CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RAQUEL SILVA DE OLIVEIRA MELK

POLIDAMAS:
Uma junção do Jogo de Damas com o Ensino de Polinômios

Belo Horizonte
2023

RAQUEL SILVA DE OLIVEIRA MELK

POLIDAMAS:
Uma junção do Jogo de Damas com o Ensino de Polinômios

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador(a):
Éden Santana Campos Amorim

Banca Examinadora:
Danielle Franco Nicolau
Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Érica Marlúcia Leite Pagani
Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Belo Horizonte
2023

M523p Melk, Raquel Silva de Oliveira
Polidamas: uma junção do jogo de damas com o ensino de polinômios / Raquel Silva de Oliveira Melk. – 2023.
65 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Éden Santana Campos Amorim.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Álgebra – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Jogos educativos – Teses. 4. Polinômios – Estudo e ensino – Teses. 5. Sequências (Matemática) – Estudo e ensino – Teses. I. Amorim, Éden Santana Campos. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 512.07

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

RAQUEL SILVA DE OLIVEIRA MELK

POLIDAMAS:
Uma junção do Jogo de Damas com o Ensino de Polinômios

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 24 de agosto de 2023

Raquel Silva de Oliveira Melk

Raquel Silva de Oliveira Melk
(Autor(a))

Éden Santana Campos Amorim

Éden Santana Campos Amorim
(Orientador(a))

Belo Horizonte
2023

Dedico esse trabalho aos meus pais Paulo e Genuina, às minhas irmãs Priscila e Fernanda e ao meu falecido avô Maurício, que me apoiaram ao longo dessa jornada e me fizeram acreditar que sou capaz.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me guiar e iluminar meu caminho. Também aos meus pais Paulo e Genuina que nunca mediram esforços para me ajudar e apoiar. Agradeço as minhas irmãs Priscila e Fernanda e ao meu namorado Fabiano por sempre me motivarem e me mostrarem o quanto sou capaz de realizar meus sonhos. Vocês foram peças fundamentais no meu processo e sou extremamente grata por terem vocês como minha FAMÍLIA.

Um agradecimento especial aos meus avós que faleceram durante o mestrado, que sempre me apoiaram e sei que de onde estiverem estão vibrando por minha conquista.

Aos professores do CEFET um agradecimento especial pelos ensinamentos.

Ao meu coordenador Éden a minha imensa gratidão por todo apoio e ajuda, pela paciência e por todo ensinamento. Você foi fundamental para a escrita e desenvolvimento dessa dissertação.

Por fim agradeço a todos os profissionais da educação que se empenham em levar o conhecimento da melhor forma possível para os alunos, vocês são a ponte que liga o conhecimento aos alunos.

Obrigada!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A presente dissertação parte da observação do desafio que os professores enfrentam para conseguir a atenção dos alunos. Na disciplina de Matemática, encontra-se normalmente maior resistência e dificuldade por parte dos alunos, esse desafio se manifesta em particular em conteúdos mais abstratos como no estudo de polinômios. Uma solução para esse impasse é criar estratégias que tornem as aulas mais dinâmicas e atrativas para os alunos. Com base em estudiosos como Piaget, Grando e Lara, a estratégia colocada foi o uso de jogos em sala de aula, que causa maior interesse por parte do aluno e um aprendizado que desenvolve além da disciplina o raciocínio lógico, trabalho em equipe e criação de estratégias. Escolhemos trabalhar com o Jogo de Damas que possuem regras simples e demanda de raciocínio para a criação de estratégias. Foi realizado o paralelo entre o Jogo de damas e os Polinômios, frisando que a partir das regras é possível alcançar seu objetivo em ambos os casos. Levando esses aspectos em consideração o produto criado foi o jogo Polidamas que faz a junção entre os Polinômios e o Jogo de Damas, revendo conceitos e operações polinomiais. Também foi realizada a criação de uma Sequência Didática que traz todo o estudo de polinômios e a aplicação do Jogo Polidamas em sala de aula. Por fim, concluímos que o presente trabalho tem relevância no ensino de polinômios, podendo ser utilizado por professores como base para esse ensino e sua aplicação em sala de aula.

Palavras-chave: Álgebra. Ensino da Matemática. Jogo de Damas. Polinômios. Sequência Didática.

ABSTRACT

This thesis starts with the observation the challenge teachers face in attracting attention to their students. In Math, in whice there is normally greater resistence and difficulty by the students, this challenge is particularmente manifested in more abstract contents such as the study of polynomials. One solution to this stand-off is to create strategies that make classes more dynamic and engaging for students. Drawing on scholars such as Piaget, Vygotsky, Grando, and Lara, one strategy implemented was the use of games in the classroom, which generates greater interest from students and fosters learning that goes beyond the subject itself, developing logical thinking, teamwork, and strategy creation. We chose to work with the game of Checkers, which has simple rules and requires strategic thinking. A parallel was drawn between the game of Checkers and polynomials, emphasizing that both can be approached by to achieve goals through rules through rules. Taking these aspects into consideration, the product created was the game "Polidamas" (or PolyCheckers), which combines the joint of polynomials and the game of Checkers, reinforcing polynomial concepts and operations. Additionally, a Didactic Sequence was developed, including the study of polynomials and the application of the game "Polidamas" in the classroom. In conclusion, this study contributes to the teaching of polynomials and can be used by teachers as a foundation for instruction and classroom implementation.

Keywords: Algebra. Checkers Game. Didactic Sequence. Mathematics Education. Polynomials.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números Reais

$A[x]$ – Anel de polinômios com coeficientes em A na variável x

$\in$ - Relação de pertinência

$\cup$ - União de conjuntos

$\sum$- Somatório

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT - Associação de Normas Técnicas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CDB - Confederação Brasileira do Jogo de Damas

CEFET/MG - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede

SD – Sequência Didática

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> “O grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã.” (D'AMBROSIO, U., 1996, p.80).

Durante a realização de minha graduação em Matemática tive a oportunidade de trabalhar bastante com jogos matemáticos, o que me fez despertar o interesse por suas utilizações em sala de aula, não apenas como diversão e sim como um instrumento de aprendizado.

Ao realizar a busca por ideias sobre o produto do mestrado, pensei logo em trabalhar com um clássico jogo de tabuleiro. Apesar do jogo de xadrez ser bastante explorado no Ensino da Matemática, ele apresenta regras muito complexas para a proposta de trabalho idealizada, além de demandar mais tempo para seu ensino em sala de aula. Já o Jogo de Damas possui regras mais simples e ainda desenvolve o raciocínio na criação de estratégias e táticas.

Nesse sentido, o uso de jogos pode contribuir no ensino da Álgebra através da exploração das regras e manipulações. A utilização da Álgebra parte da minha vivência como professora, tanto em sala de aula como em aulas particulares, onde pude perceber a grande dificuldade dos alunos de compreender a Álgebra por não terem uma base sólida sobre suas manipulações.

A utilização de jogos ainda pode ser um motivador para manter a atenção e o interesse dos alunos nas aulas, principalmente frente ao constante uso das tecnologias digitais. Os dispositivos digitais e conexão com rede estão cada vez mais presentes na vida dos alunos e professores, tanto pelo seu fácil acesso quanto pelos recursos oferecidos, e interferem na atenção e concentração com os estudos. Neste contexto se torna mais difícil para os professores criarem aulas mais atraentes e competirem com essas tecnologias, principalmente quando se tem sob perspectiva as aulas de Matemática.

As aulas teóricas de Matemática causam um sentimento de desinteresse nos alunos, uma vez que, não é visível a aplicabilidade imediata em seu cotidiano e as novas tecnologias acabam os dispersando. Com isso é necessário que o professor esteja sempre procurando maneiras de dinamizar as aulas e torná-las mais atrativas.

Ainda temos que, segundo Piaget (1975):

> todo aluno normal é capaz de um bom raciocínio matemático desde que se apele para a sua atividade e se consiga assim remover as inibições afetivas que lhe conferem com bastante frequência um sentimento de inferioridade nas aulas que versam sobre essa matéria. (PIAGET, 1975: p. 65).

Essa ideia corrobora com a utilização de jogos como uma maneira de driblar as dificuldades e aumentar o interesse dos alunos sobre o assunto mencionado em aula e, consequentemente, sobre a Matemática.

Submetendo este assunto sob análise, o presente trabalho busca fazer a junção entre um jogo popular com o ensino da Matemática, no qual possibilite ao aluno desenvolver novas habilidades de raciocínio e se divirta com novas estratégias criadas.

O primeiro capítulo, Jogo de Damas, discorre a respeito da história do Jogo de Damas, mesmo sendo um jogo popular, pouco se é conhecido sobre sua história e denominação. Baseado em BAKUMENKO (1979), é discorrido sobre como chegou até o Brasil e como se popularizou em todo país, suas regras e como se deve jogar. A partir disso, foi possível descrever sobre a correlação entre a álgebra e o jogo de Damas, que é o ponto chave deste estudo: a partir de regras traçar estratégias para a obtenção de uma conclusão.

O segundo capítulo, Jogos na Educação, contempla a respeito do jogo na aprendizagem e como este pode se tornar um facilitador neste processo, retratando a importância de dinamizar as aulas e torná-las mais atraentes para os alunos. Isso se faz tanto pela análise de obras clássicas, como PIAGET (1975), quanto por trabalhos mais específicos, como GRANDO (2000) e LARA (2003).

O jogo é uma ferramenta utilizada para o ensino e desenvolvimento de novas habilidades. Ao aplicar um jogo durante as aulas, é importante que se considere jogos adaptados para o ensino, e que seja usado como parte do processo de aprendizagem, não apenas para divertimento no intervalo das matérias.

Para esse processo é necessário sempre colocar o aluno em uma posição de protagonista, sendo considerado como uma parte ativa do processo. Durante este capítulo é discorrido também sobre as características de um aluno motivado, ele contempla um sentimento de entusiasmo e empolgação, que se refere ao assunto tratado.

O capítulo três, Polinômios, trata sobre as definições de anel de polinômios, além das operações de adição e multiplicação com suas propriedades e demonstrações. Há uma vasta literatura matemática contemplando esse conteúdo e aqui escolhemos utilizar HEFEZ (2012) por ser completo e de fácil entendimento. É também nesse capítulo que está apresentado os dispositivos práticos para a realização da adição e multiplicação e como são utilizados.

No quarto capítulo, é apresentado o Jogo Polidamas, um jogo criado com o objetivo de ensinar Polinômios através do Jogo de Damas. Todo este estudo é contemplado neste momento da dissertação, pois é aqui que se torna um exemplo prático de tudo o que foi demonstrado em teoria.

O jogo Polidamas possui regras adaptadas do jogo de Damas, além de serem acrescidas novas regras. Além disso ao invés de peças normais, são utilizadas peças com monômios. Nesse jogo é estudado os conceitos de coeficientes, parte literal, grau e termos, além das operações de adição e subtração polinomial.

São apresentadas as regras, composição, nomenclaturas, posição das peças e os objetivos do jogo. Ainda nesse capítulo é abordado sobre os testes realizados com alunos do 8° ano do ensino fundamental e os erros cometidos ao longo da criação do jogo.

O último capítulo descreve uma sequência didática dentro do que é apresentado em ZABALA (1998), que contempla o ensino de Polinômios, partindo da apresentação do Jogo de Damas, ensino dos conceitos básicos, perpassando as operações de adição, subtração e multiplicação, posterior é adicionado à sequência didática a aplicabilidade do Jogo Polidamas, finalizando com os dispositivos práticos para a realização da Adição e Multiplicação.

2 JOGO DE DAMAS

Edgar Allan Poe (1841) resume bem em seu livro Duplo Assassinato na Rua Morgue a simplicidade do Jogo de Damas:

> ...os poderes mais altos do intelecto reflexivo são exercitados de forma mais decidida e mais útil através do humilde Jogo de Damas do que pela frivolidade elaborada do xadrez. Neste último, em que as peças têm movimentos diferentes e bizarros, com valores os mais diversos e variados, aquilo que é somente complexo provoca o engano (um erro bastante comum) de parecer profundo.
> O que entra principalmente no jogo é a atenção. Se falhar por um momento, o jogador se distrai e comete um erro para seu prejuízo ou derrota final. Uma vez que os movimentos possíveis não somente são numerosos como labirínticos, a possibilidade de ocorrência de tais distrações é multiplicada; em nove casos em dez, o vencedor não é o jogador mais inteligente, mas sim o mais concentrado. No Jogo de Damas, ao contrário, em que os movimentos são sempre os mesmos e existe muito pouca variação, as probabilidades de um movimento inadvertido são diminuídas e a mera atenção fica relativamente fora do jogo, as vantagens obtidas por qualquer um dos parceiros são conseguidas através de maior perspicácia.
> (ALLAN POE, p.02, 1841).

Vamos a seguir realizar um breve estudo sobre a história e regras do Jogo de Damas.

2.1 História e regras

Há indícios de que o Jogo de Damas teve sua origem por volta de 2000 E.C. no Egito, podendo ser ao invés de um jogo, um mecanismo de adivinhação mística. De lá passou pela Grécia, Arábia, Espanha e se espalhou pela Europa, sofrendo diversas modificações de nomes e do tabuleiro ao longo dos séculos.

Na Arábia era chamado de Alquerque, porém na Idade Média foi nomeado como Jogo de Damas por ser um jogo popular entre as mulheres, enquanto o xadrez era jogado por homens por ser considerado mais “complexo”.

No Brasil, o Jogo de Damas veio juntamente com os colonizadores, mas apenas em 1930 foi oficializado como esporte para homens e mulheres, e somente entre 1935 e 1940 que teve seu início com o damista Geraldino Izidoro, que registrava em seu livro as provas ocorridas.

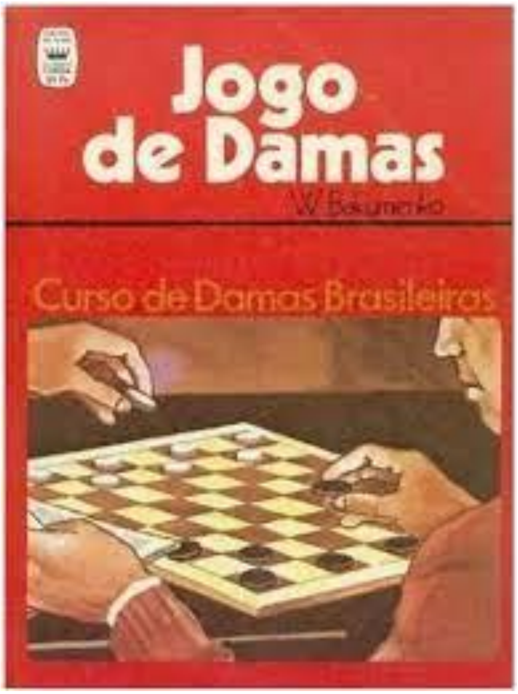
Entre 1940 e 1954, não há registros de jogos oficiais até a chegada do mestre russo W. Bakumenko. Vindo de uma escola damística e campeão nacional da URSS em 1927, ele criou um núcleo damístico, onde disseminou as técnicas de damas mais avançadas, padronizou os nomes de jogadas e aberturas e ajudou a escrever as regras oficiais das damas de 64 casas.

Com sua vinda, Geraldino Izidoro quis conhecê-lo e esse momento foi marcado por um grande jogo em meados de 1954 o que deu um reinício para as atividades damísticas no Brasil.

Esse encontro gerou um alavanco para o jogo no Brasil. Foram criadas colunas em jornais de todo país sobre os jogos de damas, além de diversos livros publicados e de federações criadas. Um desses livros foi escrito pelo próprio Bakumenko (figura1), no qual ele discorre sobre a definição do Jogo de Damas:

> Damas é um jogo no qual os participantes, em duelo mental, executam planos táticos e estratégicos, armam ciladas e tramam combinações, num esplêndido exercício de memória, de imaginação e de atenção.
> Trata-se, sem dúvida, de um passatempo, mas altamente educativo pelo extraordinário poder de reflexão que desenvolve.
> Neste sentido alguns o reputam mais eficiente do que o próprio xadrez por ser mais simples e praticável.
> (W. BAKUMENKO, 1979, p.02.).

Figura 1: Livro Jogo de Damas de W. Bakumenko



Fonte: Jogo de Damas. W. Bakumenko (capa, 1979)

A década de 60 foi de grande evolução para o Jogo de Damas, tendo ocorrido em Belo Horizonte o maior Jogo de Damas do Brasil até hoje, reunindo cerca de 1009 participantes.

Em 1967, João Havelange (presidente da Confederação Brasileira de Desportos) classificou o Jogo de Damas como uma recreação, retirando-o da CBD e desclassificando como esporte, voltando a fazer parte apenas em 1988.

Apesar desse atraso, os damistas da época não deixaram de propagar o jogo e fundaram a Confederação Brasileira do Jogo de Damas. Ainda em 1967, ocorreu o I Campeonato Brasileiro de Jogo de Damas (em alguns países e campeonatos são utilizados tabuleiros e regras diferentes, no Brasil são utilizados o de 64 casas. A tabela 1 explica melhor essa diferença) ficando com a vitória o espírito-santense José Carlos Rabelo.

Hoje em dia, existem diversos campeonatos tanto nacionais quanto internacionais com as variantes de 64 casas ou 100 casas.

Além disso é um jogo de fácil acesso virtual onde é possível jogar contra o computador e até mesmo com outras pessoas online, tendo versões para celular que podem ser baixadas gratuitamente. Também está presente dentro de jogos de vídeo game como o Assassin's Creed IV- Black Flag (figura 2), onde é possível jogar uma partida de dama dentro do jogo.

Figura 2 – Jogo de Damas no Jogo Assassin's Creed

Fonte: Critical Hits. DisponÌvel em: https://criticalhits.com.br/games/porque-jogos-de-tabuleiro-estao-presentes-em-ac4/, acessado em 18 de junho de 2023.

O Jogo de Damas possui diversas variações dependendo da sua localidade. Na tabela 1 é possível ver essas variações ao redor do mundo. É possível perceber que existem variações tanto no tabuleiro quanto nos movimentos e capturas de peças. Em uma competição é informado o tipo a ser jogado.

Tabela 1: Tabela com variações do Jogo de Damas

TIPO	Internacional	Brasileira	Italiana	Espanhola	Inglesa
Tabuleiro	10 x 10	8 x 8	8 x 8	8 x 8	8 x 8
Captura de peças	Frente e trás	Frente e trás	Apenas para frente	Apenas para frente	Apenas para frente
Movimentos da dama	Livre na diagonal	Livre na diagonal	1 por vez	Livre na diagonal	1 por vez
Obrigatoriedade de capturar o máximo de peças possível numa única jogada	Sim	Sim	Sim	Não	Não
Obrigatoriedade de capturar o máximo de damas possível	Sim	Sim	Não	Sim	Sim

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

No Brasil é jogado o tipo brasileiro seguindo as regras oficiais do Jogo de Damas, a Federação Mundial do Jogo de Damas e a Confederação Brasileira do Jogo de Damas (CDB) sendo elas válidas em todo território nacional. Estão descritas abaixo.

REGRAS DO JOGO DE DAMAS

1. Objetivo: imobilizar ou capturar todas as peças do adversário.

2. O Jogo de Damas é praticado em um tabuleiro de 64 casas ou de 100 casas, claras e escuras.

3. A grande diagonal (escura), deve ficar sempre à esquerda de cada jogador.

4. O lance inicial cabe sempre ao jogador que estiver com as peças claras.

5. A pedra anda só para frente, uma casa de cada vez.

6. Quando a pedra atinge a última linha do tabuleiro, concluindo o lance nas casas de coroação, ela é promovida à Dama.

7. A Dama é uma peça de movimentos mais amplos.

8. A Dama anda para frente e para trás, quantas casas quiser.

9. A captura é obrigatória. Não existe sopro. Duas ou mais peças juntas, na mesma diagonal não podem ser capturadas.

10. A pedra captura a Dama e a Dama captura a pedra. Pedra e Dama têm o mesmo valor para capturarem ou serem capturadas.

11. A pedra e a Dama podem capturar, tanto para frente, como para trás, uma ou mais peças.

12. Se no mesmo lance se apresentar mais de uma possibilidade de capturar peças, é obrigatório executar o lance que capture o maior número de peças (Lei da Maioria).

13. A pedra que durante o lance de captura de várias peças, apenas passe por qualquer casa de coroação, sem aí parar, não será promovida a Dama.

14. Na execução do lance de captura, é permitido passar mais de uma vez pela mesma casa vazia.

15. Na execução do lance de captura, não é permitido capturar a mesma peça mais de uma vez e as peças capturadas não podem ser retiradas do tabuleiro antes de completar o lance de captura.

16. Empate – 64 casas - Após 20 (vinte) lances sucessivos de Damas de cada jogador, sem captura ou deslocamento de pedra, a partida é declarada empatada. 100 casas - Após 25 (vinte e cinco) lances sucessivos de Damas de cada jogador, sem captura ou deslocamento de pedra, a partida é declarada empatada.

17. A dama no último movimento de captura pode parar em qualquer casa livre na diagonal em que está capturando. A dama não é obrigada a parar na casa seguinte após a última peça capturada.

18. Finais de: 2 damas contra 2 damas; 2 damas contra uma; 2 damas contra uma dama e uma pedra; uma dama contra uma dama e uma dama contra uma dama e uma pedra, são declarados empatados após 5 lances de cada jogador.

Fonte: Regras oficiais do Jogo de Damas, CBD, 2019.

Observando as regras podemos notar que as pedras (peças que não foram promovidas a damas) tem mesmo peso no jogo, não tendo diferenciação entre elas. Porém suas posições no tabuleiro influenciam nas jogadas, uma vez que as peças no centro do tabuleiro têm mais possibilidades de movimento. Essas e outras considerações são apresentadas em Bakumenko, página 49.

2.2 O ensino da Álgebra e o Jogo de Damas

Além de regras relativamente simples, o Jogo de Damas é bastante comum entre os brasileiros. Apesar disso, ao realizar uma pesquisa no portal da CAPES, não foram encontradas dissertações que abordassem o Jogo de Damas nos últimos 10 anos com a categoria de mestrado na área de exatas.

Nessa dissertação queremos traçar um paralelo entre o Jogo de Damas e a Álgebra polinomial: seguindo um conjunto de regras é possível resolver um problema algébrico ou ganhar uma partida do jogo. Fazer esse paralelo é importante para que o aluno entenda que a Álgebra pode ser mais simples do que parece.

A BNCC (2018) é um documento regulamentar para as escolas, sendo referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e traz como finalidade da Álgebra:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.
> Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.
> (BNCC, p. 270, 2018)

Segundo ainda a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é de suma importância que na Álgebra o aluno compreenda as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades o que remete novamente ao Jogo de Damas, trazendo suas manipulações e se relacionando com a Álgebra, transformando-o em um objeto de estudo ao invés de apenas um jogo.

Sendo assim, é essencial que o aluno crie o pensamento algébrico, entendendo e construindo as operações algébricas através de manipulações e regras, que podem ser trabalhadas através do Jogo de Damas.

3 JOGOS NA EDUCAÇÃO

Os alunos estão cada vez mais ativos e ligados nas tecnologias e inovações, o que torna difícil chamar sua atenção em sala de aula apenas com métodos tradicionais de ensino. Como a informação está cada vez mais fácil e rápida em suas mãos, eles ficam desmotivados e desinteressados pelos conteúdos passados e uma das formas de despertar esse interesse e motivar uma maior participação é a utilização de jogos durante as aulas.

O jogo estimula a imaginação através do lúdico e faz com que o aluno interaja e crie vínculos com os colegas, levando o aprendizado para além da sala de aula.

Segundo Falkembach (2006):

> O jogo por meio do lúdico pode ser desafiador e sempre vai gerar uma aprendizagem que se prolonga fora da sala de aula, fora da escola, pelo cotidiano e acontece de forma interessante e prazerosa. Jogando a criança, o jovem ou mesmo o adulto sempre aprende algo, sejam habilidades, valores ou atitudes, portanto, pode-se dizer que todo jogo ensina algo. Isso não significa que tudo que o jogo ensina é bom. (FALKEMBACH, p. 2, 2006)

Quando se fala em lúdico e jogos, Piaget traz grandes contribuições. Segundo o autor "O jogo não pode ser visto apenas como divertimento ou brincadeira para desgastar energia, pois ela favorece o desenvolvimento físico, cognitivo, afetivo e moral" (PIAGET, 1967, P.62), ou seja, o jogo faz parte do desenvolvimento do aluno e contribui diretamente em seu ensino.

Piaget (1978) classificou os jogos em três tipos:

- Jogos de exercícios (zero a dois anos): são os jogos conhecidos como sensório motores e que estimulam os exercícios funcionais da criança, trazendo as manipulações de objetos com as mãos e depois com os outros membros. Nessa fase a criança repete uma ação por prazer de ter aprendido e essa repetição faz com que se formem os hábitos.
- Jogos de símbolos (dois a sete anos): são os jogos que estimulam a imaginação da criança, sem regras específicas, pode haver aquelas criadas pelas crianças e também com objetos adaptados. E nessa fase que a criança desenvolve o simbolismo e sua própria lógica com a realidade.
- Jogos de regras (a partir dos sete anos): são os jogos que trazem regras e faz com que as crianças se interajam e aprendam sobre regras de comportamento. Através

> deles as atividades lúdicas passam a ter caráter educativo, tanto na parte educacional como de personalidade pois estimulam valores morais e de caráter.

Assim, os jogos como ferramentas de aprendizagem trazem consigo a motivação, além da participação do aluno e das interações sociais.

Os jogos podem fazer com que o aluno seja parte ativa no processo de ensino-aprendizagem. De acordo com Grando (2000):

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem. (GRANDO, p. 15, 2000)

É necessário motivar o aluno para que o mesmo crie interesse e queira aprender. Segundo Guimarães (2004), cabe ao docente, ao perceber a motivação do aluno, instigar através de atividades que os estimulem. Ainda segundo Guimarães, as características de um aluno motivado são:

> - opta por atividades que representam uma oportunidade para o aprimoramento de suas habilidades.
> - presta mais atenção nas instruções apresentadas.
> - busca novas informações.
> - empenha-se em organizar o novo conhecimento de acordo com os seus conhecimentos prévios.
> - tenta aplicar os novos conhecimentos a outros contextos.
> - a percepção de progresso produz um senso de eficácia em relação ao que está sendo aprendido, gerando expectativas positivas de desempenho e realimentando a motivação para aquela atividade.
> - apresenta alta concentração, de tal modo que perde a noção do tempo.
> - os problemas cotidianos ou outros eventos não competem com o interesse naquilo que está desenvolvendo.
> - não existe ansiedade decorrente de pressões ou emoções negativas que possam interferir no seu desempenho.
> - a repercussão do resultado do trabalho perante as outras pessoas não é o centro de preocupação, ainda que o orgulho e a satisfação provenientes do reconhecimento de seu empenho e dos resultados do trabalho estejam presentes.
> - busca novos desafios após atingir determinados níveis de habilidades.
> - as falhas ocorridas na execução das atividades instigam a continuar tentando. (GUIMARÃES, 2004, p.38, apud CARDOSO, 2008, p. 41).

Com as novas tecnologias digitais, é difícil motivar o aluno apenas com as aulas expositivas, por isso é necessário acrescentar a estas aulas recursos que tornem a aula mais interessante, como diz Silva (2004):

> Ensinar por meio de jogos é um caminho para o educador desenvolver aula mais interessante, descontraída e dinâmica podendo competir em igualdade de condições com os inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola despertando ou estimulando sua vontade de frequentar com assuidade a sala de aula e incentivando seu desenvolvimento ensino aprendizagem, já que e aprende e se diverte, simultaneamente (SILVA, 2004, p. 26).

Assim os jogos entram com papel fundamental para complementação do ensino, não apenas com o lúdico, mas como um material de ensino. É de suma importância que o jogo estudado tenha relação direta com a matéria ensinada e traga para o aluno seu entendimento de uma forma mais divertida.

Dessa forma, os jogos são utilizados como um facilitador da aprendizagem, vindo no início da sequência didática como forma de despertar o interesse, no meio como método de ensino e a memorização de processos, ou no final com o objetivo de fixação do conteúdo, o que destaca Grando (2000):

> As posturas, atitudes e emoções demonstradas pelas crianças, enquanto se joga, são as mesmas desejadas na aquisição do conhecimento escolar. Espera-se um aluno participativo, envolvido na atividade de ensino, concentrado, atento, que elabore hipóteses sobre o que interage, que estabeleça soluções alternativas e variadas, que se organize segundo algumas normas e regras e, finalmente, que saiba comunicar o que pensa, as estratégias de solução de seus problemas. (GRANDO, 2000, p.17).

Outro ponto já mencionado, e que é importante ressaltar, são as regras que os jogos trazem. Segundo Grando (1995) "... não existe jogo se não há regras. E estas regras devem ser respeitadas pelos jogadores. Aquele que ignora ou desrespeita as regras, destrói o jogo e é expulso, pois ameaça a existência da comunidade dos jogadores".

A existência de regras nos jogos é uma possibilidade de introduzir conteúdos matemáticos que partem de axiomas e propriedades (regras), como por exemplo a Álgebra.

A matemática é uma área de estudo na qual os alunos possuem grandes dificuldades, em particular com a introdução dos polinômios. Em grande parte das aulas, o aluno é apenas um ouvinte que escuta a matéria, replica exercícios e aplica regras e algoritmos que nem sempre sabem a origem e o objetivo.

Os professores também encontram dificuldades ao ensinar, pois muitas vezes é difícil dinamizar as aulas e fugir do modelo tradicional de ensino. Como Lara (2003) escreve:

> Esse "bicho-papão" ou terror dos/as nossos/as alunos/as só perderá sua áurea de "lobo-mau" quando nós, educadores/as, centrarmos todos os nossos esforços para que ensinar Matemática seja: desenvolver o raciocínio lógico e

> não apenas a cópia ou repetição exaustiva de exercícios – padrão; estimular o pensamento independente e não apenas transmitir conhecimentos prontos e acabados; desenvolver a capacidade de manejar situações reais e resolver diferentes tipos de problemas e não continuar naquela "mesmice" que vivemos quando éramos alunos/as. (LARA, 2003, p. 18-19)

Em busca da dinamização das aulas, entram os jogos que conseguem fazer com que os alunos retomem o interesse pela matéria e entendam alguns conceitos que antes eram apenas utilizados na resolução de exercícios. Ainda com maior importância, os jogos desenvolvem o raciocínio lógico do aluno, fazendo com que seja útil não apenas para uma aula e sim para melhorar seus pensamentos e estratégias.

É importante que o jogo seja uma fonte de ensino, trazendo consigo conceitos e estratégias que utilizem o conteúdo passado, não apenas como diversão, mas como um material de estudo.

"Inserido neste contexto de ensino-aprendizagem, o jogo assume um papel cujo objetivo transcende a simples ação lúdica do jogo pelo jogo, para se tornar um jogo pedagógico, com um fim na aprendizagem matemática – construção e/ou aplicação de conceitos" (GRANDO, 1995, p.35).

Outro ponto a se destacar é a realização de cálculos mentais que o jogo pode trazer, fazendo com que cada aluno crie uma estratégia de cálculo diferente para se chegar a um mesmo resultado.

Grando (2000) destaca:

> O mais importante ao cálculo mental é a reflexão sobre o significado dos cálculos intermediários, facilitando a compreensão das regras que determinam os algoritmos do cálculo escrito. Desta forma, o constante exercício e a sistematização dos procedimentos de cálculo mental, podem vir a favorecer, ao longo do tempo, como estratégias de resolução e controle do cálculo escrito, conforme pontuam as orientações dos PCN´s para o trabalho com cálculo mental no ensino fundamental. (GRANDO, 2000, pg.63).

Com isso os algoritmos utilizados na Álgebra passam a ser compreendidos de uma maneira mais fácil, fazendo com que o aluno compreenda as regras e as aplique com conhecimento. Conforme Petty (1995):

> Jogar é uma das atividades em que a criança pode agir e produzir seus próprios conhecimentos. (...)a ideia será sempre considerá-los (os jogos) como uma possibilidade de exercitar ou estimular a construção de conceitos e noções também exigidos para a realização de tarefas escolares. Neste sentido, o jogo serve para trabalhar conceitos que, quando excluídos de seu contexto, são

> muito abstratos, muito complicados para as crianças entenderem. (PETTY, 1995, p. 11)

É de suma importância que o professor consiga extrair do jogo os conceitos matemáticos necessários que deseja trabalhar, tendo em mente que o ele deve ajudar o aluno a chegar nesse conhecimento.

O jogo por si só pode não trazer à tona o conhecimento esperado, e, em algumas ocasiões, cabe ao professor modificar as regras ou fazer questionamentos que instiguem os alunos.

Assim com a utilização correta dos jogos é possível dinamizar as aulas e retomar o interesse dos alunos, fazendo com que desperte neles a imaginação, respeito e entendimento de regras, socialização e diversão. Não menos importante, estimula o raciocínio lógico dedutivo e a criação de estratégias para a resolução de problemas.

4 POLINÔMIOS

Neste capítulo, iremos apresentar o anel de polinômios, evidenciando conceitos e propriedades que usaremos para desenvolver o Jogo Polidamas e a sequência didática.

Grosso modo, um polinômio na variável x é uma soma de potências de x multiplicadas por coeficientes numéricos, como por exemplo, $2x^3 - 5x + 7$. Dessa forma, os polinômios recebem naturalmente as operações de adição e multiplicação. Mas para refinarmos tal construção de modo matematicamente formal e preciso, é importante fundamentar os conceitos e propriedades das operações algébricas envolvidas. Isso nos permitirá considerar o conjunto dos polinômios a partir de sua estrutura algébrica, como um anel comutativo com unidade. Os conceitos aqui abordados podem ser estudados com mais detalhes em Introdução à Álgebra, livro de Adilson Gonçalves (2017).

4.1 Anéis e domínios

Como primeiro passo, vamos considerar a estrutura algébrica dos coeficientes que compõem o polinômio. Em geral, tais coeficientes são números inteiros, racionais ou reais. Para todos esses conjuntos numéricos temos definidas as operações algébricas básicas, adição e multiplicação, que satisfazem algumas propriedades.

De modo geral, considere um conjunto A com duas operações binárias, a adição (+) e a multiplicação (·), satisfazendo as seguintes propriedades:

Adição: dados elementos $a, b\ e\ c$ em A:

- associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- comutatividade: $a + b = b + a$.
- elemento nulo: existe um único elemento e, chamado elemento nulo, tal que $a + e = e + a = a$.
- elemento simétrico: para cada a, existe um único elemento b tal que$a + b = b + a = e$. Nesse caso, b é chamado de simétrico de a.

Multiplicação: dados elementos $a, b\ e\ c$ em A:

- associatividade:$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- comutatividade: $a \cdot b = b \cdot a$
- elemento unidade: existe um único elemento u, chamado elemento unidade, tal que $a \cdot u = u \cdot a = a$.
- distributividade com adição: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

O conjunto A contendo ambas as operações satisfazendo todas essas propriedades é chamado de um anel comutativo com unidade. Para nossos objetivos, vamos chamar tal conjunto apenas de anel.

Se considerarmos o conjunto dos números inteiros, ($\mathbb{Z}$), com as operações usuais de adição e subtração, é fácil observar que todas as propriedades acima são atendidas. Nesse caso o elemento nulo é o zero, $e = 0$, e o elemento neutro unidade é o um, $u = 1$. Também, o elemento oposto de a é denotado por $-a$, seu "negativo". Dessa forma, $\mathbb{Z}$ é um anel.

Na verdade, $\mathbb{Z}$ é o principal exemplo do qual origina o conceito de anel. Mas também pode-se verificar facilmente que o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, com as operações usuais de adição e multiplicação, atendem às mesmas propriedades, sendo, portanto, mais um exemplo de anel. Isso vale para o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

Dado um anel A, considere também a seguinte propriedade:

Dados a, b em A tais que $a \cdot b = e$, então $a = e$ ou $b = e$.

Essa propriedade dos diz que esse anel não tem divisores de zero, ou seja, o produto de elementos não nulos é sempre não nulo.

Um anel A que também apresenta a propriedade acima é chamado de domínio de integridade, ou simplesmente domínio. São exemplos de domínios os conjuntos numéricos já citados, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ e\ \mathbb{R}$. A título de curiosidade, um exemplo de anel que não é domínio é o conjunto dos inteiros módulo m, com m inteiro composto.

Dados esses conceitos, estamos preparados para estudar o conjunto de polinômios como mais um exemplo de anel (comutativo com unidade). Mais detalhes ainda podem ser vistos em Introdução à Álgebra, livro de Adilson Gonçalves (2017). Outras abordagens mais específicas sobre o estudo de polinômios também podem ser vistas em Polinômios e equações algébricas de Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villea (2022), livro da coleção do PROFMAT, mas que não serão exploradas diretamente na proposta dessa dissertação, ou seja, no jogo de Polidamas.

4.2 O anel de polinômios

Dado um domínio A, considere o símbolo x como um elemento não pertencente a esse anel. Esse símbolo será chamado de uma indeterminada sobre A.

Para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, designamos a $j - ésima\ potência\ de\ x$ por x^j e convencionamos $x^0 = 1\ e\ x^1 = x$.

Polinômio na indeterminada x com coeficientes em A

Um polinômio $f(x)$ com coeficientes em A é uma expressão do tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

Em que $n \in \mathbb{N} \cup 0, a_j \in A, para\ 0 \leq j \leq n$.

Coeficientes, termos, grau e termo constante

Para $0 \leq j \leq n$, os elementos a_j são os **coeficientes** do polinômio $f(x)$, as parcelas a_jx^j são **termos** e os termos a_jx^j com que $a_j \neq 0$ são monômios de **grau** j do polinômio $f(x)$. O coeficiente a_0 é chamado de **termo constante**.

Vamos denotar por $A[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes em A.

$$A[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n; a_j \in A, 0 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Convenciona-se:

- Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n$ é o polinômio identicamente nulo e escreve-se $0(x) = 0$.
- $f(x) = a \in A$ é chamado de polinômio constante.
- Pode-se escrever um polinômio $f(x)$ com os termos em qualquer ordem, mas preferencialmente escreve-se em ordem crescente do grau (f(x) $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$) ou em ordem decrescente (f(x) $= a_nx_n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$).
- Costuma-se não escrever o termo a_jx^j sempre que $a_j = 0$, quando houver algum termo não nulo no polinômio.

EXEMPLO 1.1

Polinômios em $\mathbb{R}[x]$:

$$f(x) = -2 + \frac{2}{5}x - \sqrt{2}x^2 \text{ e } g(x) = 6 - x + 3x^2 - \sqrt{5}x^3 + \frac{1}{2}x^5.$$

EXEMPLO 1.2

Polinômios em $\mathbb{Z}[x]$:

$$h(x) = -x + 3x^3 - 9x^5 \text{ e } i(x) = 2 - x + 3x^3 - 3x^5.$$

O polinômio f(x) $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ pode também ser escrito como f(x) $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots + 0x^m$, para todo número natural $m > n$. Portanto, quando comparamos dois polinômios $f(x)\ e\ g(x) \in A[x]$, é possível assumir que os termos de ambos têm as mesmas potências de x .

Igualdade de polinômios

Os polinômios com coeficientes reais f(x) $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e g(x) $= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ são iguais se, e somente se, $a_j = b_j$, tal que $0 \leq j \leq n$. Escrevemos $f(x) = g(x)$.

No Exemplo 1.2, os coeficientes dos termos constantes e de grau 5 dos polinômios $h(x)$ e $i(x)$ são diferentes. Assim $h(x) \neq i(x)$.

EXEMPLO 1.3

Os polinômios $f(x) = -2 + 3x^2 + 5x^4 - x^5$ e $g(x) = 5x^4 - 2 - x^5 + 3x^2$ em $\mathbb{Z}[x]$ são iguais pois $a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = 5$ e $a_3 = -1$.

Grau e coeficiente líder de um polinômio

Em todo polinômio não identicamente nulo, $f(x) \neq 0$, algum coeficiente deve ser diferente de zero, então há um maior número natural n, tal que $a_n \neq 0$. Definimos o grau de $f(x)$ por $gr(f(x))$ e nesse caso, a_né chamado de coeficiente líder de $f(x)$.

- Os polinômios de grau n com coeficiente líder $a_n = 1$ são chamados de polinômios mônicos. Não definimos o grau do polinômio identicamente nulo, $f(x) = 0$.
- Assim temos que $gr(f(x)) = 0\ se, e\ somente\ se, f(x) = a \neq 0, a \in A$.

No conjunto $A[x]$ estão definidas duas operações com polinômios, adição e multiplicação, as quais definiremos a seguir.

Adição de polinômios

Dados $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j\ \ e\ g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j\ \ em\ A[x]$, a adição de polinômios é

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{l} c_jx^j, onde\ c_j = a_j + b_j, para\ 0 \leq j \leq n$$

Chamamos a adição de dois polinômios de *soma*.

EXEMPLO 1.4

Dados $f(x) = 5 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 + 6x^5$ e $g(x) = -2 + 3x - 4x^2 + 5x^3 - x^4 + 14x^5$.

em $\mathbb{Z}[x]$, temos que:

$f(x) + g(x) = \big(5 + (-2)\big) + (0 + 3)x + \big(2 + (-4)\big)x^2 + \big((-3) + 5\big)x^3 + \big(1 + (-1)\big)x^4 + (6 + 14)x^5 \ = 3 + 3x - 2x^2 + 2x^3 + 20x^5$.

EXEMPLO 1.5

Dados $f(x) = \frac{1}{2} - \ 3x^2 + x^3 + 8x^4$ e $g(x) = \frac{2}{3} + x^2 - x^4 + 14x^5$.

em $\mathbb{Z}[x]$, temos que:

$f(x) + g(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \big((-3) + 1\big)x^2 + (1 + 0)x^3 + \big(8 + (-1)\big)x^4 + (0 + 14)x^5$

$= \frac{7}{6} - 2x^2 + x^3 + 7x^4 + 14x^5$.

Na adição de polinômios vale a seguinte propriedade:

Propriedade do grau

Dados $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, com\ \ a_n \neq 0\ e\ g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, com\ b_m \neq 0\ \ em\ A[x]$, se $f(x) + g(x) \neq 0$, então:

$$gr\big(f(x) + g(x)\big) \leq \max\{gr\big(f(x)\big), gr\big(g(x)\big)\} = \max(n, m)$$

Valendo a igualdade sempre que $gr\big(f(x)\big) = n \neq gr\big(g(x)\big) = m$.

Demonstração:

Dados $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_n \neq 0$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, com $b_m \neq 0$ e $c_j = a_j + b_j, j \in \mathbb{N}$, supondo que $n \geq m$ temos:

$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$.

Se $n > m$, então $gr\big(f(x) + g(x)\big) = n$, pois $a_n \neq 0$, então $c_n = a_n + 0 = a_n$.

Se $n = m$, então:

- $a_n + b_n = 0$ e assim $gr\big(f(x) + g(x)\big) < n$.
- $a_n + b_n \neq 0$ e assim $gr\big(f(x) + g(x)\big) = n$.

■

A adição de polinômios satisfaz algumas propriedades.

Tomemos $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j\ e\ \ h(x) = \sum_{j=0}^{l} c_j x^j\ em\ A[x]$.

- Associativa:

$$\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)=f(x)+\big(g(x)+h(x)\big),$$

Para todos $0 \leq j \leq n\ e\ a_j, b_j\ e\ c_j\ ao\ seu\ anel\ comutativo\ unitário\ A\ , temos\big(\ a_j + b_j\big) + c_j = a_j + (b_j + c_j)$.

Demonstração:

Dados $f(x), g(x)$ e $h(x)$ com $n = m = l$, onde $f(x), g(x)$ e $h(x)$ possuem as mesmas potências de x teremos:

$(\ f(x) + g(x)) + h(x)\ =$

$= \sum_{j=0}^{n}(a_j + b_j)x^j + \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ Definição de adição em $A[x]$

$= \sum_{j=0}^{n}((a_j + b_j) + c_j)x^j$ Definição de adição em $A[x]$

$= \sum_{j=0}^{n}(a_j + (b_j + c_{j)})x^j$ Associatividade da adição em $A[x]$

$= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + \sum_{j=0}^{n}(b_j + c_{j)})x^j$ Definição de adição em $A[x]$

$= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$ Definição de adição em $A[x]$

■

Observação: as outras demonstrações são análogas a essa, baseadas nas propriedades de adição do anel A.

- Comutativa:

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x),$$

Para todos $0 \leq j \leq n\ e\ a_j\ , b_j\ \in A\ , temos\ a_j + b_j = b_j + a_{j.}$

- Elemento Neutro:

Dado o polinômio identicamente nulo $= \sum_{j=0}^{n} 0x^j$ satisfaz $f(x) = 0 + f(x)$,

Para todos $0 \leq j \leq n\ e\ a_j \in A\ , temos\ a_j = 0 + a_j$.

- Simétrico:

Dado $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, o polinômio $-f(x) = \sum_{j=0}^{n}(-a_j)x^j$ é o simétrico de $f(x)$, sendo

$f(x) + \big(-f(x)\big) = \sum_{j=0}^{n} 0x^j$,

Para todos $0 \leq j \leq n\ e\ a_j \in A,\ temos\ a_j + \big(-a_j\big) = 0$.

Multiplicação de polinômios

Dados $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ em $A[x]$, a multiplicação de polinômios é

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j,$$

sendo

$$\boldsymbol{c_j = a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \cdots + a_{0j} \cdot b_0 = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda \cdot b_\mu}$$

para $\boldsymbol{0 \leq j \leq n+m}$

Chamamos a multiplicação de dois polinômios de *produto*.
Na multiplicação de polinômios vale a seguinte propriedade:

Propriedade do grau

Dados $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, com\ a_n \neq 0\ e\ g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, com\ b_n \neq 0\ \ em\ A[x]$, *então:*

$$gr\big(f(x) \cdot g(x)\big) = n + m$$

Pois o coeficiente líder de $f(x) \cdot g(x)$ é $c_{n+m} = a_n \cdot b_m \neq 0$.

A multiplicação de polinômios satisfaz algumas propriedades (consequência das propriedades da multiplicação no anel A):

Tomemos $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ e $h(x) = \sum_{j=0}^{l} c_j x^j$ em $A[x]$:

- Comutativa:

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

Para todo $0 \leq j \leq n+m$, vale a identidade:

$$\sum_{\lambda+\mu=j} a_\mu b_\lambda = \sum_{\lambda+\mu=j} b_\lambda a_\mu$$

Demonstração:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda \cdot b_\mu\right)x^j = \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=\lambda+\mu} b_\mu \cdot a_\lambda\right)x^j = g(x) \cdot f(x),$$

Sendo que em A, temos $a_\lambda \cdot b_\mu = b_\mu \cdot a_\lambda$, para quaisquer λ e μ. ■

- Associativa:

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big) \cdot h(x) = f(x) \cdot \big(g(x) \cdot h(x)\big)$$

- Elemento Neutro:

  Dado o polinômio constante 1 é satisfeito: $1 \cdot f(x) = f(x)$,

  Para todo $0 \leq j \leq n\ e\ a_j \in A\ , temos\ a_j = 1 \cdot a_j$

- Distributiva:

$$\big(f(x) + g(x)\big) \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)$$

Demonstração:

Dados $f(x), g(x)$ e $h(x)$ com $n = l$, em que $g(x)$ e $h(x)$ possuem as mesmas potências de x teremos:

$f(x) \cdot \big(g(x) + h(x)\big) = (\sum_{j=0}^{n} a_j x^j) \cdot (\sum_{j=0}^{m} (b_j + c_j) x^j)$ Definição de adição em $A[x]$

$= \sum_{j=0}^{n+m} (\sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda \cdot (b_\mu + c_\mu)) x^j$ Definição de multiplicação em $A[x]$

$= \sum_{j=0}^{n+m} (\sum_{j=\lambda+\mu} (a_\lambda \cdot b_\mu + a_\lambda . c_\mu)) x^j$ Distributividade em A

$= \sum_{j=0}^{n+m} (\sum_{j=\lambda+\mu} (a_\lambda \cdot b_\mu)) x^j + \sum_{j=0}^{n+m} (\sum_{j=\lambda+\mu} (a_\lambda \cdot c_\mu)) x^j$ Definição de adição em $A[x]$

$= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$ Definição de multiplicação em $A[x]$

■

EXEMPLO 1.6

Dados $f(x) = -2 + 3x^2 - 4x^3 + x^4$ e $g(x) = -2x^2 + 2x^3 - 4x^5$ em $\mathbb{Z}[x]$, usando a propriedade distributiva da multiplicação de polinômios temos:

$f(x) \cdot g(x) = (-2) \cdot (-2x^2 + 2x^3 - 4x^5) + 3x^2 \cdot (-2x^2 + 2x^3 - 4x^5) + (-4x^3) \cdot (-2x^2 + 2x^3 - 4x^5) + x^4 \cdot (-2x^2 + 2x^3 - 4x^5)$.

$= (4x^2 - 4x^3 + 8x^5) + (-6x^4 + 6x^5 - 12x^7) + (8x^5 - 8x^6 + 16x^8) + (-2x^6 + 2x^7 - 4x^9)$.

$= 4x^2 - 4x^3 - 6x^4 + (8 + 6 + 8)x^5 + (-8 - 2)x^6 + (-12 + 2)x^7 + 16x^8 - 4x^9$.

$= 4x^2 - 4x^3 - 6x^4 + 22x^5 - 10x^6 - 10x^7 + 16x^8 - 4x^9$.

A seguir iremos apresentar alguns dispositivos práticos que podem facilitar a realização da adição e multiplicação.

4.3 Dispositivos práticos

Iremos apresentar dispositivos para o cálculo da adição e multiplicação de polinômios utilizando tabelas.

4.3.1 Adição

Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$, para obter a soma $f(x) + g(x)$ primeiramente ordenamos os polinômios em ordem decrescente do grau.

Cada polinômio ocupará uma linha da tabela de modo que os monômios de mesmo grau ocupem uma mesma coluna. Explicitaremos o coeficiente nulo para os monômios omitidos.

Em seguida, realizamos a soma dos coeficientes em uma mesma coluna, para cada coluna.

Inserimos o resultado em uma nova linha, respeitando o grau em cada coluna.

A soma será o polinômio obtido na última linha.

Retomemos o exemplo 1.4 e o escrevemos em uma tabela como indicado anteriormente:

Tabela 2: Adição do exemplo 1.4

$f(x)$	$6x^5$	x^4	$-3x^3$	$2x^2$	$0x$	5
$g(x)$	$14x^5$	$-x^4$	$5x^3$	$-4x^2$	$3x$	-2
$f(x) + g(x)$	$20x^5$	$0x^4$	$2x^3$	$-2x^2$	$3x$	3

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Assim temos $f(x) + g(x) = 3 + 3x - 2x^2 + 2x^3 + 20x^5$.

Observação: observe que o mesmo dispositivo pode ser usado para somar quantos polinômios forem necessários.

4.3.2 Multiplicação

Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$, para obter o produto $f(x) \cdot g(x)$, primeiramente ordenaremos os polinômios na ordem decrescente de grau.

O primeiro polinômio ocupará o cabeçalho das colunas (horizontal) e o segundo polinômio ocupará o cabeçalho das linhas (vertical). Explicitaremos o coeficiente nulo para os monômios omitidos.

Cada célula da tabela será o resultado do produto dos monômios dos cabeçalhos de coluna e linha correspondentes.

O produto será a soma dos monômios de cada célula da tabela.

Observe que nas diagonais da direita para a esquerda, todas as células possuem monômios de mesmo grau.

EXEMPLO 1.8

Retomando o exemplo 1.6 e o escrevemos em uma tabela como indicado anteriormente:

Dados $f(x) = -2 + 3x^2 - 4x^3 + x^4$ e $g(x) = -2x^2 + 2x^3 - 4x^5$

Tabela 3: Multiplicação do exemplo 1.6

*	-2	$0x$	$3x^2$	$-4x^3$	x^4
0	0	$0x$	$0x^2$	$0x^3$	$0x^4$
$0x$	$0x$	$0x^2$	$0x^3$	$0x^4$	$0x^5$
$-2x^2$	$4x^2$	$0x^3$	$-6x^4$	$8x^5$	$-2x^6$
$2x^3$	$-4x^3$	$0x^4$	$6x^5$	$-8x^6$	$2x^7$
$0x^4$	$0x^4$	$0x^5$	$0x^6$	$0x^7$	$0x^8$
$-4x^5$	$8x^5$	$0x^6$	$-12x^7$	$16x^8$	$-4x^9$

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Assim temos $f(x) \cdot g(x) = 4x^2 - 4x^3 - 6x^4 + 22x^5 - 10x^6 - 10x^7 + 16x^8 - 4x^9$.

Esses dispositivos serão utilizados na sequência didática para facilitar a operação com os polinômios.

5 O jogo Polidamas

O jogo Polidamas é uma junção do Jogo de Damas com o ensino de polinômios. A ideia principal do jogo é utilizar de alguns conhecimentos e regras do Jogo de Damas, ao mesmo tempo que se ensina sobre polinômios. Em particular, nessa versão do jogo, trabalhamos com a soma e a subtração de polinômios.

5.1 Regras

Para esse jogo o aluno precisa de alguns conhecimentos prévios:

- Compreender os conceitos de: termo, coeficiente, grau, monômio, binômio, polinômio.
- Saber realizar as operações de adição e subtração em um polinômio.
- Conhecer as regras do Jogo de Damas tradicional, além do tabuleiro e posição das peças.

O jogo é composto por:

- 1 tabuleiro 8 x 8
- 24 peças (12 brancas e 12 pretas).
- Cada peça possui uma identificação por um monômio que são: 2, 5, x, 3x, x^2, $2x^2$, $3x^2$, x^3, $3x^3$,$5x^3$, $2x^4$, x^5 (tanto para as brancas quanto para as pretas).

Nomenclatura:

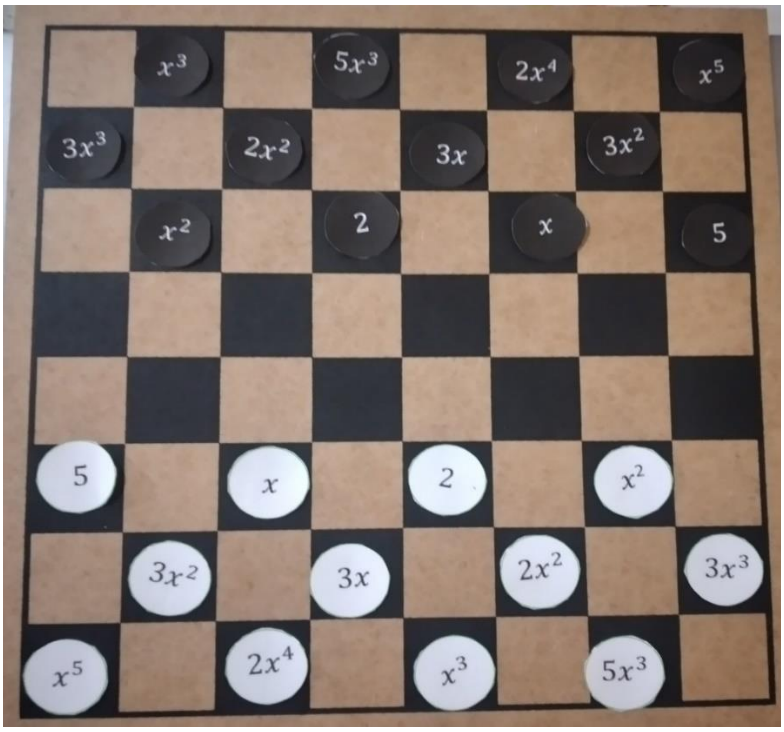
- As *peças* são inicialmente *pedras*, como no Jogo de Damas.
- Assim como no Jogo de Damas, as pedras podem ser promovidas a um novo tipo de peça que será chamado *polidama* – o equivalente à dama do jogo tradicional.
- Cada jogador possui um *polinômio de tomadas*, que é atualizado a cada tomada de peça que o jogador realiza.

Posicionamento das peças:

- As peças são colocadas de maneira que as brancas e as pretas estejam na mesma posição uma das outras.
- Serão utilizadas as casas pretas do tabuleiro.
- As peças de maior grau são colocadas nas casas de bordo do tabuleiro.

O último ponto se justifica pela observação feita na seção 2.1 sobre a diferença de valor das posições das peças.

Figura 3: Tabuleiro Jogo Polidamas



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Na figura 3, é possível ver a distribuição das peças no Jogo Polidamas.

Objetivo:

O objetivo é conseguir tomar as peças do adversário para montar o seu polinômio de tomadas, somando os monômios das peças tomadas. Ganha o jogador que ao final do jogo conseguir montar o polinômio com o maior número de termos.

Regras

As regras de tomada de peças são as mesmas do Jogo de Damas brasileiro (como indicado na tabela 1), assim como a de movimentação das peças e a formação de (poli)damas. Porém são necessárias algumas regras adicionais.

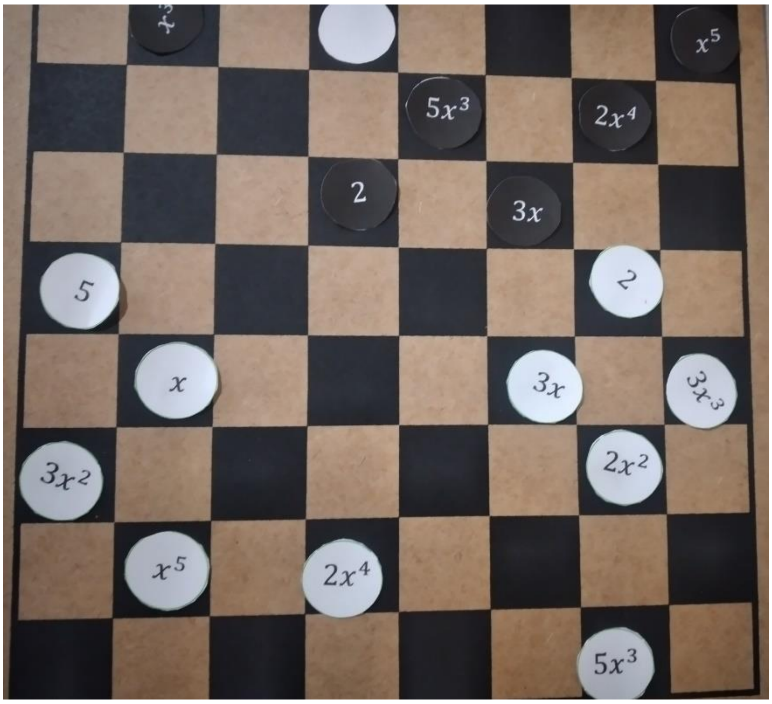
1. Cada pedra é um monômio e cada jogador inicia com um polinômio de tomadas nulo.
2. As pedras possuem graus e coeficientes diferentes.
3. Cada vez que o jogador tomar a pedra do adversário, ele soma o monômio da pedra a seu polinômio de tomadas.
4. Para formar a polidama, o jogador retoma uma pedra já tomada pelo adversário, a sua escolha, e coloca sobre a pedra promovida a polidama.
5. A polidama agora será um binômio formado pela soma da pedra original do jogador e da pedra retomada do adversário, subtraindo o monômio correspondente do polinômio de tomadas do adversário.

6. Se ao formar a polidama o adversário não tiver tomado nenhuma peça, o jogador vira sua pedra sem alterar o monômio da pedra original.
7. O jogo possui um limite de tempo definido pelos jogadores.
8. Ganha quem tiver o polinômio com maior quantidade de termos.
9. Em caso de empate, ganha quem tiver o polinômio de tomadas de maior grau.

As figuras 4 e 5 representam o jogo em andamento. Na figura 4 é possível perceber que o jogo flui sem travar as peças. Além disso é possível perceber que as peças de maior grau são mais difíceis de serem tomadas, uma vez que estão nas bordas do tabuleiro.

A figura 5 retrata o polinômio tomado já em separação de termos. É interessante perceber que apesar de possuir muitas peças, ao somá-las temos uma quantidade menor de termos.

Figura 4: Jogo Polidamas em andamento



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Figura 5: Polinômio formado pelas peças tomadas já dividido em termos

Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Tentativas

A princípio foram pensadas outras regras para o jogo:

- Cada jogador começa inicialmente com o polinômio $1 + x + x^2 + \cdots + x^7$ ou de grau menor.
- Cada peça tem uma marca que representa o grau de um monômio e a posição inicial segue a ordem do grau pelas colunas do tabuleiro.
- Os movimentos iniciais seguem a regra do Jogo de Damas - isso não modifica o monômio, apenas a posição no tabuleiro.
- O objetivo é tomar as peças do adversário. o movimento de tomada só pode ser feito com peças de mesmo grau.
- Uma peça atinge a última linha do tabuleiro, ela é promovida a dama. ela segue as mesas regras de movimentação da dama.
- Para formar a dama, o jogador toma para si uma peça q foi tomada pelo adversário, de qualquer grau. A dama então passa a ser o binômio formado por essas duas peças.
- Dama toma peão: a dama só pode tomar peças dentre os dois monômios que a formam.
- Dama toma dama: ela retira a peça de mesmo grau e a dama do adversário volta a ser peão
- Peão toma dama: ele retira a peça de mesmo grau e a dama do adversário volta a ser peão.

Com isso surgiram alguns questionamentos, como por exemplo se a peça poderia comer para trás, ou se o jogo fluiria com essas regras.

Foram realizados estudos piloto com alunos do 8° ano do Ensino Fundamental. Logo de início, foi verificado que o jogo não iria fluir: as pedras tinham até grau 7, porém como só poderiam comer as pedras de mesmo grau, o adversário conseguia defender as peças e logo o jogo travava.

Então o grau foi diminuindo até o grau 2 e, apesar de conseguir realizar alguns movimentos, ainda assim era possível criar esses mecanismos de defesa que faziam com que o jogo parasse antes do desejado.

Outro ponto é que o intuito do jogo era incluir operações de soma e subtração, o que não ocorreria, já que a vitória se dava apenas pela tomada da maior quantidade de peças.

Algumas outras opções foram testadas, como por exemplo, o jogador a cada tomada realizar uma operação com as peças, ou a dama representar uma multiplicação que mudaria todo seu polinômio, mas isso fazia com que o jogo além de não fluir se tornasse tedioso e confuso.

Antes do jogo final, também foi pensado em seguir as regras normais do Jogo de Damas e ao fim o polinômio formado ser utilizado em outras aulas futuras pelos alunos. Isso poderia acarretar dois grandes problemas: o aluno não querer ganhar (pois assim seu polinômio seria menor e mais fácil de manipular depois) e o Jogo de Damas ser apenas um jogo sem um intuito educativo e matemático por trás como descrito por PIAGET (1967) e GRANDO (2000).

Com isso, depois dos testes, foi pensado em seguir as regras descritas no início do capítulo, fazendo com que o jogador precise saber conceitos já ensinados e, além disso realize operações de soma e subtração, a fim de determinar a quantidade de termos do seu polinômio.

Com as novas regras, foi realizado um outro teste com um aluno de 8° ano do Ensino Fundamental, e nesse teste o jogo fluiu bem, fazendo com que além de divertido fosse revisto conceitos e operações polinomiais, de uma maneira diferente do habitual.

Para trabalhos futuros idealizamos criar uma versão que utilize de outras operações e conceitos sobre polinômios.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática (SD) consiste em uma técnica educacional voltada para melhorar a aprendizagem dos alunos, através de etapas que possuem um objetivo comum. O professor define as atividades e suas ordens de aplicação, de forma que se tenha uma estrutura clara e pertinente ao conteúdo pré-estabelecido.

De acordo com Araújo (2013), de modo simples e numa resposta direta, sequência didática é um modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentais.

Para a construção de uma SD é de suma importância que o professor planeje meticulosamente suas etapas de forma que a torne motivadora e ao mesmo tempo proveitosa para os alunos.

Outro ponto importante é que a sequência didática seja conhecida do início ao fim pelo professor e pelos alunos, assim como afirma Zabala (1998, p. 18) “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

O aluno precisa se inteirar da sequência e pode até mesmo dar sua opinião sobre mudanças a serem feitas a fim de tornar a SD mais atrativa e pertinente as suas realidades.

Ainda para Zabala (1998, p.18), a SD “têm a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação.”.

O planejamento é a etapa de preparação, que inclui a elaboração de conceitos, a estruturação da SD e a utilização de metodologias diversificadas. É uma etapa que pode ser levada aos alunos para darem ideias e opiniões.

A aplicação é a etapa de colocar a SD em prática, seguindo seus passos e fazendo reajustes necessários. É nessa etapa que se verifica se a SD está de acordo com a realidade da sala de aula.

A última etapa é a avaliação, que serve para verificar se a sequência didática foi suficiente para abordar os conteúdos propostos, fazendo as devidas alterações a partir dos dados analisados.

Nossa sequência didática consiste em 4 etapas, intercalando aulas teóricas e aulas de apresentação dos jogos. Na aula 1, apresentamos a sequência didática que será estudada e em seguida o Jogo de Damas brasileiro, em que os alunos aprenderão as regras jogando partidas. Nesse momento será destacado o paralelo entre as regras do jogo para a obtenção do resultado e a aplicação correta das manipulações algébricas em expressões.

Na aula 2, apresentamos os conceitos básicos de polinômios, assim como a adição e multiplicação, o professor pode seguir o material disponível ou outro de seu interesse que aborde o assunto. Para melhor distribuição do conteúdo, essa aula será abordada em cinco horários (de 50 minutos cada).

A aula 3 aborda o Jogo Polidamas propondo suas regras utilizando os conceitos de adição polinomial. O aluno irá participar de partidas, com isso praticando as operações e guardando o resultado do seu jogo - um polinômio que será utilizado nas atividades seguintes.

Na última aula, serão expostos dispositivos práticos que irão auxiliar na realização da adição e multiplicação dos polinômios. Também nessa aula será aplicado uma atividade avaliativa abordando todo o conteúdo estudado.

6.1 Sequência didática para o ensino de polinômios através do jogo de damas

Área do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
Disciplina: Matemática
Série: 8° ano do ensino fundamental
Nº de aulas: 9 aulas
Conteúdos abordados: Polinômios
Tema: Operações com polinômios.
Conhecimentos prévios:

Realizar operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão.).

Saber identificar monômios, binômios, trinômios e polinômios.

Justificativa:

Os polinômios são bastantes utilizados na Matemática e aparecem em suas aplicações básicas. Servem para equacionar grandezas de diversas áreas do conhecimento, descrever objetos geométricos como curvas, entre outros. Em particular, auxilia na análise de diversos dados, como na área de economia, lançamento de projéteis, na indústria e modelagem de situações.

Compreender os polinômios e suas operações é essencial para conseguir fazer aplicações no cotidiano, até mesmo em situações mais simples - como por exemplo, o clima e o gasto em compras - mesmo que seja utilizado sem a percepção instantânea de sua aplicação.

Competências matemáticas na BNCC:

- Competência geral 2: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

- Competência geral 4: Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

- Competência específica de Matemática 3: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Habilidades:

- EF07MA13 Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
- EF08MA06: Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Objetivos:

- ❖ Desenvolver o raciocínio lógico e o desenvolvimento de estratégias.
- ❖ Saber identificar o grau, coeficientes e termos de um polinômio.
- ❖ Conseguir realizar operações com polinômios de diferentes graus e em diferentes situações.

Recursos:

Jogo de Damas, Jogo Polidamas, quadro branco e canetas para quadro, material didático disponível, regras e atividades impressas.

Avaliação:

Será feita ao longo dos jogos e através de exercícios feitos no término das aulas.

A seguir temos as 4 etapas detalhadas para o professor seguir. É de suma importância que o professor adeque a aula com a realidade de cada turma, fazendo alterações de conteúdo, quantidade de aulas necessárias e usando outros materiais didáticos.

ETAPA 1

Atividade: Apresentação da proposta e do Jogo de Damas, regras e jogo.

Público-alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental que possuem os conhecimentos prévios exigidos.

Conteúdo abordado: Regras e Jogo de Damas.

Quantidade de aulas/horas: 1 aula de 50 minutos.

Execução: O professor deve informar aos alunos como será realizada a sequência didática. Em seguida deverá ser distribuído as regras do Jogo de Damas.

Os alunos serão separados em duplas e cada dupla irá jogar segundo as regras do Jogo de Damas.

Durante os jogos sugere-se que o professor pergunte as estratégias que os alunos estão utilizando e anotar no quadro.

Ao fim dos jogos, serão discutidas as regras e estratégias utilizadas e como isso tem relação com a Álgebra.

O professor expõe a relação das regras do Jogo de Damas com as regras para manipular expressões algébricas de forma que seguindo o que foi proposto sempre se chegará em um bom resultado.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA ATIVIDADE

- **Conteúdo:**

  Apresentação da sequência didática; (10 minutos)

  Regras do Jogo de Damas; (10 minutos)

  Jogos entre os alunos; (15 minutos)

  Discussão sobre as regras, estratégias e paralelo com a Álgebra. (15 minutos)

- **Busca de soluções:**

  Os alunos irão jogar e buscar estratégias de como ganhar do adversário, sempre seguindo as regras.

- **Avaliação:**

  O professor irá avaliar os alunos ao longo do processo, ouvindo as estratégias e analisando as participações.

- **Apresentação do conteúdo:**

O Jogo de Damas

Regras segundo Federação Mundial de Jogo de Damas

1. Objetivo: imobilizar ou capturar todas as peças do adversário.
2. O Jogo de Damas é praticado em um tabuleiro de 64 casas ou de 100 casas, claras e escuras.
3. A grande diagonal (escura), deve ficar sempre à esquerda de cada jogador.
4. O lance inicial cabe sempre ao jogador que estiver com as peças claras.
5. A pedra anda só para frente, uma casa de cada vez.
6. Quando a pedra atinge a última linha do tabuleiro, concluindo o lance nas casas de coroação, ela é promovida à Dama.
7. A Dama é uma peça de movimentos mais amplos.
8. A Dama anda para frente e para trás, quantas casas quiser.
9. A captura é obrigatória. Não existe sopro. Duas ou mais peças juntas, na mesma diagonal não podem ser capturadas.
10. A pedra captura a Dama e a Dama captura a pedra. Pedra e Dama têm o mesmo valor para capturarem ou serem capturadas.
11. A pedra e a Dama podem capturar, tanto para frente, como para trás, uma ou mais peças.
12. Se no mesmo lance se apresentar mais de uma possibilidade de capturar peças, é obrigatório executar o lance que capture o maior número de peças (Lei da Maioria).
13. A pedra que durante o lance de captura de várias peças, apenas passe por qualquer casa de coroação, sem aí parar, não será promovida a Dama.
14. Na execução do lance de captura, é permitido passar mais de uma vez pela mesma casa vazia.
15. Na execução do lance de captura, não é permitido capturar a mesma peça mais de uma vez e as peças capturadas não podem ser retiradas do tabuleiro antes de completar o lance de captura.
16. Empate – 64 casas - Após 20 (vinte) lances sucessivos de Damas de cada jogador, sem captura ou deslocamento de pedra, a partida é declarada empatada. 100 casas - Após 25 (vinte e cinco) lances sucessivos de Damas de cada jogador, sem captura ou deslocamento de pedra, a partida é declarada empatada.
17. A dama no último movimento de captura pode parar em qualquer casa livre na diagonal em que está capturando. A dama não é obrigada a parar na casa seguinte após a última peça capturada.

18. Finais de: 2 damas contra 2 damas; 2 damas contra uma; 2 damas contra uma dama e uma pedra; uma dama contra uma dama e uma dama contra uma dama e uma pedra, são declarados empatados após 5 lances de cada jogador.

ETAPA 2

Atividade: Explicação sobre grau, coeficientes, termos, adição, subtração e multiplicação de polinômios.

Público-alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental que possuem os conhecimentos prévios exigidos.

Conteúdo abordado: Polinômios e suas operações.

Quantidade de aulas/horas: 5 aulas de 50 minutos.

Execução: Nessa aula o professor irá explicar o que é grau, coeficientes, termos e ensinará a realizar a adição, subtração e multiplicação de polinômios.

No final, serão passados aos alunos alguns exercícios para praticarem essas operações.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA ATIVIDADE

- **Conteúdo:**

  O conteúdo abaixo é uma sugestão, o professor pode utilizar o capítulo teórico dessa dissertação ou outro material que se adeque a turma.

  Grau, coeficientes e termos de polinômios. (50 minutos)

  Soma de polinômios e exemplos; (50 minutos)

  Subtração de polinômios e exemplos; (50 minutos)

  Multiplicação de polinômios e exemplos; (50 minutos)

  Exercícios. (50 minutos)

  Dúvidas. (ao longo da aula)

- **Busca de soluções:**

  Nessa etapa, os alunos devem retirar suas dúvidas e expor suas opiniões sobre o assunto, acrescentando com os conhecimentos prévios que possuem.

- **Avaliação:**

  O professor irá avaliar os alunos ao longo do processo, ouvindo as estratégias e analisando as participações, além de corrigir os exercícios propostos.

- **Apresentação do conteúdo:**

  Coeficiente, parte literal e termo

Um monômio pode ser separado em coeficiente e parte literal. O *coeficiente* é o número e a *parte literal* é a variável ou um produto de variáveis. Os monômios que possuem a mesma parte literal são chamados monômios semelhantes.

Cada conjunto de coeficientes com suas partes literais quando separados pela adição ou subtração são chamados de *termos*.

Exemplos:

$f(x) = 21xy$, 21 é o coeficiente, xy é a parte literal e $21xy$ é o termo.

$g(x) = -5x^2$, -5 é o coeficiente, x^2 é a parte literal e $-5x^2$ é o termo.

$h(x) = 3x^2$, 3 é o coeficiente, x^2 é a parte literal e $3x^2$ é o termo.

Os monômios $g(x)$ e $h(x)$ são monômios semelhantes.

Nos polinômios se tem vários coeficientes e várias partes literais, logo se tem vários termos.

Exemplo:

$f(x) = 3x^2 + 5x - 4$, $3, 5$ e -4 são os coeficientes, x^2 e x são as partes literais e, $3x^2, 5x, -4$ são os termos. Assim esse polinômio possui 3 termos diferentes.

Grau

O grau de um monômio de coeficientes não nulos é dado pela soma dos expoentes da parte literal. Quando o monômio é apenas um número não nulo, seu grau é zero.

Exemplos:

$f(x) = 3x^5y$, grau: $5 + 1 = 6$

$g(x) = 23x$, grau: 1

$h(x) = -5$, grau: 0

Já o grau de um polinômio de coeficientes não nulos corresponde ao do termo de maior grau. Não se define o grau do polinômio nulo.

Exemplos:

$f(x) = 3x^5y + 8x^{10} - 15y^{15}$, possui graus 6,10 e 15 logo o grau do polinômio é 15.

$g(x) = 23x - 10x^6 + 2xyz^5$, possui graus: 1,6 e 7, logo o grau do polinômio é 7.

Adição de polinômios

Para adicionarmos dois polinômios, organizamos os termos com a mesma parte literal lado a lado e somamos os coeficientes.

Exemplos:

Dados $f(x) = 5 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 + 6x^5$ e $g(x) = -2 + 3x - 4x^2 + 5x^3 - x^4 + 14x^5$:

$f(x)+g(x) = \big(5+(-2)\big)+(0+3)x+\big(2+(-4)\big)x^2+\big((-3)+5\big)x^3+\big(1+(-1)\big)x^4+(6+14)x^5 \ = 3+3x-2x^2+2x^3+20x^5$.

Dados $f(x)=\frac{1}{2} - 3x^2+x^3+8x^4$ e $g(x)=\frac{2}{3}+x^2-x^4+14x^5$:

$f(x)+g(x) = \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\big((-3)+1\big)x^2+(1+0)x^3+\big(8+(-1)\big)x^4+(0+14)x^5 = \frac{7}{6}-2x^2+x^3+7x^4+14x^5$.

Polinômio oposto

Ao adicionar um polinômio a outro e obter como resultado o polinômio nulo, dizemos que esses polinômios são opostos.

Exemplo:

- Dado $f(x)=5x^2+3x-5$ tem como oposto: $g(x)=-(5x^2+3x-5)=-5x^2-3x+5$

Quando somamos $f(x)+g(x)=(5x^2+3x-5)+(-5x^2-3x+5)=5x^2-5x^2+3x-3x-5+5=(5-5)x^2+(3-3)x+(-5+5)=0x^2+0x-0$ ou seja, um polinômio nulo.

Subtração de polinômios

Para subtrairmos dois polinômios, basta adicionar o 1° polinômio com o oposto do 2° polinômio.

Exemplos:

- Dados $f(x)=3x+7$ e $g(x)=-5x+2$ temos:

$f(x)-g(x)=(3x+7)-(-5x+2)=(3x+7)+(5x-2)=(3+5)x+(7-2)=8x+5$.

- Dados $f(x)=2x^2-x+4$ e $g(x)=3x^2-x+2$ temos:

$f(x)-g(x)=(2x^2-x+4)-(3x^2-x+2)=(2x^2-x+4)+(-3x^2+x-2)=(2-3)x^2+(-1+1)x+(4-2)=-x^2+0x+2=-x^2+2$.

Multiplicação de polinômios

Para multiplicar dois polinômios, usaremos a propriedade distributiva da multiplicação. Iremos multiplicar cada termo de um deles por todos os termos do outro e adicionaremos os resultados obtidos.

Nas multiplicações que envolvem mais de dois polinômios, devemos calcular o produto dos dois primeiros e depois multiplicar o resultado obtido pelo terceiro, e assim por diante.

Exemplos:

- Dados: $f(x) = 3a$ e $g(x) = 3b^2 - a + 5$ temos:

$f(x) \cdot g(x) = 3a \ \cdot (3b^2 - a + 5) = 3a \cdot 3b^2 + 3a \cdot (-a) + 3a \cdot 5 = 9ab^2 - 3a^2 + 15a$.

- Dados: $f(x) = (3a + 4)$ e $g(x) = 3b^2 - a + 5$ temos:

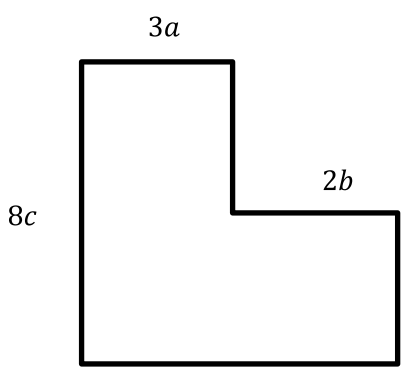
$f(x) \cdot g(x) = (3a + 4) \cdot (3b^2 - a + 5) = (3a + 4) \cdot 3b^2 + (3a + 4) \cdot (-a) + (3a + 4) \cdot 5 = 9ab^2 + 12b^2 - 3a^2 - 4a + 15a + 20 = 9ab^2 + 12b^2 - 3a^2 + 11a + 20$.

- Dados: $f(x) = y + 1$, $g(x) = y + 3$ e $h(x) = 2y + 1$ temos:

$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = [(y + 1) \cdot (y + 3)] \cdot (2y + 1) = (y^2 + 4y + 3) \cdot (2y + 1) = 2y^3 + 9y^2 + 10y + 3$.

Exercícios

1) Separe os polinômios em coeficientes, parte literal, termos e defina seu grau:
   a) $4x^2 + 5y + 7$
   b) $-6xy^5 + 8x^{10} - 61x$
   c) $2a^5b^4 + 12ab - 2a^5b^4c + 2c^{11}$
   d) $f^3 + 5g^4 - 12f^1g^4 + 3$
2) Dados $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 5$, $g(x) = -5x^3 + 4x - 10$ e $h(x) = 4x^4 - 5x^3 + x^2 - 5$, faça o que se pede:
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) + g(x) + h(x)$
   c) $g(x) - f(x)$
   d) $h(x) - h(x)$
   e) $f(x) \cdot g(x)$
   f) $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$
3) Um quadrado possui lado igual a 5x, determine seu perímetro e sua área.
4) Dada a figura abaixo:
   a) Calcule seu perímetro:



b) Sendo $a = 2, b = 3$ e $c = 1{,}5$, qual o valor do seu perímetro?

5) Fabiano foi ao mercado e comprou 3 pacotes de arroz e 5 quilos de laranjas.

a) Escreva uma expressão que represente o valor gasto por ele.

b) Se o arroz custava R$18,50 e a laranja R$ 2,30 o quilo, quanto ele gastou ao todo?

6) Calcule a área do retângulo abaixo:

$3d + e$

5e-16

ETAPA 3

Atividade: Jogo Polidamas

Público-alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental que possuem os conhecimentos prévios exigidos.

Conteúdo abordado: Grau, coeficientes e termos de um polinômio, soma e subtração de polinômios.

Quantidade de aulas/horas: 1 aula de 50 minutos.

Execução: Os alunos devem se sentar em duplas e jogar o jogo seguindo as regras.

O professor deve mediar os jogos, fazendo questionamentos e analisando as operações realizadas pelos alunos.

É importante lembrar o aluno que, como em todo jogo, ele tem regras próprias que foram adaptadas do Jogo de Damas.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA ATIVIDADE

- **Conteúdo:**
  Regras do jogo Polidamas; (15 minutos)
  Jogo Polidamas; (25 minutos)
  Discussão sobre o jogo, suas regras e os polinômios. (10 minutos)
- **Busca de soluções:**
  Nessa etapa, os alunos devem praticar o jogo, realizando as operações que aparecerem de acordo com o que aprenderam na aula 2.
- **Avaliação:**
  O professor irá avaliar os alunos ao longo do processo, ouvindo as estratégias e analisando as participações, além de observar as operações que os alunos estão realizando.
- **Apresentação do conteúdo:**

Jogo Polidamas

O jogo Polidamas é uma junção do Jogo de Damas com o ensino de polinômios. A ideia principal do jogo é utilizar de alguns conhecimentos e regras do Jogo de Damas, ao mesmo tempo que se ensina sobre polinômios. Em particular, nessa versão do jogo, trabalhamos com a soma e a subtração de polinômios.

REGRAS

O jogo é composto por:

- 1 tabuleiro 8 x 8
- 24 peças (12 brancas e 12 pretas).
- Cada peça possui uma identificação por um monômio que são: 2, 5, x, 3x, x^2, $2x^2$, $3x^2$, x^3, $3x^3$,$5x^3$, $2x^4$, x^5 (tanto para as brancas quanto para as pretas).

Nomenclatura:

- As *peças* são iniciadas como *pedras*, como no Jogo de Damas.
- Assim como no Jogo de Damas, as pedras podem ser promovidas a um novo tipo de peça que será chamado *polidama* – o equivalente à dama do jogo tradicional.
- Cada jogador possui um *polinômio de tomadas*, que é atualizado a cada tomada de peça que o jogador realiza.

Posicionamento das peças:

- As peças são colocadas de maneira que as brancas e as pretas estejam na mesma posição uma das outras.
- As peças são colocadas nas casa pretas do tabuleiro.
- As peças de maior grau são colocadas nas casas de bordo do tabuleiro.

Objetivo:

O objetivo é conseguir tomar as peças do adversário para montar o seu polinômio de tomadas, somando os monômios das peças tomadas. Ganha o jogador que ao final do jogo conseguir montar o polinômio com o maior número de termos.

Regras

As regras de tomada de peças são as mesmas do Jogo de Damas brasileiro, assim como a de movimentação das peças e a formação de (poli)damas. Porém são necessárias algumas regras adicionais.

10. Cada pedra é um monômio e cada jogador inicia com um polinômio de tomadas nulo.
11. As pedras possuem graus e coeficientes diferentes.
12. Cada vez que o jogador tomar a pedra do adversário, ele soma o monômio da pedra a seu polinômio de tomadas.
13. Para formar a polidama, o jogador retoma uma pedra já tomada pelo adversário, a sua escolha, e coloca sobre a pedra promovida a polidama.

14. A polidama agora será um binômio formado pela soma da pedra original do jogador e da pedra retomada do adversário, subtraindo o monômio correspondente do polinômio de tomadas do adversário.

15. Se ao formar a polidama o adversário não tiver tomado nenhuma peça, o jogador vira sua pedra sem alterar o monômio da pedra original.

16. O jogo possui um limite de tempo definido pelos jogadores.

17. Ganha quem tiver o polinômio com maior quantidade de termos.

18. Em caso de empate, ganha quem tiver o polinômio de tomadas de maior grau.

ETAPA 4

Atividade: Explicação de algoritmos da soma e multiplicação de polinômios.

Público-alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental que possuem os conhecimentos prévios exigidos.

Conteúdo abordado: Adição e multiplicação de polinômios.

Quantidade de aulas/horas: 2 aulas de 50 minutos.

Execução: Nessa aula, o professor irá mostrar alguns dispositivos práticos da soma e multiplicação que serão utilizados para facilitar as operações.

Após isso será repassado aos alunos uma lista de exercícios que abranja toda a matéria da sequência didática proposta.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA ATIVIDADE

- **Conteúdo:**
  Algoritmos da soma e multiplicação de polinômios. (50 minutos)
  Atividade Avaliativa ,(50 minutos)
- **Busca de soluções:**
  Nessa etapa os alunos devem retirar suas dúvidas e expor suas opiniões sobre o assunto, acrescentando com os conhecimentos prévios que possuem.
- **Avaliação:**
  O professor irá avaliar os alunos ao longo do processo, ouvindo as estratégias e analisando as participações, além de corrigir a lista avaliativa proposta.
- **Apresentação do conteúdo:**

Dispositivos práticos

Iremos apresentar dispositivos para o cálculo da adição e multiplicação de polinômios utilizando tabelas.

Adição

Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$, para obter a soma $f(x) + g(x)$ primeiramente ordenamos os polinômios em ordem decrescente do grau.

Cada polinômio ocupará uma linha da tabela de modo que os monômios de mesmo grau ocupem uma mesma coluna. Explicitaremos o coeficiente nulo para os monômios omitidos.

Em seguida, realizamos a soma dos coeficientes em uma mesma coluna, para cada coluna.

Inserimos o resultado em uma nova linha, respeitando o grau em cada coluna.

A soma será o polinômio obtido na última linha.

EXEMPLO:

Vamos adicionar os polinômios $\mathrm{f(x)} = 6\mathrm{x}^5 + \mathrm{x}^4 - 3\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 + 5$ e $\mathrm{g(x)} = 14\mathrm{x}^5 - \mathrm{x}^4 + 5\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 2$:

$f(x)$	$6x^5$	x^4	$-3x^3$	$2x^2$	$0x$	5
$g(x)$	$14x^5$	$-x^4$	$5x^3$	$-4x^2$	$3x$	-2
$f(x) + g(x)$	$20x^5$	$0x^4$	$2x^3$	$-2x^2$	$3x$	3

Assim temos $f(x) + g(x) = 3 + 3x - 2x^2 + 2x^3 + 20x^5$.

Observação: observe que o mesmo dispositivo pode ser usado para somar quantos polinômios forem necessários.

Multiplicação

Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$, para obter o produto $f(x) \cdot g(x)$, primeiramente ordenaremos os polinômios na ordem decrescente de grau.

O primeiro polinômio ocupará o cabeçalho das colunas (horizontal) e o segundo polinômio ocupará o cabeçalho das linhas (vertical). Explicitaremos o coeficiente nulo para os monômios omitidos.

Cada célula da tabela será o resultado do produto dos monômios dos cabeçalhos de coluna e linha correspondentes. O produto será a soma dos monômios de cada célula da tabela.

Observe que nas diagonais da direita para a esquerda, todas as células possuem monômios de mesmo grau.

EXEMPLO

Vamos multiplicar os polinômios: $f(x) = -2 + 3x^2 - 4x^3 + x^4$ e $g(x) = -2x^2 + 2x^3 - 4x^5$:

*	-2	$0x$	$3x^2$	$-4x^3$	x^4
0	0	$0x$	$0x^2$	$0x^3$	$0x^4$
$0x$	$0x$	$0x^2$	$0x^3$	$0x^4$	$0x^5$
$-2x^2$	$4x^2$	$0x^3$	$-6x^4$	$8x^5$	$-2x^6$
$2x^3$	$-4x^3$	$0x^4$	$6x^5$	$-8x^6$	$2x^7$
$0x^4$	$0x^4$	$0x^5$	$0x^6$	$0x^7$	$0x^8$
$-4x^5$	$-8x^5$	$0x^6$	$-12x^7$	$16x^8$	$-4x^9$

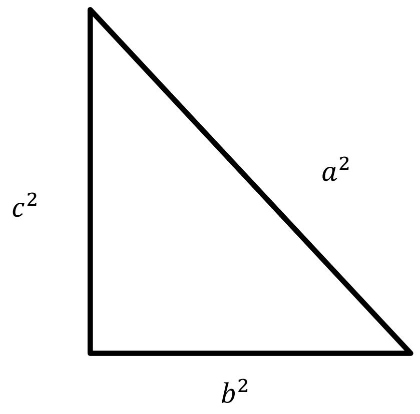
Assim temos $f(x) \cdot g(x) = 4x^2 - 4x^3 - 6x^4 + 22x^5 - 10x^6 - 10x^7 + 16x^8 - 4x^9$.

ATIVIDADE AVALIATIVA

1) Qual a relação do Jogo de Damas com o ensino de polinômios?
2) Determine o grau dos monômios e polinômios a seguir:
   a) x^5
   b) $-7x^2yz^5$
   c) $p^5 + 8r^2$
   d) $-a^4 + b + c^{-8}$
   e) $fg - 5f^3g^4 + f^6g$
3) Separe os monômios em coeficiente e parte literal:
   a) $2x$
   b) $3d^4$
   c) $-8abc$
   d) $\frac{y}{3}$
   e) $\frac{-f^3g}{9}$
4) Defina o que são termos de um polinômio e dê exemplos.
5) Sabendo que $A = f^2 - 2f + 9$, $B = -3f^3 + 12$, $C = 2f^4 + 3f - 7$ e $D = 5f^4 - f^3 + 8f^2 - 1$, calcule:
   a) $A + B$
   b) $A + B + C - D$
   c) $B - 3C + D$
   d) $D - A$
   e) $-AB$
   f) $CD - AB$
   g) $ABC - 5D$
6) O que o jogo Polidamas te ensinou sobre os polinômios?
7) Qual foi o seu Polinômio conseguido no Jogo Polidamas?
8) Qual o maior polinômio que pode ser formado? E o maior grau possível?
9) Some o seu polinômio do Jogo Polidamas com o polinômio $-3x^2 + 5x - 9$ através do dispositivo da soma ensinado em aula.
10) Utilizando os dispositivos ensinados em aula, realize as operações:
   a) $(a^4 + 6a^3 - 5a^2 + 1) + (a^3 - 2a^2 + 3) =$

b) $(x^3 - x^2 + 4x + 9) \cdot (x^2 - 3x + 2) =$

11) a) Calcule o perímetro e área da figura abaixo:



b) Se $a = 5$ e $b = 3$, qual o valor de c ?

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como visto nessa dissertação, a utilização de jogos no ensino da Matemática pode ser de grande ajuda para dinamizar as aulas. Um jogo bem estruturado que inclua a Matemática favorece o entendimento por parte dos alunos e desperta o interesse e o raciocínio lógico. Fazer a comparação das regras do jogo com as regras da Álgebra propicia ao aluno uma maior compreensão sobre os polinômios.

Com isso em mente, o jogo Polidamas traz a junção do clássico Jogo de Damas com o estudo de polinômios, fazendo os paralelos das regras algébricas e as regras do jogo. O Polidamas retoma conceitos e operações polinomiais e faz com que os alunos pratiquem de forma direta.

Além do Polidamas, a Sequência Didática apresentada traz todo o estudo básico de polinômios para os alunos do Ensino Fundamental, sendo útil para os professores utilizarem e adaptarem as suas realidades. Para fins de testagem, a Sequência didática foi aplicada em uma turma de 8° ano. Ao longo dessa aplicação, precisou ser modificada a quantidade de aulas de 5 para 9, devido ao extenso conteúdo e dúvidas dos alunos. As atividades de revisão também foram modificadas, trazendo agora exercícios que envolvem geometria. Apesar das modificações realizadas, foi obtido sucesso na sequência didática, realizando o papel esperado no ensino de polinômios.

Então o presente trabalho tem o potencial para contribuir com ensino de álgebra na educação básica de forma lúdica e divertida para os alunos. Espera-se que esse trabalho seja fonte de estudo e contribua como apoio para professores da educação básica.

Tendo em vista o gosto por jogos matemáticos, para futuros trabalhos pretendo dar continuidade ao Polidamas, trazendo outras operações para o jogo. Também é de meu interesse criar uma cartilha com o jogo e a Sequência Didática e levá-la ao acesso de outros professores.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Denise Lino de. **O que é (e como faz) sequência didática? Entre palavras.** Fortaleza, v. 3, n. 1, p. 322-334, jan.-jul. 2013.

BAKUMENKO, W. **Jogo de damas.** Rio de Janeiro, RJ: Ediouro S. A., 1979

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em:< http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 30 de novembro de 2023.

CBD. **Regras Oficiais do Jogo de damas.** São Paulo. 2019

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996. 121p. e representação. 3 ed. Rio de janeiro: Ática,1978

FALKEMBACH, Gilse A. Morgental. **O Lúdico e os Jogos Educacionais**. Disponível em: http://penta3.ufrgs.br/midiasedu/modulo13/etapa1/leituras/arquivos/Leitura_1.pdf . Campinas: Papirus, 2004. Acesso em 23 de setembro de 2022.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese [Doutorado em Educação]. Universidade Estadual de Campinas: Campinas/SP, 2000.

GRANDO, R.C. **O jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino Aprendizagem na Matemática.** 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

GUIMARÃES, S.E.R. **Motivação intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula. In: A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea**. E. Boruchovitch & J.A. Bzuneck (Orgs.). Editora Vozes, Petrópolis, 2ª Edição, p. 37-57, 2002.

LARA, Isabel Cristina Machado. **Jogando com a matemática.** São Paulo: Rêspel, 2005. p.13-30.cap. 1-2.

PETTY, A. L. S**. Ensaio sobre o Valor Pedagógico dos Jogos de Regras: uma perspectiva construtivista.** Dissertação (Mestrado em Psicologia). Instituto de Psicologia, USP, 1995. 133p.

PIAGET, J. **Para onde vai a Educação?** 3. ed. Tradução Ivette Braga. Rio de Janeiro: José Olympio. 1975. 80p

PIAGET, J.A. **A Formação do Símbolo na criança: imitações, jogo e sonho, imagem e representação.** Rio de Janeiro, LTC (original 1964).

POE, Edgar Allan. **Assassinatos na Rua Morgue e outras histórias.** Tradução de
SILVA, Mônica Soltau da. **Clube de matemática: Jogos educativos**. Série atividades.
social da mente. Martins Fontes. São Paulo, 1989

ZABALA, A. **A Prática Educativa: Como educar**. Porto Alegre, 1998.

BIBLIOGRAFIA

DAMAS, Ciências. **Mega Base Aurora - Projetos**. Disponível em: http://damasciencias.com.br/mega-base-aurora/projetos/ . Acesso em: 15 outubro de 2022.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro. Projeto Euclides,2017.

HEFEZ, Abramo e VILELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e equações algébricas.** SMB, 2012.

PIAGET, J. et al. Fazer e Compreender. São Paulo: Melhoramentos/EDUSP, 1978.

SUCUPIRA, Lara da Silva. **Uma sequência didática nas aulas de matemática: frações** Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/431257/2/produto_IARA.pdf Acesso em: 16 jan. 2023.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências.** Tradução de Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010. 197 p.