



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Elaine Cristina da Cruz Jorge de Assis

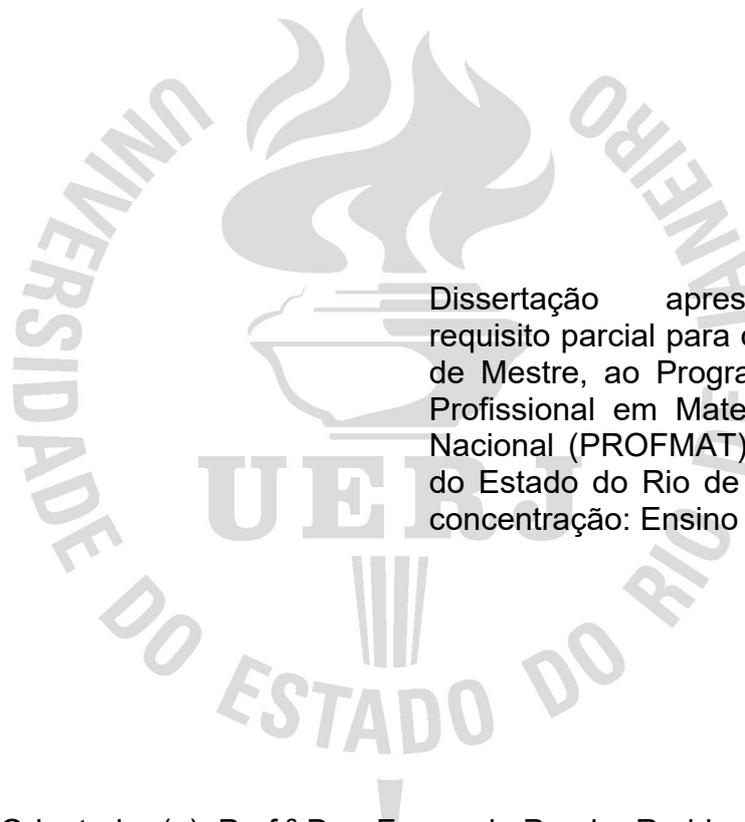
**A monitoria como trabalho colaborativo: uma experiência no
contexto de uma escola pública no pós-pandemia**

São Gonçalo

2023

Elaine Cristina da Cruz Jorge de Assis

A monitoria como trabalho colaborativo: uma experiência no contexto de uma escola pública no pós-pandemia



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador (a): Prof.^a Dra. Fernanda Pereira Rodrigues

Coorientador (a): Prof.^a Dra. Priscila Cardoso Petito

São Gonçalo

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

A848 TESE	<p>Assis, Elaine Cristina da Cruz Jorge de A monitoria como trabalho colaborativo: uma experiência no contexto de uma escola pública no pós-pandemia/ Elaine Cristina da Cruz Jorge de Assis. – 2023. 120f. : il.</p> <p>Orientadora: Prof.^a Dra. Fernanda Pereira Rodrigues. Coorientadora: Prof.^a Dra. Priscila Cardoso Petito. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.</p> <p>1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Ensino médio – Rio de Janeiro (Estado) – Teses. 3. Aprendizagem – Metodologia – Teses I. Rodrigues, Fernanda Pereira. II. Petito, Priscila Cardoso. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.</p> <p>CRB7 – 6993 CDU 371.3:51</p>
--------------	--

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Elaine Cristina da Cruz Jorge de Assis

A monitoria como trabalho colaborativo: uma experiência no contexto de uma escola pública no pós-pandemia

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 19 de setembro de 2023.

Banca examinadora:

Prof.^a Dra. Fernanda Pereira Rodrigues (Orientadora)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof.^a Dra. Priscila Cardoso Petito (Coorientadora)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof.^a Dra. Marcele Câmara de Souza
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

São Gonçalo

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus alunos.

AGRADECIMENTOS

Eis que chegou o momento mais delicado de todo trabalho. Escolher as palavras que possam traduzir tudo aquilo que está guardado no coração não é uma tarefa fácil. E há palavras que possam exprimir sentimentos tão genuínos de amor e gratidão? Prometo que tentarei, mas caso não obtenha êxito nessa empreitada, por favor, recebam meu abraço apertado. De antemão, a todos, muito obrigada!

A Deus, por manter-me de pé, mesmo diante de tantos percalços.

À Professora Doutora Fernanda Pereira Rodrigues, por me conduzir na orientação deste trabalho. Pessoa pela qual nutro profunda admiração. Suas aulas de Cálculo me encantaram, e sua cordialidade em responder dúvidas, por vezes tão elementares, com respeito e delicadeza, revelaram sua excelência como professora. Difícil explicar, mas algo lá atrás já sinalizava que nossos caminhos se encontrariam mais uma vez. Obrigada por todo conhecimento compartilhado! Obrigada por ser minha orientadora!

À Professora Doutora Priscila Cardoso Petito, que com suas valiosas contribuições, possibilitou que eu desse continuidade a esta pesquisa. Mesmo sabendo do meu horário apertado, me acolheu com empatia e generosidade. Falar sobre a Priscila é um exercício emocionante, pois fomos contemporâneas na época da graduação. E não há como não rememorar os momentos compartilhados naquela época. Momentos de ternura e muito carinho. E testemunhar, o que eu nunca duvidei, como aquela aluna brilhante se transformou em uma professora notável, foi uma alegria imensa.

À Professora Doutora Marcele Câmara de Souza, por aceitar participar dessa Banca. E não poderia deixar de destacar a forma delicada como conduziu os intensos caminhos da Estatística. Voltar ao ambiente presencial e ser recepcionada com tanto cuidado foi um grande diferencial.

Ao Professor Wanderley Moura Rezende, sua presença é uma honra. Tenho profunda admiração pelo seu trabalho, agradeço sinceramente por aceitar fazer parte dessa Banca. Muito obrigada pela atenção e pela disponibilidade em considerar esse convite.

À Isabelle do Prodocência-UERJ, sua colaboração foi fundamental para aprimorar a estrutura do projeto. Sou imensamente grata por sua ajuda.

Aos queridos professores da Faculdade de Formação de Professores, as boas lembranças de suas aulas me trouxeram de volta.

A todos os membros da equipe diretiva do CIEP 409, por abraçarem a ideia desse trabalho e proporcionarem todos os meios para seu desenvolvimento.

Aos meus alunos, cuja leveza, carinho e dedicação alicerçaram essa jornada acadêmica. Sem o comprometimento de vocês essa pesquisa não teria alcançado significado.

Aos meus colegas de curso, pelos momentos de compartilhamento de experiências tão enriquecedoras.

Agradeço especialmente a Renata e ao Luciano, amigos que conquistei para a vida toda. Por meio desse programa de mestrado tive a oportunidade de conhecê-los. E ser acolhida por pessoas tão especiais e íntegras, foi um acalento.

À querida professora Doutora Maria de Fátima Pinel, por quem sinto um carinho enorme. Fui sua aluna em 2017 na UFF e, desde então, ganhei uma amiga. Uma das minhas maiores incentivadoras.

À minha mãe Regina, minha rainha, o maior presente da minha vida! Sinto-me a pessoa mais afortunada desse mundo por tê-la como mãe e amiga. Seus exemplos moldaram um pouco do que sou hoje. Por ter você, nunca me senti só.

Ao meu tio, William e a minha prima Viviane, por sempre estarem do meu lado, me amparando e fortalecendo a minha fé em mim mesma.

Ao meu marido, Abílio, por ter me apoiado incondicionalmente. Prometo recompensar os momentos que lhe foram roubados com mais amor. Sua compreensão foi fundamental para que eu tivesse a paz necessária para completar essa fase, almejada há tempos, mas que só agora pude concluir. Você é meu pilar!

Ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), pela oportunidade concedida.

A todos, mais uma vez, muito obrigada!

[...] somente na comunicação tem sentido a vida humana. [...] o pensar do educador só ganha autenticidade na autenticidade do pensar dos educandos, mediatizados ambos pela realidade, portanto, na intercomunicação. Por isso, o pensar daquele não pode ser um pensar para estes nem a estes imposto. Daí que não deva ser um pensar no isolamento, na torre de marfim, mas na e pela comunicação, em torno, repitamos, de uma realidade.

Paulo Freire

RESUMO

ASSIS, Elaine Cristina da Cruz Jorge de. *A monitoria como trabalho colaborativo: uma experiência no contexto de uma escola pública no pós-pandemia*. 2023. 120f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2023.

Desde o início da pandemia de COVID-19, em 2020, as escolas têm enfrentado uma série de desafios decorrentes das consequências do momento pandêmico. O fechamento temporário ou parcial das instituições de ensino como medida de contenção do vírus resultou em interrupções significativas na educação presencial, afetando o aprendizado, o desenvolvimento social e emocional dos alunos. A transição para o ensino remoto trouxe desigualdades no acesso à tecnologia e à internet, ampliando as disparidades educacionais. A recuperação completa exigirá esforços contínuos para mitigar os efeitos negativos e adaptar as práticas educacionais às circunstâncias em constante evolução. Nesta conjuntura, este trabalho é uma proposta fundamentada em experiência concreta no contexto de uma escola pública da região metropolitana do Rio de Janeiro. A ideia é construir ações baseadas em monitorias dos/para estudantes do Ensino Médio com a finalidade de amenizar gradativamente as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. São descritos os passos na elaboração e concretização de uma proposta inicial de monitoria e, a partir dessa experiência, é desenvolvido um material de suporte para este tipo de atividade como inspiração para formar multiplicadores dessa iniciativa. Foram utilizadas questões do ENEM e a resolução de problemas como técnica de abordagem ao longo do processo, alicerçados em debates que iniciaram em Pólya, tiveram continuidade com autores como Onuchic e Allevato, e que ganham novas adaptações à medida que novos cenários são considerados. Este texto reflete mais do que uma pesquisa-ação qualitativa fundamentada em um estudo de caso, é um convite à ação efetiva na construção de um projeto de escola que almejamos a partir da realidade com a qual nos deparamos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino Médio. Projeto de Monitoria. Resolução de Problemas. Trabalho Colaborativo.

ABSTRACT

ASSIS, Elaine Cristina da Cruz Jorge de. *Monitorship as collaborative work: an experience in the context of a public school in the post-pandemic period*. 2023. 120f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2023.

Since the beginning of the COVID-19 pandemic in 2020, schools have faced a series of challenges stemming from the consequences of the pandemic. The temporary or partial closure of educational institutions as a containment measure for the virus has led to significant disruptions in in-person education, impacting students' learning and their social and emotional development. The transition to remote learning has highlighted disparities in access to technology and the internet, exacerbating educational inequalities. Achieving full recovery will require ongoing efforts to mitigate the negative effects and adapt educational practices to ever-evolving circumstances. In this context, this work is a proposal grounded in concrete experience within the context of a public school in the metropolitan region of Rio de Janeiro. The idea is to build actions based on mentorships for high school students with the aim of gradually alleviating the difficulties encountered in the teaching and learning process of Mathematics. The steps in the development and realization of an initial mentoring proposal are described, and from this experience, a support material is developed for this type of activity, serving as inspiration to create advocates for this initiative. ENEM questions and problem-solving are utilized as approaches throughout the process, rooted in discussions that began with Pólya and continued with authors like Onuchic and Allevato, evolving with new adaptations as new scenarios are considered. This text reflects more than qualitative action research based on a case study; it is an invitation to effective action in building a school project that we aspire to create based on the reality we face.

Keywords: High School Education. Mathematics Education. Mentorship Project. Problem Solving. Collaborative Work.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Gráfico 1 –	Distribuição percentual das pessoas de 10 anos ou mais de idade que não utilizara a Internet nos últimos três meses de 2019 por condição de estudante.....	17
Tabela 1 –	Ações nas escolas RJ.....	24
Gráfico 2 –	Gráfico comparativo da Realidade da Conectividade dos Alunos...	25
Mapa 1 –	Mapa de risco.....	27
Quadro 1 –	Calendário – Ano de 2021.....	28
Figura 1 –	Questão 22 – 2º Exame de Qualificação – UERJ 2015.....	40
Figura 2 –	Questão 31 – 1º Exame de Qualificação – UERJ 2018.....	41
Quadro 2 –	Planejamento Curricular resumido (2º ano do Ensino Médio).....	44
Quadro 3 –	Resolução de Problemas – Roteiro Sugerido por Onuchic e Allevalo (2011).....	49
Quadro 4 –	Resolução de Problemas – Método Pólya (1995).....	50
Quadro 5 –	Escolhas.....	52
Quadro 6 –	Percepções.....	53
Quadro 7 –	Diálogos: sala dos professores.....	54
Quadro 8 –	Sobre as questões disparadoras.....	55
Quadro 9 –	Reflexões dos Monitores.....	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEE/FIOCRUZ	Centro de Estudos Estratégicos / Fundação Oswaldo Cruz
CIEP	Centro Integrado de Educação Pública
CNE/CP	Conselho Nacional de Educação / Conselho Pleno
ECA	Estatuto da Criança e do Adolescente
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GP	Ginásio Público
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
OEs	Orientações de Estudos
OMS	Organização Mundial da Saúde
OPAS	Organização Pan-Americana da Saúde
PNAD	Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios
SECTI	Secretaria de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação
SES	Secretaria Estadual de Saúde
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UNICEF	Fundo das Nações Unidas para a Infância
UNIVESP	Universidade Virtual do Estado de São Paulo
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	COVID-19: CONTEXTO EPIDEMIOLÓGICO E REFLEXOS NO ENSINO.....	15
1.1	Impactos da pandemia no CIEP 409.....	18
2	DIALOGANDO COM AUTORES E INSTRUMENTOS NORMATIVOS..	31
2.1	A monitoria como trabalho colaborativo.....	34
3	CAMINHOS TRILHADOS E PROPOSTA METODOLÓGICA.....	38
3.1	Avaliação diagnóstica como instrumento no processo.....	39
3.2	Pensando as ações pedagógicas rumo ao projeto de monitoria.....	44
3.3	Construindo o projeto de monitoria.....	46
3.4	Vozes dos participantes: reverberando o projeto de monitoria.....	51
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
	REFERÊNCIAS	61
	ANEXO A – Avaliação Diagnóstica.....	71
	ANEXO B – Caderno de Atividades.....	74

INTRODUÇÃO

“Um profissional da Educação que busque formar estudantes éticos e solidários não deve conceber o ensino como transmissão de conceitos já elaborados e construídos, não deve limitar sua prática docente apenas aos objetivos previamente determinados, sem considerar o contexto no qual seu aluno está inserido. Dessa forma, a atuação docente dependerá de sua sensibilidade para perceber e respeitar o processo de desenvolvimento intelectual e emocional dos alunos” (D’AMBROSIO; LOPES, 2015, p. 4).

Este trabalho foi concebido a partir do contexto pós-pandemia de COVID-19, o que levou a uma minuciosa descrição do cenário global e local. Durante esse período, os estudantes enfrentaram dificuldades maiores do que o habitual em relação aos conceitos e algoritmos da Matemática escolar. Naturalmente, surgiu a ideia de desenvolver um projeto de reforço no contraturno escolar. No entanto, a realidade demonstrou que os estudantes encontram verdadeiras dificuldades em frequentar esse período extra na escola. Motivos pessoais se destacam, incluindo a necessidade de alguns adolescentes cuidarem de irmãos mais novos, bem como outros que precisam auxiliar no orçamento familiar, situação que foi agravada pela COVID-19.

Com a intenção de amenizar essas dificuldades, a ideia foi modificada/adaptada para a monitoria destinada aos estudantes. Dessa maneira, os próprios estudantes poderiam se auxiliar mutuamente, em horários vagos e também durante as aulas, sob a supervisão do professor da turma. Esse professor poderia conduzir o processo de seleção, se reunir com os interessados e, em um esforço colaborativo, estabelecer regras, dias de atuação como também o material a ser utilizado.

O foco central da ação aqui descrita é o estudo baseado em questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), já que os estudantes demonstraram muita dificuldade na interpretação das questões matemáticas apresentadas neste exame. Além disso, o ENEM desperta interesse específico nos estudantes devido às múltiplas possibilidades que ele oferece. Nesse sentido, utilizamos autores como Onuchic, Allevato e Pólya como embasamento para nossas ações.

Como resultado das pesquisas e ações desenvolvidas no âmbito desta dissertação, detalhamos os processos do projeto de monitoria desenvolvido e apresentamos uma proposta de material a ser utilizado em iniciativas semelhantes que, assim como as atividades realizadas, concentram-se no processo de ensino e aprendizagem nos seguintes temas: progressões aritméticas e geométricas, matrizes e sistemas lineares, geometria plana e espacial.

Na perspectiva de uma pesquisa-ação, onde todos os envolvidos trabalharam juntos para identificar problemas, desenvolver soluções e implementar mudanças práticas, e de cunho qualitativo ao buscar compreender profundamente os significados, perspectivas e experiências, esse trabalho nasce do inconformismo da autora, uma professora da educação básica há mais de 20 anos, em aceitar passivamente o caminho que estava sendo trilhado por seus alunos do Ensino Médio ao não conseguirem meios de acessar a universidade e, assim, ingressarem no mercado de trabalho a partir da formação acadêmica. Isso era algo mais difícil para eles do que para outros jovens em classes sociais diferentes, fato agravado pela pandemia de COVID-19. E esta era uma situação que os alunos tinham consciência, logo, atuar nesta direção era mais do que um dever profissional, era um dever moral.

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e descrever uma abordagem de monitoria destinada a auxiliar os estudantes do Ensino Médio a superar as dificuldades em Matemática decorrentes do contexto pós-pandemia de COVID-19. Para tal, apontamos como objetivos específicos: analisar e descrever o cenário global e local resultante da pandemia de COVID-19, destacando os desafios enfrentados pelos estudantes em relação aos conceitos e algoritmos da Matemática escolar; propor um projeto de monitoria dos/para os estudantes como forma de reforço, considerando as dificuldades reais e experiências vivenciadas; enfatizar a resolução de problemas com questões matemáticas do ENEM como metodologia da ação; apresentar um material de suporte para iniciativas semelhantes, com foco em temas de Matemática do segundo ano do Ensino Médio.

Com base no contexto, objetivos e justificativa aqui apresentados, e diante da referência metodológica delineada, passamos a descrever o presente texto.

No primeiro capítulo abordamos o início da Pandemia de COVID-19 e suas implicações sociais. Um contexto histórico que ultrapassou fronteiras e reconfigurou as relações de trabalho e estudo vigentes até então. Descrevemos minuciosamente

os procedimentos adotados para dar continuidade ao ensino amparados por normativas emergenciais das secretarias de saúde e educação.

Por todos os percalços aqui delineados e considerando a educação o meio pelo qual transformações sociais tornam-se possíveis, escrevemos o segundo capítulo. Inicialmente este capítulo complementa o anterior ao apresentar os instrumentos normativos garantidores do direito fundamental à educação, destacando a compreensão do seu caráter democrático. Seguindo esse viés, dialogamos com autores que entendem o trabalho colaborativo como meio para se desenvolver a cultura democrática no ambiente escolar. Complementamos com teóricos que conferem a monitoria, por atingir a coletividade, a ação que permeia o trabalho colaborativo na escola.

Apresentamos, no terceiro capítulo, os caminhos que conduziram à escolha da proposta metodológica adotada nesta pesquisa. Ao descrevermos o processo de investigação, relacionamos diretamente ao contexto pandêmico e suas implicações no processo de ensino-aprendizagem. Continuamente, apresentamos o projeto de monitoria; descrevemos o processo de escolha das questões disparadoras e, por fim, analisamos o discurso daqueles que direta ou indiretamente participaram desta pesquisa.

1 COVID — 19: CONTEXTO EPIDEMIOLÓGICO E REFLEXOS NO ENSINO

Em 31 de dezembro de 2019, as autoridades chinesas emitiram um alerta à Organização Mundial da Saúde (OMS) sobre um surto de pneumonia, com origem desconhecida, na qual a cidade de Wuhan, província de Hubei, na China, foi acometida. Poucos dias após à emissão desse alerta, em janeiro de 2020, o vírus causador da pneumonia foi identificado e denominado como o coronavírus da síndrome respiratória aguda grave 2 (SARS-CoV-2)¹. Com o avanço da propagação do agente infeccioso, ultrapassando as fronteiras do país asiático, em 11 de março, segundo a Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS), a OMS tipificou a COVID-19, doença provocada pelo SARS-CoV-2, como pandemia (OPAS, 2022).

Entre a identificação do surto, em dezembro de 2019, e seu reconhecimento como pandemia, em março de 2020, a OMS caracterizou como “emergência de saúde pública de importância internacional” a vasta disseminação do coronavírus (BRASIL, 2020). A organização seguiu as orientações do Regulamento Sanitário Internacional, o qual se debruça sobre os planos a serem tomados globalmente quando há riscos de propagação de doenças que representam extrema e imediata gravidade para a população. Tal informação torna-se crucial para a tomada de decisões efetivas e coordenadas com agências sanitárias internacionais atuando por meio de legislações específicas e regionais (BRASIL, 2009).

No Brasil, no que concerne à legislação nacional, o poder executivo sancionou a Lei n.º 13.979, de 6 de fevereiro de 2020, que estabeleceu, no Art. 2º, medidas fundamentais, como isolamento social e quarentena, para enfrentamento do surto do coronavírus (BRASIL, 2020). O Ministério da Educação (MEC) autorizou as instituições de ensino públicas e privadas, de todo território nacional, através da Portaria n.º 343, de 17 de março de 2020, a substituir em caráter excepcional as aulas presenciais e concedê-las remotamente com a utilização de dispositivos digitais (BRASIL, 2020). E, no que tange ao trabalho presencial, excetuando-se as atividades essenciais, boa parte das ocupações profissionais foram transferidas para o regime de teletrabalho.

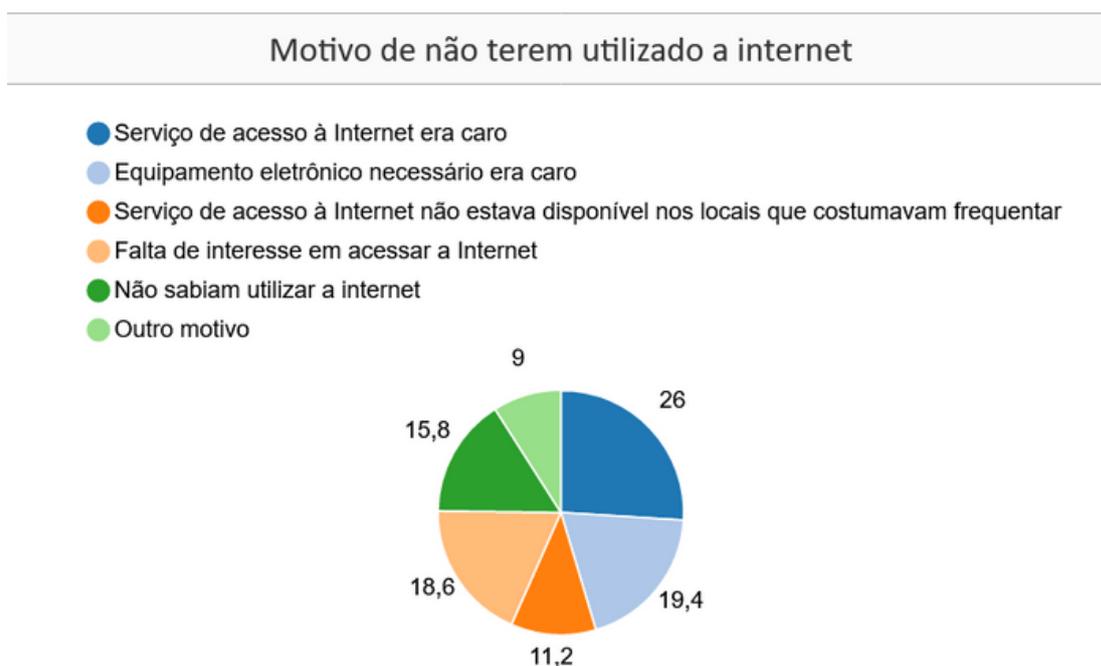
Sob esse ângulo, uma nova configuração social se apresenta. A disseminação do coronavírus impôs mudanças sociais extremas num curto espaço

¹SARS-CoV-2: Severe acute respiratory syndrome coronavirus 2.

de tempo, impactando a rotina profissional e escolar de toda a população. O texto do professor Nabil Bonduki, publicado na página do Centro de Estudos Estratégicos da Fundação Oswaldo Cruz (CEE/FIOCRUZ), ressalta a relevância da habitação na dinâmica familiar em tempos de crise sanitária, enquanto “[...] lugar do trabalho, do estudo, do lazer, dos exercícios físicos, do relacionamento social” (BONDUKI, 2021, p. 1). Com isso, a falta de equidade no acesso à tecnologia veio à luz no cenário brasileiro, pois segundo os dados descritos na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) Contínua e divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), no último trimestre de 2019, período pré-pandêmico, 12,6 milhões de domicílios não possuíam acesso à Internet (IBGE, 2021).

Em relação à Educação Básica, os estabelecimentos de ensinos fundamental e médio ficaram dispensados, “[...] da obrigatoriedade de observância do mínimo de dias de efetivo trabalho escolar [...]” (BRASIL, 2020, p. 4). No entanto, manteve-se a imprescindibilidade do cumprimento da carga horária mínima anual. Com o regime remoto implementado e a rotina escolar interrompida devido ao período de calamidade pública imposto pela pandemia de COVID-19, a exclusão digital sinalizada pela PNAD Contínua afetou diferentemente estudantes das redes de ensino pública e privada no país (IBGE, 2021). Dos 4,3 milhões de estudantes com 10 anos ou mais sem acesso à Internet ao fim de 2019 revelados pela pesquisa; 4,1 milhões pertenciam à rede pública. Sendo assim, uma significativa porcentagem dos jovens brasileiros não conseguia participar das aulas remotas ou outras atividades online implementadas pelas secretarias de educação.

Gráfico 1 — Distribuição percentual das pessoas de 10 anos ou mais de idade que não utilizaram a Internet nos últimos três meses de 2019 por condição de estudante:



Fonte: IBGE - Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua Anual - 4º trimestre (2019).

O Gráfico 1 ilustra as causas principais da falta de conectividade. Dessa forma, é possível identificar as demandas a serem consideradas na implementação da Internet para fins educacionais.

A escassez de recursos tecnológicos para o desenvolvimento das atividades online não atingiu somente alunos, como assegura Pronko (2020), mas também professores. Além disso, a precária infraestrutura das escolas brasileiras foi exposta. As desigualdades no acesso à tecnologia, em relação à conectividade nas escolas, também se expressam territorialmente, como indicam os dados divulgados pela Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) Educação de 2019. Segundo a pesquisa, não havia rede de computadores disponíveis para fins educacionais em 26% das escolas urbanas brasileiras, situação intensificada na área rural, dado que “[...] a proporção de escolas rurais sem infraestrutura de conexão é de 51%. Ou seja, essas escolas não possuíam acesso à Internet, e também não possuíam dispositivos próprios” (TIC EDUCAÇÃO 2019, 2020, p. 101).

Sendo o ensino à distância validado por normativas específicas como medida relevante no contexto da emergência sanitária, esta modalidade não foi acessível a

todos (PRONKO, 2020). Esse panorama aduz que a suspensão das aulas teve um impacto direto na aprendizagem dos estudantes, especialmente aqueles em situação de vulnerabilidade social e econômica. Nessa compreensão, Nóvoa (2020) pontua que, durante este momento crítico da história coletiva, as dificuldades do ensino à distância, agravadas pela desigualdade social, intensificaram o declínio da qualidade pedagógica e acentuaram as contradições já presentes na escola pública. A insuficiência das respostas das autoridades a pandemia no sistema educacional ao não conseguirem garantir o acesso equitativo ao ensino à distância foi ressaltada por (NÓVOA, 2022). Bons resultados no processo de ensino aprendizagem foram destacados por instituições nas quais a interação familiar foi possível, revela o autor. Contudo, enfatiza que os professores, ao utilizarem sua independência profissional trabalhando na construção de uma educação inclusiva, promoveram as soluções pedagógicas mais eficazes nesse período.

Cabe ressaltar que os impactos do cotidiano familiar e do contexto econômico e social do estudante foram fatores determinantes para o ensino aprendizagem. Quando os atores do processo são da escola pública, notadamente, os reflexos são muito mais perceptíveis. Desse modo, conforme apontado pelo Centro de Referências em Educação Integral (2021), a redução das disparidades socioeconômicas e a inclusão de estudantes em situação de alta vulnerabilidade social requerem políticas públicas abrangentes e direcionadas. Nessa publicação destacam-se medidas consideradas indispensáveis para mitigar os impactos negativos gerados pela pandemia de COVID-19, dentre elas: a oferta de materiais escolares adequados, a implementação de acolhimento sensível às experiências individuais e familiares, a adoção de estratégias pedagógicas inclusivas, o reconhecimento e valorização dos profissionais da educação, bem como a articulação efetiva com a rede de proteção social para o atendimento de estudantes e famílias em insegurança alimentar. Portanto, mediante uma abordagem integrada e colaborativa que englobe o poder público, as instituições de ensino e a sociedade, será possível superar tais desafios e assegurar a igualdade de oportunidades educacionais a todos os estudantes.

1.1 Impactos da Pandemia no CIEP 409

As transformações recentes provocadas pela pandemia da COVID-19 impactaram todo o sistema educacional no Brasil e no mundo com a interrupção das aulas presenciais, medida implementada durante o estado de emergência. O escopo deste trabalho baseia-se num projeto de monitoria aplicado em turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Educação Básica localizada no município de São Gonçalo, região metropolitana do estado do Rio de Janeiro, objetivando recuperar os déficits de aprendizagens em matemática revelados desde a implementação do ensino remoto. As ações foram desenvolvidas no Centro Integrado de Educação Pública (CIEP) 409 — Professora Alaíde de Figueiredo Santos.

O CIEP 409 foi inaugurado no segundo semestre do ano de 1993. Localiza-se no segundo distrito do município de São Gonçalo, no bairro Coelho. Este município pertence à região metropolitana do estado do Rio de Janeiro e dista 18 km da capital. Sua configuração geográfica abrange uma área territorial de 248,160 km² (IBGE, 2021). A divulgação do último Censo demográfico, ano de 2010, exibiu o quantitativo populacional de São Gonçalo, no qual atingiu o patamar de 999 728 habitantes, ocupando a posição de segunda maior população do estado, ficando atrás somente da capital com 6 320 446 indivíduos. Em comparação com as 5.565 cidades elencadas, São Gonçalo é a 16ª cidade mais populosa do Brasil. E, embora o Censo 2020 tenha sido adiado devido à pandemia de COVID-19, a última estimativa populacional, atualizada em 2021 pelo sistema Cidades@ IBGE, consistia em 1 098 357 pessoas (IBGE, 2021).

O público ao qual este colégio atende, em sua maioria, são alunos que residem em seu entorno. Atualmente, de acordo com dados divulgados pela Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ), há 665 estudantes com matrículas ativas e estão distribuídos em 25 turmas, das quais 11 do Ensino Médio (SEEDUC-RJ, 2023).

O retorno às aulas nas escolas estaduais do Rio de Janeiro se deu em três estágios. Inicialmente, em 2020, ápice da pandemia, as aulas foram totalmente remotas. Já no primeiro semestre de 2021 houve a adoção do modelo híbrido, no qual combinava aulas presenciais e online. E, posteriormente, no segundo semestre de 2021, muitas instituições de ensino retomaram as aulas presenciais plenamente. Entretanto, é importante ressaltar que as medidas adotadas variavam conforme a

região e a evolução da pandemia em cada localidade (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2021).

O ano de 2020 foi marcado pelo ensino remoto em sua totalidade. Em meio a necessidade de evitar aglomerações, o Secretário Estadual de Educação em exercício anunciou em 18/03/2020, um dia após o MEC suspender as aulas presenciais, uma parceria com a empresa de tecnologia Google para a utilização de sua plataforma de ensino à distância, o Google Classroom². Trata-se de uma das ferramentas da empresa, disponível para o desenvolvimento de ensino remoto. A proposta da plataforma era a de promover uma interação entre professores e alunos em tempo real. Nessa perspectiva, Santos Junior (2020) destaca a importância do contato com o professor no ambiente online de sala de aula, para manter o aluno emocionalmente envolvido com a escola.

Não obstante, no período das aulas remotas, uma parte significativa dos alunos do CIEP 409 não possuía estrutura tecnológica adequada para assisti-las com qualidade e de forma síncrona. As ações desenvolvidas, em sua maioria, foram por estudo dirigido. Os alunos, ou seus responsáveis, precisavam ir à escola, em horários previamente agendados, para retirar o material pedagógico impresso referente ao ano de escolaridade específico. Após a resolução dos exercícios propostos contidos no final de cada unidade, esse material era devolvido para a correção dos professores.

O material pedagógico de apoio adotado neste ano de ensino domiciliar foram os “Cadernos de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada”. Tais cadernos, elaborados pela SEEDUC/RJ, e em colaboração com professores da rede, seguiam a proposta do Currículo Mínimo adotado pelo estado. Este, trata-se de um documento estruturado pela Secretaria de Educação, possuindo ações norteadoras para todas as unidades escolares estaduais. Segundo a SEEDUC/RJ, o currículo intenciona orientar as escolas sobre as competências e habilidades essenciais a serem abordadas nos planos de curso e nas aulas. Visa garantir uma base comum e alinhada às necessidades de ensino identificadas nas leis vigentes e nos modelos das principais avaliações externas de âmbito nacional (SEEDUC-RJ, 2012).

²Google Classroom: Sala de aula do Google.

A orientação acerca da utilização dos Cadernos de Atividades Autorregulada, alicerçados pela base comum curricular, no ano de sua publicação, em 2011, era de que fossem usufruídos como uma complementação aos estudos em sala de aula (SEEDUC-RJ, 2012). Porém, os motivos da escolha em trabalhar especificamente com essas atividades no período remoto foram: a liberação de download para alunos e professores no site da SEEDUC/RJ, podendo ser anexados no Google Classroom, e a existência de vídeos explicativos no YouTube elaborados por professores da rede.

Se por um lado a disponibilidade de materiais para o ensino domiciliar foi facilitado pela SEEDUC/RJ em diversos canais, contraditoriamente o atendimento aos alunos sem equipamento tecnológico ou com ferramentas que não suportavam a instalação dos aplicativos disponibilizados pela Educação, impactou diretamente o processo de construção do conhecimento. Sem suporte imediato, não foi possível acompanhar com regularidade o desenvolvimento escolar desses estudantes.

À vista disso, como uma forma de minimizar os impactos causados por essa falta de interação professor-aluno, a coordenação pedagógica do CIEP 409 sugeriu aos professores a criação de grupos no WhatsApp com suas referidas turmas, pois este era o principal aplicativo utilizado na comunidade escolar. Pretendia-se, com esse canal de comunicação, facilitar o envio e retorno das tarefas, principalmente dos estudantes que não conseguiam acessar a plataforma Google Classroom. O que a princípio seria uma solução viável para os envolvidos no processo de ensino aprendizagem, tornou-se mais um complicador.

Por não conseguirem baixar as atividades no formato PDF, os alunos solicitaram que estas fossem enviadas como fotos, postadas via WhatsApp, porém, com a baixa resolução das telas dos smartphones, também não foi possível uma leitura adequada das tarefas propostas. Além disso, em muitos casos, apenas um celular era compartilhado por toda família, o que afetava principalmente aos grupos familiares com irmãos estudando no mesmo turno e em anos de escolaridade diferentes.

Em consequência, houve um aumento na demanda em torno do material pedagógico impresso disponibilizado pelo CIEP. Esta análise apoiou-se no resultado obtido por uma pesquisa realizada com os alunos dos ensinos fundamental e médio que habitualmente utilizavam a plataforma. A referida pesquisa foi elaborada pela coordenação pedagógica em conjunto com os professores desta unidade por meio

do Google Forms³, ferramenta da plataforma Google que possibilita a criação de formulários que podem ser anexados ao Google Classroom.

Fundamentados nas respostas obtidas no período analisado, buscaram-se alternativas para atender também àqueles que, mesmo sendo detentores de algum dispositivo eletrônico, não apresentavam assiduidade no ensino remoto. Este formulário era composto por perguntas objetivas, além de um espaço destinado a comentários individuais. Deste modo, críticas foram relatadas e sugestões consideradas, objetivando melhorar a comunicação e a troca de informações nesse período de isolamento social. Sendo, portanto, uma oportunidade de compreender suas impressões acerca dessa nova dinâmica do contexto educacional.

As aulas síncronas eram realizadas por videoconferência na plataforma Google Meet, seguindo a princípio um horário fixo programado no calendário escolar. Mantinha-se, então, o modelo estruturado no período presencial. E, embora o grupo pesquisado possuísse algum tipo de equipamento tecnológico que os possibilitasse assistir às aulas em tempo real, 56,9% dos entrevistados estavam enfrentando algum tipo de obstáculo para acompanhá-las no horário estabelecido. Atrasos, causados por problemas de conexão à Internet ou pelo compartilhamento do aparelho, como citado anteriormente, prejudicaram o cumprimento do horário regular das aulas, relataram os indivíduos que responderam ao questionário.

Acrescenta-se a sugestão dos jovens para considerar o horário noturno para os encontros síncronos em alguns dias da semana, pois, neste período do dia, seria possível a utilização do smartphone dos seus responsáveis, uma vez que estes estariam liberados de suas obrigações laborais. Isto posto, para atender às especificidades encontradas no contexto familiar dos estudantes desta escola, a flexibilidade no horário das aulas precisou ser considerada e a periodicidade na solicitação das tarefas, revista.

Vale salientar que um recurso positivamente avaliado foram os fóruns de discussão abertos diariamente no transcorrer das aulas. Buscava-se estimular a comunicação dos atores presentes nas videochamadas. Para aqueles que, por algum motivo, estavam impossibilitados de ativar o áudio ou ligar a câmera do seu dispositivo, a interação se deu por troca de mensagens. As perguntas enviadas nos chats eram lidas pelos colegas de classe, os quais abriam o áudio sempre que um

³Google Forms: Formulários do Google.

colega efetuava um questionamento. Dessa forma, todos os presentes podiam participar, ora respondendo aos colegas, quando sabiam a resposta, ora fazendo suas próprias perguntas. Nota-se nesse modelo o mais próximo de uma dinâmica de sala de aula presencial.

Com a intenção de reunir mais estudantes em atividades coletivas, após análise das respostas do questionário aplicado, o planejamento escolar foi reestruturado, possibilitando a inclusão de projetos interdisciplinares, cuja dinâmica de trabalho era familiar aos alunos desta escola por ser uma prática já adotada há muitos anos. Desta forma, o horário noturno foi priorizado para o oferecimento de lives com periodicidades semanais e contaram com a participação dos professores da casa e professores convidados. Neste estilo, os alunos participaram mais ativamente e, progressivamente, se restabelecia o vínculo com esses estudantes.

Em relação às avaliações de aprendizagem, excepcionalmente neste ano de 2020, admitiram toda e qualquer atividade desenvolvida pelos alunos de forma síncrona ou assíncrona, resultando em uma nota única de zero a dez por disciplina. Esse modelo de avaliação foi chamado de Ciclo Único de Aprendizagem e teve um caráter classificatório, pois como disposto no artigo 8º Resolução n.º 5879 de 13 de outubro de 2020 da SEEDUC/RJ: “Os resultados obtidos pelos estudantes no ciclo único de avaliação não ensejarão reprovação [...]” (RIO DE JANEIRO, 2020). Portanto, com o oferecimento de instrumentos pedagógicos diversificados, cumpriram-se as ofertas das modalidades e programas de ensino remoto consideradas na resolução acima citada.

A volta às salas de aula no CIEP 409, como em toda rede estadual, nesse segundo estágio, iniciou-se em 1º de março de 2021. No entanto, o regresso dos alunos ao ambiente escolar não se daria com toda capacidade, mas gradativamente, como informou a SEEDUC/RJ. O retorno, então, aconteceu de forma híbrida, ou seja, aulas presenciais com a alternância de turmas e dias; e atividades remotas (SEEDUC-RJ, 2021).

A adoção desse modelo de ensino se deu pela observância da evolução dos mapas de risco divulgados pela Secretaria Estadual de Saúde do Rio de Janeiro (SES/RJ). Os mapas de risco são ferramentas utilizadas pelas autoridades de saúde para monitorar o avanço da pandemia em determinada região. E, normalmente, usam cores para indicar o nível de risco de cada área geográfica, com base em indicadores epidemiológicos e sanitários (SES/RJ, 2021).

Na 19ª atualização do mapa de risco, divulgada em 24 de fevereiro de 2021, o estado permanecia em bandeira amarela na maioria das regiões, ou seja, sua pontuação geral representava um baixo risco de contaminação (SES/RJ, 2021). As ações a serem adotadas nas escolas seguiram as orientações dispostas na Tabela 1:

Tabela 1 — Ações nas escolas RJ

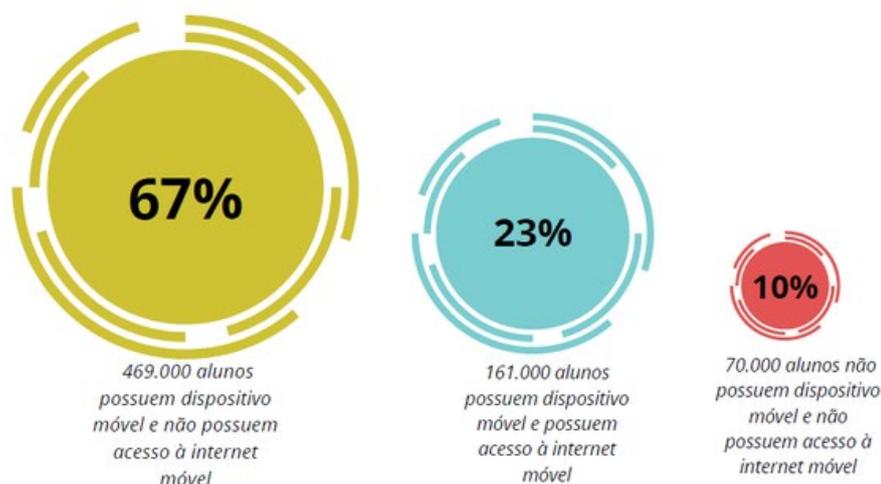
Cores das bandeiras/risco	Atividades nas unidades escolares (Ensino Médio)
Verde/Muito baixo	Aulas com até 100% da capacidade
Amarela/Baixo	Aulas com até 50% da capacidade
Laranja/Moderado	Aulas com até 35% da capacidade
Vermelha/Alto	Aulas presenciais suspensas
Roxa/Muito alto	Aulas presenciais suspensas

Fonte: Adaptado de Rio de Janeiro (2021).

Cabe ressaltar que, mesmo com a bandeira amarela, nas atividades escolares presenciais, houve a necessidade de se cumprir as orientações da Saúde. Os protocolos de segurança, como o uso de máscara obrigatório para toda a comunidade escolar, álcool em gel a 70% disponível em todos os ambientes e tapetes sanitizantes nos acessos às áreas comuns foram mantidas (SEEDUC-RJ, 2021). A princípio, nesse retorno, foram priorizados os estudantes que, não tendo acesso a qualquer tipo de dispositivo eletrônico no período de estudo domiciliar, ficaram “à margem da educação no ano de 2020” conforme o Gráfico 2, (SEEDUC-RJ, 2021).

Gráfico 2 — Gráfico Comparativo da Realidade da Conectividade dos Alunos

REALIDADE DA CONECTIVIDADE DOS ALUNOS



Fonte: SEEDUC-RJ (2021).

Com o intuito de atenuar a dificuldade no acesso à internet evidenciada no Gráfico 2 a SEEDUC criou o *Applique-se*, um aplicativo para ser utilizado nas aulas online, sem o consumo do pacote de dados do usuário para download de arquivos. Neste aplicativo foram oferecidos: podcasts, videoaulas e materiais didáticos em PDF. Além disso, as funcionalidades da plataforma Google Classroom que já haviam sido disponibilizadas em 2020 foram preservadas, mas agora com ingresso pelo *Applique-se* (SEEDUC-RJ, 2021). Contudo, os obstáculos enfrentados pelos alunos do CIEP 409 em relação à conexão nos programas destinados ao ensino à distância durante o ano de 2020 se mantiveram, pois os dispositivos eletrônicos utilizados pelos alunos não eram compatíveis com as novas tecnologias e atualizações.

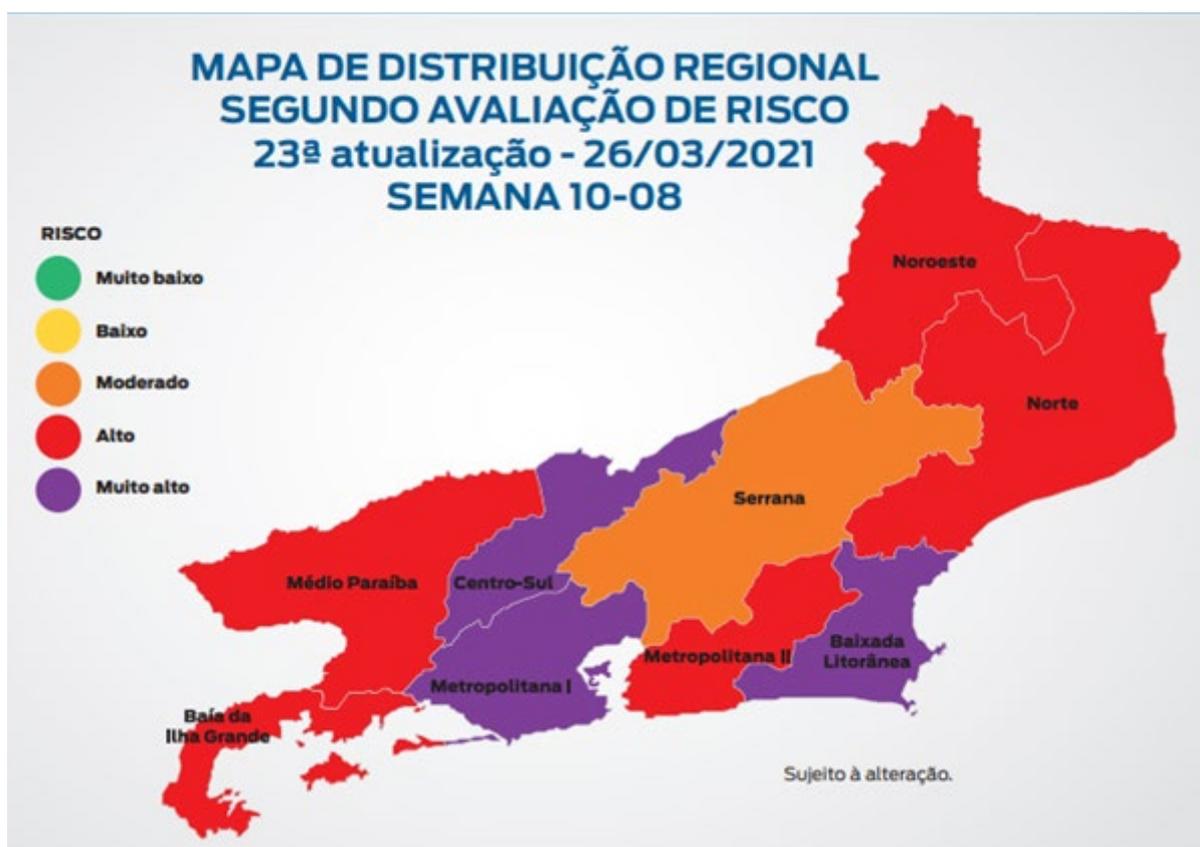
No período relacionado, não havia a obrigatoriedade do retorno presencial, mas aqueles que decidiram regressar, precisaram seguir o critério de revezamento. Esse revezamento priorizava a garantia de um distanciamento seguro nas salas de aula. E, ademais, por cautela, as escolas promoveram suas “atividades de ensino presencial em horário único”, evitando dessa maneira os horários de maior fluxo nos meios coletivos de transporte (SEEDUC-RJ, 2021).

Nesse cenário se iniciaram as atividades escolares com presença física no CIEP 409. As primeiras semanas de aula foram de acolhimento e muito diálogo, e não foi difícil perceber, ao conhecer os alunos que, para além da compreensão dos

objetos de conhecimento, havia a necessidade de saber de suas percepções sobre esse momento atípico da nossa história. Os sentimentos relatados por eles revelaram angústias e incertezas, principalmente sobre o futuro escolar. Freire (1996) acentua a importância do acolhimento e da valorização das experiências trazidas pelos alunos. Neste contexto, a partir das ideias de Freire, parte-se do diálogo com uma escuta atenta das necessidades dos educandos na direção de uma efetiva construção do conhecimento, propiciando um ambiente escolar inclusivo no qual, coletivamente, a construção do saber se consolide.

Da mesma forma, na Resolução n.º 2, de 10 de dezembro de 2020, o Conselho Nacional de Educação / Conselho Pleno (CNE/CP) já alertava sobre a importância de oferecer aos estudantes e seus familiares um acolhimento cujo objetivo fosse pautado no fortalecimento dos vínculos afetivos entre todos os atores do ambiente educacional (BRASIL, 2020). Porém, esse processo precisou ser interrompido devido ao aumento do número de casos de COVID-19, ou seja, o ensino híbrido, implementado em 1º de março de 2021, aconteceu somente até o dia 26 do mês em questão. A mudança no mapa epidemiológico, na pontuação geral, para a bandeira vermelha, representava alto risco de contágio, afirmou a Secretaria Estadual de Saúde do Rio de Janeiro (SES/RJ, 2021).

Mapa 1 — Mapa de risco



Fonte: SES/RJ (2021).

Como o CIEP 409 está localizado na Região Metropolitana II, representada no Mapa 1, pela bandeira vermelha, a medida de suspensão do ensino presencial foi necessária para conter a disseminação do vírus e reduzir o risco de contaminação na comunidade escolar. Isto posto, a Resolução n.º 5930 da SEEDUC/RJ, expressa:

Art. 12. Na hipótese de vigência de normas municipais mais restritivas à realização de atividades presenciais em unidades escolares, aplicam-se aos estabelecimentos de ensino da rede estadual situados no respectivo território as regras editadas pelo município (RIO DE JANEIRO, 2021, p. 14).

Os protocolos mais restritivos deverão ser considerados ao se cogitar a retomada das atividades escolares, preceitua o artigo. À vista disso, o CIEP 409, ora seguia a bandeira do estado do Rio de Janeiro, ora do município de São Gonçalo. E devido às oscilações das bandeiras de risco, a adoção do ensino remoto foi inevitável. Dessa forma, o planejamento curricular do CIEP 409 para a volta às aulas no ano de 2021 adotou o plano *Continuum* curricular seguindo as orientações da SEEDUC-RJ. Este, baseia-se em uma proposta de ação estabelecida no artigo 4º da Resolução n.º 2 do CNE/CP de 10 de dezembro de 2020 para “[...] o cumprimento

dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento da Educação Básica [...]”, a possibilidade da integralização da carga horária mínima curricular no ano subsequente ao período letivo afetado pela pandemia (BRASIL, 2020, p. 52). Deste modo, as Orientações de Estudos (OEs) contidas no *Applique-se* foram a base curricular nessa nova fase do ensino.

As OEs são documentos em PDF baseados no resumo do currículo, tendo sido elaboradas para serem facilmente compreendidas pelos alunos. Possuíam, ao final de cada unidade, uma tarefa avaliativa que devia ser concluída pelo estudante e entregue na escola para a correção do professor, seguindo, portanto, as mesmas diretrizes dos Cadernos de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada adotados em 2020. Assim, consoante o Parecer CNE/CP n.º 11/2020 se assegura a reorganização dos componentes curriculares dos anos 2020 e 2021, destacando “[...] os objetivos de aprendizagem mais essenciais relacionados às propostas curriculares das redes e escolas [...], baseando-se nas competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)” (BRASIL, 2020, p. 21).

No CIEP 409, o calendário escolar ficou inicialmente estruturado conforme disposto no Quadro 1:

Quadro 1 — Calendário - Ano de 2021

Março	1º e 2º Bimestres da Série anterior (Ano de 2020)
Abril	3º e 4º Bimestres da Série anterior (Ano de 2020)
Maio a agosto	1º Bimestre da Série atual (Ano de 2021)
Setembro a dezembro	2º Bimestre da Série atual (Ano de 2021)

Fonte: A autora (2023).

O cumprimento do calendário foi um desafio, pois com a manutenção da oferta do ensino híbrido, e com as oscilações nas bandeiras de risco, a frequência escolar no CIEP 409, nos períodos de retomada ao ensino presencial, foi abaixo do esperado. Este comportamento não se restringiu somente aos alunos do CIEP, a evasão escolar foi um reflexo da pandemia em todo o país. Por isso, em face de assegurar o direito dos jovens à educação e à permanência na escola, foi sancionada a Lei n.º 9.377, de 22 de julho de 2021, que versa sobre a “obrigatoriedade da chamada pública e busca ativa” dos estudantes da “rede estadual de ensino do Rio de Janeiro” (RIO DE JANEIRO, 2021, p. 1). Essa

chamada pública trata-se de uma estratégia de ampla divulgação nos meios de comunicação para informar a comunidade sobre as oportunidades educacionais disponíveis e os prazos para matrícula em diferentes níveis de ensino. Ressalta-se também neste documento:

Art. 3º A SEEDUC e a SECTI⁴ poderão promover **parcerias com outras instituições ou órgãos públicos para realizar a busca ativa** por crianças e adolescentes, em idade escolar obrigatória, que se encontrem fora da escola, ficando obrigadas a efetuar a sua imediata incorporação ao corpo discente da rede estadual de ensino (RIO DE JANEIRO, 2021, p. 1, grifo nosso).

Logo, com o intuito de abordar o problema persistente do abandono escolar na educação brasileira, intensificado durante o período de calamidade pública, a Busca Ativa, enquanto uma política pública educacional, cogita enfrentar essa questão. Trata-se de um procedimento disponibilizado por meio de uma plataforma gratuita oferecida a estados e municípios, tendo como seus desenvolvedores o Fundo das Nações Unidas para a Infância (UNICEF) e seus parceiros. Essa plataforma possibilita a identificação dos casos de evasão escolar de crianças e adolescentes, permitindo que os órgãos governamentais, em conjunto com diferentes áreas, como Saúde e Educação, possam elaborar um planejamento que facilite a reinserção e a permanência desses jovens na escola (UNICEF, 2021).

No terceiro estágio, a retomada às aulas se deu em 25 de outubro de 2021, com a Resolução da SEEDUC n.º 5993 de 19 de outubro de 2021, estabelecendo no artigo 1º que as “[...] unidades escolares de educação básica do sistema estadual de ensino retornarão, **exclusivamente**, às atividades presenciais [...]” (RIO DE JANEIRO, 2021, p. 34, grifo nosso). Esperava-se, nesse sentido, um aumento da frequência escolar, ao se perceber nos primeiros meses deste ano que a participação dos alunos em todo o estado, ficou aquém do esperado. Mas, faltando menos de dois meses para o encerramento das atividades escolares, grande parte dos alunos do CIEP 409 não retornou às aulas.

Diante desse cenário, a equipe diretiva, composta por coordenadora pedagógica, orientadora educacional e diretores geral e adjunto, elaboraram um plano de ação objetivando o regresso dos alunos afastados do ambiente acadêmico. Agora, para além do acolhimento promovido nas primeiras semanas de aula do mês

⁴SECTI: Secretaria de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação.

de março, interrompido abruptamente pelo agravamento do risco epidemiológico revelado no mapa de risco anteriormente citado, era preciso assegurar o direito à educação desses jovens. E, para alcançar esse objetivo, intensificaram-se as chamadas públicas para a retomada das aulas presenciais. Utilizando-se das redes sociais do CIEP, dos alunos, seus responsáveis, professores e demais funcionários da escola. E com essa ação conjunta, foi possível perceber o retorno de grande parte dos estudantes que estavam afastados.

Em relação aos critérios utilizados nos processos de avaliação escolar, já é uma prática comum nessa escola considerar a inclusão de todos os meios de participação dos alunos como critério avaliativo. Além disso, os exames finais abordaram “os conteúdos curriculares efetivamente oferecidos”, conforme orientações do Parecer CNE/CP n.º 11/2020 (BRASIL, 2020, p. 24). As diretrizes a respeito do critério avaliativo/classificatório adotado em 2020 foram continuadas neste período. Dessa forma, pretendia-se evitar a dupla penalização daqueles que enfrentaram adversidades devido às circunstâncias sociais e/ou familiares decorrentes do período de pandemia.

2 DIALOGANDO COM AUTORES E INSTRUMENTOS NORMATIVOS

As normativas referentes à Educação contidas neste trabalho, no cenário da pandemia de COVID-19, foram viabilizadas devido ao ordenamento jurídico brasileiro que reconhece o direito à educação como um direito constitucional. Prevista no Título II, que versa sobre os "Direitos e Garantias Fundamentais", a educação situa-se na lista dos direitos sociais descritos no artigo 6º da Carta Magna.

Art. 6º: São **direitos sociais a educação**, a saúde, a alimentação, o trabalho, a moradia, o transporte, o lazer, a segurança, a previdência social, a proteção à maternidade e à infância, a assistência aos desamparados, na forma desta Constituição (BRASIL, 1988, grifo nosso).

Neste sentido, a Constituição Federal preceitua o direito à educação como um “direito fundamental de natureza social”, precisando sua proteção ser garantida por ter relevância coletiva (DUARTE, 2007, p. 692). Na concepção adotada por Schwarz (2016):

Os direitos sociais são, assim, direitos exigíveis, conquanto para a sua eficácia plena seja imprescindível, de uma forma ou de outra, a intervenção legislativa e a ação do Poder Executivo, inclusive mediante a gestão e a implantação de políticas públicas (SCHWARZ, 2016, p. 267).

Na perspectiva do autor, os direitos sociais são protegidos pelo sistema judiciário e garantidos pelos órgãos governamentais. Por isso, qualquer descumprimento desses direitos e de suas garantias deverão ser justificados. Esse expediente é essencial para avaliar a legitimidade das ações implementadas em relação aos direitos sociais (SCHWARZ, 2016). Para o professor e jurista José Afonso da Silva:

[...] podemos dizer que os direitos sociais, como dimensão dos direitos fundamentais do homem, são prestações positivas proporcionadas pelo Estado direta ou indiretamente, enunciadas em normas constitucionais, que possibilitam melhores condições de vida aos mais fracos, direitos que tendem a realizar a igualização de situações sociais desiguais (SILVA, 2014, p. 288).

Similarmente, Werner (2021) entende que a educação, por ser um direito social previsto na Constituição, tem um grande alcance, e contribui, sobretudo, para a promoção da igualdade de oportunidades, para o desenvolvimento das pessoas e

do país na totalidade. Portanto, deve ser guiado pelos princípios da dignidade humana e igualdade, ressalta a autora.

Silva (2014) menciona que esse entendimento, em conjunção ao artigo 205 da Constituição Federal, o qual expressa: “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família [...]”, consolidam a universalidade no direito à educação, (BRASIL, 1988). E a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), acentua:

Art. 2º A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1996).

Esses preceitos, estão alinhados com a Lei n.º 8.069 de 13 de julho de 1990, Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), especificamente no seu artigo 4º, que estabelece a responsabilidade compartilhada entre família, comunidade, sociedade e poder público na garantia desse direito (BRASIL, 1990). Em síntese, o ordenamento jurídico brasileiro, respaldado pela Constituição Federal, reconhece a educação como um direito fundamental e social, cuja proteção e promoção são de responsabilidade pública. Sua relevância destaca-se pela compreensão do caráter democrático atribuído à educação. Em suma, é premente garantir medidas de proteção que assegurem aos estudantes a continuidade de seus estudos mesmo diante de desafios, como da pandemia de COVID-19, cujas implicações foram descritas no capítulo anterior. Uma das maneiras de exercitar o caráter democrático na educação é com o trabalho colaborativo.

Segundo Aarão em sua tese de doutorado: “A colaboração pode ser vista como uma parceria criativa entre os envolvidos, definida quanto às maneiras de abordar aquilo que se compartilha” (AARÃO, 2010, p. 40). Levando esse olhar para o campo educacional, a parceria entre estudantes e professores pode impulsionar o crescimento e a evolução acadêmica dos participantes na medida em que: “Esse agir com o outro, em um processo no qual envolvidos trabalham juntos para identificar barreiras e necessidades em busca da co-construção, co-autoria em relação ao conhecimento é o que caracteriza a colaboração” (AARÃO, 2010, p. 40).

Para Vigotski (2001) o termo colaboração está diretamente associado ao processo de aprendizagem. Segundo o autor, o conhecimento é construído a partir da interação social. Ao afirmar: “[...] em colaboração sempre pode-se fazer mais

[...]”, atribui a progressão do conhecimento previamente adquirido, mas ainda não amadurecido, ao processo intrínseco de colaboração (VIGOTSKI, 2001, p. 329). A partir do momento em que os conhecimentos prévios dos estudantes não são mais suficientes para transpor obstáculos que a própria evolução dos conteúdos impõe, é em colaboração, através da ajuda do outro, que se possibilita alcançar um novo aprendizado. E conclui:

Cabe definir sempre o limiar inferior da aprendizagem. Mas a questão não termina aí, e devemos ter a capacidade para definir também o limiar superior da aprendizagem. Só nas fronteiras entre esses dois limiares a aprendizagem pode ser fecunda (VIGOTSKI, 2001, p. 333).

Este processo foi definido por Vigotski e no Brasil é conhecido como Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). E podemos sintetizá-la, seguindo os esclarecimentos do tradutor, professor Paulo Bezerra: “Trata-se de um estágio do processo de aprendizagem em que o aluno consegue fazer sozinho ou com a colaboração de colegas mais adiantados o que antes fazia com o auxílio do professor [...]” (VIGOTSKI, 2001, p. X). Nessa perspectiva, a aprendizagem tem um desenvolvimento contínuo, portanto, a qualidade empregada nessas interações é um fator relevante para o padrão do conhecimento alcançado.

Boavida e Ponte (2002) acreditam que o trabalho colaborativo é extremamente útil no contexto educacional, principalmente naqueles em que as práticas predominantes são o autoritarismo e o individualismo. Para os autores, a colaboração trata-se de uma estratégia que possibilita a união de esforços em busca de alcançar um objetivo comum. Sendo assim, a dinâmica do trabalho colaborativo viabiliza o intercâmbio de experiências, o compartilhamento de competências e a promoção do diálogo e da reflexão. Esses elementos contribuem para a resolução de desafios complexos e auxiliam a busca de mudanças e inovações, aumentando a segurança e a eficácia do trabalho realizado.

No artigo intitulado: “Educando para a Cidadania em Contextos de Transformação”, as autoras Liberali, Magalhães, Lessa e Fidalgo (2006) enfatizam a importância da formação de cidadãos críticos na busca por uma mudança no processo de ensino-aprendizagem. Para isso consideram o trabalho colaborativo o principal ponto para atingir este objetivo. Nessa perspectiva, cabe aludir ao pensamento de Freire (1996), em sua obra *Pedagogia da Autonomia*, afirma: “[...]”

nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo” (FREIRE, 1996, p. 26). Evidencia-se, portanto, uma convergência no olhar dos autores sobre esse tipo de abordagem pedagógica. O trabalho colaborativo, sendo estruturalmente inclusivo e democrático, promove condições para o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes. Logo:

A essência da construção colaborativa está na ação conjunta para o agir com foco na compreensão de que a busca por uma perspectiva transformadora da sociedade não pode se realizar no isolamento, mas na solidariedade dos agentes envolvidos (LIBERALI; MAGALHÃES; LESSA; FIDALGO, 2006, p. 178).

O trabalho colaborativo discutido pelas autoras no referido artigo, foi implementado no contexto de uma escola pública, contando com a parceria da universidade e da comunidade escolar. Em seguimento, todos os atores envolvidos são partícipes do processo de aprendizagem por meio do estímulo ao diálogo e à troca de experiências. Esse modelo de trabalho coaduna-se com o pensamento de Freire (1987) na busca de uma educação para a democracia. Isso ocorre por ser oferecido ao estudante o direito de participar.

2.1 A monitoria como trabalho colaborativo

A partir da interação que o trabalho colaborativo preconiza, como ressaltado pelos autores citados neste texto, possibilita-se a criação de uma cultura democrática na escola. Esse entendimento é descrito na dissertação de Trindade (2009) quando a autora apresenta uma análise das obras do filósofo John Dewey. Segundo Trindade, Dewey propunha a ruptura do modelo de ensino tradicional e colocava a educação como impulsionadora dessa transformação. “A educação é, para Dewey, um processo social vasto e a escola a instituição que mais o personifica” (TRINDADE, 2009, p. 116).

Sob esse viés, Nóvoa (2022) destaca a necessidade do ambiente escolar ser um espaço de construção do conhecimento a fim de atingir os objetivos essenciais da educação, como o envolvimento dos alunos, a valorização do estudo, da

pesquisa e aprendizagem cooperativa. Esse autor, quando em suas colocações, expressa que as “estruturas” escolares “uniformes e rígidas” estão perdendo sua eficiência, também se contrapõe ao modelo tradicional de ensino. Somado a isso, Nóvoa (2022) pontua ser crucial professores terem flexibilidade e autonomia para proporem projetos educativos diversificados que favoreçam a participação ativa dos estudantes. Nessa concepção:

O trabalho escolar tem duas grandes finalidades: por um lado, a transmissão e apropriação dos conhecimentos e da cultura; por outro lado, a compreensão da arte do encontro, da comunicação e da vida em conjunto. É isto que a Escola sabe fazer, é isto que a Escola faz melhor (NÓVOA, A.; GANDIN, L. A.; ICLE, G.; FARENZENA, N.; RICKES, S, 2011, p. 537).

Entendendo a escola como espaço para aprendizagem e desenvolvimento humano, e na busca de uma estratégia que conduza a qualidade da instituição, Luckesi (2013) defende que sua gestão seja democrática. Esse modelo promove a distribuição de tarefas e confere a todos, em regime de colaboração, a responsabilidade pelo “[...] sucesso ou fracasso da escola em todos os seus aspectos [...]”, afirma o autor (LUCKESI, 2013, p. 211).

Retomando a Dewey, sob a ótica de Ferrari (2008), a atividade educativa deve se basear na promoção da cooperação. Consistindo, portanto, numa oportunidade para uma aprendizagem reflexiva e investigativa. Trindade (2009) complementa o olhar de Dewey para a educação quando orienta que a escola, além dos conteúdos, pautar suas relações pela democracia e pela liberdade. O professor Marcos Vinícius da Cunha, em entrevista concedida ao canal da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP), complementa que, na visão deweyana, a educação é uma prática social estabelecida na ação e em suas consequências (NA ÍNTEGRA..., 2016).

Isso implica em uma análise sobre o contexto social, pois a educação para Dewey não se aparta da vida, das relações sociais, da cultura, do que a sociedade almeja e do período histórico vivido, ressalta o professor (NA ÍNTEGRA..., 2016). A interação entre professor e aluno também é valorizada por Dewey. Todos são seres sociais que coabitam o mesmo espaço, portanto, ambos precisam participar do processo pedagógico. Desse modo, um projeto escolar será de fato educativo quando possibilitar aos sujeitos envolvidos novas experiências. E, ao se depararem

com um conflito, possam, através da reflexão e de ações deliberadas, encontrarem um ponto de equilíbrio, respeitando as particularidades dos indivíduos (TRINDADE, 2009).

Cabe destacar, neste trabalho, a abordagem adotada referente aos termos cooperação e colaboração. Fundamenta-se na concepção apresentada por Torres, Alcântara e Irala (2004), os quais defendem que muito embora os referidos conceitos tenham sido discutidos separadamente por diversos autores, na verdade, possuem a mesma finalidade, por nascerem a partir de dois pressupostos:

[...] de um lado, da rejeição ao autoritarismo, à condução pedagógica com motivação hierárquica, unilateral. De outro, trata-se de concretizar uma socialização não só pela aprendizagem, mas principalmente na aprendizagem (TORRES; ALCANTARA; IRALA, 2004, p. 6).

Com base nessa compreensão, esses termos serão utilizados com o intuito de transmitir uma perspectiva na qual os participantes dialoguem e trabalhem coletivamente de forma democrática, compartilhando e ampliando saberes, práticas desejáveis no ambiente de ensino. Ressalta-se, por conseguinte, que o trabalho que a atual pesquisa apresenta, favorece uma maior aproximação entre professor e aluno, diminuindo um processo hierárquico historicamente construído. Consolida-se, portanto, como um fazer pedagógico que se assemelha a concepção da sociedade democrática pensada por Dewey e sintetizada por Trindade como:

[...] um agrupamento social que, enquanto cuida da realização plena da experiência de cada um de seus membros, caminha em direção ao interesse comum, ancorando os seus passos em métodos que promovam uma cultura de tolerância e de espírito crítico; com isso, assegura a composição de sua unidade por sujeitos ativos e deliberadamente engajados nos fins de liberdade e emancipação humana (TRINDADE, 2009, p. 116).

Tais características se aproximam das metas que um professor deseja alcançar em seus alunos, afirma (CARVALHEIRO, 2008). Nesse sentido, a autora discute em sua dissertação, a monitoria na área de ciências, como estratégia pedagógica que possibilita ao professor promover condições educativas que assegurem aos alunos o despertar do pensamento crítico e da postura autônoma. O professor é, portanto, o “orientador e o coordenador” dessa atividade.

Morelatto e Soppels (2016) apresentam o “Projeto Aluno Monitor De Matemática” no contexto do Ensino Fundamental. Argumentam sobre os impactos

positivos da monitoria no ambiente escolar, ao atender aos professores, quando descentraliza as atividades pedagógicas, e aos alunos com baixo rendimento, que contam com mais um auxílio para aprofundar seus estudos. As autoras reconhecem o monitor como interlocutor desse processo.

O monitor tem a oportunidade de revisar e aperfeiçoar seus conhecimentos em conteúdos já estudados, além de valorizar a troca de experiências entre os próprios alunos, estimulando a solidariedade, superando o individualismo, auxiliando os professores no desenvolvimento da prática didática e facilitando a comunicação entre os mesmos para solucionar dúvidas e incentivar o trabalho em grupo (MORELATTO; SOPPELS, 2016, p. 208).

Essa é a mesma posição de Faria (2010) ao discutir em sua tese de doutorado a formação de monitores no Ensino Médio. Acrescenta, como papel dos monitores, a condução dos participantes dos grupos nos quais atuam a se envolverem nas discussões em busca de reconhecerem suas reais necessidades, a fim de que possam, em regime de colaboração, trabalhar em prol da melhoria da aprendizagem. Objetivo este também compartilhado por Morelatto e Soppels (2016) quando, em suas considerações finais, atribuem a queda no índice de reprovação ao auxílio que os monitores proporcionaram aos professores, desempenhando um trabalho colaborativo junto aos alunos com maiores dificuldades em Matemática.

Morelatto e Soppels (2016) veem com preocupação o fato dos estudantes, no decorrer da vida escolar, não terem suas dificuldades sanadas no momento adequado. Com isso, os alunos vão gradativamente perdendo o interesse em aprender esse componente curricular, como relatam as autoras. Portanto, há a necessidade de se repensar o ensino da Matemática, fato também discutido por Machado e César (2012) quando se referem ao elevado índice de reprovação que esta disciplina apresenta. Os autores acreditam no trabalho colaborativo aplicado em pequenos grupos como ação capaz de reverter tal situação.

3 CAMINHOS TRILHADOS E PROPOSTA METODOLÓGICA

A proposta metodológica ancora-se na pesquisa qualitativa que, nas palavras de D'Ambrosio (2020, p. 21), é aquela que: “Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas”. Construir uma proposta que parte do chão da escola e se dispõe a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem precisa ter esta perspectiva qualitativa.

Além disso, pensar em um cenário em que a pesquisa se dá de maneira diretamente atrelada à ação do professor/pesquisador na escola é ter o enfoque na pesquisa-ação que, segundo Tripp (2005), envolve um processo no qual a prática é melhorada através de ciclos de ação e investigação. Isso inclui planejamento, implementação, descrição e avaliação de mudanças na prática, resultando em aprendizado contínuo sobre a prática e o processo de investigação.

Com este olhar sobre o objeto deste trabalho, passamos a descrever o desenvolvimento da iniciativa da monitoria no CIEP 409.

O projeto de monitoria de Matemática abarcou as três turmas do 2º ano do Ensino Médio do turno da manhã do CIEP 409. Apesar de seu efetivo início com os estudantes ter sido no segundo bimestre de 2022, quando se iniciaram os objetos de conhecimento correspondentes ao referido ano escolar, a construção dos caminhos para sua implementação ocorreu ao longo do primeiro bimestre. Isso se deu após análise de uma avaliação diagnóstica aplicada aos estudantes na retomada das aulas presenciais.

A proposta dessa avaliação era conhecer a realidade dos alunos nesse período de retomada ao ensino em ambiente escolar, possibilitando aos professores, a partir dos resultados obtidos, elaborar o planejamento curricular tendo como base suprir as deficiências encontradas. E, diante da grande disparidade no nível de desenvolvimento dos alunos que esta avaliação revelou, tornou-se fundamental dedicar todo o primeiro bimestre ao resgate de conteúdos considerados imprescindíveis naquele momento. Assim sendo, nesse contexto, o processo de investigação retratado faz parte das primeiras ações para o desenvolvimento desta pesquisa.

A partir das reuniões pedagógicas efetuadas na primeira semana do mês de fevereiro de 2022, as quais pautaram-se na análise do contexto social, iniciaram-se as discussões sobre as estratégias para a retomada das aulas presenciais. Como

nos dois anos anteriores as avaliações de aprendizagem adotadas foram predominantemente classificatórias, para possibilitar a evolução dos alunos para as séries seguintes, conforme orientações da Resolução n.º 5879 de 13 de outubro de 2020 da SEEDUC/RJ, havia a necessidade de se obter um parecer sobre o nível de conhecimento alcançado pelos estudantes. Deste modo, para identificar de forma mais precisa quais objetos de conhecimento deveriam ser retomados, o corpo docente propôs, como relatado no início deste capítulo, a aplicação de uma avaliação diagnóstica, que passamos a analisar neste texto.

3.1 Avaliação diagnóstica como instrumento no processo

A avaliação foi totalmente objetiva e contemplou os 12 componentes curriculares do 2º ano do Ensino Médio com um total de 48 questões, 4 de cada área. Sua aplicação se deu em dois dias alternados, com 24 questões em cada dia. A equipe pedagógica julgou mais adequada essa estratégia de dividir a avaliação em duas etapas, por considerar que os alunos não estariam mais acostumados a permanecer um longo período realizando uma avaliação extensa. Portanto, essa organização teve em vista conter possíveis fatores de desgaste e fadiga os quais pudessem comprometer o desempenho dos estudantes durante a avaliação.

Cada professor ficou responsável por uma série/ano de escolaridade e a escolha das questões aconteceu ao longo da primeira semana de aula, pois esse início do período letivo foi de adaptação para toda a comunidade escolar. Embora houvesse uma urgência para a elaboração do planejamento curricular, este só foi desenvolvido após análise dos resultados obtidos na avaliação diagnóstica.

A princípio, foi possível perceber uma inquietação dos alunos já no momento da realização da avaliação. O incômodo gerado por não conseguirem entender o enunciado de algumas questões refletiu no comportamento durante a prova e muitos as entregaram antes do tempo mínimo estipulado de aplicação, atitude incomum para os estudantes daquela escola em situações semelhantes antes do período pandêmico.

Ao corrigir a prova de Matemática, aplicada no dia 16 de fevereiro de 2022, nota-se para além das dificuldades específicas de cada turma, as dúvidas recorrentes na maioria das atividades propostas, referiam-se a objetos de

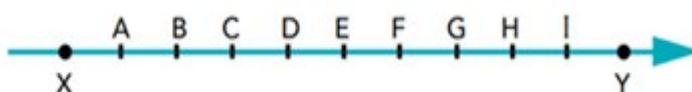
conhecimento dos anos finais do Ensino Fundamental. Por outro lado, os alunos tiveram melhor desempenho nas questões cujos conteúdos haviam sido revisados no final do ano anterior, na retomada das aulas presenciais.

As questões que compuseram a prova foram selecionadas dos Exames de Qualificação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) dos anos de 2015 e 2018 e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), anos 2016 e 2020. A escolha dos exames é uma prática comum do corpo docente do CIEP 409 e visa familiarizar os estudantes com a estrutura desses tipos de provas.

Os enunciados e gabarito das questões de Matemática utilizadas na avaliação diagnóstica podem ser encontradas no Anexo A. Aqui será feita uma análise das dificuldades dos alunos nas questões. Por se tratar de uma avaliação totalmente de múltipla escolha, a leitura precisa da real necessidade dos educandos foi comprometida. Logo, as observações aqui descritas ocorreram após a devolutiva aos alunos e sua correção em sala de aula, onde foi possível interagir diretamente com os alunos e saber exatamente de cada uma de suas dificuldades.

1 – (UERJ 2015: 2º Exame de Qualificação — Questão 22, p. 16) O segmento XY , indicado na reta numérica abaixo, está dividido em dez segmentos congruentes pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I .

Imagem 1 — Questão 22 - 2º Exame de Qualificação - UERJ 2015



Fonte: UERJ (2014, p. 16).

Admita que X e Y representam, respectivamente, os números $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{2}$. O ponto D representa o seguinte número:

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{8}{15}$

C) $\frac{17}{30}$

$$D) \frac{7}{10}$$

(Gabarito oficial: D)

O enunciado desta questão já foi o primeiro obstáculo relatado pelos alunos. Alegaram nunca terem lido a palavra 'congruentes' anteriormente, fato que impediu a interpretação do problema proposto. Ao explicar o significado da palavra durante a avaliação, muitos conseguiram chegar a $\frac{3}{2} - \frac{1}{6}$, mas, ainda assim, os conhecimentos necessários para o desenvolvimento dessa questão como noções sobre frações equivalentes e simplificação de frações não estavam consolidados.

Durante o debate dessa questão em sala de aula, observaram-se dois tipos predominantes de abordagens nas respostas dos alunos, ambas não conduzindo a um resultado correto. O primeiro tipo de abordagem consistiu na iniciativa de resolver o problema tentando subtrair 1,5 por 0,1666...; respostas obtidas na divisão de 3 por 2 e 1 por 6, respectivamente. Com esses resultados não conseguiram dar continuidade a resposta. Já o segundo tipo de abordagem envolveu a subtração de frações. Embora os que optaram por esse caminho tenham lembrado a operação, o resultado obtido a partir dela, $\frac{8}{6}$ foi interpretado como a medida de cada segmento e não do segmento XY.

2 – (UERJ 2018: 1º Exame de Qualificação — Questão 31, p. 21)

Imagem 2 — Questão 31 — 1º Exame de Qualificação — UERJ 2018



Fonte: UERJ (2017, p. 21).

Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que 0,4 onças é igual a x libras.

O valor de x é igual a:

A) 0,0125

B) 0,005

C) 0,025

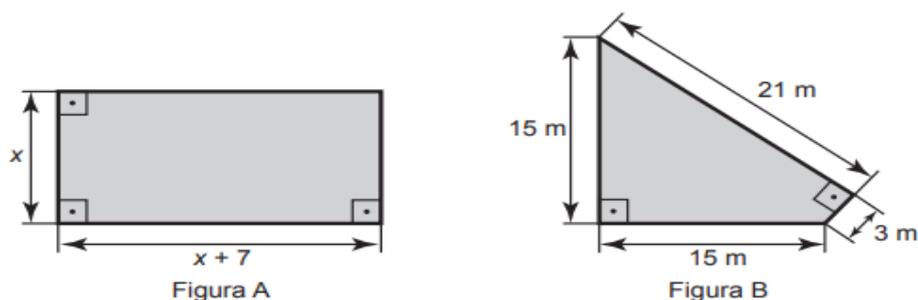
D) 0,05

(Gabarito oficial: C)

Nesta questão, observou-se a falta de familiaridade com os conhecimentos basilares de proporcionalidade. Apesar de ter sido a questão com o maior número de acertos das 4 aplicadas, não foi considerada a mais fácil pelos estudantes. O fato de muitos a terem acertado não refletiu necessariamente na compreensão do seu significado, mas sim nas tentativas que os levaram à única resposta possível. Os alunos apresentaram insegurança no conteúdo abordado, fato observado durante a discussão em sala de aula.

As estratégias utilizadas basearam-se em cálculos envolvendo os valores 0,4 e 16 expressos no enunciado, inicialmente realizaram a multiplicação de 16 por 0,4 e a divisão de 16 por 0,4. Essas operações foram escolhidas por serem consideradas mais simples, porém, como as respostas obtidas: 6,4 e 40, respectivamente, não figuravam nas opções fornecidas, decidiram proceder com a divisão de 0,4 por 16, chegando ao resultado de 0,025, o qual corresponde à resposta correta.

3 - (INEP — ENEM 2015 — 2º Dia — Caderno 5 – Amarelo — Questão 166, p. 27) *Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.*



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

- A) 7,5 e 14,5.
- B) 9,0 e 16,0. * Resposta correta: 16,0 e 9,0, respectivamente.**
- C) 9,3 e 16,3.
- D) 10,0 e 17,0.
- E) 13,5 e 20,5.

(Gabarito oficial: B)

Nesta questão, os objetos de conhecimento abordados foram: a área do retângulo, área do triângulo e equação do segundo grau. Por serem conteúdos trabalhados no último bimestre do ano de 2021, quando os alunos ainda cursavam o 1º ano do Ensino Médio, não houve grande dificuldade de entendimento.

4 - (INEP — ENEM 2018 — 2º Dia — Caderno 5 – Amarelo — Questão 149, p. 20) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas. Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

- A) 2×128
 B) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
 C) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
 D) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
 E) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

(Gabarito oficial: E)

A quarta atividade foi considerada a mais fácil pelos estudantes. Trata-se de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, conhecimento ainda não estudado, porém, para a sua resolução não se fez necessária a aplicação prévia desse conhecimento específico.

3.2 Pensando as ações pedagógicas rumo ao projeto de monitoria

Para o processo de resgate dos objetos de conhecimento, foi preciso elaborar um currículo resumido para cada área de ensino. Com essa reestruturação curricular, em Matemática, as unidades de conhecimentos numérico e geométrico, foram selecionadas para serem trabalhadas no primeiro bimestre. Havia a necessidade de ampliar a bagagem conceitual referente aos conjuntos numéricos, percepção advinda pela análise das respostas obtidas na avaliação diagnóstica. O campo geométrico contemplou os pré-requisitos necessários para prosseguir com o currículo planejado.

Tal abordagem visa ampliar a compreensão dos diversos aspectos e significados das operações matemáticas, conforme preconizado pelas diretrizes contidas na BNCC (BRASIL, 2018). E, a partir do segundo bimestre, segue-se a organização curricular regular do 2º ano do Ensino Médio (Quadro 2). Listas de exercícios foram elaboradas e os conteúdos abordados tinham como base o livro didático adotado na escola: “Matemática: ciência e aplicações”, volumes 1 e 2 (Iezzi *et al.*, 2016).

Quadro 2 — Planejamento Curricular resumido (2º ano do Ensino Médio)

1º Bimestre - (Livro 1) (07/02/2022 a 27/04/2022)	Capítulo 1 - Noções de conjuntos Capítulo 2 - Conjuntos numéricos
--	--

	Capítulo 12 - Áreas de figuras planas
2º Bimestre - (Livro 1) (28/04/2022 a 08/07/2022)	Capítulo 9 - Progressões
3º Bimestre - (Livro 2) (27/07/2022 a 07/10/2022)	Capítulo 5 - Matrizes Capítulo 6 - Sistemas lineares
4º Bimestre - (Livro 2) (10/10/2022 a 22/12/2022)	Capítulo 8 - Poliedros Capítulo 9 - Corpos redondos

Fonte: A autora (2023).

Para cumprir o planejamento adotado e reconhecendo que a carga horária de Matemática de 4 horas-aula por semana, distribuídas em 2 tempos na segunda-feira e 2 tempos na sexta-feira, seriam insuficientes para um trabalho de revisão mais aprofundado, solicitamos a direção da escola, excepcionalmente neste bimestre, a ampliação de carga horária. Decisão motivada pela compreensão de que, devido ao período de aproximadamente dois anos afastados dos bancos escolares, os estudantes precisariam de um suporte adicional para retomar a confiança em suas habilidades matemáticas. A carga horária extra seria destinada apenas ao reforço escolar de Matemática. Sendo assim, pretendendo não estender o tempo de permanência dos alunos na escola, disponibilizamos o primeiro tempo do turno da tarde das sextas-feiras para o desenvolvimento do reforço escolar, visto que as aulas regulares aconteciam no período da manhã.

Com o plano de reforço estruturado, o apresentamos à direção do CIEP 409. O diretor desta escola não só abraçou a proposta como buscou todos os meios possíveis para sua efetivação. Concedeu computador, projetor, impressora e, principalmente, reservou o auditório, espaço físico confortável e bem estruturado para as aulas serem conduzidas.

Dessa forma, com o apoio da direção, conversamos com as turmas sobre a ideia acima delineada. Nesse momento, surge o primeiro obstáculo, pois embora tenham considerado a proposta interessante, o segundo turno não foi um atrativo para a maioria dos estudantes. Eles relataram que haveria um maior engajamento no projeto de reforço se as aulas pudessem ser oferecidas nas janelas existentes no quadro de horário em curso, pois assim não haveria mais tempo ocioso na escola. Ademais, havia conflito de horários, para aqueles no qual o período da tarde era comprometido com outras atividades extracurriculares. Com esse impasse, uma

nova estratégia precisou ser considerada, pois os tempos disponíveis de cada turma, além de serem em diferentes dias da semana, não coincidiam com a disponibilidade da professora-pesquisadora.

3.3 Construindo o projeto de monitoria

Uma nova abordagem pedagógica foi apresentada, desta vez fundamentada em uma proposta na qual os estudantes pudessem participar ativamente das etapas do projeto. Esse modelo visa estabelecer uma cultura de colaboração entre alunos e professores, enfatizando o diálogo e o compartilhamento de ideias. Além disso, esse trabalho colaborativo intenciona mostrar que todos os envolvidos desempenham, em suas atribuições, papéis de protagonismo na ação desenvolvida.

Uma conduta embasada em ações, que promovam a participação e a integração no ambiente escolar, intencionalidades presentes nesta dissertação, nos remete à experiência da Escola da Ponte. José Francisco Pacheco, um educador que em 1976 propôs um “projeto educacional inovador” numa escola pública em Portugal, se opôs aos padrões tradicionais estabelecidos na cultura escolar (PACHECO, 2014, p. 131). Pacheco se pautou num modelo de educação não impositivo, buscando a promoção da “autonomia dos estudantes” (PACHECO, 2014, p. 131).

A inclusão faz parte do regulamento interno da Escola da Ponte. No artigo 14º evidencia: “A organização que esta escola coloca em prática, concretiza uma filosofia inclusiva e cooperativa que se define no princípio de que todos precisam de aprender e todos podem aprender uns com os outros” (PORTUGAL, s.d., p. 7). A Escola é pautada em três valores fundamentais: solidariedade, responsabilidade e autonomia. Nessa mesma direção surge, então, a idealização do projeto de monitoria em Matemática para as turmas de 2º ano do Ensino Médio no turno da manhã do CIEP 409. Os pilares desse trabalho foram sendo construídos gradativamente no decorrer do primeiro bimestre.

O processo de escolha dos monitores se deu através da conjunção de dois fatores, são eles: os alunos com as maiores pontuações na avaliação diagnóstica e, neste grupo, foram selecionados os que participaram mais ativamente das aulas, seja com perguntas, sugestões ou ajuda espontânea aos colegas de classe.

Inicialmente, dois alunos da turma 2001, quatro da turma 2002 e seis da turma 2003, foram convidados a participar do projeto para atuarem como monitores, totalizando 12 estudantes.

A distribuição dos monitores, em relação às turmas, estruturou-se da seguinte forma: a turma 2001, composta por 43 alunos, dos dois indivíduos selecionados para o projeto de monitoria, somente um aluno aceitou a proposta. Na turma 2002, composta por 35 alunos, dos quatro selecionados, dois aceitaram o convite. Por fim, a 2003, turma que obteve o melhor desempenho nas avaliações gerais, composta por 30 alunos, dos seis estudantes que receberam o convite, três aceitaram a oportunidade e tornaram-se monitores.

A intenção inicial era adequar o número de monitores às demandas específicas de cada turma, a fim de garantir um suporte adequado aos alunos durante as atividades de monitoria. No entanto, devido à 2001 ser quantitativamente a maior turma e possuir apenas um monitor, acordamos que os seis monitores poderiam auxiliar os estudantes de qualquer uma das três turmas participantes do projeto. Essa flexibilidade permitiu uma distribuição mais equitativa do trabalho, respeitando principalmente a disponibilidade dos monitores para atender às necessidades dos alunos que não fossem da sua turma de origem.

Após esses ajustes, antes de iniciarmos o projeto de monitoria efetivamente com as turmas, fizemos nossa primeira reunião. Nela estabelecemos a periodicidade de nossos encontros, o tempo de duração e o material a ser utilizado pelos monitores com os alunos assistidos. Em síntese, as reuniões se dariam nas tardes das sextas-feiras com duração máxima de uma hora-aula. E o material de estudo teve como espinha dorsal as questões do ENEM.

A escolha em trabalhar com essa avaliação em larga escala partiu da sugestão dos monitores, ao relataram haver uma preocupação, tanto da parte deles quanto dos colegas de classe, em relação às chances de entrarem em uma universidade. O tempo afastado da escola foi o principal argumento utilizado. Sendo assim, na busca por uma forma de utilizar essa avaliação a fim de proporcionar aos estudantes uma aprendizagem que fosse realmente significativa e não se pautasse apenas em uma preparação para a prova, abordamos a resolução de problemas como metodologia de ensino. Buscando para isso, promover o pensar sobre o problema e não apenas para resolver o problema.

Beatriz D'Ambrosio entende a resolução de problemas como:

[...] uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Essa proposta, mais atual, visa a construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. Através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da matemática envolvida (D'AMBROSIO, 1989, p.3).

E o problema, nesta pesquisa, segue o entendimento de Onuchic e Avellato (2011, p. 81), como “[...] tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”. Sendo assim, tomando como ponto de partida o interesse dos estudantes, adotamos como estratégia de sustentação do projeto de monitoria na dinâmica de um trabalho colaborativo, a utilização das questões do ENEM.

Durante as aulas, a professora apresentava à turma uma questão disparadora (Anexo B), conceituada nesta pesquisa como aquela que propicia aos estudantes reflexões sobre um tema que será explorado na aula em que foi proposto e em aulas subsequentes. E, posteriormente, disponibilizava uma sequência de exercícios, previamente selecionados de versões anteriores do ENEM, para serem utilizados como complemento ao assunto abordado em sala de aula. Os quais poderiam ser explorados com o auxílio dos monitores. Para De Oliveira (2016):

[...] diferentemente do vestibular tradicional, o ENEM não se resume à cobrança de conteúdos livresco, mesclando-os, na verdade, a situações-problema que envolvem o cotidiano, em franca adaptação às necessidades da sociedade [...] (DE OLIVEIRA, 2016, p. 286).

Sendo assim, as questões disparadoras, por serem aplicadas antes da introdução de um novo assunto, foram cuidadosamente escolhidas, de forma que pudessem ser desenvolvidas pelos estudantes a partir de um saber já adquirido. Buscamos, na escolha dessas questões, aquelas que apresentavam um menor grau de complexidade, de modo que os alunos se sentissem confortáveis para se envolverem na tarefa proposta. Os conhecimentos já consolidados pelos estudantes, seriam, portanto, os potencializadores de novas descobertas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

O professor De Oliveira (2016), quando se refere ao ENEM, acredita que:

[...] essa avaliação dá provas de que, ao se valer da contextualização e da interdisciplinaridade, valoriza o conhecimento prévio do aluno sem

desconsiderar, todavia, o conhecimento transmitido no ambiente da sala de aula [...] (DE OLIVEIRA, 2016, p. 283).

Ponte (2009), acredita que esse tipo de abordagem serve como estímulo para a promoção da participação ativa dos estudantes nas salas de aula e um estímulo à colaboração. Possibilita ao aluno, quando revisitam conceitos matemáticos em busca de resolver um problema, pensar novos caminhos, principalmente quando são oferecidas condições para que eles possam compartilhar experiências entre seus pares. Pensamento este, alinhado aos professores que entendem “[...] que o aluno aprende construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático” (FIORENTINI, 2009, p. 5).

Na aplicação das questões disparadoras, utilizamos o roteiro sugerido por Onuchic e Allevato (2011) no trabalho intitulado “Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas”. E no momento da resolução dos exercícios adicionais, são utilizados os passos de Pólya (1995), em “A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático”. Deste modo, unimos duas concepções de Resoluções de Problemas, sendo apresentadas como medidas complementares ao processo de ensino e aprendizagem.

A seguir, será realizada uma breve análise da metodologia utilizada nesses dois métodos. O roteiro sugerido pelas autoras para os professores trabalharem com os alunos “através de resolução de problemas” englobam as ações apresentadas no Quadro 3:

Quadro 3 — Resolução de Problemas – Roteiro sugerido por Onuchic e Allevato (2011)

Preparação do problema: o professor previamente escolhe um problema cujo objeto de conhecimento ainda não tenha sido apresentado à turma. Nesta pesquisa, é a questão disparadora.
Leitura individual: o professor entrega a questão disparadora a cada aluno e solicita que eles façam uma leitura cuidadosa. O objetivo, nesse momento, é que o aluno tente compreender individualmente o problema proposto.
Leitura em conjunto: em seguida, os alunos são convidados a efetuarem uma nova leitura, agora, reunidos em grupo. O objetivo é que reflitam sobre o enunciado e, entre seus pares, discutam sobre os dados do problema e o que se cogita alcançar com eles.

Resolução do problema: após toda reflexão proporcionada na etapa anterior, os alunos buscam resolver a questão proposta “em um trabalho cooperativo e colaborativo”, nos grupos em que estão inseridos.
Observar e incentivar: momento no qual o professor acompanha os grupos, observa os caminhos que estão percorrendo e os incentiva a contribuir com suas próprias percepções sobre a questão.
Registro das resoluções na lousa: um indivíduo de cada grupo é convidado pelo professor a ir à lousa registrar a solução encontrada.
Plenária: todos os alunos podem participar e discutir sobre as soluções dos colegas apresentadas na lousa.
Busca do consenso: após a plenária, o professor atua como “mediador das discussões” e tenta, com os alunos, “chegar ao consenso sobre o resultado correto”.
Formalização do conteúdo: “[...] o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática [...]”.

Fonte: A autora (2023) adaptado de (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83 e 84).

Como mencionado anteriormente, a aplicação e a discussão sobre a questão disparadora seguiam as orientações de Onuchic e Allevato (2011) e, após a formalização do conteúdo, último passo do roteiro apresentado pelas autoras (Quadro 3), a professora-pesquisadora apresentava uma nova questão a turma. Dessa vez, a questão era resolvida passo a passo pela professora, e seguiam-se os ensinamentos de Resolução de Problemas de Pólya. As etapas estão descritas no Quadro 4:

Quadro 4 — Resolução de Problemas – Método de Pólya (1995)

Compreender o problema: é necessário que os alunos compreendam o problema proposto.
Delinear um plano: a partir do entendimento do problema, é preciso estruturar um plano de ação. Para isso, o aluno deve verificar se conhece algum problema semelhante e, se houver, precisa pensar se esse problema pode ajudá-lo de alguma forma.
Executar o plano: com as duas etapas anteriores concluídas, segue-se a execução do plano.
Verificar a solução: nesse momento deve-se verificar se a solução encontrada faz sentido.

Fonte: A autora (2023) adaptado de (PÓLYA, 1995).

A síntese sobre a estratégia utilizada evidencia que a introdução de um problema, sem revelar imediatamente a natureza do conteúdo, desperta a

curiosidade dos alunos e a propensão para a investigação. Após essa etapa, ao explicar formalmente o conteúdo subjacente e fornecendo uma base sólida de conhecimento, há o retorno à questão inicialmente proposta, agora sob a luz dos passos de Pólya. Esta estratégia revelou-se ser particularmente benéfica para aqueles que ainda precisavam de uma estrutura mais clara e sistematizada para desenvolver seu raciocínio. Em consonância com as considerações finais do trabalho dos professores Gazzoni e Ost (2009, p.44):

“Utilizando-se o método proposto por Polya constata-se que, com mais facilidade, organizam-se as ideias e se obtém a solução do problema com uma melhor compreensão [...]. Também é possível encontrar problemas análogos e tornar mais clara uma estratégia para sua resolução. Certamente esse método não é uma ferramenta milagrosa, mas torna-se necessário e eficiente seu uso em um grande número de problemas, principalmente os que apresentam um maior nível de dificuldade” (GAZZONI; OST, 2009, p. 44).

Cabe destacar que o momento de formalização do conteúdo, embora fosse de iniciativa da professora, visando apresentar de forma estruturada novas técnicas aplicadas ao problema, os alunos eram incentivados a participar. E suas contribuições tornavam a compreensão do novo algo possível de se alcançar. A partir da interação entre esses atores, verificamos que a utilização dos dois métodos favoreceria a melhor compreensão tanto dos monitores, enquanto sujeitos para contribuir no aprendizado dos colegas, quanto dos próprios estudantes, que poderiam se organizar conforme lhe conviesse.

3.4 Vozes dos participantes: reverberando o projeto de monitoria

Os relatos aqui descritos foram obtidos em conversas informais, que foram gravadas, ou registros escritos entregues à professora. Cada participante ficou à vontade para escolher a melhor forma de expressar suas percepções acerca do projeto de monitoria desenvolvido na escola. Portanto, segue-se um apanhado dos olhares desses participantes ao longo dos três bimestres de realização do projeto.

Como o processo de aprendizagem não se estabelece de forma homogênea, o projeto de monitoria desenvolvido, nos moldes de um trabalho colaborativo, respeita o tempo de cada estudante e suas singularidades. Possibilita aos estudantes desenvolverem novas conexões quando trabalham em conjunto no processo de aprendizagem e construção do conhecimento. E o aprendizado acontece também fora do espaço de sala de aula.

Apesar do auditório ter sido disponibilizado para os monitores atenderem seus colegas, este local foi pouco utilizado por eles, que preferiram se reunir no refeitório ou no pátio da escola. Quando questionados sobre o motivo da escolha de tais ambientes em detrimento de um espaço bem equipado, o Quadro 5 mostra as respostas obtidas.

Quadro 5 — Escolhas

Aluno (1): Ficar em sala de aula o tempo todo cansa. Estou aprendo mais aqui fora do que lá dentro. Aqui posso ficar mais à vontade.
Monitor (G-2003): Todo mundo que passa por aqui [pátio] quer saber o que estamos fazendo, somos os nerds da escola.
Aluna (2): Minha mãe passou na calçada e me viu sentada no chão com meus amigos. Pediu ao porteiro para entrar na escola porque pensou que eu estava matando aula. Quando ela chegou perto da gente, todo mundo estava estudando. Estudando Matemática! Ela quase chorou de emoção.

Fonte: A autora (2023).

A escolha dos alunos por um ambiente de estudo fora da sala de aula, foi algo inesperado. Percebe-se que ao decidirem por locais de ampla visibilidade buscavam, ao se colocarem em evidência, despertar a curiosidade de todos no ambiente escolar. Fato que conferia um senso de importância aos envolvidos, sejam monitores ou não. O reconhecimento dos demais colegas, professores e até mesmo dos familiares, servia como estímulo a estes estudantes, pois percebiam que as atividades nas quais eles haviam se engajado eram reconhecidas e admiradas.

O Quadro 6 evidencia que nesse tipo de trabalho desenvolvido tanto a professora quanto os monitores atuaram como mediadores.

Quadro 6 — Percepções

Aluna (3): Antes eu ficava com dúvida a semana inteira e deixava alguns exercícios sem fazer esperando a aula da professora para perguntar [...]. Estudar com os monitores está ajudando muito a gente.
Aluno (4): Como a minha turma é muito grande, eu ficava com vergonha de perguntar na frente de todo mundo [...].
Monitor (K-2003): [...] a professora não precisa mais ficar o tempo todo no mesmo assunto, é muito chato para quem aprende mais rápido.
Monitor (L-2002) complementa: Agora nós ajudamos quem tem mais dificuldade.
Aluna (5): Com os monitores é bom porque não é a turma toda que precisa deles. Só procura quem está com muita dúvida mesmo.
Monitor (G-2003): No início a gente tinha muitas dúvidas, mas não era da matéria nova. Ficava difícil ajudar porque a gente não lembrava de muita coisa boba. Se tivesse algum exercício com frações era a treva.

Fonte: A autora (2023).

O Quadro 6 demonstra que os alunos sentiram-se incluídos quando atendidos pelos monitores e, além disso, tiveram a oportunidade de esclarecer suas dúvidas antes da aula subsequente. Em relação aos monitores, um ponto observado nesse momento específico do projeto, refere-se a insegurança que alguns monitores apresentaram em continuar participando da monitoria. Segundo relatos, quando os exercícios continham frações, eles não conseguiam desenvolver, logo não podiam ajudar aos colegas.

Neste cenário, a reunião entre os monitores e a professora-pesquisadora, que tinha como objetivos discutir o andamento do projeto e esclarecer dúvidas pontuais sobre o assunto estudado em sala de aula, sofreu uma alteração. Na semana em que esse incômodo foi relatado, a reunião transformou-se inteiramente em uma aula de revisão sobre operações com números racionais. E, ao final dessa revisão, o interesse dos monitores em se aprofundar nesse tema foi evidente. Perguntaram se na escola havia algum material no qual eles pudessem consultar, caso precisassem. Dessa forma, com aval da direção da escola, cada monitor recebeu uma coleção completa de matemática do Ensino Fundamental.

Na semana seguinte, antes mesmo de orientá-los sobre o volume que deveriam procurar para estudar sobre os conjuntos numéricos, eles já haviam se organizado e estudado por conta própria. Reuniram-se ao longo da semana, fora do

horário estipulado para o atendimento aos colegas, e convidaram os colegas do 3º ano para participarem do grupo de estudos da monitoria. Além disso, outros professores da escola foram procurados pelos monitores a fim de auxiliá-los em alguns pontos não compreendidos na leitura do livro didático. Identifica-se nesse momento uma postura autônoma dos monitores na busca de solucionar a dificuldade encontrada.

Cabe um adendo na descrição dos trabalhos realizados. O Quadro 7 mostra relatos de alguns professores e do diretor-adjunto:

Quadro 7 — Diálogos: sala dos professores

Professor de Matemática (J): Essa movimentação na escola está impactando todas as turmas. Meus alunos estão perguntando se farei esse trabalho com eles também.
Professor de Matemática (E): Os monitores da Elaine estão auxiliando os alunos do Ensino Fundamental. No intervalo tive a oportunidade de assistir à monitora (M-2002) tirando dúvidas dos alunos do 8º ano sobre dízimas periódicas. A explicação detalhada da aluna me chamou a atenção.
Professora de Matemática (D): Passei por lá [...]. A sala estava cheia, sem professor e sem bagunça. Milagre! [...] pelo que entendi, um grupo de alunos perguntou se a (M-2002) poderia explicar o que eles estavam estudando. [A professora está se referindo ao comentário do professor de Matemática (E) sobre a turma do 8º ano sendo orientada pela monitora (M-2002) no intervalo].
Diretor-adjunto (T): Então, conhecendo o 8º ano como conheço, assim que a monitora (M-2002) terminou de explicar a matéria, eu pedi para a turma descer [...]. [Embora os professores de Matemática tenham encontrado a turma do 8º ano estudando com a monitora (M-2002), o diretor-adjunto, por considerar a turma agitada, após a explicação da aluna, solicitou que os alunos esperassem o fim do intervalo no pátio].
Professora de Física (M): [...] ah, preciso falar do aluno (N). Ficou a semana inteira procurando a gente [...]. Sempre com um livro na mão. Olha, ele está sabendo, viu? Está falando igual a você, [estudando em profundidade] (<i>risos</i>). [...] esse menino não conversava com ninguém, agora está mais articulado, assertivo [...].

Fonte: A autora (2023).

Nota-se, a partir da análise dos diálogos contidos no Quadro 7, uma atmosfera mais solidária no ambiente escolar, contudo ainda vista com ressalvas por alguns. O que se justifica por ainda estarmos num processo de readaptação ao convívio social. E os primeiros meses do ano no CIEP 409 foram marcados por muitos desentendimentos entre os alunos. Nesse novo modelo de trabalho escolar,

com os alunos assumindo papéis centrais na execução das tarefas, embora tenha causado apreensão do corpo docente da escola, não houve nenhum momento de conflito.

Sobre o relato da professora de Física, que se mostrou surpresa frente a iniciativa do aluno (N), também cabe uma explicação. Na última semana de aula do 2º bimestre, este aluno se voluntariou para ser monitor de Matemática. Destaca-se que ele não foi previamente convidado a compor o grupo de monitores, pois não havia apresentado um bom resultado na avaliação diagnóstica e, durante as aulas, pouco interagiu com os colegas. Porém, segundo os monitores da turma 2003, turma a qual o aluno pertence, ele foi o mais assíduo nos encontros. O monitor (W-2003) mencionou que a partir do momento que o aluno (N) ganhou mais confiança, passou a auxiliar os colegas de classe de forma voluntária, tal atitude também foi observada pela professora pesquisadora. Assim, ao final do 2º bimestre, este estudante passou a compor o grupo de monitores.

Em relação à proposta utilizada para se trabalhar com as questões disparadoras, utilizando de forma complementar as perspectivas de resolução de problemas propostas por Onuchic e Allevato (2011) e Pólya (1995), destacamos no Quadro 8 algumas considerações:

Quadro 8 — Sobre as questões disparadoras

Aluna (6): A melhor parte da aula era quando a gente tentava resolver os exercícios que a professora trazia [...] quem quisesse podia explicar como fez. Ficava melhor ainda quando as respostas não batiam, (<i>risos</i>).
Aluno (7): A professora não ficava pressionando a gente para terminar rápido e nem obrigava a explicar para a turma toda. A melhor aula, sem dúvida!
Aluna (8): [...] no início eu demorava a entender [...] depois a mente foi abrindo. O passo a passo que a professora fazia no quadro me ajudava muito, principalmente quando os exercícios ficavam mais difíceis.
Aluno (9): Alguns exercícios eu sabia, mas só falando. Não conseguia escrever organizado no caderno. Peguei o jeito quando a professora explicava no final.
Monitor (M-2001): Eu consegui me abrir mais porque o exercício era novo pra todo mundo. Fui perdendo a vergonha.
Monitor (G-2003): Os problemas do ENEM até que são legais de fazer. No primeiro exercício de PA eu já me apaixonei.

Aluno (10): Quando a professora deu o papel com o primeiro exercício e pediu pra gente ler e tentar fazer, foi muito estranho, [...], mas foi bom. A turma toda começou a conversar sobre o exercício, mas não tinha bagunça.

Fonte: A autora (2023).

Sobre as considerações do Quadro 8, destacamos o momento da formalização do conteúdo dado pela questão disparadora pela professora. Foram utilizados os passos de Pólya e, como esses passos foram apresentados após as reflexões sobre a questão disparadora, ou seja, após o pensar sobre o problema, depreende-se que o momento foi oportuno para os estudantes que precisavam organizar seus argumentos. Ademais, foi possível perceber que, quanto maior o nível de complexidade, mais os alunos recorriam aos passos de Pólya, não de forma mecânica, mas reflexiva.

Em complementação aos estudos de sala de aula, algumas questões sobre o assunto trabalhado eram entregues aos estudantes. Essas questões eram selecionadas previamente com a contribuição dos monitores, os quais tinham a incumbência de pesquisar por aquelas que abordassem o conteúdo trabalhado até então. Durante a semana utilizavam os computadores da escola para essa pesquisa. Tinham como referência as provas anteriores do ENEM, no período compreendido entre 2015 e 2021, provas amarelas. E, após essa pesquisa, enviavam as questões a professora-pesquisadora, a qual cabia conferir e organizar para a impressão.

Um fato relatado pelos monitores nas reuniões foi em relação ao ENEM 2015. Observaram haver um número expressivo de questões de geometria. Alguns monitores chegaram à conclusão de que, se o aluno não tivesse afinidade com esse tema, seria prejudicado. A monitora (M-2002) constatou que, na verdade, tais questões poderiam ser resolvidas de forma simples, desde que todos soubessem trabalhar com razão e proporção. Na visão da aluna, esses eram os pontos mais importantes do ENEM. O monitor (W-2003) teve o mesmo entendimento e concluiu que só conseguiu fazer essa conexão a partir dos encontros às sextas-feiras.

Quadro 9 — Reflexões dos monitores

Monitor (K-2003): Eu gostei muito de ser monitor [...]. Aprendi muito mais do que nos anos anteriores [...] acho que poderia ter em outras matérias também. Eu tenho muita dificuldade em inglês, e se tivesse um monitor de inglês eu ia estudar com ele também [...]. Muita gente

<p>agradeceu minha ajuda [...] a mãe da aluna (11) me deu uma caixa de bombom porque eu ajudei a filha dela. [A partir da observação deste monitor, descobrimos que a aluna não conseguia digitar um número telefônico, conferir as horas, contar dinheiro, entre outras situações. Portanto, a aluna foi encaminhada à Assistente Social do CIEP e esta entrou em contato com a família, orientando os caminhos a serem seguidos. Posteriormente, a aluna foi diagnosticada com discalculia e prosseguiu com o tratamento].</p>
<p>Monitor (W-2003): Ser monitor me ajudou muito a perceber que às vezes as soluções são simples, é só ter organização e planejamento.</p>
<p>Monitor (N-2003): Eu fui o último a entrar. Minha experiência como monitor foi ótima. Acho que aprendi mais quando aceitei as formas diferentes de fazer o mesmo exercício. No início eu achava que só o meu jeito de fazer era o certo.</p>
<p>Monitora (M-2002): Quero muito ser professora de Matemática [...]. Sou a única menina do grupo (<i>risos</i>). Eu acho que poderia ter o projeto de monitoria nas matérias que as pessoas têm mais dificuldade [...]. As aulas da UERJ também estão me ajudando muito. [A aluna participava do treinamento para a segunda fase da OBMEP].</p>
<p>Monitor (L-2002): A gente quebra a cabeça no início, mas depois fica mais tranquilo. Eu aprendi como se deve estudar [...] ficou até mais fácil nas outras matérias.</p>
<p>Monitor (M-2001): Quando você perguntou se eu queria ser monitor, fiquei feliz e triste (<i>risos</i>). Tudo ao mesmo tempo. Ninguém naquela turma falava comigo direito [...], mas deu certo. A dificuldade que tive foi ajudar o grupo do Correção [...] eles só estudaram até o 7º ano! Aí fica difícil. [O aluno está se referindo aos estudantes oriundos do Programa de Correção de Fluxo Escolar⁵]. Eu acho que se tivesse monitor em todas as matérias ninguém mais iria parar de estudar. Quem precisa trabalhar, falta muito às aulas, aí não consegue acompanhar a matéria direito e acaba largando a escola [...] com mais monitores, eles poderiam ser ajudados [...]. Eu quase parei também [...]. A gente também podia receber um salário, não é professora? Sei lá, acho que 100 reais por mês [...].</p>
<p>Monitor (G-2003): Também acho! Minha irmã estuda na UFF e recebe bolsa de monitoria, por que o estado não paga a gente também? A minha vida é a maior correria. Eu saio todo dia da escola e fico na banca no lugar da minha mãe, menos nas sextas-feiras por causa das reuniões [...]. Nesse ano eu aprendi muito mais. Eu estava muito pilhado com o ENEM [...], mas acho que sabendo estudar a gente consegue qualquer coisa. [...] o melhor lugar na escola pra ficar é a biblioteca, mas precisa ter impressora e computador pra gente usar lá.</p>

Fonte: A autora (2023).

Considerando os relatos dos monitores, de início, houve dificuldades e desafios a serem enfrentados. À medida que o projeto foi se desenvolvendo, percebeu-se que novas interações surgiram, dentre as quais, destaca-se a

⁵ Programa de Correção de Fluxo Escolar: Atende alunos do Ensino Fundamental com distorção idade e série.

percepção do Monitor (K-2003) sobre as dificuldades reais de uma colega. O ambiente acolhedor e inclusivo propiciou que essa aluna expusesse suas dificuldades e, conseqüentemente, recebesse um acompanhamento pedagógico diferenciado.

Dentre as reflexões mais relevantes discutidas está a de que a prática da monitoria poderia ser extensiva a todas as matérias, visto que as dificuldades não se dão apenas em Matemática. Além disso, muitos alunos abandonam a escola por precisarem de um apoio extra e não terem suporte adequado. Neste ponto destacamos os que são oriundos de projetos educacionais descontinuados, como o Programa de Correção de Fluxo Escolar. Esses alunos foram incluídos em turmas regulares, nas quais o currículo trabalhado não correspondia ao programa inicial.

Outra questão considerada pelos monitores, refere-se ao suporte financeiro que essa prática poderia lhes proporcionar. Uma característica comum a muitos estudantes do Ensino Médio desta escola é realizarem algum tipo de trabalho, ainda que informal, no contraturno escolar. Portanto, para aqueles que precisavam trabalhar no contraturno, permanecer no projeto acarretava perda de renda.

Observa-se, nesse momento final do projeto, a sugestão dos monitores para o próximo ano, pela utilização da biblioteca da escola como local para a realização dos encontros da monitoria. Fato que contradiz as escolhas descritas no Quadro 5. De início, houve a necessidade de serem notados, mas à medida que o projeto foi se desenvolvendo, perceberam que precisavam de um local mais convidativo para estudar. Para os monitores, o auditório era muito grande, mas a biblioteca possuía o tamanho ideal para os atendimentos. Além de ter diversos livros para consultas, está numa localização privilegiada na escola. Situa-se no primeiro andar, de frente para todas as salas. E, sendo equipada com computadores e impressoras, seria o local de estudos mais adequado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerar o ambiente em que os alunos estão inseridos, bem como o contexto histórico social vivenciado, faz parte do papel de um educador, como afirmam D'Ambrosio e Lopes (2015). A constante reflexão sobre sua prática docente permite ao professor não se restringir a objetivos engessados propostos numa grade curricular, mas que possa agir para implementar ações que contribuam para suprir as necessidades dos discentes.

O presente trabalho, centrado na concepção e desenvolvimento de uma abordagem de monitoria destinada a apoiar os estudantes do Ensino Médio na superação das dificuldades em Matemática no contexto pós-pandemia de COVID-19, cumpre o propósito estabelecido ao trazer uma proposta fundamentada no chão da escola e em experiências vivenciadas. A estratégia de monitoria foi meticulosamente elaborada e experimentada em uma escola pública estadual do Rio de Janeiro.

A análise minuciosa do cenário global e local decorrente da pandemia de COVID-19 trouxe à tona a realidade enfrentada pelos estudantes, que se depararam com desafios excepcionais na compreensão de conceitos e algoritmos da Matemática escolar. Essa compreensão aprofundada permitiu a identificação dos pontos críticos nos quais a abordagem de monitoria se tornaria mais impactante.

A proposição do projeto de monitoria revelou-se uma solução promissora e bem aceita pelos diversos atores da escola. As barreiras pessoais, exacerbadas pela pandemia, foram consideradas e a abordagem foi ajustada para atender às necessidades dos alunos de forma a promover a inclusão de todos no processo.

A investigação da viabilidade e eficácia da monitoria, com enfoque nos horários vagos e nas aulas sob a supervisão do professor da turma, validou a abordagem colaborativa como uma ferramenta valiosa para a superação das dificuldades em Matemática. A colaboração entre os próprios estudantes e a orientação do professor proporcionaram um ambiente propício ao aprendizado e ao apoio mútuo.

A centralidade na interpretação das questões matemáticas do ENEM demonstrou ser uma abordagem estratégica, alinhada com as necessidades específicas dos estudantes. As dificuldades identificadas nesse aspecto foram

enfrentadas de maneira direcionada, preparando os alunos de forma mais eficaz para os desafios que encontrariam nesse exame crucial. E, neste sentido, o embasamento teórico sólido, ancorado nos trabalhos de autores como Onuchic, Allevato e Pólya, conferiu à abordagem de monitoria uma base conceitual robusta.

A descrição detalhada dos processos do projeto de monitoria e a apresentação de um material de suporte representam contribuições tangíveis que poderão beneficiar iniciativas semelhantes.

Assim, este trabalho, impulsionado pelo compromisso da autora em enfrentar as dificuldades de seus alunos e promover oportunidades de acesso à educação superior e ao mercado de trabalho, emerge como um esforço de contribuir para as discussões sobre as monitorias na escola. Nesta ideia, concebida como um catalisador que busca promover ação e reflexão a partir do olhar do professor, os benefícios percebidos localmente servem como testemunho do potencial transformador dessa abordagem e são um convite para pensar a educação como propõe Nóvoa:

A educação define-se sempre num tempo longuíssimo, nunca num tempo curto. Mas em certos momentos, como agora, as escolhas que temos perante nós são absolutamente decisivas. Não há inevitabilidades, nem histórias já determinadas. Em cada dia, definimos um pouco, ou muito, da história do futuro (NÓVOA, 2022, p.30).

REFERÊNCIAS

AARÃO, Sirlene Aparecida. **Sentidos-e-significados no Sistema de Atividade Monitoria**. 2010 Tese (Doutorado em Linguística Aplicada e Estudos da Linguagem) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BOAVIDA, Ana Maria; PONTE, João Pedro da. **Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas**. Lisboa: APM, 2002, p. 43-55. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10451/4069>>. Acesso em: 16 jun. 2023.

BONDUKI, Nabil. **As mudanças que a pandemia gerou nas cidades vieram para ficar**. CEE-FIOCRUZ. 2021. Disponível em: <<https://cee.fiocruz.br/?q=as-mudancas-que-a-pandemia-gerou-nas-cidades-vieram-para-ficar>>. Acesso em: 12 dez. 2022.

BORBA, Marcelo de Carvalho (Org) *et al.* **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6 ed. 1. reimp - Belo Horizonte: Autêntica, 2020. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BRASIL. Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno. PARECER CNE/CP n. 11/2020. Orientações Educacionais para a Realização de Aulas e Atividades Pedagógicas Presenciais e Não Presenciais no contexto da Pandemia. **Diário Oficial da União**, DF, 07 de julho de 2020, ano 2020. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=148391-pcp011-20&category_slug=julho-2020-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 26 fev. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação - Conselho Nacional de Educação - Conselho Pleno. Resolução CNE/CP n. 2, de 10 de dezembro de 2020. Institui Diretrizes Nacionais orientadoras para a implementação dos dispositivos da Lei nº 14.040, de 18 de agosto de 2020, que estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas pelos sistemas de ensino, instituições e redes escolares, públicas, privadas, comunitárias e confessionais, durante o estado de calamidade reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020. **Diário Oficial da União**: Seção 1, Brasília, 11 de dezembro de 2020, p. 52-55. Disponível em: <<https://pna=52&totalArquivos=185>>. Acesso em: 21 fev. 2023.

BRASIL. **Constituição**. (Redação dada pela Emenda Constitucional n.º 90, de 2015). Capítulo II: Dos Direitos Sociais. Brasília, DF. Senado Federal, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/ConstituicaoCompilado.htm>. Acesso em: 15 fev. 2023.

BRASIL. **Constituição**. República Federativa do Brasil de 1988. Brasília, DF. Senado Federal, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/ConstituicaoCompilado.htm>. Acesso em: 18 fev. 2023.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. LDB 9394/1996. BRASIL, 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 5 ago. 2023.

BRASIL. Lei n. 13.979, de 06 de fevereiro de 2020. Dispõe sobre as medidas para enfrentamento da emergência de saúde pública de importância internacional decorrente do coronavírus responsável pelo surto de 2019. **Diário Oficial da União**: Seção 01 n. 27, 07 de fevereiro de 2020, ano 2020, p. 1. Disponível em: <<https://pna=1&totalArquivos=77>>. Acesso em: 4 dez. 2022.

BRASIL. Lei n. 14.040, de 18 de agosto de 2020. Estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas durante o estado de calamidade pública reconhecido pelo Decreto Legislativo n.º 6, de 20 de março de 2020; e altera a Lei n.º 11.947, de 16 de junho de 2009. **Diário Oficial da União**: Seção 01, 19 de agosto de 2020, p. 4. Disponível em: <<https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=19/08/2020&jornal=515&pagina=4&totalArquivos=116>>. Acesso em: 26 jan. 2023.

BRASIL. Lei n. 8.069, de 12 de julho de 2023. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. **Diário Oficial**, Brasília, DF, 16 de julho de 1990. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L8069compilado.htm>. Acesso em: 23 abr. 2023.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular. 3ª ed. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Ministério da Saúde**. Secretaria de Vigilância em Saúde. Departamento de Vigilância Epidemiológica. Guia de vigilância epidemiológica - 7.ed. - Brasília: Ministério da Saúde, 2009.

BRASIL. Portaria n. 343, de 17 de março de 2020. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do Novo Coronavírus - COVID-19. **Diário Oficial da União**: Seção 01 n. 53, 18 de março de 2020, ano 2020, p. 39. Disponível em: <<https://pesqui9&totalArquivos=125>>. Acesso em: 5 dez. 2022.

CARVALHEIRO, Patrícia da Silva. **Monitoria como estratégia pedagógica para o ensino de ciências no ensino fundamental**. Porto Alegre, 2008 Dissertação -

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/17172>>. Acesso em: 10 jul. 2023.

CENTRO DE REFERÊNCIAS EM EDUCAÇÃO INTEGRAL. **Posicionamento sobre o Direito à Educação em Contexto de Pandemia**. 2021. Disponível em: <<https://educacaointegral.org.br/reportagens/posicionamento-sobre-o-direito-educacao-em-contexto-de-pandemia/>>. Acesso em: 10 jun. 2023.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM. Ano II N**, v. 2, p. 15-19, 1989.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E.. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 29, n. 51, p. 1–17, abr. 2015.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. *In: BORBA, Marcelo de Carvalho (Org) et al. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 6 ed. Atlântica, 2020, p. 11-22.

DE OLIVEIRA, T. S. O ENEM: breves considerações sobre importância avaliativa e reforma educacional. **Educação Por Escrito**, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 275–285, 2016. DOI: 10.15448/2179-8435.2016.2.23995. Disponível em: <<https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/poescrito/article/view/23995>>. Acesso em: 7 ago. 2023.

DUARTE, Clarice Seixas. A educação como um direito fundamental de natureza social. **Educação & Sociedade**, Centro de Estudos Educação e Sociedade (CEDES), v. 28, n. 100, p. 691-213, 28 out. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S0101-73302007000300004>>. Acesso em: 18 fev. 2023.

FARIA, Joelma Pereira de. **A Monitoria na Escola Pública: Sentidos e Significados de Professores e Monitores**. São Paulo, 2010 Tese (Linguística aplicada e estudos de linguagem) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Disponível em: <<https://repositorio.pucsp.br/handle/handle/14148>>. Acesso em: 10 jul. 2023.

FERRARI, Márcio. John Dewey, o pensador que pôs a prática em foco. **Nova Escola**, 01 out 2008. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/17111/john-dewey-o-pensador-que-pos-a-pratica-em-foco>>. Acesso em: 10 fev. 2023.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, 2009. DOI: 10.20396/zet.v3i4.8646877. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877>>. Acesso em: 7 ago. 2023.

FIORENTINI, Dario. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? *In*: BORBA, Marcelo de Carvalho (Org) *et al.* **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6 ed. 1. Reimp - Belo Horizonte: Autêntica, 2020. cap. 2, p. 53-83. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. 29 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. 148 p.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987. 184 p.

GAZZONI, Alcibiades; OST, Augusto. A resolução de um problema: soluções alternativas e variações na formulação. **VIDYA**, v. 28, n. 2, p. 10, 2008.

IBGE - PESQUISA NACIONAL POR AMOSTRA DE DOMICÍLIOS CONTÍNUA ANUAL - 4º TRIMESTRE. **Distribuição percentual de pessoas de 10 anos ou mais de idade que não utilizaram Internet no período de referência dos últimos três meses**: Condição de estudante: Estudantes. 2019. Disponível em: <<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7352#resultado>>. Acesso em: 25 jan. 2023.

IBGE. **Cidades@/Rio de Janeiro/São Gonçalo/Panorama**: População estimada. 2021. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rj/sao-goncalo/panorama>>. Acesso em: 23 fev. 2023.

IBGE. **PNAD Contínua TIC 2019**: internet chega a 82,7% dos domicílios do país. Agência IBGE Notícias. 2021. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/30521-pnad-continua-tic-2019-internet-chega-a-82-7-dos-domicilios-do-pais>>. Acesso em: 11 dez. 2022.

IBGE. **PNAD Contínua**: Internet chega a 88,1% dos estudantes, mas 4,1 milhões da rede pública não tinham acesso em 2019. Agência IBGE Notícias. 2021. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias-ica-nao-tinham-acesso-em-2019>>. Acesso em: 23 jan. 2023.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações. 9 ed. São Paulo: Saraiva, v. 1, 2016.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações. 9 ed. São Paulo: Saraiva, v. 2, 2016.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2009. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo – Aplicação regular. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2013/06/enem-2009-2-cancelado.pdf>>. Acesso em 19 ago. 2023.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2015. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo – Aplicação regular. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/2015_PV_impreso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2022.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2016. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo - Aplicação regular. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impreso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2022.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2017. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo - Aplicação regular. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impreso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2022.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2018. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo - Aplicação regular. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2022.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2019. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo - Aplicação regular. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impreso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2022.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2020. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo - Aplicação regular. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impreso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2022.

INEP. Provas e Gabaritos. **ENEM**, 2021. 2º Dia - Caderno 5 - Amarelo - Aplicação regular. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impreso_D2_CD5_ampliada.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2022.

LIBERALI, Fernanda Coelho *et al.* Educação para a cidadania em contextos de transformação. **the ESpecialist**, v. 27, n. 2, p. 169-188, 2006.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar [livro eletrônico]**: estudos e proposições. 1 ed. São Paulo: Cortez Editora, 2013.

TORRES, Patrícia Lupion; ALCANTARA, Paulo R.; IRALA, Esrom Adriano Freitas. Grupos de consenso: uma proposta de aprendizagem colaborativa para o processo de ensino-aprendizagem. **Revista diálogo educacional**, v. 4, n. 13, p. 1-17, 2004. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/pdf/1891/189117791011.pdf>>. Acesso em: 5 jun. 2023.

MACHADO, Ricardo; CÉSAR, Margarida. Trabalho colaborativo e representações sociais: contributos para a promoção do sucesso escolar em matemática. **Revista Interacções**, v. 8, n. 20, 2012. Disponível em: <<https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/495>>. Acesso em: 11 jul. 2023.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Guia de Implementação de Protocolos de Retorno das Atividades Presenciais nas Escolas de Educação Básica**. 2021. Disponível em: <<https://www.gov.br/mec/pt-br/media/GuiaderetornodasAtividadesPresenciaisnaEducaoBsica.pdf>>. Acesso em: 3 mar. 2023.

MORELATTO, Tânia; SOPPELS, Janete Jacinta Carrer. Projeto aluno monitor de matemática. **Scientia Cum Industria**, Porto Alegre, v. 4, n. 4, p. 207-211, 2016.

NA ÍNTEGRA: Marcos Vinícius-John Jewey. [S.l.: s.n.], 2016. 1 vídeo (40 min). Publicado pelo canal UNIVESP. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=OnCN0LJFQhY>>. Acesso em: 5 jul. 2023.

NÓVOA, A.; GANDIN, L. A.; ICLE, G.; FARENZENA, N.; RICKES, S. Pesquisa em Educação como Processo Dinâmico, Aberto e Imaginativo: uma entrevista com António Nóvoa. **Educação & Realidade**, [S. l.], v. 36, n. 2, 2011. Disponível em: <<https://seer.ufrgs.br/index.php/educacaoerealidade/article/view/21170>>. Acesso em: 26 fev. 2023.

NÓVOA, António. A pandemia de Covid-19 e o futuro da Educação. **Revista Com Censo: Estudos Educacionais do Distrito federal**, #22, v. 7, n. 3, ago. 2020. Disponível em: <<https://periodicos.se.df.gov.br/index.php/comcenso/article/view/905>>. Acesso em: 5 fev. 2023.

NÓVOA, António. **Escolas e professores**: proteger, transformar, valorizar/colaboração Yara Alvim. Salvador, Bahia, 2022. 116 p. Disponível em: <<https://rosa-o-2022.pdf>>. Acesso em: 7 fev. 2023.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/72994>>. Acesso em: 7 ago. 2023.

OPAS - ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE. **Histórico da Pandemia de COVID-19**. 2022. Disponível em: <<https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19>>. Acesso em: 29 nov. 2022.

PACHECO, José. **Aprender em comunidade**. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2014.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático/ G. Pólya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. reimpr - Rio de Janeiro: interciência, 1995. 196 p.

PONTE, João Pedro da. **O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. Interações**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. 2009, p. 96-114. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4073>>. Acesso em: 11 jul. 2023.

PORTUGAL. Educação. Escola Básica da Ponte. Regulamento Interno. Disponível em: <<http://www.escoladaponte.pt/wp-content/uploads/2023/05/Regulamento-Interno-Escola-da-Ponte.pdf>>. Acesso em: 02 out. 2023.

PRONKO, Marcela. Educação pública em tempos de pandemia. *In*: BATISTA SILVA, Letícia (Org.); VIANNA DANTAS, André (Org.). **Crise e pandemia**: quando a exceção é regra geral. Rio de Janeiro: Escola Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio/Fundação Oswaldo Cruz, 2020. 249 p, p. 113-129. Disponível em: <https://www.epsvj.fiocruz.br/sites/default/files/crise_e_pandemia.pdf>. Acesso em: 1 nov. 2022.

RIO DE JANEIRO (Estado). Lei n. 9.377, de 22 de julho de 2021. Estabelece a obrigatoriedade da chamada pública e busca ativa de crianças, adolescentes, jovens e adultos na rede estadual de ensino do Rio de Janeiro e dá outras providências. **Diário Oficial**, Rio de Janeiro, 23 de julho de 2021, p. 1. Disponível em: <http://www.ioerj.com.br/portal/modules/conteudoonline/mostra_edicao.php?session=VFhwbmVFNTZVa1pTUkZsMFQxUmFSRkY1TURCU1JGskNURIZLUjFGVVJYUk9WVlpDVG10Sk1GSIVaM2xOVkZVdw==>. Acesso em: 11 mar. 2023.

RIO DE JANEIRO (Estado). Resolução Conjunta SEEDUC/SES n. 1536, de 25 de janeiro de 2021. Institui protocolos e orientações complementares para atendimento escolar nas unidades da Rede Estadual e Rede Privada de ensino vinculadas ao Sistema Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, no período de pandemia da Covid-19 e dá outras providências. **Diário Oficial**, Rio de Janeiro, 27 de janeiro de 2021, p. 5. Disponível em: <<http://www.ioerj.com.br/portal/modules/conteudoonline/mostraedicaGTIU1NIdYUIBWRVYzVGxWYVJGskVWWHBSVkVGNQ==>>. Acesso em: 8 abr. 2023.

RIO DE JANEIRO (Estado). Resolução n. 5879, de 13 de outubro de 2020. Estabelece de forma excepcional normas para a organização e reestrutura da oferta dos cursos de ensino fundamental e médio, no ano letivo de 2020, e dá outras providências. **Diário Oficial**, Rio de Janeiro, 14 de outubro de 2020, p. 10. Disponível em: <http://www.ioerj.com.br/portal/modules/conteudoonline/mostra_edicao.php?se

ssion=VDBSSk1FMUVUa1pPZWxWMFRrUkpkMDVUTURCT2VscERURIZLUmxGV VJYUIJhbXQ1VWtSc1JFMVZUa1ZPTUVVdw==&p=MTA=&tb=UkVTT0xVw4fDg08g NTg3OSYjMDEzOw==>. Acesso em: 3 mai. 2023.

RIO DE JANEIRO (Estado). Resolução SEEDUC n. 5930, de 22 de abril de 2021. Dispõe sobre os protocolos de atendimento escolar nas unidades do Sistema Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, no período de pandemia da Covid-19 e dá outras providências. **Diário Oficial**, Rio de Janeiro, 23 de abril de 2021, p. 13-14. Disponível em: <http://www.ioerj.com.br/portal/modules/conteudoonline/mostra_edicao.php?session=VVZSYVExSnFWa0pQVIVWMFVsVkpNMUpETURCT2VsRjZURIZGTWxKcVJYUk5SR3N5VW10Rk1FNXJSWGhPTUZWNA==&p=MTM=&tb=UkVTT0xVw4fDg08gNTkzMCYjMDEzOw==>. Acesso em: 8 abr. 2023.

RIO DE JANEIRO (Estado). SEEDUC. Resolução n. 5993, de 19 de outubro de 2021. Dispõe sobre as diretrizes para o retorno das aulas presenciais no sistema estadual de ensino do Rio de Janeiro, em todas suas etapas e modalidades, e dá outras providências. **Diário Oficial**, 20 de outubro de 2021, p. 34. Disponível em: <http://www.ioerj.com.br/portal/modules/conteudoonline/mostra_edicao.php?k=442FD7B9-DB5P0-481F-B02D-EF11199E1ED0>. Acesso em: 4 mar. 2023.

SANTOS JÚNIOR, Irapoan Bertholdo dos. **Percepção de alunos da Seeduc/RJ sobre o ensino on-line de caráter emergencial durante a pandemia**. Revista Educação Pública. v.20, nº 30, 11 de agosto, 2020. Disponível em: <<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/30/percepcao-de-alunos-e-professores-da-seeducrj-sobre-o-ensino-ion-linei-de-carater-emergencial-durante-a-pandemia>>. Acesso em: 25 fev. 2023.

SCHWARZ, Rodrigo Garcia. Os direitos sociais como direitos fundamentais e a judicialização de políticas: algumas considerações. **Revista AJURIS**, Porto Alegre, v. 43, n. 141, dez 2016. Disponível em: <http://www.mpsp.mp.br/portal/page/portal/documentacao_e_divulgacao/doc_biblioteca/bibli_servicos_produtos/bibli_informativo/bibli_inf_2006/Rev-AJURIS_141.10.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2023.

SEEDUC-RJ. **Alunos que não possuem dispositivo eletrônico terão prioridade em retorno das aulas presenciais**. Secretaria de Educação. 2021. Disponível em: <<https://www.seeduc.rj.gov.br/not%C3%ADcias#h.m2i24a7fw2xj>>. Acesso em: 20 fev. 2023.

SEEDUC-RJ. **Aulas na rede estadual começam nesta segunda-feira: (1º de março)**. Secretaria de Educação. 2021. Disponível em: <<https://www.seeduc.rj.gov.br/not%C3%ADcias#h.svgkcfk0gmn>>. Acesso em: 20 fev. 2023.

SEEDUC-RJ. **Caderno de atividades pedagógicas de aprendizagem autorregulada**: Caderno do aluno - Matemática - 2º ano do Ensino Médio. Rio de Janeiro, 2012.

SEEDUC-RJ. **Currículo Básico - Ensinos Fundamental e Médio**: Currículo Mínimo de Matemática. 2012. Disponível em: <<https://seeduconline.educa.rj.gov.br/curr%C3%ADculo-b%C3%A1sico>>. Acesso em: 27 mar. 2023.

SEEDUC-RJ. **Secretaria de Educação lança aplicativo de ensino remoto**. Secretaria de Educação. 2021. Disponível em: <https://www.seeduc.rj.gov.br/not%C3%ADcias#h.v3eyh6vz6dgo>>. Acesso em: 20 fev. 2023.

SEEDUC-RJ. **SEEDUC em números**: Informações institucionais. Secretaria de Educação. 2023. Disponível em: <<https://www.seeduc.rj.gov.br/mais/seeduc-em-n%C3%BAmeros>>. Acesso em: 20 fev. 2023.

SES/RJ. **19ª atualização - Mapa de risco da Covid-19: estado permanece em bandeira amarela com baixo risco**. 2021. Disponível em: <<https://www.saude.rj.gov.br/noticias/2021/02/19-atualizacao-mapa-de-risco-dacovid-19-estado-permanece-em-bandeira-amarela-com-baixo-risco>>. Acesso em: 5 mar>. 2021.

SES/RJ. **19ª atualização - Mapa de risco da Covid-19: estado permanece em bandeira amarela com baixo risco**. 2021. Disponível em: <<https://www.saude.rj.gov.br/noticias/2021/02/19-atualizacao-mapa-de-risco-da-covid-19-estado-permanece-em-bandeira-amarela-com-baixo-risco>>. Acesso em: 5 mar>. 2021.

SILVA, José Afonso da. **Curso de Direito Constitucional Positivo**. 37 ed. Brasil: Malheiros Editores, 2014.

TIC EDUCAÇÃO 2019: Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras. Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2020. 332 p. Disponível em: <https://nic.br/media/docs/publicacoes/2/20201123090444/tic_edu_2019_livro_e_letronico.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2023.

TRINDADE, Christiane Coutheux. **Educação, Sociedade e Democracia no pensamento de Jhon Dewey**. São Paulo, 2009 Dissertação (Faculdade de Educação) - Universidade de São Paulo. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-10092009-155352/pt-br.php>>. Acesso em: 25 jun. 2023.

TRIPP, David. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005.

UERJ. **1º Exame de Qualificação**: Vestibular Estadual 2018. 2017. Disponível em: <https://www.vestibular.uerj.br/wpcontent/uploads/2019/03/2018_1eq_prova.pdf>. Acesso em: 14 mai. 2023.

UERJ. **2º Exame de Qualificação**: Vestibular Estadual 2015. 2014. Disponível em: <https://www.vestibular.uerj.br/wp-content/uploads/2019/04/2015_2eq_prova.pdf>. Acesso em: 14 mai. 2023.

UNICEF. Busca Ativa Escolar: em crises e emergências. **UNICEF**, 2021. Disponível em: <<https://buscaativaescolar.org.br/criseseemergencias/>>. Acesso em: 9 jun. 2023.

VIGOTSKI, L. S. (1934). **A construção do pensamento e da linguagem**. 1 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001. (Tradução de Paulo Bezerra).

WERNER, Patrícia Ulson Pizarro. **Direito à Educação na Constituição Federal**. 2 ed. Enciclopédia jurídica da PUC-SP. Celso Fernandes Campilongo, Alvaro de Azevedo Gonzaga e André Luiz Freire (coords.). Tomo: Direito Administrativo e Constitucional. Vidal Serrano Nunes Jr., Maurício Zockun, Carolina Zancaner Zockun, André Luiz Freire (coord. de tomo): São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2021. Disponível em: <<https://enciclopediajuridica.pucsp.br/verbete/83/educacao-2/direito-a-educacao-na-constituicao-federal>>. Acesso em: 15 fev. 2023.

ANEXO A – Avaliação Diagnóstica

1 – (UERJ 2015: 2º Exame de Qualificação — Questão 22, p. 16) O segmento XY, indicado na reta numérica abaixo, está dividido em dez segmentos congruentes pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I.



Admita que X e Y representam, respectivamente, os números $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{2}$. O ponto D representa o seguinte número:

- A) $\frac{1}{5}$
- B) $\frac{8}{15}$
- C) $\frac{17}{30}$
- D) $\frac{7}{10}$

(Gabarito oficial: D)

2 – (UERJ 2018: 1º Exame de Qualificação — Questão 31, p. 21)



Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que 0,4 onças é igual a x libras.

O valor de x é igual a:

A) 0,0125

B) 0,005

C) 0,025

D) 0,05

(Gabarito oficial: C)

3 - (INEP — ENEM 2015 — 2º Dia — Caderno 5 – Amarelo — Questão 166, p. 27) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

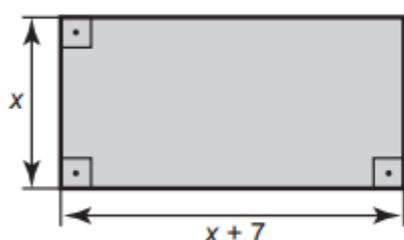


Figura A

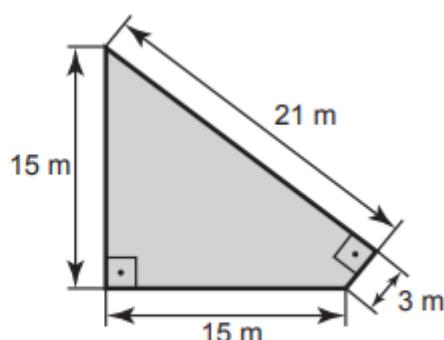


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

A) 7,5 e 14,5.

B) 9,0 e 16,0. * Resposta correta: 16,0 e 9,0, respectivamente.

C) 9,3 e 16,3.

D) 10,0 e 17,0.

E) 13,5 e 20,5.

(Gabarito oficial: B)

4 - (INEP — ENEM 2018 — 2º Dia — Caderno 5 – Amarelo — Questão 149, p. 20) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas. Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

A) 2×128

B) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$

C) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

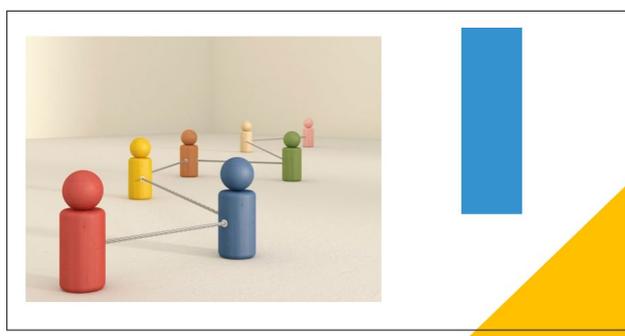
D) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$

E) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

(Gabarito oficial: E)

Monitoria dos/para estudantes na escola: questão disparadora e lista de problemas

COM QUESTÕES DO ENEM



Progressão Aritmética
Progressão Geométrica
Matrizes e Sistemas Lineares
Geometria Plana e Espacial

ESTE MATERIAL É PARTE DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROFMAT FFP-UERJ “A monitoria como trabalho colaborativo: uma experiência no contexto de uma escola pública no pós-pandemia”

Autoria de Elaine Cristina da Cruz Jorge de Assis
Orientadoras: Fernanda Pereira Rodrigues e Priscila Cardoso Petito
Com colaboração de Isabelle Alves de Oliveira (Prodocência-UERJ)

2023

Sobre o material

“Saber que devo respeito à autonomia, à dignidade e à identidade do educando e, na prática, procurar a coerência com este saber, me leva inapelavelmente à criação de algumas virtudes ou qualidades sem as quais aquele saber vira inautêntico, palavreado vazio e inoperante.”

Paulo Freire em *Pedagogia da Autonomia* (2011, p.61)

Este caderno de atividades foi cuidadosamente elaborado como um conjunto de questões de avaliação em larga escala de ingresso no ensino superior, com o intuito de ser utilizado com turmas do segundo ano do Ensino Médio. A construção desse material parte de uma experiência com alunos monitores no contexto de uma escola pública da região metropolitana do Rio de Janeiro, com atividades que foram desenvolvidas com o propósito de incentivar o protagonismo dos estudantes, estimulando seu processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Ao elaborar este caderno, buscamos criar um material que não apenas avaliasse o conhecimento adquirido pelos estudantes, mas que também os engajasse ativamente em sua própria educação. Reconhecemos a importância de envolver os alunos de forma significativa em seu processo de aprendizagem, permitindo que se tornem protagonistas de seu próprio percurso educacional.

Cada atividade presente neste caderno foi cuidadosamente selecionada para abordar os principais conceitos matemáticos ensinados durante o segundo ano do Ensino Médio. Além disso, as questões foram elaboradas de maneira a incentivar o raciocínio crítico, a resolução de problemas e a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos a partir de questões disparadoras, usadas na estratégia de atuação de alunos monitores e com uso da metodologia de resolução de problemas de George Pólya, em “A Arte de Resolver Problemas”. Cada tema, além da questão disparadora, concebida para ser tratada pelo professor com a turma e que traz o passo a passo de uma estratégia possível de solução, aborda possíveis desdobramentos do tema e uma sequência de exercícios que se espera que o aluno resolva com autonomia e/ou com colegas monitores.

Esse material pode contribuir para aprimorar o planejamento das aulas, adaptar estratégias de ensino e oferecer suporte individualizado aos estudantes, promovendo uma educação mais eficaz e inclusiva. Ele é um convite para que o professor, a partir do contexto do seu espaço/saber escolar, (re)pense práticas e novas estratégias.

As autoras

Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

Questão disparadora de PA

(ENEM 2018) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça. Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

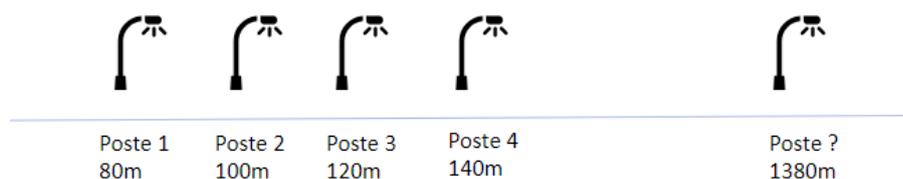
- A. R\$ 512.000,00
- B. R\$ 520.000,00
- C. R\$ 528.000,00
- D. R\$ 552.000,00
- E. R\$ 584.000,00

Tratamento do problema

Etapa 1 - compreender o problema

Perguntas: Quais são os dados do problema? Quais são as incógnitas? Quais são as condições ou restrições? É possível satisfazer as condições pedidas? Elas são suficientes para determinar a incógnita? São não redundantes? Não contraditórias?

Neste momento, espera-se que seja feito algum desenho ou esquema que o aluno use para chegar à conclusão que o primeiro termo da PA é 80 e o último é 1380. Algo como:



Desta forma, o aluno pode perceber que precisa saber que poste é esse que está a 1380m da praça. Isto é, qual a quantidade de elementos na sequência das distâncias (80,100,120,140,...,1380), que é uma PA.

Etapa 2 - delinear um plano

Perguntas: Você conhece algum problema semelhante? Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema? Você conhece resultados ou fórmulas que possam ajudar? Você pode enunciar o problema de forma diferente para ajudar, se for preciso? Você consegue resolver parte do problema?

Naturalmente, é esperado que o aluno recorra ao uso da expressão que dá o termo geral da PA: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde ele busca o valor de n .

Etapa 3 - executar o plano

Perguntas: Você percebe claramente e pode argumentar que cada passo está correto?

Aqui, o aluno realiza as operações necessárias para obter o valor de n resolvendo a equação: $1380 = 80 + (n-1) \cdot 20$, onde substitui os valores conhecidos e busca o desconhecido.

Na realização de cada parte da resolução, deve estar atento para responder à pergunta sobre estar seguro a respeito do que está fazendo, sobre em que propriedades está se baseando na execução.

Assim,

$1300 = (n-1) \cdot 20$, já que podemos subtrair 80 dos dois lados

$1300 = 20n - 20$, usando a propriedade distributiva

$1320 = 20n$, somando 20 nos dois lados

$66 = n$, pois $1320/20 = 66$ quando dividimos os dois lados da equação por 20.

Agora, é preciso multiplicar o número de postes por 8.000, que é o custo de cada um dos 66 postes. Logo, o gasto máximo seria $66 \cdot 8000 = 528.000$ reais.

Etapa 4 - revisão da resolução

Perguntas: Você pode checar o resultado, ele parece razoável? Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes? Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema? Você pode usar o mesmo método em outro problema?

O resultado precisa fazer sentido. A primeira atitude é verificar se está listado nas alternativas e, sim, é a alternativa C. É desejável que perceba que a mesma estratégia seja usada toda vez que o número de elementos da sequência for desconhecido e que sejam conhecidos o primeiro, o último e a razão da PA.

Sugestão de desdobramento

Que tal usar a cultura digital como parceira?

O ChatGPT, uma ferramenta baseada em inteligência artificial disponível online. Ele responde da seguinte forma a essa questão:

Para determinar o maior valor que a prefeitura poderá gastar com a colocação dos postes, precisamos calcular o número total de postes necessários e multiplicá-lo pelo valor máximo que pode ser gasto em cada poste.

A distância entre o primeiro poste e o último é de 1380 metros - 80 metros = 1300 metros.

A distância entre cada poste é de 20 metros.

Para encontrar o número de postes, podemos dividir a distância total entre os postes pela distância entre cada poste:

$$1300 \text{ metros} / 20 \text{ metros} = 65 \text{ postes}$$

Portanto, serão necessários 65 postes para iluminar toda a estrada.

Agora, para determinar o maior valor que poderá ser gasto com a colocação dos postes, multiplicamos o número de postes pelo valor máximo que pode ser gasto em cada poste:

$$65 \text{ postes} * R\$ 8 000,00/\text{poste} = R\$ 520 000,00$$

Ele encontrou outra resposta. Está errada? Qual o motivo? Ele usou PA?

Observe que a discussão deve levar à conclusão que o número de postes encontrado por ele está incorreto, já que achou 65 postes. O raciocínio incorreto está em fazer $1300 - 80$ e dividir por 20.

Imagine se fossem 4 postes, como em nosso desenho. Assim, faríamos $140 - 80 = 60\text{m}$, que é a distância do poste 1 ao 4. Se dividirmos por 20, encontramos 3, que é o número de postes do 1 ao 4, sem contar com o primeiro. Este foi o erro, é preciso sempre somar mais 1 para contar o primeiro poste.

Note que isso não tem necessariamente a ver com ter usado ou não a teoria sobre PA. O ChatGPT poderia não ter usado PA e acertado, ou ter usado PA e errado. A experiência serve para discutirmos o quanto podemos confiar, mesmo com tecnologia tão avançada para os dias atuais, em algo que recebemos pronto, resolvido, principalmente quando se refere a uma informação obtida na internet.

Lista de exercícios do tema

1 - (ENEM 2019) O slogan “Se beber não dirija”, muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1 050	900	850

Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015.

Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de:

- A. 150
- B. 450
- C. 550
- D. 700
- E. 800

2 - (ENEM 2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$180.000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considera que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de:

- A. 2 075,00
- B. 2 093,00
- C. 2 138,00
- D. 2 255,00
- E. 2 300,00

NOTA AO PROFESSOR: Este problema não é naturalmente de PA, mas a ideia de entender o saldo devedor ao longo dos meses como um PA ajuda na elaboração do raciocínio.

3 - (ENEM 2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.

Qual é o número de andares desse edifício?

- A. 40
- B. 60
- C. 100

- D. 115
E. 120

4 - (ENEM 2020) No Brasil, o tempo necessário para um estudante realizar sua formação até a diplomação em um curso superior, considerando os 9 anos de ensino fundamental, os 3 anos do ensino médio e os 4 anos de graduação (tempo médio), é de 16 anos. No entanto, a realidade dos brasileiros mostra que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos é ainda muito pequeno, conforme apresentado na tabela:

Tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos

Ano da Pesquisa	1995	1999	2003	2007
Tempo de estudo (em ano)	5,2	5,8	6,4	7,0

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 19 dez. 2012 (adaptado).

Considere que o incremento no tempo de estudo, a cada período, para essas pessoas, se mantenha constante até o ano 2050, e que se pretenda chegar ao patamar de 70% do tempo necessário à obtenção do curso superior dado anteriormente. O ano em que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos atingirá o percentual pretendido será:

- A. 2018
B. 2023
C. 2031
D. 2035
E. 2043

Questão disparadora de PG

(ENEM 2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8.000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia, adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t , para $t \geq 1$?

- A. $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8000$
B. $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8000$
C. $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8000$
D. $P(t) = 8000 \cdot (0,5)^{t-1}$

$$E. \quad P(t) = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$$

Tratamento do problema

Etapa 1 - compreender o problema

Perguntas: Quais são os dados do problema? Quais são as incógnitas? Quais são as condições ou restrições? É possível satisfazer as condições pedidas? Elas são suficientes para determinar a incógnita? São não redundantes? Não contraditórias?

Aqui espera-se que o aluno particione o texto da pergunta, traduzindo cada parte dele em linguagem matemática correspondente.

Desta forma, já sabemos que no primeiro ano foram fabricadas 8.000 unidades de um determinado produto. Temos também que a produção no ano seguinte aumentou 50%.

Daí, no segundo ano de funcionamento, teremos a produção de $8000 + 0,5 \cdot 8000$ unidades. Ou seja, $1,5 \cdot 8000$ unidades do produto. No ano seguinte, serão produzidos $1,5 \cdot 1,5 \cdot 8000$ unidades, se pensarmos na mesma lógica.

Com essas informações já podemos ter um caminho a seguir e podemos analisar o padrão de crescimento.

Etapa 2 - delinear um plano

Perguntas: Você conhece algum problema semelhante? Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema? Você conhece resultados ou fórmulas que possam ajudar? Você pode enunciar o problema de forma diferente para ajudar, se for preciso? Você consegue resolver parte do problema?

Como estes problemas são abordados após a introdução destes assuntos em sala de aula, é esperado que o aluno perceba que trata-se de uma PG de razão 1,5.

E, sendo assim, podemos utilizar a fórmula geral de PG que seria:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Ou ainda, substituindo pelos dados da questão, $P(t) = a \cdot r^{(t-1)}$

- $P(t)$ é a quantidade de produtos fabricados no ano t ,
- a é o primeiro termo da PG (quantidade inicial de produtos, quando $t = 1$),
- r é a razão da PG (a taxa de crescimento).

Etapa 3 - executar o plano

Perguntas: Você percebe claramente e pode argumentar que cada passo está correto?

Aqui precisamos conseguir aferir que cada passo gera uma resposta correta, ao longo dos anos. E ter certeza que o caminho até a solução fez algum sentido para o aluno. Assim, a

ideia é conseguirmos achar a fórmula, substituir os termos da equação e encontrarmos a resposta que seria a letra E, $P(t) = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$.

Etapa 4 - revisão da resolução

Perguntas: Você pode checar o resultado, ele parece razoável? Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes? Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema? Você pode usar o mesmo método em outro problema?

Bom, o primeiro passo é verificar que a resposta encontrada é uma das opções da questão. Além disso, podemos perceber que questões de PG, assim como as de PA, estão atreladas a alguma repetição de condições iniciais que gera uma sequência. Esse é o tipo de padrão que deve ser compreendido para que seja possível adaptar o raciocínio das questões disparadoras para outros problemas.

Neste problema em especial, percebe-se a dificuldade adicional na expressão “No ano seguinte, investiu em tecnologia, adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%”. Essa frase em seguida da frase “No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto” pode gerar a falsa ideia de que a produção inicial era de 8.000 unidades e passou, após 1 ano, a ser $1,5 \cdot 8000$. Na verdade, a produção inicial refere-se ao primeiro ano de funcionamento. Então, ao escrever “Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria”, estamos dizendo que 8.000 é a produção do ano $t = 1$. No ano $t = 2$, temos $1,5 \cdot 8000$. É uma sutileza no enunciado que pode gerar erros. Só não é tão grave porque não há, dentre as possibilidades, a alternativa $P(t) = 8000 \cdot (1,5)^t$, que seria a gerada por este erro de interpretação.

Sugestão de desdobramento

A sugestão é trazer o universo da geometria fractal para a sala de aula através do triângulo de Sierpinski. Mais informações sobre os fractais e o uso do Geogebra podem ser encontradas em:

https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/118738/mod_resource/content/0/GEOMETRIA%20FRACTAL%20-%20UMA%20ROPOSTA%20DE%20SEQU%20C%20ANCIA%20DID%20C%20TICA%20PARA%20O%20ENSINO%20DE%20PROGRESS%20C%2095ES%20GEOM%20C%2089TRICAS.pdf

A seguir, trazemos uma questão sobre o tema, adaptada de uma questão do ENEM, e encontrada no YouTube (<https://www.youtube.com/watch?v=Ht3GHO-Klf8>).

Questão:

Fractal (do latim fractus, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. Comece com um triângulo equilátero (Figura 1);
2. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a Figura 2;
4. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (Figura abaixo).



Determine quantos triângulos pretos tem a Figura 5.

Nesta resolução, o aluno pode perceber que a quantidade de triângulos pretos determina uma PG de razão 5: (1, 3, 9, ...). Logo, o quinto elemento é 81. Usando a expressão que dá o termo geral tem-se: $a_5 = a_1 \cdot 3^{5-1} = 1 \cdot 3^4 = 81$. Para que exista a necessidade de abordagem por PG, seria interessante solicitar a expressão que dá o 13º termo dessa PG, por exemplo. A ideia, nessa modificação, é que o aluno tente resolver o problema sem encontrar cada um dos termos.

Lista de exercício do tema

1 - (ENEM 2018) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.



Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.

O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

- A. 14
- B. 12
- C. $7\sqrt{2}$

- D. $6 + 4\sqrt{2}$
 E. $6 + 2\sqrt{2}$

2 - (ENEM 2016) Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento.

Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é

- A. 3×345
 B. $(3 + 3 + 3) \times 345$
 C. $3^3 \times 345$
 D. $3 \times 4 \times 345$
 E. $3^4 \times 345$

Matrizes e Sistemas Lineares

Questão disparadora de matriz

(ENEM 2018) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = a_{ij}$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de reais, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ij} = 0$ quando $i = j$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

- A. 1
 B. 2
 C. 3

D. 4

E. 5

Tratamento do problema

Etapa 1 - compreender o problema

Perguntas: Quais são os dados do problema? Quais são as incógnitas? Quais são as condições ou restrições? É possível satisfazer as condições pedidas? Elas são suficientes para determinar a incógnita? São não redundantes? Não contraditórias?

Lendo o enunciado, podemos estabelecer uma correspondência entre cada uma das i linhas aos bancos B1, B2, B3, B4 e B5. O mesmo acontece com as colunas e, assim, a coluna 1 refere-se aos recebimentos do banco B1, e assim por diante até o banco B5.

Etapa 2 - delinear um plano

Perguntas: Você conhece algum problema semelhante? Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema? Você conhece resultados ou fórmulas que possam ajudar? Você pode enunciar o problema de forma diferente para ajudar, se for preciso? Você consegue resolver parte do problema?

Para descobrirmos qual banco fez mais transferência, precisamos apenas somar os elementos de cada linha e teremos o quanto cada banco efetuou em transferências.

Etapa 3 - executar o plano

Perguntas: Você percebe claramente e pode argumentar que cada passo está correto?

Somando os números da primeira linha, temos: $0 + 2 + 0 + 2 + 2 = 6$, ou seja, o primeiro banco B1 transferiu 6 milhões. Fazendo o mesmo com as demais linhas da matriz, obtemos:

B2: $0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3$ milhões

B3: $1 + 2 + 0 + 1 + 1 = 5$ milhões

B4: $0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 4$ milhões

B5: $3 + 0 + 1 + 1 + 0 = 5$ milhões

A partir disso, podemos ver que o banco que transferiu a maior quantia foi o banco B1.

Etapa 4 - revisão da resolução

Perguntas: Você pode checar o resultado, ele parece razoável? Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes? Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema? Você pode usar o mesmo método em outro problema?

Depois da resolução, a primeira medida é buscar a alternativa que corresponde à solução. Neste caso, a resposta correta é a alternativa A, e cada passo na construção dessa ideia pode ser facilmente verificado porque foram feitas somas com os elementos de cada linha da matriz.

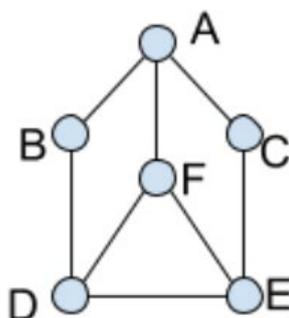
O erro mais comum nessa questão é olhar para o banco cuja linha correspondente tem o elemento de maior valor. Na matriz do problema, isso levaria à análise incorreta de que o banco com maior transferência seria o B5, já que o elemento a_{15} possui valor 3, que é o maior elemento da matriz. Essa resposta seria a correta se a pergunta fosse: “Com base nessas informações, o banco que fez a maior operação de transferência via TED neste tempo foi:___”.

Sugestão de desdobramento

Aqui sugerimos inserir a modelagem da Teoria dos Grafos, abordando a representação matricial.

Questão:

Um grafo modela muitas situações em que se deseja analisar computacionalmente os problemas. A figura a seguir mostra um grafo com 6 vértices (A, B, C, D, E e F) e 8 arestas ligando estes vértices.



A matriz M representa esse grafo. Nela, cada linha e cada coluna correspondem a um vértice. Se existe uma aresta entre o vértice correspondente à linha i e o vértice da coluna j , então $a_{ij} = 1$. Se não existe aresta entre eles, $a_{ij} = 0$. Observe a matriz correspondente ao grafo:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Sendo assim, se a matriz N a seguir representa um grafo com 4 vértices, qual o total de arestas nesse grafo?

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Na resolução, o aluno pode desenhar o grafo ou pode analisar a matriz N e perceber que o vértice A tem aresta com B , C e D . O vértice B também tem aresta com D . O vértice C só tem a aresta com A e o D só tem aresta com A e B . Logo, as arestas são (A,B) , (A,C) , (A,D) , (B,D) , ou seja, o grafo tem 4 arestas somente.

Lista de exercícios do tema

1 - (ENEM 2019) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na:

- A. segunda-feira.
- B. terça-feira.
- C. quarta-feira
- D. quinta-feira.
- E. sexta-feira.

2 - (ENEM 2021) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o

destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A=(a_{ij})$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$, em que o elemento corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ii} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, é apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

Questão disparadora de sistemas lineares

(ENEM 2009) Diante de um sanduíche e de uma porção de batatas fritas, um garoto, muito interessado na quantidade de calorias que pode ingerir em cada refeição, analisa os dados de que dispõe. Ele sabe que a porção de batatas tem 200 g, o que equivale a 560 calorias, e que o sanduíche tem 250 g e 500 calorias. Como ele deseja comer um pouco do sanduíche e um pouco das batatas, ele se vê diante da questão: “Quantos gramas de sanduíche e quantos gramas de batata eu posso comer para ingerir apenas as 462 calorias permitidas para esta refeição?”

Considerando que x e y representam, respectivamente, em gramas, as quantidades do sanduíche e das batatas que o garoto pode ingerir, assinale a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente essas quantidades.

- A. $2x + 2,8y = 462$
- B. $2,8x + 2y = 462$
- C. $1,8x + 2,3y = 1.060$
- D. $5x + 047 = 462$
- E. $0.4x + 1y = 462$

Tratamento do problema

Etapa 1 - compreender o problema

Perguntas: Quais são os dados do problema? Quais são as incógnitas? Quais são as condições ou restrições? É possível satisfazer as condições pedidas? Elas são suficientes para determinar a incógnita? São não redundantes? Não contraditórias?

Neste momento inicial, espera-se que seja construída uma representação em linguagem matemática de cada informação do enunciado. Ou seja, que seja estabelecido que:

200 gramas de batata=560 calorias $\Rightarrow 200g_b = 560$

250 gramas de sanduíche=500 calorias $\Rightarrow 250g_s = 500$

E, deseja-se que, $g_s \cdot x + g_b \cdot y = 462$.

Etapa 2 - delinear um plano

Perguntas: Você conhece algum problema semelhante? Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema? Você conhece resultados ou fórmulas que possam ajudar? Você pode enunciar o problema de forma diferente para ajudar, se for preciso? Você consegue resolver parte do problema?

Após essas reflexões, pode-se perceber que as respostas possíveis, de acordo com as alternativas da questão, remetem à escrita de $g_s \cdot x + g_b \cdot y = 462$ de modo a utilizar o que sabemos sobre a quantidade de calorias de cada alimento.

Na verdade, primeiro precisamos saber quantas calorias há em cada grama de cada um dos dois alimentos.

Aqui a estratégia de abordagem deve levar em consideração sempre a lógica do processo, à medida que sabemos que x refere-se à quantidade, em gramas, de sanduíche e y a quantidade de batata. A resolução não deve estar desconectada da situação concreta que gerou o problema.

Etapa 3 - executar o plano

Perguntas: Você percebe claramente e pode argumentar que cada passo está correto?

O plano consiste em escrever g_b a partir do fato que $200g_b = 560$. Logo, $g_b = 560/200 = 2,8$

Fazendo o mesmo para g_s , temos, como $250g_s = 500 \Rightarrow g_s = 500/250 = 2$

Assim, substituindo em $g_s \cdot x + g_b \cdot y = 462$, encontramos: $2x + 2,8y = 462$. Ou seja, a alternativa A é a correta.

Etapa 4 - revisão da resolução

Perguntas: Você pode checar o resultado, ele parece razoável? Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes? Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema? Você pode usar o mesmo método em outro problema?

A primeira verificação, para encontrar a alternativa que corresponde à solução encontrada, pode ser facilmente feita.

Em questões de sistemas lineares, sempre é bom que esta etapa contemple a substituição de valores nas equações, quando temos a resolução do sistema.

Neste caso, especificamente, não são encontrados os valores de x e y , mas podemos simular, por exemplo, se não houver consumo de batata, como $2x + 2,8y = 462$, esta pessoa poderá consumir:

$$2x + 2,8y = 462 \Rightarrow 2x + 2,8 \cdot 0 = 462 \Rightarrow 2x = 462 \Rightarrow x = 462/2 = 231 \text{ gramas de sanduíche.}$$

Voltando ao fato de que 250g de sanduíche tem 500 calorias, o professor pode explorar a resposta encontrada usando uma regra de 3, se achar que é pertinente em seu contexto.

Sugestão de desdobramento

Já pensou em mostrar um problema de Programação Linear ao seu aluno da escola? A proposta não é mostrar um método de resolução, um algoritmo. A ideia é que percebam como os sistemas se desdobram em coisas mais complexas quando precisam modelar situações com soluções para problemas reais. Sheila de Assis, Suzamara Bautitz e Eliane Suely Everling Paim testaram isso e você vê como foi em: <https://publicacoes.ifc.edu.br/index.php/contraponto/article/download/1663/1240/5456>.

Elas trouxeram um problema de otimização de recursos para ser discutido com os alunos.

Esses problemas sempre contam com recursos com algumas restrições, onde se quer maximizar (lucro, por exemplo) ou minimizar algo (desperdício, por exemplo).

Em um problema clássico nesse sentido, *vários fazendeiros compartilham um terreno comum para pastagem de seus rebanhos. Cada fazendeiro pode decidir quantas cabeças de gado enviar para pastar nesse terreno compartilhado. Suponha que existam dois fazendeiros, A e B, e eles têm as seguintes informações:*

O terreno comporta, no máximo, 100 cabeças de gado. Se mais gado do que isso for colocado, a pastagem se torna insuficiente, e o gado começa a sofrer com a falta de alimento.

Se o fazendeiro A enviar " x " cabeças de gado para pastar, ele obtém uma receita de " $R(A) = 20x$ " (em reais).

Se o fazendeiro B enviar " y " cabeças de gado para pastar, ele obtém uma receita de " $R(B) = 30y$ " (em reais).

No entanto, cada cabeça de gado que os fazendeiros enviam para pastar contribui para o desgaste geral do terreno, reduzindo a capacidade de sustentação para o próximo período. Cada cabeça de gado coloca uma carga no terreno, digamos, " c " unidades de carga. Se o terreno ultrapassar uma determinada capacidade, ele se torna danificado, e as receitas dos fazendeiros diminuirão significativamente.

O problema é maximizar o lucro conjunto dos fazendeiros A e B, levando em consideração a capacidade do terreno e o dano que o gado causa.

Para resolver esse problema, podemos estabelecer o seguinte sistema de equações lineares:

Restrição de capacidade do terreno:

$$x + y \leq 100 \text{ (número total de cabeças de gado não pode exceder 100)}$$

Restrição de dano ao terreno:

$cx + dy \leq D$ (onde " c " e " d " são constantes que representam o desgaste por cabeça de gado, e " D " é a capacidade máxima sustentável do terreno)

Função de lucro conjunto:

$$L(A, B) = R(A) + R(B) = 20x + 30y \text{ (a receita total dos fazendeiros A e B)}$$

Neste contexto, a solução ótima desse sistema linear fornecerá as quantidades " x " e " y " que maximizarão o lucro conjunto dos fazendeiros A e B, respeitando as restrições de capacidade e dano ao terreno.

Lista de exercícios do tema

1 - (ENEM/PPL 2015) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R\$20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R\$10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R\$100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

- A. 30
- B. 36
- C. 50
- D. 60
- E. 64

2 - (ENEM 2018) Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R\$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R\$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

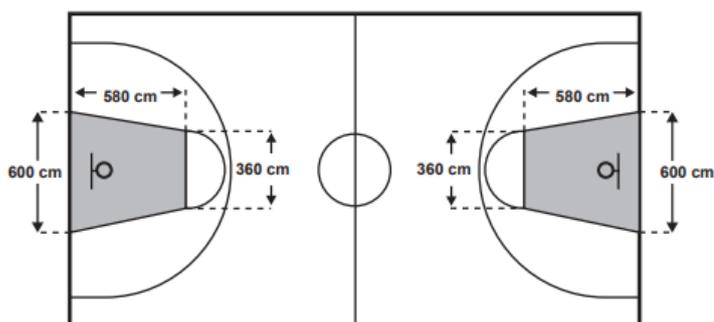
Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

- A. 20
- B. 24
- C. 29
- D. 40
- E. 58

Geometria Plana e Geometria Espacial

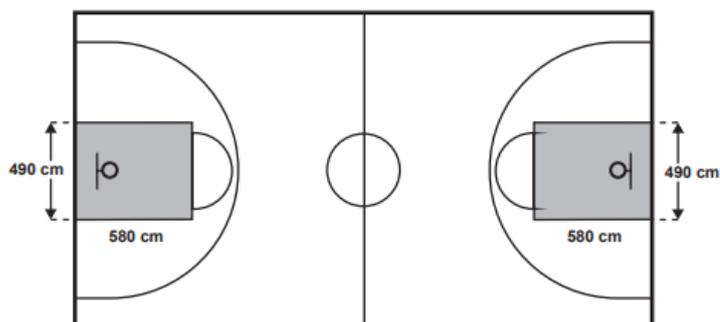
Questão disparadora de Geometria Plana

(Enem 2015) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a):

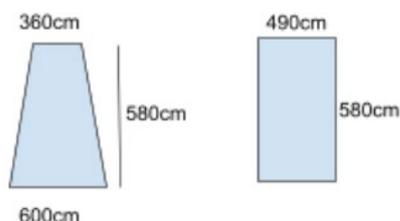
- A. aumento de 5 800 cm².
- B. aumento de 75 400 cm².
- C. aumento de 214 600 cm².
- D. diminuição de 63 800 cm².
- E. diminuição de 272 600 cm².

Tratamento do problema

Etapa 1 - compreender o problema

Perguntas: Quais são os dados do problema? Quais são as incógnitas? Quais são as condições ou restrições? É possível satisfazer as condições pedidas? Elas são suficientes para determinar a incógnita? São não redundantes? Não contraditórias?

Lendo o enunciado, podemos compreender que se trata de área de um trapézio que passará a ser um retângulo. Inicialmente, deseja-se que o aluno consiga representar as áreas a serem calculadas, de acordo com os esquemas apresentados na questão. Desta forma, temos as áreas das duas figuras:



Etapa 2 - delinear um plano

Perguntas: Você conhece algum problema semelhante? Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema? Você conhece resultados ou

fórmulas que possam ajudar? Você pode enunciar o problema de forma diferente para ajudar, se for preciso? Você consegue resolver parte do problema?

A ideia de resolução consiste em encontrar as duas áreas e calcular a diferença entre elas para descobrir se aumentou ou diminuiu e de quanto foi o acréscimo ou o decréscimo na área de cada garrafão.

Etapa 3 - executar o plano

Perguntas: Você percebe claramente e pode argumentar que cada passo está correto?

A área do trapézio é:

$A_T = (\text{Base Maior} + \text{base menor}) * \text{altura} / 2$. Logo, temos $A_T = (600 + 360) * 580 / 2 = 278.400 \text{ cm}^2$.

A área do retângulo é:

$A_R = \text{base} * \text{altura} = 490 * 580 = 284.200 \text{ cm}^2$.

Como estamos interessados na diferença entre estas áreas, fazemos a maior menos a menor delas.

Ou seja, a diferença é:

$A_R - A_T = 284.200 - 278.400 = 5.800 \text{ cm}^2$.

Isso significa que a área do garrafão aumentou 5.800 cm^2 .

Etapa 4 - revisão da resolução

Perguntas: Você pode checar o resultado, ele parece razoável? Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes? Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema? Você pode usar o mesmo método em outro problema?

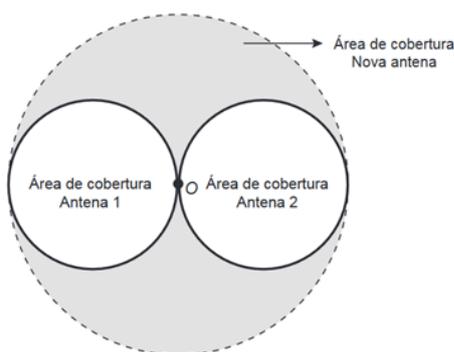
A primeira medida é buscar a alternativa que corresponde à solução. Neste caso, a resposta correta é a alternativa A, e cada passo na construção dessa ideia pode ser facilmente verificado.

Sugestão de desdobramento

No caso de problemas de geometria plana, os desdobramentos mais imediatos e os mais recomendados dizem respeito ao uso da realidade dos alunos para o desenvolvimento de questões. Este problema, por exemplo, pode ser desdobrado ao considerarmos a quadra da escola. Quais análises interessantes desse espaço na escola podem ser feitas? Há outros espaços que podem gerar problemas promissores para o processo de ensino e aprendizagem do tema?

Lista de exercícios do tema

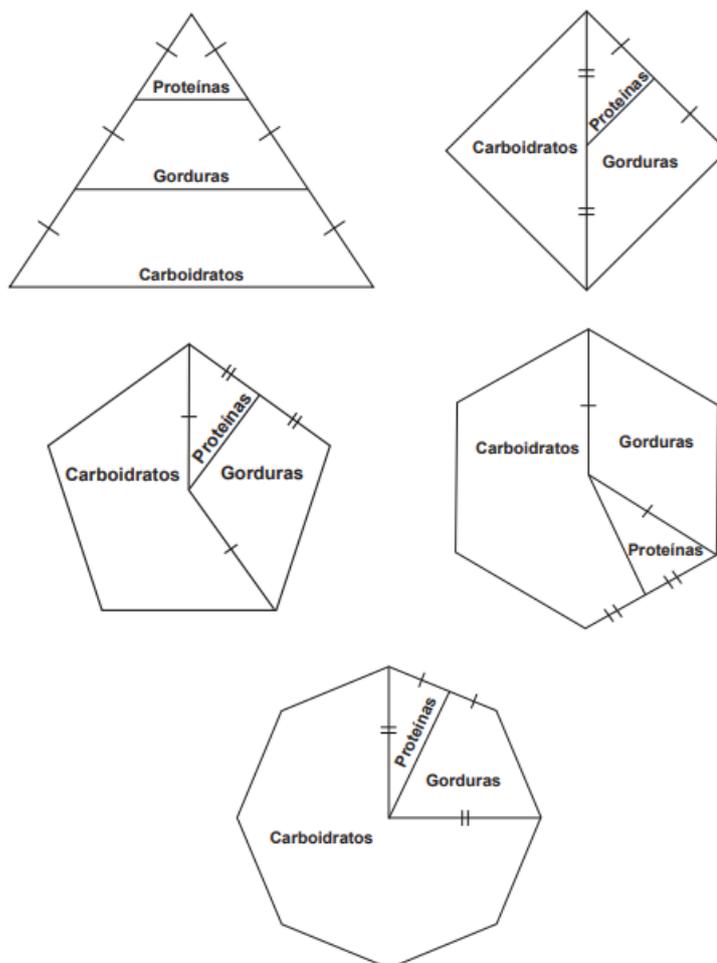
1 - (ENEM 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em:

- A. 8π
- B. 12π
- C. 16π
- D. 32π
- E. 64π

2 - (ENEM 2015) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:

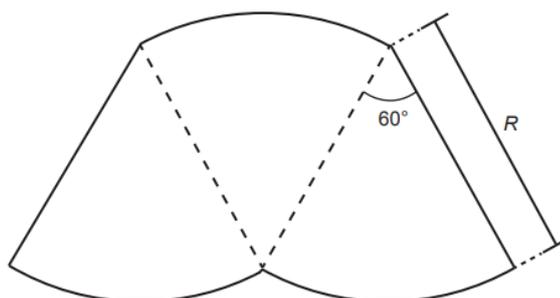


Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o:

- A. triângulo.
- B. losango.
- C. Pentágono.
- D. hexágono.
- E. octógono.

3 - (ENEM 2015) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60° .

O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π .

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser:

- A. 16
- B. 28
- C. 29
- D. 31
- E. 49

4 — (ENEM 2016) A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.



Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado à unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros.

Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

- A. 53
- B. 94
- C. 113
- D. 135
- E. 145

5 - (ENEM 2016) Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2.000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120.000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

- A. 360
- B. 485
- C. 560
- D. 740
- E. 860

6 — (ENEM 2017) Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a:

- A. 192
- B. 300
- C. 304
- D. 320
- E. 400

7 - (ENEM 2017) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro.

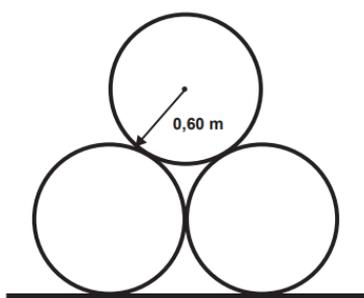
Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.



Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

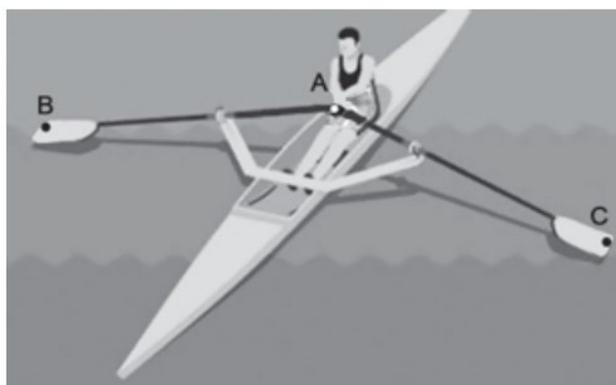
Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- A. 2,82
- B. 3,52
- C. 3,70

- D. 4,02
E. 4,20

8 - (ENEM 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

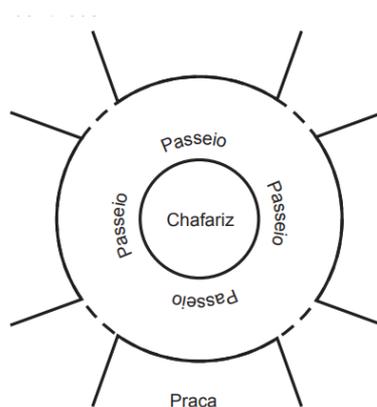


Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

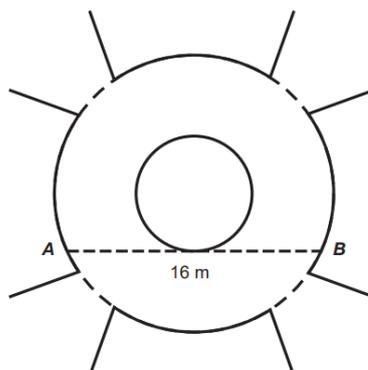
Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo \widehat{BAC} tem medida de 170° . O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é:

- A. retângulo escaleno
B. acutângulo escaleno
C. acutângulo isósceles
D. obtusângulo escaleno
E. obtusângulo isósceles

9 - (ENEM 2018) A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB: 16 m.



Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi:

- A. 4π
- B. 8π
- C. 48π
- D. 64π
- E. 192π

10 - (ENEM 2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m^2 de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.

Utilize 3 como aproximação para π .

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque:

- A. será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m^2 .
- B. será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m^2 .
- C. será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m^2 .
- D. não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m^2 .

E. não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m².

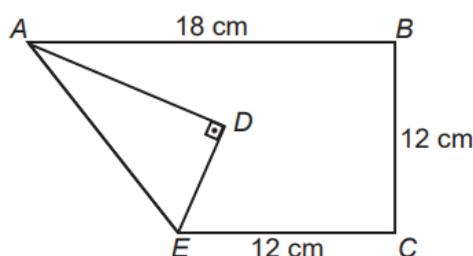
11 - (ENEM 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π .



Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

- A. 16 628
- B. 22 280
- C. 28 560
- D. 41 120
- E. 66 240

12 - (ENEM 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



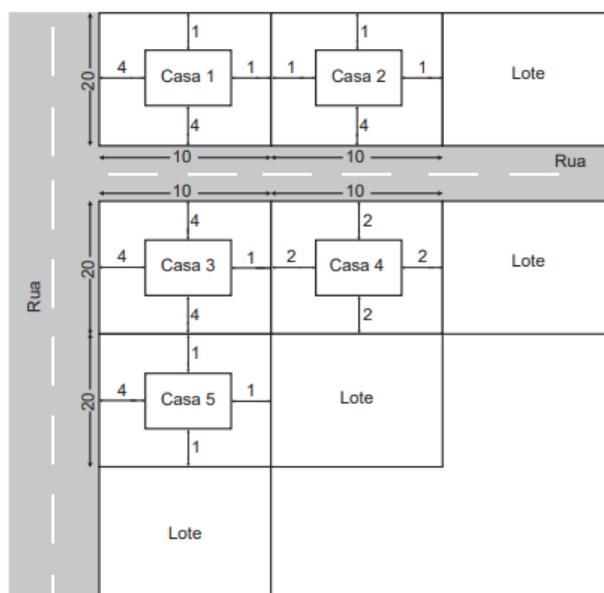
Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é:

- A. $2\sqrt{22}$ cm.
- B. $6\sqrt{3}$ cm.
- C. 12 cm.
- D. $6\sqrt{5}$ cm.
- E. $12\sqrt{2}$ cm.

13 - (ENEM 2020) A lei municipal para a edificação de casas em lotes de uma cidade determina que sejam obedecidos os seguintes critérios:

- afastamento mínimo de 4 m da rua;
- afastamento mínimo de 1 m da divisa com outro lote;
- área total construída da casa entre 40% e 50% da área total do lote.

Um construtor submeteu para aprovação na prefeitura dessa cidade uma planta com propostas para a construção de casas em seus 5 lotes. Cada lote tem área medindo 200 m^2 . A imagem apresenta um esquema, sem escala, no qual estão representados os lotes, as ruas e os afastamentos considerados nos projetos entre as casas e as divisas dos lotes. As medidas indicadas no esquema estão expressas em metro.



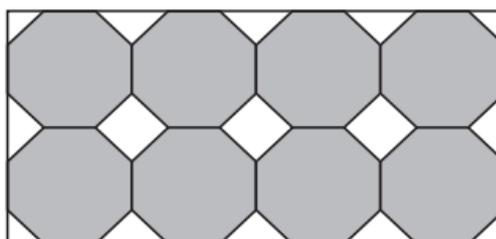
A prefeitura aprovará apenas a planta da casa:

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

14 - (ENEM 2020) Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.



Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

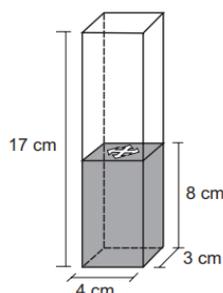
- 1 – Triângulo retângulo isósceles;
- 2 – Triângulo equilátero;
- 3 – Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato:

- A. 1
- B. 3
- C. 1 e 2
- D. 1 e 3
- E. 2 e 3

Questão disparadora de Geometria Espacial

(ENEM 2020) Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente, bolinhas de volume igual a 6 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de:

- A. 14
- B. 16
- C. 18
- D. 30
- E. 34

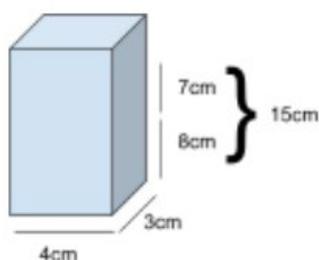
Tratamento do problema

Etapa 1 - compreender o problema

Perguntas: Quais são os dados do problema? Quais são as incógnitas? Quais são as condições ou restrições? É possível satisfazer as condições pedidas? Elas são suficientes para determinar a incógnita? São não redundantes? Não contraditórias?

A abordagem de um problema de análise de volume de um recipiente precisa contar com a compreensão da situação real. Se for possível levar para a sala de aula um objeto semelhante, será uma contribuição interessante. Deseja-se que o aluno entenda que precisa encher mais para conseguir pegar o objeto que está flutuando. E, neste caso, precisa preencher de modo a ter 7 cm de altura a mais na coluna de água para atingir os 15 cm.

Desta forma, temos um volume adicional de líquido na configuração inicial do recipiente:



Etapa 2 - delinear um plano

Perguntas: Você conhece algum problema semelhante? Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema? Você conhece resultados ou fórmulas que possam ajudar? Você pode enunciar o problema de forma diferente para ajudar, se for preciso? Você consegue resolver parte do problema?

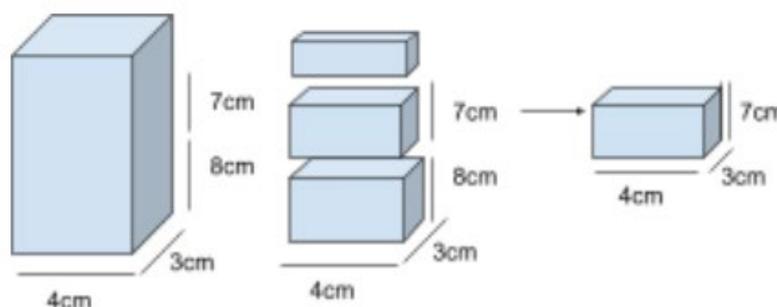
Há mais de uma forma de abordar o cálculo do volume que falta para que seja possível acessar o objeto flutuante. O ideal é partir de uma proposta da própria turma. Aqui faremos analisando a diferença na altura da coluna de água.

A ideia consiste em encontrar o volume de água necessário para completar o recipiente e, a partir daí, calcular quantas bolinhas devem ser inseridas para adicionar esse volume.

Etapa 3 - executar o plano

Perguntas: Você percebe claramente e pode argumentar que cada passo está correto?

O volume da parte adicionada na coluna de água é:



Logo, para completar o recipiente até poder alcançar o objeto, encontramos o volume de um paralelepípedo, que é obtido pelo produto do comprimento (a), largura (b) e altura (h). Sendo assim:

$$\text{Volume} = \text{comprimento (a)} \times \text{largura (b)} \times \text{altura (h)} = 4 \times 3 \times 7 = 84 \text{ cm}^3.$$

No passo seguinte, estamos interessados em preencher esse volume usando as bolinhas de 6 cm^3 de volume cada. Esse cálculo consiste em saber quantas vezes 6 cm^3 cabem dentro de 84 cm^3 , o que é um dos contextos de divisão.

Então, precisamos fazer $84/6 = 14$. Portanto, são necessárias 14 bolinhas para que seja possível alcançar o objeto flutuante no recipiente.

Etapa 4 - revisão da resolução

Perguntas: Você pode checar o resultado, ele parece razoável? Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes? Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema? Você pode usar o mesmo método em outro problema?

A solução encontrada aparece na alternativa A, que é a primeira verificação a ser feita. Como cada passo na construção dessa ideia foi descrito com detalhes, pode ser facilmente verificado. Mas o objetivo dessa análise aparecer como sugestão para o desenvolvimento com os alunos é que eles possam, mesmo mentalmente, descrever seus passos.

Sugestão de desdobramento

Na geometria espacial, o desdobramento recomendado em todas as questões é trazer para a aula instrumentos que possam ser manipulados em sala e que contribuam para a tomada de decisão no processo. Ao perceber os objetos tridimensionais fora do papel em certos contextos, o aluno pode generalizar procedimentos e desenvolver a percepção espacial, a abstração, de forma mais eficiente. Isso deve ser feito em um nível mais simples ou mais elaborado de acordo com o cenário de cada sala de aula. Quais processos de generalização na questão espacial são mais difíceis para seus alunos? Quais objetos podem ser levados para a aula e em que podem contribuir? Se isso for feito ao longo da resolução de uma questão, para alunos do Ensino Médio, a ação tende a tratar os problemas à medida que eles surgem na construção da solução e, às vezes, nem se tinha consciência da existência desses entraves.

Lista de exercícios do tema

1 - (ENEM 2015) Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos:

- Garrafa I: 0,15 litro
- Garrafa II: 0,30 litro
- Garrafa III: 0,75 litro
- Garrafa IV: 1,50 litro
- Garrafa V: 3,00 litros

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

- A. I
- B. II
- C. III
- D. IV
- E. V

2 - (ENEM 2015) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

- A. 6
- B. 8
- C. 14
- D. 24
- E. 30

3 - (ENEM 2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π .

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- A. 0,5
- B. 1,0
- C. 2,0
- D. 3,5
- E. 8,0

4 - (ENEM 2015) O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m^2 , ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m^2 de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1.200 mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π .

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de:

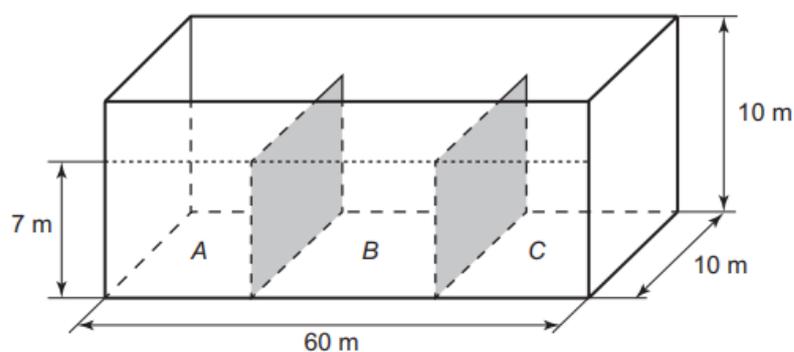
- A. 10,8.
- B. 12,0.
- C. 32,4.
- D. 108,0.
- E. 324,0.

5 - (ENEM 2015) Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, $0,08 \text{ m}^3$ de água.

Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser:

- A. 16
- B. 800
- C. 1 600
- D. 8 000
- E. 16 000

6 - (ENEM 2016) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por $60 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



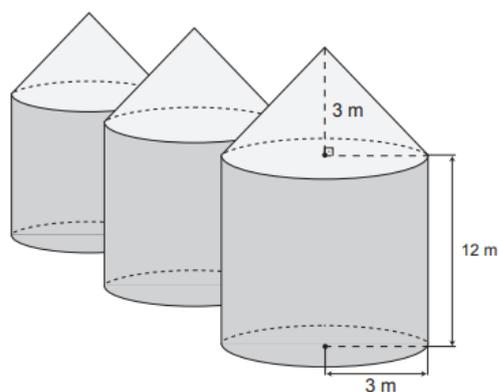
Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de:

- A. $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$
- B. $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$
- C. $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$
- D. $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$
- E. $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$

7 - (ENEM 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

- A. 6
- B. 16
- C. 17
- D. 18
- E. 21

8 - (ENEM 2017) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm \times 86 cm \times 86 cm
- Caixa 2: 75 cm \times 82 cm \times 90 cm
- Caixa 3: 85 cm \times 82 cm \times 90 cm

- Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm
- Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número:

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

9 - (ENEM 2017) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 ml desse produto para cada 1000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é:

- A. 11,25
- B. 27,00
- C. 28,80
- D. 32,25
- E. 49,50

10 - (ENEM 2017) Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.



Figura 1

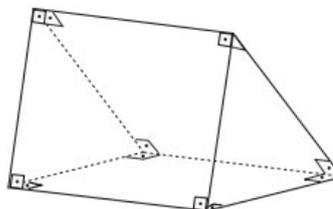


Figura 2

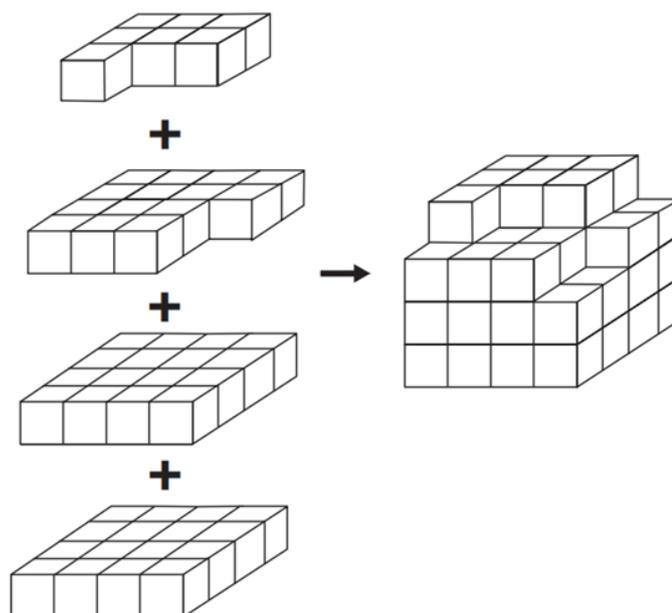
ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é:

- A. tetraedro.
- B. pirâmide retangular.
- C. tronco de pirâmide retangular.
- D. prisma quadrangular reto.
- E. prisma triangular reto.

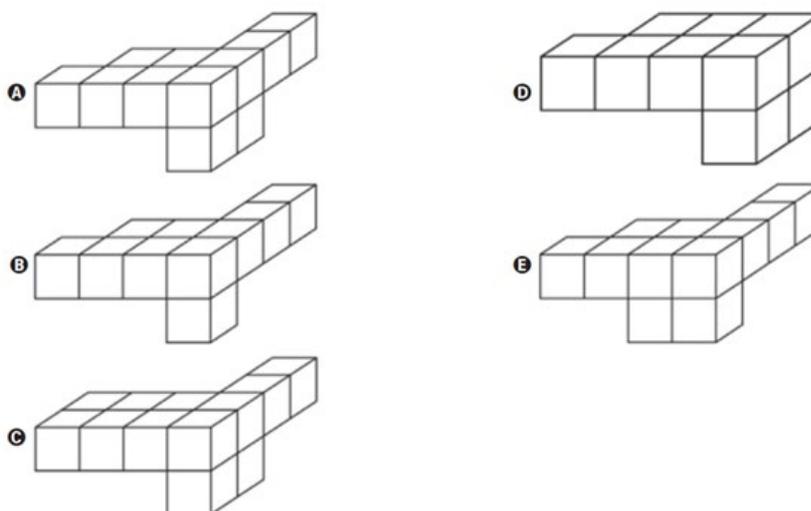
11 - (ENEM 2018) Minecraft é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos, e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

Um jogador deseja construir um cubo com dimensões $4 \times 4 \times 4$. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura:



Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa.

O formato da peça capaz de completar o cubo $4 \times 4 \times 4$ é:



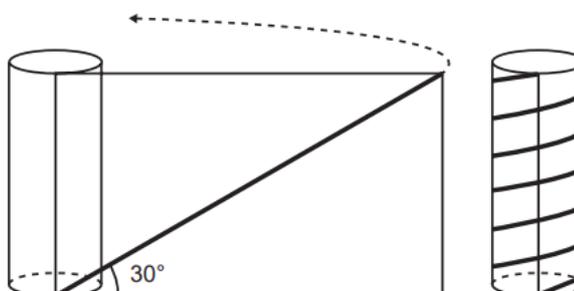
12 - (ENEM 2018) Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas. No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

- A. I
- B. II
- C. III
- D. IV
- E. V

13 - (ENEM 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $6/\pi$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

- A. $36\sqrt{3}$
- B. $24\sqrt{3}$
- C. $4\sqrt{3}$
- D. 36
- E. 72

14 - (ENEM 2019) A bula de um antibiótico infantil, fabricado na forma de xarope, recomenda que sejam ministrados, diariamente, no máximo 500 mg desse medicamento para cada quilograma de massa do paciente. Um pediatra prescreveu a dosagem máxima desse antibiótico para ser ministrada diariamente a uma criança de 20 kg pelo período de 5

dias. Esse medicamento pode ser comprado em frascos de 10 ml, 50 ml, 100 ml, 250 ml e 500 ml. Os pais dessa criança decidiram comprar a quantidade exata de medicamento que precisará ser ministrada no tratamento, evitando a sobra de medicamento. Considere que 1 g desse medicamento ocupe um volume de 1 cm^3 .

A capacidade do frasco, em mililitro, que esses pais deverão comprar é:

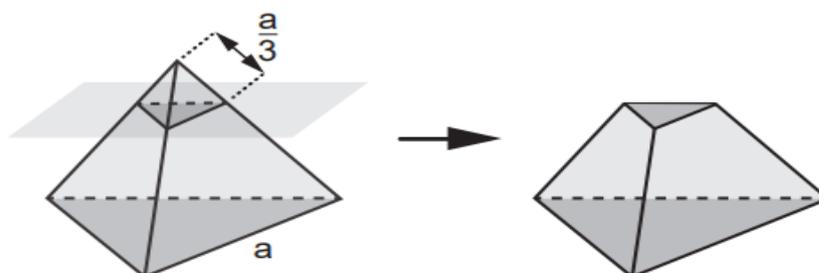
- A. 10
- B. 50
- C. 100
- D. 250
- E. 500

15 - (ENEM 2019) O rótulo da embalagem de um cosmético informa que a dissolução de seu conteúdo, de acordo com suas especificações, rende 2,7 litros desse produto pronto para o uso. Uma pessoa será submetida a um tratamento estético em que deverá tomar um banho de imersão com esse produto numa banheira com capacidade de $0,3 \text{ m}^3$. Para evitar o transbordamento, essa banheira será preenchida em 80% de sua capacidade.

Para esse banho, o número mínimo de embalagens desse cosmético é:

- A. 9
- B. 12
- C. 89
- D. 112
- E. 134

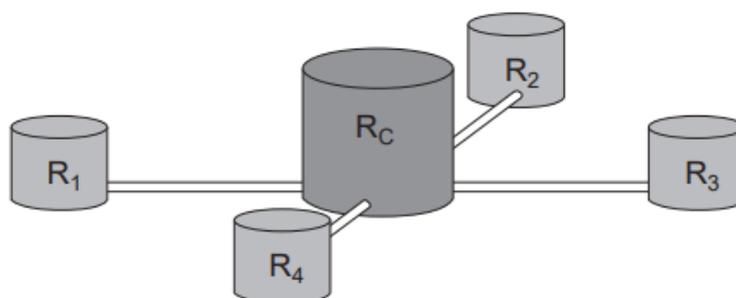
16 - (ENEM 2019) As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na figura.



Essa luminária terá por faces:

- A. 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- B. 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- C. 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- D. 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- E. 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

17 - (ENEM 2019) Uma construtora pretende conectar um reservatório central R_C em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1 , R_2 , R_3 e R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água. No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes. A medida, em metros, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é:

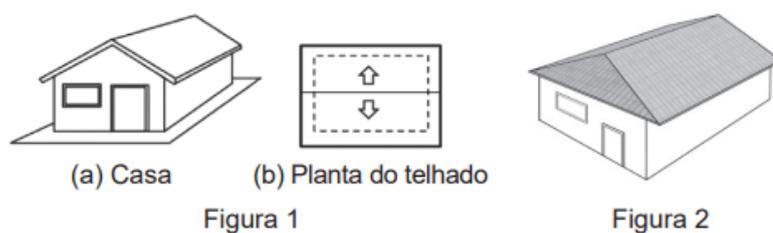
- A. 1,44
- B. 1,16
- C. 1,10
- D. 1,00
- E. 0,95

18 - (ENEM 2020) Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulkán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, esse templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada. As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são:

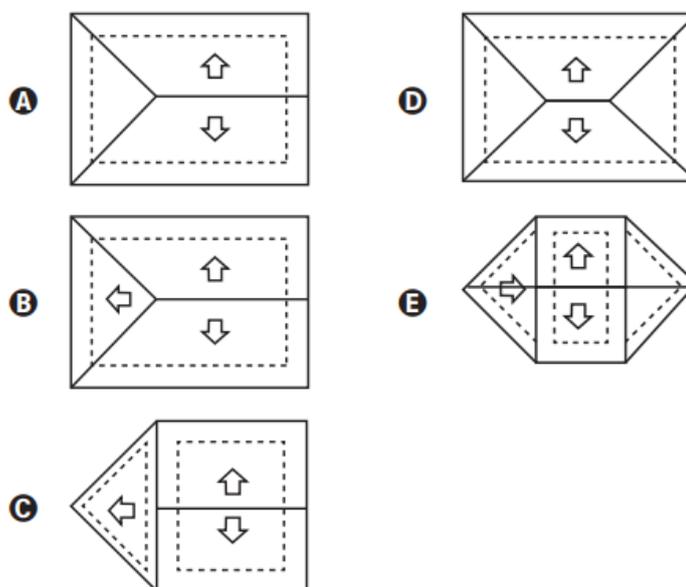
- A. 2 quadrados e 4 retângulos.

- B. 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.
- C. 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.
- D. 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.
- E. 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

19 - (ENEM 2020) A Figura 1 apresenta uma casa e a planta do seu telhado, em que as setas indicam o sentido do escoamento da água de chuva. Um pedreiro precisa fazer a planta do escoamento da água de chuva de um telhado que tem três caídas de água, como apresentado na Figura 2.



A figura que representa a planta do telhado da Figura 2 com o escoamento da água de chuva que o pedreiro precisa fazer é:



20 - (ENEM 2020) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de:



Figura 1

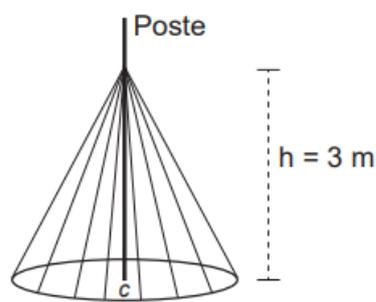


Figura 2

- A. 4,00
- B. 4,87
- C. 5,00
- D. 5,83
- E. 6,26

Gabarito das listas de exercícios de cada tema

Progressão Aritmética

- 1-D
- 2-D
- 3-D
- 4-D

Progressão Geométrica

- 1-A
- 2-C

Matrizes

1-A

2-E

Sistemas Lineares

1-A

2-B

Geometria Plana

1-A

2-C

3-B

4-D

5-E

6-C

7-D

8-E

9-D

10-E

11-B

12-D

13-E

14-D

Geometria Espacial

1-D

2-C

3-C

4-D

5-E

6-D

7-D

8-C

9-B

10-E

11-A

12-D

13-B

14-B

15-C

16-A

17-D

18-C

19-B

20-A