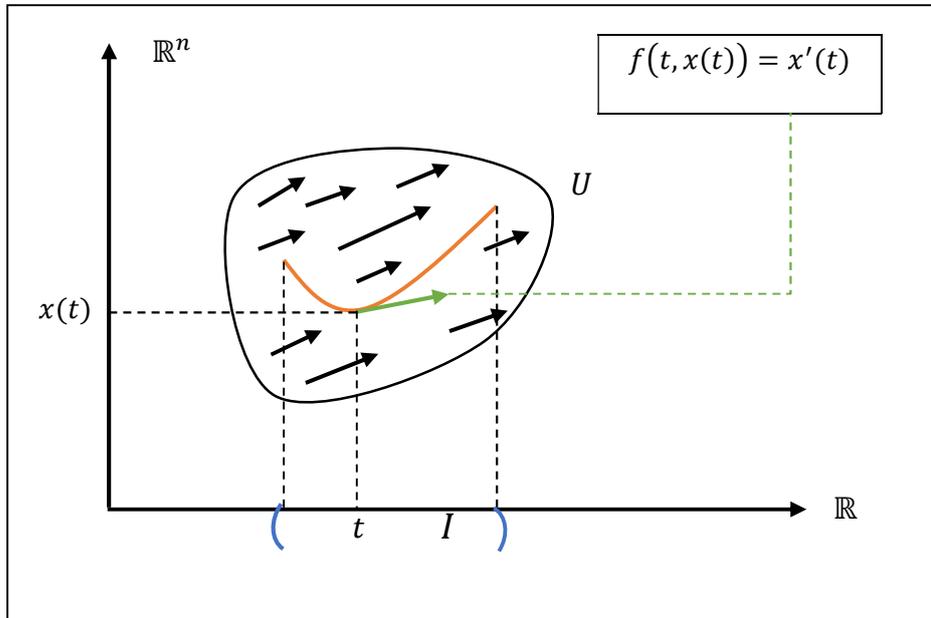
- A notação \dot{x} é usada para designar a derivada de x com relação à sua variável independente t , ou seja $\dot{x} = dx/dt$.
- Uma equação diferencial ordinária é aquela em que a função incógnita depende de apenas uma variável independente. Se a função incógnita depender de duas ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial parcial.
- A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada desta equação, por exemplo, a equação, $4 \frac{d^3y}{dx^3} + (\text{sen } x) \frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$, é uma equação diferencial de terceira ordem.
- A equação diferencial $x' = f(t, x)$, é autônoma se $f(t, x)$ independe de t , e nesse caso $f(t, x) = f(x)$, logo a equação diferencial é escrita como $x' = f(x)$, sendo a aplicação $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, interpretada como um campo de vetores definido no aberto E de \mathbb{R}^n .
- Uma equação diferencial $x' = f(x)$ em \mathbb{R}^n , com $n > 1$ quando escrita da

$$\text{forma: } \begin{array}{l} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{array} \quad \text{é chamado sistema de equações diferenciais.}$$

5.2.1.2. Definição: Uma solução da equação $x' = f(t, x)$ é um caminho $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido e derivável num intervalo I de \mathbb{R} , cujo gráfico encontra-se inteiramente contido em U e velocidade determinada por f , (conforme figura 3), tal que para cada $t \in I$,

$$(t, x(t)) \in U \text{ e } x'(t) = f(t, x(t)). \quad (5.13)$$

Figura 3 – Uma solução de $x' = f(t, x)$, em U .



Fonte: adaptado de (Doering & Lopes, 2010, 4ª edição).

Observações:

- Se $f(t, x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do problema de valor inicial $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ centrado em t_0 , para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.
- A equação diferencial autônoma $x' = f(x)$, para ser usada com o objetivo de realizar previsões sobre o estado $x(t)$ faz-se necessário resolver o problema de valor inicial, ou seja, dada um equação diferencial $x' = f(x)$ e o estado x_0 do sistema no instante t_0 , é necessário encontrar uma função $x(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$ e, para todos os tempos t , $x' = f(x(t))$.

- Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e $x_0 \in U$. Então:

i. O problema de valor inicial tem solução única.

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.14)$$

ii. Se $x(t)$ permanece num subconjunto compacto (fechado e limitado) de U quando t aumenta (respectivamente, diminui), então $x(t)$ está definido para $t_0 \leq t < \infty$ (respectivamente, $-\infty < t \leq t_0$).

- O conjunto U , no qual a equação diferencial está definida, é chamado de espaço de fase.
- Um ponto x_0 no qual $x' = 0$, é um equilíbrio da equação diferencial $x' = f(x)$, portanto, também $f(x_0) = 0$.
- Se x_0 é um equilíbrio de $x' = f(x)$, então a única solução do problema de valor inicial

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

é , $x(t) = x_0$, para $-\infty \leq t < \infty$.

- Seja $x(t)$ uma solução de $x' = f(x)$. Suponhamos que, no instante t_0 , $x(t_0)$ não é um equilíbrio, ou seja, $f(x(t_0)) \neq 0$. Então $x(t)$ não é um equilíbrio para todos os valores de t , i.e., $f(x(t)) \neq 0$ para todos os valores de t .

5.2.1.3. Definição: Se \bar{x} é um zero de f , isto é, $f(\bar{x}) = 0$, então $x(t) \equiv \bar{x}$ é solução $x' = f(x)$ e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto \bar{x} é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.

5.2.1.4. Definição: Um ponto de equilíbrio \bar{x} é estável, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é tal que $|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Observações:

- Um ponto de equilíbrio \bar{x} é assintoticamente estável, se for estável e se existir $n > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ quando $|x_0 - \bar{x}| < n$.
- Um ponto de equilíbrio que não é estável é chamado de instável.
- Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio de $x' = f(x)$, com f de classe C^1 . Então, $f'(\bar{x}) < 0$ implica que \bar{x} é assintoticamente estável, e $f'(\bar{x}) > 0$ implica que \bar{x} é instável.
- Toda $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^1 , se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são contínuas.

5.2.2. Equação Diferencial Linear

5.2.2.1. Definição: Uma equação diferencial linear é um sistema da forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{5.15}$$

onde todos os a_{ij} são constantes. Podendo ser escrito na forma da equação matricial

$$x' = Ax \quad (5.16)$$

$$\text{onde } x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observações:

- Toda equação diferencial linear tem um equilíbrio em $x = 0$.
- Para $n = 1$ o sistema

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

se reduz a $x' = ax$, com $x \in \mathbb{R}$ e a uma constante.

- A solução com $x(0) = x_0$ é $x = x_0 e^{at}$. Se $a < 0$, todas as soluções se aproximam do equilíbrio $x = 0$ com $t \rightarrow \infty$. Se $a > 0$ e $x_0 \neq 0$, as soluções crescem em módulo à medida que t aumenta, mas se aproximam do equilíbrio $x = 0$, com $t \rightarrow -\infty$.
- Na equação $x' = Ax$, para $x = x_0 e^{\lambda t}$, com $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ e λ constante. Para o caso em que x_0 é um vetor não nulo, ao substituir $x = x_0 e^{\lambda t}$ em ambos os lados, obtém-se a expressão

$$\lambda e^{\lambda t} x_0 = A e^{\lambda t} x_0 \text{ ou } \lambda x_0 = Ax_0 \text{ ou } (A - \lambda I)x_0 = 0. \quad (5.17)$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$, sendo que $Ix = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

- A equação $(A - \lambda I)x_0 = 0$ tem soluções além de $x_0 = 0$ se e só se o determinante da matriz $A - \lambda I$ for zero, ou seja, $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Os números λ tais que $\det(A - \lambda I) = 0$, são chamados de autovalores de A .
- Se λ é autovalor de A , os vetores não nulos x_0 tais que $(A - \lambda I)x_0 = 0$ são chamados de autovetores de λ .
- O conjunto de todas as soluções de $(A - \lambda I)x_0 = 0$, incluindo $x_0 = 0$, é um subespaço de \mathbb{R}^n chamado de autoespaço do autovalor λ .
- Os autovalores e os autovetores podem ser complexos.
- A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é chamada equação característica de A , sendo uma equação polinomial de grau n , com exatamente n autovalores, incluindo a multiplicidade.

Exemplo₁: Dado o sistema linear¹⁴

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

¹⁴ (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schecter, 2021, p. 42)

que na forma matricial é escrito como

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

A equação característica é dada por

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

$\lambda = -1$ e $\lambda = 1$ são os autovalores. Substituindo os valores de λ na equação

$(A - \lambda I)x_0 = 0$, obtém-se os autovetores associados aos respectivos valores de λ .

Para $\lambda = -1$,

$$(A - (-1)I)x_0 = 0, \text{ com } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, as soluções desta equação são todos múltiplos do vetor $(-1,1)$ e constituem uma reta, ou seja, um espaço unidimensional de \mathbb{R}^2 . Portanto esta reta é autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -1$. Se $x(0) = x_0$ é um ponto desta reta, um múltiplo de $(-1,1)$, então $x(t) = e^{-t}x_0$, o que indica que $x(t)$ é sempre um ponto desta reta,

$$x(t) \rightarrow 0, \text{ com } t \rightarrow \infty, \text{ se } x_0 \neq 0, \|x(t)\| \rightarrow \infty, \text{ com } t \rightarrow -\infty. \quad (5.21)$$

De modo análogo, para $\lambda = 1$, as soluções são todos múltiplos do vetor $(1,1)$. Se $x(0) = x_0$ é um ponto desta reta, um múltiplo de $(1,1)$, então $x(t) = x_0 e^t$, o que indica que $x(t)$ é sempre um ponto desta reta,

$$x(t) \rightarrow 0, \text{ com } t \rightarrow -\infty, \text{ se } x_0 \neq 0, \|x(t)\| \rightarrow \infty, \text{ com } t \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

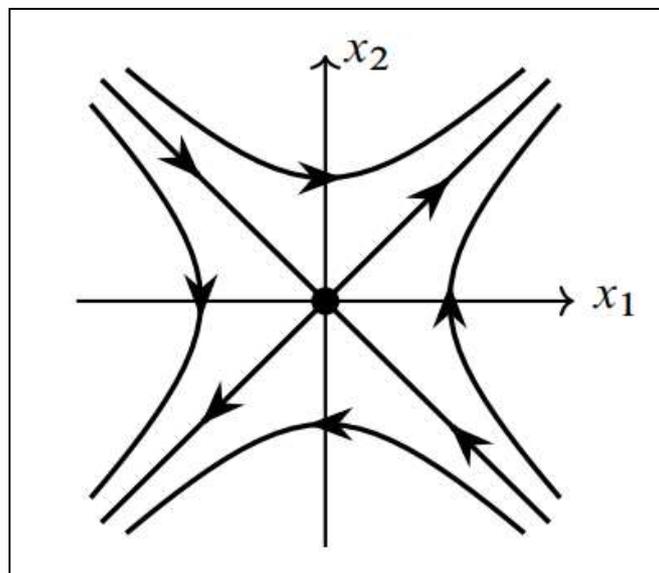
A partir das informações acima pode-se esboçar o retrato de fase do sistema linear (figura 4).

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Observações:

- Retrato de fase é o esboço das curvas parametrizadas no plano que representam as soluções de $x' = Ax$.
- A reta $x_2 = -x_1$ é o autoespaço do autovalor -1 , cuja direção do movimento é em direção à origem.
- A reta $x_2 = x_1$ é o autoespaço do autovalor 1 , cuja direção do movimento é de afastamento da origem.
- Outras condições iniciais podem ser consideradas como uma combinação linear de $(-1,1)$ e $(1,1)$.

Figura 4 – Retrato de fase do sistema linear (exemplo).



Fonte: (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021, p. 43)

5.2.2.2. Definição: A equação diferencial $x' = Ax$ é chamada hiperbólica se todos os autovalores de A tiverem parte real não nula.

Observações:

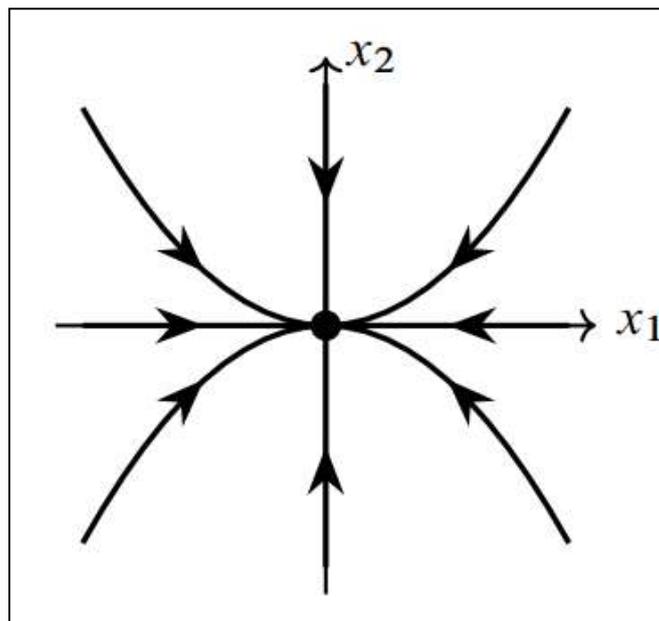
- Há três tipos de equações diferenciais lineares hiperbólicas.
- Quando todos os autovalores têm uma parte real negativa, todas as soluções se aproximam da origem com $t \rightarrow \infty$.
- Quando todos os autovalores têm uma parte real positiva, todas as soluções se aproximam da origem com $t \rightarrow -\infty$.
- Contando a multiplicidade, k autovalores têm parte real negativa e $n - k$ têm parte real positiva.
- Existem espaços E^s de dimensão k e E^u de dimensão $n - k$, de modo que uma solução $x(t)$ de $x' = Ax$:
 - i. aproxima-se da origem com $t \rightarrow \infty \Leftrightarrow x(0) \in E^s$.
 - ii. aproxima-se da origem com $t \rightarrow -\infty \Leftrightarrow x(0) \in E^u$.
- Os espaços E^s e E^u são chamados de subespaço estável e subespaço instável de $x' = Ax$, respectivamente, e ambos têm dimensão um.

Exemplo2: O sistema abaixo possui dois autovalores reais negativos e distintos¹⁵.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Em geral, em duas dimensões, se os autovalores são $-\lambda_2 < -\lambda_1 < 0$, então quase todas as soluções se aproximam da origem na direção do autoespaço do autovalor $-\lambda_1$. No caso do exemplo acima, todas as curvas, exceto o eixo x_2 , são tangentes ao eixo x_1 . O eixo x_2 é o autoespaço do autovalor -2 , e o eixo x_1 é o autoespaço do autovalor -1 . Como $-2 < -1 < 0$, a coordenada x_2 de qualquer solução vai para 0 mais rápido do que a coordenada x_1 , visto que e^{-2t} decresce muito mais rápido do que e^{-t} , assim as soluções acabam tangentes ao eixo x_1 , exceto as soluções ao longo do eixo x_2 , que não têm coordenada x_1 , conforme figura 5.

Figura 5 – Retrato de fase do sistema linear (exemplo2).



Fonte: (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021, p. 44)

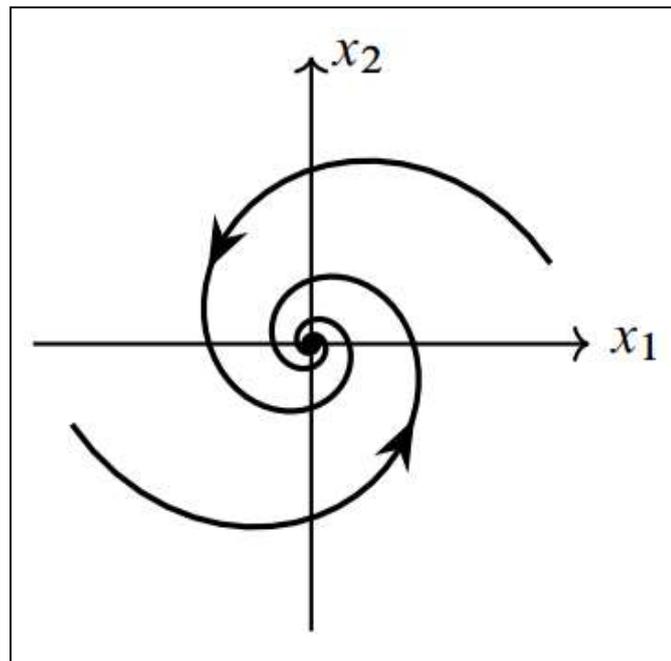
¹⁵ (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021, p. 44)

Exemplo3: O sistema abaixo possui dois autovalores complexos com parte real negativa¹⁶.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\omega \\ \omega & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Os autovalores são $-\alpha \pm \omega i$, com $\alpha > 0$ e $\omega > 0$. Ver figura 6, abaixo.

Figura 6 – Retrato de fase do sistema linear (exemplo3)



Fonte: (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021, p. 45)

¹⁶(López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021, p. 45)

Segundo ((López-Flores, Marchesin, Matos, & Schecter, 2021):

Um equilíbrio x_0 de $x' = f(x)$ é assintoticamente estável se as soluções que começam perto de x_0 permanecem perto de x_0 no tempo futuro, e aproximam-se de x_0 com $t \rightarrow \infty$. Equilíbrios assintoticamente estáveis são estados que se espera observar persistindo no mundo natural. Se alguma perturbação leva o estado do sistema a uma pequena distância de um equilíbrio assintoticamente estável, o estado retorna ao equilíbrio (p. 45).

Observações:

- Considerando x_0 um equilíbrio de $x' = f(x)$, é possível estudar as soluções próximas de x_0 , fazendo $x = x_0 + y$.
- Atribuindo um valor pequeno para y , obtém-se em correspondência um valor para x , bem próximo de x_0 . Daí $y' = f(x + x_0)$, que pelo teorema de Taylor,

$$y' = f(x_0) + Df(x_0)y + \dots = Df(x_0)y + \dots \quad (5.26)$$

Sendo $Df(x_0)$ a matriz $n \times n$, na qual a ij – ésima entrada é $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ no ponto x_0 .

5.2.2.3. Definição: A linearização da equação diferencial $x' = f(x)$ no equilíbrio x_0 é a equação diferencial $y' = Df(x_0)y$.

Observações:

- É possível determinar o retrato de fase de $y' = Df(x_0)y$, encontrando autovalores e autovetores.

- O equilíbrio x_0 de $x' = f(x)$ é chamado de hiperbólico se a equação diferencial linear $y' = Df(x_0)y$ for hiperbólica.

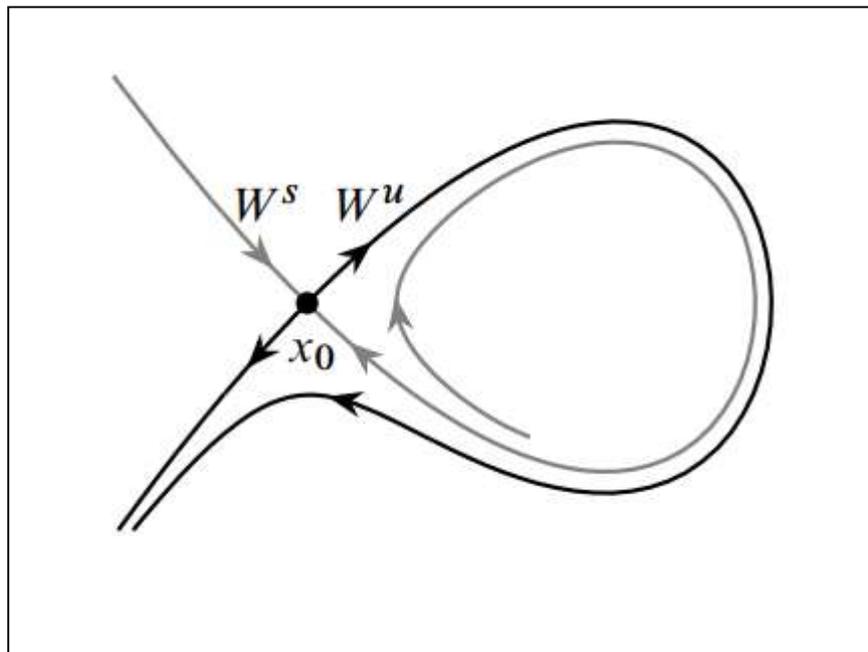
5.2.2.4. Definição: Uma variedade k – dimensional em \mathbb{R}^n é um subconjunto de \mathbb{R}^n que, na vizinhança a cada um de seus pontos, parece um subespaço k – dimensional de \mathbb{R}^n .

Observações:

- Uma variedade unidimensional é apenas uma curva, e uma variedade bidimensional é apenas uma superfície.
- Se x_0 é um equilíbrio hiperbólico de $x' = f(x)$, então o retrato de fase de $x' = f(x)$ perto de x_0 se parece com o retrato de fase de $y' = Df(x_0)y$ perto da origem.
- Se todos os autovalores de $Df(x_0)$ têm parte real negativa, então x_0 é um equilíbrio assintoticamente estável de $x' = f(x)$. O equilíbrio x_0 é chamado de atrator.
- Se todos os autovalores de $Df(x_0)$ têm parte real positiva, então x_0 é um equilíbrio assintoticamente estável de $x' = -f(x)$. Para o sistema original, $x' = f(x)$, todas as soluções que estão perto de x_0 , tendem a x_0 com $t \rightarrow -\infty$. O equilíbrio x_0 é chamado de repulsor.

- Se $Df(x_0)$ tem k autovalores com parte real negativa e $n - k$ autovalores com parte real positiva ($0 < k < n$), então existem duas variedades invariantes que se intersectam em x_0 , $W^s(x_0)$ de dimensão k e $W^u(x_0)$ de dimensão $n - k$, tais que:
 - $W^s(x_0)$ contém todas as soluções que se aproximam de x_0 com $t \rightarrow \infty$;
 - $W^u(x_0)$ contém todas as soluções que se aproximam de x_0 com $t \rightarrow -\infty$.
- O equilíbrio x_0 é chamado de sela. $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ são chamados de variedades estável e variedade instável de x_0 , respectivamente. Em x_0 , $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ são tangentes aos subespaços estável e instável de $y' = Df(x_0)y$, transladados para x_0 .

Figura 7 – Variedade estável de x_0 em cinza e variedade instável de x_0 em preto).



Fonte: (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021, p. 47).

5.2.3. Teoria Planar

(Poincaré-Bendixson). Considerando $x' = f(x)$ uma equação diferencial definida num aberto U de \mathbb{R}^2 . Caso uma solução permaneça num subconjunto compacto de U , conforme t aumenta, então esta solução aproxima-se:

- i. ou de um conjunto que contém um equilíbrio;
- ii. ou de uma órbita fechada, que corresponde a uma solução de uma equação diferencial periódica no tempo.

Observações:

- A equação diferencial $x' = f(x)$ é chamada polinomial se, quando escrita como um sistema,

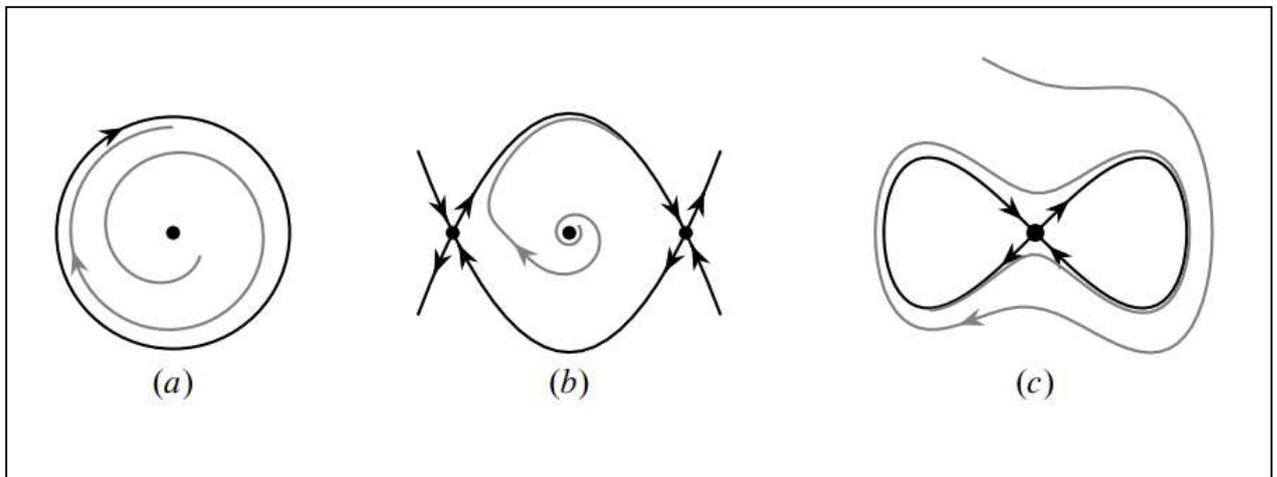
$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{5.27}$$

todas as funções f_1, \dots, f_n são polinômios.

- Pode ocorrer de uma ou mais órbitas se ligarem a equilíbrios para formarem, conjuntamente com estes, uma curva fechada simples. Se a equação diferencial determina uma direção consistente de movimento à volta desta curva, ela é chamada ciclo separatriz.

- Um gráfico é uma união conexa de dois ou mais ciclos separatriz.

Figura 8 – (a) A solução aproxima-se de uma órbita fechada. (b) A solução aproxima-se de um ciclo separatriz que consiste em duas órbitas curvas e dois equilíbrios. (c) A solução aproxima-se de um gráfico que consiste em dois ciclos separatriz. Cada ciclo separatriz é composto de uma órbita curva e um equilíbrio.



Fonte: (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schecter, 2021, p. 51)

(Poincaré-Bendixon Generalizado). Considerando $x' = f(x)$ uma equação diferencial polinomial com $n = 2$, que tem apenas equilíbrios isolados. Caso uma solução de $x' = f(x)$ permaneça num subconjunto compacto conforme t aumenta, então esta solução aproxima-se:

- i. ou de um equilíbrio;
- ii. ou de uma órbita fechada;

iii. ou de um ciclo separatriz;

iv. ou de um gráfico.

5.2.3.1. Definição: Seja

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(x_1, x_2) \\x_2' &= f_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{5.28}$$

definido num conjunto aberto U no plano. Seja C uma curva fechada simples em U , orientada no sentido anti-horário. Para cada x em C , seja $n(x)$ o vetor unitário normal apontado para fora. A divergência de f , $\nabla \cdot f$, é definida por

$$\nabla \cdot f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2).\tag{5.29}$$

Observações:

- (Divergência em 2D/ Green). Supondo que uma curva fechada simples, C , e seu interior, $IntC$, estejam contidos em U . Então

$$\iint_{IntC} \nabla \cdot f(x) \, dA = \int_C f(x) \cdot n(x) \, ds.\tag{5.30}$$

A primeira integral é uma integral dupla ordinária de uma função sobre uma região do plano. A segunda integral é a integral de uma função em torno de uma curva em relação ao comprimento do arco.

- (Critério de Bendixson). Supondo (1) o conjunto aberto U não tem buracos e (2) $\nabla \cdot f$ é sempre positivo em U , ou $\nabla \cdot f$ é sempre negativo em U . Então, $x' = f(x)$ não tem órbitas fechadas em U .

- (Critério de Dulac). Supondo (1) o conjunto aberto U não tem buracos, e (2) há uma função positiva $g(x)$ tal que $\nabla \cdot gf$ é sempre positivo em U , ou $\nabla \cdot gf$ é sempre negativo em U . Então $x' = f(x)$ não tem órbitas fechadas em U .

6. MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

Segundo (Rouquayrol & Gurgel, 2018), epidemiologia pode ser definida como:

“ciência que estuda o processo saúde-doença em coletividades humanas, analisando a distribuição e os fatores determinantes do risco de doenças, agravos e eventos associados à saúde, propondo medidas específicas de prevenção, controle ou erradicação de doenças, danos ou problemas de saúde e de proteção, promoção ou recuperação da saúde individual e coletiva, produzindo informação e conhecimento para apoiar a tomada de decisão no planejamento, administração e avaliação de sistemas, programas, serviços e ações de saúde” (p. 9).

É possível observar que a epidemiologia estuda fatores humanos e ambientais, e suas interações com diversas doenças que acometem uma população. Para Pereira (2018, p. 39) [...] “é costume dizer-se que o objeto da epidemiologia é representado por qualquer dano ou agravo à saúde estudado em termos de população.”

Para Sena Quadros (2013) observa-se o quanto os estudos epidemiológicos são importantes.

“Os dados epidemiológicos podem ser usados para registrar doenças que acometem uma população e, quando infecciosas, identificar causas e formas de transmissão; e para prever a probabilidade futura da infecção, identificar fatores de risco e planejar programas de controle” (p. 19).

A epidemiologia enquanto ciência carece de ferramentas para a organização, sistematização e análise de dados. Sendo assim a Matemática através da modelagem, mostra-se imprescindível, auxiliando esta ciência.

Historicamente os registros iniciais da Matemática aplicada a epidemiologia ou epidemiologia matemática, remontam ao século XVIII, e são atribuídos a Daniel Bernoulli, em seus estudos sobre a varíola. (Werneck, 2006). Em 1906, W. H. Hamer, estabelece um conceito importante na epidemiologia matemática, segundo ele o desenvolvimento de uma epidemia está associado a fatores como a quantidade de indivíduos suscetíveis e infectados, e a taxa de contato entre eles, tal conceito é conhecido como “princípio de ação das massas” (Sabeti, 2011) e (Vieira, 2016).

Desde então houve uma evolução significativa nos estudos de eventos epidemiológicos sobre tudo com o desenvolvimento de vários modelos matemáticos, como: SI, SIS, SIR, SIRS e etc., cuja função é simular tais eventos, como endemias¹⁷, epidemias¹⁸ ou ainda pandemias,¹⁹ como a da COVID-19.

Os principais modelos usados na epidemiologia matemática são baseados em Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), esses modelos, chamados de determinísticos, analisam a propagação e a interação de certa doença numa população, dividindo-a em dois ou mais compartimentos, como por exemplo: suscetíveis²⁰ e infectados²¹, ou tantos quantos forem necessários. Além dos modelos determinísticos, a epidemiologia matemática faz uso de outros modelos, sendo os modelos estocásticos, modelos de rede e modelos baseados em agentes, exemplos, de acordo com (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021).

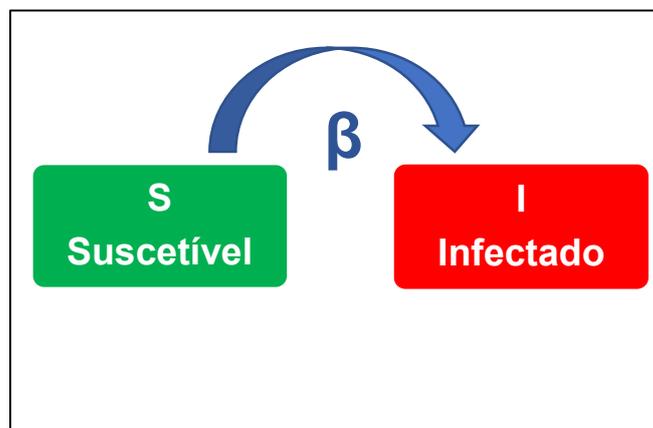
A escolha de um determinado modelo epidemiológico está diretamente ligada às especificidades de cada doença. A seguir, alguns modelos determinísticos e suas características e exemplos de uso.

^{17, 18, 19} <https://saude.abril.com.br/medicina/qual-e-a-diferenca-entre-epidemia-pandemia-e-endemia/>
^{20, 21} <https://wp.ufpel.edu.br/fentransporte/2020/04/09/a-evolucao-epidmica-do-covid-19-modelo-sir/>

6.1. Modelo SI

Modelo epidemiológico determinístico compartimental SI (suscetível – infectado), usado para doenças que não apresentam cura, ou seja, uma vez infectado o indivíduo permanecerá nessa condição.

Figura 9 - Modelo SI (sem dinâmica vital).



Fonte: adaptado de (Sabeti, 2011) e (Soares, 2020).

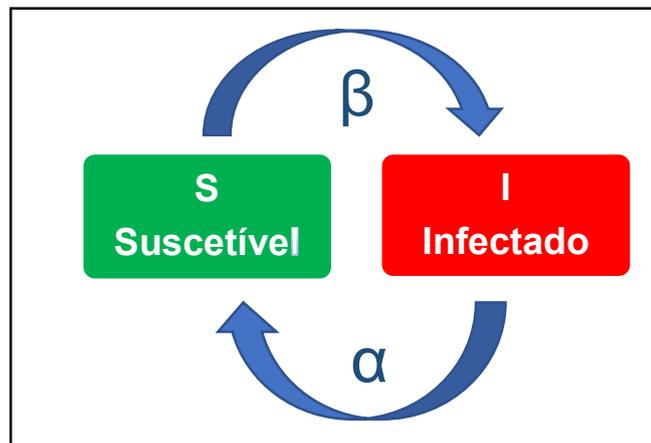
Uma doença viral que pode ser modelada através do modelo SI é a Síndrome da Imunodeficiência Humana Adquirida (SIDA). Nesse modelo a dinâmica de mudança do compartimento dos suscetíveis para o compartimento dos infectados é descrita por meio de um certo fator beta (β) chamado de taxa de transmissão. Outro elemento importante na construção de modelos epidemiológicos é a chamada dinâmica vital, segundo (Lima J. P., 2021):

É preciso reconhecer se a doença tem potencial para durar por muito tempo, ou se possui uma taxa de morte elevada, pois, caso afirmativo, deve se levar em consideração o número de mortes e nascimentos no período ativo da doença. Chamamos isso de dinâmica vital. Isso é relevante pois a modelagem via equação diferencial será diferente (p. 61).

6.2. Modelo SIS

Modelo epidemiológico determinístico compartimental SIS (suscetível – infectado – suscetível), usado para modelar doenças as quais não produzem imunidade, ou seja, um indivíduo suscetível a essa doença, uma vez infectado, havendo cura, volta ao estado inicial, podendo ser novamente infectado, sendo a gripe um exemplo de doença que pode ser estudada através desse modelo (Soares, 2020) e (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021).

Figura 10 - Modelo SIS (sem dinâmica vital).



Fonte: adaptado de (Sabeti, 2011) e (Soares, 2020).

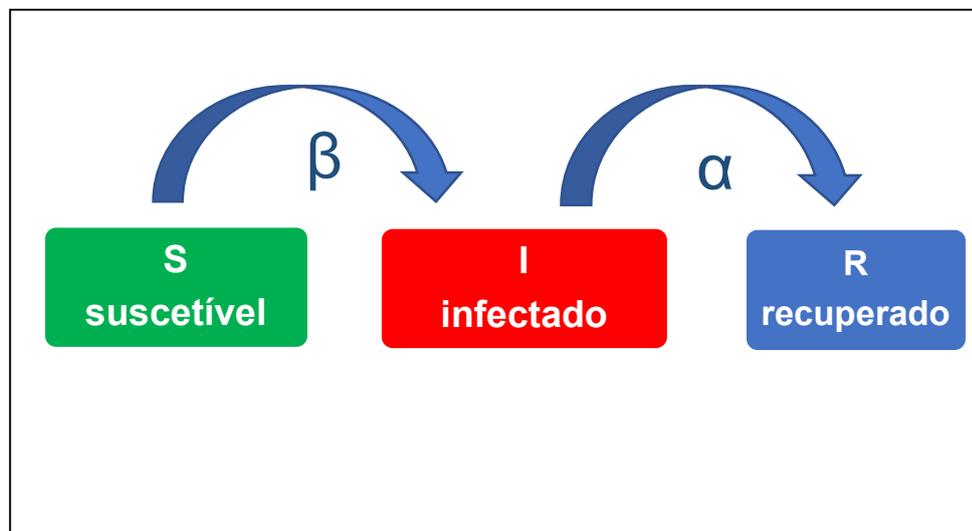
Nesse modelo observa-se, além de um fator beta (β), referente a taxa de transmissão da doença, outro fator, alfa (α) que representa a taxa de recuperação dessa doença.

6.3. Modelo SIR

Modelo epidemiológico determinístico compartimental SIR (suscetível – infectado – recuperado), considerado modelo fundamental da epidemiologia matemática baseado em EDO. Inicialmente introduzido a partir de um artigo publicado em 1927, por A. G. Mckendrick, médico escocês, e W. O. Kermack, químico escocês.

Nesse modelo há três compartimentos: o que compreende os indivíduos suscetíveis, ou seja, àqueles que ainda não entraram em contato com o agente infeccioso; o compartimento dos infectados, indivíduos que transmitem a doença, e o último compartimento, chamado de recuperado ou removido, é reservado aos indivíduos que se recuperaram da doença e a partir de então estão imunes, não podendo mais retornarem à condição de suscetíveis. Esse mesmo compartimento também abriga os indivíduos que por ventura vierem a óbito, em função da doença.

Figura 11- Modelo SIR (sem dinâmica vital).



Fonte: adaptado de (Sabeti, 2011) e (Soares, 2020).

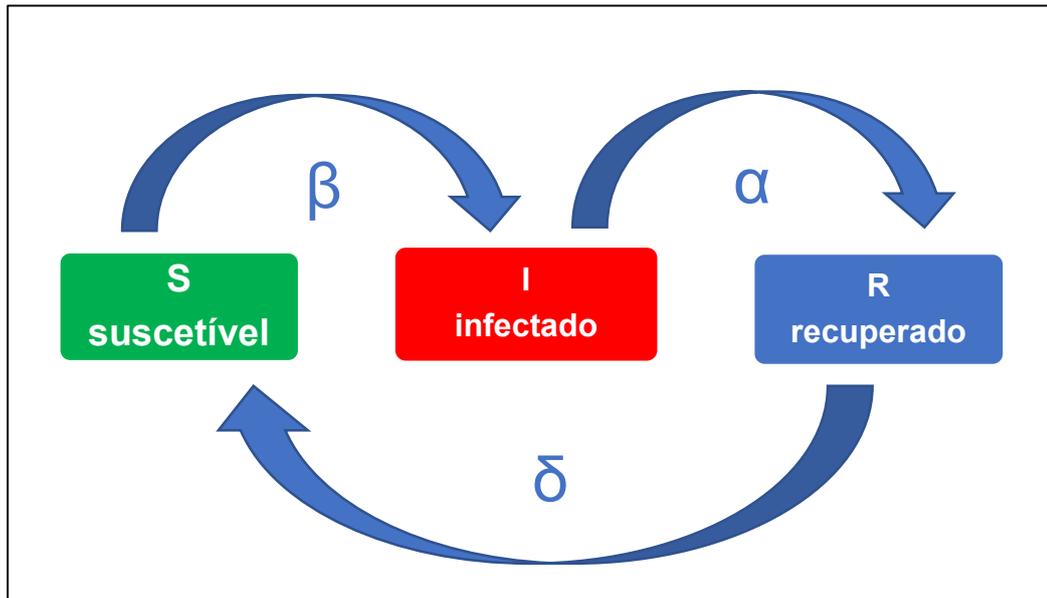
Também nesse modelo observa-se um fator beta (β) que representa a taxa de transmissão da doença, ou seja, o fator que representa a mudança do indivíduo da condição de suscetível para infectado, e um fator alfa (α) que representa a taxa de remoção ou recuperação, ou seja, a saída da condição de infectado, o que implica cura e imunidade ou óbito. A Rubéola é um exemplo de doença cujo o estudo pode ser feito com base nesse modelo (Sabeti, 2011) e (Soares, 2020).

6.4. Modelo SIRS

Modelo epidemiológico determinístico compartimental SIRS (suscetível – infectado – recuperado – suscetível), ou ainda modelo SIR com perda de imunidade. Este modelo foi desenvolvido em 1933, também por Mckendrick e Kermack, com a finalidade de descrever endemias. Nesse modelo considera-se a possibilidade de reinfeção, ou seja, para determinadas doenças, certos indivíduos após alcançarem a cura, isto é, a recuperação da doença, podem perder gradativamente a imunidade, tornando-se novamente suscetíveis à doença. A malária e a tuberculose são exemplos de doenças que podem ser descritas através deste modelo (Silva, 2022). Outra doença que apresenta perda gradativa da imunidade é a Covid-19 (Rocha, 2023).

Assim como no modelo SIR, o modelo SIRS possui um fator beta (β) que corresponde a taxa de transmissão da doença, um fator alfa (α), representando a taxa de recuperação ou remoção, e um novo fator, delta (δ), que corresponde a perda de imunidade.

Figura 12 - Modelo SIRS (sem dinâmica vital).



Fonte: adaptado de (Luiz, 2012) e (Vieira, 2016).

6.5. Equações Diferenciais do Modelo SIR sem Dinâmica Vital

A seguir o sistema de equações diferenciais que descrevem a variação entre os compartimentos do modelo SIR, considerando uma população de tamanho constante, sem dinâmica vital, e homogeneamente distribuída:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \quad (6.1)$$

Sendo $\frac{dS}{dt}$ a taxa de variação dos suscetíveis ao longo do tempo; $\frac{dI}{dt}$ a taxa de variação dos infectados, $\frac{dR}{dt}$ a taxa de variação dos recuperados, β representando a taxa de transmissão da infecção e α correspondendo a taxa de recuperação, em geral obtida através do inverso do período de duração d da infecção, ou seja, $\alpha = \frac{1}{d}$.

Seja $S(t)$ a parcela da população suscetível no instante t , $I(t)$ a parcela correspondente aos infectados no mesmo instante, e $R(t)$ a parcela do recuperados ou removidos do sistema, também no instante t , logo uma certa população N pode ser assim distribuída, $S(t) + I(t) + R(t) = N$, para $t \geq 0$.

O sistema de equações (6.1) também pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta' SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = +\frac{\beta' SI}{N} - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \quad (6.2)$$

Ambos os sistemas, (6.1) e (6.2), são equivalentes, considerando $\beta = \frac{\beta'}{N}$, onde β corresponde a taxa de infecção per-capita, e β' corresponde a taxa de infecção total, conforme (Marquesone, 2020).

Analisando o sistema de equações (6.1), é possível entender a dinâmica do processo descrita por ele, e conseqüentemente entender melhor a doença por ele modelada. Parâmetros epidemiológicos importantes são estimados a partir dessa análise. Um dos mais importantes, juntamente com a taxa de incidência da infecção, é o chamado número de reprodução básico, também conhecido como número de reprodutividade basal ou ainda “erre zero” (R_0), esse parâmetro responde pelo número médio de pessoas a serem contaminadas a partir de um único indivíduo infectado, e é dado por $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$. O valor de R_0 é usado na epidemiologia para avaliar a quão contagiosa é uma determinada doença, ou seja, sua capacidade de espalhamento (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021).

Caso o valor de R_0 seja maior que um ($R_0 > 1$), significa que um único indivíduo infectado consegue infectar mais que um indivíduo suscetível, o que implica a possibilidade de espalhamento do agente infeccioso na população, ou seja, há grande possibilidade de o evento se tornar uma epidemia. Para um valor de R_0 inferior a um ($R_0 < 1$), nesse caso um indivíduo infectado, em média, se quer consegue infectar outro indivíduo, o que pode levar ao fim da propagação da doença. Por outro lado, se

R_0 apresentar um valor igual a um ($R_0 = 1$), ou seja, um indivíduo infectado conseguindo infectar somente outro indivíduo, tal situação pode indicar a estabilidade desse evento, condição para o estabelecimento de uma endemia (Sabeti, 2011) e (Farias, 2017).

Outras informações preciosas para o entendimento do evento epidemiológico modelado, além das já citadas acima, podem ser obtidas também a partir do sistema (6.1), tais como a estabilidade de seus pontos de equilíbrio. Do ponto de vista matemático, analisar os pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais, se mostra extremamente útil, visto que fornece condições para o entendimento do comportamento das trajetórias no espaço de fase, ou ainda, no caso de modelos epidemiológicos, um ponto de equilíbrio é aquele no qual cessam as variações entre os compartimentos, ou seja, as variações são nulas, o que se traduz em duas condições, um equilíbrio trivial (ausência da doença), e um equilíbrio endêmico (estabilidade da doença), o que nos leva as seguintes equações: (Doering & Lopes, 2010, 4^a edição) e (Marquesone, 2020).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI = 0 \\ \frac{dI}{dt} = +\beta SI - \alpha I = 0 \\ \frac{dR}{dt} = +\alpha I = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Encontrar soluções de forma analítica, ou seja, obter uma fórmula que represente a solução para sistemas de equações diferenciais nem sempre é possível, sendo comum a utilização de métodos numéricos para essa tarefa, como por exemplo o método de Runge-Kutta, cuja solução pode ser conferida no trabalho de: (Santos, 2021). Uma outra maneira de obter informações a respeito da solução de um sistema de equações diferenciais se dá através da análise do seu retrato de fase, ou seja, o estudo da representação geométrica das trajetórias desse sistema, como podemos observar em: (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021).

7. CONSTRUÇÃO DO MODELO

Neste capítulo são apresentadas várias simulações a partir da construção de um modelo matemático epidemiológico. A ferramenta utilizada para construir o modelo é o editor de planilhas Microsoft Excel²². Os valores de referência utilizados nessa análise foram obtidos a partir dos relatórios epidemiológicos fornecidos pela Sala de Situação Integrada, composta pela Defesa Civil do Estado de Rondônia, Agência Estadual de Vigilância em Saúde de Rondônia – AGEVISA, e Secretaria de Estado da Saúde – SESAU. (figura 13).

Figura 13 - Relatório Epidemiológico.

Município	Confirmados	Óbitos	Curados	Taxa Curados/ Confirmados	Incidência/ 100.000 hab	Letalidade
Colorado do Oeste	176	3	143	81%	1035,2	1,7%
Campo Novo de Rondônia	148	5	140	95%	1046,8	3,4%
Vale do Anari	148	1	129	87%	1321,0	0,7%
Santa Luzia D'Oeste	144	1	132	92%	2055,7	0,7%
Seringueiras	131	0	123	94%	1104,9	0,0%
Rio Crespo	126	0	103	82%	3347,5	0,0%
Alvorada D'Oeste	125	7	108	86%	795,6	5,6%
Mirante da Serra	119	3	110	92%	1087,1	2,5%
Theobroma	111	0	104	94%	1062,8	0,0%
Governador Jorge Teixeira	98	2	86	88%	1261,7	2,0%
Cabixi	94	5	85	90%	1769,6	5,3%
Vale do Paraíso	83	2	75	90%	1216,1	2,4%
Cacaulândia	79	0	77	97%	1268,1	0,0%
São Felipe D'Oeste	79	1	76	96%	1527,5	1,3%
Castanheiras	71	1	33	46%	2326,3	1,4%
Novo Horizonte do Oeste	63	1	58	92%	737,9	1,6%
Corumbiara	37	3	32	86%	500,6	8,1%
Ministro Andreazza	34	1	28	82%	352,0	2,9%
Teixeirópolis	34	1	33	97%	789,2	2,9%
Primavera de Rondônia	21	1	20	95%	735,3	4,8%
Parecis	19	1	17	89%	312,8	5,3%
Rondônia	63267	1305	54687	86,44%	3559,9	2,06%

© 2020 Governo do Estado de Rondônia
Todos os Direitos Reservados

Palácio Rio Madeira - Av. Farquar, 2986
Bairro Pedrinhas
CEP 76.801-470 - Porto Velho, RO



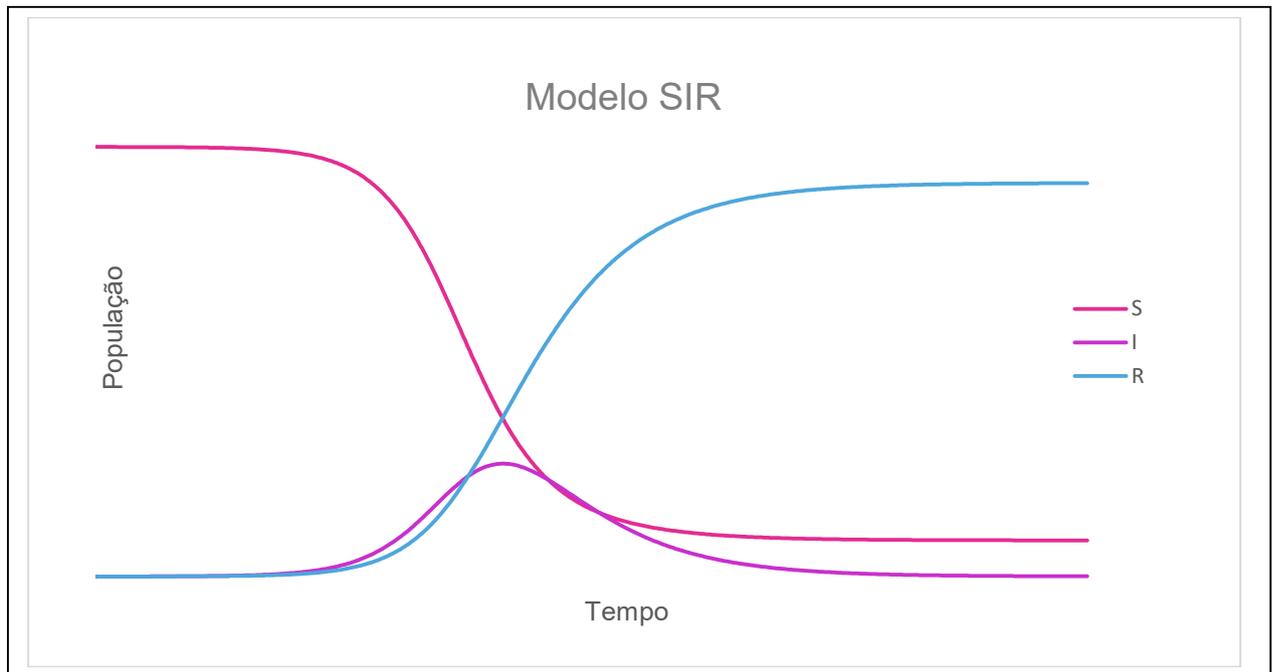
Sistema de Comando de Incidentes - COVID-19 | Sala de Situação Integrada | Relatório de Ações

Edição: 171
21 de setembro de 2020

Fonte: (Defesa Civil, 2020).

²² https://pt.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel

Gráfico 5 – Representação gráfica de um modelo SIR.



Fonte: O próprio autor.

No processo de construção das simulações foram usados os seguintes parâmetros:

- população do Município de Colorado do Oeste – Rondônia: **15663 pessoas**, (Site do IBGE, 2023);
- valor estimado para o Número de Reprodutividade Basal (R_0) médio para o SARS-CoV-2: **2,63** (Oxford Brazil, 2023);
- período de transmissibilidade: **14 dias, 10 dias e 7 dias** (<https://www.unasus.gov.br>, 2023).
- Considerando o tempo médio de perda de imunidade em 180 dias, sendo $\gamma = \frac{1}{180}$, representando a taxa de perda de imunidade por dia (The New England Journal of Medicine, 2020).
- Considerando a média de letalidade observada no município de Colorado do Oeste (Defesa Civil, 2020), representada por $\delta = 0,012$.

Todas as simulações foram construídas no editor de planilhas Excel, conforme modelo apresentado na figura 14, a seguir.

Figura 14 - Planilha Excel - SIR.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	N	15663	Indivíduos			Atual				Variações				Atualização		
2	delta t	1	dias	dias	S	I	R		dS	dI	dR		S	I	R	
3					0	15662	1	0		-0,18998787	0,118559298	0,071429		15661,8	1,118559	0,071429
4	Szero	15662	Indivíduos		1	15662	1,1186	0,0714		-0,21251012	0,132613027	0,079897		15661,6	1,251172	0,151326
5	Izero	1	Indivíduos		2	15662	1,2512	0,1513		-0,237701456	0,148332004	0,089369		15661,4	1,399504	0,240695
6	Rzero	0	Indivíduos		3	15661	1,3995	0,2407		-0,265877977	0,165913382	0,099965		15661,1	1,565418	0,34066
7					4	15661	1,5654	0,3407		-0,29739317	0,185577619	0,111816		15660,8	1,750995	0,452475
8					5	15661	1,751	0,4525		-0,33264231	0,207571215	0,125071		15660,5	1,958567	0,577546
9	beta	0,19	Indivíduos/Indivíduos		6	15660	1,9586	0,5775		-0,37206739	0,232169779	0,139898		15660,1	2,190736	0,717444
10	d	14	dias		7	15660	2,1907	0,7174		-0,416162618	0,259681452	0,156481		15659,7	2,450418	0,873925
11					8	15660	2,4504	0,8739		-0,465480562	0,290450721	0,17503		15659,2	2,740868	1,048955
12	R0	2,63			9	15659	2,7409	1,049		-0,52063901	0,324862689	0,195776		15658,7	3,065731	1,244731

Fonte: O próprio autor.

Os parâmetros utilizados na planilha para a implementação do modelo aparecem em destaque, conforme figura 15, a seguir.

Figura 15 -- Planilha Excel - SIR.

	A	B	C	D
1	N	15663	Indivíduos	
2	delta t	1	dias	
3				
4	Szero	15662	Indivíduos	
5	Izero	1	Indivíduos	
6	Rzero	0	Indivíduos	
7				
8				
9	beta	0,19	Indivíduos/Indivíduos	
10	d	14	dias	
11				
12	R0	2,63		

Fonte: O próprio autor.

Sendo **N** o valor correspondente a população do município de Colorado do Oeste, **delta t** representa a unidade de tempo do modelo, **Szero** corresponde a quantidade inicial de indivíduos suscetíveis, **Izero** representa o infectado inicial, **Rzero** representa a quantidade inicial de removidos ou recuperados, **beta** corresponde a taxa de transmissão, **d** o período médio de duração da infecção e **R₀** o número de reprodutividade basal estimado para o SARS-CoV-2.

As fórmulas utilizadas na execução das simulações correspondem a discretização das equações diferenciais que descrevem as variações entre os compartimentos do modelo SIR, conforme figura 16, a seguir.

Figura 16 - – Equações do modelo SIR.

$$\Delta S = \left[-\frac{\beta(t)}{N} \cdot (S \cdot I) \right] \cdot \Delta t$$

$$\Delta I = \left[+\frac{\beta(t)}{N} \cdot (S \cdot I) - \frac{1}{d(t)} \cdot I \right] \cdot \Delta t$$

$$\Delta R = \left[+\frac{1}{d(t)} \cdot I \right] \cdot \Delta t$$

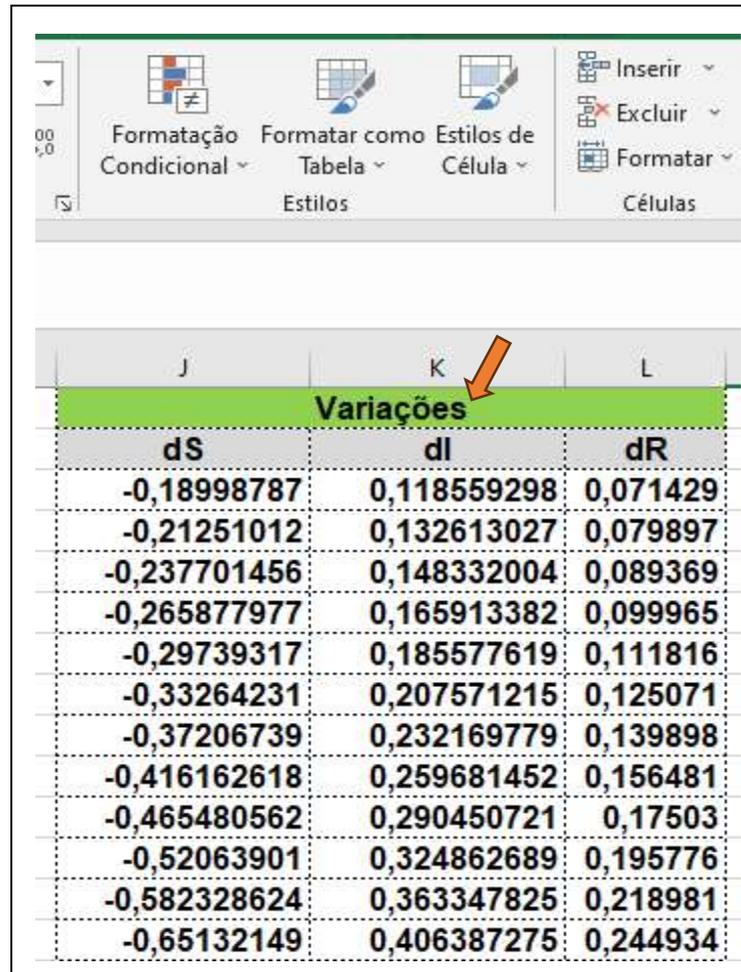
Fonte: O próprio autor.

Um dos métodos de discretização utilizado nos estudos de equações diferenciais é chamado de método das diferenças finitas (MDF), conforme (Siqueira, 2019):

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação das derivadas por diferenças finitas. Esta aproximação é baseada na série de Taylor, que produz fórmulas que aproximam valores em um ponto com dependência de um ou mais pontos anteriores (p. 29).

Na planilha Excel as fórmulas apresentadas acima geram valores para a atualização do modelo, conforme figura 17, a seguir.

Figura 17 -- Valores gerados para a atualização do modelo SIR.



Variasões		
dS	dI	dR
-0,18998787	0,118559298	0,071429
-0,21251012	0,132613027	0,079897
-0,237701456	0,148332004	0,089369
-0,265877977	0,165913382	0,099965
-0,29739317	0,185577619	0,111816
-0,33264231	0,207571215	0,125071
-0,37206739	0,232169779	0,139898
-0,416162618	0,259681452	0,156481
-0,465480562	0,290450721	0,17503
-0,52063901	0,324862689	0,195776
-0,582328624	0,363347825	0,218981
-0,65132149	0,406387275	0,244934

Fonte: O próprio autor.

O modelo implementado através do editor de planilhas Excel, é constituído de três tabelas, assim nomeadas: **Atual**, **Variasões** e **Atualização**. A primeira linha corresponde ao dia zero, conforme figura 18.

Figura 18 - Tabelas modelo SIR.

	Atual			Variasões			Atualização		
dias	S	I	R	dS	dI	dR	S	I	R
0:	15662	1	0	-0,18998787	0,118559298	0,071429	15661,8	1,118559	0,071429
1:	15661,8	1,118559	0,071429	-0,21251012	0,132613027	0,079897	15661,6	1,251172	0,151326

Fonte: O próprio autor

Na tabela **Atual**, estão os valores iniciais de **Suscetíveis (S)**, **Infectados (I)** e **Recuperados (R)**. Na tabela **Variações**, estão as fórmulas, já citadas acima, que estão vinculadas aos valores de **Suscetíveis** e **Infectados** contidos na tabela **Atual**. Ou seja, as células J3, K3 e L3 da planilha, que correspondem às variações dos suscetíveis(**dS**), infectados(**dI**) e recuperados(**dR**), apresentam fórmulas conforme tabela a seguir.

Tabela 5 - Fórmulas modelo SIR.

Célula	Fórmula
J3	$=(-\text{beta}/N * F3 * G3) * \text{deltat}$
K3	$=(+\text{beta}/N * F3 * G3 - 1/d * G3) * \text{deltat}$
L3	$=(1/d * G3) * \text{deltat}$

Fonte: O próprio autor.

Na tabela **Atualização** os valores referentes aos **Suscetíveis (S)**, **Infectados (I)** e **Recuperados (R)** são acrescidos de suas respectivas variações, **dS**, **dI** e **dR**, conforme fórmulas apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 6 – Fórmulas modelo SIR.

Célula	Fórmulas
N3	$=\text{MÍNIMO}(\text{MÁXIMO}(F3+J3;0);N)$
O3	$=\text{MÍNIMO}(\text{MÁXIMO}(G3+K3;0);N)$
P3	$=\text{MÍNIMO}(\text{MÁXIMO}(H3+L3;0);N)$

Fonte: O próprio autor.

A segunda linha da tabela **Atual** corresponde aos valores da primeira linha da tabela **Atualização**, e assim sucessivamente, ou seja, os valores da tabela **Atual**, a partir da segunda linha correspondem aos valores da linha anterior da tabela **Atualização**, conforme figura 19.

Figura 19 - Tabelas modelo SIR.

	Atual			Variações			Atualização		
dias	S	I	R	dS	dI	dR	S	I	R
0	15662	1	0	-0,18998787	0,118559298	0,071429	15661,8	1,118559	0,071429
1	15661,8	1,118559	0,071429	-0,21251012	0,132613027	0,079897	15661,6	1,251172	0,151326

Fonte: O próprio autor

Para plotar o gráfico correspondente ao modelo desenvolvido na planilha Excel, basta selecionar a tabela **Atual**, selecionar no menu inserir, comando gráfico, conforme figura 20, a seguir.

Figura 20 - Tabelas modelo SIR.

	Atual		
dias	S	I	R
0	15662	1	0
1	15661,8	1,118559	0,071429
2	15661,6	1,251172	0,151326
3	15661,4	1,399504	0,240695
4	15661,1	1,565418	0,34066
5	15660,8	1,750995	0,452475
6	15660,5	1,958567	0,577546
7	15660,1	2,190736	0,717444
8	15659,7	2,450418	0,873925
9	15659,2	2,740868	1,048955

Fonte: O próprio autor.

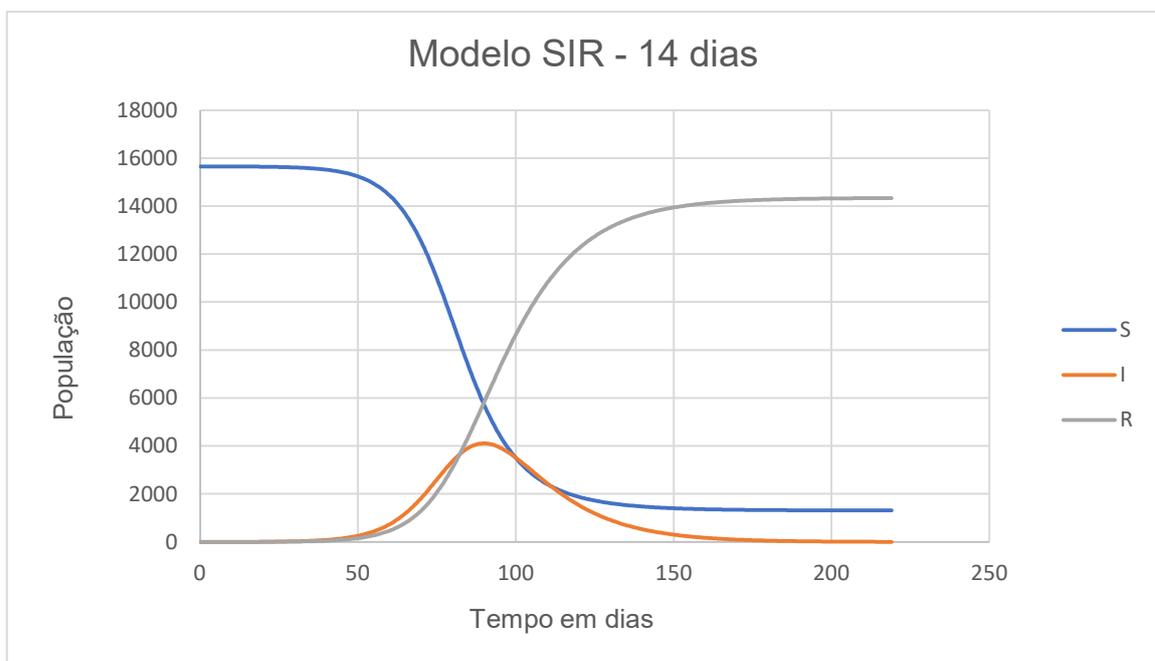
7.1. Simulações

As simulações a seguir compreendem um período de tempo de 219 dias, a partir da notificação do primeiro caso confirmado, período anterior a administração da vacina na população. Além disso as simulações consideram três períodos distintos de duração da infecção, 14 dias, 10 dias e 7 dias, com ou sem taxa de letalidade e com ou sem taxa de perda de imunidade.

7.1.1. Simulação – 14 dias (sem taxa de letalidade)

A primeira das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,19**; tempo médio de duração da doença = **14 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**.

Gráfico 6 – Representação gráfica de um modelo SIR sem taxa de letalidade.

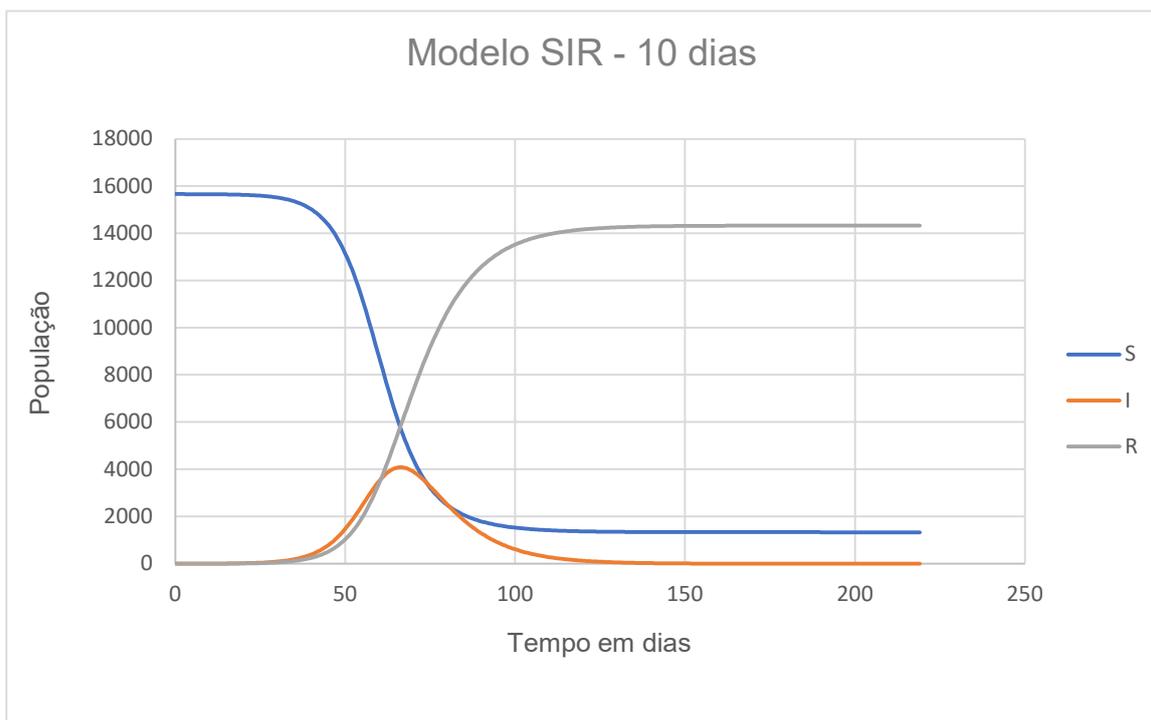


Fonte: O próprio autor.

7.1.2. Simulação – 10 dias (sem taxa de letalidade)

A segunda das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,263**; tempo médio de duração da doença = **10 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663** pessoas.

Gráfico 7 - Modelo SIR sem taxa de letalidade.

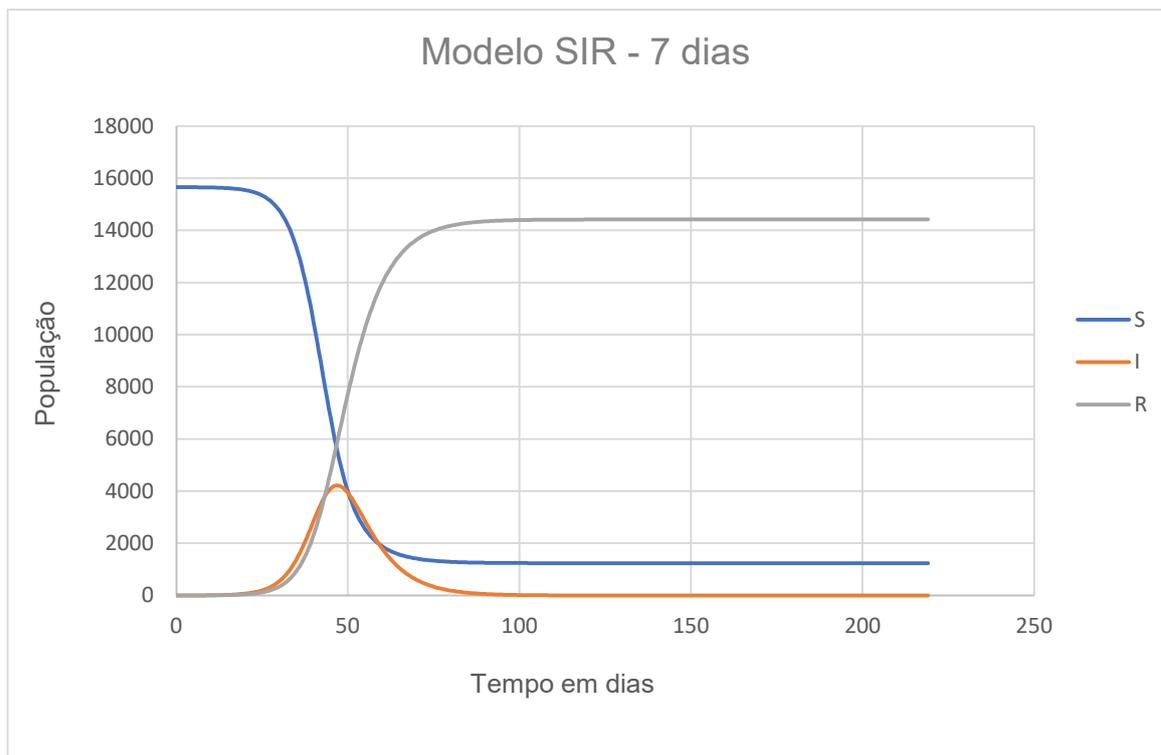


Fonte: O próprio autor.

7.1.3. Simulação – 7 dias (sem taxa de letalidade)

A terceira das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,38**; tempo médio de duração da doença = **7 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**.

Gráfico 8 - Modelo SIR sem taxa de letalidade.



Fonte: O próprio autor.

7.1.4. Simulação – 14 dias (com taxa de letalidade)

A quarta das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,19**; tempo médio de duração da doença = **14 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**. Nessa simulação é acrescentado um fator (δ) = **0,012**, relativo a letalidade, fato que promove uma pequena alteração em uma das fórmulas, conforme figura 21, a seguir.

Figura 21 - Equações do modelo SIR com taxa de letalidade.

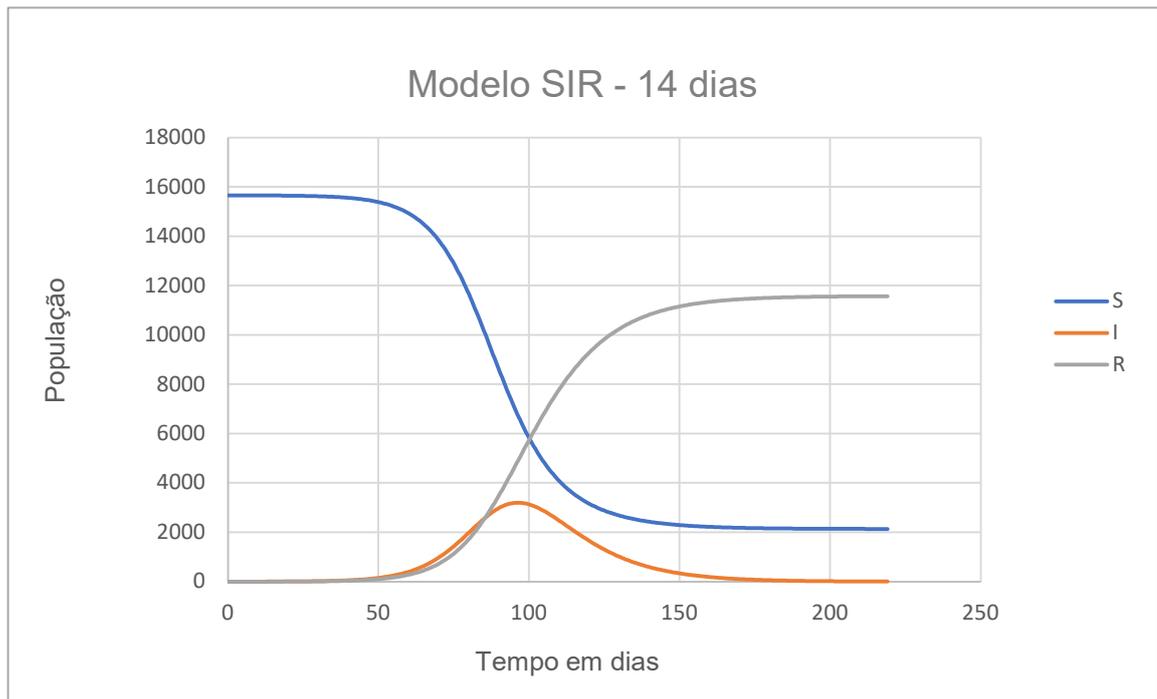
$$\Delta S = \left[-\frac{\beta(t)}{N} \cdot (S \cdot I) \right] \cdot \Delta t$$

$$\Delta I = \left[+\frac{\beta(t)}{N} \cdot (S \cdot I) - \frac{1}{d(t)} \cdot I - \delta(t) \cdot I \right] \cdot \Delta t$$

$$\Delta R = \left[+\frac{1}{d(t)} \cdot I \right] \cdot \Delta t$$

Fonte: O próprio autor.

Gráfico 9 – Representação gráfica de um modelo SIR com taxa de letalidade.



Fonte: O próprio autor.

7.1.5. Simulação – 10 dias (com taxa de letalidade)

A quinta das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,263**; tempo médio de duração da doença = **10 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de letalidade (δ) = **0,012**.

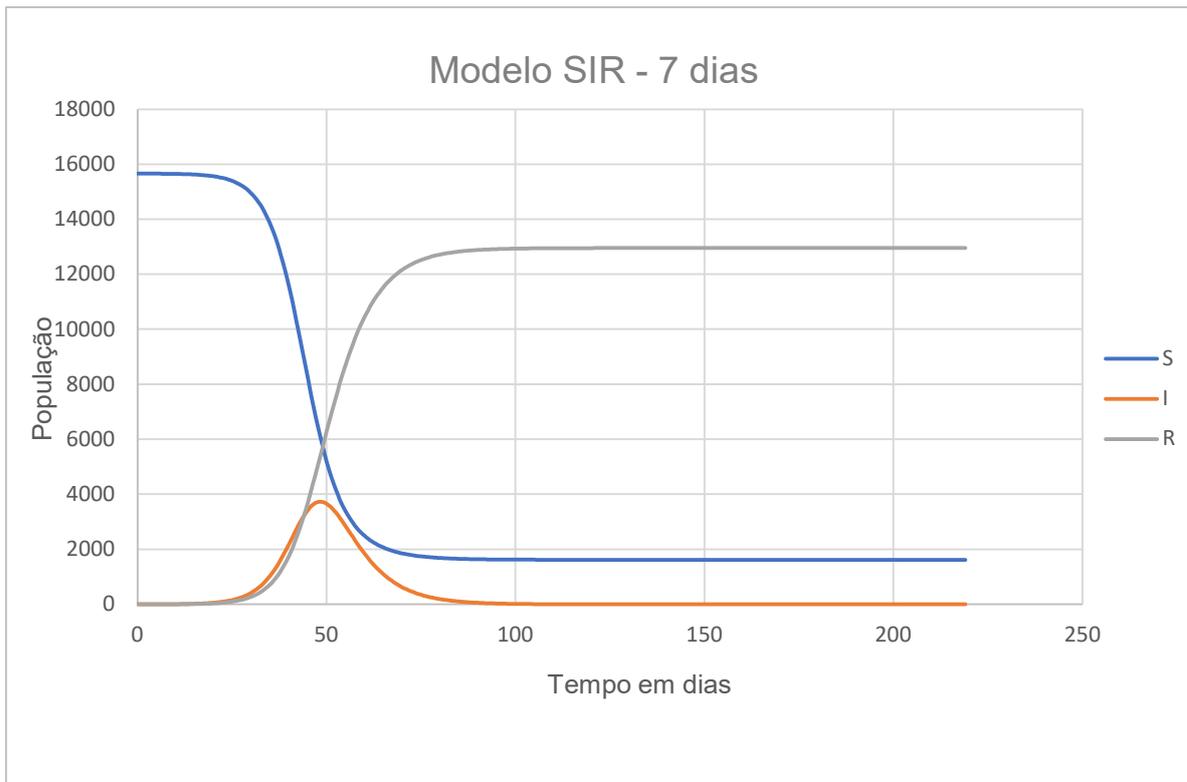
Gráfico 10 – Representação gráfica de um modelo SIR com taxa de letalidade.



Fonte: O próprio autor.

7.1.6. Simulação – 7 dias (com taxa de letalidade)

A sexta das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,38**; tempo médio de duração da doença = **7 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de letalidade (δ) = **0,012**.

Gráfico 11 – Representação gráfica de um modelo SIR com taxa de letalidade.

Fonte: O próprio autor.

7.1.7. Simulação – 14 dias (com perda de imunidade)

A sétima das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,19**; tempo médio de duração da doença = **14 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**. Nessa simulação é acrescentado ao modelo um fator (γ) = **0,0055**, que corresponde a perda natural de imunidade em média após 180 dias, fato que promove uma alteração em duas das fórmulas, conforme figura 22, a seguir.

Figura 22 - Equações do modelo SIR com perda de imunidade (SIRS).

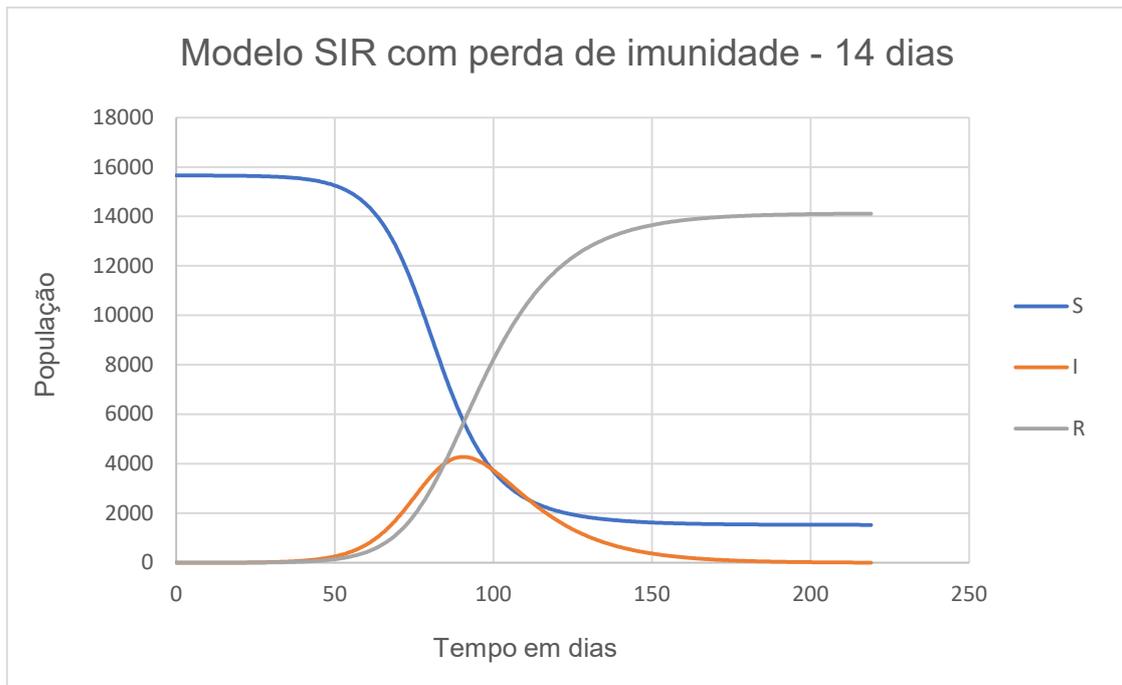
$$\Delta S = \left[-\frac{\beta(t)}{N} \cdot (S \cdot I) + \gamma(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$\Delta I = \left[+\frac{\beta(t)}{N} \cdot (S \cdot I) - \frac{1}{d(t)} \cdot I \right] \cdot \Delta t$$

$$\Delta R = \left[+\frac{1}{d(t)} \cdot I - \gamma(t) \right] \cdot \Delta t$$

Fonte: O próprio autor.

Gráfico 12 – Representação gráfica de um modelo SIR com perda de imunidade.

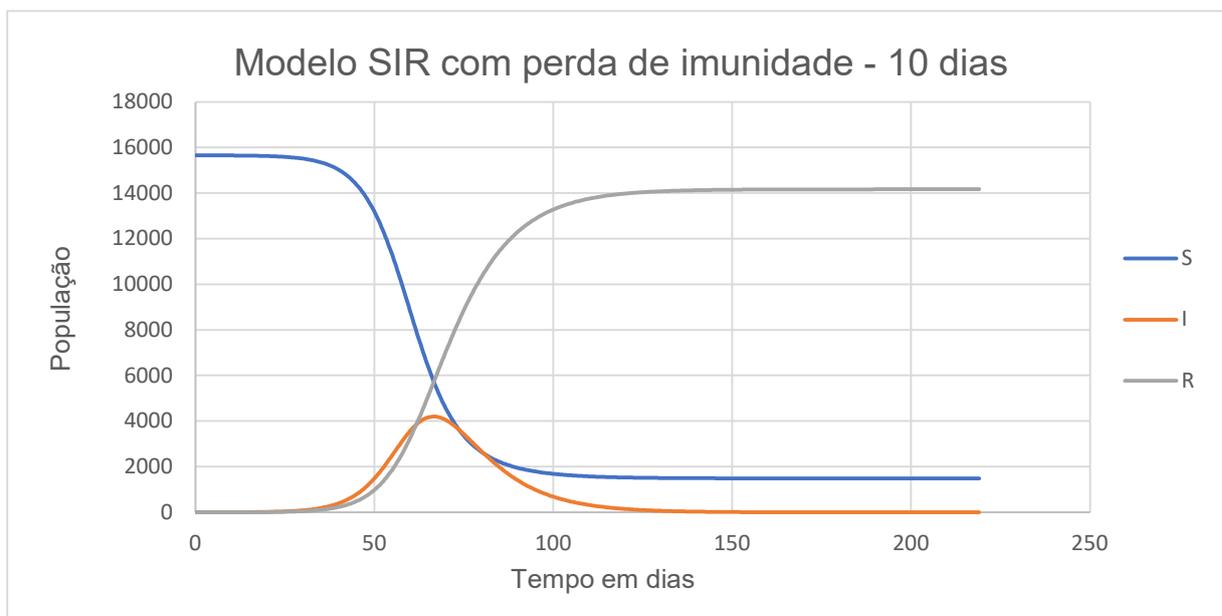


Fonte: O próprio autor.

7.1.8. Simulação – 10 dias (com perda de imunidade)

A oitava das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,263**; tempo médio de duração da doença = **10 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de perda de imunidade (γ) = **0,0055**.

Gráfico 13 – Representação gráfica de um modelo SIR com perda de imunidade.

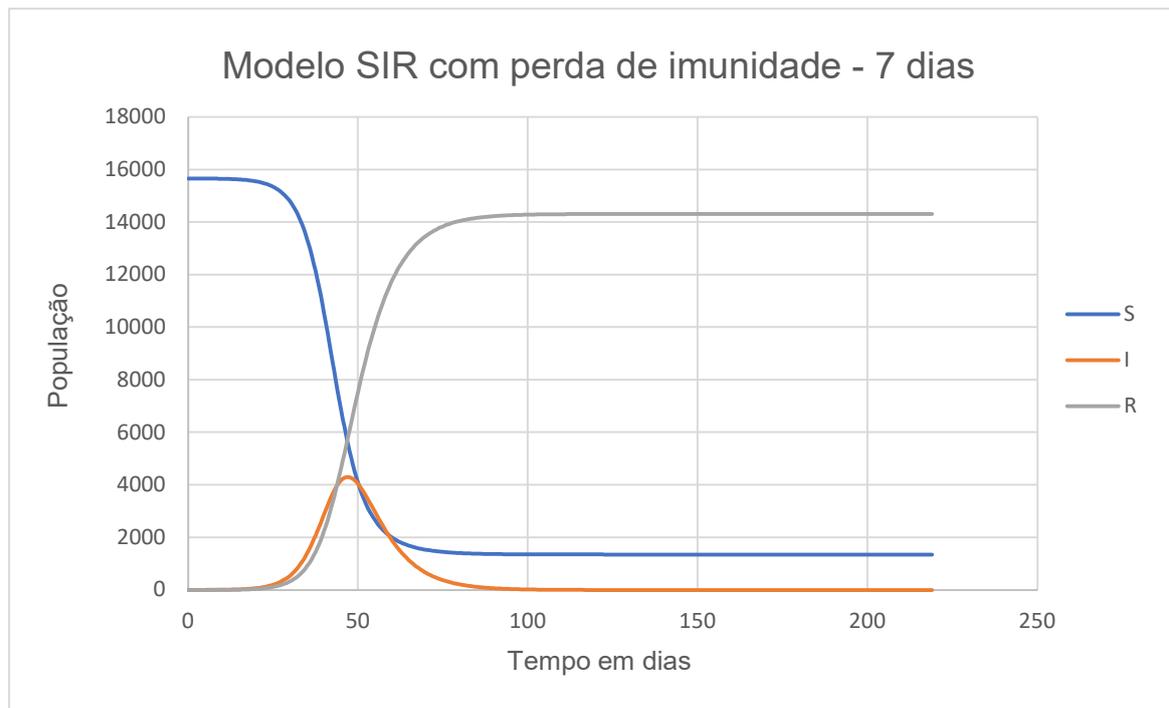


Fonte: O próprio autor.

7.1.9. Simulação – 7 dias (com perda de imunidade)

A nona das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,38**; tempo médio de duração da doença = **7 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de perda de imunidade (γ) = **0,0055**.

Gráfico 14 – Representação gráfica de um modelo SIR com perda de imunidade.

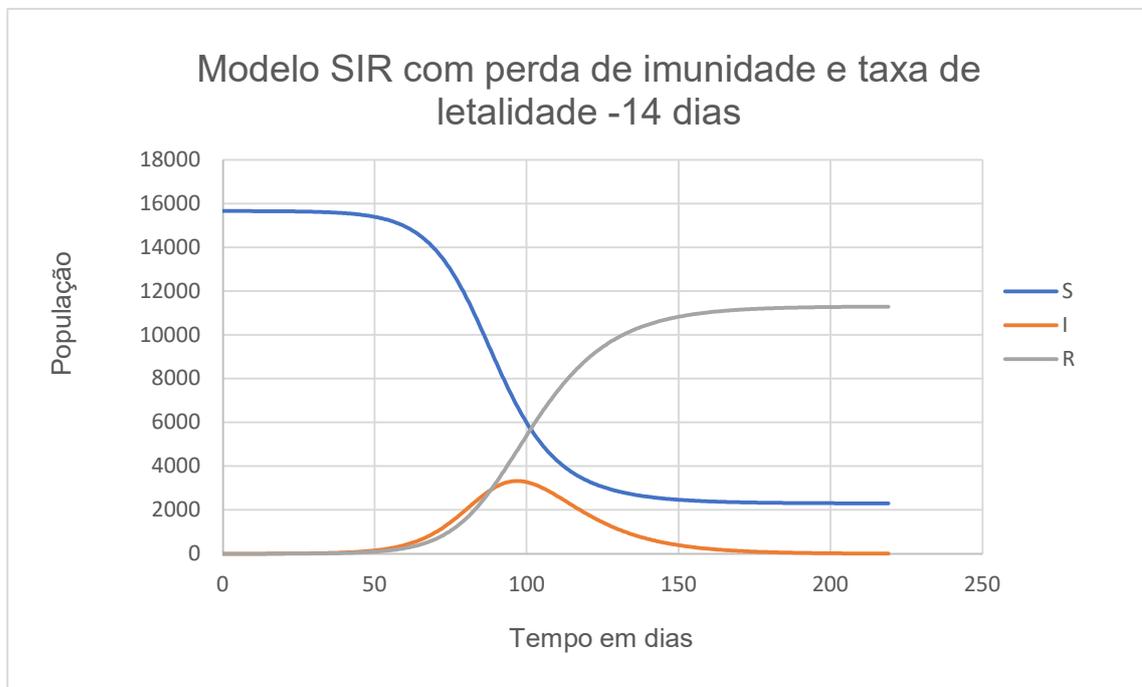


Fonte: O próprio autor.

7.1.10. Simulação – 14 dias (com perda de imunidade e letalidade)

A décima das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,19**; tempo médio de duração da doença = **14 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de perda de imunidade (γ) = **0,0055** e taxa de letalidade (δ) = **0,012**.

Gráfico 15 – Representação gráfica de um modelo SIR com perda de imunidade e letalidade.

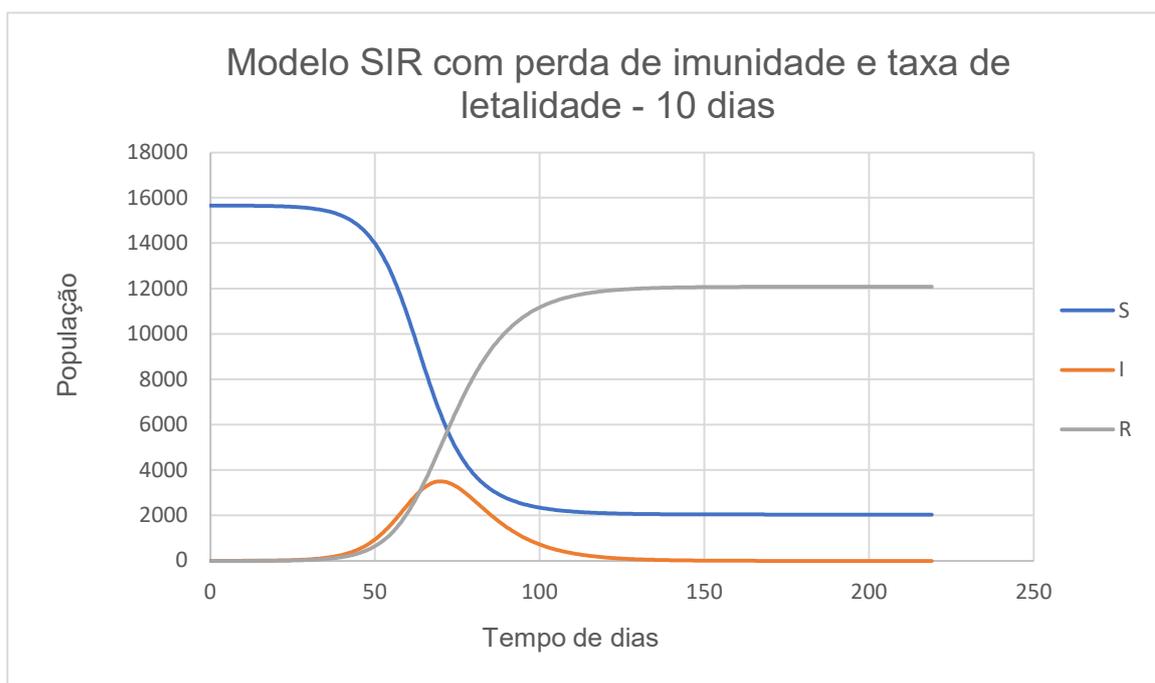


Fonte: O próprio autor.

7.1.11. Simulação – 10 dias (com perda de imunidade e letalidade)

A décima primeira das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,263**; tempo médio de duração da doença = **10 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de perda de imunidade (γ) = **0,0055** e taxa de letalidade (δ) = **0,012**.

Gráfico 16 – Representação gráfica de um modelo SIR com perda de imunidade e letalidade.

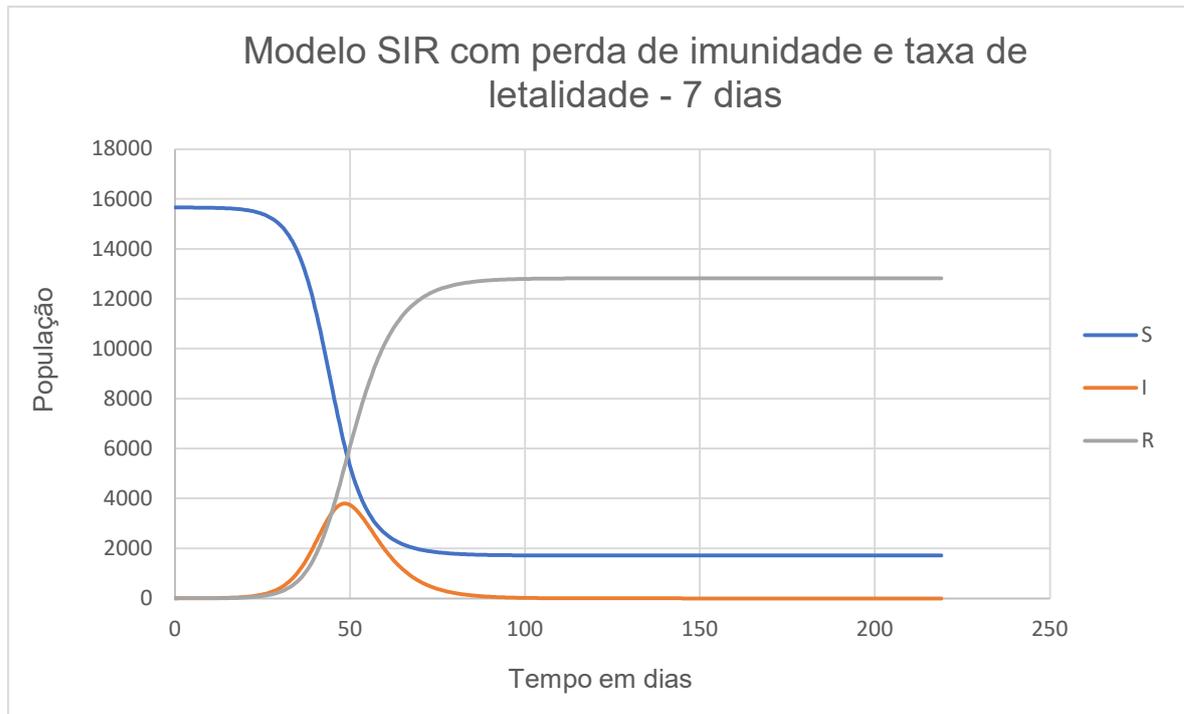


Fonte: O próprio autor.

7.1.12. Simulação – 7 dias (com perda de imunidade e letalidade)

A décima segunda das simulações realizadas considera os seguintes parâmetros: número de reprodutividade basal (R_0) = **2,63**; taxa de transmissão (β) = **0,38**; tempo médio de duração da doença = **7 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de perda de imunidade (γ) = **0,0055** e taxa de letalidade (δ) = **0,012**.

Gráfico 17 – Representação gráfica de um modelo SIR com perda de imunidade e letalidade.



Fonte: O próprio autor.

Ao analisar as simulações apresentadas, fica claro que o aumento da taxa de transmissão juntamente com a diminuição do tempo médio de duração da infecção produz as maiores alterações no modelo, fazendo com que o número máximo de infectados seja alcançado num período de tempo menor e a curva que representa a quantidade de suscetíveis diminua de forma acentuada.

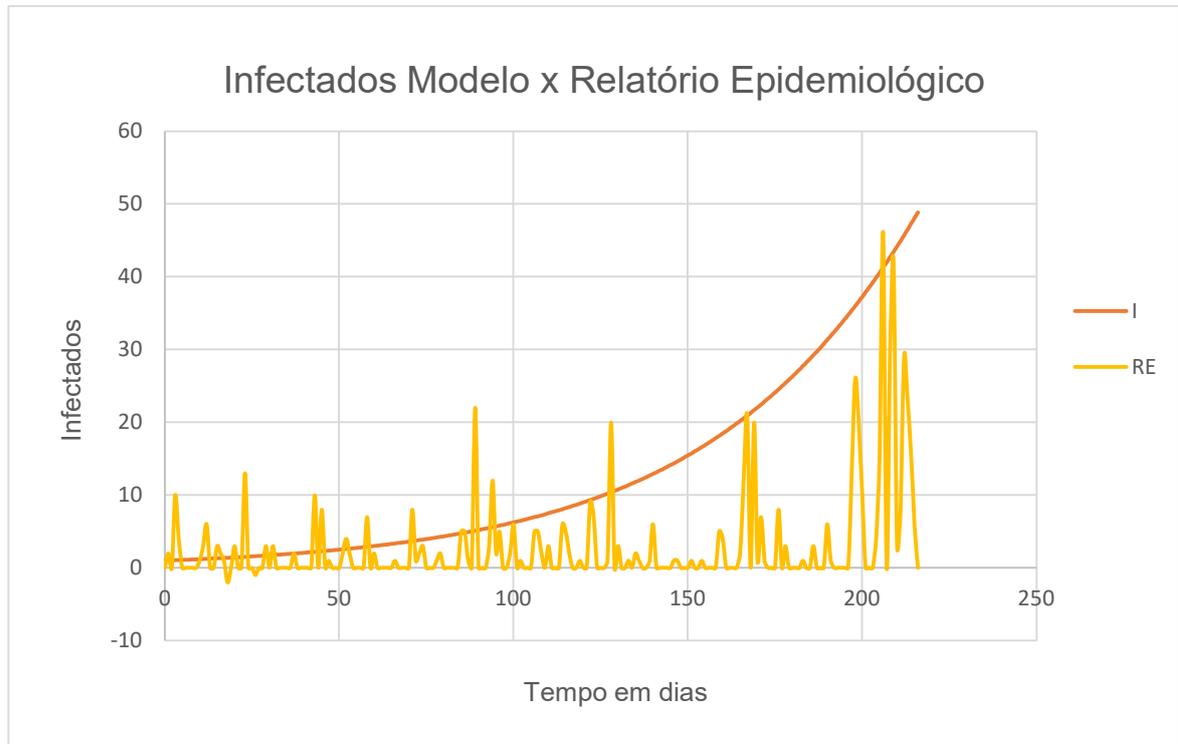
Outro fator que produziu mudança significativa ao ser acrescentado ao modelo foi a taxa de letalidade. Essa taxa representa o percentual de indivíduos que foram a óbito devido a infecção e, portanto, serão excluídos do modelo, de maneira que a curva que representa os recuperados tenha um alcance reduzido. Evidencia-se então a importância de medidas controle de circulação de pessoas como forma de baixar a taxa de transmissão da infecção, produzindo assim o chamado “achatamento da curva”, que significa um crescimento mais lento dos infectados, o que reduz a pressão sobre o sistema de saúde.

7.2. Simulação x relatório epidemiológico

A seguir é apresentada, através de representação gráfica, uma comparação do número de infectados produzidos pela simulação e os dados reais apresentados através do relatório epidemiológico.

Os parâmetros utilizados na simulação foram os seguintes: número efetivo de reprodução (R_e) = **1,428**; taxa de transmissão (β) = **0,102**; tempo médio de duração da doença = **14 dias**; população de Colorado do Oeste = **15663 pessoas**; taxa de perda de imunidade (γ) = **0,0055** e taxa de letalidade (δ) = **0,012**.

À medida que uma epidemia avança, a fração da população suscetível muda, de modo que o número de pessoas infectadas por um único indivíduo infectado também muda. O número efetivo de reprodução em um determinado momento, denotado R_e , é definido como o número médio de pessoas infectadas por um único indivíduo infectado naquele momento da epidemia (López-Flores, Marchesin, Matos, & Schechter, 2021, p. 13).

Gráfico 18 – Simulação – 14 dias x relatório epidemiológico.

Fonte: O próprio autor.

Embora o modelo produza dados um tanto quanto discrepantes ao serem comparados com os dados reais, emitidos através de relatórios epidemiológicos, como visto nas simulações anteriores, é possível adequar os parâmetros inseridos no modelo, de modo a obter resultados um pouco mais próximos da realidade, como pode ser visto na representação gráfica acima (gráfico 18), sem perder de vista que diante da simplicidade do modelo produzido não é razoável exigir precisão.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da construção deste trabalho foi possível constatar a importância da modelagem matemática como uma ferramenta extremamente útil no processo de ensino-aprendizagem, sendo capaz de viabilizar a integração de diversas áreas do conhecimento, estimulando a pesquisa, a experimentação, possibilitando o estabelecimento de conexões entre a matemática e assuntos cotidianos, de modo a despertar o engajamento dos alunos, a promover aproximação da matemática mesmo àqueles que não tem tanta afinidade com essa disciplina e procuram sempre um sentido para o que é estudado.

A medida em que o assunto escolhido para ser trabalhado, de alguma forma seja caro aos alunos ou tenha alguma relevância social, a exemplo do assunto utilizado como fonte de dados para a construção dos modelos apresentados neste trabalho, nesse caso a pandemia da Covid-19, isso tende a tornar a tarefa mais atraente aos alunos. A proposta de utilizar o Excel, editor de planilhas da Microsoft, se mostrou bastante interessante, visto que apresenta uma interface amigável e não requer do usuário, noções de programação, como em outros softwares, se mostrando suficiente diante da simplicidade dos modelos aqui construídos, credenciando-se assim como uma alternativa para o desenvolvimento de uma série de conteúdos do ensino básico.

À vista do que foi apresentado neste trabalho, cujo objetivo era mostrar por meio de exemplos o desenvolvimento de conteúdos matemáticos a partir da modelagem matemática, é possível sim concluir que o objetivo foi plenamente alcançado.

9. REFERÊNCIAS

- Fonte: **Site do Ibge**: <https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/ro/colorado-do-oeste.html>. 27 de julho de 2023.
- Barbosa, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. Caxambu, Minas Gerais. 2001.
- Bassanezi, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Editora contexto. 2016.
- Biembengut, M. S., & Hein, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto. 2005.
- Boldrini, J. L., Costa, S. I., Figueiredo, V. L., & Wetzler, H. G. **Álgebra Linear**, 3ª ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil. 1980.
- Boyce, W. E., Diprima, R. C., & Meade, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno**. 11ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 2020.
- Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasil. 2000.
- Brasil. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Prosa Produção Editorial Ltda. 2006.
- Brito, Sávio Breno Pires; Braga, Isaque Oliveira; Cunha, Carolina Coelho; Palácio, Maria Augusta Vasconcelos; Takenami, Lukari. **Pandemia da COVID-19: o maior desafio do século XXI**. Vigilância Sanitária em Debate,, vol. 8, núm. 2, pp. 54-63. Abril-junho de 2020.
- Bronson, R., & Costa, G. B. **Equações Diferenciais**, 3ªed. Porto Alegre: Bookman. 2008.
- D'Ambrosio, U. **Etnomatemática: Elo Entre as Tradições e a Modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica. 2020.
- Defesa Civil, A. S. **Relatório de Ações - Sistema de Comando de Incidentes - Covid-19**. Porto Velho. 2020.
- Doering, C. I., & Lopes, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: Impa. 4ª edição, 2010.
- Farias, A. V. **Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária**. Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil. 07 de dezembro de 2017.
- Figueiredo, D. G., & Neves, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Impa. 1997.
- Fonseca, K. G. **Estudo de um modelo epidemiológico do tipo SIRS com taxa de incidência não linear**. Itajubá, Minas Gerais, Brasil. 13 de setembro de 2017.

- Franco, C. M., & Dutra, R. F. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia e Aplicação na Evolução da Covid-19 no Brasil e no Estado da Paraíba.** Educação, Ciência e Saúde, pp. 1-20. Jan, jun de 2020.
- Gomes, E. C. **Conceitos e ferramentas da epidemiologia.** Recife: : Ed. Universitária da Ufpe. 2015.
- Guimarães, J. D. **Uma análise do modelo SIRS e o estudo de suas bifurcações.** Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. 17 de agosto de 2022.
- <https://www.unasus.gov.br>. Fonte: **Una Sus**:
<https://www.unasus.gov.br/especial/covid19/markdown/574>. 27 de julho de 2023.
- Jr., P. S. (s.d.). **Entendendo a COVID-19 - Modelos Compartimentais para Epidemias Infecciosas / Matemática na Prática.** Fonte: YouTube:
<https://www.youtube.com/watch?v=4FiaVztgDxU>. Junho de 2023.
- Lima, J. L. **Contextualização e conteúdo das questões de matemática do Enem e dos vestibulares da Usp, Unicamp e Ufscar.** São Carlos, São Paulo, Brasil. 2011.
- Lima, J. P. **Sistemas Complexos aplicado a modelos epidemiológicos.** Revista Physicae Organum, v.7, n. 1, pp. 59-71. 20 de abril de 2021.
- López-Flores, M. M., Marchesin, D., Matos, V., & Schecter, S. **Equações diferenciais e modelos epidemiológicos.** Rio de Janeiro: Editora do Impa. 2021.
- Luiz, M. H. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia.** Rio Claro, São Paulo, Brasil. 2012.
- Marquesone, E. E. **A Matemática nos modelos do tipo SIR.** Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa em Matemática - Jeepema. Vol. 4, pp. 1-16. Junho de 2020.
- Mattiuzzo, L. B. **Estabilidade local de pontos de equilíbrio em sistemas planares e hiperbólicos de EDO's de primeira ordem.** São Paulo, São Paulo, Brasil: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. 2016.
- Melo, L. C., & Leonardo, N. S. **Sentido do ensino médio para estudantes de escolas públicas estaduais.** Psicologia Escolar e Educacional v.23, p. 8. 2019.
- Morais, R. S., & Onuchic, L. d. **A aprendizagem de polinômios através da resolução de Problemas por meio de um ensino contextualizado.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, (p. 2). Recife. 2011.
- Oliveira AC, Lucas TC, Iquiapaza RA. **O que a Pandemia da Covid-19 tem nos Ensinado sobre Adoção de Medidas de Prevenção?** Texto & Contexto Enfermagem Vol.29, pp. 1-15. 2020.
- Oxford Brazil. Fonte: <https://oxfordbrazilebm.com>:
<https://oxfordbrazilebm.com/index.php/quando-isso-acabara-uma-introducao-aos-numeros-de-reproducao-viral-r0-e-re/>. 27 de julho de 2023.

- Pereira, M. G. **Epidemiologia : teoria e prática**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan Ltda. 2018.
- Pinheiro, C. **Veja Saúde**. Fonte: <https://saude.abril.com.br/https://saude.abril.com.br/medicina/qual-e-a-diferenca-entre-epidemia-pandemia-e-endemia/>. 18 de março de 2022.
- Rocha, L. <https://www.cnnbrasil.com.br/saude/imunidade-gerada-pela-infeccao-natural-por-covid-19-permanece-alta-por-10-meses-diz-estudo/>. Fonte: Cnn Brasil. 13 de maio de 2023.
- Rodrigues, R. A. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia**. Itaquí, Rio Grande do Sul, Brasil. Maio de 2021.
- Rouquayrol, M. Z., & Gurgel, M. Rouquayrol – **Epidemiologia & Saúde** – 8ª edição. Rio de Janeiro: Editora Científica Ltda. 2018.
- Sabeti, M. **Modelo epidêmico discreto SIR com estrutura etária e aplicação de vacinação em pulsos e constante**. Recife, Pernambuco, Brasil. Julho de 2011.
- Santos, P. V. **Modelagem matemática de crescimento e epidemiologia: aspectos educacionais**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil. 13 de dezembro de 2021.
- Sena Quadros, A. **Modelos Epidemiológicos para Propagação de Informação**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil. Setembro de 2013.
- Silva, M. A. **Análise matemática de epidemiológicos: SIR e SIS**. João Pessoa, Paraíba, Brasil. 2022.
- Siqueira, B. A. **Discretização de Equações Diferenciais Utilizando Diferenças Finitas: Uma abordagem na equação do calor**. Blumenau, Santa Catarina, Brasil. 27 de novembro de 2019.
- Soares, E. F. **Aplicação da Modelagem matemática epidemiológica modelo SUEIHCDR para a doença Covid-19 na cidade de São José dos Campos, SP, Brasil**. São José dos Campos, São Paulo, Brasil. Dezembro de 2020.
- Souza, J. F. **Construindo uma Aprendizagem Significativa com História e Contextualização da Matemática**. Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. Abril de 2009.
- Souza, M. A. **Informática educativa na educação matemática: estudo de geometria no ambiente do Software Cabri-Géomètre**. Dissertação de Mestrado. Fortaleza, Ceará, Brasil. Setembro de 2001.
- Steinbruch, A., & Winterle, P. (2008). **Álgebra Linear**, 2ªed. São Paulo: Makron Books.
- The New England Journal of Medicine**. Fonte: <https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMoa2034545>. 23 de dezembro de 2020.

Viana, M. **Dez perguntas para Marcelo Viana - Diretor-geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa).** (R. G. Wallace Cardozo, Entrevistador). 13 de março de 2023.

Vieira, A. d. **Estudos sobre modelos matemáticos aplicados à Epidemiologia: modelo SIR, SIR com vacinação e SIRS.** São Paulo, São Paulo, Brasil. 2016.

Werneck, G. L. **Primórdios da investigação sobre a dinâmica de transmissão da tuberculose no Brasil.** Revista de Saúde Pública vol. 40, pp. 218-2019. 01 de 04 de 2006.

Werneck, G. L. **A pandemia de Covid-19 no Brasil: crônica de uma crise sanitária.** Cadernos de Saúde Pública. 2020.

APÊNDICE – Relatório Epidemiológico (número de casos de Covid-19 do Município de Colorado do Oeste/RO).

Data	Registros	n° de casos diários	casos acumulados
05/06/2020	0	0	0
07/06/2020	1	2	2
08/06/2020	2	0	2
10/06/2020	3	10	12
11/06/2020	4	4	16
12/06/2020	5	0	16
13/06/2020	6	0	16
14/06/2020	7	0	16
15/06/2020	8	0	16
16/06/2020	9	0	16
17/06/2020	10	1	17
18/06/2020	11	3	20
19/06/2020	12	6	26
20/06/2020	13	0	26
21/06/2020	14	0	26
22/06/2020	15	3	29
23/06/2020	16	2	31
24/06/2020	17	1	32
25/06/2020	18	-2	30
26/06/2020	19	0	30
27/06/2020	20	3	33
28/06/2020	21	0	33
29/06/2020	22	0	33

30/06/2020	23	13	46
01/07/2020	24	0	46
02/07/2020	25	0	46
03/07/2020	26	-1	45
04/07/2020	27	0	45
05/07/2020	28	0	45
06/07/2020	29	3	48
07/07/2020	30	0	48
08/07/2020	31	3	51
09/07/2020	32	0	51
10/07/2020	33	0	51
11/07/2020	34	0	51
12/07/2020	35	0	51
13/07/2020	36	0	51
14/07/2020	37	2	53
15/07/2020	38	0	53
16/07/2020	39	0	53
17/07/2020	40	0	53
18/07/2020	41	0	53
19/07/2020	42	0	53
20/07/2020	43	10	63
21/07/2020	44	0	63
22/07/2020	45	8	71
23/07/2020	46	0	71
24/07/2020	47	1	72
25/07/2020	48	0	72
26/07/2020	49	0	72
27/07/2020	50	0	72
28/07/2020	51	2	74
29/07/2020	52	4	78
30/07/2020	53	2	80
31/07/2020	54	0	80
01/08/2020	55	0	80
02/08/2020	56	0	80
03/08/2020	57	0	80
04/08/2020	58	7	87
05/08/2020	59	0	87
06/08/2020	60	2	89
07/08/2020	61	0	89
08/08/2020	62	0	89
09/08/2020	63	0	89
10/08/2020	64	0	89
11/08/2020	65	0	89
12/08/2020	66	1	90
13/08/2020	67	0	90

14/08/2020	68	0	90
15/08/2020	69	0	90
16/08/2020	70	0	90
17/08/2020	71	8	98
18/08/2020	72	1	99
19/08/2020	73	2	101
20/08/2020	74	3	104
21/08/2020	75	0	104
22/08/2020	76	0	104
23/08/2020	77	0	104
24/08/2020	78	1	105
25/08/2020	79	2	107
26/08/2020	80	0	107
27/08/2020	81	0	107
28/08/2020	82	0	107
29/08/2020	83	0	107
30/08/2020	84	0	107
31/08/2020	85	5	112
01/09/2020	86	5	117
02/09/2020	87	1	118
03/09/2020	88	0	118
04/09/2020	89	22	140
05/09/2020	90	0	140
06/09/2020	91	0	140
07/09/2020	92	0	140
08/09/2020	93	3	143
09/09/2020	94	12	155
10/09/2020	95	2	157
11/09/2020	96	5	162
12/09/2020	97	0	162
13/09/2020	98	0	162
14/09/2020	99	2	164
15/09/2020	100	6	170
16/09/2020	101	0	170
17/09/2020	102	1	171
18/09/2020	103	0	171
19/09/2020	104	0	171
20/09/2020	105	0	171
21/09/2020	106	5	176
22/09/2020	107	5	181
23/09/2020	108	2	183
24/09/2020	109	0	183
25/09/2020	110	3	186
26/09/2020	111	0	186
27/09/2020	112	0	186

28/09/2020	113	0	186
30/09/2020	114	6	192
01/10/2020	115	5	197
02/10/2020	116	2	199
03/10/2020	117	0	199
04/10/2020	118	0	199
05/10/2020	119	1	200
06/10/2020	120	0	200
07/10/2020	121	0	200
08/10/2020	122	9	209
09/10/2020	123	7	216
10/10/2020	124	0	216
11/10/2020	125	0	216
12/10/2020	126	0	216
13/12/2020	127	1	217
14/10/2020	128	20	237
15/10/2020	129	0	237
16/10/2020	130	3	240
17/10/2020	131	0	240
19/10/2020	132	0	240
20/10/2020	133	1	241
21/10/2020	134	0	241
22/10/2020	135	2	243
23/10/2020	136	1	244
24/10/2020	137	0	244
25/10/2020	138	0	244
26/10/2020	139	1	245
27/10/2020	140	6	251
28/10/2020	141	0	251
30/10/2020	142	0	251
31/10/2020	143	0	251
01/11/2020	144	0	251
02/11/2020	145	0	251
04/11/2020	146	1	252
05/11/2020	147	1	253
06/11/2020	148	0	253
07/11/2020	149	0	253
08/11/2020	150	0	253
09/11/2020	151	1	254
10/11/2020	152	0	254
11/11/2020	153	0	254
12/11/2020	154	1	255
13/11/2020	155	0	255
14/11/2020	156	0	255
15/11/2020	157	0	255

16/11/2020	158	0	255
17/11/2020	159	5	260
18/11/2020	160	4	264
19/11/2020	161	0	264
20/11/2020	162	0	264
21/11/2020	163	0	264
22/11/2020	164	0	264
23/11/2020	165	2	266
24/11/2020	166	12	278
26/11/2020	167	21	299
27/11/2020	168	0	299
29/11/2020	169	20	319
30/11/2020	170	1	320
02/12/2020	171	7	327
03/12/2020	172	1	328
04/12/2020	173	0	328
05/12/2020	174	0	328
06/12/2020	175	0	328
07/12/2020	176	8	336
08/12/2020	177	0	336
09/12/2020	178	3	339
10/12/2020	179	0	339
11/12/2020	180	0	339
12/12/2020	181	0	339
13/12/2020	182	0	339
14/12/2020	183	1	340
15/12/2020	184	0	340
16/12/2020	185	0	340
17/12/2020	186	3	343
18/12/2020	187	0	343
19/12/2020	188	0	343
20/12/2020	189	0	343
21/12/2020	190	6	349
22/12/2020	191	1	350
23/12/2020	192	0	350
24/12/2020	193	0	350
25/12/2020	194	0	350
26/12/2020	195	0	350
27/12/2020	196	0	350
28/12/2020	197	13	363
29/12/2020	198	26	389
30/12/2020	199	20	409
31/12/2020	200	10	419
01/01/2021	201	0	419
02/01/2021	202	0	419

03/01/2021	203	0	419
04/01/2021	204	4	423
05/01/2021	205	16	439
06/01/2021	206	46	485
07/01/2021	207	0	485
08/01/2021	208	29	514
09/01/2021	209	42	556
10/01/2021	210	3	559
11/01/2021	211	8	567
12/01/2021	212	29	596
13/01/2021	213	23	619
14/01/2021	214	16	635
15/01/2021	215	6	641
16/01/2021	216	0	641
17/01/2021	217	0	641
18/01/2021	218	39	680
19/01/2021	219	12	692