



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações [†]

por

Cícero Demétrio Vieira de Barros

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações

por

Cícero Demétrio Vieira de Barros

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS

Agosto/2013

Agradecimentos

Dedico a Deus por ter me concedido discernimento a fim de me guiar nesse trabalho.

Dedico a meu Irmão José Danilo Vieira de Barros que, apesar de não estar mais entre nós, foi e sempre será exemplo de força e superação.

Dedico aos meus pais José Edmilson Firmino de Barros e Maria Demétria Vieira de Barros a quem devo todo o sucesso alcançado até aqui.

Dedico a minha amada esposa Kíssia Sumaya Feitosa Coutinho Barros por me entender nos momentos de renúncia em prol da produção desse trabalho.

Dedico aos meus filhos João Gabriel Feitosa Coutinho Barros, Ana Rita Feitosa Coutinho Barros e Maria Alice Feitosa Coutinho Barros a quem me doo por completo.

Dedico a todos aqueles que acreditaram que a realização desse projeto, em especial aos meus colegas do PROFMAT/UFPB pelos momentos vividos ao longo do nosso mestrado e pelo crescimento contínuo de aprendizagem.

Dedico aos colegas professores Marcelo Dantas e Gustavo Assad que me acompanharam de perto e juntos comigo compartilharam das emoções geradas na realização desse trabalho.

Dedico aos professores João Marcos Bezerra do Ó, Flávia Jerônimo, Bruno Henrique e com um tom especial ao meu orientador Manassés Xavier de Souza a quem devo muito pela atenção, paciência e presença constante em todo o processo de produção desse trabalho.

Dedico, finalmente, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela confiança e apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho faremos uma abordagem sobre a teoria dos espaços métricos a fim de apresentarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e em seguida o aplicaremos em resoluções de algumas equações não lineares com um método iterativo para a obtenção da solução. Finalizaremos apresentando três aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. A primeira se trata do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. A segunda tem como tema a aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach na área de compressão de imagens na internet. Já a terceira aplicação será apresentado como funciona o buscador do Google e qual é a causa do seu sucesso.

Sumário

1	O Teorema do Ponto Fixo de Banach	1
1.1	Motivação	1
1.2	Espaços Métricos	4
1.3	Convergência em Espaços Métricos	8
1.4	Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos	10
1.5	Exemplos de Espaços Métricos Completos	13
1.6	O Teorema do Ponto Fixo de Banach	15
1.7	Algumas Aplicações	17
1.8	Algumas Observações	24
2	Outras Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach	30
2.1	Teorema de Picard	30
2.2	Compressão de imagens	34
2.3	Como funciona o buscador do Google	39
	Referências Bibliográficas	45

Introdução

Nesse trabalho apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach com os pré-requisitos para a sua demonstração e algumas aplicações, para tanto, dividimos nosso trabalho em dois capítulos.

No primeiro capítulo será abordada inicialmente a teoria dos Espaços Métricos com a apresentação de alguns exemplos clássicos de Espaços Métricos, como se dá a convergência em Espaços Métricos com os importantes conceitos de sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos e finalizaremos o capítulo com a exposição do Teorema do Ponto Fixo de Banach seguido de uma curiosa aplicação para obtenção de raízes de funções reais: o Método de Newton sob a luz do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Finalizaremos o primeiro capítulo com um comentário sobre o teorema do ponto fixo de Brouwer em uma dimensão com o intuito de exibir outra alternativa na obtenção de solução de equações não lineares, comparando as convergências entre o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Finalizaremos esse trabalho com o segundo capítulo apresentando três aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. A primeira se trata do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. A segunda tem como tema a aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach na área de compressão de imagens na internet. Já a terceira aplicação será apresentado como funciona o buscador do Google e qual é a causa do seu sucesso.

Capítulo 1

O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Um teorema de ponto fixo é essencialmente um resultado que estabelece condições para que exista um elemento x do domínio de uma aplicação $f : M \rightarrow M$, tal que $f(x) = x$.

Será que toda função tem ponto fixo? Na prática, dada uma função f , de certa forma é difícil assegurar-se da existência de um ponto fixo para f . Em alguma situação, o interesse é garantir a existência de um e somente um ponto fixo para um função dada. O Teorema do Ponto Fixo de Banach tem como particularidade, além de garantir a existência e unicidade do ponto fixo ainda fornece um processo iterativo que permite encontrá-lo.

O objetivo central desse capítulo é o de apresentar, de forma sucinta, as ferramentas básicas sobre espaços métricos para o entendimento da demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Além disso, como aplicação veremos alguns resultados como a resolução de equações não lineares e o famoso método de de Newton para obtenção de raízes de uma função real, por aproximação numérica.

1.1 Motivação

Suponha que João Gabriel, aluno do 1^o ano do ensino médio, para experimentar sua nova calculadora científica, presente de seu pai, decide pressionar as teclas “1” e “=”, obtendo o valor 1. Depois pressionou a tecla “cos” obtendo o valor 0,5403023059 (por acaso a calculadora do João Gabriel estava a trabalhar em radianos). João Gabriel gostou do resultado obtido e, num raro ímpeto experimentalista, resolve voltar a pressionar sucessivamente a tecla “cos” por forma a calcular o cosseno do número previamente calculado; designando por n o número de vezes que a tecla “cos” foi pressionada e por x_n valor obtido, tem-se:

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	0,5403023059	16	0,7395672022	31	0,739083847	46	0,7390851366
2	0,8575532158	17	0,7387603199	32	0,7390859996	47	0,7391301765
3	0,6542897905	18	0,7393038924	33	0,7390845496	48	0,7390851309
4	0,7934803587	19	0,7389377567	34	0,7390855264	49	0,7390851348
5	0,7013687736	20	0,7391843998	35	0,7390848684	50	0,7390851322
6	0,7639596829	21	0,7390182624	36	0,7390853116	51	0,7390851339
7	0,7221022425	22	0,7391301765	37	0,739085013	52	0,7390851327
8	0,7504177618	23	0,7390547907	38	0,7390852142	53	0,7390851335
9	0,7314040424	24	0,7391055719	39	0,7390850787	54	0,739085133
10	0,7442373549	25	0,7390713653	40	0,7390851699	55	0,7390851334
11	0,7356047404	26	0,7390944074	41	0,7390851085	56	0,7390851331
12	0,7414250866	27	0,739078886	42	0,7390851499	57	0,7390851333
13	0,7375068905	28	0,7390893414	43	0,739085122	58	0,7390851332
14	0,7401473356	29	0,7390822985	44	0,7390851408	59	0,7390851332
15	0,7383692041	30	0,7390870427	45	0,7390851281	60	0,7390851332

Chegado a este ponto, depois de pressionar “60” vezes a tecla “cos”, o João Gabriel assustou-se (arrependendo-se até de seu ímpeto). Ter-se-ia a calculadora avariada? Por que é que, depois de pressionar 58 vezes a tecla “cos”, por mais que continuasse a repetir a operação, obtinha sempre o mesmo valor? Aflição e não encontrando o número de telefone da “Reparadora de Calculadoras”, resolve fazer uma experiência análoga, mas partindo do valor 335 em vez do valor 1. Obteve na 60 vez $x_{60} = 0,7390851332$. Ao fim de premir 57 vezes a tecla “cos” obtinha o mesmo valor de há pouco. Desalentado, João Gabriel resolveu fazer uma experiência análoga com a tecla “ \tan^{-1} ” (correspondente à função arco tangente), partindo do valor 1; eis os resultados:

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	0,7853981934	16	0,2957885899	31	0,2163331839	46	0,1786587773
2	0,66577375	17	0,2875886511	32	0,2130500906	47	0,1767935042
3	0,5873841757	18	0,2800317036	33	0,2099116578	48	0,1749853452
4	0,5310915102	19	0,2730381016	34	0,2069075819	49	0,1732314471
5	0,4882103378	20	0,2665413363	35	0,204028557	50	0,1715291523
6	0,4541714733	21	0,2604853784	36	0,2012661543	51	0,1698759817
7	0,4263175061	22	0,2548226492	37	0,198612719	52	0,1682696198
8	0,4029860575	23	0,2495124513	38	0,1960612806	53	0,166707901
9	0,3830779111	24	0,2445197411	39	0,193605477	54	0,165188797
10	0,3658337989	25	0,2398141588	40	0,1912394875	55	0,1637104065
11	0,3507104329	26	0,2353692536	41	0,1889579751	56	0,1622709445
12	0,3373075815	27	0,2311618604	42	0,1867560362	57	0,1608687339
13	0,325323103	28	0,2271715935	43	0,1846291561	58	0,1595021966
14	0,314524107	29	0,2233804326	44	0,1825731707	59	0,1581698468
15	0,3047278305	30	0,2197723811	45	0,180584238	60	0,1568702837

O João Gabriel não entendeu o que se passava. Obteve uma sucessão de números positivos que aparentemente é decrescente; mas sê-lo-á de fato? Será que tenderá para zero? Será que converge para outro limite? Por que é que a máquina se comporta de maneira diferente neste último caso, não estabilizando o resultado como nos casos anteriores? O João Gabriel resolveu pensar um pouco e, ao chegar a conclusão nenhuma, decidiu perguntar ao seu pai sobre o ocorrido, que prontamente lhe responde que tal assunto não fazia parte do conteúdo programático do 1^o ano do ensino médio, mas que ele se depararia, ao longo de sua vida estudantil com algumas equações chamadas de “equações não lineares” e que, de início teriam métodos alternativos como comparação gráfica, métodos iterativos como o da “bisseção” e, para alunos mais avançados, poderiam ser apresentados alguns resultados de Teoremas de Ponto Fixo. **(História adaptada da Revista Gazeta de Matemática, janeiro 2002 - n^o 142, Portugal)**

Nos últimos 50 anos a teoria dos pontos fixos revelou-se como uma ferramenta poderosa e importante no estudo dos fenômenos não lineares, mapeando e indicando a existência de soluções. Matemáticos como Cauchy, Liouville, Lipschitz, Peano, Fredholm, Picard, Banach, Brouwer, Helpert, Mann, Ishikawa, etc, deram diferentes tipos de métodos iterativos para resolver problemas de ponto fixo.

1.2 Espaços Métricos

Quando se faz um curso de cálculo, seja em uma ou em várias variáveis, sempre nos deparamos com a noção de derivação e integração, centradas na noção intuitiva de distância entre pontos, seja em forma de intervalos no caso da reta real, seja na forma de vizinhança, no caso de mais de uma variável. Assim, por exemplo, quando vamos tratar da convergência de uma sequência de números reais (x_n) para um ponto a , devemos nos certificar que $|x_n - a|$ fica cada vez mais próximo de zero à medida que n cresce, ou seja, a **distância** entre os elementos da sequência e seu limite vai ficando cada vez menor.

Ao longo da sua evolução, principalmente depois do século XIX, a Matemática ganhou uma roupagem bem mais abstrata generalizando a noção de distância de tal forma a aplicá-la a conjuntos não tão comuns como \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Espaços com dimensão maior e até de dimensão infinita ganharam atenção no estudo da distância entre pontos do espaço. Assim, tais estudos conduziram às noções de Métrica e de Espaços Métricos inicialmente introduzidas por **Maurice René Fréchet (1878 - 1973)**, matemático francês que além desse conceito também foi responsável por estabelecer os fundamentos da topologia, convergência uniforme além de ter sido o primeiro a usar a expressão “Espaço de Banach”.

Assim, quais seriam os “ingredientes” a serem usados para se traduzir, de forma precisa, a noção de distância? Para isso, façamos a

Definição 1.1 *Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de métrica em M se gozar das seguintes propriedades:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ para todo $x, y \in M$;
2. $d(x, y) > 0$, para todo $x, y \in M$ e $x \neq y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$ (simetria);
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in M$ (desigualdade triangular).

Ao par (M, d) chamamos de *Espaço Métrico*.

Vejamos a seguir alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo: Sejam M um conjunto qualquer não vazio e consideremos a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

É imediata a verificação de que d é uma métrica, essa é chamada *métrica zero-um*.

Exemplo: Considere $M = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Usando as propriedades de módulo de um número real, segue que d é uma métrica. De fato, sejam x, y e $z \in \mathbb{R}$ quaisquer. Se $x = y$, é imediato que $|x - y| = 0$, o que implica em $d(x, y) = 0$. Além disso, se $x \neq y$, temos $x - y \neq 0$ o que implica em $|x - y| > 0$, ou seja, que $d(x, y) > 0$. Também, temos que

$$d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x).$$

Por fim, temos que

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Portanto, d é um métrica a qual é chamada de métrica usual de \mathbb{R} .

Exemplo: Agora, considerando

$$M = \mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, \dots, x_N); x_i \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2, \dots, N\}$$

há três métricas importantes em \mathbb{R}^N . Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, consideremos:

- $d_e : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}.$$

Provaremos que d_e é uma métrica. Com efeito, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^N$. Assim,

$$d_e(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2 + \dots + (x_N - x_N)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = 0.$$

Se $x \neq y$, então $x_i \neq y_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Assim, como $x_i - y_i \neq 0$ temos $(x_i - y_i)^2 > 0$. Portanto,

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0.$$

Para a propriedade da simetria, sabemos que $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Daí, temos:

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_N - x_N)^2.$$

Extraindo a raiz em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_N - x_N)^2}.$$

Daí, concluímos que $d_e(x, y) = d_e(y, x)$. Finalmente, para mostrar a desigualdade triangular, será necessário o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^N , a qual diz que para todo $a, b \in \mathbb{R}^N$, onde $a = (a_1, \dots, a_N)$ e $b = (b_1, \dots, b_N)$,

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_Nb_N| \leq \left(\sqrt{a_1^2 + \dots + a_N^2} \right) \left(\sqrt{b_1^2 + \dots + b_N^2} \right). \quad (1.1)$$

Prova de (1.1): Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \|a - tb\|^2$ com $a, b \in \mathbb{R}^N$, onde $d_e(a, b) = \|a - b\|$, o produto interno $\langle a, b \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_Nb_N$ e norma $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle$. Vejamos que $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, $\|a - tb\|^2 \geq 0$, o que implica que

$$\|a - tb\|^2 = \langle a - tb, a - tb \rangle = \langle a, a \rangle - 2t\langle a, b \rangle + t^2\langle b, b \rangle,$$

ou seja,

$$\|a\|^2 - 2t\langle a, b \rangle + t^2\|b\|^2 \geq 0.$$

Como isso só ocorre quando $(-2\langle a, b \rangle)^2 - 4\|a\|^2\|b\|^2 \leq 0$, ou seja,

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

Agora, provaremos a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} [d_e(x, z)]^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N [(x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^N (y_i - z_i)^2 \\ &= [d_e(x, y)]^2 + 2 \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)(y_i - z_i) + [d_e(y, z)]^2 \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\leq [d_e(x, y)]^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - z_i)^2} + [d_e(y, z)]^2 \\ &= [d_e(x, y)]^2 + 2d_e(x, y) \cdot d_e(y, z) + [d_e(y, z)]^2 \\ &= [d_e(x, y) + d_e(y, z)]^2. \end{aligned}$$

Assim, $d_e(x, z) \leq d_e(x, y) + d_e(y, z)$.

De maneira mais simples, pode-se mostrar que as funções d_s e d_∞ descritas abaixo são métricas em \mathbb{R}^N .

- $d_s : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_s(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_N - y_N|.$$

- $d_\infty : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_N - y_N|\}.$$

Vejam agora um exemplo de espaço métrico mais abstrato.

Exemplo: Seja $M = C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua em } [a, b]\}$ com as métricas

- $d' : M \times M$ definida por

$$d'(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|.$$

Mostraremos que d' é uma métrica. De início, podemos ver que pelo Teorema de Weierstrass (para detalhes, ver [7]), d' está bem definida. Sejam f e g funções quaisquer de $C[a, b]$. Assim, temos que

$$d(f, f) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - f(t)| = \max_{t \in [a, b]} |0| = 0.$$

Se $f \neq g$ então existe um $t_0 \in [a, b]$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$.

Assim,

$$0 < |f(t_0) - g(t_0)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| = d(f, g).$$

Sabemos também que, para todo $t \in [a, b]$, vale

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| = \max_{t \in [a, b]} |g(t) - f(t)| = d(g, f).$$

Note que

$$\begin{aligned} |f(t) - h(t)| &= |f(t) - g(t) + g(t) - h(t)| \\ &\leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t \in [a, b]} |g(t) - h(t)|, \end{aligned}$$

pois

$$|f(t) - g(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

$$|g(t) - h(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |g(t) - h(t)|.$$

Com isso, concluímos facilmente que:

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - h(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t \in [a, b]} |g(t) - h(t)|,$$

ou seja, $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$.

Analogamente, pode-se mostrar que

- $d'' : M \times M$ definida por

$$d''(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

também é uma métrica.

1.3 Convergência em Espaços Métricos

Definição 1.2 Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M, d) chama-se limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo considere $M = \mathbb{R}$, com a métrica usual e a sequência (x_n) , tal que $x_n = (-1)^n$. Vemos que para qualquer natural n , temos $|(-1)^n| = 1$. Daí, escolhidos quaisquer m e n naturais, temos

$$d(x_m, x_n) = |(-1)^m - (-1)^n| \leq |(-1)^m| + |(-1)^n| \leq 1 + 1 = 2.$$

Definição 1.3 Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M, d) é dita convergente em M se existir $x \in M$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Isto é,

para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 ; para todo $n > n_0$ tem-se $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Aqui, x é chamado de limite (x_n) . Quando for necessário, usaremos a notação $x_n \rightarrow x$ para indicar a convergência.

Lema 1.1 Seja (M, d) um espaço métrico. Então,

(a) Uma sequência convergente em M é limitada e seu limite é único.

(b) Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em M , então $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

Prova:

(a) Suponha que $x_n \rightarrow x$ em M . Então, fixando $\varepsilon = 1$, podemos encontrar n_0 tal que

$$d(x_n, x) < 1 \text{ para todo } n > n_0.$$

É evidente também que para todo $m \leq n_0$ temos que

$$d(x_m, x) \leq \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_{n_0}, x)\}.$$

Em consequência da desigualdade triangular, podemos escrever:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m),$$

logo,

$$d(x_n, x_m) \leq 1 + \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_{n_0}, x)\}.$$

O que mostra que (x_n) é limitada. Assim, basta tomar

$$c = 1 + \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_{n_0}, x)\}.$$

Consideremos agora que $x_n \rightarrow a$ e que $x_n \rightarrow b$ em M . Daí, pela desigualdade triangular, temos:

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b).$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, teremos $d(a, b) \leq 0$, o que implica que $d(a, b) = 0$ e isso ocorre se, e somente se, $a = b$. Logo, o limite é único.

(b) Pela desigualdade triangular, temos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

Assim,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n). \quad (1.2)$$

Por outro lado,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y).$$

O que implica em,

$$-[d(x, x_n) + d(y_n, y)] \leq d(x_n, y_n) - d(x, y). \quad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3), temos que

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n).$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ e usando que

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ e } d(y, y_n) \rightarrow 0,$$

obtemos que $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$. ■

1.4 Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos

Definição 1.4 Uma sequência (x_n) é de Cauchy num Espaço Métrico (M, d) quando qualquer que seja $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, escolhidos quaisquer dois índices a partir de n_0 , digamos n e m , teremos sempre $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Uma forma equivalente de mostrar que uma sequência, nas mesmas condições acima, é de Cauchy é escrevermos o índice $m + n = p$, $p \in \mathbb{N}$ e mostrarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$.

Isso significa que quando os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado, necessariamente aproximam-se uns dos outros.

Definição 1.5 Um espaço métrico (M, d) é dito ser completo se **toda** sequência de Cauchy, tomada em M , convergir em M .

Exemplo: O espaço \mathbb{Q} dos números racionais *não* é completo quando dotado da métrica usual em \mathbb{R} . Para isto, considere a sequência em que $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1!}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, e assim sucessivamente. Primeiro, vejamos que (x_n) é de Cauchy. De fato, $d(x_n, x_{n+p}) = \left| \frac{1}{(n+p)!} \right|$, ou seja $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$. Também sabemos, pelo desenvolvimento da Série de Taylor, que $x_n \rightarrow e$. No entanto, como $e \notin \mathbb{Q}$ (ver em [3]), temos que \mathbb{Q} não é completo.

Proposição 1 *Toda sequência de Cauchy em (M, d) é limitada.*

Prova: *Tomemos uma sequência (x_n) , de Cauchy, em (M, d) . Assim, fixando $\varepsilon = 1$, deve existir um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:*

$$d(x_m, x_n) < 1, \text{ para todo } m, n > n_0.$$

Para $m, n < n_0$, seja $c = \max\{d(x_m, x_n); m, n \leq n_0\}$, então

$$d(x_m, x_n) \leq c + 1, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

■

Proposição 2 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (M, d) e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) . Se (x_{n_k}) é convergente, então (x_n) também é convergente.*

Prova: *Considere (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) tal que $x_{n_k} \rightarrow a$, com $a \in M$. Tome $\varepsilon > 0$. Como (x_n) é de Cauchy, deve existir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } m, n > n_1.$$

Como $x_{n_k} \rightarrow a$, deve existir um $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n_k > n_2$$

Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, escrevendo $m = n_0 + 1$ e usando a desigualdade triangular, temos:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0.$$

Assim, concluímos que $x_n \rightarrow a$.

■

Proposição 3 *A reta real, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, é um Espaço Métrico Completo.*

Prova: *Acabamos de demonstrar que toda sequência de Cauchy é limitada. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, que pode ser encontrado em [7], toda sequência limitada de números reais, possui uma subsequência convergente. Dessa forma, combinando as duas proposições, concluímos que \mathbb{R} é um espaço métrico completo.*

■

Observação: Analogamente, podemos concluir que $[a, b]$ com a métrica usual, usada na proposição anterior é um espaço métrico completo.

Proposição 4 *Toda sequência convergente em (M, d) é uma sequência de Cauchy.*

Prova: Se $x_n \rightarrow a$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Daí, pela desigualdade triangular, para $m, n > n_0$, temos:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Definição 1.6 *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que*

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Diz-se que $f : M \rightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos de M .

Proposição 5 *Uma função $f : X \rightarrow Y$ definida entre os espaços métricos (X, d_1) em (Y, d_2) é contínua em um ponto $a \in X$ se, e somente se, para qualquer sequência (x_n) em X , tem-se:*

$$x_n \xrightarrow{d_1} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a).$$

Prova: Assumindo que f é contínua, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in X$

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Seja $x_n \xrightarrow{d_1} a$. Então existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, temos $d_1(x_n, a) < \delta$, para todo $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, temos que

$$d_1(x_n, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_n), f(a)) < \varepsilon,$$

e, esta última desigualdade equivale dizer que $f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a)$.

Assumindo agora que $x_n \xrightarrow{d_1} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a)$, provemos que f é contínua em a . Suponha, por absurdo, que isso seja falso. Então, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$, e um $x \neq a$ satisfazendo

$$d_1(x, a) < \delta, \quad \text{mas } d_2(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Como $\delta > 0$ é qualquer, em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, fazamos $\delta = \frac{1}{n}$. Daí, teríamos:

$$d_1(x_n, a) < \frac{1}{n} \text{ mas } d_2(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Assim, construímos uma sequência em que $x_n \xrightarrow{d_1} a$, mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$, contradizendo nossa hipótese. ■

1.5 Exemplos de Espaços Métricos Completos

Exemplo: O espaço euclidiano \mathbb{R}^N é completo com as métricas d_e, d_s e d_∞ . Mostraremos com a métrica d_e .

Com efeito,

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

Em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Consideremos uma sequência de Cauchy qualquer (x_m) em \mathbb{R}^N , tem-se $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_N^{(m)})$.

Sendo (x_m) uma sequência de Cauchy, temos para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_p) = \left(\sum_{k=1}^N (x_k^{(m)} - x_k^{(p)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \text{ com } m, p > n_0. \quad (1.4)$$

Elevando (1.4) ao quadrado, obtemos:

$$\sum_{k=1}^N \left((x_k^{(m)} - x_k^{(p)})^2 \right) < \varepsilon^2,$$

portanto,

$$|x_k^{(m)} - x_k^{(p)}| < \varepsilon, \text{ com } m, p > n_0.$$

E a implicação ocorre, pois temos uma soma de termos positivos menor que ε^2 . Assim, cada termo é menor que ε^2 . Desta forma, para cada k fixo, temos que a sequência $(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Ela converge pela proposição 3, digamos $x_k^{(m)} \rightarrow x_k$, quando $m \rightarrow \infty$. Usando esse limite N vezes,

definimos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$. Da expressão (1.4), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_p) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^N \left(x_k^{(m)} - x_k^{(p)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k=1}^N \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(p)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k=1}^N \left(x_k - x_k^{(p)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= d(x, x_p) \leq \varepsilon, \text{ com } m > n_0. \end{aligned}$$

Isso mostra que a sequência de Cauchy tomada é convergente em \mathbb{R}^N .

Definição 1.7 *Uma sequência de funções $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, dependendo apenas de ε , tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ seja qual for $x \in M$.*

Exemplo: O espaço das funções $C[a, b]$ é completo com a métrica $d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$.

Com efeito, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n > n_0$, temos:

$$d(f_m, f_n) = \max_{t \in [a, b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Assim, para todo $t \in [a, b]$,

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon, \text{ com } m, n > n_0.$$

Daí, temos que $(f_1(t), f_2(t), \dots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Já que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é completo, a sequência $(f_n(t))$ converge, digamos $f_n(t) \rightarrow f(t)$. Desse modo, pela unicidade do limite, podemos associar para cada $t \in [a, b]$ um único número real $f(t)$. Isso define uma função f em $[a, b]$. Mostremos que f pertence a $C[a, b]$ e que $f_n \rightarrow f$, uniformemente. Da expressão (1.5), quando $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_m, f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} |f_m(t) - f_n(t)| \\ &= \max_{t \in [a, b]} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right| \\ &= \max_{t \in [a, b]} |f_m(t) - f(t)| \\ &= d(f_m, f) \quad (m > n_0) \end{aligned}$$

Consequentemente, para todo $t \in [a, b]$,

$$|f_m(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad (m > n_0).$$

Mostramos assim que $(f_n(t))$ converge uniformemente em $[a, b]$. Visto que as funções $f_n(t)$ são contínuas em $[a, b]$, temos que a função limite $f(t)$ é contínua em $[a, b]$ (veja em [7]). Com isso, concluímos que $C[a, b]$ é completo, em relação à métrica do máximo.

1.6 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste tópico vamos enunciar demonstrar e exibir algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Um dos motivos de sua imensa importância é o de ele fornecer um processo iterativo para a busca de soluções de equações não lineares.

Definição 1.8 *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma função $f : M \rightarrow M$ é chamada de contração sobre M se existe um número real positivo $k < 1$, tal que:*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in M.$$

Exemplo: Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual. A função $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uma contração. De fato:

$$d(f(x), f(y)) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \cdot |x - y|.$$

Como $x, y \geq 1$, temos que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$, ou ainda, $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}$.

Logo,

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Observe que f não é uma contração quando definida no intervalo fechado $[0, 1]$, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

Teorema 1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \rightarrow M$. Então f possui um único ponto fixo.*

Prova: Considere $x_0 \in M$ e a sequência (x_n) em M definida por $x_{n+1} = f(x_n)$. Então,

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq kd(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq kd(x_0, x_1)$$

e

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd(x_1, x_2) \leq k^2d(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_2, x_3) \leq k^2d(x_0, x_1).$$

Continuando o processo, usando um argumento indutivo, chegamos à conclusão que $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. Como o nosso interesse é mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy, da desigualdade triangular, temos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \quad (1.6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq k^n d(x_0, x_1), \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq k^{n+1} d(x_0, x_1), \\ &\vdots \\ d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) &\leq k^{n+p-1} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}) d(x_0, x_1).$$

Usando (1.6) e que $k < 1$, para qualquer p , fixado, temos

$$k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1} = k^n \cdot \frac{1 - k^p}{1 - k} \leq \frac{k^n}{1 - k},$$

logo, obtemos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1 - k} \cdot d(x_0, x_1).$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, chegamos a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k^n}{1 - k} d(x_0, x_1) \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_0, x_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{1 - k}.$$

Como $0 < k < 1$, $k^n \rightarrow 0$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{1 - k} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0,$$

donde concluímos que (x_n) é de fato uma sequência de Cauchy em M .

Ora, como (M, d) é um Espaço Métrico Completo, então (x_n) converge em M . Assim, tomando o limite na equação $x_{n+1} = f(x_n)$ teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Bem, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, e, como a aplicação f é contínua, usando Proposição 5, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a).$$

Assim, temos a igualdade desejada

$$f(a) = a.$$

Assim, provamos a existência do ponto fixo. Agora, provemos a unicidade. Sejam a e b em M tais que $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Assim,

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b).$$

Isso leva à desigualdade

$$(1 - k)d(a, b) \leq 0.$$

Como $k < 1$, então $1 - k > 0$, donde concluímos que $d(a, b) \leq 0$. Como $d(a, b)$ é um número real não negativo, segue que $d(a, b) = 0$, e isso só ocorre se, e somente se, $a = b$.

Assim, f só possui um único ponto fixo, o que completa a demonstração do Teorema. ■

1.7 Algumas Aplicações

Exemplo: Considere o Espaço Métrico a reta real, com a métrica usual, e a equação não linear

$$x = k \cos x$$

onde $0 < k < 1$ é uma constante Real. Será que essa equação possui solução? Se possuir, essa solução é única?

Na intenção de usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, já temos um Espaço Métrico Completo que é a reta real, basta verificarmos se $f(x) = k \cos x$ é uma contração. Vejamos que

$$d(f(x), f(y)) = k|\cos(x) - \cos(y)| = k \left| \int_x^y \text{sen}(t) dt \right| \leq k \int_x^y |\text{sen}(t)| dt.$$

Como $|\operatorname{sen}(t)| \leq 1$, temos que

$$k \int_x^y |\operatorname{sen}(t)| dt \leq k|x - y| = kd(x, y).$$

Assim,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Logo, f é uma contração e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, admite um único ponto fixo, ou seja, a equação $x = k \cos(x)$ admite uma única solução.

Seguindo as iterações indicadas na demonstração do Teorema, isto é, montando a sequência $x_{n+1} = f(x_n)$ e tomando $k = \frac{1}{3}$, por exemplo, e $x_0 = 0,5$ como valor inicial, podemos chegar aos seguintes cálculos:

$$x_1 = \frac{1}{3} \cos(0,5) = 0,29252752$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \cos(0,29252752) = 0,31917269$$

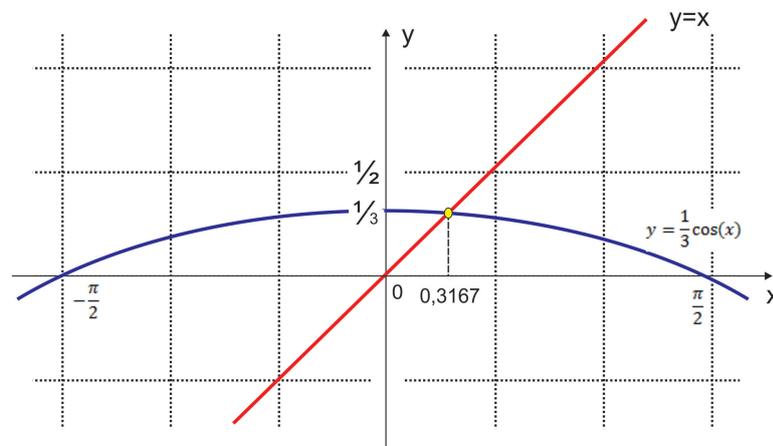
$$x_3 = \frac{1}{3} \cos(0,31917269) = 0,31649844$$

$$x_4 = \frac{1}{3} \cos(0,31649844) = 0,31677702$$

$$x_5 = \frac{1}{3} \cos(0,31677702) = 0,31674811$$

$$x_6 = \frac{1}{3} \cos(0,31674811) = 0,31675111.$$

Observe que na quinta iteração já temos uma precisão de 4 casas decimais sendo a raiz da equação $x \approx 0,3167$. Veja a ilustração gráfica a seguir.



Exemplo: Considere o Espaço Métrico a reta real, com a métrica usual, e a equação não linear $x = e^{-x}$. Esta equação possui solução? Se possuir, será que ela é única?

Bem, seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = e^{-x}$. Visto que o intervalo $]0, 1]$ é um espaço métrico completo, devemos mostrar que f é uma contração. Vejamos que $f'(x) = -e^{-x}$, e temos que

$$|f'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x} < 1,$$

sempre que $x \in [0, 1]$. Como $f'(x)$ é a inclinação da reta no ponto $(x, f(x))$, temos que

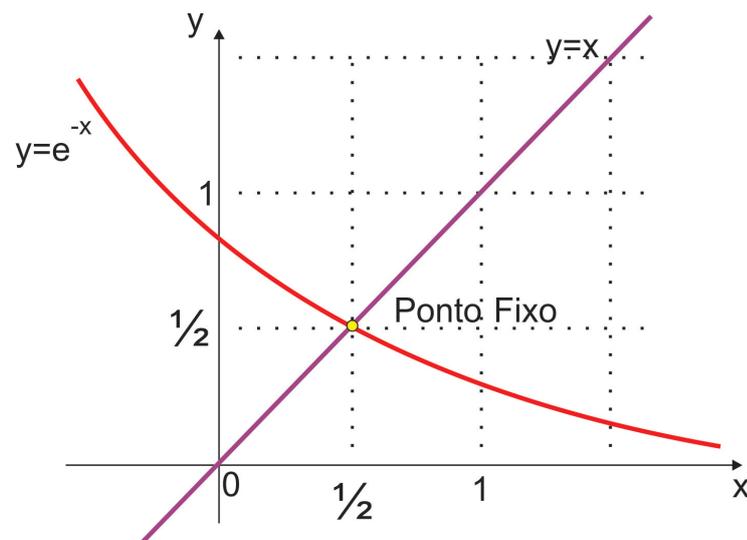
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x)$$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(x)|$$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < 1$$

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Vejamos como garantimos graficamente o ponto fixo da função.



Assim, f é de fato uma contração, e, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, a equação não linear $x = e^{-x}$ possui uma única solução para $x \in]0, 1]$. Agora, vamos estimar essa solução. Começemos tomando $x_0 = \frac{1}{5}$ (este valor é aleatório e colhido em $]0, 1]$).

$$x_1 = f\left(\frac{1}{5}\right) = e^{-\frac{1}{5}} = 0,818730753078$$

$$x_2 = f(0,818730753078) = e^{-0,818730753078} = 0,440991025943$$

$$x_3 = f(0,440991025943) = e^{-0,440991025943} = 0,643398480442$$

$$x_4 = f(0,643398480442) = e^{-0,643398480442} = 0,525503472633$$

$$x_5 = f(0,525503472633) = e^{-0,525503472633} = 0,591257607392$$

$$x_6 = f(0,591257607392) = e^{-0,591257607392} = 0,553630596815$$

$$x_7 = f(0,553630596815) = e^{-0,553630596815} = 0,574858936094$$

$$x_8 = f(0,574858936094) = e^{-0,574858936094} = 0,562784251753$$

$$x_9 = f(0,562784251753) = e^{-0,562784251753} = 0,569620885981$$

$$x_{10} = f(0,569620885981) = e^{-0,569620885981} = 0,565739877967.$$

Notemos que com dez iterações chegamos ao valor $x = 0,56$ com precisão de duas casas decimais. Após várias iterações poderíamos chegar perto da solução que é $x = 0,56714329041$, onde dependendo da necessidade da aproximação não seria necessária uma grande quantidade de casas decimais.

Exemplo: O conhecido Método de Newton de determinação de zeros de funções reais pode ser estudado sob a visão do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função na qual desejamos determinar um zero, ou seja, uma solução para da equação:

$$f(\chi) = 0.$$

Note que essa equação pode ser reescrita na forma:

$$\chi f'(\chi) = \chi f'(\chi) - f(\chi).$$

Para $f'(\chi) \neq 0$, temos:

$$\chi = \chi - \frac{f(\chi)}{f'(\chi)}.$$

Colocado dessa forma, o problema torna-se um problema de ponto fixo para a aplicação $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Isso motiva a seguinte proposição.

Proposição 6 *Assuma que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é, pelo menos, duas vezes diferenciável, com $f'(x) \neq 0$ e $f(a)f(b) < 0$, então f possuirá uma raiz χ , única, em um dado intervalo $[a, b]$ se existir λ com $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| \leq \lambda, \quad \text{para todo } x \in [a, b] \quad (1.7)$$

e, se

$$\left| \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right| \leq (1 - \lambda)\alpha, \quad (1.8)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{b-a}{2}.$$

Nesse caso, tem-se

$$\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

onde a sequência $(x_n) \in [a, b]$ é determinada iterativamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

sendo $x_0 \in [a, b]$ arbitrário.

Observação: Como veremos a seguir, a condição (1.7) é importante para garantir a contratividade de T , enquanto que (1.8) é suficiente para garantir que T leve pontos de $[a, b]$ em $[a, b]$, podendo eventualmente ser substituída por outra condição que garanta o mesmo.

Prova: Sejam $x, y \in [a, b]$. Tem-se

$$\begin{aligned} T(x) - T(y) &= y - \frac{f(y)}{f'(y)} - x + \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= \int_x^y \frac{d}{dt} \left[t - \frac{f(t)}{f'(t)} \right] dt \\ &= \int_x^y \frac{f(t)f''(t)}{[f'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

Assim, (1.7) garante que,

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| \int_x^y \frac{f(t)f''(t)}{[f'(t)]^2} dt \right| \\ &\leq \int_x^y \left| \frac{f(t)f''(t)}{[f'(t)]^2} \right| dt \\ &\leq \int_x^y \lambda dt = \lambda|y - x|. \end{aligned}$$

Logo, como $|T(x) - T(y)| \leq \lambda|y - x|$, com $0 \leq \lambda < 1$, temos que T é uma contração. Precisamos garantir que T leve pontos de $[a, b]$ em $[a, b]$. Isso equivale a garantir que $|T(x) - \bar{x}| \leq \alpha$, para todo $x \in [a, b]$, ou seja, para todo x tal que $|x - \bar{x}| \leq \alpha$. Uma maneira de impor isso usando (1.7) é supor válida a condição (1.8).

De fato,

$$\begin{aligned}
 |T(x) - x| &= \left| T(x) - T(\bar{x}) - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right| \\
 &\leq |T(x) - T(\bar{x})| + \left| -\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right| \\
 &\leq \lambda|x - \bar{x}| + \left| \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right| \\
 &\leq \lambda|x - \bar{x}| + (1 - \lambda)\alpha \\
 &\leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha \\
 &= \alpha.
 \end{aligned}$$

Com isso, provamos que T é uma contração que mapeia o espaço métrico completo $[a, b]$ nele mesmo. O Teorema do Ponto Fixo de Banach garante o resto. ■

Exemplo: Usando o método de Newton, vamos determinar um valor aproximado para $\sqrt{2}$ calculando o zero positivo da função $f(x) = x^2 - 2$. Para isso, calculando sua derivada, temos $f'(x) = 2x$. Agora, precisamos determinar um intervalo em que f se anule. Vejamos que

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0.$$

Pela continuidade de f , entre 1 e 2 temos uma raiz positiva de f (veja Teorema 1.3, na próxima seção). Usando a sequência recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

começando com $x = 1$, teremos:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = 1,5 = \frac{3}{2},$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,5 - \frac{1,5^2 - 2}{2 \cdot 1,5} = 1,4166666667 = \frac{17}{12},$$

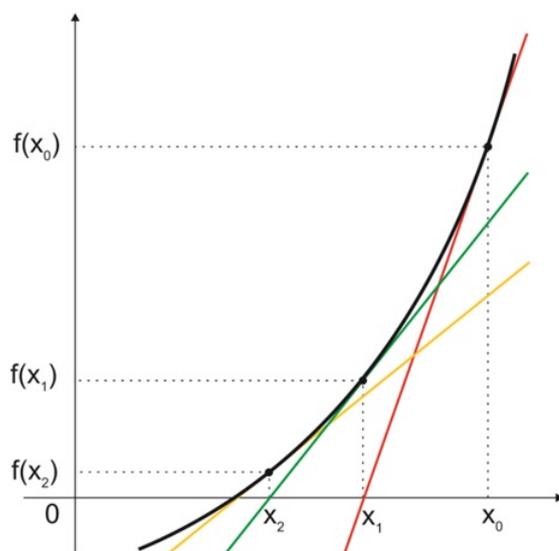
$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1 - \frac{1,4166666667^2 - 2}{2 \cdot 1,4166666667} = 1,4142568628 = \frac{557}{408},$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 1 - \frac{1,4142568628^2 - 2}{2 \cdot 1,4142568628} = 1,41421356303 = \frac{643177}{454512},$$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = 1 - \frac{1,41421356303^2 - 2}{2 \cdot 1,41421356303} = 1,41421356237,$$

$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} = 1 - \frac{1,41421356237^2 - 2}{2 \cdot 1,41421356237} = 1,41421356237.$$

Percebemos que na sétima iteração já conseguimos uma aproximação para o *ponto fixo* com a sequência $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, sendo $f(x) = x^2 - 2$, ou seja, uma aproximação é $x = 1,41421356237$. Aqui, no método de Newton pode-se também controlar o erro desejado para a aproximação pedida além de obter uma aproximação por racionais. Podemos notar que na quarta iteração temos $\sqrt{2}$ sendo aproximado por $\frac{643177}{454512}$ com erro aparecendo na nona casa decimal. A ideia geométrica do Método de Newton pode ser vista no gráfico



Observe que os pontos de tangência das retas com a curva que representa a função f se aproximam da raiz de f na mesma velocidade da convergência do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

1.8 Algumas Observações

Existe, dentre vários outros, um teorema de ponto fixo, que também garante a existência de soluções reais de equações não lineares: o teorema do ponto fixo

de Brouwer. Em topologia, o teorema foi inicialmente proposto pelo matemático holandês Luitzen E. Jan Brouwer em 1910 e, topologicamente, o resultado do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer pode ser entendido da seguinte forma: coloque aleatoriamente uma folha de papel amassada (sem rasgá-la) acima de outra folha de mesmo padrão (papel ofício, papel carta, etc.) de modo que o papel amassado esteja totalmente acima da folha não amassada. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer estabelece que deve existir pelo menos um ponto da folha amassada que está diretamente acima do ponto correspondente da folha que está abaixo. Este é o entendimento do teorema em duas dimensões.

Supostamente o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer originou-se da observação de Brouwer quando o mesmo mexia uma xícara de café. Ao observar atentamente para o movimento do fluido na xícara ele chegou à conclusão de que sempre ao menos há um ponto da superfície que não está em movimento. O ponto fixo não é necessariamente o que parece estar parado, visto que o centro da turbulência move-se um pouco. Esse é o entendimento para o teorema em três dimensões.

Para o melhor entendimento do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão um, considere o seguinte resultado:

Teorema 1.2 (Teorema dos intervalos encaixantes) *Sejam $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos fechados, limitados, não vazios e encaixantes. Então, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Além disso, se $\inf\{b_n - a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$, então c é o único ponto da intersecção.

Prova: *Segue das hipóteses que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:*

$$a_{n+1} \geq a_n, \quad b_{n+1} \geq b_n \quad \text{e} \quad a_n < b_n \quad (1.9)$$

Temos $b_1 \geq a_n$, qualquer que seja n , já que $I_n \subset I_1$. Seja $c = \sup\{a_n; a_n \in \mathbb{N}\}$ o que nos dá $c \geq a_n$, para qualquer n natural. Para que c pertença à intersecção, basta que $c \leq b_n$ para qualquer n natural. Raciocinando por redução ao absurdo, suponha que exista um k natural tal que $b_k < c$. Logo, $b_k < a_m$ para algum natural m . Tomando $p = \max\{k, m\}$, teríamos $a_p \geq a_m > b_k \geq b_p$, o que é um absurdo, bastando observar (1.9). Logo, para todo n natural, $a_n \leq c \leq b_n$, mostrando que

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Agora, para vermos que c é único na intersecção basta se provar que $\inf\{b_n - a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$. Com efeito, definindo $d = \inf\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$, então temos $d \geq a_n$, para todo n natural e $d \geq c$. Já que

$$0 \leq d - c \leq b_n - a_n.$$

Para todo n , isso só ocorre quando $c = d$. Assim, $\inf\{b_n - a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$, donde concluímos que c é único. ■

Para mais informações sobre as definições e propriedades de ínfimos e supremos de conjuntos de números reais, basta consultar [7].

Teorema 1.3 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$.*

Prova: *Será utilizado o Método da Bissecção. Primeiro consideremos a função $g(x) = f(x) - d$ e mostremos que existe $c \in]a, b[$ tal que $g(c) = 0$. Para tanto, definindo $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Considere o algoritmo introduzindo as sequências (a_n) e (b_n) em que representa a n -ésima iteração.*

Se

$$g(b_1)g\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < 0,$$

defina

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad e \quad b_2 = b_1,$$

caso contrário, defina

$$a_2 = a_1 \quad e \quad \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Prossequimos o processo de forma iterativa, isto é, se

$$g(b_n)g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0,$$

defina,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad e \quad b_{n+1} = b_n,$$

caso contrário, defina

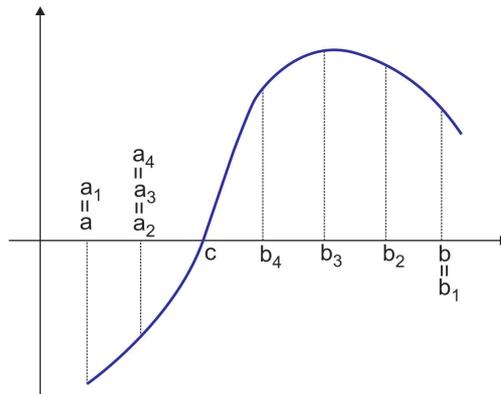
$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad e \quad a_{n+1} = a_n.$$

Observemos que o Método da Bissecção gera uma sequência de intervalos encaixantes.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

Como o comprimento de cada intervalo é sempre a metade do comprimento do intervalo anterior, podemos concluir que

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$



Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, concluímos que o Método da Bisseção é um caso particular do Teorema dos Intervalos Encaixantes. Esse Teorema nos diz que se os intervalos são encaixantes e seus comprimentos tendem a zero, então existe um único $c \in [a, b]$, tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\},$$

ou, equivalentemente, $c \in [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Retornando ao algoritmo, observemos que o Método da Bisseção (c_n) dada por $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ que converge para c . É fácil verificar que

$$|c_n - c| < \frac{a - b}{2^{n-1}}.$$

Logo, existe $c \in]a, b[$ tal que $g(c) = 0$, o que completa a demonstração. ■

Teorema 1.4 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, caso $n = 1$) Considere uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, onde $[a, b]$ é um intervalo fechado de a até b . Então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Prova: Definindo a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x - f(x)$. Temos que g é uma função contínua, pois é uma combinação linear de funções contínuas, com $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário deve existir um $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $f(c) = c$. ■

Sabe-se que o teorema do ponto fixo de Brouwer é um teorema de existência, ou seja, é usado para mostrar a existência de soluções em equações não lineares, mas como foi apresentada a demonstração do Teorema do Valor Intermediário, a ideia,

no caso unidimensional do teorema do ponto fixo de Brouwer, é também indicar um método iterativo para obter tal solução, o que não é possível no caso do teorema do ponto fixo de Brouwer para $n \geq 2$. Logo a seguir, será apresentado um exemplo de equação não linear que já foi resolvido com o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Exemplo: Encontrar o ponto fixo da função $f(x) = e^{-x}$ consiste em determinar uma solução para a equação não linear $e^{-x} = x$. Para isso, considere a função auxiliar $g(x) = e^{-x} - x$. Como g é contínua e faz sentido definir $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer garante a existência de pelo menos um ponto fixo para f . Sabendo que

$$g(0) = e^{-0} - 0 = 1 > 0 \text{ e que } g(1) = e^{-1} - 1 \approx -0,63212 < 0,$$

temos ente 0 e 1 uma raiz para a função $g(x) = e^{-x} - x$, o que nos levaria ao ponto fixo da função $f(x) = e^{-x}$. Como fora apresentado na demonstração do Teorema do Valor Intermediário, usaremos o *método da Bisseção* para construir tal ponto fixo. Assim, mesmo sabendo que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é um teorema de existência, para o caso em uma dimensão podemos determinar o ponto fixo. Bem, usando o método da Bisseção, vamos diminuir o intervalo de $[0, 1]$ para $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e verificarmos se as imagens dos extremos desse intervalo possui sinais opostos. Vejamos que

$$g(0) = e^{-0} - 0 = 1 > 0 \text{ e que } g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \approx 0,10653 > 0.$$

Já que os sinais não mudaram, devemos optar pela outra metade do intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Percebendo que

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \approx 0,10653 > 0 \text{ e que } g(1) = e^{-1} - 1 \approx -0,63212 < 0,$$

temos que a raiz da função $g(x) = e^{-x} - x$ está entre $\frac{1}{2}$ e 1. Dividindo esse intervalo ao meio ficando $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, verifiquemos os sinais das imagens das extremidades desse intervalo. Já sabemos que $g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \approx 0,10653 > 0$ e vendo que $g\left(\frac{3}{4}\right) = e^{-\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} \approx -0,27763 < 0$. Já aqui, o intervalo é esse mesmo e já podemos dividi-lo ao meio tomando agora o intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$, ou seja, já sabemos que

o ponto fixo procurado está entre 0,5 e 0,625. Continuando esse processo de forma indefinida podemos chegar ao ponto fixo e com qualquer aproximação desejada. Por curiosidade, tal ponto fixo desejado é $x = 0,5671433$ com precisão de seis casas decimais.

Notemos que o método de construção do ponto fixo se torna lento principalmente pela decisão sucessiva de qual intervalo tomar, mas apesar da velocidade não ser das melhores para obter o ponto fixo, o método é eficaz.

Capítulo 2

Outras Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Inicialmente neste capítulo, como aplicação do teorema do ponto fixo de Banach, provaremos o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. Em seguida mostraremos uma interessante aplicação na área de informática que envolve a compressão de imagens na internet. Por fim, apresentaremos a matemática usada no famoso buscador de páginas na internet: Google.

2.1 Teorema de Picard

Um das mais importantes aplicações do Teorema do Ponto fixo de Banach se dá nos espaços de funções com o teorema de Picard. O teorema garante a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais. A seguir exibiremos alguns exemplos de equações diferenciais como problemas de valor inicial onde é possível explicitar as suas soluções. Em seguida será apresentado o teorema de Picard seguido de sua demonstração e de alguns exemplos. Para tanto, considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ com coordenadas retangulares (t, x) , onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$ e tomemos inicialmente a

Definição 2.1 *Dada uma função contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $(t_0, x_0) \in U$, a equação diferencial de primeira ordem, com valor inicial, definida por f é escrita como:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma solução de (2.1) é uma função diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ onde I é um intervalo tal que $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$ e que satisfaz a equação $x' = f(t, x)$.

Definição 2.2 Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, é dita lipschitziana com respeito à segunda variável se existir $C > 0$ tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$$

para quaisquer (t, x_1) e $(t, x_2) \in U$. A função é dita localmente lipschitziana com respeito à segunda variável se todo ponto de U possui uma vizinhança restrita à qual f é lipschitziana com respeito à segunda variável.

Em algumas situações é possível determinar explicitamente a solução de uma equação diferencial ordinária, por exemplo, consideremos a equação $\frac{dx}{dt} = x$, com $x(0) = 4$. Assim a solução ficaria

$$\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int dt \Rightarrow \ln(x) = t + K \Leftrightarrow x = e^{t+K}.$$

em que K é uma constante a ser encontrada com a condição inicial. De início, sabemos que $x(0) = 4$. Assim, $4 = e^{0+K} \Leftrightarrow K = \ln 4$. Logo, a solução da equação diferencial ordinária, com a condição inicial, é dada por $x = e^{t+\ln 4} = 4e^t$.

Veremos a seguir um resultado que garante que essa solução que foi encontrada é única, já que um problema de valor inicial (PVI) nem sempre possui solução única, pois depende de algumas condições sobre a função $f(t, x)$. Para tanto, considere o PVI

$$\begin{cases} x' &= 4t\sqrt{x} \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

Note que o PVI acima possui $x = 0$ e $x = t^4$ como soluções.

Nem sempre é possível exibir tal solução e assim, a ideia seria a busca por métodos de aproximações.

Teorema 2.1 (Teorema de Picard) Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, uma aplicação contínua e localmente lipschitziana na segunda variável x onde o par (t, x) é um elemento de U , com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Então o problema de valor inicial

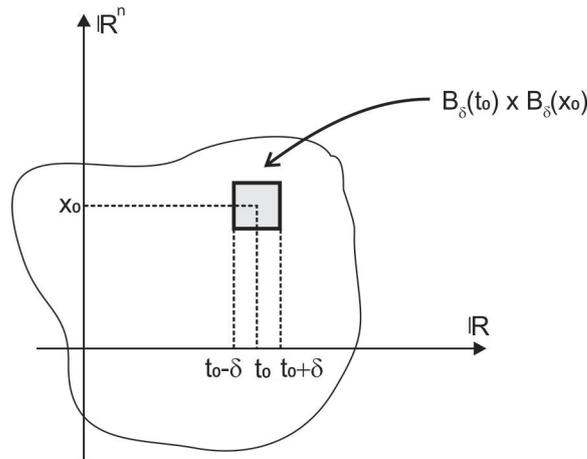
$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

possui apenas uma solução em uma vizinhança do ponto (t_0, x_0) .

Prova: Iniciemos escolhendo um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que o cilindro gerado pelo produto cartesiano $\overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)}$ dos fechados das bolas de respectivos centros t_0 e x_0 e raio δ esteja contido em U . Agora considere $M = M(\delta) = \sup \|f\|$ no cilindro. Das hipóteses, temos que f é localmente lipschitziana e isso significa que existe uma constante $C = C(\delta)$ tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$$

para qualquer que seja (t, x_1) e (t, x_2) no cilindro.



A ideia é definir um espaço métrico completo $M = C[a, b]$, com a métrica da convergência uniforme, ou seja, $d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t \in [a, b]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$, onde $\|\cdot\|$ é a métrica euclidiana, formado por todas as funções contínuas $\gamma : [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma(t) \subset \overline{B_\delta(x_0)}$, para todo $t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$, para algum $\varepsilon > 0$. Para garantir que γ esteja na bola fechada $\overline{B_\delta(x_0)}$, vamos supor que $\varepsilon < \delta$. Nesse espaço métrico, vamos considerar um operador definido por $\mathcal{F} : M \rightarrow M$ definido por

$$\mathcal{F}(\gamma(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds.$$

Vejamos que o operador \mathcal{F} está bem definido. De fato, por hipótese, f é contínua e limitada no cilindro compacto e está sendo integrada sobre um intervalo limitado, garantindo a existência da integral. Podemos notar também que se $\gamma \in M$, então $\mathcal{F}(\gamma) \in M$.

Devemos ver que $\mathcal{F}(\gamma(t))$ está na bola fechada de centro x_0 e raio δ , ou seja, que

$$\|\mathcal{F}(\gamma(t)) - x_0\| < \delta.$$

Temos que

$$\|\mathcal{F}(\gamma(t)) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \gamma(s))\| ds \leq M|t - t_0| \leq M\varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon \leq \frac{\delta}{M}$ teremos que $\|\mathcal{F}(\gamma(t)) - x_0\| \leq \delta$. Agora, basta mostrar que esse operador é uma contração. Conseguindo isso, a existência e a unicidade de solução do problema de valor inicial fica garantido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Vejamos, finalmente que

$$\|\mathcal{F}(\gamma_1(t)) - \mathcal{F}(\gamma_2(t))\| \leq \left\| \int_{t_0}^t [f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_2(s))] ds \right\| \leq C \int_{t_0}^t \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| ds$$

e

$$\|\mathcal{F}(\gamma_1(t)) - \mathcal{F}(\gamma_2(t))\| \leq C \int_{t_0}^t \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| ds.$$

Como

$$\|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| \leq \max_{s \in [a, b]} \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| = d(\gamma_1, \gamma_2),$$

teremos

$$\|\mathcal{F}(\gamma_1) - \mathcal{F}(\gamma_2)\| \leq C|t - t_0|d(\gamma_1, \gamma_2) \leq C\varepsilon d(\gamma_1, \gamma_2).$$

Agora, tomando $\varepsilon < \frac{1}{C}$, e tomando o supremo na desigualdade teremos finalmente que o operador \mathcal{F} é uma contração. Para garantir um único ε , basta tomarmos $\varepsilon = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{C} \right\}$. Assim, como \mathcal{F} é contínua, é uma contração no espaço métrico X completo, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, \mathcal{F} possui um único ponto fixo e este ponto fixo é exatamente a única solução do problema (2.2). ■

Exemplo: Como aplicação imediata do teorema de Picard, considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x'(t) = 2t(x+1) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

É fácil verificar que $f(t, x) = 2t(x+1)$ é contínua e lipschitziana com respeito a x . Assim, de acordo com o teorema de Picard, o PVI deve apresentar uma única solução usando a iteração proposta pelo teorema do ponto fixo de Banach. Escrevendo a equação integral equivalente a $x'(t) = 2t(x+1)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$x(t) = \int_0^t 2s(x(s) + 1) ds.$$

Começemos exatamente de $x_0(t) = 0$ e para $n \geq 1$, usemos a fórmula iterativa:

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t 2s(x_n(s) + 1)ds.$$

Para $x_1(t)$, obtemos:

$$x_1(t) = \int_0^t 2s ds = t^2.$$

Substituindo na fórmula iterativa, obtemos $x_2(t)$.

$$x_2(t) = \int_0^t 2s(s^2 + 1)ds = t^2 + \frac{t^4}{2}.$$

Continuando dessa forma obtemos uma sequência $x_n(t)$. Observe a tabela:

n	$x_n(t)$
$n = 0$	$x_0(t) = 0$
$n = 1$	$x_1(t) = t^2$
$n = 2$	$x_2(t) = t^2 + \frac{t^4}{2}$
$n = 3$	$x_3(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!}$
$n = 4$	$x_4(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!}$
\vdots	\vdots
$n = k$	$x_k(t) = \sum_{i=0}^k \frac{t^{2i}}{i!}$

Do que se conhece sobre séries de Taylor, sabemos que esta sequência converge para $x(t) = e^{t^2} + 1$.

2.2 Compressão de imagens

A melhor maneira de armazenar uma imagem em uma memória é armazenar a cor de cada pixel. Se tentarmos ampliar a imagem, para usá-la, por exemplo, num pôster grande, os pixels tornam-se quadrados grandes e não teremos informações suficientes para preencher os detalhes nesses quadrados.

Qual o princípio da compressão de imagens? É codificar a menor quantidade de informação contida na imagem original, fazendo-o de maneira inteligente, de modo que os olhos não percebam que a imagem observada está deteriorada. A internet

aumentou a necessidade de bons sistemas de compressão de imagens, pois estas diminuem significativamente a velocidade de navegação da internet. Assim, para que ocorra uma navegação rápida é importante que as imagens estejam codificadas em arquivos os menores possíveis. Existem vários procedimentos para a compressão de imagens e o mais comum é o JPEG, que se tornou padrão para imagens digitais.

Um método, que tem permanecido mais experimental, introduzido pelo matemático britânico **Michael Barnsley**, foi chamado de *sistemas de funções iteradas*, que é uma técnica para se construir figuras *fractais* através da repetição, em escala, de uma mesma figura. A ideia consiste em aproximar uma imagem por objetos geométricos. Aqui vamos apresentar a ideia do processo de compressão no *tapete de Sierpinski*, nomeado assim a figura a seguir pelo matemático polonês **Wactaw Sierpinski (1882 - 1969)** em 1916.



Tal figura é uma generalização do conjunto de Cantor, em duas dimensões. De início parece ser uma figura complicada, mas não é. Bem, como armazená-lo de um computador de maneira econômica? A melhor maneira é armazenar em um programa que o reconstruirá quando for necessário e para construir esse programa precisamos conhecer o que caracteriza esse objeto geométrico. Observe que o tapete de Sierpinski é uma reunião de três cópias de si mesmo que tem metade de seu tamanho (largura e altura). De fato, começando com um tapete de Sierpinski, podemos construir um segundo tapete com o seguinte procedimento:

- 1) A partir do vértice inferior esquerdo, encolhemos o tapete de Sierpinski, até sua metade.
- 2) Fazemos uma segunda cópia desse meio tapete de Sierpinski e a colamos à direita da primeira.

- 3) Fazemos uma terceira cópia desse meio tapete de Sierpinski e a colamos acima das outras duas.

A segunda figura que construímos é idêntica ao nosso o tapete de Sierpinski inicial. Portanto, veremos que, o tapete de Sierpinski é o ponto fixo do processo. Assim, observando que o comprimento da base do tapete de Sierpinski é igual ao comprimento da sua altura, e esse comprimento igual a 1, podemos escolher eixos com origem no canto inferior esquerdo do tapete de Sierpinski e unidades nos eixos tais que a base e a altura tenham ambos comprimento 1. Também construímos a seguinte transformação afim, definida em \mathbb{R}^2 :

$$T_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right),$$

$$T_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right),$$

$$T_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \right).$$

Se S é o tapete de Sierpinski, temos:

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S).$$

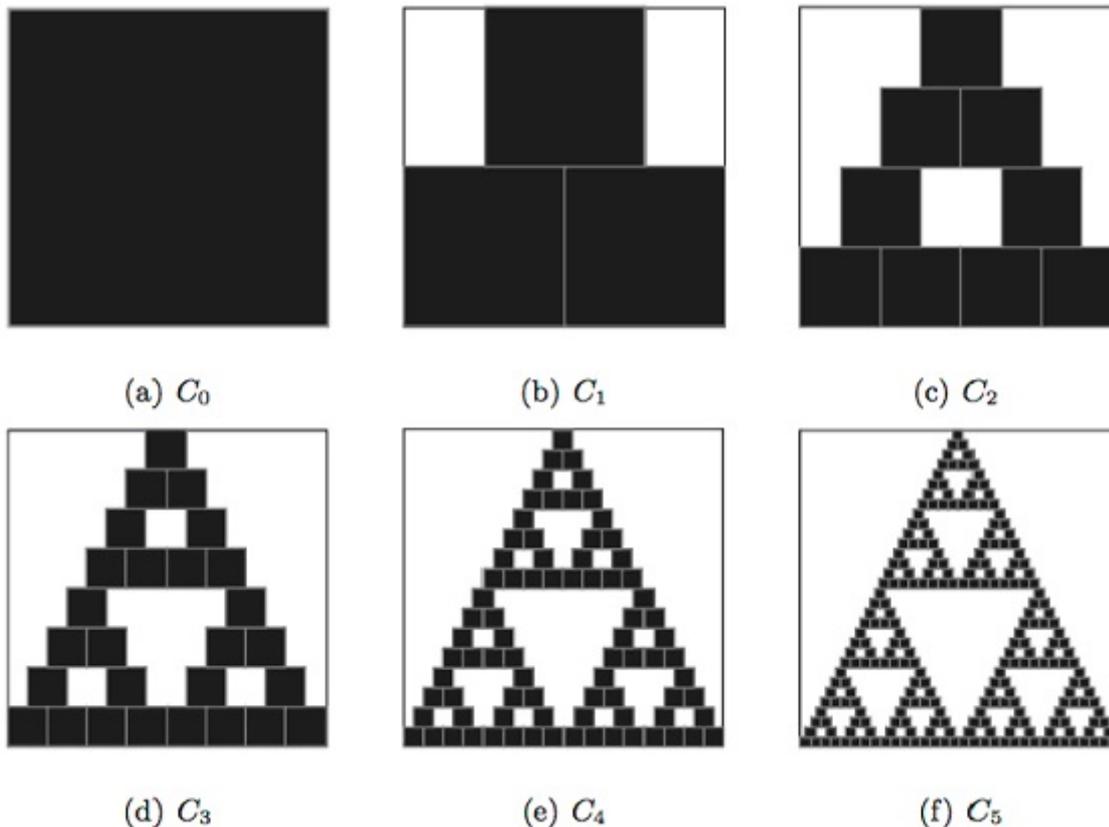
Será que existem outros subconjuntos B do plano que têm a mesma propriedade, a saber:

$$B = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)?$$

Vamos fazer uma experiência e verificar que a resposta é não. Assim, caracterizaremos nosso tapete de Sierpinski como sendo o único subconjunto S do plano que satisfaz a equação acima. Assim, construímos uma função que associa um subconjunto B do plano ao subconjunto $T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)$. Chamando essa função de W , temos:

$$B \mapsto W(B) = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B).$$

E veremos, a seguir, que S é o ponto fixo dessa função, isto é, que $S = W(S)$. Vejamos a construção a seguir.

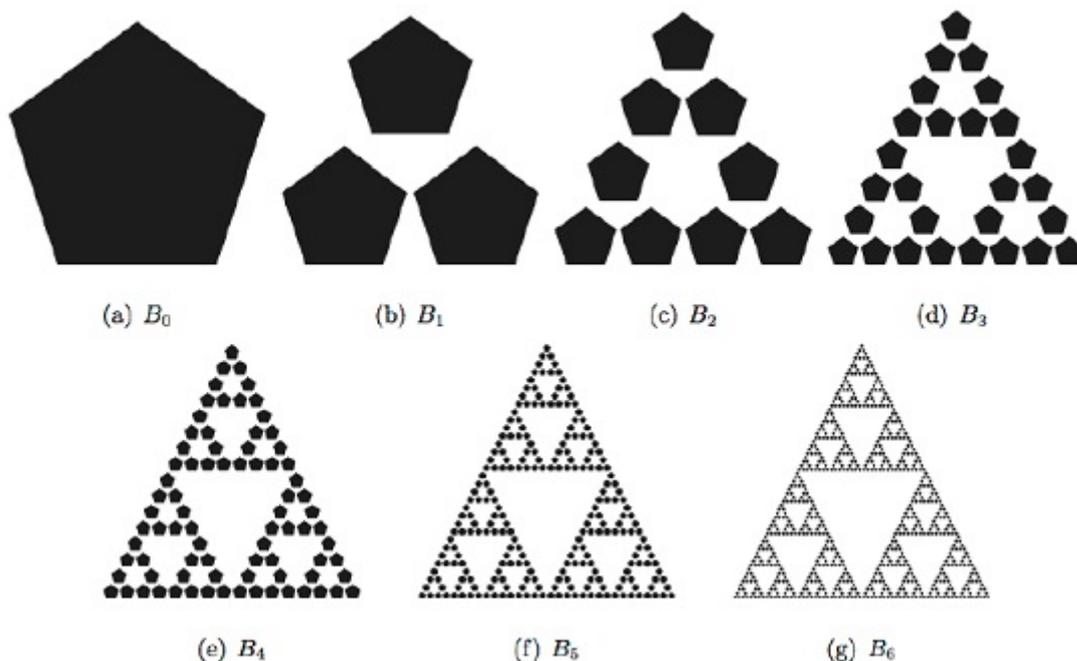


Observemos que:

- 1) Nenhum dos conjuntos C_0, \dots, C_5 é um ponto fixo de W ;
- 2) Poderíamos ter continuado o processo indefinidamente, produzindo uma sequência infinita de conjuntos $\{C_n\}$, com $C_{n+1} = W(C_n)$.
- 3) A sequência $\{C_n\}$ parece convergir rapidamente para o triângulo de Sierpinski.

De fato, os nossos olhos não conseguiriam distinguir C_{10} de S . Então, no lugar de S , o programa de reconstrução da nossa imagem pode simplesmente produzir C_{10} . E, se caso uma resolução melhor fosse necessária, usaremos o mesmo programa mandando-o para C_{20} ou C_{30} . Assim, o mesmo programa pode reconstruir S com precisão arbitrária.

Além disso, pode-se refazer essa experiência e ver se ela funciona com qualquer conjunto de partida. Um segundo exemplo, com um pentágono, é mostrado na figura abaixo.



Vimos que o Teorema do Ponto Fixo de Banach se aplica a contrações em espaços métricos completos. Assim, definimos a função para subconjuntos no plano. O espaço métrico M a ser considerado será o conjunto dos subconjuntos fechados e limitados do plano. Aqui, vamos introduzir uma distância nesse conjunto chamada de *distância de Hausdorff*, nome dado em homenagem ao matemático alemão **Felix Hausdorff (1868 - 1942)**. A definição de distância de Hausdorff, $d_H(B_1, B_2)$ entre dois subconjuntos B_1 e B_2 será apresentada de forma mais geométrica. Primeiro, vejamos o significado da expressão:

$$d_H(B_1, B_2) \leq \varepsilon.$$

Essa expressão nos diz que se nossos olhos tiverem uma precisão de ε , eles não conseguirão distinguir B_1 de B_2 . Mais precisamente, $d_H(B_1, B_2) \leq \varepsilon$ significa que cada ponto P de B_1 existe um ponto Q , de B_2 tal que $d(P, Q) \leq \varepsilon$ e, ao mesmo tempo, cada ponto P' de B_2 existe um ponto Q' , de B_1 tal que $d(P', Q') \leq \varepsilon$, sendo d a métrica usual em \mathbb{R}^2 . Assim, a distância de Hausdorff entre dois conjuntos fechados e limitados B_1 e B_2 é o menor dos ε da condição acima.

Agora sim, afirmamos que a função W é uma contração e com isso, o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante a convergência. Com efeito, suponha que

$d_H(B_1, B_2) \leq \varepsilon$ e seja $P \in W(B_1)$. Então, existe $i \in \{1, 2, 3\}$ e $P_1 \in B_1$ tais que $P = T_i(P_1)$. Como $d_H(B_1, B_2) \leq \varepsilon$, existe $Q_1 \in B_2$ tais que $d(P_1, Q_1) < \varepsilon$. Seja $Q = T_i(Q_1)$, com $i \in \{1, 2, 3\}$. Então $Q \in W(B_2)$ e sendo $P_1 = (x, y)$ e $Q_1 = (a, b)$, temos:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= d(T_i(P_1), T_i(Q_1)) = \sqrt{\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{b}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{1}{2} d(P_1, Q_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, se começarmos com $P' \in W(B_2)$, existe $Q' \in W(B_1)$ tal que $d(P', Q') \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Esse processo foi adaptado para a compressão de imagens reais (ver [5]). O método produz imagens de ótima qualidade quando a imagem original tem caráter fractal. No entanto o nível de compressão não é tão flexível, nem tão eficiente como o formato JPEG. Também, o processo de codificação (transformando a imagem em um programa para reconstruí-la) é ainda demasiadamente complexo para ter interesse prático. No entanto, a simplicidade da ideia juntamente com sua potência continua sendo impressionante e muito sedutora.

2.3 Como funciona o buscador do Google

Esta seção tem como base uma palestra apresentada em 16/08/2012 por Tiago J. Fonseca em um ciclo de seminários realizado no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC da USP (Universidade de São Paulo).

Já pensou se não existisse o Google? Qualquer pergunta que se é feita, seja de um número de uma pizzaria a o PIB de um país como a Finlândia, pode ser respondida em segundos com um simples click no buscador mais poderoso do mundo, o Google. É como se o Google lesse nosso pensamento e, nas primeiras páginas tivéssemos as páginas relevantes para a nossa pesquisa. Parece mágica, mas é matemática!



No início parecia mais um dos vários sites de busca que surgia na década de 90, mais precisamente em 1996 iniciava um projeto de pesquisa de Larry Page e Sergey Brin, quando ambos eram estudantes de doutorado na Universidade de Stanford, na Califórnia, nos Estados Unidos. Enquanto os motores de busca convencionais exibiam resultados classificados pela contagem de quantas vezes os termos de busca apareciam na primeira página, os dois teorizaram sobre um sistema melhor que analisava as relações entre os sites. Eles chamaram esta nova tecnologia de *PageRank*, onde a relevância de um site era determinada pelo número de páginas, bem como pela importância dessas páginas, que ligavam de volta para o site original. Page e Brin originalmente apelidaram de sua nova ferramenta de busca de “BackRub”, porque o sistema de checava backlinks para estimar a importância de um site.

Eventualmente, eles mudaram o nome para o Google, proveniente de um erro ortográfico da palavra “googol”, o número um seguido por cem zeros, que foi criado para indicar a quantidade de informação que o motor de busca podia processar. Originalmente, o Google funcionou sob o site da Universidade Stanford, com o domínio google.stanford.edu.

O nome de domínio “Google” foi registrado em 15 de setembro de 1997 e a empresa foi constituída em 4 de setembro de 1998. No início, sua sede ficava na garagem de uma amiga (Susan Wojcicki) em Menlo Park, Califórnia. Craig Silverstein, um colega de doutorado estudante em Stanford, foi contratado como o primeiro funcionário.

A fonte de inspiração para criar PageRank foi o sistema acadêmico de citações e referências. O “valor” de uma publicação acadêmica é, como se sabe, calculado de modo muito matemático, conforme o número de citações que um artigo receba em outros artigos. Conseqüentemente, a classificação geral de um artigo ou publicação acadêmica é a soma de todas as citações que o artigo ou publicação tenha recebido. Como explicam Brin e Page:

“Aplicou-se à rede a literatura de citações acadêmicas, em boa parte contando as citações de, ou os links para, uma determinada página. Tem-se assim boa aproximação da importância ou qualidade de uma página. PageRank estende essa ideia; mas não conta os links de todas as páginas como se fossem equivalentes e, sim, atribui peso ao número de links que cada página receba”.

Para se ter uma ideia, em 2012, os buscadores mais acessados no Brasil foram:

google.com.br: 82,97%
br.ask.com: 6,23%
br.bing.com: 5,06%
google.com: 2,45%
google.pt: 1,25%

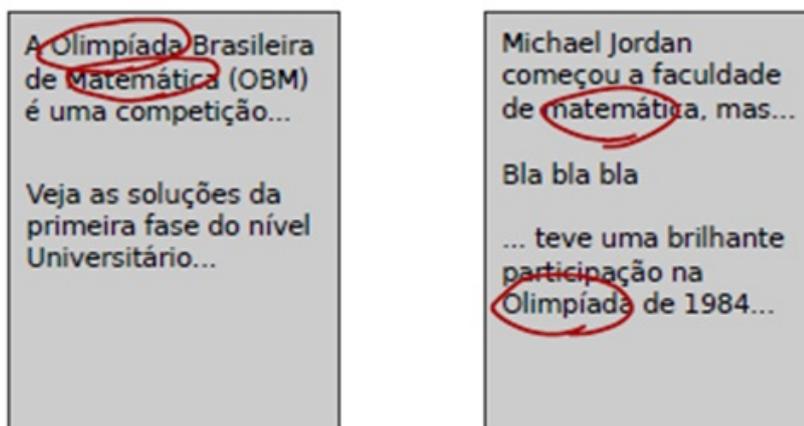
br.search.yahoo.com: 1,05%
ask.com: 0,40%
bing.com: 0,34%
google.ca: 0,051%
search.yahoo.com: 0,050%

O Google Brasil manteve a primeira posição do ranking da preferência dos usuários de internet no país, registrando 82,97% no período de 4 semanas terminadas em 26 de maio de 2012, de acordo com dados da Experian Hitwise, ferramenta líder de inteligência digital da consultoria Experian Marketing Services:

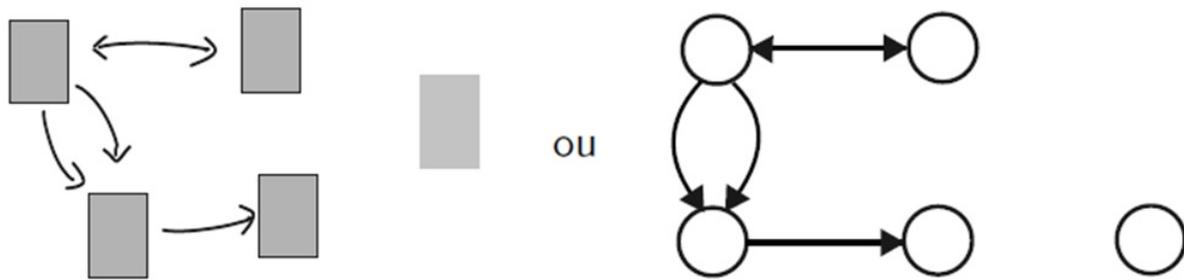
O funcionamento de um buscador é baseado essencialmente em dois passos:

- 1) **Matching:** O algoritmo busca, dentre todas as páginas da Web, aquelas que possui as palavras ou frases digitadas.
- 2) **Ranking:** O algoritmo seleciona quais, dentre as páginas encontradas no primeiro passo, são mais importantes? ou relevantes? e ordena o resultado.

A diferença entre os buscadores é o segundo passo, onde a forma de ordenar as páginas encontradas é o segredo do sucesso do Google. As técnicas de Ranking usadas pela maioria dos outros buscadores são focadas no conteúdo das páginas, ou seja, analisava a proximidade de palavras procuradas, o que não garante o sucesso da pesquisa. Veja um exemplo:



Assim, os autores do PageRank inovaram ao perceber que poderiam usar a própria estrutura da Web para determinar a importância das páginas. As páginas se conectam através de links e podemos pensar as páginas como nós de um grafo direcionado e os links como as arestas. Veja:



A proposta do Google é de considerar a importância de cada página como a soma das importâncias das páginas que “apontam” para ela, dividida pelo número de links que saem delas, ou seja, cada página “empresta”, em partes iguais, a sua importância para as páginas para as quais ela aponta. Assim, conclui-se que se uma página é apontada por páginas importantes, ela deve ser importante.

Será que a ordenação das páginas obedecendo a essa democracia na Web? Caso seja possível, será que há várias opções de ocorrer tal ordenação ou ela é única? Aqui o Teorema do Ponto Fixo de Banach cai como uma luva, garantindo que o propósito dos criadores da Google é possível.

Seja G um grafo direcionado, com nós $1, 2, \dots, n$. Nosso objetivo é, para cada nó i , atribuir um valor real x_i que traduza a relevância do nó i . Quando j é um nó que aponta para i , chamaremos de **link** de i para j e denotaremos por $j \rightarrow i$. Se ℓ_j é o número de links que saem de j . Assim, vamos definir

$$x_i = \sum_{j \rightarrow i} \frac{x_j}{\ell_j}.$$

Com isso, temos o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m_{11}}{\ell_1}x_1 + \frac{m_{12}}{\ell_2}x_2 + \dots + \frac{m_{1n}}{\ell_n}x_n \\ x_2 = \frac{m_{21}}{\ell_1}x_1 + \frac{m_{22}}{\ell_2}x_2 + \dots + \frac{m_{2n}}{\ell_n}x_n \\ \vdots \\ x_n = \frac{m_{n1}}{\ell_1}x_1 + \frac{m_{n2}}{\ell_2}x_2 + \dots + \frac{m_{nn}}{\ell_n}x_n \end{cases}$$

onde m_{ij} é o número de links $j \rightarrow i$, que pode inclusive ser zero. Nesses termos, se $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = \frac{m_{ij}}{\ell_j}$, então podemos ver $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ como uma transformação linear e a **relevância** $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ sendo um autovetor de autovalor unitário.

Vamos interpretar a_{ij} como sendo a *probabilidade* de, saindo do vértice j , chegar ao vértice i . Um internauta, aleatoriamente, escolhe uma das n páginas, por exemplo, $v_0 = [1, 0, \dots, 0]$. O vetor v_1 , obtido na equação $Av_0 = v_1$, indica a probabilidade do internauta se encontrar na página i após um click, partindo de v_0 . Continuando assim, sucessivamente, após n clicks a probabilidade de o internauta se encontrar na página i é dado pela equação $Av_{n-1} = v_n$. Esse modelo seria ideal se o internauta sempre a partir de um link de uma página encontrasse outro de outra página, porém isso não ocorre. Por vários motivos, seja de grafos desconexos, de páginas sem links ou por vontade própria do internauta ele para sua sequência e a recomeça. A partir daí, a ideia de Page e Brin para resolver esses problemas foi introduzir um fator probabilístico p de começar tudo de novo e, evidentemente, $1 - p$ de continuar nos links. Experimentalmente, o Google decidiu usar $p = 0,15$. Assim, a aplicação que indica o percurso aleatório do internauta num grafo de n vértices é:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} + (1 - p) \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{l_1} & \frac{m_{12}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{1n}}{l_n} \\ \frac{m_{21}}{l_1} & \frac{m_{22}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{2n}}{l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_{n1}}{l_1} & \frac{m_{n2}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{nn}}{l_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Que podemos escrever, de forma mais simples, como $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ onde $y \mapsto pe + (1 - p)Ay$, onde

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Claramente vemos que a função T é contínua. Se mostrarmos que T é uma contração e lembrando que \mathbb{R}^N é um espaço métrico completo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante que T possui um único ponto Fixo, ou seja, que o internauta

chega sempre à página desejada. Para tanto, vejamos que, dados $y, z \in \mathbb{R}^N$, e, notando que

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

temos:

$$\begin{aligned} \|T(y) - T(z)\| &= \|(1-p)A(y-z)\| = (1-p) \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} |y_i - z_i| \right) \\ &= (1-p) \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) |y_j - z_j| = (1-p) \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| = (1-p) \|y - z\|. \end{aligned}$$

Já que $1-p$ é menor que 1, temos que T é uma contração. Finalmente, por a aplicação possuir um único ponto fixo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que tudo isso funciona e indicando que a relevância de cada página está bem definida.

Referências Bibliográficas

- [1] Barata, J. C. A., Curso de Física-Matemática, Versão de 15 de maio de 2008. Departamento de Física Matemática USP. Disponível em: *denebola.if.usp.br/jbarata/Notas de aula/notas de aula.html*.
- [2] Domingues H. H., Espaços Métricos e Introdução à Topologia, Ed. Atual, 1982.
- [3] Figueiredo, D. G., Números irracionais e transcendentos. 3^a edição. Rio de Janeiro. SBM, (2002).
- [4] Kaluza R. , a vida de Stefan Banach (Boston, 1996).
- [5] Kominek J., Advances in fractal compression for multimedia applications, Multimedia Systems Journal, vol. 5, n^o4, 1997, 255-270.
- [6] Kreyszig E., Introductory Functional Analysis with Applications, WILEY, University of Windsor, 1978.
- [7] Lima, E. L. Analise Real, Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA; CNPq, 1989.
- [8] Lima, E. L. 2004. Análise Real, Volume 2, Projeto Euclides. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA.
- [9] Lima, E. L., Espaços Métricos. Projeto Euclides. IMPA, CNPq. (1977). Livros Técnicos e Científicos, Editora.
- [10] Rousseau C., Point fixe de Banach (in French), Accromath 5, hiver-printemps 2010 (www.accromath.ca).

Sites consultados:

<http://alpha.mini.pw.edu.pl/~domitrz/Banach.pdf>. Acesso em 09/04/2013.

<http://www.brasilecola.com/filosofia/logica-aristoteles.htm>. Acesso em 09/04/2013.

Nectoux, Antoine, Banach e seu microscópio para encontrar pontos fixos, <http://blog.kleinproject.org/?p=1704&lang=pt-br> acessado em 02/04/2013, tendo [10] como base.