Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Paulo Vitor Almeida Cardoso

Incertezas Numéricas no Ensino Médio. Por que acontecem? Como resolvê-las?

Belo Horizonte
2023

Paulo Vitor Almeida Cardoso

INCERTEZAS NUMÉRICAS NO ENSINO MÉDIO. POR QUE ACONTECEM? COMO RESOLVÊ-LAS?

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Luciano Coutinho Santos

Banca Examinadora
Geraldo Cesar Gonçalves Ferreira
Justino Muniz Júnior
Luiz Gustavo Perona Araújo

Belo Horizonte
2023

Cardoso, Paulo Vitor Almeida
C268i Incertezas numéricas no ensino médio. Por que acontecem? Como resolvê-las? / Paulo Vitor Almeida Cardoso. – 2023.
99 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Luciano Coutinho Santos.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Imprecisão – Teses. 2. Educação básica – Teses. 3. Caos – Teses. 4. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Santos, Luciano Coutinho. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 519.2

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Paulo Vitor Almeida Cardoso

INCERTEZAS NUMÉRICAS NO ENSINO MÉDIO. POR QUE ACONTECEM? COMO RESOLVÊ-LAS?

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 17 de agosto de 2023.

Paulo Vitor Almeida Cardoso

Paulo Vitor Almeida Cardoso
(Autor)

Luciano Coutinho dos Santos

Luciano Coutinho Santos
(Orientador)

Belo Horizonte
2023

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

A dissertação a seguir tem como objetivo discutir conceitos matemáticos que abordam as incertezas e as imprecisões matemáticas, que seriam limites e continuidade, derivadas, sistemas dinâmicos e caos, no contexto da educação básica. Muitas vezes, os alunos lidam com imprecisões e incertezas, sem compreender as razões por trás delas, recorrendo a aproximações e a arredondamentos, sem uma compreensão clara do processo envolvido. Por essa razão, nossa intenção é conduzi-los a essa reflexão, sugerindo atividades e orientando-os em uma feira de ciências. Ao abordarmos diretamente o conceito de função, determinamos que o ensino médio é a etapa mais adequada da educação básica para desenvolver este trabalho.

Palavras-chave: Imprecisões Numéricas, Educação Básica, Caos.

Abstract

The following dissertation aims to discuss mathematical concepts which are limits and continuity, derivates, dinamical systems and chaos, to debate mathematical uncertainties and inaccuracies and then bring them into basic education. Inaccuracies and uncertainties often remain obscured and unjustified to students who frequently make approximations and roundings without understanding why they do so. Therefore, we will deliberately lead them to this reflection by suggesting activities and guiding them in a science fair. Since we directly address the concept of a function, we have decided that the appropriate stage within basic education for this work will be high school.

Keywords: Numerical inaccuracies, Basic Education, Chaos.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Durante os anos de ensino da educação básica, raramente tratamos, de forma clara, a incerteza que há em problemas de matemática. Nós, professores, simplesmente falamos: arredonde esse resultado para duas casas decimais e esqueça as outras. Ou, se o primeiro número depois da vírgula for maior que 5, arredonde-o para cima, senão para baixo. Mas, isso nem sempre é suficiente, conforme veremos bem claramente no capítulo 6. Nós temos que analisar as questões e as dúvidas com base no que conhecemos para podermos responder os problemas matemáticos, mesmo que seja por uma aproximação, da melhor maneira possível.

O presente estudo tem por objetivo apresentar ferramentas para explicar por que certos erros ocorrem, como podemos calculá-los e, quando couber, como consertá-los. Para isso, usaremos os conceitos de sequências, continuidade e diferenciabilidade.

A diferenciabilidade surgiu como solução às ideias de Sir Isaac Newton, que estudava o movimento. Hoje já temos conhecimento para dizer que velocidade e aceleração estão fortemente ligadas pela derivada. Essas ideias foram levadas adiante por várias gerações de cientistas, para descrever como alguns sistemas físicos evoluiriam com o tempo.

Apesar de, com as derivadas, sermos capazes de descrever muitos sistemas físicos - como uma mola contraída, ou o movimento periódico dos planetas - foi percebido que, mesmo que soluções, de fato, existam, uma expressão por funções conhecidas nem sempre é possível. Alguns desses sistemas, cuja solução não é conhecida, são chamados caóticos, porque, aparentemente, não apresentam periodicidade, nem um estado "fixo". Resumindo, trata-se de um movimento aparentemente aleatório.

Desde os anos 1800, cientistas como James Clerk Maxwell já estudavam sistemas caóticos, observando colisões entre moléculas de gás que poderiam ir em qualquer direção a partir da colisão. Dependendo de onde essa colisão ocorria, acontecia um movimento diferente, e eles eram afastados entre si, mesmo que essas colisões fossem inicialmente muito próximas. Sistemas caóticos também foram detectados em experimentos computacionais nas mais variadas áreas do conhecimento. Quando acontecem são um problema, porque pequenos erros iniciais se propagam.

Os conceitos de sequências, continuidade e diferenciabilidade estarão nos dois primeiros capítulos, nos quais apresentaremos as principais definições e teoremas de acordo a Lima[1]. No primeiro capítulo, apresentamos o que é uma sequência e quais condições a tornam monótona. Em seguida, discutimos o que é uma sequência limitada e exibimos exemplos, como $x_n = \frac{1}{n}$.

Ainda no primeiro capítulo, abordamos a ideia de limites para sequências e funções, chegando à continuidade de funções, para, em seguida, estudarmos as funções polinômios, exponenciais, seno e cosseno e logaritmos, de acordo com a continuidade. Também discutimos erros que podem ocorrer ao analisarmos funções.

Já no segundo capítulo, apresentamos os conceitos de derivabilidade e diferenciabilidade, e como eles se conectam ao capítulo anterior. Verificamos que as funções polinômios, exponenciais, seno e cosseno e logaritmos são deriváveis. Por último, discutimos como calcular uma aproximação para os erros que cometemos quando as funções são deriváveis.

Veremos, ainda, os conceitos de sistemas dinâmicos e caos, que foram exemplificados pelos cientistas Newton e Maxwell, e revisitados por Alligood, Sauer e Yorke[2] para verificarmos como imprecisões podem se acumular ao longo do tempo. Para isso, vemos os conceitos de mapas, pontos fixos atratores e repulsores, órbitas periódicas e caóticas, além da importante ferramenta conjugação, que nos servirá para transferirmos algumas características de um mapa para outro.

Durante o capítulo dedicado a imprecisões, faremos estudos de caso na forma de problemas. Estes, por sua vez, requererem um pouco de abstração, porque, por exemplo, não queremos resolver a fome mundial, apenas queremos fazer uma crítica a aproximações numéricas feitas corriqueiramente, sem contextualização.

Este texto também tem por objetivo a proposição de atividades para a educação básica, por isso, tem a BNCC[3] como orientação. Dessa maneira, identificamos as habilidades e as competências que estão relacionadas aos objetos, as ferramentas e os métodos que são necessários ao desenvolvimento deste estudo. Este trabalho tem como público-alvo alunos a partir do primeiro ano do ensino médio, porque precisamos que tenham familiaridade com algumas funções. Isso será visto na seção 7.1.

Por último, vamos produzir uma sequência de atividades que terão por base os estudos de caso. Essas atividades servirão como guia para uma feira de ciências multidisciplinar, em que os alunos verão que ocorrem erros numéricos no cálculo de funções matemáticas, e que esses erros podem afetar previsões que tenham como base os valores aproximados obtidos.

2 Conceitos Básicos

Neste capítulo, descrevemos as definições e os teoremas que utilizaremos ao longo desta dissertação. A referência será Lima 2012 [1], exceto os exemplos, que tomei a liberdade de criá-los.

2.1 Sequências

Definição 2.1 (Sequência): Uma sequência é uma função $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,a qual a cada número natural n associa-se um número real x_n, que chamamos de n-ésimo termo da sequência. Para denotar uma sequência cujo n-ésimo termo é x_n, usamos $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n), ou ainda, x_n.

Dentre as notações citadas na definição 2.1, escolheremos a mais conveniente, de acordo com o problema envolvido, ou seja, da forma que nos interessar mais. A seguir, apresentamos alguns exemplos de sequências:

Exemplo 2.1.1: Usando cada uma das notações:

- $(1, 2, ..., n, ...)$
- $(2n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$
- (n^2)
- $(1, 1, ..., 1, ...)$

Observe que a sequência não é o conjunto de seus termos. A sequência (1,0,1,...,1,0,...) é diferente da sequência (0,1,0,1,...,0,1,...), mas o conjunto dos termos de ambas as sequências é $\{1,0\}$.

Vamos ver dois tipos de sequências que serão úteis mais adiante.

Definição 2.2: Uma sequência é dita monótona se $x_n \leq x_{n+1}$ ou $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $x_n \leq x_{n+1}$, diremos que ela é monótona não-decrescente, ou de maneira resumida, não-decrescente. Se $x_{n+1} \leq x_n$ diremos que ela é monótona não-crescente, ou, de maneira resumida, não-crescente.

Exemplo 2.1.2:

1. $x_n = n$ é não-decrescente, porque $n \leq n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $x_n = -n$ é não-crescente, porque $-(n + 1) \leq -n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $x_n = (-1)^n n$ não é nem não-crescente nem não-decrescente, pois, se n é par, $x_{n+1} < 0 < x_n$; e se n é ímpar, $x_n < 0 < x_{n+1}$.
4. $x_n = 1$ para todo n, conforme a definição 2.2, é não-crescente e não-decrescente ao mesmo tempo, pois $1 \leq 1$ e $1 \geq 1$.

Por uma questão lexical e filosófica, nós não permitimos que uma sequência seja, ao mesmo tempo, não-crescente e não-decrescente. Para evitar esses casos, nós definimos uma sequência constante.

Definição 2.3 (sequência Constante): Uma sequência x_n é dita constante se $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $a \in \mathbb{R}$.

A seguir, definiremos o que é uma sequência limitada. Em um primeiro momento, poderíamos pensar que uma sequência é limitada quando tem um fim, ou seja, caso ela é finita. Mas, a própria definição de sequências não permite esse tipo de conclusão, pois $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito. Veja também que a notação $(x_1,x_2,...,x_n,...)$ esclarece isso muito bem, pois as reticências indicam que há mais termos após x_n. Portanto, vamos à noção matemática do que é uma sequência limitada.

Definição 2.4 (Sequência Limitada Superiormente): Uma sequência é dita limitada superiormente quando existe c $\in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq$ c, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Com o mesmo raciocínio, podemos definir uma sequência limitada inferiormente:

Definição 2.5 (Sequência Limitada Inferiormente): Uma sequência é dita limitada inferiormente quando existe c $\in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq$ c, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Com essas duas ideias em conjunto, temos a definição de sequência limitada:

Definição 2.6 (Sequência Limitada): Uma sequência é dita limitada, quando é limitada superiormente e inferiormente ao mesmo tempo.

Perceba que uma sequência qualquer pode ser limitada superiormente sem ser limitada inferiormente, e o contrário também pode acontecer. Além disso, uma sequência pode não ser limitada superiormente e nem inferiormente, ou seja, pode não atender as duas definições ao mesmo tempo. Além disso, ser limitada é equivalente a cada elemento da sequência pertencer a um intervalo de números reais, (a,b) por exemplo.

Exemplo 2.1.3:

1. A sequência $(1, 2, ..., n, ...)$ é limitada inferiormente, pois $x_n \in \mathbb{N}$ e todo elemento de $\mathbb{N}$ é maior ou igual a 1. Mas, não é limitada superiormente, pois dado $c \geq 0$ existe $x_n > c$ a saber, a parte inteira de $c + 1$.

2. A sequência $(-n)$, onde $n \in \mathbb{N}$ é limitada superiormente, x_n é menor ou igual a -1 para todo n, mas não é limitada inferiormente, pois dado $c \leq 0$ existe $x_n < c$ a saber, a parte inteira de $c - 1$

3. A sequência $(\frac{1}{n})$ é limitada, pois $0 \leq x_n \leq 1$.

4. A sequência $(1, -2,3, -4,..., (-1)^{n+1}n, ...)$ não é limitada superiormente nem inferiormente, pois se $c \leq 0$ existe x_n, onde n é par tal que $x_n < c$. Esse x_n é a parte inteira de $2c$. Se $c \geq 0$, existe x_n, onde n é ímpar, tal que $x_n > c$. Esse x_n é a parte inteira de $2c + 1$.

Corolário 2.7: Uma sequência é limitada se, e somente se, existe um número real positivo d, tal que $|x_n| \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Começaremos por mostrar que, se (x_n) é limitada, então existe d, conforme as condições dadas. Se (x_n) é limitada, então existem c e c' pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que $c \leq x_n \leq c'$. Defina $d = \max \{|c|, |c'|\}$. Como $c \leq x_n \leq c'$ e $-d \leq c \leq x_n \leq c' \leq d$, $|x_n| \leq d$.

Se existe d com essas condições, então $-d \leq x_n \leq d$. Ora, isso já nos diz que x_n é limitada. □

Esse corolário nos proporciona uma importante ferramenta para provarmos se uma sequência é limitada, pois não precisamos mais realizar duas verificações, se é limitada superiormente e inferiormente. Além disso, a analise é simplificada para apenas números positivos.

2.2 Subsequências

Algumas vezes, não estamos interessados em uma sequência inteira. Podemos estar interessados, por exemplo, somente nos termos pares. A essa ideia de tomarmos apenas uma parte de uma sequência, damos o nome de subsequência, cuja definição formal será feita a seguir 2.8.

Definição 2.8 (Subsequência): Se x_n é uma sequência, uma subsequência de x_n é uma sequência x_{n_j} em que $x_{n_j} = x_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$ e para todo $n_j \in \mathbb{N}$. Além disso, se $n_{j_k} > n_j$ com $x_{n_{j_k}} = x_t$, temos $t > i$.

Veja que toda sequência é subsequência dela mesma. Basta tomar $x_1 = x_{n_1}, x_2 = x_{n_2}$, e assim por diante.

Teorema 2.9: Toda subsequência x_{n_j} é limitada se, e somente se, x_n é limitada.

Demonstração. Se toda subsequência é limitada, isso inclui a própria sequência. Se x_n é limitada, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq d$ para algum $d \in \mathbb{R}$, mas isso implica $|x_{n_j}| \leq d$, pois, por definição, $x_{n_j} = x_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$ e para todo $n_j \in \mathbb{N}$. □

Esse teorema pode ser aplicado à limitada superiormente e inferiormente, bastando para isso tirar o módulo e trocar os sinais $\leq$ e $\geq$, quando necessário.

Já que toda subsequência é uma sequência, tudo o que dissermos sobre a sequência valerá para a subsequência, mas não o contrário, como veremos um pouco mais adiante no teorema 2.15.

2.3 Limites de sequências

Duas ideias importante que precisamos para temas que envolvem análise matemática são as seguintes: queremos nos aproximar de um número, mas nunca chegar realmente a ele; queremos saber se numa sequência seus termos estão se aproximando de algum número. A primeira ideia será vista nos próximos tópicos.

Você pode estar se perguntando o que significam essas aproximações. E a resposta é: queremos colocar dois números muito perto um do outro. Quão perto? O quanto se desejar. Pode ser que indistinguível para um computador ou uma calculadora não seja o bastante, assim você coloca os dois ainda mais próximos. Podemos aproximar mais? A resposta é: sim! O que não é válido é igualar os dois.

Na sequência, vamos explorar a segunda ideia.

Definição 2.10 (Limite de uma sequência): Diremos que uma sequência converge a um número real a se $\forall\ \epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, $|x_n - a| \leq \epsilon$. E, denotaremos por $a = \lim x_n$, ou $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$, ou $a = \lim_{n \to \infty} x_n$, ou $x_n \to a$

Essa definição nos diz que uma sequência está se aproximando de um número real, se, para algum n suficientemente grande, $n > n_0$, a sequência (x_n) estiver tão perto quanto se queira de $a \in \mathbb{R}$, $|x_n - a| \leq \epsilon$, veja também o comentário acima. Além disso, uma forma equivalente de dizer que $|x_n - a| \leq \epsilon$, é dizer que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Observe, também, que ser limitada e ter um limite, ou seja, convergir a a, são ideias diferentes. Enquanto que ser limitada quer dizer que seus elementos estão em um dado intervalo, ter um limite é: a partir de um certo elemento todos estão se aproximando de um número real.

Você pode estar se perguntando se uma sequência converge a mais de um limite. E a resposta é: não, conforme Lima [1]:

Teorema 2.11 (Unicidade do limite): Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$, podemos tomar $\epsilon > 0$, tal que os intervalos abertos $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$ implica em $x_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo, b não é limite de x_n. $\square$

Apesar de a convergência ser um conceito diferente de a sequência ser limitada, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.12: Se uma sequência convergir para $a \in \mathbb{R}$, então, ela é limitada.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Tome $\epsilon = 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in (a-1, a+1)$ para todo $n > n_0$. Sejam b e c tais que $b = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, a+1, a-1\}$ e $c = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, a+1, a-1\}$. Perceba que $x_n \in [b,c]\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, (x_n) é limitada. $\square$

Algo curioso é que, acrescentando apenas uma hipótese, a sequência ser monótona, ao fato de a sequência ser limitada, teremos que ela é convergente.

Teorema 2.13 (Sequência monótona e limitada converge): Se uma sequência x_n for monótona e limitada, então, x_n converge. Mais ainda, se $x_n \leq a$, esse a for o menor valor para o qual isso acontece e x_n for crescente, então $\lim x_n = a$. E, se $x_n \geq a$, esse a for o maior valor para o qual isso acontece e $x_n \geq x_{n+1}$, então $\lim x_n = a$.

Demonstração. Vamos mostrar para o caso em que $x_n \leq a$ e x_n crescente. O outro caso seguirá por analogia.

Seja $\epsilon > 0$. Como a é o menor elemento para o qual $x_n \leq a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0}$.

Dado $n > n_0$, por causa da definição 2.2 e pelo fato de x_n ser crescente, $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$. Mas, $x_n \leq a < a + \epsilon$ e, portanto, $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Logo, pela definição 2.10, $\lim x_n = a$. $\square$

Em algumas situações, conhecemos o limite de duas sequências, mas estamos interessados no limite da soma dessas sequências ou do produto delas. Por isso, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.14: Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ para as sequências x_n e y_n, então vale cada um dos itens:

1. $\lim x_n + y_n = a + b$

2. $\lim (x_n)(y_n) = ab$

Demonstração. 1. Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ existem n_1 e n_2, tais que $|x_n - a| \leq \epsilon/2$ e $|y_m - b| \leq \epsilon/2$ para $n \geq n_1$ e $m \geq n_2$. Tome $n' = \max\{n_1, n_2\}$, por definição $n' \geq n_1$ e $n' \geq n_2$, assim

$$|x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $n \geq n'$. Mas, note que $|x_n - a + y_n - b| = |x_n + y_n - (a + b)|$, isto é, $|x_n + y_n - (a + b)| \leq \epsilon$ o que quer dizer que $\lim x_n + y_n = a + b$.

2. Tome novamente $\epsilon > 0$. Somando e subtraindo $x_n b$ em $x_n y_n - ab$, obtemos: $x_n y_n - ab + x_n b - x_n b$. Vamos colocar essa expressão num modo conveniente:

$$x_n y_n - ab + x_n b - x_n b = x_n(y_n - b) - b(x_n - a)$$

Analisando o módulo da expressão acima e lembrando que $|x_n| \leq c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, pelo teorema 2.12, tomando n' como o do item 1, e que $|x_n - a| \leq \epsilon/2c$, bem como $|y_n - b| \leq \epsilon/2|b|$, temos:

$$|x_n(y_n - b) - b(x_n - a)| \leq |x_n(y_n - b)| + |b(x_n - a)| \quad (2.1)$$

$$= |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a| \quad (2.2)$$

$$\leq c\frac{\epsilon}{2c} + |b|\frac{\epsilon}{2|b|} = \epsilon \quad (2.3)$$

As equações e as inequações 2.1, 2.2 e 2.3, em conjunto com as afirmações anteriores, informam-nos que $x_n y_n - ab \leq \epsilon$, ou seja, que $\lim(x_n)(y_n) = ab$

$\square$

Observe que nesse teorema a e b são números reais quaisquer e que também são quaisquer x_n e y_n, ou seja, digamos que $z_n = -y_n$ converge para $-b$. Então, $\lim x_n + z_n = \lim x_n - y_n = a + (-b) = a - b$. Mas, observe que não precisamos, de fato, supor que $z_n = -y_n$ converge a $-b$, se y_n convergir a b, pois: $z_n = -y_n = (-1)y_n$, e -1 visto como a sequência $(-1, -1, -1, ...)$ converge a -1 pois $|-1-(-1)| = 0 < \epsilon$. Assim, $z_n \to -b$ pelo item 2 do teorema.

Além disso, digamos que b tenha um inverso, isso quer dizer que para n suficientemente grande y_n também tem, pois existe um $\epsilon > 0$ para o qual $0 \notin (b-\epsilon, b+\epsilon)$. Assim, se considerarmos uma sequência $z_n = \frac{1}{y_n}$ para n suficientemente grande, teremos:

$$\lim x_n z_n = \lim x_n \frac{1}{y_n} = \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

Desde que $z_n \to \frac{1}{b}$, mas, de fato, isso acontece, pois:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{y_n b}\right| \leq \left|\frac{b - y_n}{(M+1)b}\right| \leq \frac{(M+1)|b|\epsilon}{(M+1)|b|} = \epsilon$$

O M da desigualdade acima é o que limita o y_n. Lembre-se de que pelo teorema 2.12 ser convergente implica ser limitada. Além disso, temos $M + 1 > M$. Por último, como y_n converge a b, $|y_n - b| \leq (M+1)|b|\epsilon$.

Resumindo, o teorema 2.14 também nos diz que se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ para as sequências x_n e y_n, então:

1. $\lim x_n - y_n$=a-b
2. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Este último vale só se b for não-nulo.

Como tínhamos dito na seção 2.1, o que vale sobre subsequência pode não valer para a sequência, que é o caso deste teorema:

Teorema 2.15: Se $x_n \to a$, então $x_{n_j} \to a$ para todo x_{n_j}.

Demonstração. Se $x_n \to a$, então $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_n - a| \leq \epsilon$ para todo $n > n_0$. Em particular, para todos x_{n_j} e $n_j > n_0$, $|x_{n_j} - a| \leq \epsilon$. Ou seja, $x_{n_j} \to a$ para todo x_{n_j}. $\square$

Se toda subsequência converge, não podemos dizer que a sequência converge, pois as subsequências podem convergir para limites distintos, contrariando, assim, a unicidade do limite (teorema 2.11).

Sequências podem convergir a outras sequências? A resposta é sim. E vamos definir como isso acontece.

Definição 2.16: Uma sequência x_n converge a uma outra sequência y_n se $\lim |x_n - y_n| = 0$.

Por exemplo, a sequência $x_n = \frac{1}{n+1}$ converge para sequência $y_n = \frac{1}{n}$, pois dado $\epsilon > 0$, e tomando n grande o suficiente,

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right|\right| = \\
&\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \\
&\left|\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}\right| = \\
&\left|\frac{-1}{n(n+1)}\right| \leq \\
&\left|\frac{1}{n}\right| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

Isto é, $\lim \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = 0$.

2.4 Limite de funções

Assim como fizemos para discutir limites de sequências, faremos com as funções. Assim, se tivermos uma função entre subconjuntos dos números reais, queremos saber o que acontece com a função quando nos aproximamos (o quanto quisermos) de um a qualquer.

Primeiramente, precisaremos do conceito de ponto de acumulação de um conjunto.

Definição 2.17: Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um ponto de acumulação de X se existe uma sequência x_n formada por elementos de $X - \{a\}$ tal que $x_n \to a$.

Podemos resumir essa definição em uma frase: a é ponto de acumulação de X, se é limite de alguma sequência de $X - \{a\}$. Observe que a pode ou não pertencer a X, mas isso não importa para a definição.

Agora, podemos definir o que significa o limite de uma função.

Definição 2.18: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X. Dizemos que o limite de $f(x)$ é L, quando x tende para a se $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que se $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$. Então: $|f(x) - L| \leq \epsilon$. E denotaremos por:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Novamente, o ponto a é de acumulação, ou seja, não é preciso que ele pertença a X, de fato. Podemos calcular, por exemplo, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$:

O domínio de $\frac{x^2-1}{x-1}$ é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$. Temos que $x = 1$ é ponto de acumulação de D pois $1 + \frac{1}{n}$ está em D e, se $\forall \epsilon > 0$, $n > \frac{1}{\epsilon}$ para $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

ou seja, $1 + \frac{1}{n}$ converge a 1, como queríamos.

Acabamos de verificar que $x = 1$ é ponto de acumulação. Vamos verificar a segunda parte da definição 2.18.

Seja $\epsilon > 0$ e $\delta = \epsilon$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = \\
&\left|\frac{x^2-1-2(x-1)}{x-1}\right| = \\
&\left|\frac{x^2-2x-1+2}{x-1}\right| = \\
&\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right| = \\
&|x-1| \leq \delta = \epsilon
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Algumas vezes é útil escrevermos o limite de funções de outras formas, por isso temos dois teoremas: 2.19 e 2.24.

Teorema 2.19: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X. Temos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, toda sequência x_n de pontos de $X - \{a\}$ convergente para a implica em $f(x_n) \to L$.

Demonstração. Primeiro, suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$; e seja dada a sequência x_n de pontos em $X - \{a\}$ com $x_n \to a$. $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que se $x \in X$ e

$0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| \leq \epsilon$. Como $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $0 < |x_n - a| < \delta$. Portanto, $|f(x_n) - L| \leq \epsilon$. Isto é, $f(x_n) \to L$, como queríamos.

Agora, suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| > \epsilon$. Ora, isso é a negação da afirmação do teorema ou seja, estou querendo mostrar que se isso ocorrer existirá uma sequência x_n de pontos de $X - \{a\}$ convergente a a, mas com $f(x_n)$ não convergindo a L.

Tome a sequência x_n que define a como ponto de acumulação de X. Temos que, para todo $\delta > 0$ existe $n_0 > n$, tal que $0 < |x_n - a| < \delta$. Então, $|f(x_n) - L| > \epsilon$, para algum ϵ. Ou seja, $x_n \to a$, mas sem que $f(x_n) \to L$ □

Assim como o limite de sequências era único, o limite de funções também é:

Corolário 2.20 (Unicidade do limite de funções): Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$, então $L = M$.

Demonstração. Seja $x_n \to a$, $x_n \in X - \{a\}$. Então, por hipótese e pelo teorema 2.19, $f(x_n) \to L$ e $f(x_n) \to M$, mas pela unicidade do limite de sequências, teorema 2.11, $L = M$. □

Além disso, temos como corolário também que:

Corolário 2.21: se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então:

1. $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$
2. $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$
3. se $M \neq 0$, então $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Demonstração. Para concluir esse raciocínio, basta usar os teoremas 2.19 e 2.14 nessa ordem. □

Antes de apresentarmos o outro teorema, precisamos definir o que é um ponto de acumulação lateral e o que é um limite lateral.

Definição 2.22 (Ponto de acumulação lateral): a é um ponto de acumulação à direita para X, se existe x_n, com $x_n \to a$, $x_n > a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente, a é um ponto de acumulação à esquerda para X, se $x_n < a$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.23 (Limite lateral): Seja a um ponto de acumulação à direita. O limite lateral à direita de uma função $f(X)$ é L, se $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| \leq \epsilon$. Analogamente, se a for de acumulação à esquerda, o limite lateral à esquerda de $f(X)$ é L, se $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| \leq \epsilon$. E denotaremos por:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Ou, analogamente:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Agora, podemos ter o teorema:

Teorema 2.24: Seja a ponto de acumulação tanto à direita como à esquerda. Temos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

Demonstração. Primeiro, vamos provar que a é ponto de acumulação de X. Como a é ponto de acumulação à direita, existe $x_n \to a$, com $x_n \in X$ e $x_n > a$. E isso já garante que existe $x_n \to a$ com $x_n \in X - \{a\}$.

Agora, suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Então, $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| \leq \epsilon$. Mas, se considerarmos apenas os pontos em que $0 < x - a < \delta$, ainda teremos que $|f(x) - L| \leq \epsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$. Analogamente, se considerarmos apenas os pontos em que $0 < a - x < \delta$, temos $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$, como queríamos.

Por último, suponha que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$=L e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$=L. Então, $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0$, tal que se $0 < x - a < \delta_1$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| \leq \epsilon$ ao mesmo tempo em que $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0$, tal que se $0 < x - a < \delta_2$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| \leq \epsilon$. Considere $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Temos, simultaneamente, que $0 < x - a < \delta$ e $0 < a - x < \delta$, implicando que $|f(x) - L| \leq \epsilon$, ou seja, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| \leq \epsilon$. Isto é, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. □

O teorema acima é particularmente útil, quando a função é definida por partes. Isto é, por exemplo, ela assume valores dados por uma expressão antes de a e outra expressão depois de a, como é o caso da função $|x|$ antes e depois do 0.

Exemplo 2.4.1:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Veja que $\lim\limits_{x\to 0} |x|$=0, pois:

Para todo $\epsilon > 0$, considere $\delta = \epsilon$. Se $x < 0$ e $0 < -x < \delta$, então $|f(x)| = |-x| = -x < \delta = \epsilon$. Ou seja, $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = 0$.

Para todo $\epsilon > 0$, considere $\delta = \epsilon$. Se $x > 0$ e $0 < x < \delta$, então $|f(x)| = |x| = x < \delta = \epsilon$. Ou seja, $\lim\limits_{x\to 0^+} |x|$=0.

Como nós vimos, para o limite de uma função existir, não é necessário que o ponto pertença ao domínio da função. Mas, é preciso que perto desse ponto a função fique tão próxima quanto se queira de algum valor. Esse critério dá origem ao teorema abaixo.

Teorema 2.25: Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, para algum a ponto de acumulação de X e $l \in \mathbb{R}$, com $l > m$, ou $l < m$, para algum $m \in \mathbb{R}$, então existe δ tal que para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, $f(x) > m$ caso $l > m$ ou $f(x) < m$ se $l < m$.

Demonstração. Vamos realizar a prova apenas para o caso em que $l < m$, pois o outro é análogo. Seja $k = \frac{l+m}{2}$. Pondo $\epsilon = k - l = m - k$ temos $\epsilon > 0$ e $k = l + \epsilon = m - \epsilon$. Pela definição de limite, existe δ, tal que se $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, $|f(x) - l| \leq \epsilon$. Então, $-\epsilon \leq f(x) - l \leq \epsilon$, ou seja, $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon = k$. Mas, $k < m$, logo, $f(x) < m$. □

2.5 Continuidade

Definição 2.26 (Função contínua): Seja a um ponto de acumulação de X e $a \in X$, $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em a, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Em geral, a ideia que trazemos de continuidade, adquirida no ensino médio, é que se pudermos desenhar o gráfico de uma função sem retirarmos o lápis do papel ela será contínua. Essa ideia não está incorreta, mas carece de ampliação. Veja abaixo o gráfico de $f(x) = {}^1/_x$.

Quando estamos perto de $x = 0$, mas nos aproximando por um número positivo, a função está claramente subindo na figura 2.1, e acontece o contrário com a aproximação por números negativos. Assim, por essa ideia, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ não tem como ser contínua.

Porém, observe que 0 não está no domínio da $f(x) = \frac{1}{x}$. Daí, não há o que se falar

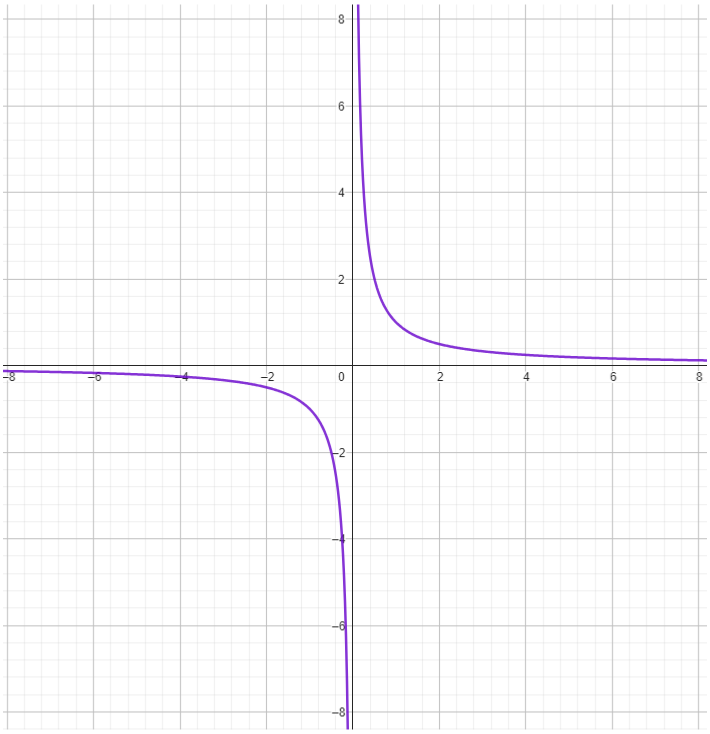

Figura 2.1: Função $^1/_x$
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

sobre continuidade em 0. Isso significa que, para avaliarmos se uma função é continua, precisamos analisá-la no seu domínio.

Outro comentário importante é que, para verificarmos se uma função é contínua em a, precisamos verificar três itens:

1. a está no domínio da $f(x)$
2. a é ponto de acumulação de X
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Observe, também, que sempre estamos adotando a função contínua em a. Isso porque a continuidade pode não acontecer para todos os pontos da função. Veja o gráfico da função $f(x)$ abaixo, na figura 2.2

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 < x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Essa função não é contínua em 0, mas é contínua em todo o resto, pois:

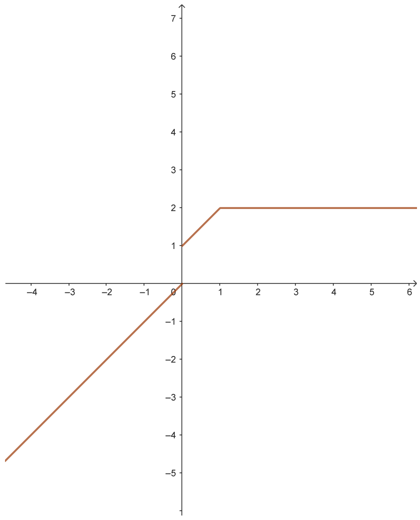

Figura 2.2: Função partes $x, x+1, 2$
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

1. O domínio da $f(x)$ é $\mathbb{R}$

2. Qualquer dos pontos é de acumulação, basta tomar a sequência $x_n = a + \frac{1}{n}$ para $a \in \mathbb{R}$.

3. (a) Se $a < 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x = a = f(a)$. A penúltima igualdade se verifica porque se $|x-a| < \delta$, e $\delta = \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, então $|x-a| < \epsilon$.

   (b) Se $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x+1 = a+1 = f(a)$. A penúltima igualdade se verifica porque, se $|x-a| < \delta$, e $\delta = \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, então $|x+1-(a+1)| = |x-a| < \epsilon$.

   (c) Se $a > 1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} 2 = 2 = f(a)$. A penúltima igualdade se verifica porque $\forall \epsilon > 0$, $|2-2| = 0 < \epsilon$.

   (d) Se $a = 1$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2 = f(1)$, pois $|2-2| = 0 < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, e, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2 = f(1)$, pois se $1 - x < \delta$, e $\delta = \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, então $|x+1-(1+1)| = |x-1| < \epsilon$.

   (e) Se $a = 0$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1$, por que se $x < \delta$, e $\delta = \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, então $|x+1-1| = |x| < \epsilon$. Mas, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$, já que se $-x < \delta$ e $\delta = \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, então $|x| < \epsilon$. Ou seja, não temos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$ para L algum.

No entanto, quando uma função for contínua em todos os pontos do seu domínio, diremos que ela é contínua.

Para facilitar nosso trabalho com funções contínuas, temos os seguintes teoremas:

Teorema 2.27: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ contínuas em $a \in X$, $X \subset \mathbb{R}$. Então são contínuas em a também $f \pm g(x)$, $fg(x)$ e $\frac{f}{g}(x)$, nesse último caso $g(a)$ não pode ser 0.

Demonstração. Para as funções $f \pm g(x)$ e $fg(x)$, mesmo que $g(a) = 0$, por definição, $f \pm g(a) = f(a) \pm g(a)$ e $fg(a) = f(a)g(a)$, ou seja, a está no domínio de ambas. Porém, para a função

$$\frac{f}{g}(x) : \frac{f}{g}(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$$

mas pela hipótese $g(a) \neq 0$, por isso a está no domínio da $\frac{f}{g}(x)$. Por hipótese de f e g serem contínuas em a, pela definição 2.26, a já é de acumulação.

Agora, só precisamos verificar os limites. Usando o corolário 2.21, podemos escrever:

1. $\lim\limits_{x \to a} f \pm g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a) = f \pm g(a)$
2. $\lim\limits_{x \to a} fg(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a)g(a) = fg(a)$
3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a)$

□

Teorema 2.28 (A composição de contínuas é contínua): Sejam $f \colon X \to \mathbb{R}$ contínua em $a \in X$, $g \colon Y \to \mathbb{R}$ contínua em $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, assim a $g \circ f \colon X \to Y$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua em a.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, por $g(y)$ ser contínua em b, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|y - b| < \delta_1$, então $|g(y) - g(b)| < \epsilon$. Por outro lado, como $f(x)$ é contínua em a, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $|x - a| < \delta_2$ então $|f(x) - f(a)| = |f(x) - b| < \delta_1$. Mas, isso quer dizer que $|g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$. Mas, $g(b) = g(f(a))$, ou seja, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$ e temos $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$ como queríamos. □

Teorema 2.29: São contínuas as funções:

1. cx^n para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.
3. b^x para todo $b > 0$ e $b \neq 1$. Note que b pode ser 1, mas esse caso recai no item 1 ($1^x = 1$) para $n = 0$ e $c = 1$.
4. $\log_b x$ para todo $b > 0$ e $b \neq 1$.

Demonstração. Para facilitar a compreensão, vamos considerar a no domínio de cada função. a é facilmente de acumulação; basta considerar a sequência $x_n = a + \frac{1}{n}$, como fizemos antes. Além disso, não será repetido que "$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta \ldots$"

1. Primeiro, mostraremos que $\lim\limits_{x \to a} x = a$ e também que $\lim\limits_{x \to a} c_n = c_n$. Isto é, que são contínuas as funções x e c_n para todos $c_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tomemos $\delta = \epsilon$. Temos que $|x - a| < \delta$, então $|x - a| < \epsilon$. Ou seja, $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Além disso, $|c_n - c_n| = 0 < \epsilon$. Então, $\lim\limits_{x \to a} c_n = c_n$.

   Agora, podemos mostrar, por indução, que $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$. O caso em que $n = 1$ já está mostrado acima. Suponha que para $k \in \mathbb{N}$ se tenha $\lim\limits_{x \to a} x^k = a^k$. Como mostramos acima, $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Então, usando o teorema 2.21, temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to a} x^{k+1} &= \\
\lim_{x \to a} x^k \lim_{x \to a} x &= \\
a^k \times a &= a^{k+1}
\end{aligned}
$$

   Logo, temos o resultado por indução. Finalmente, usando o teorema 2.21 novamente, temos: $\lim\limits_{x \to a} c_n x^n = \lim\limits_{x \to a} c_n \lim\limits_{x \to a} x^n = c_n a^n$.

2. Vamos começar pelo $\operatorname{sen} x$, analisando: $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a|$.

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| &= \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| = \\
\left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| &\leq \\
\left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| &= \\
2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| &\leq \\
2 \left| \frac{x-a}{2} \right| &= |x - a|
\end{aligned}
$$

   Tomando $\delta = \epsilon$, já que $|x - a| < \delta$, temos $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \leq |x - a| < \epsilon$. Então, $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$.

Para $\cos x$:

$$
\begin{aligned}
&|\cos x - \cos a| = \left|-2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| = \\
&\left|2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \leq \\
&\left|2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| = \\
&2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq \\
&2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|
\end{aligned}
$$

Daí, analogamente como fizemos para o $\operatorname{sen} x$, $|\cos x - \cos a| \leq |x-a| < \epsilon$.

3. Primeiro, gostaríamos de ter $\lim_{x\to 0} b^x = 1$. De fato, tomemos $\delta = \log_b(1+\epsilon)$ e $b > 1$:

$$
\begin{aligned}
&|x| < \log_b(1+\epsilon) \\
&b^{|x|} < b^{\log_b(1+\epsilon)} \\
&b^{|x|} < 1+\epsilon \\
&b^{|x|} - 1 < \epsilon
\end{aligned}
$$

Como $|x| > 0$, independente do valor de x, teremos: $b^{|x|} > b^0 = 1$, ou seja, $b^{|x|} - 1 > 0$. Então, $|b^{|x|} - 1| < \epsilon$. Portanto, se $x > 0$, já temos $|b^x - 1| < \epsilon$. Se $x < 0$, teremos $b^x < 1$, sendo que b^x é sempre maior que 0. Por isso,

$$
\begin{aligned}
&|b^{|x|} - 1| = |b^{-x} - 1| < \epsilon \\
&b^x(|b^{-x} - 1|) < \epsilon \\
&|1 - b^x| < \epsilon
\end{aligned}
$$

Se $0 < b < 1$, $\frac{1}{b} > 1$, assim pelo que acabei de mostrar, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{b}\right)^x = 1$. Por outro lado,

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x\to 0}\frac{1^x}{b^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x}
$$

Em outras palavras, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x} = 1$. Mas, $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ pelo item 1 deste teorema.

Agora, podemos aplicar o corolário 2.21:

$$\frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} \frac{1}{b^x}} = \frac{1}{1} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{b^x}} = \lim_{x\to 0} b^x$$

Isto é, $\lim_{x\to 0} b^x = 1$.

Agora, usando o corolário 2.21 e o item 1 novamente, teremos para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$b^a \lim_{x\to 0} b^x = \lim_{x\to 0} b^a b^x = \lim_{x\to 0} b^{x+a} = \lim_{y\to a} b^y = b^a$$

4. Primeiro gostaríamos de mostrar que $\lim_{x\to 1} \log_b x = 0$. Tome $\delta = b^\epsilon - 1$, $|x-1| = x-1$ e $b > 1$.

$$\begin{aligned} |x-1| &< b^\epsilon - 1 \\ \log_b(|x-1|+1) &< \log_b b^\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

$\log_b(|x-1|+1) = \log_b x$, ou seja, $\log_b x < \epsilon$. Como nesse caso $x > 1$, $\log_b x > 0$ e assim, $\log_b x = |\log_b x| < \epsilon$

Se $|x-1| = 1-x$ e $b > 1$, tome $\delta = 1 - b^{-\epsilon}$:

$$\begin{aligned} |x-1| &< 1 - b^{-\epsilon} \\ 1 - x &< 1 - b^{-\epsilon} \\ -x &< -b^{-\epsilon} \\ x &> b^{-\epsilon} \\ \log_b x > \log_b b^{-\epsilon} &= -\epsilon \\ -\log_b x &< \epsilon \end{aligned}$$

$1 - x > 0$ o que quer dizer que $x < 1$. Por isso, $\log_b x < 0$ e então, $-\log_b x > 0$ e por causa disso, $|-\log_b x| = |\log_b x| < \epsilon$.

Se $0 < b < 1$ e $|x-1| = x-1$, tome $\delta = b^{-\epsilon} - 1$:

$$\begin{aligned}
|x-1| &< b^{-\epsilon} - 1 \\
x - 1 &< b^{-\epsilon} - 1 \\
x &< b^{-\epsilon} \\
\log_b x > \log_b b^{-\epsilon} &= -\epsilon \\
-\log_b x &< \epsilon
\end{aligned}$$

$x - 1 > 0$, ou seja, $x > 1$, o que implica em $\log_b x < 0$ e então, $-\log_b x > 0$ e por causa disso, $|-\log_b x| = |\log_b x| < \epsilon$.

Se $0 < b < 1$ e $|x-1| = 1-x$, tome $\delta = 1 - b^{\epsilon}$:

$$\begin{aligned}
|x-1| &< 1 - b^{\epsilon} \\
1 - x &< 1 - b^{\epsilon} \\
-x &< -b^{\epsilon} \\
x &> b^{\epsilon} \\
\log_b x < \log_b b^{\epsilon} &= \epsilon \\
\log_b x &< \epsilon
\end{aligned}$$

$1 - x > 0$, ou seja, $x < 1$, o que implica em $\log_b x > 0$ e então, $|\log_b x| < \epsilon$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 1} \log_b x = 0$.

Agora, podemos usar o corolário 2.21 e o item 1:

$$\begin{aligned}
\log_b a + \lim_{x \to 1} \log_b x &= \\
\lim_{x \to 1} \log_b a + \lim_{x \to 1} \log_b x &= \\
\lim_{x \to 1} \log_b a + \log_b x &= \\
\lim_{x \to 1} \log_b ax &= \\
\lim_{ax \to a} \log_b ax &= \\
\lim_{y \to a} \log_b y &= \\
\log_b a &
\end{aligned}$$

$\square$

Esse teorema, 2.29, em conjunto com os teoremas 2.27 e 2.28 garantem mais algumas continuidades: todo polinômio, toda função racional, tangente, cotangente, secante, cossecante, etc.

Teorema 2.30: Sejam f, g funções de mesmo domínio X e contínuas em a, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Demonstração. Tome $c = \frac{f(a)+g(a)}{2}$ e $\epsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então, como c é a média entre $f(a)$ e $g(a)$, $f(a) < c < g(a)$, já que por hipótese, $f(a) < g(a)$. Assim, se $\epsilon > 0$, e pondo c em termos de a e ϵ temos $c = \epsilon + f(a) = g(a) - \epsilon$. Pela definição de continuidade em a teremos que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $|x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - f(a)| < c - f(a)$, e, $|x - a| < \delta_2$, então $|g(x) - g(a)| < g(a) - c$. Portanto, $f(a) - c < f(x) - f(a) < c - f(a)$ e $c - g(a) < g(x) - g(a) < g(a) - c$. Então, $f(a) - c + f(a) < f(x) < c - f(a) + f(a)$ o que implica em $f(a) - \epsilon < f(x) < c$ e $c - g(a) + g(a) < g(x) < g(a) - c + g(a)$, então $c < g(x) < \epsilon + g(a)$. Se tomarmos $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, teremos $f(a) - \epsilon < f(x) < c$ e $c < g(x) < \epsilon + g(a)$ ao mesmo tempo, então f(x)<c<g(x), ou seja, f(x)<g(x) $\square$

Teorema 2.31: (Teorema do valor intermediário) Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então, existe $c \in (a,b)$, tal que $f(c) = d$.

Demonstração. Seja $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = d$ para todo $x \in [a, b]$. Por hipótese, temos: $f(a) < d = g(a)$. Já que f é contínua por hipótese e g também (pelo teorema 2.29), temos, pelo teorema 2.30, que existe $\delta_1 > 0$, tal que $f(x) < g(x) = d$ para todo $x \in [a, b] \cap (a - \delta_1,a + \delta_1) = [a, a + \delta_1)$. $[a, b] \cap (a - \delta_1, a + \delta_1)$ não pode ser igual a $[a, b]$, porque $f(b) > d$

Suponha que δ_1 seja o maior valor para o qual se tenha $f(x) < d$, para todo $x \in [a, a + \delta_1)$. Se isso não acontecer, basta tomar o δ_1 com essas características.

Como f é contínua para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $a + \delta_1 - \delta < x < a + \delta_1$, $|f(x) - f(a + \delta_1)| \leq \epsilon$, isso por causa das definições 2.26 e 2.23. Então, como $f(a + \delta_1) \geq d$ pela escolha de δ_1 e $f(x) < d$, teremos $|f(x) - f(a + \delta_1)| = f(a + \delta_1) - f(x) \leq \epsilon$. Assim, $f(a + \delta_1) \leq f(x) + \epsilon$.

Novamente, pelo fato de $f(x) < d$, em particular, teremos $f(a + \delta_1) \leq f(x) + d - f(x)$, ou seja, $f(a + \delta_1) \leq d$. Portanto, só podemos ter $f(a + \delta_1) = d$. $\square$

Antes de iniciarmos o próximo capítulo, cabe enfatizar que a continuidade, o limite de sequências e o limite de funções têm como ideia central uma aproximação. Por causa dessa aproximação, podem ocorrer alguns erros, como os que são apresentados a seguir:

Exemplo 2.5.1: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x+2, & 1 \leq x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$

É possível perceber que em $x = 1$, $f(x)$ não é contínua. Observe o gráfico da figura 2.3.

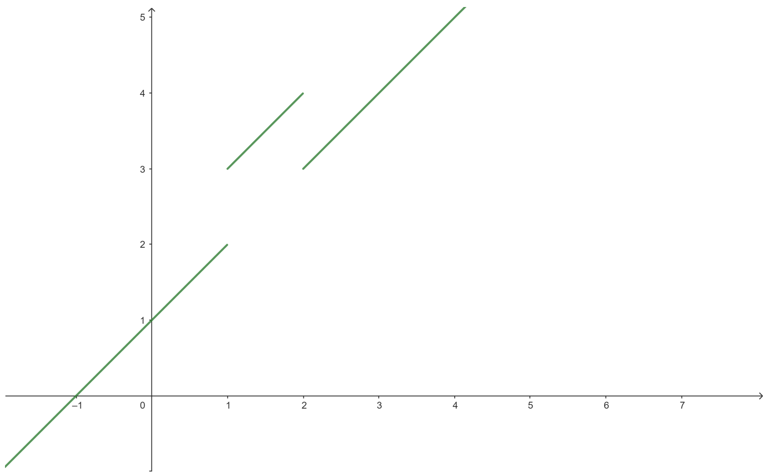

Figura 2.3: Função partes $x + 1$ e $x + 2$
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Ao nos aproximarmos de $x = 1$ por valores menores que ele, responderíamos que $f(x)$ está perto de 2, mas, aproximando-nos do contrário, diríamos que está próximo de 3. Como $f(1) = 3$, o que está mais correto é a segunda aproximação. Esse erro aconteceu porque a função não é contínua.

Exemplo 2.5.2: Considere a sequência $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...)$. Ela converge a $\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| =$$
$$\left|\frac{2n - (2n+1)}{2(2n+1)}\right| =$$
$$\left|\frac{-1}{4n+2}\right|$$

Para n grande o suficiente, $\left|\frac{-1}{4n+2}\right| < \epsilon$.

No entanto, não existe n para o qual $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, pois s,e tentássemos resolver essa equação, chegaríamos a: $2n = 2n + 1$, o que já é um absurdo.

Um terceiro exemplo é que, devido à natureza da própria aproximação que fazemos, temos um erro de, no máximo, ϵ, pois $|x_n - a| < \epsilon$ ou $|f(x) - L| < \epsilon$.

3 Diferenciabilidade

Suponha que queiramos estudar quando uma função está crescendo ou decrescendo em um ponto. Faz sentido, então, traçarmos a reta tangente à função naquele ponto de interesse e observar sua inclinação. Essa inclinação é o que chamamos de derivada da função no ponto.

A construção da reta tangente a uma função é feita por aproximações de retas secantes, como se vê na figura 3.1.

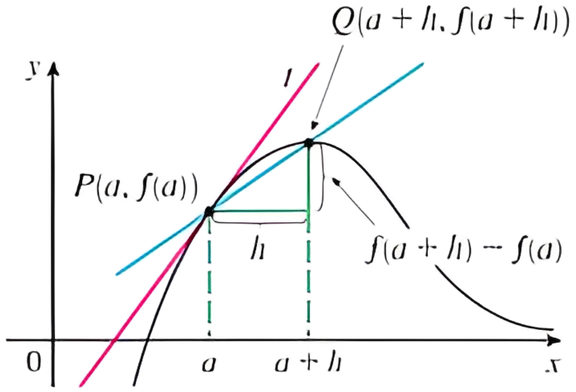

Figura 3.1: Reta tangente por aproximação de secantes
Fonte: STEWART, p.131 [4]

Nesta figura 3.1, a reta identificada por t é a reta tangente à função f no ponto a. Já a outra reta é um exemplo de reta secante, que usamos para nos aproximarmos da tangente.

Observando a figura 3.1, vemos que a tangente é feita pela aproximação de h para 0, e que, se a inclinação é para cima, a função está crescendo. Além disso, a inclinação da reta secante é dada por:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Agora que já vimos o argumento empírico, vamos à definição formal.

Definição 3.1 (Derivada): Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$, a ponto de acumulação de X. A derivada de f em a é o número:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dizemos que a função f é derivável em a, se $f'(a)$ existir. Se f for derivável em todo ponto de X, diremos que f é derivável.

Você pode estar se perguntando por que o a precisa ser ponto de acumulação, sendo que o limite da derivada é em relação a h. Mas, veja que, se $h = x - a$, teremos:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$
$$\lim_{x-a \to 0} \frac{f(a+x-a) - f(a)}{x-a} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Quando estamos tratando de funções de uma variável, que é o caso deste texto, temos uma ideia equivalente à de derivabilidade, chamada diferenciabilidade.

Definição 3.2 (Diferenciabilidade): Seja $f \colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$, em que a é ponto de acumulação de X. Diremos que, se existir $c \in \mathbb{R}$, tal que se $a + h \in X$, então $f(a+h) = f(a) + ch + r(h)$, onde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, f é diferenciável em a.

Teorema 3.3: f é diferenciável em a se, e somente se, é derivável em a.

Demonstração. Se f é diferenciável, a definição 3.2 diz que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que se $a + h$ está no domínio de f, então $f(a+h) = f(a) + c.h + r(h)$, com $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Então, teremos:

$$f(a+h) = f(a) + ch + r(h) \Rightarrow$$
$$f(a+h) - f(a) = ch + r(h) \Rightarrow$$
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c + \frac{r(h)}{h}$$

Fazendo $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} c + \frac{r(h)}{h} \Rightarrow$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c + 0 = c$$

Como c existe, pela definição 3.1, f é derivável em a e $c = f'(a)$.

Se f é derivável em a, pela definição 3.1, $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Defina $r\colon Y \to \mathbb{R}$, em que $Y = \{h \in \mathbb{R} | a + h \in X\}$ e $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$. Dividindo por h, temos: $\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$. Se $h \to 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

. Ou seja, $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. Assim, $f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$ com $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. Portanto, pela definição 3.2, f é diferenciável em a. □

Desse modo, fica evidente que há alguma relação entre continuidade e derivabilidade.

Corolário 3.4: Se f é derivável em a, então é contínua em a.

Demonstração. Se f é derivável em a, então, pelo teorema 3.3, f é diferenciável em a e:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + r(h) \\ f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \left(\frac{r(h)}{h}\right) h \\ \lim_{h \to 0} f(a+h) &= \lim_{h \to 0} f(a) + f'(a)h + \left(\frac{r(h)}{h}\right) h \\ f(a+h) &= f(a) + f'(a)0 + 0 \cdot 0 = f(a) \end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em a. □

Observe que não podemos afirmar que, se f for contínua em a, que f é derivável em a. Um exemplo de uma função que é contínua, mas não derivável em 0 é $|x|$.

Conforme fizemos no capítulo 2, exemplo 2.4.1, $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$, porém, usando a definição 2.23: $\lim_{h^+ \to 0} \dfrac{|h|}{h} = 1$, pois $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$, já que $h > 0$. E, $\lim_{h^- \to 0} \dfrac{|h|}{h} = -1$, pois $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, já que $h < 0$. Ou seja, $\lim_{h \to 0} \dfrac{|h|}{h}$ não existe, porque contraria o teorema 2.20. Logo, $|x|$ não é derivável em 0.

Como $f'(a)$ é um limite, temos algumas regras operacionais.

Teorema 3.5 (A derivada das somas é a soma das derivadas): Sejam f, g de mesmo domínio X, deriváveis em a. Então, as funções $f + g$ e $f - g$ também são deriváveis em a e $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.

Demonstração. Como a está no domínio da f e da g, pois as duas são deriváveis em a, está no domínio das funções $f \pm g$. a já é ponto de acumulação.

Agora, basta mostrar que $(f \pm g)'(a)$ existem e que $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$. Mostrar as duas ocorrências simultaneamente.

Sabemos que existem $f'(a)$ e $g'(a)$. Então, existem $f'(a) \pm g'(a)$. Usando a definição 3.1 e o corolário 2.21, temos:

$$
\begin{aligned}
&f'(a) \pm g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \pm \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) \pm g(a+h) - (f(a) \pm g(a))}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} \frac{f \pm g(a+h) - (f \pm g(a))}{h} = \\
&(f \pm g)'(a)
\end{aligned}
$$

Essa conclusão era o que queríamos. □

Apesar de a derivada das somas ser a soma das derivadas, nem o produto nem o quociente têm a mesma regra. Ao invés disso, temos:

Teorema 3.6 (Regra do produto para derivadas): Sejam f e g de mesmo domínio X, deriváveis em a. Então, a função fg é derivável em a e $fg'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.

Demonstração. Como a está no domínio da f e da g, pois as duas são deriváveis em a, está no domínio de fg. a já é ponto de acumulação. Ou seja, como fizemos antes para a soma, só temos que mostrar que existe $fg'(a)$ e que $fg'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.

Sabemos que existem $f'(a)$, $g'(a)$, $f(a)$ e $g(a)$ então existe $f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$. Vamos calcular esse valor usando a definição 3.1 e as operações dadas pelo teorema 2.21.

$$
\begin{aligned}
&f(a)g'(a)+f'(a)g(a)=\\
&f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)(g(a))=\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a)(g(a+h)-g(a))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a)(f(a+h)-f(a))}{h}=\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a)(g(a+h)-g(a))}{h}+\frac{g(a)(f(a+h)-f(a))}{h}=\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a)(g(a+h)-g(a))+g(a)(f(a+h)-f(a))}{h}=\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)+g(a)f(a+h)-f(a)g(a)}{h}=\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)+g(a)f(a+h)-f(a)g(a)}{h}+\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a+h)g(a+h)}{h}=\\
&\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)(f(a)-f(a+h))-f(a)g(a)+g(a)f(a+h)-f(a)g(a)}{h}+\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)}{h}=\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)+g(a)(f(a+h)-f(a))}{h}+\\
&\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)(f(a)-f(a+h))}{h}=\\
&fg'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{g(a)(f(a+h)-f(a))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)(f(a)-f(a+h))}{h}=\\
&fg'(a)+g(a)f'(a)-g(a)f'(a)=fg'(a)
\end{aligned}
$$

Logo, era o que queríamos. □

Corolário 3.7 (Regra do quociente para derivadas): Sejam f e g de mesmo domínio X, deriváveis em a, com $g(a)\neq 0$. Então, a função $\frac{f}{g}$ é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

.

Demonstração. Como a está no domínio da f e da g, pois as duas são deriváveis em a, e $g(a)\neq 0$ está no domínio de $\frac{f}{g}$. a já é ponto de acumulação. Agora, basta mostrar que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

, pois existem $f'(a)$, $g'(a)$, $f(a)$ e $g(a)$.

Observe que $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$. Assim, a regra do produto, teorema 3.6, nos dá:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{f}{g}\right)(a)' = \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = \\
&\frac{f'(a)}{g(a)} + \left(\frac{1}{g}\right)'(a)f(a) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Vamos calcular $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \\
&\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)g(a)}}{h} = \\
&\lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} = \\
&\lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)g(a)} \\
&\lim_{h\to 0} -\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)g(a)} \qquad (3.2)\\
&-g'(a)\frac{1}{g^2(a)} = \frac{-g'(a)}{g^2(a)} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

A passagem de 3.2 para 3.3,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)g(a)} = \frac{1}{g^2(a)},$$

se justifica, pois: g é derivável e, portanto, pelo corolário 3.4, contínua. Assim, $\frac{1}{g}$ também é contínua por causa do teorema 2.27. Daí é só aplicar as propriedades dos limites do capítulo 2 dadas pelo corolário 2.21. Unindo as equações 3.1 e 3.3, temos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a)' = \frac{f'(a)}{g(a)} + \left(\frac{1}{g}\right)'(a)f(a) =$$
$$\frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{-g'(a)}{g^2(a)}f(a) =$$
$$\frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$$

Assim, temos o resultado como queríamos. □

Ainda temos a importante regra operacional para a composição de funções:

Teorema 3.8 (Regra da Cadeia): Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$, $a \in X$, a ponto de acumulação de X, $b \in Y$, b ponto de acumulação de Y, com $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável em a, e g é derivável em b, então $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ é derivável em a, com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Demonstração. f é derivável em a, então se $a + h \in X$ temos, pelo teorema 3.3, que f é diferenciável em a e que:

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + r(h) \tag{3.4}$$

onde, $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

Temos, também, que g é derivável em $b = f(a)$, então, se $b + k \in Y$ pelo teorema 3.3, g é diferenciável em $b = f(a)$ e:

$$g(b + k) - g(b) = g'(b)k + s(k) \tag{3.5}$$

onde, $\lim_{k\to 0} \frac{s(k)}{k} = 0$.

Fazendo $b + k = f(a + h)$ e substituindo $b = f(a)$ na equação 3.5, obtemos que :

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f(a + h) - f(a)) + s(f(a + h) - f(a)) \tag{3.6}$$

Substituindo 3.4 em 3.6, ficamos com:

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f'(a)h + r(h)) + s(f'(a)h + r(h))$$

Expandindo, teremos:

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a))f'(a)h + g'(f(a))r(h) + s(f'(a)h + r(h))$$

Para terminar a demonstração, basta verificar que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sigma(h)}{h}$=0, onde

$$\sigma(h) = g'(f(a))r(h) + s(k) = g'(f(a))r(h) + s(f'(a)h + r(h)),$$

. Assim, podemos aplicar 3.3 novamente e concluir que $g \circ f$ é derivável em a e que $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g'(f(a))r(h) + s(k)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{g'(f(a))r(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{s(k)}{h}$$

Sendo esta última passagem válida se $\lim_{h\to 0} \dfrac{s(k)}{h}$ existir. Observe que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g'(f(a))r(h)}{h} = 0,$$

, pois $\lim_{h\to 0} \dfrac{g'(f(a))r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} g'(f(a)) \lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = g'(f(a))0 = 0.$

Mas,

$$\frac{s(k)}{h} = \frac{s(k)k}{hk} = \frac{s(k)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

Fazendo $h \to 0$, teremos que $k \to 0$, pois $k = f(a+h) - f(a)$ e f é derivável em a e, portanto, contínua em a. Isso se dá por causa do teorema 3.4. Por isso, $\frac{s(k)}{k} \to 0$. Por último, $\frac{k}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que quando $h \to 0$ é $f'(a)$. Ou seja, $\frac{s(k)}{h} \to 0$.

Portanto, concluímos que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sigma(h)}{h} = 0$ e temos o que queríamos. □

Corolário 3.9: Se f for invertível, derivável em a, e f^{-1} for contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b, se, e somente se, $f'(a) \neq 0$ e nesse caso, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Demonstração. Se f^{-1} for derivável em b, a regra da cadeia, teorema 3.8, nos dá que $(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a))f'(a)$. No entanto, isso é igual a $(f^{-1})'(b)f'(a)$. Por outro lado, $(f^{-1} \circ f)'(a)$ é a derivada de $g(x) = x$ em a, e isso é 1 (É um caso particular do exemplo 3.10 item 1 abaixo). Juntando as duas observações, temos: $(f^{-1})'(b)f'(a) = 1$. Portanto, $f'(a) \neq 0$ e $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Reciprocamente, como f^{-1} é contínua em b, usando o teorema 2.19, podemos concluir que para toda sequência y_n, com elementos no domínio de f^{-1} com exceção do próprio b e convergente a b implica $f^{-1}(y_n)$, convergindo a $f^{-1}(b)$. Mas, se $y_n = f(x_n)$, então $f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(x_n)) = x_n$ converge a $f^{-1}(f(a)) = a$.

Portanto, tem-se que:

$$\lim \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y^n - b} = \lim \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \tag{3.7}$$

Vamos calcular $\frac{1}{f'(a)}$.

$$\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \tag{3.8}$$

Como $\lim 1 = 1$, usando a equação imediatamente acima e o teorema 2.21, temos:

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} = \lim \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \tag{3.9}$$

Unindo as equações 3.7, 3.8 e 3.9, chegamos a:

$$(f^{-1})'(b) = \lim \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y^n - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

Como $f'(a) \neq 0$, $\frac{1}{f'(a)}$ existe, ou seja, $(f^{-1})'(b)$ existe e f^{-1} é derivável em b. □

Vamos ver algumas funções que são deriváveis:

Teorema 3.10: São deriváveis as funções:

1. $c_n x^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $c_n \in \mathbb{R}$.

2. $\log_b x$ para todo $b > 0$ e $b \neq 1$.

3. $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$

4. b^x para todo $b > 0$ e $b \neq 1$. Como aconteceu quando estudamos a continuidade, se $b = 1$, o caso recai no primeiro item.

Demonstração. Como fizemos para as funções contínuas, faremos para as deriváveis, isto é, considerar a um ponto de domínio e de acumulação. Além disso, usaremos o teorema 2.21 sempre que necessário.

1. No caso em que $n = 0$, $c_n x^n = c_0 x^0 = c_0$, assim:

$$\lim_{h \to 0} \frac{c_0 - c_0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \tag{3.10}$$

Nos outros casos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{c_n x^n - c_n a^n}{x - a} = \\
&\lim_{x \to a} \frac{c_n (x - a)(x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})}{x - a} = \\
&\lim_{x \to a} c_n (x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-1}) = \\
&c_n (a^{n-1} + a a^{n-2} + a^2 a^{n-3} + \cdots + a^{n-1}) = \\
&c_n (a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}) = \\
&n c_n a^{n-1}
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{\log_b (a + h) - \log_b a}{h} = \\
&\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_b \left(\frac{a + h}{a} \right) = \\
&\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_b \left(1 + \frac{h}{a} \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Façamos $h = at$ e $t \to 0$, assim $h \to 0$. Ou seja, a equação 3.11 será igual a:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{at} \log_b \left(1 + \frac{at}{a} \right) = \\
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{at} \log_b (1 + t) = \\
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{at} \log_b (1 + t) = \\
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{a} \log_b (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \\
&\frac{1}{a} \lim_{t \to 0} \log_b (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{a} \log_b e
\end{aligned}$$

Observe que a última igualdade foge um pouco ao texto, por isso vamos simplesmente usá-la. Essa igualdade pode ser encontrada em Stewart [4] página 203. Para facilitar os cálculos quando derivamos um logaritmo, é comum fazer a mudança de base: $\log_b e = \frac{\log_e e}{\log_e b} = \frac{1}{\log_e b} = \frac{1}{\ln b}$. Assim, a derivada será: $\frac{1}{a \ln b}$.

3. Começaremos com o seno.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a)\cos(h)+\operatorname{sen}(h)\cos(a)-\operatorname{sen}(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a)(\cos(h)-1)+\operatorname{sen}(h)\cos(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a)(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)\cos(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a)\frac{(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(a)\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} =$$
$$\operatorname{sen}(a)\cdot 0 + \cos(a)\cdot 1 = \cos(a)$$

Para essa justificativa estar correta, precisamos que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$, e que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$. Isso é verdade, pois, para h próximo o suficiente de 0, $1 \geq \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \geq \cos(h)$. Ou seja, $0 \geq \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - 1 \geq \cos(h) - 1$. Assim, colocando o módulo, teremos: $0 \geq \left|\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - 1\right|$, o que corresponde a $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$. Também temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2(h)}{h(\cos(h)+1)} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{\cos(h)+1} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{\cos(h)+1}$$

Como seno, cosseno e 1 são contínuas, $\lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{\cos(h)+1} = \frac{-\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)+1} = \frac{0}{2} = 0$.

Para o cosseno:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a)\cos(h)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(h)-\cos(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a)(\cos(h)-1)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(h)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a)(\cos(h)-1)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(h)}{h} =$$
$$\cos(a).0-\operatorname{sen}(a).1 = -\operatorname{sen}(a)$$

4. Observe que $b^{\log_b x} = x$ e $\log_b b^x = x$ para todo x. Como $\log_b x$ é derivável em c, b^x é contínua em $a = f(c) = \log_b c$ e $f'(c) = \frac{1}{c\ln b} \neq 0$, podemos aplicar o corolário 3.9.

$$(b^x)'(a) = \frac{1}{(\log_b x)'(c)} =$$
$$\frac{1}{\frac{1}{c\ln b}} =$$
$$c\ln b =$$
$$b^a \ln b$$

□

A derivada de uma função nos entrega algumas informações importantes sobre máximos e mínimos locais de funções. Mas o que são esses máximos e mínimos locais?

Definição 3.11: Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em $a \in X$, se existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, então $f(x) \leq f(a)$. Analogamente, definimos que f tem mínimo local se $f(x) \geq f(a)$.

Teorema 3.12: Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ for derivável em a e possui um máximo (ou mínimo) local em a, então $f'(a) = 0$.

Demonstração. Se f possui máximo local, sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$, então $f(x) \leq f(a)$.

Seja $\epsilon \geq 0$. Como f é derivável em a, existe, pelas definições 3.1 e 2.18, $\delta_2 > 0$ tal que se $|x-a| < \delta_2$, então $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \epsilon$ ou, de forma equivalente, se $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2)$, $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \epsilon$.

Tome $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Então, temos que, ao mesmo tempo que se $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \epsilon$ e $f(x) \leq f(a)$. Isso quer dizer que $f(x)-f(a) \leq 0$ ou, equivalentemente, $f(a) - f(x) \geq 0$.

Se $f(a)-f(x) \geq 0$, em particular, teremos um δ para o qual $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \frac{f(a)-f(x)}{|x-a|}$.

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right| \leq \frac{f(a)-f(x)}{|x-a|}$$

Como $|x-a| > 0$, $|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| \leq f(a)-f(x)$. Então, $f(x)-f(a) \leq f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \leq f(a)-f(x)$ e, por isso, $0 \leq -f'(a)(x-a) \leq 2(f(a)-f(x))$. Portanto, $-f'(a)(x-a) \geq 0$. Se $x-a > 0$, $f'(a) \leq 0$ e se $x-a < 0$, $f'(a) \geq 0$. Mas, $f'(a)$ é um limite e é único pelo teorema 2.20. Logo, $f'(a) = 0$.

Por analogia, também conseguimos concluir que, para um mínimo local em a, também temos $f'(a) = 0$. □

No final do capítulo 2, vimos que, com o cálculo do limite, podem acontecer erros de, no máximo ϵ, por causa das aproximações que fizemos. Mas, isso pode ser melhorado, pelo menos para funções deriváveis.

Se a função for derivável, o erro máximo pode ser calculado em função do δ da definição 2.18, o limite de funções.

Teorema 3.13 (Erro máximo): O erro máximo em módulo que se comete ao calcular $f(a)$, aproximando x de a, é $|f'(a)|\delta$, onde $\delta = |x-a|$.

Demonstração. Já que $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, então, pela definição 3.1:

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \epsilon$$

Em outras palavras, $f'(a)-\epsilon < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)+\epsilon$. Assim, podemos concluir que $(f'(a)-\epsilon)(x-a) < f(x)-f(a) < (f'(a)+\epsilon)(x-a)$ ou $(f'(a)-\epsilon)(x-a) > f(x)-f(a) > (f'(a)+\epsilon)(x-a)$, dependendo do sinal de $x-a$. Usaremos a primeira expressão, e o segundo caso surgirá por analogia.

$$(f'(a)-\epsilon)(x-a) < f(x)-f(a) < (f'(a)+\epsilon)(x-a)$$
$$f'(a)(x-a)-\epsilon(x-a) < f(x)-f(a) < f'(a)(x-a)+\epsilon(x-a)$$

Nós queremos que tanto ϵ como $x - a$ estejam bem próximos de 0. Assim, podemos considerar que $|f(x) - f(a)| < |f'(a)(x - a)| = |f'(a)||x - a| < |f'(a)|\delta$, isto é, o erro máximo é $|f'(a)|\delta$. $\square$

4 Sistemas Dinâmicos

4.1 Definição

No capítulo 2, vimos o conceito de sequências. A definição 2.1 nos diz que uma sequência é uma função $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ou seja, se dissermos que o primeiro termo é x_1, o segundo é $x_2 = f(x_1)$ para alguma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o terceiro é $x_3 = g(x_2)$ para alguma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assim, sucessivamente, estaremos definindo uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $x(1) = x_1$, $x(2) = x_2$, $x(3) = x_3$, ..., uma sequência. Isto é, conhecendo o primeiro termo e, se dado um termo anterior, conseguimos saber o próximo, e isso define uma sequência.

Vejamos uma construção simples desse caso, dada por Alligood, Sauer e Yorke[2].

Exemplo 4.1.1: Uma população de bactérias dobra a cada período de uma hora. Assim, se $n > 1$, x_n, o próximo termo, é igual ao anterior, x_{n-1} dobrado. Isto é, $x_n = 2x_{n-1}$. Agora, só faltou o termo inicial, x_1, para definirmos completamente a sequência. Neste exemplo, corresponde a 10000.

Cabe ressaltar que o n da sequência corresponde à quantidade de tempo que se passou subtraída de uma hora. Assim, x_2, por exemplo, não é a quantidade de bactérias após duas horas, mas após uma hora; x_3, então, é a quantidade de bactérias após duas horas.

Vamos calcular alguns termos da sequência do exemplo.

n	x_n
1	10000
2	20000
3	40000
4	80000
5	160000

Tabela 4.1: Sequência $x_n = 2x_{n-1}$

Com um pouco de atenção, podemos observar que essa sequência corresponde à

$x_n = 10000 \cdot 2^{n-1}$.

Segundo Alligood, Sauer e Yorke[2], um sistema dinâmico é um conjunto de estados possíveis, junto a uma regra que define o estado atual, de acordo com estados passados. De acordo com essa definição, o exemplo 4.1.1 acima é um sistema dinâmico. Cada estado é representado por um elemento da sequência, em termos do elemento imediatamente anterior.

Mas, seguindo também essa definição, a seguinte sequência é um sistema dinâmico: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Nessa linha de raciocínio, considere o exemplo da população de bactérias, mas agora usamos um tempo em $\mathbb{R}$, isto é, um tempo contínuo em que podemos ter, por exemplo, o tempo 0,003. Isso continua sendo um sistema dinâmico, pois cada estado é definido por um anterior, e teremos uma ou mais equações, ou funções, que dirão qual é o valor presente.

O que trataremos a seguir e, durante todo este texto, serão sistemas dinâmicos representáveis por sequências. Veja que, no último comentário que fizemos - em que consideramos o tempo 0,003 - o sistema dinâmico não é representável por sequências, pois $\mathbb{R}$ não é enumerável (veja Lima 2012 [1] para mais detalhes).

Definição 4.1 (Sistema Dinâmico Discreto): Um mapa é uma função $f\colon X \to X$. Para este texto, consideraremos $X \subset \mathbb{R}$. A órbita de x de um mapa f é a sequência $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^k(x), ...\}$, em que $f^k(x)$ é a composição de f com ela mesma k vezes e x é o valor inicial da órbita. Se houver um p tal que $f(p) = p$, p é chamado de ponto fixo do mapa f. O conjunto de todas as órbitas e o mapa é o que chamamos de sistema dinâmico.

Observe que cada ponto que consideramos ser o inicial nos fornece uma sequência diferente, ou seja, uma órbita diferente.

Voltando ao exemplo 4.1.1, o mapa é $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = 2x$. Vejamos se f tem algum ponto fixo, isto é, vamos buscar valores de $p \in \mathbb{R}$ para os quais $f(p) = p$.

$$2p = p$$

$$2p - p = 0$$

$$p = 0$$

Ou seja, o ponto fixo é 0, e é o único.

O exemplo 4.1.2, também dado pelos mesmos autores, é mostrado a seguir.

Exemplo 4.1.2: Populações de bactérias, ou qualquer outra, não crescem indefinidamente. Se os recursos do ambiente acabam, algumas morrem antes de reproduzirem. Um ajuste seria então multiplicar $2x$ por $1-x$. Assim teríamos a função $f(x) = 2x(1-x) = -2x^2+2x$, uma função quadrática, cujo coeficiente de x^2 é negativo, caracterizando um crescimento seguido de um decrescimento nesta ordem.

No exemplo, foi considerado que $10000 = 0{,}01 \cdot 10^6$. Assim, o ponto inicial foi 0,01, e a escala passou a ser milhões. Veja a tabela com os primeiros 13 valores da órbita de $f(x) = 2x$ e $g(x) = -2x^2 + 2x$ com valor inicial 0,01.

n	$f^n(0{,}01)$	$g^n(0{,}01)$
0	0,0100000000	0,0100000000
1	0,0200000000	0,0198000000
2	0,0400000000	0,0388159200
3	0,0800000000	0,0746184887
4	0,1600000000	0,1381011397
5	0,3200000000	0,2380584298
6	0,6400000000	0,3627732276
7	1,2800000000	0,4623376259
8	2,5600000000	0,4971630912
9	5,1200000000	0,4999839039
10	10,2400000000	0,4999999995
11	20,4800000000	0,5000000000
12	40,9600000000	0,5000000000

Tabela 4.2: Órbita de $f(x) = 2x$ e $g(x) = -2x^2 + 2x$

Veja os 11º e 12º valores de g^n. Eles são iguais, mas isso acontece porque $\lim g^n = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ é um ponto fixo. O fato de que $\frac{1}{2}$ é um ponto fixo é simples perceber:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

A justificativa de que $\lim g^n(0{,}01) = \frac{1}{2}$ é um pouco mais longa, mas será vista adiante na seção 4.2.

4.2 Atratores e Repulsores

Antes dessa explicação, é necessário o seguinte comentário: uma função derivável em todo o seu domínio tem como derivada uma outra função. Por exemplo, a derivada da função $\operatorname{sen} x$ é a função $\cos x$, veja o exemplo 3.10. Dito isso, temos:

Definição 4.2: A k-ésima derivada de uma função f, com $k \in \mathbb{N}$, é a função em que se deriva f k vezes.

Exemplo 4.2.1: Usando o exemplo 3.10 que vimos no capítulo 3:

1. A terceira derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é

$$f'(f'(f'(f(x)))) = f'(f'(\cos x)) = f'(-\operatorname{sen} x) = -\cos x$$

2. A $(n+1)$-ésima derivada de qualquer polinômio é 0 para todo $n \in \mathbb{N}$. A cada vez que derivamos um polinômio, reduzimos o grau em 1. Veja o exemplo 3.10. Assim, derivando n vezes um polinômio de grau n, obtemos um de grau 0 que é um número real. Ao derivarmos mais uma vez, temos 0.

3. A n-ésima derivada de e^x é e^x para todo $n \in \mathbb{N}$, pois, usando o exemplo 3.10, $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

Definição 4.3: Uma função é suave, se tem k-ésimas derivadas para todo $k \in \mathbb{N}$, e todas elas são contínuas.

Exemplo 4.2.2: São suaves as funções: polinômios, seno, cosseno, exponenciais e logaritmos. Pois, a derivada de qualquer polinômio é um polinômio, que é contínuo. As derivadas de seno e cosseno ficam trocando entre seno e cosseno, a menos de sinal e, por isso, também são contínuas. Nas derivadas das exponenciais e logaritmos temos produtos e divisões de exponenciais e logaritmos que são contínuas.

Antes de prosseguirmos, voltemos à definição de continuidade no ponto $x = a$ (veja definição 2.26). Ela nos diz que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, mas $f(a) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$, o que quer dizer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$. Sempre que necessário, iremos usar esse comentário apenas citando que a função é contínua (ou suave).

Definição 4.4: Um ponto fixo p de um mapa $f\colon X \to X$ é um atrator, se existir $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$, $\lim f^n(x) = p$, onde $f^n(x)$ denota a composição de f com ela mesma n vezes para $n \in \mathbb{N}$. Se existir $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$, com exceção do próprio p, $f^k(x) \notin X \cap (p-\delta, p+\delta)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, p é um repulsor.

Por enquanto, somente citamos que, no caso do exemplo 4.1.2, $x = \frac{1}{2}$ é um atrator para o mapa g, mas ainda não justificamos. A justificativa seguirá por esse teorema 4.5.

Teorema 4.5: Seja $f\colon X \to X$ um mapa suave, e p um ponto fixo de f. Então:

1. se $|f'(p)| < 1$, p é um atrator.

2. se $|f'(p)| > 1$, p é um repulsor.

Demonstração. Durante a prova deste teorema, traduzimos o que disseram Alligood, Sauer e Yorke [2], além de esclarecer alguns pontos.

1. Seja $a \in \mathbb{R}$, com $|f'(p)| < a < 1$.

   Temos

$$|f'(p)| = \left|\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right| = \lim_{x\to p} \left|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right|.$$

   A última igualdade, o limite do módulo é o módulo do limite, é verdade para qualquer limite, desde que exista, pois $||a| - |b|| \leq |a-b|$ para quaisquer a, $b \in \mathbb{R}$.

   Como tomamos $|f'(p)| < a < 1$, e f é suave, ou seja, existe $f'(p)$, pelo teorema 2.25, existe $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right| < a$ para todo $x \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$.

   Como $|x-p| > 0$, $|f(x) - f(p)| < a|x-p|$. Mas, como $0 \leq |f'(p)| < a$, $0 < a$. Isso, em conjunto com $|x-p| < \delta$, implica que $a|x-p| < a\delta$. Ou seja, $|f(x) - f(p)| < a\delta$. Portanto, $-a\delta < f(x) - f(p) < a\delta$, o que quer dizer que $f(p) - a\delta < f(x) < f(p) + a\delta$. Como p é ponto fixo de f, $p - a\delta < f(x) < p + a\delta$, mas $a < 1$ e $\delta > 0$. Então, $p - \delta < p - a\delta < f(x) < p + a\delta < p + \delta$. Isto é, $p - \delta < f(x) < p + \delta$.

   Mas, isso quer dizer que, como $f(x) \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$, $f^2(x) \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$, repetindo o mesmo argumento, vale para qualquer $k \in \mathbb{N}$ que $f^k(x) \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$. Mas, isso não é suficiente para afirmar que $f^k(x)$ converge a p. Por exemplo, $f^k(x)$ pode estar indo de um lado ao outro, e poderíamos ter $f^k(x) = p - \frac{\delta}{2}$ e $f^{k+1}(x) = p + \frac{\delta}{2}$ para todo k par.

   Também temos o seguinte para justificar a convergência: $|f^k(x) - p| < a^k|x-p|$. De fato:

   Para $k = 1$, já temos o resultado provado acima. Suponha que o resultado valha para k. Como $f^k(x) \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$, usando os mesmos argumentos acima e analisando f e $f'(p)$ no ponto $y = f^k(x)$, temos: $|f(f^k(x)) - f(p)| < a|f^k(x) - f(p)|$ o que implica que $|f(f^k(x)) - p| < a|f^k(x) - p|$. Mas, por hipótese de indução, segue que $|f(f^k(x)) - p| < a|f^k(x) - p| < a(a^k|x-p|) = a^{k+1}|x-p|$. Mas, isso equivale a $|f^{k+1}(x) - p| < a^{k+1}|x-p|$.

Por indução, chegamos a $|f^k(x) - p| < a^k|x-p|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $a^k \to 0$, pois $a < 1$, temos $f^k(x) \to p$. Isto é, p é atrator.

2. Seja $a \in \mathbb{R}$, com $|f'(p)| > a > 1$.

   Analogamente, como fizemos no item 1, podemos chegar a $|f(x) - f(p)| > a|x-p|$ para todo $x \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$ para algum $\delta > 0$. Mas, p é ponto fixo, implicando que $|f(x) - p| > a|x-p|$. Observe que, como $a > 1$, $|f(x) - p| > |x-p|$. Temos, então, duas possibilidades: $|f(x) - p| > \delta$ ou $|f(x) - p| < \delta$. Lembre que: $|x-p| < \delta$.

   Se $|f(x) - p| > \delta$, não há nada mais a se mostrar, porque já é o que queremos.

   Se $|f(x) - p| < \delta$:

   Por indução, temos $|f^k(x) - f(p)| > a^k|x-p|$, para $k \in \mathbb{N}$, desde que $f^k(x) \in X \cap (p-\delta, p+\delta)$. De fato, para $k = 1$ já foi discutido acima. Suponha que $|f^k(x) - f(p)| > a^k|x-p|$, então, analisando f e $f'(p)$ no ponto $y = f^k(x)$ temos, $|f(f^k(x)) - f(p)| > a|f^k(x) - f(p)|$ o que implica em $|f(f^k(x)) - p| > a|f^k(x) - p|$. Mas, por hipótese de indução, segue que $|f(f^k(x)) - p| > a|f^k(x) - p| > a(a^k|x-p|) = a^{k+1}|x-p|$. Mas, isso equivale a $|f^{k+1}(x) - p| > a^{k+1}|x-p|$, que era o que queríamos.

   Ou seja, $f^k(x)$ fica cada vez mais distante de p, à medida que k aumenta, pois $a > 1$. Eventualmente, vai existir um k_0, tal que $|f^{k_0} - p| > a^{k_0}|x-p| > \delta$. Precisamente, esse k_0 será tal que $a^{k_0} > \frac{\delta}{|x-p|}$, ou seja, $k_0 > \log_a \dfrac{\delta}{|x-p|}$.

$\square$

Como estávamos querendo, usaremos o teorema 4.5 para verificar no exemplo 4.1.2, se $x = \frac{1}{2}$ é mesmo um ponto fixo atrator. E, de fato, $|g'(x)| = |(-2x^2 + 2x)'| = |-4x + 2|$. Substituindo $x = \frac{1}{2}$, temos $|g'\left(\frac{1}{2}\right)| = |-4\left(\frac{1}{2}\right) + 2| = |0| < 1$.

Mas, será que teremos um repulsor no exemplo 4.1.2 para o mapa g? Para encontrarmos repulsores, primeiro, precisamos encontrar pontos fixos para g e, para isso, resolveremos a equação $-2x^2 + 2x = x$.

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2x &= x \\ -2x^2 + x &= 0 \\ x(-2x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Então, os pontos fixos são $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. O $x_2 = \frac{1}{2}$ já sabemos ser atrator, mas o $x = 0$ é repulsor: $|g'(0)| = |-4 \cdot 0 + 2| = |2| = 2 > 1$.

4.3 Órbitas Periódicas

O leitor muito crítico pode estar pensando: "Eu já sei, pelos exemplos 4.1.1 e 4.1.2, que existem tanto atratores quanto repulsores, mas todos os repulsores são como o exemplo de $f(x) = 2x$? Nesse caso, o $x = 0$ é repulsor ($|f'(0)| = 2 > 1$) e, pela tabela apresentada, $f^k(x)$ parece estar sempre se afastando dele."

A resposta é não. Considere o exemplo dado por Alligood, Sauer e Yorke [2], $f(x) = 3{,}3x(1-x)$. Segundo eles, algumas órbitas se alternam entre os valores 0,4794 e 0,8236 em algum momento.

Os pontos fixos são $x = 0$ e $x = \frac{23}{33}$. Eles são repulsores, pois, usando o teorema 4.5, $f'(x) = 3{,}3(1-x) - 3{,}3x = -6{,}6x + 3{,}3$. Assim, $|f'(0)| = |3{,}3| > 1$ e $\left|f'\left(\frac{23}{33}\right)\right| = |-0{,}2 \cdot 23 + 3{,}3| = |-4{,}6 + 3{,}3| = |-1{,}3| > 1$.

O fato de $x = 0$ e $x = \frac{23}{33}$ serem repulsores corrobora a afirmação dos autores de que as órbitas se alternam entre 0,4794 e 0,8236, pois, com essa alternância, não há como existir $\lim f^n(x)$. Lembre-se do teorema 2.11. Porém, essa alternância ocorre mesmo? Vejamos:

Definição 4.6 (Órbitas Periódicas): Seja $f\colon X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$ um mapa. Chamamos p de ponto periódico de período k se $f^k(p) = p$ e k forem o menor número com essa propriedade. Se a órbita tiver ponto inicial p, a órbita é chamada de órbita periódica de período k. O ponto p também pode ser chamado de ponto k-periódico, e a órbita periódica de órbita k-periódica.

Vejamos que, para essa definição, é necessária a existência de um $k \in \mathbb{N}$ com $f^k(p) = p$, mas também é preciso verificar se ele é realmente o menor. Por exemplo, se $f(x) = 3{,}3x(1-x)$, $f^4(0{,}4794) = 0{,}4794$, mas f^2 também tem essa propriedade. Outro detalhe não menos importante, mas fácil de perceber, é que todo ponto fixo é 1-periódico e todo ponto 1-periódico é fixo. E uma última observação a ser feita é que, tomando $g(x) = f^k(x)$, se p for k-periódico, então, por essa definição, p é ponto fixo de $g(x)$, mas o inverso não é verdade para $k > 1$. Isto é, se $f^k(p) = p$, p não é necessariamente k-periódico, e foi isso que aconteceu no exemplo que apresentamos acima, $f^4(0{,}4794) = 0{,}4794$, mas 0,4794, que não é ponto fixo, é 2-periódico e não 4-periódico. O mesmo ocorre com 0,8236, que é 2-periódico. Além disso, não é por coincidência que $f(0{,}4794) = 0{,}8236$ e

$f(0{,}8236) = 0{,}4794$.

Como fizemos para pontos fixos, temos algo análogo para órbitas periódicas.

Definição 4.7: Seja $f\colon X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$ um mapa, e p um ponto k-periódico. Se p é um atrator do mapa f^k, dizemos que a órbita k-periódica é uma órbita período-atratora. Se p é repulsor do mapa f^k, a órbita k-periódica é uma órbita período-repulsora.

Se esperamos que uma órbita seja período-atratora (ou repulsora), vale a pena recordar a regra da cadeia, teorema 3.8, que, resumindo, é: $(g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x)$. Se pusermos $g(x) = f(x)$ e $h(x) = f^{k-1}(x)$, teremos:

$$(g \circ h)'(x) = (f^k(x))' = f'(f^{k-1}(x))(f^{k-1}(x))' \tag{4.1}$$

Observe que, para uma órbita ser k-periódica, é necessário, também, que existam k pontos k-periódicos, tais que $f(p_2) = p_1$, $f(p_3) = p_2$, $f(p_4) = p_3$, $\ldots$, $f(p_k) = p_{k-1}$ e $f(p_1) = p_k$. Assim, garantimos que a órbita é $(p_k, p_{k-1}, p_{k-2}, \ldots, p_1, p_k, p_{k-1}, \ldots)$. E, então, teremos $f^{k-1}(p_k) = p_1$. Observe a alternância entre p_1, p_2, p_3, ...

Portanto, usando a equação (4.1),

$$(f^k(p_k))' = f'(f^{k-1}(p_k))(f^{k-1}(p_k))' = f'(p_1)(f^{k-1}(p_k))'.$$

Desse modo, podemos usar o Teorema 3.8 novamente para $f'(p_1)(f^{k-1}(p_k))'$. Assim, teremos: $f'(p_1)(f^{k-1}(p_k))' = f'(p_1)f'(f^{k-2}(p_k))(f^{k-2}(p_k))'$. Seguindo a órbita, teremos $f^{k-2}(p_k) = p_2$. Ou seja, $f'(p_1)(f^{k-1}(p_k))' = f'(p_1)f'(p_2)(f^{k-2}(p_k))'$. Raciocinando da mesma forma, até esgotarmos k, teremos que $(f^k(p_k))' = f'(p_1)f'(p_2)f'(p_3)\ldots f'(p_k)$.

Por conseguinte, temos o teorema abaixo.

Teorema 4.8: Uma órbita k-periódica é período-atratora se $|f'(p_1)f'(p_2)f'(p_3)...f'(p_k)| < 1$, e é período-repulsora se $|f'(p_1)f'(p_2)f'(p_3)...f'(p_k)| > 1$, onde p_i é k-periódico para todo $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$.

Demonstração. Usemos o comentário acima em conjunto com a definição 4.7 e o Teorema 4.5. □

No próximo capítulo, discutiremos o que acontece com órbitas que não são periódicas nem convergentes.

5 Caos

Segundo o dicionário Oxford Languages [5], o caos é: ”mistura de coisas ou ideias em total desarmonia; confusão”. Em matemática essa mistura de coisas ou ideias em total desarmonia pode ser representada por uma órbita caótica, uma órbita em que não há atratores, não é fixa, nem periódica. Para nos auxiliar a identificar quais órbitas são caóticas, nós temos os números e expoentes de Lyapunov.

5.1 Expoentes de Lyapunov

Suponha que x_1 e $x_1 + \Delta x$ são duas condições iniciais suficientemente próximas, ou seja, $\Delta x \sim 0$. Queremos saber o que acontece com $x_n = f^n(x_1)$ e $y_n = f^n(x_1 + \Delta x)$ se o mapa $f : X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$ for suave. Mais especificamente, gostaríamos de saber o que ocorre com $|x_n - y_n|$.

Para alcançarmos esse objetivo, vamos verificar o conceito de número de Lyapunov, conforme fez Santos [6].

No Teorema 3.13, que calcula erro máximo, temos que $|f(x) - f(a)| \approx |f'(a)||x - a|$ se nos aproximarmos de a, ou de forma equivalente, $|f(a) - f(a + \Delta x)| \approx |f'(a)||\Delta x|$.

Mas, veja que f^n é derivável porque é a composição de f, que é derivável, com ela mesmo n vezes. Assim:

$$\begin{aligned} |x_n - y_n| = |f^n(x_1) - f^n(x_1 + \Delta x)| &\approx |(f^n(x_1))'||\Delta x| \\ \frac{|f^n(x_1) - f^n(x_1 + \Delta x)|}{|\Delta x|} &\approx |(f^n(x_1))'| = |f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)| \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para entender a equação (5.1), lembre-se do que fizemos para o teorema 4.8, usamos a regra da cadeia, teorema 3.8, e a definição 4.1. Aqui a ideia é a mesma.

Agora, vamos calcular a média geométrica aproximada de $|x_n - y_n|$. Esse valor é $|x_n - y_n|^{\frac{1}{n}}$, que é aproximadamente $(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$. Mas, e se quisermos prever bem mais à frente, por exemplo, quando n for grande o suficiente? Assim, se o limite $\lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$ existir, teremos uma média para a contração/afastamento de termo a termo da órbita com condições iniciais próximas.

Definição 5.1 (Número de Lyapunov): O número de Lyapunov é

$$L(x_1) = \lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$$

, onde f é um mapa, e x_n é uma órbita pelo mapa f.

Também podemos definir o expoente de Lyapunov.

$$\begin{aligned}
&\lim \ln((|f'(x_1)||f'(x_2)| \cdots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}) = \\
&\lim \frac{1}{n}(\ln(|f'(x_1)||f'(x_2)| \cdots |f'(x_n)|)) = \\
&\lim \frac{1}{n}(\ln|f'(x_1)| + \ln|f'(x_2)| + \cdots + \ln|f'(x_n)|) =
\end{aligned}$$

Definição 5.2 (Expoente de Lyapunov): O expoente de Lyapunov é

$$h(x_1) = \lim \frac{1}{n}(\ln|f'(x_1)| + \ln|f'(x_2)| + ... + \ln|f'(x_n)|)$$

, onde f é um mapa, e x_n uma órbita pelo mapa f.

Observe que o número e o expoente de Lyapunov podem ser aplicados a qualquer órbita, inclusive as periódicas, desde que os limites existam. E eles ajudam a identificar se uma órbita é período-repulsora ou período-atratora. Por exemplo, se um número de Lyapunov é 2 para uma órbita $k-$periódica podemos dizer que $|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_k)| = 2^k > 1$, ou seja, que essa órbita é repulsora.

Além disso, temos uma ligação forte entre o número e o expoente de Lyapunov dada por esse teorema.

Teorema 5.3: O número de Lyapunov $L(x_1)$ existe e é diferente de 0 se, e somente se, o expoente de Lyapunov $h(x_1)$ existe e $h(x_1) = \ln L(x_1)$.

Demonstração. Suponha a existência de $L(x_1)$, número de Lyapunov, diferente de 0. Então:

$$L(x_1) = \lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$$

$L(x_1) > 0$, pois $|f'(x_i)| > 0$ para todo i. Logo, faz sentido calcularmos $\ln L(x_1)$.

$$\ln L(x_1) = \ln \lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}} = \tag{5.2}$$
$$\lim \ln(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}} = \tag{5.3}$$
$$\lim \left(\frac{1}{n}\right)(\ln(|f'(x_1)|) + \ln(|f'(x_2)|) + ... + \ln(|f'(x_n)|)) = h(x_1)$$

A passagem de 5.2 e 5.3 se dá porque a função f é suave. Portanto, o expoente de Lyapunov $h(x_1)$ existe e $h(x_1) = \ln L(x_1)$.

Suponha a existência de $h(x_1)$, expoente de Lyapunov. Então:

$$h(x_1) = \lim \left(\frac{1}{n}\right)(\ln(|f'(x_1)|) + \ln(|f'(x_2)|) + ... + \ln(|f'(x_n)|)) =$$
$$\lim \left(\frac{1}{n}\right)(\ln(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)) =$$
$$\lim \ln(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}} \tag{5.4}$$

Como f é suave, a equação 5.4 implica que:

$$\lim \ln(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}} = \ln \lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$$

Como o $h(x_1)$ existe, existe $e^{h(x_1)}$. Mas, $e^{h(x_1)} = e^{\ln \lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}}$. Observe que e^x e $\ln x$ são funções inversas, então

$$e^{\ln \lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}} = \lim(|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}.$$

Logo, $L(x_1)$ existe e $L(x_1) = e^{h(x_1)}$, ou equivalente, $h(x_1) = \ln L(x_1)$, mais ainda, como $e^{h(x_1)} > 0$, $L(x_1) > 0$. □

Temos, também, que se x_1 é fixo, $L(x_1) = |f'(x_1)|$ e $h(x_1) = \ln |f'(x_1)|$. Segue que, para uma órbita periódica: $h(x_1) = \frac{\ln |f'(x_1)| + ... + \ln |f'(x_k)|}{k}$.

O expoente de Lyapunov é definido caso o limite $\lim \frac{1}{n}(\ln |f'(x_1)| + \ln |f'(x_2)| + \cdots + \ln |f'(x_n)|)$ exista. Assim, se $|f'(x_i)| = 0$ para algum $i \in \mathbb{N}$, $\ln |f'(x_i)|$ não está definido. Assim, o expoente de Lyapunov não existirá. O mesmo se aplica se $\lim |f'(x_n)| = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, pois $\lim \ln |f'(x_n)|$ não estaria definido.

Um resultado interessante que temos é:

Teorema 5.4: Se $L(x_1)$ é um número de Lyapunov para a órbita $\{x_1,x_2,...\}$ do mapa

f, então, o número de Lyapunov para a órbita $\{x_1, f^k(x_1), f^k(f^k(x_1)), \ldots\}$ do mapa f^k é $(L(x_1))^k$.

Demonstração. Pela regra da cadeia, teorema 3.8,

$$(f^k(x_i))' = f'(x_{i+k-1})f'(x_{i+k-2}) \cdots f'(x_i)$$

para $1 \leq i \leq n$. Então, se existir $\lim |f^k(x_1)||f^k(x_2)| \cdots |f^k(x_n)|^{\frac{1}{n}}$, ele será

$$\lim(|f'(x_k)f'(x_{k-1}) \cdots f'(x_1)||f'(x_{k+1})f'(x_k) \cdots f'(x_2)| \cdots$$
$$|f'(x_{n+k-1})f'(x_{n+k-2}) \cdots f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$$

Reorganizando de forma conveniente, teremos

$$\lim |f'(x_1)f'(x_2)...f'(x_n)|^{\frac{1}{n}} |f'(x_2)f'(x_3)...f'(x_{n+1})|^{\frac{1}{n}} ... |f'(x_k)f'(x_{k+1})...f'(x_{n+k-1})|^{\frac{1}{n}}$$

Porém, temos que $L(x_1) = \lim |f'(x_1)f'(x_2)...f'(x_n)|^{\frac{1}{n}} = \lim |f'(x_2)f'(x_3)...f'(x_{n+1})|^{\frac{1}{n}} = ... = \lim |f'(x_k)f'(x_{k+1})...f'(x_{n+k-1})|^{\frac{1}{n}}$. O que quer dizer que

$$\lim |f'(x_1)f'(x_2) \cdots f'(x_n)|^{\frac{1}{n}} |f'(x_2)f'(x_3) \cdots f'(x_{n+1})|^{\frac{1}{n}} \cdots$$
$$|f'(x_k)f'(x_{k+1}) \cdots f'(x_{n+k-1})|^{\frac{1}{n}} =$$
$$\underbrace{L(x_1)L(x_1) \cdots L(x_1)}_{\text{k}} = L^k(x_1)$$

Logo, o número de Lyapunov para a órbita $\{x_1, f^k(x_1), f^k(f^k(x_1)), \ldots\}$ do mapa f^k é $(L(x_1))^k$. □

Definição 5.5: Uma órbita $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ é assintoticamente periódica se ela converge a uma órbita $(y_1, y_2, \ldots, y_k, y_1, y_2, \ldots)$ periódica.

Teorema 5.6: Seja $f \colon X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$. Se uma órbita x_n é assintoticamente periódica, sendo y_n a órbita k-periódica que torna x_n assintoticamente periódica, com $f'(x_i) \neq 0$ para todo i, então as órbitas x_n e y_n têm o mesmo expoente de Lyapunov, se ele existir.

Demonstração. Assuma que $k = 1$, ou seja, y_1 é ponto fixo. Usando as definições 2.16 e 5.5, $\lim |x_n - y_n| = 0$ e isso significa que, pela definição 2.10, $|(|x_n - y_n|)| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e n grande o suficiente. Porém, $y_n = y_1$, assim: $|(|x_n - y_n|)| = |x_n - y_1| < \epsilon$. Portanto, $\lim x_n = y_1$.

Ainda, temos que, para um x positivo, $\ln x$ é contínua e:

$$\lim \ln |f'(x_n)| = \ln |\lim f'(x_n)| = \ln |f'(y_1)|$$

Usando que se $\lim s_n = s$, então

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i = s$$

Teremos, portanto, que:

$$h(x_1) = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |f'(x_i)| = \ln |f'(y_1)| = h(y_1)$$

Agora, assuma que $k > 1$ assim y_1 não é necessariamente ponto fixo de f, mas é ponto fixo de f^k. Usando o fato que provamos acima, e o teorema 5.4, temos $kh(x_1)$, o expoente de Lyapunov, igual a $\ln |(f^k(y_1))'|$. Isso implica que $h(x_1) = \frac{1}{k} \ln |(f^k(y_1))'| = h(y_1)$. $\square$

5.2 Órbitas Caóticas

Na seção 5.1, conseguimos calcular o expoente de Lyapunov para órbitas periódicas e pontos fixos, e até para órbitas assintoticamente periódicas. Mas, o que aconteceria em outros casos? Um deles é o caso de a órbita ser caótica.

Definição 5.7: Seja $f\colon X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$ um mapa e x_n uma órbita limitada. Uma órbita é caótica se

1. x_n não é assintoticamente periódica.

2. O expoente de Lyapunov $h(x_1)$ é maior que 0.

Exemplo 5.2.1 (Mapa Tenda): O mapa tenda é $T\colon [0{,}1] \to [0{,}1]$:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

O gráfico da figura 5.1 justifica porque o mapa leva esse nome.

Figura 5.1: Mapa Tenda
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Se não contarmos o ponto $x = \frac{1}{2}$, o mapa tenda é suave, porque suas partes são polinômios. Não podemos contar o ponto $x = \frac{1}{2}$, porque

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{T(x) - T(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2(1 - x) - 1}{x - \frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{-2x + 1}{x - \frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{-2(x - \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} -2 = -2$$

e,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{T(x) - T(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x - 1}{x - \frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2(x - \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} 2 = 2$$

Ou seja, $T(x)$ não é derivável nesse ponto por causa do teorema 2.24 e da definição 3.1.

Derivando $T(x)$, onde isso faz sentido, pelo teorema 3.10, temos:

$$T'(x) = \begin{cases} 2, & x < \frac{1}{2} \\ -2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Então, para toda órbita x_n em que $\frac{1}{2}$ não é um dos elementos

$$\begin{aligned} & L(x_1) = \lim(|T'(x_1)||T'(x_2)| \cdots |T'(x_n)|)^{\frac{1}{n}} = \\ & \lim(2 \cdot 2 \cdots 2)^{\frac{1}{n}} = \\ & \lim(2^n)^{\frac{1}{n}} = \\ & \lim 2 = 2 \end{aligned}$$

Aplicando o teorema 5.3, $h(x_1) = \ln 2 > 0$.

Agora, vejamos se $T(x)$ tem órbitas assintoticamente periódicas. Como $|T'(x)| = 2 > 1$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$, todas as órbitas periódicas serão período-repulsoras.

Como as órbitas periódicas do mapa tenda são todas período-repulsoras, se elas não forem assintoticamente periódicas, serão caóticas. Mas elas só serão assintoticamente periódicas se contiverem algum elemento k-periódico para algum $k \in \mathbb{N}$, justamente porque as órbitas periódicas são repulsoras.

Para exemplificar, se as órbitas tiverem os elementos 0, $\frac{2}{3}$, 0,4 e 0,8, elas não serão caóticas, pois 0 e $\frac{2}{3}$ são pontos fixos: $T(0) = 2 \cdot 0 = 0$ e $T\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, e 0,4 e 0,8 são 2-periódicos: $T(0{,}4) = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$ e $T(0{,}8) = 2(1 - 0{,}8) = 2(0{,}2) = 0{,}4$.

As órbitas caóticas são exemplos muito mais difíceis de visualizar numericamente, e também de justificar, citando Alligood, Sauer e Yorke[2]:

> This is a good place to remark on the difficulty of proving rigorously that orbits are chaotic, even for simple systems (...) even if the best computer approximation can indicate a positive Lyapunov exponent and a nonperiodic orbit, this is not a mathematical proof. If the orbit is periodic with period longer than the number of atoms in the universe, no simple computer iteration scheme will tell us. (Alligood, Sauer e Yorke, p.238).

Em português, essa citação quer dizer que, mesmo que usemos os melhores computadores e eles indiquem um expoente de Lyapunov maior que 0 e uma órbita não periódica (ou não assintoticamente periódica), pode ser que o período esteja tão distante que não poderíamos sequer computá-lo.

Porém, para alguns mapas, como o tenda, é possível usarmos a ideia de itinerários (veja Alligood, Sauer e Yorke [2] páginas 27 a 31 para mais esclarecimentos) para, pelo menos, dizer que:

Teorema 5.8: O mapa tenda tem infinitas órbitas caóticas.

A prova para esse teorema pode ser encontrada em [2], mas, devido às ferramentas usadas não serem abordadas aqui, esse não será mostrado.

Por fim, temos que $T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $T(1) = 2(1-1) = 0$ e $T(0) = 0$, ou seja, por tudo o que fizemos neste exemplo, se uma órbita tiver o elemento $x = \frac{1}{2}$, a órbita será assintoticamente periódica.

Vimos que o mapa tenda tem infinitas órbitas caóticas, mas ele também tem infinitas órbitas periódicas, como veremos na próxima seção.

5.3 Conjugação

Imagine que duas funções são parecidas o suficiente para que, se as órbitas (ou pontos) de uma delas tem certa característica, ser periódica, por exemplo, podemos dizer que as órbitas (ou pontos) da outra têm as mesmas características. Esses dois mapas serão chamados de conjugados:

Definição 5.9: Dois mapas $f\colon X \to X$ e $g\colon X \to X$ são conjugados se existe um mapa contínuo e bijetivo $h\colon X \to X$, tal que $h \circ f = g \circ h$

O mapa h dessa definição pode ser visto como uma mudança de coordenadas para os mapas, uma tradução de um mapa para o outro.

Exemplo 5.3.1: Os mapas tenda, $T(x)$, e o logístico $L(x) = 4x(1-x)$ são conjugados. De fato, o mapa $h(x) = \frac{1-\cos \pi x}{2}$ conjuga o tenda e o mapa logístico. Ele é contínuo, porque é a soma das funções contínuas $c_1(x) = \frac{1}{2}$ e $c_2(x) = -\frac{\cos \pi x}{2}$. Aqui cabe lembrar os Teoremas 2.27 e 2.29.

O mapa $h^{-1}(x) = \frac{\arccos(1-2x)}{\pi}$ é o inverso de $h(x)$, pois, fazendo as composições,

$$h(h^{-1}(x)) = \frac{1-\cos(\pi\frac{\arccos(1-2x)}{\pi})}{2} =$$
$$\frac{1-\cos(\arccos(1-2x))}{2} =$$
$$\frac{1-(1-2x)}{2} = \frac{2x}{2} = x$$
$$h^{-1}(h(x)) = \frac{\arccos(1-2\frac{1-\cos\pi x}{2})}{\pi} =$$
$$\frac{\arccos(1-(1-\cos\pi x))}{\pi} =$$
$$\frac{\arccos(\cos\pi x)}{\pi} = \frac{\pi x}{\pi} = x$$

Agora, só falta verificarmos se $h \circ T = L \circ h$. Para $x \leq \frac{1}{2}$:

$$h \circ T = h(T(x)) = \frac{1-\cos(2\pi x)}{2} = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

$$L \circ h = L(h(x)) = 4\left(\frac{1-\cos(\pi x)}{2}\right)\left(1 - \frac{1-\cos(\pi x)}{2}\right) =$$
$$4(\frac{1-\cos(\pi x)}{2})(\frac{2-1+\cos(\pi x)}{2}) =$$
$$4(\frac{1-\cos(\pi x)}{2})(\frac{1+\cos(\pi x)}{2}) =$$
$$1-\cos^2(\pi x) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

Portanto, temos $h \circ T = L \circ h$, como queríamos. Mas, ainda falta o caso em que $x > \frac{1}{2}$.

$$h \circ T = h(T(x)) = \frac{1-\cos(2\pi(1-x))}{2} = \operatorname{sen}^2(\pi(1-x))$$

$L \circ h$ continua sendo o mesmo, porque nem L nem h mudam quando $x > \frac{1}{2}$. Então, vamos calcular quando que $\operatorname{sen}^2(\pi x) = \operatorname{sen}^2(\pi(1-x))$.

$$\operatorname{sen}^2(\pi x) = \operatorname{sen}^2(\pi(1-x))$$

$$|\operatorname{sen}(\pi x)| = |\operatorname{sen}(\pi(1-x))|$$

$x \in [0,1]$, então $|\operatorname{sen}(\pi x)| = |\operatorname{sen}(\pi(1-x))| = \operatorname{sen}(\pi x)$ para todo x. Logo, $h \circ T = L \circ h$.

Teorema 5.10: A conjugação é transitiva, isto é, se $f(x)$ e $g(x)$ são conjugadas e $g(x)$ e $t(x)$ também são conjugadas, $f(x)$ e $t(x)$ são conjugadas.

Demonstração. Sejam $h(x)$ e $\overline{h}(x)$ as funções que tornam os mapas f e g, e g e t conjugados respectivamente. Então, pela definição 5.9:

$$h(f(x)) = g(h(x))$$

$$\overline{h}(g(x)) = t(\overline{h}(x))$$

Como h é bijetiva, apenas usando outra notação, $g(x) = h \circ f \circ h^{-1}$. Portanto,

$$\overline{h}(g(x)) = \overline{h}(h \circ f \circ h^{-1}) = t(\overline{h}(x))$$

Em outra notação, mas, equivalentemente,

$$(\overline{h} \circ h) \circ f \circ h^{-1} = t \circ \overline{h}$$

, que é o mesmo que

$$(\overline{h} \circ h) \circ f = t \circ (\overline{h} \circ h)$$

Agora, só precisamos verificar se $\overline{h} \circ h$ é contínua e bijetiva. Primeiramente, verificaremos a bijetividade:

Observe que h e $\overline{h}$ são ambas bijetivas, então $\overline{h} \circ h \circ h^{-1} \circ \overline{h}^{-1}(x) = \overline{h}(\overline{h}^{-1}(x)) = x$, e então $\overline{h} \circ h$ é bijetiva.

Como h e $\overline{h}$ são ambas contínuas, o teorema 2.28 nos garante que $\overline{h} \circ h$ é contínua. □

Vamos começar agora a explicitar características que podem ser, como dissemos anteriormente, iguais por causa da conjugação.

Teorema 5.11: Se dois mapas, f e g, são conjugados e x_k é k-periódico para f, então $h(x_k)$, h é o mapa que torna f e g conjugados, é k-periódico para g. E, se h' nunca for 0 para a órbita x_k, $(g^k)'(h(x_k)) = (f^k)'(x_k)$.

Demonstração. Sejam f e g mapas conjugados, e x_k um ponto k-periódico. Temos que existe um mapa bijetivo e contínuo h, tal que $h \circ f = g \circ h$. Como h é bijetivo,

$f = h^{-1} \circ g \circ h$. Isso quer dizer que $f^k = (h^{-1} \circ g \circ h)^k$. Vamos calcular quando $k = 2$ e usar indução para obtermos uma fórmula para $(h^{-1} \circ g \circ h)^k$.

$$f^2 = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1} \circ g \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^2 \circ h$$

Se tivermos $f^k = h^{-1} \circ g^k \circ h$, então

$$f(f^k) = f^{k+1} = f(h^{-1} \circ g^k \circ h) = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} \circ g^k \circ h = h^{-1} \circ g \circ g^k \circ h = h^{-1} \circ g^{k+1} \circ h$$

Então, por indução, $f^k = h^{-1} \circ g^k \circ h$.

x_k é um ponto k-periódico, então $f^k(x_k) = x_k$, o que quer dizer que $h^{-1} \circ g^k \circ h(x_k) = x_k$, e, então, $g^k(h(x_k)) = h(x_k)$. Ou seja, para $h(x_k)$ ser k-periódico, precisamos apenas verificar se k é o menor para o qual isso acontece.

Suponha, por absurdo, que exista $\tilde{k} < k$ tal que $g^{\tilde{k}}(h(x_{\tilde{k}})) = h(x_{\tilde{k}})$. Então, $h^{-1} \circ g^{\tilde{k}} \circ h(x_{\tilde{k}}) = x_{\tilde{k}}$ o que implica que $f^{\tilde{k}}(x_{\tilde{k}}) = x_{\tilde{k}}$. Mas, isso é absurdo, porque k é o menor tal que $f^k(x_k) = x_k$.

Portanto, $h(x_k)$ é k-periódico.

Para a segunda parte do teorema, temos $h(x_k)$ k-periódico para g. Assim, $(g^k)'(h(x_k)) = g'(h(x_1))g'(h(x_2))...g'(h(x_k))$. Ao mesmo tempo, temos $(f^k)'(x_k) = f'(x_1)f'(x_2)...f'(x_k)$, pois x_k é k-periódico.

Por outro lado, $f' = (h^{-1})'(g(h))(g(h))' = (h^{-1})'(g(h))g'(h)h'$, pois podemos usar a regra da cadeia, teorema 3.8 com $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Temos, também, que, pelo teorema 3.9, $(h^{-1})' = \frac{1}{h'(h^{-1})}$. Ou seja, $f' = \frac{g'(h)h'}{h'(h^{-1}(g(h)))} = \frac{g'(h)h'}{h'(f)}$.

Portanto,

$$(f^k)'(x_k) = \left(\frac{g'(h(x_1))h'(x_1)}{h'(f(x_1))}\right)\left(\frac{g'(h(x_2))h'(x_2)}{h'(f(x_2))}\right)...\left(\frac{g'(h(x_k))h'(x_k)}{h'(f(x_k))}\right)$$

Conforme discutimos no capítulo 4, $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, ..., f(x_{k-1}) = x_k, f(x_k) = x_1$. Então,

$$(f^k)'(x_k) = \left(\frac{g'(h(x_1))h'(x_1)}{h'(x_2)}\right)\left(\frac{g'(h(x_2))h'(x_2)}{h'(x_3)}\right)...\left(\frac{g'(h(x_k))h'(x_k)}{h'(x_1)}\right)$$

Simplificando, já que, por hipótese, temos $h'(x_i) \neq 0$ para todo i:

$$(f^k)'(x_k) = g'(h(x_1))g'(h(x_2))...g'(h(x_k)) = (g^k)'(h(x_k))$$ □

Veja como esse teorema simplifica algumas análises: Voltando ao exemplo 5.2.1, o mapa tenda, vemos que os pontos 0 e $\frac{2}{3}$ são fixos, e que 0,4 e 0,8 são 2-periódicos. Assim, o exemplo 5.3.1 nos responde, em conjunto com o teorema 5.11, que são pontos fixos de $L(x) = 4x(1-x)$:

$\frac{1-\cos 0\pi}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ e $\frac{1-\cos\frac{2}{3}\pi}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

E, são pontos 2-periódicos de $L(x)$: $\frac{1-\cos 0{,}4\pi}{2} \approx \frac{1-0{,}31}{2} = \frac{0{,}69}{2} = 0{,}345$ e $\frac{1-\cos 0{,}8\pi}{2} \approx \frac{1+0{,}81}{2} = 0{,}905$.

Para encontrar os pontos fixos, era mais simples trabalhar com o próprio L, pois teríamos que resolver uma equação de segundo grau, o que é mais fácil que calcular $\cos(x)$ em geral. Mas, no caso dos pontos 2-periódicos, teríamos que resolver uma equação do 4º grau, cuja fórmula de resolução existe, embora quase sempre envolve o conjunto dos complexos.

Outro comentário necessário de ser feito é que, para aplicar o teorema 5.11 para esse caso, não precisaríamos saber sobre o valor de h', pois não usamos a segunda parte em momento algum.

Além dessas conclusões, ainda temos que:

Corolário 5.12: O mapa tenda tem infinitas órbitas periódicas.

Demonstração. O mapa logístico $L(x) = 4x(1-x)$ no intervalo $[0,\ 1]$ tem infinitas órbitas periódicas, pois:

$L^k(x)$ assume o valor zero $2^{k-1}+1$ vezes, e o valor um 2^{k-1} vezes para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato:

$L(x) = 0$ para os valores $x = 0$ e $x = 1$, e $L(x) = 1$ apenas para o valor $x = \frac{1}{2}$.

Suponha que $L^k(x)$ assuma o valor zero $2^{k-1}+1$ vezes, e o valor um 2^{k-1} vezes. Então, para cada valor de x tal que $L^k(x) = 0$, temos $L(L^k(x)) = L^{k+1}(x) = L(0) = 0$. Por isso, $L^{k+1}(x)$ assume o valor zero pelo menos $2^{k-1}+1$ vezes. Mas, já que o valor um é assumido $2^{k-1} \geq 1$ vezes por $L^k(x)$ e, porque também temos $L(L^k(x)) = L^{k+1}(x) = L(1) = 0$ para alguns x, o valor zero é assumido por $L^{k+1}(x)$ $2^{k-1}+1+2^{k-1} = 2^{k-1}(1+1)+1 = 2^k+1$ vezes.

Como L^k é contínua e assume os valores zero $2^{k-1}+1$ vezes, e o valor 1 2^{k-1} vezes, ela assume o valor $\frac{1}{2}$ 2^k vezes por causa do teorema do valor intermediário 2.31. Por isso, L^{k+1} assume o valor 1 2^k vezes, pois $L\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

E, por indução, temos o resultado.

Como L^k e $p_1(x) = x$ são polinômios no intervalo $[0,\ 1]$ e $L^k(x)$ assume o valor zero $2^{k-1}+1$ vezes e o valor um 2^{k-1} vezes para todo $k \in \mathbb{N}$, e $p_1(x) = x$ assume todos os valores em $[0,\ 1]$, existem 2^k pontos em que $L^k(x) = x$. Isso acontece novamente por aplicarmos o teorema do valor intermediário.

Assim, como $L^k(x) = x$ para 2^k valores de x, teremos 2^k órbitas periódicas. Se $k \to \infty$, $2^k \to \infty$.

Como o mapa logístico e o tenda são conjugados, usando o teorema 5.11 , concluímos que o mapa tenda também tem infinitas órbitas periódicas. $\square$

Corolário 5.13: Se dois mapas, f e g, são conjugados e x_k é uma órbita período-atratora (ou período-repulsora) para f e $h'(x_i) \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, h sendo o mapa que torna f e g conjugados; então, $h(x_k)$ é uma órbita período-atratora (período-repulsora) para g.

Demonstração. Se x_k é período-atratora para f, já temos, pelo teorema 4.8, que

$$|(f^k)'(x_k)| = |f'(x_1)f'(x_2)...f'(x_k)| < 1$$

Porém, aplicando o teorema 5.11, podemos aplicá-lo, porque $h'(x_i) \neq 0$, $|(g^k)'(h(x_k))| = |f'(x_1)f'(x_2)...f'(x_k)| < 1$. O mesmo vale para a órbita período-repulsora, trocando $<$ por $>$. $\square$

Assim, podemos voltar novamente aos exemplos 5.2.1 e 5.3.1 e usar esse corolário, 5.13, para concluir que, com exceção do ponto 0 (não podemos aplicar o corolário nele, porque $h'(0) = \frac{\pi \operatorname{sen} 0\pi}{2} = 0$), as órbitas com os pontos que mencionamos no exemplo 5.3.1 são período-repulsoras. Mas, não é somente para esses pontos, pois $h'(x) = \frac{\pi \operatorname{sen} \pi x}{2} \neq 0$ em qualquer dos outros pontos, menos o 1. Ou seja, se houver outra órbita periódica, ela será repulsora. Os casos dos pontos 0 e 1 têm que ser analisados separadamente. Para 0, que é ponto fixo, $g'(x) = 4(1-x) - 4x = -8x + 4$, ou seja, $g'(0) = 4 > 1$, sendo a órbita período-repulsora. Já no caso do 1, a órbita que começa nele não é sequer periódica, pois $g(1) = 0$ e 0 é ponto fixo, mas é assintoticamente periódica pelo mesmo motivo.

Corolário 5.14: Se $f(x)$ e $g(x)$ são conjugados, e x_n é assintoticamente periódica para o mapa f, então $h(x_n)$, em que h é o mapa que conjuga f e g, é assintoticamente periódica para o mapa g.

Demonstração. Sejam y_n uma órbita k-periódica para o mapa f, e x_n uma órbita assintoticamente periódica a y_n. Então, $\lim |x_n - y_n| = 0$. Se g é conjugado ao mapa f, o teorema 5.11 garante que, sendo $h(x)$ o mapa que conjuga f e g, $h(y_n)$ é k-periódica.

Vamos calcular $\lim |g(h(x_n))-g(h(y_n))|$, se existir. Independentemente desse limite existir, ele é, por conjugação, $\lim |h(f(x_n))-h(f(y_n))|$. Como $\lim |x_n-y_n| = 0$ para n grande o suficiente, podemos escrever $x_n = y_n \pm \epsilon$, para $\epsilon > 0$.

Isso faz com que $\lim |h(f(x_n)) - h(f(y_n))| = \lim |h(f(y_n \pm \epsilon)) - h(f(y_n))|$. Mas, esse limite é 0, pois h e f são contínuos e também $h(f(x))$. Portanto, $\lim |g(h(x_n)) - g(h(y_n))| = 0$. Com isso, podemos concluir que $\lim |h(x_{n+1}) - h(y_{n+1})| = 0$, que é também equivalente a $\lim |h(x_n) - h(y_n)| = 0$.

Mas, $h(y_n)$ é k-periódica, logo $h(x_n)$ é assintoticamente periódica. $\square$

Teorema 5.15: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ conjugados com $\lim \frac{\ln |t'(x_n)|}{n} = 0$ e $t'(x_i) \neq 0$, sendo $t(x)$ a função que conjuga f e g. Então, os números de Lyapunov, $h(x_1)$, para o mapa f e $h(t(x_1))$ para o mapa g são iguais.

Demonstração. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ conjugados, e $t(x)$ o mapa que os conjuga. Então, podemos escrever $t \circ f = g \circ t$. Assim, pela regra da cadeia, teorema 3.8, temos $t'(f(x))f'(x) = g'(t(x))t'(x)$. Isso quer dizer que $f'(x) = \frac{g'(t(x))t'(x)}{t'(f(x))}$, desde que $t'(f(x)) \neq 0$.

Como $t'(x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$f'(x_n)...f'(x_2)f'(x_1) = \frac{g'(t(x_n))t'(x_n)}{t'(f(x_n))}...\frac{g'(t(x_2))t'(x_2)}{t'(f(x_2))}\frac{g'(t(x_1))t'(x_1)}{t'(f(x_1))}$$

Isso, por sua vez, é igual a

$$\frac{g'(t(x_n))t'(x_n)}{t'(x_{n+1})}...\frac{g'(t(x_2))t'(x_2)}{t'(x_3)}\frac{g'(t(x_1))t'(x_1)}{t'(x_2)}.$$

Simplificando e reorganizando, ficamos com

$$g'(t(x_n))...g'(t(x_2))g'(t(x_1))\frac{t'(x_1)}{t'(x_{n+1})}.$$

Tomando o logaritmo na igualdade desenvolvida, teremos:

$$\ln f'(x_n)...f'(x_2)f'(x_1) = \ln g'(t(x_n))...g'(t(x_2))g'(t(x_1))\frac{t'(x_1)}{t'(x_{n+1})}.$$

Isso implica que

$$\ln f'(x_n)...f'(x_2)f'(x_1) = \ln(t'(x_{n+1})) - \ln(t'(x_1)) + \ln g'(t(x_n))...g'(t(x_2))g'(t(x_1)).$$

Dividindo por n e, depois, tomando o limite, ficamos com:

$$\lim \frac{\ln f'(x_n)...f'(x_2)f'(x_1)}{n} =$$

$$\lim \frac{\ln(t'(x_{n+1}))}{n} - \lim \frac{\ln(t'(x_1))}{n} + \lim \frac{\ln g'(t(x_n))...g'(t(x_2))g'(t(x_1))}{n}.$$

Essa afirmação é o mesmo que

$$h(x_1) = \lim \frac{\ln(t'(x_{n+1}))}{n} - \lim \frac{\ln(t'(x_1))}{n} + h(t(x_n)).$$

Por outro lado, $\lim \frac{\ln(t'(x_{n+1}))}{n} = 0$, por hipótese, e $\lim \frac{\ln(t'(x_1))}{n} = 0$. Portanto, $h(x_1) = h(t(x_n))$.

□

Corolário 5.16: Se $f(x)$ e $g(x)$ são conjugados e x_n é uma órbita caótica pelo mapa f, tal que, se $h(x)$ é o mapa que conjuga f e g, $h(x_n)$ é limitada, $h'(x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim \frac{\ln h'(x_n)}{n} = 0$. Então, $h(x_n)$ é caótica para o mapa g.

Demonstração. Com o corolário 5.14, temos que, como x_n é caótica e, por isso, não assintoticamente periódica, $h(x_n)$ não é assintoticamente periódica.

Pelo teorema 5.15, os expoentes de Lyapunov de x_n e $h(x_n)$ são iguais e positivos, porque x_n é caótica.

$h(x_n)$ é limitada por hipótese.

Portanto, $h(x_n)$ é caótica pela definição 5.7. □

Teorema 5.17: Os mapas logísticos $L(x) = 4x(1-x)$ e tenda têm o mesmo expoente de Lyapunov para qualquer órbita x_n, $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo mapa tenda, e $h(x_n) = h(x) = \frac{1-\cos \pi x_n}{2}$ pelo mapa $L(x)$.

Esse teorema usa ferramentas não presentes aqui, então, sua demonstração será omitida. Tal demonstração pode ser encontrada em Alligood;Sauer;Yorke[2].

Teorema 5.18: O mapa logístico tem órbitas caóticas.

Demonstração. Seja x_n uma órbita caótica do mapa tenda. Como x_n é não assintoticamente periódica, $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pelo corolário 5.14, $h(x_n)$ não é assintoticamente periódica.

Então, pelo teorema 5.17, o expoente de Lyapunov é o mesmo de $h(x_n)$ pelo mapa $L(x)$, sendo $h(x) = \frac{1-\cos \pi x}{2}$.

Agora, basta que $h(x_n)$ seja limitada para que $h(x_n)$ seja caótica. De fato,

$$|h(x)| = \left|\frac{1-\cos\pi x}{2}\right|$$
$$\left|\frac{1-\cos\pi x}{2}\right| \leq \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{\cos\pi x}{2}\right|$$
$$\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{\cos\pi x}{2}\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Então, $|h(x)| < 1$, como queríamos. Logo, $h(x_n)$ é caótica. $\square$

No próximo capítulo, veremos como essas teorias dos capítulos 2, 3, 4 e 5 são aplicadas para estudar incertezas e imprecisões, e como isso pode ser desenvolvido na educação básica.

6 Imprecisões e Incertezas Numéricas

6.1 Introdução

> A Matemática, assim como as demais ciências, não pode ser considerada uma verdade incontestável. Existem muitos contextos que permitem valores imprecisos, sobre os quais não se pode dar uma resposta com exatidão.

Começamos o capítulo com essa citação de Teixeira [7] para relembrar que a matemática, apesar de ser uma ciência que dizemos exata, não está livre de erros e pode - e deve - ser contestada.

Além disso, como bem nos disse Teixeira [7], o contexto nos permite e - também podemos dizer - nos obriga a dar uma resposta a um problema com valores imprecisos. Vejamos três exemplos.

Exemplo 6.1.1: 1. No ensino fundamental, de acordo a Base Nacional Comum Curricular [3], professores devem desenvolver a habilidade:

> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

Já sabemos a existência e a importância que o número π tem em matemática, mas, em parte dos exercícios e atividades que o aluno realiza, pedimos que "Use $\pi = 3{,}14$". Essa aproximação facilita parte da habilidade EF09MA02 - estimar a localização de alguns deles na reta numérica - mas não ajuda no restante. E, a abordagem desse exercício os obriga a responder algo inexato.

2. Uma empresa que produz refrigerantes em lata deseja saber qual é o volume de suas latas para colocar no rótulo. Elas tem 52mm de diâmetro, e altura de 114mm. Qual é o volume que deve ser colocado nele, sabendo que apenas 80% da lata é ocupada?

A resposta que um matemático daria seria exatamente $\frac{308256\pi}{5}$ mm$^{\mathbf{3}}$. Mas quem conseguiria entender essa resposta, diante da realidade brasileira em que aproximadamente 38 milhões (Em 2020 de acordo com a reportagem O NOSSO DEVER DE CASA[8], 2022) de adultos não terminaram o ensino fundamental anos iniciais?

Outros problemas podem surgir, como, por exemplo, a medida padronizada de latas vendidas aos consumidores, de acordo com a Portaria 249/2021 do INMETRO[9] deve estar em mililitros. Um problema simples de se resolver, dividindo o volume por 1000, o que resultaria em $\frac{308256\pi}{5000}$ ml, mas ainda temos o problema: "Que número é esse?"

Essa lata tem o conteúdo de aproximadamente 250ml, um número muito mais fácil de ler e que proporciona melhor entendimento para o consumidor.

3. Qual é a medida da diagonal de um quadrado de lado 1cm?

   O teorema de Pitágoras responde imediatamente que é $\sqrt{2}$cm, mas um aluno que quiser confirmar essa medida, com a precisão das réguas comuns, irá encontrar 1,4 cm, uma resposta aproximada.

Com isso em mente, vamos conversar sobre essas incertezas?

6.2 Incerteza e Imprecisão na Matemática

As primeiras incertezas que vemos na escola aparecem no ensino fundamental, quando dividimos dois números inteiros com resultado decimal. Especificamente, um número não múltiplo de três pelo próprio. Quando entendemos que o resto se repete indefinidamente, e que podemos continuar a divisão também indefinidamente, mas optamos por parar na segunda ou terceira casas decimais e completar o quociente, com reticências.

No instante em que colocamos as reticências, estamos indicando que, de fato, temos muitas, um número indeterminado, de casas decimais à frente. Mas, que casas são essas? No exemplo que citamos acima, esses números são sempre 3 ou 6, isso porque os restos são previsíveis, bem como as casas decimais dos quocientes. Até esse momento, nós temos certeza dessas casas decimais. Mas o que acontece na divisão por 7?

Escrevemos $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$, indicando que as casas decimais 142857 se repetem, mas, em geral, não há tempo de isso ser mostrado em sala, e, para os estudantes, não parece que esses números se repetem.

Voltemos à habilidade EF09MA02, um número é irracional se tiver representação decimal infinita e não periódica. Mas, não há interseção entre os racionais e os irracionais, portanto, o resultado da divisão de um inteiro por outro é sempre racional e é exato. Mesmo assim, no resultado de uma divisão, raramente precisamos passar da quinta casa decimal, causando, assim, uma incerteza. Afinal, ”Em se tratando de incertezas, o próprio ato de aproximar valores trata-se de uma imprecisão.”, como nos diz Teixeira [7] (p.115).

Os computadores e as calculadoras também são incertos; cada um deles tem um limite de informações que pode armazenar. No caso dos números, são as quantidades de dígitos e de casas decimais. Eles, em geral, trabalham com um processo chamado de truncamento. Isso significa que, se a quantidade de casas decimais é muito alta, eles memorizam até o próprio limite e descartam o restante.

No entanto, conforme Teixeira nos elucida, ”Sem aproximação não seria possível lidar com irracionais e nem florescer as ideias do Cálculo e da Estatística.”(p.116), as ideias do Cálculo às quais ela se refere são o tema do capítulo 2, em que a incerteza é inevitável e é traduzida em aproximações numéricas.

O que gostaríamos de esclarecer com os parágrafos deste capítulo e com a seção 6.1 é que, apesar de um resultado, ou da resposta de um dado problema ser incerto em muitos contextos, ela pode ser aceita, mas em outras não. Além disso, existe ainda uma terceira opção: embora a resposta não seja aceitável, ela pode ser corrigida se dissermos qual é o tamanho da nossa incerteza, nosso erro.

Nas próximas seções, vamos fazer alguns estudos de caso e relacionar o contexto e a imprecisão.

6.3 Estudo de Caso – Sequências

”Se quisermos alimentar todas as pessoas do mundo, poderíamos excluir uma delas”. Suponhamos que seja possível produzir alimentos o suficiente para saciar todas as pessoas do mundo, exceto uma. A verdade é que essa pessoa excluída não ficará sem comida? Observe:

Se houvesse apenas duas pessoas no mundo, e fizéssemos apenas um prato. Cada uma delas receberia metade do conteúdo, ou seja, $\frac{1}{2}$. Se fossem apenas três pessoas, cada pessoa receberia $\frac{2}{3}$ dos pratos. Se fossem apenas quatro, cada um receberia $\frac{3}{4}$ e, assim, sucessivamente.

Veja que estamos trabalhando com a sequência $x_n = \frac{n}{n+1}$. Vamos analisá-la com o que desenvolvemos no capítulo 2.

Primeiro, a sequência x_n é limitada, de acordo com o corolário 2.7:

Sabendo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $n < n + 1$, teremos:

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1}$$

Pois, $n+1>0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$. Em outras palavras, $|x_n| < 1$ que era o que queríamos.

Segundo, a sequência x_n é crescente.

Sabemos que todo natural é maior que seu antecessor, inclusive para os números n^2+2n e n^2+2n+1. Por isso:

$$n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1$$
$$n(n+2) \leq (n+1)^2$$

Observando novamente que $n+1>0$:

$$\frac{n(n+2)}{n+1} \leq n+1$$
$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2}$$

Ou seja, $x_n \leq x_{n+1}$.

Terceiro e último, $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.

Vamos mostrar isso usando os dois itens que acabamos de mostrar e o teorema 2.13.

A primeira e a segunda afirmações nos disseram que x_n é monótona e limitada. Para concluirmos que $\lim x_n = 1$, usando o referido teorema, só precisamos mostrar que 1 é o menor elemento para o qual $x_n \leq a$, caso existam $a \geq 1$ que também verifiquem essa desigualdade. Equivalentemente, podemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \epsilon \leq x_{n_0}$.

O n_0 que buscamos é tal que $n_0 \geq \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$. De fato,

$$n_0 \geq \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$$
$$n_0\epsilon \geq 1 - \epsilon$$
$$-n_0\epsilon \leq \epsilon - 1$$
$$n_0 - n_0\epsilon \leq \epsilon - 1 + n_0$$
$$n_0(1-\epsilon) + 1 - \epsilon \leq n_0$$
$$(n_0+1)(1-\epsilon) \leq n_0$$
$$1 - \epsilon \leq \frac{n_0}{n_0+1}$$

Assim, temos $\lim \frac{n}{n+1} = 1$, como queríamos.

Atualmente, nós somos aproximadamente 8 bilhões de seres humanos. Ao excluirmos apenas uma pessoa, ficamos com 7.999.999.999. Como sabemos, a divisão de 7.999.999.999 por 8 bilhões deve ficar próximo de 1. De fato, o resultado exato é 0,999999999875. Como não podemos, na realidade, separar 0,000000000125 parte do prato, vamos arredondar o resultado para 1, algo razoável, certo? Assim, cada pessoa no mundo irá receber seu prato de comida, incluindo a pessoa que foi inicialmente separada.

Na verdade, não! Isso porque não podemos criar mais um prato, e 1 é o resultado exato da divisão de 8 bilhões pelo próprio. Ou seja, por mais otimistas que sejamos, é impossível que a pessoa excluída receba seu prato inteiro.

Neste caso, a imprecisão de que $x_n \approx 1$, conforme arredondamos, foi absurda, porque, apesar de conhecermos cada termo da sequência e sabermos que o erro que cometemos foi de aproximadamente $\Delta x_n = 10^{-10}$, criamos algo impossível.

Para a próximo caso, veremos onde que, apesar de cometermos erros, eles são aceitáveis e não interferem nos resultados.

6.4 Estudo de Caso – Continuidade

O lucro de uma empresa em reais é dado pela função $L(x) = -2x^2 + 5000x$, em que x representa a quantidade produzida do produto primário da empresa. Quantas unidades a empresa precisa produzir para obter um lucro de R$1.000.000,00?

O método para responder isso é simples. Basta no lugar de $L(x)$ colocar 1.000.000 e calcular o valor de x.

$$\begin{aligned}
&-2x^2 + 5000x = 1000000\\
&-2x^2 + 5000x - 1000000 = 0\\
&x = \frac{-5000 \pm \sqrt{5000^2 - 4(-2)(-1000000)}}{2(-2)}\\
&x = \frac{-5000 \pm \sqrt{17000000}}{-4}\\
&x = \frac{1000(-5 \pm \sqrt{17})}{-4}\\
&x = 250(5 \pm \sqrt{17})
\end{aligned}$$

Aqui, faremos alguns arredondamentos para conseguirmos resolver o problema. Porque, o valor de x, sendo a representação da quantidade de peças, está em $\mathbb{N}$. Usando uma calculadora, podemos aproximar x_1 e x_2 pelos números $x_1 \approx 219{,}22$ e $x_2 \approx 2280{,}77$ as raízes que calculamos e fizemos um primeiro arredondamento de um irracional. Tanto x_1 como x_2 o são, para um racional.

Esclarecendo o último parágrafo, não podemos produzir $x_1 = 219{,}22$ peças ou $x_2 = 2280{,}77$ peças. Ou produzimos 219 ou 220, no caso de x_1; e 2280 ou 2281 para x_2.

Mas, o que irá garantir que, com os valores incertos que estamos apresentando, o lucro será de R\$1.000.000? O valor que obteremos não será exatamente esse, mas será próximo, porque $L(x)$ é contínua pelo teorema 2.29 em conjunto com o teorema 2.27. Isso porque $\lim_{x \to a} L(x) = L(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$, pela definição 2.26. Em outras palavras, à medida que nos aproximamos de $x_1 = 250(5 - \sqrt{17})$, o valor exato de x_1, mais próximo de $L(x_1) = 1.000.000$ estaremos. O mesmo vale para $x_2 = 250(5 - \sqrt{17})$.

6.5 Estudo de Caso – Derivabilidade

Após apresentarmos, na seção 6.4, que a empresa deverá produzir ou 219, ou 220, ou 2280, ou 2281 unidades, os acionistas querem saber qual será o lucro aproximado por cada uma dessas quantidades. Para simplificar a escrita, vamos chamar $a_1 = 219, a_2 = 220, a_3 = 2280$ e $a_4 = 2281$. Ao final do capítulo 3, calculamos que o erro aproximado ao estarmos perto de a, é de $|L'(a)||x - a|$, desde que $L(x)$ seja uma função derivável em a. Em uma escrita diferente, $|L(x) - L(a)| \approx |L'(a)||x - a|$.

Calculando, teríamos, pelos teoremas 3.10 e 3.5:

$$L(x) = -2x^2 + 5000x$$
$$L'(x) = 2(-2)x^{2-1} + 1(5000)x^{1-1} =$$
$$L'(x) = -4x + 5000x^0 = -4x + 5000$$

Assim, para cada um dos casos, teríamos:

$$L'(a_1) = -4(219) + 5000 = 4124$$
$$L'(a_2) = -4(220) + 5000 = 4120$$
$$L'(a_3) = -4(2280) + 5000 = -4120$$
$$L'(a_4) = -4(2281) + 5000 = -4124$$

Para 219, o valor de $|x_1 - a_1| = |219{,}22 - 219| = 0{,}22$. Assim, o erro aproximado que é o produto $L'(a_1)|x_1 - a_1| = 4124(0{,}22) = 907{,}28$. De maneira semelhante, temos:

$$|219{,}22 - 220| = |-0{,}78| = 0{,}78$$
$$4120(0{,}78) = 3213{,}60$$
$$|2280{,}77 - 2280| = 0{,}77$$
$$|-4120|0{,}77 = 3172{,}40$$
$$|2280{,}77 - 2281| = |-0{,}23| = 0{,}23$$
$$|-4124|0{,}23 = 948{,}52$$

Assim, o lucro aproximado pra essas quantidades de peças seria para 219, R\$999.092,72 e para 220 R\$1.003.213,60, pois a função $L(x)$ é crescente próximo a esses valores (219 e 220). Nos outros dois casos, como a função $L(x)$ é decrescente, para 2280, o valor é de R\$1.003.172,40 e para 2281, R\$999.051,48.

6.6 Estudo de Caso – Dinâmica – Parte 1

Em algumas situações, uma equação ou modelo de proposta para resolver um problema nos parece adequado para solucioná-lo. Mas, acrescentando algumas condições, esses métodos nos mostram resultados incertos. O exemplo clássico é o de uma população que dobra no tempo. Se houvesse alimento infinito e indivíduos não morressem, a proposta seria perfeita. Mas, mesmo que contássemos com isso, problemas como o do tipo abaixo apresentariam imprecisão.

Essa seção se baseia tanto na teoria construída no capítulo 4, como em Jürgens, Peitgen e Saupe [10] para a construção e a solução do problema.

Dois cientistas ambientais estão estudando uma mesma população e seu reflexo nas condições ambientais. Em estudos separados, eles concluíram que as equações que melhor representam a população em questão são:

$$x_{t+1} = x_t + 3x_t(1 - x_t) \tag{6.1}$$
$$y_{t+1} = 4y_t - 3y_t^2 \tag{6.2}$$

Assim, x_t é o número de indivíduos após $t - 1$ dias em escala de milhões de indivíduos. Além disso, a população inicial tem 10.000 indivíduos, ou seja, 0,01 milhão. Para esses cientistas, uma análise até o dia 57 é suficiente para responder o que precisam saber, que é se a população se sustenta durante esse período e quantos indivíduos haverá até esse dia.

Usando um *software* de planilha eletrônica, cada cientista obteve a sua respectiva tabela 6.1 e 6.2.

t	$x_{t+1} = x_t + 3x_t(1 - x_t)$	t	$x_{t+1} = x_t + 3x_t(1 - x_t)$
1	0,01000000000	29	0,85035196906
2	0,03970000000	30	1,23211246239
3	0,15407173000	31	0,37414648964
4	0,54507262604	32	1,07662917143
5	1,28897800119	33	0,82912556740
6	0,17151914211	34	1,25415465005
7	0,59782012011	35	0,29790694147
8	1,31911379241	36	0,92538212856
9	0,05627157765	37	1,13253226267
10	0,21558683923	38	0,68224107272
11	0,72291430118	39	1,33260564696
12	1,32384194417	40	0,00290915690
13	0,03769529725	41	0,01161123803
14	0,14651838271	42	0,04604048957
15	0,52167062144	43	0,17780277825
16	1,27026177394	44	0,61636962915
17	0,24035217278	45	1,32574395738
18	0,78810119024	46	0,03018470792
19	1,28909430279	47	0,11800548189
20	0,17108484670	48	0,43024604630
21	0,59652931249	49	1,16564920412
22	1,31857558798	50	0,58638261527
23	0,05837760826	51	1,31399674661
24	0,22328659760	52	0,07622463615
25	0,74357567640	53	0,28746795912
26	1,31558834600	54	0,90195835392
27	0,07003529560	55	1,16724679906
28	0,26542635452	56	0,58159192651
29	0,85035196906	57	1,31162019909

Tabela 6.1: Órbita com valor inicial 0,01 pelo mapa 6.1

t	$y_{t+1} = 4y_t - 3y_t^2$	t	$y_{t+1} = 4y_t - 3y_t^2$
1	0,01000000000	29	0,85035197640
2	0,03970000000	30	1,23211245430
3	0,15407173000	31	0,37414651707
4	0,54507262604	32	1,07662921957
5	1,28897800119	33	0,82912544898
6	0,17151914211	34	1,25415476548
7	0,59782012011	35	0,29790653459
8	1,31911379241	36	0,92538122831
9	0,05627157765	37	1,13253366012
10	0,21558683923	38	0,68223716657
11	0,72291430118	39	1,33260601193
12	1,32384194417	40	0,00290769862
13	0,03769529725	41	0,01160543034
14	0,14651838271	42	0,04601766331
15	0,52167062144	43	0,17771777723
16	1,27026177394	44	0,61612028388
17	0,24035217278	45	1,32566852290
18	0,78810119023	46	0,03048299379
19	1,28909430279	47	0,11914433645
20	0,17108484669	48	0,43399122706
21	0,59652931247	49	1,17091975275
22	1,31857558797	50	0,57051980887
23	0,05837760831	51	1,30560067854
24	0,22328659778	52	0,10862331875
25	0,74357567687	53	0,39909619887
26	1,31558834578	54	1,11855146762
27	0,07003529645	55	0,72073371335
28	0,26542635757	56	1,32456359672
29	0,85035197640	57	0,03484822160

Tabela 6.2: Órbita com valor inicial 0,01 pelo mapa 6.2

A população estará próxima a 0,03 milhão para $t = 57$, ou seja, 30000 indivíduos, conforme sugere a tabela 6.2. Mas, quando perguntamos ao outro cientista, que analisou a equação 6.1, os seus resultados foram que, no dia 57, haveria aproximadamente 1.300.000, conforme a tabela 6.1.

No que se segue, iremos tentar ajudar os cientistas a entender o porquê haver resultados diferentes, uma vez que, matematicamente, eles usaram a mesma equação.

Se observarmos bem, estas equações, 6.1 e 6.2, podem ser vistas como sequências em que cada um dos termos é dado em função do anterior, caracterizando, conforme a definição 4.1, um sistema dinâmico.

As equações 6.1 e 6.2, de fato, são iguais. Partindo de 6.1, chega-se a 6.2:

$$\begin{aligned}
&x_t + 3x_t(1 - x_t) = \\
&x_t + 3x_t - 3x_t^2 = \\
&4x_t - 3x_t^2 \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

Verificaremos se há pontos fixos para os mapas 6.1 e 6.2, de acordo com a definição 4.1. Como eles são iguais, basta calcular os pontos fixos de um deles.

$$\begin{aligned}
&4x - 3x^2 = x \\
&-3x^2 + 3x = 0 \\
&3x(-x + 1) = 0
\end{aligned}$$

Para terminarmos de resolver a equação, basta fazermos $3x = 0$, ou seja, $x = 0$ e $-x + 1 = 0$, o que é o mesmo que $x = 1$. Assim, 0 e 1 são os únicos pontos fixos para os mapas. Agora, verificamos se são repulsores ou atratores, observando que os mapas são iguais, e denotando-os por $f(x) = 4x - 3x^2$. Com as regras de derivação, teoremas 3.10 e 3.5, temos:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 4(1)x^0 - 3(2)x^1 = 4 - 6x \\
&f'(0) = 4 - 6.0 = 4 \\
&f'(1) = 4 - 6.1 = -2
\end{aligned}$$

Como $|f'(0)| = 4 > 1$ e $|f'(1)| = 2 > 1$, pelo teorema 4.5, 0 e 1 são ambos repulsores.

Perceba que 0 é um ponto repulsor, e isso nos diz que, quando um valor está próximo a ele, é repelido. Isso nos responde a pergunta se a população nunca se extinguirá. Isto é, a população nunca atinge 0, porque os pontos próximos a ele se afastam, evidenciando que esta sobreviverá.

Agora, veremos se as órbitas são k-periódicas, conforme a definição 4.6, se existirem para algum $k \in \mathbb{N}$, são período-repulsoras ou período-atratoras. Queremos fazer isso para ajudar os cientistas, pois se as órbitas que estudam forem k-periódicas ou estiverem próxima a alguma, saberemos o comportamento delas. Para fazermos essa análise, gostaríamos de usar o teorema 4.8. Por isso, resolveremos a inequação $|f'(x)| > 1$.

$|f'(x)| > 1$ é o mesmo que $|4-6x| > 1$. Mas, isso é também equivalente a $4-6x > 1$ ou $4-6x < -1$. Então,

$$4 - 6x > 1$$
$$-6x > -3$$
$$x < \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ou,

$$4 - 6x < -1$$
$$-6x < -5$$
$$x > \frac{5}{6}$$

Portanto, se $x_n < \frac{1}{2}$ ou $x_n > \frac{5}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e se a órbita for k-periódica, então, ela será período-repulsora, pois $|f'(x_n)| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implicará que $|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)| > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para esclarecer, nesse caso, precisamos que esta seja apenas uma entre as duas opções. Isto é, se $x_n < \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluiremos que $|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)| > 1$, e, se $x_n > \frac{5}{6}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluiremos o mesmo.

Vamos resolver, também, a inequação $|f'(x)| < 1$ para usarmos o teorema 4.8 e verificarmos quando as órbitas k-periódicas serão atratoras. $|4-6x| < 1$ significa $-1 < 4-6x < 1$, ou seja, $-5 < -6x < -3$, o que nos leva a $\frac{5}{6} > x > \frac{1}{2}$. Portanto, se $\frac{1}{2} < x_n < \frac{5}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|f'(x_n)| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implicará: $|f'(x_1)||f'(x_2)|...|f'(x_n)| < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mas, e se $x_n = \frac{1}{2}$ ou $x_n = \frac{5}{6}$? Ou, se $x_j < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x_i < \frac{5}{6}$ para alguns $i,j \in \mathbb{N}$? Ou para outros casos complementares?

Veja que, no primeiro caso, isto é, $x_n = \frac{1}{2}$ ou $x_n = \frac{5}{6}$, já fizemos os cálculos e vimos que $\frac{1}{2}$ não é fixo, tampouco $\frac{5}{6}$. Então, x_n não pode ser $\frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim como $\frac{5}{6}$.

Mesmo assim, não sabemos se órbitas que tenham esses valores são k-periódicas para algum $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, vamos construir uma tabela usando um *software* de planilha eletrônica para calcular x_i, para $2 < i < 21$, a fim de, pelo menos, verificarmos se há pistas da periodicidade.

i	Órbita com valor inicial $\frac{1}{2}$	Órbita com valor inicial $\frac{5}{6}$
2	1,2500000000	1,2500000000
3	0,3125000000	0,3125000000
4	0,9570312500	0,9570312500
5	1,0803985596	1,0803985596
6	0,8198110957	0,8198110957
7	1,2629736849	1,2629736849
8	0,2665871534	0,2665871534
9	0,8531424825	0,8531424825
10	1,2290136436	1,2290136436
11	0,3846309658	0,3846309658
12	1,0947009237	1,0947009237
13	0,7836933578	0,7836933578
14	1,2922475940	1,2922475940
15	0,1592788434	0,1592788434
16	0,5610061236	0,5610061236
17	1,2998408823	1,2998408823
18	0,1306045714	0,1306045714
19	0,4712456234	0,4712456234
20	1,2187651809	1,2187651809
21	0,4188950250	0,4188950250

Tabela 6.3: órbitas com valor inicial $1/2$ e $5/6$

Ao ver a tabela, percebemos, imediatamente, que as duas colunas são iguais, mas isso acontece porque:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$2 - 3\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

O que é coincidente com a tabela. Vejamos, então, o resultado para o valor de $\frac{5}{6}$.

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = 4\left(\frac{5}{6}\right) - 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 =$$

$$\frac{10}{3} - 3\left(\frac{25}{36}\right) =$$

$$\frac{10}{3} - \frac{25}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Isso era o que esperávamos.

Agora, suponha que, para $n-1$, se tenha $f^{n-1}(\frac{1}{2}) = f^{n-1}(\frac{5}{6})$. Então, $f(f^{n-1}(\frac{1}{2})) = f(f^{n-1}(\frac{5}{6}))$, ou seja, $f^n(\frac{1}{2}) = f^n(\frac{5}{6})$. Portanto, por indução, temos que $f^n(\frac{1}{2}) = f^n(\frac{5}{6})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Depois, os valores para cada i sugerem que as órbitas não são periódicas, pois cada i fornece um valor completamente diferente dos anteriores. Observando os valores em $i = 2{,}7{,}10{,}14{,}17$ e 20, poderíamos nos perguntar se x_n é 3-periódica, mas não são todos entre esses valores que distam exatamente 3. Para sermos mais exatos, esse conjunto de números distam 3, 4 ou 5 uns dos outros e, além disso, os valores de x_n estão próximos, mas não exatamente iguais. Comparando os outros valores, vemos que eles estão ainda mais afastados.

Já o segundo caso, se $x_j < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} < x_i < \frac{5}{6}$ para alguns $i,j \in \mathbb{N}$, dependeria dos valores de $f'(x_i)$ e $f'(x_j)$. Dito de outro modo, se os valores de $f'(x_j)$ fossem próximos a $\frac{1}{2}$, e $f'(x_i)$ fossem muito maiores que 2, as órbitas seriam repulsoras, e outros valores criariam outras situações.

Isso é o mais longe que essa análise pode nos levar, ou seja, não conseguimos decidir muito para ajudar os cientistas em relação à proximidade com as órbitas k-periódicas. Porém, já os respondemos que a população seguirá viva indefinidamente.

Para continuarmos a investigação, vejamos se não podemos conjugar f com algum mapa cuja dinâmica já conhecemos, a fim de percebermos se podemos ir mais adiante.

Vamos buscar $h(x)$ contínua e bijetiva, tal que $h(4x - 3x^2) = 4h(x)(1 - h(x))$. Assim, $f(x) = 4x - 3x^2$ será conjugada com $L(x) = 4x(1 - x)$, que, no exemplo 5.3.1, estudamos conjugando-a ao mapa tenda.

Asssim, $h(x) = \frac{3}{4}x$ é contínua, com inversa $h^{-1}(x) = \frac{4}{3}x$, pois é um polinômio e $h(h^{-1}(x)) = h^{-1}(h(x)) = (\frac{3}{4})(\frac{4}{3}x) = (\frac{4}{3})(\frac{3}{4}x) = x$.

E, $h(4x - 3x^2) = \frac{3}{4}(4x - 3x^2) = 3x - \frac{9}{4}x^2$, assim como $4(\frac{3}{4}x)(1 - \frac{3}{4}x) = 3x(1 - \frac{3}{4}x) = 3x - \frac{9}{4}x^2$.

Portanto, $h(4x - 3x^2) = 4h(x)(1 - h(x))$ como queríamos.

Com isso, já podemos afirmar que o mapa $f(x)$ é conjugado com o mapa $L(x)$. Mas, $L(x)$ é conjugado ao tenda e, pela transitividade da conjugação, teorema 5.10, $f(x)$ é conjugado ao tenda.

Portanto, como o mapa tenda tem infinitas órbitas periódicas e, pela conjugação, isso também vale para o mapa $f(x) = 4x - 3x^2$.

Como segunda conclusão, pela conjugação, as órbitas, pelo mapa f, se forem k-periódicas para algum $k \in \mathbb{N}$, serão todas repulsoras, porque, no exemplo 5.2.1, concluímos isso para o mapa tenda. Sabemos que o mesmo vale para f, devido ao corolário 5.13.

Como terceira conclusão, pela conjugação, as órbitas, pelo mapa f, se forem assintoticamente periódicas pelo mapa tenda, serão assintoticamente periódicas pelo corolário 5.14.

O que fizemos para ajudar os cientistas foi: apesar de não saber exatamente se a órbita com o valor inicial 0,01 é k-periódica para algum $k \in \mathbb{N}$, sabemos que, se ela não for, afastar-se-á de qualquer órbita periódica.

6.7 Estudo de Caso – Dinâmica – Parte 2

Nós continuaremos a analisar, nesta seção, o caso dos cientistas, pois ainda não obtivemos resposta de por que os resultados obtidos foram diferentes. Se duas aproximações para um mesmo problema são boas, elas não devem divergir muito.

Cabe salientar que o caos é uma característica que faz boas aproximações se tornarem ruins, pois órbitas caóticas são dependentes das condições iniciais.

As órbitas caóticas, por definição, têm expoente de Lyapunov maior que zero. Analisando o expoente de Lyapunov, veremos, rapidamente, que, se ele for maior que zero, como é o caso, o número de Lyapunov será maior que 1. Mas o número de Lyapunov representa como a distância entre condições iniciais próximas avança no tempo. Por exemplo, duas condições iniciais que estão à distância ϵ, cujo número de Lyapunov é 2 para uma delas, no próximo passo estarão à distância 2ϵ em média. Assim, se considerarmos outra condição inicial ϵ próxima de uma órbita caótica, elas se afastarão exponencialmente a cada passo.

Assim, se compararmos uma órbita caótica com outra bem próxima a ela, elas se afastarão com o tempo. Para entendermos melhor isso, definimos:

Definição 6.1 (Dependência das condições iniciais): Seja $f\colon X \to X$ um mapa com $X \subset \mathbb{R}$. Uma órbita com ponto inicial x_0 tem sensibilidade às condições iniciais, se existe $d > 0$, tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe x no domínio de f, $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, com $|f^k(x) - f^k(x_0)| \geq d$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, x_0 é dito ponto sensível.

O cientista que analisou a equação 6.1 disse que haveria 1.300.000 indivíduos para o tempo 57, e suas contas não estão erradas, tampouco as do cientista que analisou a equação 6.2 e disse que haveria 30000 indivíduos.

Comparando as tabelas 6.2 e 6.1, vemos claramente valores diferentes que deveriam ser iguais, por causa de 6.3. Por exemplo, apesar de ser pequena a diferença, já existe para $t = 20$ na última casa decimal.

Um pequeno afastamento de 1×10^{-11}, que está claro para $t = 20$, gerou um grande afastamento de mais de 1 para $t = 57$.

Uma explicação para essas diferenças é a seguinte: um computador só armazena uma quantidade finita de números, na maioria dos casos, 16 casas decimais. Voltando às equações 6.1 e 6.2, percebemos que, a cada passo, elevamos o anterior ao quadrado, e isso tem o efeito de duplicar a quantidade de casas decimais. Ou seja, a partir da quarta interação, o computador já teve que arredondar ou truncar o resultado. Isso já causa incertezas com relação ao estudo que os cientistas desejavam fazer.

Observamos que a presença de caos faz com que a órbita x_t, que estamos estudando, dependa das condições iniciais. Isso também ajuda a explicar as diferenças obtidas nas tabelas 6.1 e 6.2.

Assim, temos que os pequenos erros de arredondamento ou truncamento do computador acarretam erros cada vez maiores.

Essa sensibilidade nas condições iniciais fica evidente quando os cientistas arredondam cada passo com duas casas decimais, como feito pelo autor deste vídeo '"Don't trust your computer and the shadowing lemma"[11].

Número de iterações	$x_{t+1} = x_t + 3x_t(1 - x_t)$	$x_{t+1} = 4x_t - 3x_t^2$
1	0,04	0,04
2	0,16	0,16
3	0,56	0,56
4	1,3	1,3
5	0,13	0,13
6	0,47	0,47
7	1,22	1,22
8	0,41	0,41
9	1,14	1,14
10	0,66	0,66
11	1,33	1,33
12	0,01	0,01
13	0,04	0,04
14	0,16	0,16
15	0,56	0,56
16	1,3	1,3
17	0,13	0,13
18	0,47	0,47
19	1,22	1,22
20	0,41	0,41
21	1,14	1,14
22	0,66	0,66
23	1,33	1,33
24	0,01	0,01
25	0,04	0,04
26	0,16	0,16
27	0,56	0,56
28	1,3	1,3
29	0,13	0,13
30	0,47	0,47
31	1,22	1,22
32	0,41	0,41
33	1,14	1,14
34	0,66	0,66
35	1,33	1,33
36	0,01	0,01
37	0,04	0,04
38	0,16	0,16
39	0,56	0,56
40	1,3	1,3

Tabela 6.4: Comparação entre as órbitas 6.1 e 6.2 com arredondamento

Agora, os mapas estão, de fato, idênticos. O truncamento feito pelos cientistas transformou algo que aparentemente não era periódico, a órbita de valor inicial 0,01 pelo mapa 6.2, numa órbita 12-periódica.

Mas, até agora não vimos se, de fato, o caos está presente. Sabemos que o caos está no mapa tenda por causa do teorema 5.8. Já sabemos, também, que o mapa logístico $L(x)$ tem órbitas caóticas pelo teorema 5.18, e que f é conjugado ao L.

Por isso, propomos usar o teorema 5.16 para dizer que f também tem órbitas caóticas. Para isso, precisamos verificar três itens, sendo y_n caótica pelo mapa $L(x)$:

1. $h^{-1}(y_n)$ é limitada:

   $|h^{-1}(y_n)| = |\frac{4}{3}y_n| = \frac{4}{3}|y_n|$. Como y_n é caótica, é limitada e, portanto, $\frac{4}{3}|y_n| \leq M$, para algum $M \in \mathbb{R}$. Isto é, $|h^{-1}(y_n)| \leq M$.

2. $(h^{-1})'(y_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

   $h^{-1}(x) = \frac{4}{3}x$. Então, usando o teorema 3.10, $(h^{-1})'(x) = \frac{4}{3} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $(h^{-1})'(y_n) \neq 0$.

3. Precisamos que $\lim \frac{\ln(h^{-1})'(y_n)}{n} = 0$.

   $$\lim \frac{\ln(h^{-1})'(y_n)}{n} =$$

   $$\lim \frac{\ln \frac{4}{3}}{n}$$

   Por outro lado, $\lim \ln \frac{4}{3} = \ln \frac{4}{3}$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$. Logo, pelas regras de operação do limite de sequências, teorema 2.14, $\lim \frac{\ln(h^{-1})'(y_n)}{n} = \ln \frac{4}{3} \times 0 = 0$.

Já que existem órbitas caóticas no mapa L, existem órbitas caóticas em f.

Observe que usamos $h^{-1}(x)$ em troca da $h(x)$, porque a conjugação nos obriga a isso. Só poderíamos usar $h(x)$, se soubéssemos que as órbitas caóticas estavam em f, o que não tínhamos certeza.

7 Incertezas matemáticas na BNCC

Um dos objetivos deste texto é construir um produto educacional, por isso recorremos à Base Nacional Comum Curricular [3] (BNCC) e verificamos quais competências e habilidades poderiam ser desenvolvidas a partir da teoria matemática apresentada. Aqui, também gostaríamos de esclarecer que essas atividades são sugestões e ainda não foram realizadas.

7.1 Competências e Habilidades

O material educacional que iremos desenvolver à frente necessita de todas essas competências específicas da matemática, uma vez que o aluno irá ler e interpretar dados, buscar soluções para problemas no contexto das Ciências da Natureza ou das Ciências Humanas e comunicá-los em uma feira de ciências. Assim, foram selecionadas as seguintes competências, numeradas de acordo a BNCC [3]:

> Competência específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BNCC, p.532)

> Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BNCC, p.535)

> Competência específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Ademais, são necessárias as habilidades abaixo, pois os modelos que temos sobre crescimento populacional, o tema a ser desenvolvido na feira, envolve os conceitos de funções polinomiais de 2º grau e se apoia em *softwares* de planilha eletrônica. Como queremos também que o aluno tenha certa liberdade em termos de registro e investigação, abrimos espaço para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT315.

> (EM13MAT203)Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões (BNCC, p.534).

> (EM13MAT302)Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BNCC, p.536).

> (EM13MAT315)Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema (BNCC, p.537).

> (EM13MAT510)Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada (BNCC, p.541).

> (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BNCC, p.533).

7.2 Atividades Pré Feira de Ciências

Essas atividades foram planejadas com base nos estudos de caso do capítulo 6. Os enunciados serão também semelhantes onde forem aplicáveis.

Atividade 1 - Resolvendo a Fome

Objetivo: Nesta atividade, você responderá a um colega se a boa ideia que ele teve em casa pode ser feita em qualquer lugar.

Materiais necessários: Papel e caneta, um dispositivo eletrônico com *software* de cálculo e *software* de planilha eletrônica (opcionais).

Habilidades requeridas ou a serem desenvolvidas para essas questões, segundo a BNCC [3]:

> (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões (BNCC, p.534). e (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada (BNCC,p.541).

1.1 Um dos grandes problemas mundiais que existem na atualidade é a fome. Procurando uma maneira de resolver a fome, em casa, João percebeu que se fizesse comida o suficiente para ele e para mais 8 dos seus 9 irmãos, cada um dos 10 da casa receberia quase um prato inteiro.

A pergunta que João se fez foi: se ele levasse a mesma ideia para os quase 8 bilhões de habitantes do mundo, cada um deles receberia um prato inteiro?

Claramente, a família de João receberia $\frac{9}{10} = 0{,}9$ partes de um prato. Responda à dúvida de João, depois de resolver as questões abaixo.

(a) Calcule os valores de $\frac{10}{11}$, $\frac{100}{101}$ e $\frac{1000}{1001}$ com 3 casas decimais.

(b) Faça uma tabela em que contenha, pelo menos, 10 números maiores que 1000 para o denominador e o resultado da divisão de cada um desses números menos 1 pelo próprio número, com pelo menos 5 casas decimais. Use o item (a) como exemplo.

(c) Não é difícil perceber, por causa do que fizemos nas atividades (a) e (b), que à medida que aumentamos a quantidade de pessoas, aumentamos a quantidade de pratos que cada um recebe. Por exemplo, no item (a), você calculou quanto receberia cada uma de 11 pessoas, ao termos disponíveis 10 pratos, e esse valor foi maior que 0,9. Agora, sabendo disso, responda à dúvida de João.

Atividade 2 - Calculando os Lucros

Objetivo: Nesta atividade, você calculará aproximações para o lucro de uma empresa, de acordo com a principal função dela. Além disso, calculará o erro que você cometeu por aproximar esse lucro. Por fim, constatará se esse erro calculado por você é exato ou não.

Materiais necessários: Papel e caneta.

Habilidades requeridas ou a serem desenvolvidas para essas questões, segundo a BNCC: [3]:

> (EM13MAT302)Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem

> apoio de tecnologias digitais.; (EM13MAT315)Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. e (EM13MAT510)Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

2.1 O lucro de uma empresa, em reais, é dado pela função $L(x) = -2x^2 + 5000x$, em que x representa a quantidade produzida do produto primário da empresa. Quantas unidades a empresa precisa produzir para obter um lucro de R$1.000.000,00?

2.2 Considerando que o número de peças é inteiro, a empresa terá um lucro de exatamente R$1.000.000,00 ou será aproximado? Justifique.

2.3 No caso de sua resposta ter sido um valor aproximado, calcule-o pela fórmula $1.000.000 + (-4a + 5000)|x - a|$, sendo x o valor exato encontrado no item 2.1 e a o valor inteiro para o qual você aproximaria a quantidade de peças a serem produzidas. Use duas casas decimais (como o dinheiro).

2.4 Calcule o valor de $L(a)$, sendo a o valor inteiro para o qual você aproximaria a quantidade de peças a serem produzidas, o mesmo a utilizado no item 2.3. Compare os valores obtidos nos item 2.3 e neste.

Atividade 3 - Ajudando Cientistas

Objetivo: Nesta atividade, você irá auxiliar dois matemáticos na comparação de duas funções, explorando-as algébrica e numericamente.

Materiais necessários: Papel, caneta e calculadora

Habilidades requeridas ou a serem desenvolvidas para essas questões segundo a BNCC: [3]:

> (EM13MAT510)Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

3.1 Dois matemáticos estavam estudando as funções $f(x) = 4x - 3x^2$ e $g(x) = x + 3x(1 - x)$, cada um a sua. O matemático André, que usava a função $g(x)$, calculou os seguintes valores:

x	$g(x)$
$\frac{1}{3}$	1
$\frac{5}{7}$	$\frac{65}{49}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2} - \frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$2\pi - 3\frac{\pi^2}{4}$
$\frac{12345}{100000}$	$\frac{179232117}{400000000}$

Tabela 7.1: Cálculos da função $g(x)$ – Atividade 3

Já Bernardo, usando a função $f(x)$, calculou os valores:

x	$f(x)$
$\frac{1}{3}$	0,999993
$\frac{5}{7}$	1,32661
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1,32845
$\frac{\pi}{2}$	-1.12012
$\frac{12345}{100000}$	0,44661

Tabela 7.2: Cálculos da função $f(x)$ – Atividade 3

Carlos, um aluno do 3º ano do ensino médio, comparou as duas funções e observou que elas são iguais. Com esse caso em mente, responda.

(a) Expanda $g(x)$ e conclua o mesmo que Carlos. Ou, se ele estiver enganado, corrija-o.

(b) Usando uma calculadora, calcule os valores obtidos por André, com 5 casas decimais.

(c) Supondo que Carlos esteja certo, o que pode ter ocorrido com os cálculos de André e de Bernardo? Qual deles está certo?

7.3 Gabarito e orientações ao professor

Atividade 1 - Resolvendo a Fome

1.1 (a) $\frac{10}{11}$ = 0,909 - $\frac{100}{101}$ = 0,990 - $\frac{1000}{1001}$ = 0,999 Para esta atividade, permita o uso de calculadora, a seu critério. No momento de correção, chame a atenção para o crescimento do resultado. Ainda, caso algum aluno tenha extrapolado o número de casas decimais, permita a ele defender se o resultado dele é mais preciso que os apresentados.

(b) Esta aqui é uma sugestão de resposta.

$\frac{1001}{1002}$	0,99900
$\frac{2001}{2002}$	0,99950
$\frac{3001}{3002}$	0,99967
$\frac{4001}{4002}$	0,99975
$\frac{5001}{5002}$	0,99980
$\frac{6001}{6002}$	0,99983
$\frac{7001}{7002}$	0,99986
$\frac{8001}{8002}$	0,99988
$\frac{9001}{9002}$	0,99989
$\frac{10001}{10002}$	0,99990

Tabela 7.3: Sugestão de Resposta Primeira Atividade

Recomendamos o uso de tecnologia para essa atividade, como uma calculadora, um *software* de planilha eletrônica, ou ambos. Pergunte para turma se alguém usou os mesmos números da tabela, e se colocaram como resultado o mesmo número, especificamente na última casa decimal. Permita que o aluno defenda o ponto de vista dele, mostre que até seus resultados foram arredondados, ou seja, não são exatos. Enfatize o crescimento do resultado e que ele está chegando próximo a 1.

(c) A pergunta foi se cada pessoa receberia um prato inteiro, e a resposta é não. Para relembrar, veja a seção 6.3. Mesmo assim, permita aos alunos defenderem seu ponto de vista. Mostre a eles o resultado da divisão de 7.999.999.999 por 8 bilhões. Pergunte se há possibilidade de o resultado ser exatamente 1 para um número ainda maior (a resposta é não, porque 1 é resultado exato da divisão de um número pelo próprio).

Essa atividade tem o intuito de provocar o aluno à reflexão e à decisão de quando um arredondamento é possível ou não, e quando um resultado impreciso é aceitável.

Atividade 2 - Calculando os Lucros

2.1 Para se ter um lucro de R\$ 1.000.000,00, a empresa terá que produzir $250(5+\sqrt{17})$ ou $250(5-\sqrt{17})$ unidades, conforme já fizemos na seção 6.4. Pode ser que alguns alunos notem que esse valor não é inteiro. Discuta com eles quais valores são aceitáveis e quais serão os mais vantajosos.

2.2 Como a empresa não pode produzir um número não inteiro de peças, será impossível ter um lucro de exatamente R\$1.000.000,00, ou seja, teremos um lucro aproximado e produziremos 219,220, 2280 ou 2281 peças.

2.3 Sugestão de resposta: $1.000.000 + (-4(220) + 5000)|250(5-\sqrt{17}) - 220| = 1.000.000 + 4120(0{,}78) = 1.003.213{,}60$, conforme fizemos na seção 6.5. Também podem surgir as respostas corretas R\$1.003.172,40 se a for 2280, R\$999.092,72 se a for 219 e R\$999.051,48 se a for 2281.

2.4 $L(220) = -2(220^2)+5000(220) = 1.003.200{,}00$, também serão corretas as respostas: $L(219) = -2(219^2) + 5000(219) = 999.078{,}00$, $L(2280) = -2(2280^2) + 5000(2280) = 1.003.200{,}00$ e $L(2281) = -2(2281^2) + 5000(2281) = 999.078{,}00$. Sugestão de comparação: A diferença entre o valor real da função, $L(a)$, e o valor calculado em 2.3 foi menor que R\$30,00 indicando uma boa aproximação para o valor de $L(a)$.

Cabe ponderar que, apesar de a fórmula do item 2.3 ter surgido por causa da ideia de derivada, algo não citado diretamente na BNCC [3] atual, isso não impede que o aluno investigue as relações entre os valores pedidos, tampouco impede que ele tome suas próprias decisões.

Atividade 3 - Ajudando Cientistas

3.1 (a) Observe que já fizemos esses cálculos em 6.3. Basta perceber que $f(x)$ é outro modo de expressar 6.2, como fizemos anteriormente, na seção 6.6, e que $g(x)$ é outra maneira de expressar 6.1. Assim, podemos responder que Carlos está correto.

(b)

x	$g(x)$
$\frac{1}{3}$	1,00000
$\frac{5}{7}$	1.32653
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1.32843
$\frac{\pi}{2}$	-1.11902
$\frac{12345}{100000}$	0.44808

Tabela 7.4: Cálculos da função $g(x)$ – Atividade 3 – Gabarito

(c) Os cálculos de André estão exatos para todos os valores de x. Porém, os de Bernardo também são corretos, porém imprecisos. Bernardo fez o arredondamento de $\frac{1}{3}$ para 0,333: $f(0{,}333) = 4(0{,}333) - 3(0{,}333^2) = 1{,}332 - 3(0{,}110889) = 1{,}332 - 0{,}332667 = 0{,}999333$, o arredondamento de $\frac{5}{7}$ para 0,714 e, assim, sucessivamente. Então, os dois estão certos e, a depender do contexto, será exigida uma ou outra resposta.

Nesta atividade, o aluno vê um exemplo em que a aproximação não foi adequada e causou confusão, provavelmente por falta de comunicação clara entre os matemáticos.

7.4 Orientações Para a Feira de Ciências

Conforme Alves e Santos [12], "muitos alunos se sentem desmotivados e desinteressados quando o conhecimento é transmitido em sala de aula na forma de regras de nomenclatura, fórmulas, resolução de problemas". Apesar de o texto deses autores abordar o ensino de química, e não de matemática, os problemas evidenciados por eles são os mesmos de uma aula de matemática: não há motivação, nem interesse quando apenas falamos de regras e fórmulas que, muitas vezes, para os alunos, simplesmente surgiram como verdades absolutas e incontestes.

Assim, buscamos esse interesse e a motivação para nossos alunos, ao mesmo tempo em que contribuímos com sua alfabetização científica na feira de ciências. Isso se complementa ao citarmos Alves e Santos [12]:

> As feiras de ciências possibilitam aos alunos a oportunidade de vivenciarem a pesquisa de uma forma prática, já que, por meio da realização dos projetos científicos, os alunos pesquisam, formulam hipóteses, experimentam, fazem observações e interpretam os resultados obtidos (Alves e Santos, 2021, p.3).

Uma das maneiras que nos é cara a essa busca é permitir que haja interdisciplinariedade entre as diversas áreas do conhecimento. Assim, temos as linguagens, como forma de apresentação e de registro; a matemática, para ajudar a entender os dados produzidos; as ciências da natureza e humanas, para dizer como o problema deve ser tratado. Esses são exemplos de como cada uma pode estar presente na feira de ciências. Portanto, todos os professores precisam estar engajados e envolvidos nesta atividade.

Feiras de ciências precisam de um tema central, como foi feito no artigo de Alves e Santos [12]. Para a nossa proposta, sugerimos o tema sustentabilidade ambiental.

Diante dessa temática, os professores de matemática, devem se atentar às análises dos dados e às conclusões numéricas observadas. Ao grupo de estudantes que iremos orientar, diremos que busquem modelos populacionais, como os mapas logísticos, e que evidenciem os acertos e erros desses modelos. Também é preciso que mostrem que esses modelos predizem, durante algum tempo, com exatidão, mas que sua precisão diminui, chegando a um ponto em que uma previsão aleatória seria tão boa quanto o modelo proposto.

Além disso, deve-se pedir que expliquem por que o modelo falha, e se podemos calcular a imprecisão para que, apesar de o resultado ser inexato, ainda consigamos usá-lo. Por fim, oriente-os a explicitar como o ambiente pode tanto ajudar uma população a se desenvolver, como pode colaborar com sua extinção.

É importante, também, que se permita aos alunos transitar entre os trabalhos e as apresentações dos colegas para que dialoguem entre si e concluam sobre as outras apresentações também.

7.5 Atividades Pós Feira de Ciências

Objetivo: Nesta atividade, você irá avaliar seus colegas durante as apresentações deles da feira e ajudá-los a melhorar para as próximas.

Materiais necessários: Papel e caneta.

Habilidades requeridas ou a serem desenvolvidas para essas questões segundo a BNCC: [3]:

> (EM13MAT203)Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. (BNCC, p.534), (EM13MAT302)Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias

> digitais.;(EM13MAT315)Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (BNCC, p.537), (EM13MAT510)Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (BNCC, p.541) e (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BNCC, p.533)

Faça um breve resumo dos trabalhos que mais chamaram a sua atenção, elogiando e/ou criticando os aspectos matemáticos deles e o que você faria para melhorar o que não gostou.

Esta atividade não tem uma resposta única.Você, como professor, deve observar as críticas feitas, e como eles melhorariam o que não gostaram e o que se consolidou das habilidades aqui propostas.

8 Conclusão

O estudo das incertezas e imprecisões da matemática requer certos aspectos e habilidades que a BNCC[3] não aborda diretamente, mas, em alguns problemas que precisamos resolver tanto na educação básica como fora do ambiente escolar, as imprecisões estão presentes.

Esse fato torna importante que o aluno entenda em quais situações a resposta a um problema deve ser exata, e em quais é permitido e, até mais compreensível, que se use uma solução inexata. Por isso, nessa dissertação, escrevemos sobre as teorias acerca do tema.

Por exemplo, quando estamos estudando uma sequência, uma função contínua ou derivável, usamos aproximações para responder sobre números ou comportamentos distantes, o que pode ou não ser interessante para a solução. Durante o texto, referimo-nos a imprecisões, como um ϵ ou δ, ou ainda um $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, entre outros.

Como esse julgamento pertinente ao problema deve ser uma habilidade a ser desenvolvida de acordo a BNCC[3], não se pode abordar as incertezas como algo corriqueiro e necessário. Logo, deve ser algo intencional, mas nem sempre necessário para o aluno e para o professor. Por isso, escolhemos a feira de ciências como forma de incentivar a investigação das incertezas.

Ainda que a ideia de sistemas dinâmicos nos remeta a algo simples de conceituar - como a escolha um valor inicial e a resposta de como será qualquer termo a partir do anterior -, nem sempre conseguimos, apenas com esse valor inicial, prever um valor futuro.

Na teoria que usamos, percebemos que o caos é uma das consequências das imprecisões numéricas, mas é difícil percebê-lo ou assegurar que ele está presente. Portanto, devemos ter cuidado quando fazemos observações baseadas apenas em cálculos feitos por meios eletrônicos.

Referências

1 LIMA, E. L. *Análise Real vol. 1*: Funções de uma variável real. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 189 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 9788524400483.

2 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. 3. ed. New York: American Institute of Physics, 1996. 603 p. (Textbooks in Mathematical Sciences). ISBN 0387946772.

3 MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasil, 2017. 600 p.

4 STEWART, J. *CÁLCULO VOLUME 1-TRADUÇÃO DA 6® EDIÇÃO NORTE-AMERICANA*. [S.l.]: Cengage Learning Edições Ltda., 2010.

5 Oxford Languages. *Caos*. "s.d.". Disponível em: https://tinyurl.com/yv2cd8w4. Acesso em: 15 de fevereiro 2023.

6 SANTOS, L. C. dos. Expoentes de lyapunov para o estádio circular. Universidade Federal de Minas Gerais, p. 11–12, 2008.

7 TEIXEIRA, R. R. Ensinar a incerteza matemática na escola. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, v. 5, n. 1, p. 113–125, 2017.

8 Iran Coelho das Neves. *O NOSSO DEVER DE CASA*. 2022. Disponível em: https://www.tce.ms.gov.br/noticias/artigos/detalhes/6769/o-nosso-dever-de-casa. Acesso em: 15 de março 2023.

9 INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA. *Regulamento Técnico Metrológico consolidado que estabelece a forma de expressar a indicação quantitativa do conteúdo líquido das mercadorias préembaladas*. Brasil, 2021. 5 p.

10 PEITGEN, H.-O. et al. *Chaos and fractals: new frontiers of science*. [S.l.]: Springer, 2004. v. 106. 37-61 p.

11 YouTube. *Don't trust your computer and the shadowing lemma*. 2018. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=N8lV9X-wzEA. Acesso em: 01 de fevereiro 2023.

12 ALVES, T. R. d. S.; SANTOS, A. E. d. A importância das feiras de ciências na educação e alfabetização científica: um relato de experiência com alunos da educação básica. *Revista Educação Pública*, v. 21, n. 9, 2021. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/9/a-importancia-das-feiras-de-ciencias-na-educacao-e-alfabetizacao-cientifica-um-relato-de-experiencia-com-alunos-da-educacao-basica.