UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Elenice Carvalho Alves

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E O JOGO DA ONÇA COMO OPÇÃO ESTRATÉGICA DE ENSINO

Santa Maria, RS
2023

Elenice Carvalho Alves

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E O JOGO DA ONÇA COMO OPÇÃO ESTRATÉGICA DE ENSINO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional**.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Casagrande Stabel

Santa Maria, RS
2023

Alves, Elenice Carvalho Alves
A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E O JOGO DA ONÇA COMO OPÇÃO ESTRATÉGICA DE ENSINO / Elenice Carvalho Alves Alves.- 2023.
176 p.; 30 cm

Orientador: Eduardo Casagrande Stabel
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2023

1. Análise Combinatória 2. Jogo da Onça 3. Situação Didática I. Casagrande Stabel, Eduardo II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, ELENICE CARVALHO ALVES ALVES, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Elenice Carvalho Alves

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E O JOGO DA ONÇA COMO OPÇÃO ESTRATÉGICA DE ENSINO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional**.

Aprovado em 11 de agosto de 2023:

Eduardo Casagrande Stabel, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Karine Faverzani Magnago, Dra. (UFSM)

Deise Pedroso Maggio, Dra. (Unipampa)

Luciane Gobbi Tonet, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus ancestrais, pais e ao meu amado Tiago Santos da Rosa

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e ancestrais por terem tecido o meu caminho, agradeço por tudo que realizaram, planejaram e sonharam, pois seus sonhos são de alguma forma a minha realidade.

Agradeço ao meu Companheiro Tiago Santos da Rosa que me apoiou em todos os momentos, que me acompanhou em todas as viagens, rodou muitos quilômetros ao meu lado enfrentando calor, chuva, frio e por horas ficou à minha espera enquanto eu assistia às aulas. Obrigada por estar sempre comigo!

Agradeço ao meu Orientador Eduardo Casagrande Stabel pelos ensinamentos, pelas inúmeras horas de orientação e toda a paciência e dedicação que teve para conferir todos os problemas, sei que não foi fácil, e pela indicação de todos os pontos finais que foram esquecidos.

Agradeço aos professores pelas aulas dadas, pelas explicações que cooperaram para o meu processo de formação profissional.

Agradeço aos colegas por compartilharem diversos momentos de estresse, listas intermináveis de exercícios, dúvidas e principalmente aprendizado e por todo o companheirismo ao longo do curso.

ANCESTRALIDADE
Floresta, rios, encantos
Sabedoria, memória, raça
Reza benzedeiras, erva
Histórias quentinhas do coração
Permeiam a cultura de povos
Habitam nossa nação
Honrar com dignidade
Manter a Chama acesa
Da história de cada um

(Lucia Morais Tucuju)

RESUMO

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E O JOGO DA ONÇA COMO OPÇÃO ESTRATÉGICA DE ENSINO

AUTORA: Elenice Carvalho Alves
Orientador: Eduardo Casagrande Stabel

Este trabalho apresenta uma abordagem contextualizada para a Análise Combinatória, tendo como objetivo desenvolver o raciocínio lógico matemático, a criatividade, a criticidade e a intuição matemática, habilidades essenciais para a formação dos estudantes. Portanto, recorremos ao uso de atividades lúdicas em sala de aula e à resolução de problemas. Utilizamos o Jogo da Onça, de origem indígena, desconhecido para muitos, mas com riqueza histórica, cultural e matemática. As regras do jogo, o tabuleiro e as peças serviram de inspiração na elaboração de uma lista com 67 problemas, sendo que estes tem como objetivo analisar as formas de movimento e captura das peças resolvendo questões de análise combinatória e lógica matemática. Os problemas elaborados fazem parte de uma situação didática, desenvolvida a partir da teoria de Guy Brousseau e realizada em uma escola da rede pública. Assim concluímos que é possível discutir e estudar questões referentes à cultura indígena nas aulas, atendendo à Lei nº 11.645/2008, e ensinar matemática a partir da resolução de problemas interessantes, desafiadores e significativos.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Jogo da Onça. Situação Didática.

ABSTRACT

THE THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS AND THE JAGUAR GAME AS A STRATEGIC TEACHING OPTION

AUTHOR: Elenice Carvalho Alves
ADVISOR: Eduardo Casagrande Stabel

This work presents a contextualized approach to Combinatorial Analysis, aiming to develop logical mathematical reasoning, creativity, criticality and mathematical intuition, essential skills for the formation of students. Therefore, we resort to the use of playful activities in the classroom and problem solving. We use the Jogo da Onça, of indigenous origin, unknown to many, but with historical, cultural and mathematical richness. The game rules, the board and the pieces served as an inspiration in the elaboration of a list with 67 problems, which aim to analyze the ways of moving and capturing the pieces solving questions of combinatorial analysis and mathematical logic. The elaborated problems are part of a didactic situation, developed from Guy Brousseau's theory and carried out in a public school. Thus, we conclude that it is possible to discuss and study issues related to indigenous culture in the classroom, complying with Law number 11.645/2008, and to teach mathematics from the resolution of interesting, challenging and significant problems.

Keywords: Combinatorial Analysis. Jaguar Game. Didactic Situation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Jogo da Onça é a união entre o lúdico e o desenvolvimento de raciocínio lógico matemático, proporcionando conhecimento, respeito e valorização da cultura indígena. Trata-se de um jogo de tabuleiro que pode ser classificado como jogo de reflexão, pois não usa conteúdos específicos da matemática; de estratégia, visto que estimula o pensamento rápido e a lógica matemática e de caça dado que tem como característica o vínculo com a cultura de povos que o praticavam.

Em 10 de março de 2008 foi aprovada a Lei nº 11.645/2008 instituindo a obrigatoriedade do ensino de tópicos sobre a história e cultura afro-brasileira e indígena ao longo do ano letivo em todas as disciplinas. Esta lei visa incentivar discussões sobre esses temas em sala de aula a fim de rever as representações inadequadas que estão enraizadas na sociedade brasileira.

É válido ressaltar que ao elaborar problemas inspirados no Jogo da Onça, aprendemos a valorizar e respeitar a história e o legado dos povos indígenas, e ter contato com a diversidade cultural e social de nosso país. Os jogos contribuem para o desenvolvimento cognitivo, instigam e desafiam-nos a criar e levantar hipóteses, desenvolvendo estratégias de resolução de problemas, estimulando criatividade e a criticidade. Durante atividades lúdicas com jogos o aluno está constantemente exposto a novas e desconhecidas situações, enfrentando novos desafios e novas situações-problema.

Ademais, os jogos são recursos pedagógicos que estimulam o raciocínio lógico-matemático, aumentando a capacidade de avaliar situações do cotidiano, refletir, tomar decisões, estabelecer relações de semelhança, desenvolver o senso crítico e contribuir positivamente para o desenvolvimento de inúmeras habilidades e aprendizagem de diferentes conceitos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular, a matemática como componente curricular deve colaborar para o aprimoramento de habilidades, principalmente para potencializar a capacidade de resolução e de pensar matemática, habilidades estas que servirão para toda a vida.

A presente dissertação apresenta a teoria das situações didáticas e o Jogo da Onça como opção estratégica de ensino, na qual se utiliza a resolução de problemas para desenvolver o raciocínio lógico matemático, a criatividade, a criticidade e a intuição matemática. Portanto, tendo em vista a importância de atividades dinâmicas e motivadoras a questão emergente é: De que maneira o uso do jogo da onça como opção estratégica para resolução de problemas nas aulas de matemática contribui para o ensino da análise combinatória e o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático?

O trabalho está dividido em introdução mais três capítulos. No capítulo 2 apresentamos uma revisão bibliográfica na qual iniciamos falando sobre a história e a cultura indígena. A seguir apresentamos a Lei nº 11.645\2008 que institui a obrigatoriedade do ensino de conteúdos referentes à história e cultura afro-brasileira e dos povos indígenas brasileiros no âmbito de todo o currículo escolar. Na sequência o Jogo da Onça e uma breve exposição sobre a resolução de problemas e o uso de jogos nas aulas de Matemática, destacando a importância de usar jogos e resolução de problemas como recurso pedagógico nas aulas de matemática. Posteriormente, alguns conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade, além da Teoria da Situação Didática de Guy Brousseau.

O capítulo 3 denominado Metodologia apresenta inicialmente um breve relato sobre a importância de se trabalhar com a resolução de problemas nas aulas de matemática do Ensino Médio, Na sequência, uma lista contendo os problemas aplicados na situação didática, com resolução, todos contextualizados e integrados com o tabuleiro, peças e regras do Jogo da Onça e também a descrição da Escola Estadual de Ensino Médio Waldemar Borges e o planejamento das atividades realizadas em cada uma das aulas que compõem a situação didática

No capítulo 4 um relato das atividades desenvolvidas, onde se descreve tudo que aconteceu em cada uma das oficinas e, por último, a análise dos resultados, onde avaliamos o trabalho que foi concluído e apresentamos uma avaliação das respostas dadas pelos alunos na resolução de cada um dos problemas que foram utilizados durante as oficinas. Nas considerações finais concluímos as contribuições dessa dissertação, seguida das referências.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção apresentamos uma revisão bibliográfica em relação a história e cultura indígena, Lei nº 11.645 de 10 de março de 2008, resolução de problemas e o uso de jogos na sala de aula. Além disso abordamos alguns conceitos e definições de análise combinatória, probabilidade e a teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

A respeito da História e Cultura Indígena apresentamos uma breve análise de tudo que aprendemos com os povos indígenas, e o quanto estes contribuem para a formação atual do povo braileiro. Apresentamos os dados e um comparativo sobre os dados dos últimos censos demográficos realizados pelo IBGE e uma breve análise sobre a história e cultura índigena.

Quanto a Lei nº 11.645/2008, discutimos a importância desta para o término do preconceito em relação aos afro-brasileiros e indígenas pois incentiva o estudo da cultura afro-brasileira e índigena, a revisão e a reflexão das representações dos povos indígenas na sociedade atual.

Sobre o Jogo da Onça, enunciamos suas regras e sua origem e a relação deste com a história e cultura indígena. Sobre jogos e resolução de problemas analisamos a sua importância para o ensino de matemática e verificamos se estes podem ou não contribuir positivamente para o ensino da análise combinatória, sendo uma estratégia metodológica para aulas dinâmicas e interessantes.

No que se refere à análise combinatória elencamos conceitos e definições e apontamos a importância dos problemas de análise combinatória não se limitarem a apresentação e aplicação de definições e fórmulas. Salientamos que as questões devem instigar a curiosidade dos alunos e que o processo de resolução deve ser tão importante quanto o resultado final.

E, por último, apresentamos a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau que discute de que forma a relação entre estudante, professor e meio interferem no processo de ensino aprendizagem. Defininimos situação diadática, adidática e contrato didático, além de identificar a relação desta teoria com o ensino da matemática.

2.1 HISTÓRIA E CULTURA INDÍGENA

Índio. O que vem a nossa mente quando se ouve a palavra índio? Podemos pensar que são os primeiros habitantes do Brasil, ou então que foi o nome dado pelo "descobridores" que aqui chegaram aos nativos pois estes pensavam ter chegado às Índias; ou pensamos em um povo que vive de caça e pesca, mora em oca, que não usam roupas, que pintam o corpo, usa adornos, cocares ou uma pena na cabeça. Ou lembramos da data de

19 de abril, pois é Dia do Índio, ou lembramos de Sepé Tiaraju, índio corajoso e guerreiro que lutou com os jesuítas, ou será que lembramos que os bandeirantes aprisionaram e escravizaram índios. De acordo com Wittmann:

> A reflexão sobre a história também nos leva a problematizar alguns termos. Índio, por exemplo, é tão amplo e genérico que turva a percepção de que povos indígenas são diferentes entre si. O equívoco de Cristóvão Colombo, que imaginou ter desembarcado nas Índias, acabou por classificar e homogeneizar o que era de fato e ainda é uma diversidade de etnias. Trata-se de diversas culturas, singulares e dinâmicas, em constante transformação. Atualmente o movimento indígena, que nas últimas décadas ganhou novo fôlego, luta não só pela retomada de suas terras, mas pela melhoria e pelo modo de vida de cada grupo étnico. Assim, o termo índio muda de significado: ele une comunidades distintas na luta por direitos comuns. (WITTMANN, 2015, p. 15).

Os europeus e jesuítas intervieram nos modos de vida dos indígenas que perderam o acesso ao seu território e a suas fontes tradicionais de sustento. Foram forçados a renunciarem práticas ancestrais, aos costumes que eram transmitidos de geração em geração, seus modos de viver, a uma língua própria, ocasionando um etnocídio, isto é, sofreram um apagamento e extermínio cultural e de tais identidades.

Um dos objetivos da catequização dos povos indígenas era incentivar o trabalho destes nos projetos coloniais e na consolidação da presença portuguesa no Brasil. Para tanto, iniciaram a captura e a escravidão dos povos que aqui viviam. Em relação às atividades econômicas, a inserção do trabalho nativo possibilitou a construção de vilas, engenhos e a prática da agricultura, sendo esta realizada diferentemente das tradições e costumes nativos. De acordo com Da Silva e Costa, temos que:

> Especialmente entre os séculos XVI e XVIII, a população indígena arregimentada alimentou uma economia imposta pelos agentes de contato, baseada na mão de obra nativa, alternada entre a abundância e a escassez, em busca de metais preciosos, da expansão da criação de gado e do fomento da agricultura extensiva. Estes foram os alicerces que desenharam os moldes da formação econômica e social do Brasil, sem dúvida, às custas do extermínio dos povos indígenas e da prática escravista. (SILVA; COSTA, 2018, p. 19).

Sobre a exploração dos povos indígenas Da Silva e Costa, destacam que:

> O trabalho nos engenhos de açúcar, que sucedeu à extração do pau-brasil, fez uso de mão de obra para o estabelecimento da escravidão dos índios no Nordeste. Inúmeras expedições foram organizadas com o intuito de arregimentar indígenas para os trabalhos escravo e compulsório. Como resultado, uma drástica redução desta população foi verificada ainda no período colonial, frente à violência física e cultural, às epidemias e às mortes. (SILVA; COSTA, 2018, p. 32).

Para justificar a catequização, a escravidão e de certa forma o extermínio, os povos indígenas foram colocados em lugar desmerecido, como se fossem selvagens, primitivos, incapazes e inferiores aos não-índios, adotada uma imagem depreciativa e pejorativa, estereótipos e estilizações que iniciaram na colonização. Com a independência do Brasil em 1822, as terras indígenas passaram a ser destinadas aos imigrantes, intensificando o preconceito contra os indígenas.

É possível encontrar em pesquisas a representação das populações indígenas no Brasil de forma folclórica, como se pertencessem ou estivessem presos no passado, isto é, considerando os povos indígenas como uma espécie de "fósseis humanos". Por muito tempo, foi popularizada a ideia do desaparecimento dos povos, a sociedade brasileira por muito tempo acreditou na iminente extinção dos povos indígenas. Felizmente, isso não é real, Da Silva e Costa afirmam que:

> Contrariando, pois, as expectativas de muitos, nos últimos anos verifica-se o surgimento ou 'ressurgimento' de grupos indígenas, sobretudo na região Nordeste do Brasil. Na verdade, trata-se de grupos que, ao se organizarem social e politicamente, reclamam para si uma identidade étnica diferenciada. (SILVA; COSTA, 2018, p. 22).

De acordo com dados do IBGE do Censo Demográfico realizado em 2010 a população autodeclarada indígena é de 817.963 habitantes, o que representa 0,4% do total da população brasileira, sendo que em 80,5% dos municípios reside pelo menos um indígena autos declarado. No estado do Rio Grande do Sul vivem 32.989 pessoas autodeclaradas indígenas, o que representa 0,3% da população gaúcha e 4% da população indígena. Sobre o número de indígenas em algumas cidades gaúchas podemos citar Alegrete, Santa Maria e Porto Alegre que possuem respctivamente 234, 326 e 3308 habitantes autodeclarados indígenas, sendo que estes não são os Municípios gaúchos com a maior população indígena.

Sobre os dados do Censo Demográfico, destacamos que no total da população indígena brasileira não estão contabilizados os povos indígenas brasileiros considerados índios isolados, devido às políticas de contato. Mesmo que somente 0,4% da população brasileira seja autodeclarada indígena, os dados revelam que houve um crescimento na população indígena no período 2000/2010 de 84.000 indígenas, isto é, um crescimento de 11,4% . Outro resultado importante apresentado pelo Censo Demográfico 2010, em relação ao Censo 2000, é que o crescimento populacional indígena anual é de 1,1%. Sobre os resultados do Censo Demográfico 2010, Luciano afirma que:

> Desde a última década do século passado vem ocorrendo no Brasil um fenômeno conhecido como “etnogênese” ou “reetnização”. Nele, povos indígenas que, por pressões políticas, econômicas e religiosas ou por terem sido despojados de suas terras e estigmatizados em função de seus costumes tradicionais, foram forçados a esconder e a negar suas identidades tribais como estratégia de sobrevivência - assim amenizando as agruras do preconceito e da discriminação - estão reassumindo e recriando as suas tradições indígenas. (LUCIANO, 2006, p. 28).

O crescimento populacional observado no censo demografico de 2010 fica mais evidente no Censo Demografico de 2022, pois conforme os dados preliminares que foram divulgados até o presente momento, o número atual de indígenas residentes no Brasil é de 1.693.535, o que representa 0,83%. No estado do Rio Grande do Sul vivem 36.096 pessoas autodeclaradas indígenas, o que representa 0,33%da população gaúcha, destas 15.724 vivem em terras indígenas e 20.372 vivem fora de terras indígenas.

O fato das pessoas estarem se reassumindo, isto é, passando por um processo de reafirmação étnica, e se autodeclarando como integrantes dos povos indígenas, é consequência das mudanças que iniciaram no final da década de 80. A aprovação da Constituição Federal de 1988 é o início de uma verdadeira transformação de padrões da sociedade brasileira, sendo que uma das grandes alterações é o reconhecimento e a garantia da diversidade étnica no Brasil.

Antes da Constituição de 1988, as políticas eram voltadas para a redução e até mesmo a eliminação da diversidade. Até 1988 existia o interesse na criação de uma sociedade única, isto é, uma sociedade padronizada, onde todos tivessem os mesmos costumes e a mesma cultura. Para tanto os povos indígenas passaram por processos de civilização, através de aculturação e catequização. De acordo com Souza:

> Desde a Constituição Federal de 1988, os direitos originários foram consolidados de maneira especial no novo enquadramento pluriétnico e intercultural da sociedade brasileira. Os agentes ameríndios deixaram de ser reduzidos a objeto e passaram a ser reconhecidos como agentes autônomos, sujeitos capazes de autodeterminação e de protagonismo em respeito aos seus valores e interesses culturais específicos. (SOUZA, 2012, p. 18).

Depois da Constituição de 1988 garante a existência da diversidade étnica no Brasil, tornado-o um país pluriétnico, onde o diferente deixa de ser um problema. Os povos indígenas passam a ser aceitos e reconhecidos como parte integrante da sociedade brasileira, ou seja, os povos indígenas se tornam cidadãos brasileiros com suas características e diferenças. Hoje, são as especificidades que caracterizam a cultura e o modo de vida dos povos indígenas, nesse sentido Souza afirma que:

> Muitos elementos culturais se perderam, outros se mantiveram, mas dificilmente intactos. Ou seja, passaram por um processo de atualização, de reelaboração e de ressemantização ao longo do tempo. Igualmente, outros elementos culturais, práticas cotidianas, tecnológicas, provenientes do mundo dos brancos, foram incorporados no cotidiano indígena. Mas esse fato não faz do índio um branco, não elimina a sua condição de índio, não altera a sua identidade étnica, até porque esta, como colocado acima, constitui, acima de tudo, um sentimento de pertença a um grupo. (SOUZA, 2012, p. 31).

Os indígenas brasileiros eram de diferentes etnias, com distintas tradições, cada comunidade tinha sua linguagem e seus costumes, o que ainda hoje ajuda a compor a pluralidade cultural da sociedade brasileira. Contriburiram de forma significativa na formação da identidade dos brasileiros, influenciando na religião, na dança, na culinária, no vocabulário, na forma de falar e vestir, ajudando a constituir um país com vasta pluralidade étnica e cultural. De acordo com Souza:

> Há que se valorizar a perspicácia dos nativos, suas formas próprias de produzir conhecimento e de estabelecer interação com forasteiros, com valores e crenças cosmológicas radicalmente distintas das ocidentais que fundamentam nossa nação. Há que trazer aos nossos termos científicos e filosóficos os saberes originários, reconhecer as contribuições herdadas pelo Brasil em termos de patrimônio genético e conhecimentos tradicionais associados na alimentação, no sustento, na ambientação e mesmo na imaginação de muitos brasileiros. (SOUZA, 2012, p. 19).

Na gastronomia, herdamos o uso de alguns ingredientes como a mandioca, o milho, o peixe, frutas e ervas aromáticas, e muitos pratos como paçoca, pamonha, pirão, bolo de milho, banana assada, canjica, moqueca de peixe, tacacá, e a bebida típica do Rio Grande do Sul, o chimarrão que é uma heranças da cultura dos povos indígena. Também podemos destacar o conhecimento de plantas e ervas medicinais, tais como a semente de sucupira, catuaba, pó de guaraná e óleo de andiroba.

Herdamos o hábito de utilizar objetos como a rede, bolsas trançadas com fibras ou outros objetos feitos de palha, como cestas, além das cerâmicas e panelas de barro. E através da cultura dos povos indígenas conhecemos lendas e vários personagens do folclore, tais como Saci-Pererê, Boitatá, Curupira, Caipora, Iara, Uirapuru e que atualmente fazem parte do imaginário nacional.

Para as comunidades indígenas a dança pode ser considerada sinônimo de ritual. Rituais com o objetivo de homenagear pessoas falecidas, expulsar doenças, espantar maus espíritos, agradecer pela colheita, pesca e caça, marcar a mudança de fase do jovem para a idade adulta ou preparar para guerra. A influência indígena na dança brasileira pode ser vista em alguns dos ritmos muito conhecidos pelo país, como o maracatu, o bumba-meu-boi e a catira, dança caracterizada pela coreografia que faz uso de passos, batidas de pés e palmas.

Muitas palavras de nosso léxico que nomeiam cidades, estados brasileiros, rios, frutas, plantas, animais e pessoas são de origem indígena, como por exemplo: Barueri, Paraná, Ibirapuitã, cacau, cupuaçu, sucuri e Anahi. Na ortografia, também se percebe a influência indígena em algumas regras como: em vocábulos de origem indígena ou africana, empregamos o X (abacaxi, xavante, orixá, xará); e nas palavras de origem tupi, empregamos o J (biju, jiboia, canjica, pajé, jerico, manjericão, Moji). De acordo com Hofmann:

> Difícil contar quantas palavras que compõem o vocabulário português falado no Brasil foram herdadas do vocabulário indígena. Isso denota a importância e o reconhecimento que essas línguas possuíam também entre os colonizadores que formaram o povo brasileiro. (HOFMANN, 2012, p. 130).

A herança cultural que os povos indígenas deixam para a sociedade brasileira, vai além da gastronomia, da dança, do vocabulário e da ortografia, pois herdamos dos povos indígenas costumes, força, coragem e a nossa identidade.

2.2 LEI 11.645 - UMA LEI PARA RESSIGNIFICAR O ENSINO DA HISTÓRIA E DA REALIDADE DOS POVOS INDÍGENAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Em 09 de Janeiro de 2003 foi promulgada a Lei nº 10.639, que modifica os artigos 26 e 79 da LDB 9394 de 1996, fruto de lutas históricas do movimento negro brasileiro. Sua aprovação visa alterar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, pois a educação assumiu um papel fundamental na difusão da história e cultura da África e de seus descendentes, sendo de grande importância na reversão do quadro de preconceito e desigualdade racial no Brasil. O texto da lei aponta que:

> Art. 26 A. Nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio, oficiais e particulares, torna-se obrigatório o ensino sobre a História e Cultura Afro-Brasileira.
> §1º O conteúdo programático a que se refere o caput deste artigo incluirá o estudo da História da África e dos Africanos, a luta dos negros no Brasil, a cultura negra brasileira e o negro na formação da sociedade nacional, resgatando a contribuição do povo negro nas áreas social, econômica e políticas pertinentes à História do Brasil.
> §2º Os conteúdos referentes à História e Cultura Afro-Brasileira serão ministradas no âmbito de todo o currículo escolar, em especial nas áreas de Educação Artística e de Literatura e História Brasileira. (BRASIL, 2003).

Em 10 de março de 2008, foi aprovada pelo Congresso Nacional a Lei nº 11.645, esta altera novamente a Lei nº 9.394 de 1996, instituindo a obrigatoriedade do ensino da história e cultura indígenas. A inclusão da temática indígena nas escolas é resultado da mobilização dos povos indígenas juntamente com outras entidades, principalmente com o movimento negro, por seus direitos e pelo reconhecimento de sua identidade, de sua cultura e de sua história.

> Art. 26 A. Nos estabelecimentos de ensino fundamental e de ensino médio, públicos e privados, torna-se obrigatório o estudo da história e cultura afro-brasileira e indígena.
> §1º O conteúdo programático a que se refere este artigo incluirá diversos aspectos da história e da cultura que caracterizam a formação da população brasileira, a partir desses dois grupos étnicos, tais como o estudo da história da África e dos africanos, a luta dos negros e dos povos indígenas no Brasil, a cultura negra e indígena brasileira e o negro e o índio na formação da sociedade nacional, resgatando as suas contribuições nas áreas social, econômica e política, pertinentes à História do Brasil.
> §2º Os conteúdos referentes à história e cultura afro-brasileira e dos povos indígenas brasileiros serão ministrados no âmbito de todo o currículo escolar, em especial nas áreas de educação artística e de literatura e história brasileiras. (BRASIL, 2008).

Esta lei não visa acrescentar mais um componente curricular, tema ou tópico a ser trabalhado em datas específicas, ou incentivar a realização de discussões sobre História, Cultura Afro-Brasileira e Indígena apenas no Dia do Índio ou no Dia da Consciência Negra e nem determina que seja exclusividade de uma ou duas áreas do conhecimento. Mas que tópicos sobre as culturas e suas histórias sejam trabalhados ao longo de todo ano letivo em todas as disciplinas e que os educadores façam uma grande revisão sobre currículo e prática pedagógica. De acordo com Souza temos que:

> A mera obrigatoriedade legal pelo reconhecimento da diversidade cultural no Brasil tem um caráter antipedagógico que deve ser neutralizado porque acirra preconceitos e resistências quando as leis específicas para isso não provocam nos cidadãos uma reflexão concomitante sobre as intenções que motivam sua vigência. O ensino de conteúdos relativos à história e cultura dos habitantes originários da América do Sul nas escolas do país é, de maneira mais imediata, uma medida compensatória pensada para auxiliar na reversão da posição estrutural degradada dos ameríndios no seio da sociedade nacional e para tentar, minimamente, redimir as dívidas históricas acumuladas pela civilização brasileira sobre os povos originários americanos. As escolas são instrumento de transformação social, ampliando a capacidade de tolerância das futuras gerações e desfazendo preconceitos antigos arraigados nos mais velhos sobre os selvagens e primitivos americanos. (SOUZA, 2012, p. 17).

A Lei nº 11.645 tem como principal objetivo contribuir para o término do preconceito em relação aos afro-brasileiros e indígenas, rever as representações inadequadas e estereotipadas dos índios, africanos e descendentes, tornando-os sujeitos plenos de sua história. Mas para que isso realmente se concretize se faz necessária uma educação reflexiva e/ou a pedagogia da diversidade, juntamente com o comprometimento dos professores da educação básica de todo Brasil, para denunciar e combater todo e qualquer tipo de discriminação e preconceito.

Para Medeiros (2012, p. 51) “a educação escolar é entendida como um meio de superar os preconceitos sofridos pelos povos indígenas e as ideias equivocadas a seu respeito, veiculando informações que permitem reconhecer, respeitar e valorizar a diversidade" . Porém, hoje, depois de se passar quase vinte anos da aprovação da Lei nº 10.639, percebe-se que esta tem sido contemplada pelos educadores através de palestras, eventos e debates, enquanto que a Lei nº 11.645 ainda tem pouco destaque, e os trabalhos sobre a temática indígena, muitas vezes se restringem à História e à Arte, e em alguns casos são menções realizadas no dia do índio. Da Silva e Costa, afirmam que:

> [...] a instituição da Lei nº 11.645/2008 tem sido de extrema importância. Entre os pontos positivos, cabe destacar: se é fato que o estudo e o conhecimento do passado histórico dos indígenas no país é uma necessidade, é igualmente necessário e mais que saudável que tenhamos consciência da realidade dessas sociedades no contexto do Brasil contemporâneo. (SILVA; COSTA, 2018, p. 20).

Todos os pensamentos e estereótipos que de alguma forma se transformaram em senso comum, são fruto da história contada e ensinada na escola e nos livros didáticos, ainda existe a ideia de que os povos indígenas foram extintos ou que são "fósseis vivos", isto é, que vivem hoje da mesma forma que viviam antes de 1500. A imagem retratada pelos livros ainda é muito forte, e marcou muitas gerações, assim cabe aos educadores mudar esse cenário, analisar o que está posto nos livros, procurar por novas informações, conhecer a verdadeira história e realidade dos povos indígenas. De acordo com Medeiros, temos:

> Não há uma história dos povos indígenas, mas incontáveis histórias que ainda estão por ser contadas. Histórias que se conectam com a história nacional e com as histórias próprias, singulares, únicas. Aí está uma possibilidade que a Lei nº 11.645 nos coloca: estabelecer um diálogo intercultural respeitoso com os povos indígenas, em que eles sejam os principais interlocutores de suas histórias, dos seus saberes, das suas culturas e dos seus modos de viver. Algumas vozes já podem ser ouvidas. Na literatura, na música, no cinema e, até mesmo, nas pesquisas científicas. O espaço está sendo ocupado pelos indígenas. Cabe a nós ouvi-los. (MEDEIROS, 2012, p. 61).

Os professores têm papel relevante quanto à discussão das temáticas indígenas, o conhecimento e reconhecimento da história e da cultura indígena que caracteriza a formação do povo brasileiro, logo, ao falar sobre as diferenças formamos alunos mais conscientes e menos preconceituosos. Para Silva e Costa (2018, p. 68) "A Lei nº 11.645/ 2008 exige que professores e alunos da Educação Básica no Brasil conheçam, reconheçam, aprendam, valorizem e divulguem a história e as culturas indígenas, mobilizando distintos conteúdos dos diversos componentes escolares".

A Lei nº 11.645 de 2008, mesmo que ainda não esteja presente de maneira efetiva nas escola brasileiras se apresenta como um grande avanço pois destaca questões étnico-raciais que passam a ser vistas e discutidas de maneira diferente, contesta a tradição pedagógica que se repete por décadas nas escolas, visto que questiona o fato de se falar em povos indígenas apenas no dia do índio, a apresentação folclorizada das temáticas indígenas e a exposição de fatos isolados sobre a participação dos povos indígenas na história brasileira.

É importante que a temática indígena chegue até as salas de aula livre de preconceito. Para tanto é preciso estudo e disposição para superar os preconceitos e pré-conceitos que estão enraizados na sociedade brasileira. Precisamos de propostas didático-pedagógicas que respeitem, preservem e valorizem a história e a cultura indígena.

> A lei pode sensibilizar, além de professores e alunos, toda a comunidade escolar, inclusive os pais e as famílias dos alunos, a repensar o papel da escola no reforço de certas ideias equivocadas na formação de crianças e jovens. Não se está aqui pensando apenas em tolerância, mas, de fato, em respeito e valorização das histórias e das culturas indígenas, pois não se pode respeitar aquilo que não se conhece ou não se compreende e tolerar nos parece ser muito mais aturar ou suportar do que ter pensamentos, atitudes e procedimentos de respeito com a diversidade etnorracial que rodeia a todo. (SILVA; COSTA, 2018, p. 92).

2.3 JOGO DA ONÇA: UM JOGO DE TABULEIRO INDÍGENA EM SALA DE AULA

Sabemos que os jogos contribuem para o desenvolvimento intelectual e social das crianças, pois permitem a integração dos alunos em momentos de discussão, troca de informações e experiências em momentos de muita aprendizagem. Encontramos no Jogo da Onça o elo perfeito entre o lúdico e o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, proporcionando conhecimento, respeito e a valorização da cultura indígena.

Estudar a cultura indígena representa uma forma de valorizar e respeitar a história e o legado dos povos indígenas, além de ter contato com a diversidade cultural e social de nosso país. O jogo pode ser o motivador, incentivando os alunos a pensarem sobre esta temática, visto que o estudante tem liberdade para vivenciar, analisar e construir seu próprio conhecimento.

O Jogo da Onça é um jogo de tabuleiro que pode ser classificado como jogo de reflexão, pois não usa conteúdos específicos de matemática e de maneira nenhuma depende da sorte, mas usa a lógica e corrobora para o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas, exigindo concentração e imaginação dedutiva. É um jogo criado sobre estruturas racionais profundamente enraizadas nas lógicas matemáticas.

O Jogo da Onça favorece o desenvolvimento da criatividade e da imaginação, não basta apenas saber as regras, é importante refletir sobre cada um dos movimentos que serão realizados, porque a cada nova jogada uma decisão deve ser tomada. A cada jogada um novo problema é proposto e resolvido pelo adversário, gerenciando e criando novas estratégias de pensamento.

O Jogo da Onça como tantos outros jogos de tabuleiro, é um jogo de estratégia, que estimula o pensamento rápido e a lógica matemática em que cada jogador deve analisar diferentes possibilidades, pois antes de colocarmos cada peça deve prever os movimentos realizados pelo seu oponente. Durante o jogo, é importante alternar posições, isto é, jogar ora como onça, ora como cachorro, e alterar de alguma forma as regras do jogo, propicia uma flexibilização do pensamento e do raciocínio lógico matemático.

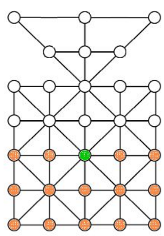
O Jogo da Onça pode ser definido como um jogo de caça e tem como característica o vínculo com a cultura de povos que o praticava. O número de peças que representa o predador é diferente e, muitas vezes menor que o número de peças que representam a caça, portanto em um jogo de caça os jogadores estão em diferentes condições de disputa.

Na visão indígena, a onça merece respeito e posição de destaque, logo no jogo representa os desafios enfrentados na caça de diversos animais na floresta e as estratégias de jogo que podem corresponder a ensinamentos de situações reais. Até a chegada do europeu o cachorro não fazia parte da cultura indígena como animal de estimação, porém no Jogo da Onça representa a organização de grupos de caçadores ou mesmo uma matilha de cães do mato caçando.

O Jogo da Onça é composto por uma onça e quatorze cachorros, quem joga com os cachorros tem o objetivo de imobilizar a onça. Quem joga com a onça tem que capturar cinco peças, isto é, cachorros, sendo que estes devem permanecer unidos para evitar captura, enquanto a onça deve tentar dispersar as peças do adversário.

Ao ler as regras do jogo pela primeira vez, podemos pensar que a onça está em desvantagem por ser solitária ou está em vantagem por ter a possibilidade de capturar os cachorros, removendo-os do tabuleiro ao saltar sobre os mesmos. Logo depois de uma ou duas partidas se percebe que é um jogo equilibrado, no qual é importante analisar a situação do jogo observando todas as possibilidades ates de executar qualquer movimento, independente de quem represente, onça ou cachorro.

Figura 1 – Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

O Jogo da Onça é um jogo de tabuleiro para duas pessoas, cada um dos participantes escolhe se joga com a onça que é representada por uma única peça ou com os cachorros, que são representados por 14 peças. A onça é colocada no centro do tabuleiro e os cachorros ficam dispostos atrás e dos dois lados da onça, como vemos na Figura 1.

Tanto a onça como os cães podem se mover em qualquer direção. A onça começa a partida deslocando-se para qualquer casa vizinha que esteja vazia, depois é a vez de um dos cachorros se deslocar para uma casa vizinha vazia, também em qualquer direção. Quem joga com a onça tem como objetivo capturar cinco cachorros, sendo que a captura é feita da mesma forma que no jogo de dama, pulando o cachorro e se dirigindo à próxima casa vazia. Quem joga com os cães tem o objetivo de imobilizar a onça, impedindo que a mesma se movimente ou capture os cachorros. A onça não pode ser capturada, apenas presa, ou seja imobilizada, de modo que não possa mais se mover, somente a onça pode realizar a captura e esta pode ser única ou múltipla, isto é, capturar um cachorro ou vários em uma única jogada.

O Jogo da Onça recebe diferentes denominações em cada região. No Rio Grande do Sul é conhecido como Jogo do Tigre ou Búzio, no Mato Grosso do Sul, São Paulo e no Acre também é conhecido como Jogo do Puma, Yaguareté Kora que significa Toca da onça, Xadrez Guaraní e Adugo, sendo que Adugo em Boe Wadáru na língua original dos Bororos significa onça. São muitos nomes para descrever um jogo que vai além de um tabuleiro, um jogo de caça e estratégia, de origem indígena que conta muitas histórias, que carrega a memória cultural dos povos que jogavam. O Jogo da Onça ensina sobre a cultura e a diversidade de um povo, convidando todos para olhar de maneira diferente, sem julgamentos e sem preconceitos, para os povos indígenas.

Assim como o Jogo da Onça, os jogos de caça fazem parte de diferentes culturas, são jogos antigos e conhecidos em diferentes partes do mundo. Um dos mais antigos jogos de caça é o Alquerque, também podemos citar o jogos Komikan de origem Inca, o Bagh bandi de origem indiana e o Bagh-Chal do Nepal, sendo que todos apresentam alguma semelhança no desenho do tabuleiro como o Jogo da Onça e destacam os aspectos dos povos que os jogam. Justificamos a semelhança entre os tabuleiros pelo fato que os jogos e brinquedos são passíveis da influência de diversas culturas, como afirma Almeida:

> Os jogos e brinquedos antigos não aceitam definições prévias, preconceitos ou reconhecimentos abstratos. A sua legitimação encontra-se na dimensão histórica e cultural dos comportamentos e no vínculo aos elementos de uma dada situação. Os jogos e brinquedos são marcados por uma identidade particular, isto é, a identidade do contexto cultural em que a ação lúdica se realiza. Mas isto não significa dizer que o jogo e o brinquedo não estejam abertos aos múltiplos e diversos cruzamentos de culturas, porque eles não são uma entidade descontínua, imutável, finita, sem capacidades de reestruturação permanente, como as vezes e erradamente eles tem sido apresentados, com uma visão reduzida e substantiva do mundo. (ALMEIDA, 2009, p. 23).

Sobre a história e origem do Jogo da Onça, temos duas versões, a primeira seria a origem europeia, descrita por Vinha (2010, p. 26) : "Não se sabe bem se os mesmos foram criados pelas diferentes etnias, ou se eles aprenderam com os colonizadores espanhóis (na fronteira dos países de língua hispânica) ou com os portugueses". Vinha também destaca que:

> A forma de jogar encontrada entre os indígenas Bororo mostra ser uma variação de um jogo de tabuleiro conforme padrões europeus, o que levanta a hipótese de ter sido transmitido por missionários salesianos, com quem tiveram contato desde o século XIX. (VINHA, 2010, p. 27).

A segunda versão apresentada é que os povos indígenas já tivessem conhecimento do jogo antes da colonização europeia. Ferreira, Vinha e Souza (2008, p. 49) afirma que: “Um jogo de estratégia muito parecido ao Jogo da Onça, o jogo do puma, foi encontrado em muros pré-colombianos, no Peru cuja organização data do período anterior ao de Cristo”.

Considerando o apagamento cultural e o silenciamento dos indígenas que aqui viviam, dificilmente teremos a certeza se os colonizadores trouxeram essas ideias ou se os conhecimentos étnicos foram apropriados, mas como afirma Almeida:

> Os jogos, os brinquedos e as brincadeiras existem há muito tempo. Não sabemos quem os criou ou inventou, apenas que eles foram transmitidos através da comunicação oral, são universais e passados de geração a geração. Esses jogos estiveram presentes em vários períodos da história do homem na sociedade. Tal fato se perpetuou por meio da sua tradicionalidade, da sua oralidade e da sua universalidade, sempre estando presente na cultura do povo. (ALMEIDA, 2009, p. 15).

Existem vários trabalhos de pesquisa e atividades em escolas indígenas com o objetivo de resgatar a prática e a história do Jogo da Onça entre os povos indígenas. Neste sentido, Vinha destaca que:

> Recentemente, pesquisas registram os que ainda estão apenas na memória dos mais velhos e os que ainda são praticados nas aldeias. A criatividade dos indígenas na construção dos jogos e no uso de materiais encontrados somente na natureza circundante de suas terras deve ser registrada e ensinada aos não indígenas. O jogo de tabuleiro, como prática pedagógica, pode ser enriquecido com tais dados, pois eles se desdobram em saberes ambientais cujas fontes naturais hoje podem estar destruídas e em saberes sociais, quando seus tabuleiros e suas representações trazem temores e desafios peculiares de um povo. Esse conjunto faz do jogo um acervo, um patrimônio cultural imaterial sob a dinâmica da tradição. (VINHA, 2010, p. 26-27).

2.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O USO DE JOGOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Saber matemática, ser bom em matemática, não é simplesmente momorizar a tabuada, fazer cálculos mentais, saber fórmulas, teorias e teoremas. O que é realmente saber matemática? Como se aprende matemática? Para que se estuda matemática? Tais questionamentos fazem o professor rever constantemente sua metodologia e buscar novos recursos pedagógicos para enriquecer as aulas e motivar os estudantes. Segundo CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN temos que:

> Saber matemática não é somente saber definições e teoremas para reconhecer o momento de utilizá-los e aplicá-los, é dedicar-se aos problemas em um sentido amplo, que inclui encontrar boas perguntas assim como encontrar soluções. Uma boa produção da atividade matemática, por parte do aluno, exige que este intervenha nessa atividade, o que significa que ele deve formular enunciados e provar proposições, construir modelos, linguagens, conceitos e teorias, colocá-los à prova e realizarem intercâmbio como os outros, reconhecer os que estão de acordo com a cultura matemática e considerar aqueles que são úteis para a continuidade de sua atividade. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 213).

Aprender matemática é saber mobilizar o seu próprio modo de pensar, raciocinar, argumentar e comunicar suas ideias e generalizações de forma consistente justificando o raciocínio utilizado expressando também suas incertezas em relação às suas ideias. Portanto é preciso ter criatividade e intuição matemática, o que implica no letramento matemático e na capacidade de resolver problemas.

Ensinar Matemática por meio de resolução de problemas é formar alunos criativos, críticos, que sabem argumentar, discutir e avaliar suas respostas, sendo que também são capazes de avaliar as questões propostas. Podemos dizer que ser bom em matemática é saber resolver problemas dentro e fora da escola, é saber aplicar o que se aprende em diferentes situações, é ter condições de aprender conteúdos novos e ter habilidade para resolver qualquer problema matemático. Burke afirma que:

> O mundo está a exigir, cada vez mais, não que as pessoas saiam da escola com as cabeças repletas de todos os conhecimentos necessários para os dias atuais (o que, no fundo, será sempre impossível), mas sim que sejam capazes de continuar a aprender indefinidamente por conta própria. O que se quer da escola é que o aluno, mais do que aprender coisas, aprenda a pensar, a resolver problemas, a ser crítico, criativo, flexível, a ser autônomo. A escola deve, também, prepará-lo para interagir com outras pessoas, para trabalhar em grupo, para se comunicar eficazmente, para se inserir de forma consciente, responsável e construtiva na comunidade e na sociedade. (BURKE, 2003, p. 20-21).

Quando pensamos problemas matemáticos, devemos considerar que não é qualquer problema que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, da criatividade e da criticidade. Para desenvolver habilidades não podemos utilizar um problema convencional, mas um modelo que desafie o aluno e seja significativo. Conforme Smole & Diniz podemos definir um problema convencional como:

> As características básicas de um problema convencional são: textos na forma de frases, diagramas ou parágrafos curtos; os problemas vêm sempre após a apresentação de um determinado conteúdo; todos os dados de que o resolvedor necessita aparecem explicitamente no texto e, em geral, na ordem em que devem ser utilizados nos cálculos; os problemas podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos; a tarefa básica na sua resolução é identificar que operações são apropriadas para mostrar a solução e transformar as informações do problema em linguagem matemática; a solução numericamente correta é um ponto fundamental, sempre existe e é única. O trabalho centrado exclusivamente na proposição e na resolução de problemas convencionais gera nos alunos atitudes inadequadas frente ao que significa aprender a pensar em matemática. [...] (DINIZ, 2001, p. 99).

Sobre problemas não-convencionais destacamos que:

> Ao trabalhar com os problemas não-convencionais, os alunos têm contato com diferentes tipos de textos e desenvolvem sua capacidade de leitura e análise crítica, pois, para resolver a situação proposta, é necessário voltar muitas vezes ao texto a fim de lidar com os dados e analisá-los, selecionando os que são relevantes e descartando aqueles supérfluos. Planejando o que fazer, como fazer, encontrando uma resposta e testando para verificar se ela faz sentido, o aluno compreende melhor o texto. Isto gera uma atitude que não é passiva e requer uma postura diferenciada frente à resolução de problemas. (STANCANELLI, 2001, p. 107).

O aluno aprende a pensar matemática quando tem a oportunidade de resolver diferentes tipos de problemas, convencionais ou não convencionais, contanto que utilizem diferentes conhecimentos e habilidades. De acordo com Loyo & Cabral temos que:

> Muito mais do que fazer com que o aluno preste atenção e acompanhe o raciocínio do professor, é necessário criar espaços em que ele possa resolver problemas a partir de caminhos próprios. Nesse contexto, o professor não é mais o modelo a ser seguido, e sim o mediador da aprendizagem. (LOYO; CABRAL, 2018, p. 175).

Logo percebemos que para alcançar os objetivos propostos devemos ter planejamento, seja para trabalhar com resolução de problemas ou com jogos. Não existe receita, o que existe são perspectivas e ideais que podem fazer a diferença e tornar o ensino da matemática significativo.

Estar constantemente aprendendo, resolvendo problemas de maneira crítica e criativa, ser participativo, cooperativo e organizado são características pessoais que podem ser aprendidas não somente através da resolução de problemas, mas também por meio de jogos, pois para jogar precisamos estar atentos, ser organizados, saber operar e analisar diferentes informações. Neste sentido Almeida afirma que:

> Para isso, nada melhor que aprender a aprender através dos jogos, das brincadeiras e dos brinquedos. Sabemos que a aprendizagem, assim como o desenvolvimento, podem ser estimulados, e que tal estimulação pode ser prazerosa, rica, criativa, transformadora e alegre. (ALMEIDA, 2007, p. 15).

O uso de jogos e curiosidades no ensino da Matemática tem o objetivo de fazer com que crianças e adolescentes gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno envolvido. A aprendizagem através de diferentes jogos de tabuleiros ou de cartas, como dominó, memória, dama, xadrez, jogo da velha, entre outros, permitem que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido, logo estas propostas proporcionam momentos agradáveis durante as aulas.

Com o uso de jogos em sala de aula, o raciocínio lógico matemático pode ser desenvolvido e estimulado, aumentando a capacidade pessoal de avaliar situações do cotidiano, refletir, tomar decisões, estabelecer relações de semelhança, desenvolver o senso crítico, aprender novos conteúdos e resolver situações problemas. De acordo com Oliveira (2003 apud OLIVEIRA, 2007, p. 18) “É no jogar que você aprende a perseguir seus objetivos, a agir de acordo com as regras, tirando maior proveito a seu favor. É a ação mental conjugada à prática que leva à aprendizagem”.

Atividades lúdicas e jogos são ferramentas pedagógicas que contribuem para o desenvolvimento cognitivo em sala de aula, instigam e desafiam os alunos a desenvolver estratégias, fazer observações, analisar e levantar hipóteses, desenvolvendo estratégias de resolução de problemas, estimulando a criatividade e a criticidade, visto que durante jogos e atividade lúdicas o aluno está constantemente exposto a novas e desconhecidas situações, uma vez que cada jogo cria novos desafios e novas situações problemas. De acordo com Oliveira (2007, p. 50): “A resolução de problemas via jogos de regras propicia à criança situações em que precisa pensar com clareza, objetividade e consciência. Ela sente uma necessidade lógica e biológica, interativa, de organizar seu raciocínio.”.

As atividades com jogos em sala de aula proporcionam momentos de interação com os colegas, possibilitando momentos para conhecer e perceber o outro, também discutir e analisar diferentes situações propostas. Porém, devemos considerar que atividade lúdica em sala de aula não deve ser vista como um momento de recreação, e sim como atividade desafiadora, que problematiza e simula diferentes situações que fazem com que o aluno aprenda a resolver problemas, desenvolvendo a competência de saber fazer e a habilidade de relatar, descrever, provar e questionar. De acordo com Macedo, Petty & Passos temos que:

> [...], a experiência de jogar certamente “contaminará” de alguma maneira a forma como ensinamos os nossos alunos, daí a expressão “espírito do jogo”. Esta pode ser traduzida por muitos aspectos do jogar: dar mais sentido às tarefas e conteúdos, aprender com mais prazer, encontrar modos lúdicos de construir conhecimentos, saber observar melhor uma situação, aprender a olhar o que é produzido, corrigir erros, antecipar ações e coordenar informações. Essa expressão também contempla outros aspectos, como trabalhar em um contexto competitivo, mas regrado, em que há estímulo à criatividade e à busca de melhores recursos internos para vencer sem trapacear. Essas maneiras de agir, sem dúvida, influenciam diretamente o ambiente da sala de aula, pois favorecem a aprendizagem e colocam os alunos como agentes de seus próprios conhecimentos, autores de suas ações

> e, portanto, tornam-se mais responsáveis e envolvidos com aquilo que produzem. A prática de tais habilidades e competências, a médio e longo prazos, é revertida em bons resultados, tanto no desempenho como aluno quanto no exercício da cidadania. (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005, p. 105).

No mesmo sentido Oliveira destaca que:

> Os jogos têm o poder de, ao envolver e motivar a pessoa, resgatar seus processos mentais de forma saudável, inserindo-se na correnteza do tempo, no contexto vital. Como que nos arrastando em sua dinâmica viva e atraente, convidam-nos a participar, a criar, a arriscar na tentativa de novos caminhos.
>
> Devido à sua grande variedade e versatilidade aplicativa, os jogos de regras possibilitam diferentes enfoques, propondo os mais variados desafios. Individuais ou coletivos, todos condições favoráveis a que se aprenda a pensar de forma refletida e criativa na solução de problemas. (OLIVEIRA, 2007, p. 9).

Ao utilizar jogos e resolução de problemas em sala de aula podemos tornar as aulas mais interessantes, e os alunos motivados, curiosos sem medo de errar, sem medo de desafiar-se, e principalmente sem medo de Matemática. Logo estaremos desenvolvendo o raciocínio lógico matemático, formando alunos críticos e criativos e portanto alunos realmente preparados para resolver problemas cotidianos.

2.5 ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que apresenta métodos de resolver problemas de contagem e que podem ser aplicados facilmente ao cotidiano. De acordo com Morgado et al. (1991, p 1), define-se Combinatória como "a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas". De acordo com Jullianelli:

> A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que estuda, fundamentalmente, a formação de agrupamentos de elementos, numa abordagem quantitativa, a partir de um determinado conjunto, sendo esses elementos submetidos a condições previamente estabelecidas. (JULIANELLI et al., 2009, p. 1).

De acordo com Hazzan:

> A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições. (HAZZAN, 2013, p. 1).

Segundo Paiva temos que:

> Em muitas situações, contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, mostra-se inviável, sendo necessário estabelecer métodos de contagem que permitam chegar aos resultados mais rapidamente. Obter esses métodos é o objetivo principal da Análise Combinatória.(PAIVA, 2015, p. 130).

As questões de Análise Combinatória estão intimamente ligadas a problemas de contagem de elementos de um conjunto finito e agrupamentos, é através desta área de matemática que resolvemos problemas com o objetivo de escolher e agrupar os elementos de um conjunto. Destacamos que a Análise Combinatória possui uso direto no cálculo da probabilidade, sendo que seu estudo encontra aplicabilidade na química, na medicina, na engenharia e na estatística.

Os problemas de Análise Combinatória podem ser de simples interpretação e resolução, mas também podem ser difíceis e complexos exigindo daquele que vai resolvê-lo criatividade, pensamento lógico e intuição. Morgado (2015) destaca três passos importantes na estratégia de resolver problemas de combinatória, sendo o primeiro Postura, o segundo Divisão e o terceiro passo é Não adiar dificuldades. De acordo com Morgado e Carvalho ao resolver um problema de análise combinatória devemos ter:

> 1) Postura. Sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
> 2) Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.[...]
> 3) Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 108-109).

Em aula observamos que os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em resolver problemas de Análise Combinatória. Geralmente o ensino deste conteúdo se limita na apresentação de definições, aplicação de fórmulas em atividades que não instigam a curiosidade dos estudantes e não possibilitam o raciocínio e a compreensão do mesmo. Sobre o ensino de Combinatória, Morgado e Carvalho afirmam que:

> 1. Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas. [...]
> 2. Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.
> 3. Você quer mostrar que é o bom ou quer que os seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. [...]
> 4. Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios constritivos. (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 134).

Morgado afirma que:

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pela problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a sua solução. (MORGADO et al., 1991, p. 2).

2.5.1 Princípio Aditivo e Multiplicativo

Sobre Princípio Aditivo Santos, Mello e Murari (2007, p. 39) definem: “Se A e B são dois conjuntos disjuntos $(A \cap B = \emptyset)$ com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.”. Sobre Princípio Multiplicativo os autores utilizam determinada definição:

> Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$.(SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 39).

Sobre Princípio Multiplicativo de Contagem, Filho & Silva nos indicam:

> O princípio Multiplicativo da Contagem diz que um acontecimento ocorre em duas situações sucessivas e independentes, sendo que a 1^a situação ocorre de a maneiras e a 2^a situação ocorre de b maneiras, então o número total de possibilidades de ocorrência desse acontecimento é dado pelo produto $a \cdot b$. (FILHO; SILVA, 2003, p. 186).

Sobre Princípio Multiplicativo de Contagem, Morgado define que “Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$”. (MORGADO et al., 1991, p. 18).

De modo geral, podemos dizer que o princípio multiplicativo leva em consideração a ordem dos elementos do grupo formado, porém se essa ordem não importa, devemos excluir as repetições dividindo o resultado obtido com o princípio multiplicativo, pelo número de permutações dos componentes do grupo. Sugerimos dividir os problemas mais complicados em casos, simplificando-o e facilitando a contagem.

2.5.2 Permutações, Arranjos e Combinações

2.5.2.1 Permutação Simples

De acordo com Houaiss e Villar (2009, p. 1477) permutação é "ato ou efeito de permutar, substituição de uma coisa por outra, alteração dos elementos que formam um todo, a fim de se obter nova combinação". Portanto uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos. Julianelli et al. (2009, p. 37) afirma que "a permutação é um caso particular do arranjo, quando todos os elementos são utilizados na formação dos agrupamentos".

Definição 1 *Cada ordenação dos n objetos é chamada uma permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. (MORGADO et al., 1991, p. 27).*

O número de permutações simples é dada por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \tag{2.1}$$

Sendo que, definimos $P_0 = 0! = 1$.

2.5.2.2 Arranjo Simples

Arranjos são agrupamentos que se diferenciamum do outro pela ordem ou natureza de seus elementos. Qualquer alteração na ordem dos elementos distintos altera o agrupamento, isto é, importa quais elementos participam do grupo e qual a posição que estes ocupam.

Definição 2 *Arranjo simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$ são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo.(SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 57).*

Definição 3 *Dado um conjunto de n elementos, chama-se arranjo simples de n elementos tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.(BARROSO, 2010, p. 210).*

O número total de agrupamentos simples de n elementos tomados p a p, com $p \leq n$, indicado por $A_{n,p}$, é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{2.2}$$

Quando $p = n$, temos:

$$A_{n,p} = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \tag{2.3}$$

Logo $A_{n,n} = n!$, que é a permutação de n elementos. Assim, $A_{n,n} = P_n = n!$, para cálculo do número de arranjos simples.

2.5.2.3 Combinação Simples

Neste caso, cada um dos agrupamentos se diferencia de outro apenas pela natureza de seus elementos. Os agrupamentos são combinações simples quando, ao se inverter a ordem dos elementos, não se altera o grupo. Devemos observar a natureza do problema pois esta indica se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem dos elementos, isto é, importa somente quais elementos participam do grupo.

Definição 4 *Combinação simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 63).*

Definição 5 *Dado um conjunto de n elementos, chama-se combinação simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos entre os n possíveis. (BARROSO, 2010, p. 315).*

Considerando o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ é uma combinação de p elementos de A, podemos fazer as permutações destes elementos , e encontrar $p!$ sequências, ou seja, os arranjos dos n elementos de A tomados p a p. Logo temos o produto: $p! \cdot C_{n,p} = A_{n,p}$, ou seja, $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$.

Portanto o número total de combinações simples de n elementos tomados p a p, com $p \leq n$, indicado por $C_{n,p}$, é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \tag{2.4}$$

Observe que se $p > n$, p e n inteiros, define-se $C_{n,p} = 0$.

2.5.2.4 Permutação com elementos repetidos

Ao realizar uma permutação, se existirem elementos iguais no conjunto a ser permutado, haverá uma diminuição no número das permutações, em relação ao número de permutações que teríamos se todos os elementos fossem diferentes.

Dado um conjunto que foi escrito com n elementos, tal que um dos elementos foi repetido α vezes, outro elemento foi repetido β vezes, e assim sucessivamente, até um elemento que foi repetido γ vezes. O número de permutações que se pode obter com os elementos é:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\gamma} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \ldots \cdot \gamma!} \tag{2.5}$$

2.5.3 Probabilidade

Área da Matemática que investiga a chance de um evento ocorrer, entendemos que a probabilidade é uma medida de tendência, e não de certeza. Morgado et al. (1991, p.119) considera que "A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios". Conforme Julianelli, a probabilidade possui as seguintes aplicações:

> Atualmente, a teoria das probabilidades é muito utilizada em outros ramos da Matemática (como o Cálculo e a Estatística), da Biologia (especialmente no estudo da Genética), da Física (como na Física Nuclear), da Economia, da Sociologia, das Ciências Atuariais), da Informática, etc. (JULIANELLI et al., 2009, p. 89).

Apresentamos a seguir algumas definições importantes.

Definição 6 *Dizemos que um experimento qualquer é aleatório quando, se repetidos diversas vezes nas mesmas condições, pode gerar resultados diferentes. (JULIANELLI et al., 2009, p. 90).*

Definição 7 *O espaço amostral de uma experiência é o conjunto de todos os resultados possíveis. (JULIANELLI et al., 2009, p. 90).*

Definição 8 *Denominaremos de eventos a todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento. (DANTAS, 2013, p. 19).*

De acordo com Julianelli, um evento pode ser:

> A. Evento Certo: é aquele que coincide com o espaço amostral. Esse é aquele que ocorrerá com certeza.
>
> B. Evento Impossível: é aquele representado por um conjunto vazio. Esse evento nunca ocorrerá num dado espaço amostral.
>
> C. Evento Complementar: dados dois eventos, A e B, dizemos que B é o evento complementar de A se B ocorrer apenas se A não ocorrer.
>
> D. Evento Elementar: é aquele formado por um único elemento de um dado espaço amostral. (JULIANELLI et al., 2009, p. 92).

Definição 9 *O espaço amostral de um experimento aleatório é chamado equiprovável, se todos os seus eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrência. (JULIANELLI et al., 2009, p. 94).*

Definição 10 *Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A Probabilidade de A, denotaremos $P(A)$, é definida por:*

$$P(A) = \frac{m}{N} \tag{2.6}$$

(DANTAS, 2013, p. 23).

Definição 11 *Em um espaço equiprovável, a probabilidade de ocorrência de um evento, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento, $n(E)$, e o número de elementos do espaço amostral, $n(s)$. (BARROSO, 2010, p. 340).*

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(s)} \tag{2.7}$$

Dado um evento que faz parte de um conjunto não vazio e pertence a um espaço amostral finito, a Probabilidade condicional refere-se a probabilidade deste evento ocorrer com base em um evento anterior, isto é, qual a probabilidade do evento A ocorrer sabendo que o evento B já ocorreu. A probabilidade condicional considera que, ocorrido um evento, este influencia a ocorrência do outro, ou seja, são eventos dependentes.

Definição 12 *Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B dado A é o número $P(A \cap B)/P(A)$. Representaremos este número pelo símbolo $P(B/A)$. Temos então simbolicamente:*

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.8}$$

(MORGADO et al., 1991, p. 141)

2.6 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Entendemos a Situação Didática como a inter-relação entre aluno, professor e meio como parte de um processo interessante e desafiador para o aluno, que incentiva-os pela busca de novos conhecimentos. Método estratégico de resolução de problemas com os quais é possível estimular a autoestima e fazer com que o aluno seja consciente de seu aprendizado.

As atividades que fazem parte de uma Situação Didática devem auxiliar os estudantes na aquisição de competências e habilidades associadas com as diferentes maneiras de aprender a aprender. Logo contribui para que os alunos sejam cada vez mais autônomos em suas aprendizagens, pensem, questionem e criem suas próprias ideias e conceitos.

> Denominamos situação o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável. (BROUSSEAU, 2008, p. 19).

A Situação Didática refere-se ao conjunto das relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, logo a Situação Didática só acontece quando existe um momento organizado com propósito exclusivo de ensino. Segundo Brousseau (2008, p. 21): “a Situação Didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional”.

Na teoria das Situações Didáticas alunos e professores são agentes relevantes na relação de ensino aprendizagem, bem como o meio que será utilizado para que a aprendizagem aconteça. Neste caso o meio pode ser texto, uma prova, problema, jogos ou desafios, isto é, atividades que corroboram para que a aprendizagem aconteça.

De acordo com Brousseau temos que:

> Uma situação é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado. O recurso de que esse sujeito dispõe para alcançar ou conservar um estado favorável nesse meio é um leque de decisões que dependem do emprego de um conhecimento preciso. Consideramos o meio como sistema autônomo, antagônico ao sujeito. (BROUSSEAU, 2008, p. 21).

A teoria de Brousseau nos permite compreender correlações que acontecem entre aluno e professor na sala de aula e de que forma o conhecimento matemático pode ser apreendido. Esta tem, como objetivo principal a caracterização do processo ensino aprendizagem por meio de uma sequência didática que determina os elementos necessários para o aprimoramento comportamental dos estudantes.

As Situações Didáticas devem ser planejadas pelo professor de modo que aproxime o aluno do saber a ser adquirido. O aluno deve ter a oportunidade de testar conjecturas, formular hipóteses, demonstrar e construir modelos e conceitos, além de trocar informações com os colegas e professores, comunicando e apresentando os resultados encontrados.

> Há uma Situação Didática cada vez que se pode caracterizar uma intenção de ensinar um saber a um aluno, por parte de um professor, bem como quando os mecanismos socialmente definidos são instituídos para essa execução. (PINTO, 2009, p. 59).

A Teoria da Situação Didática prioriza uma educação significativa, de forma que o conhecimento esteja associado com a realidade do aluno. Para isso é importante que o professor considere a maneira que é realizada a apresentação do conteúdo ao aluno.

No processo de ensino aprendizagem, as atividades propostas pelo professor não podem estar limitadas simplesmente à comunicação de um saber ou de uma informação. Ao professor cabe a responsabilidade de apresentar bons problemas que possibilitem ao aluno a busca por conhecimento, aceitando o desafio da resolução do problema, e dando início ao processo de aprendizagem.

Ao aluno compete aceitar o desafio de resolver o problema proposto, reconhecendo que este foi planejado para oportunizar condições de adquirir novos conhecimentos. O aluno só terá aprendido algo novo quando estiver preparado para aplicá-lo, por si próprio, às situações enfrentadas fora do contexto de ensino e na inexistência de qualquer indicação intencional.

> Outro aspecto importante a ser analisado nas Situações Didáticas é o problema da apresentação do conteúdo em um contexto que seja significativo para o aluno ou, caso contrário, perde-se a dimensão de seus valores educativos. Sem esse vínculo palpável com uma realidade, fica impossível alcançar as transformações formativas do saber científico. Por esse motivo, a teoria das situações é colocada a partir da questão que consiste na forma de apresentação do conteúdo, buscando um campo de significado do saber, para o aluno. (PAIS, 2019, p. 64).

Uma atividade planejada pelo professor com objetivos bem definidos, na qual o aluno consegue atuar de maneira independente sem o auxílio direto do professor caracteriza uma situação adidática. De acordo com Pais (2019, p. 66): "Uma situação adidática se caracteriza pela existência de determinados aspectos do fenômeno de aprendizagem, nos quais não tem uma intencionalidade pedagógica direta ou um controle didático por parte do professor.". Consequentemente temos em Pinto (2009):

> É importante observar que o termo a-didático, cunhado por Brousseau, não deve ser compreendido como designanado um momento no qual se retira a intenção de ensinar. Na realidade, essa intenção deverá marcar todas as etapas didáticas, pois está intimamente relacionada com os objetivos selecionados pelo professor. (PINTO, 2009, p. 61).

Em uma situação adidática o professor não interfere no processo de interação do aluno com o meio, o aluno é independente e responsável pelo seu processo de aprendizagem. Ainda, de acordo com Pinto (2009, p. 61): "na interação do aluno com esse contexto a-didático que o conhecimento se constrói.". Sendo assim, ao resolver um problema o aluno está firmando um compromisso com conhecimento, se tornando autônomo e assumindo a responsabilidade sobre o seu aprendizado. Dessa forma, em acordo com Brousseau:

> A ação de um professor possui um forte componente de regulação dos processos de aquisição do aluno. O próprio aluno aprende pela regulação de suas relações com o seu meio. As regulações cognitivas tem a ver com o meio adidático, em que parte da estrutura é determinada pela organização definida pelo professor. (BROUSSEAU, 2008, p. 56).

Para que o estudante seja capaz de apreender, sugerimos que o professor não apresente a resposta de imediato, mas forneça os meios necessários para que a resposta possa ser construída. Os problemas colocados aos alunos devem ser planejados para que eles ajam, falem, refletam e consequentemente evoluir por si, permitindo que participem do processo ativamente.

Na situação adidática, o aluno precisa ser estimulado a encontrar as respostas, na aquisição de novas competências e habilidades com o seu próprio empenho. Portanto, é importante que o professor possibilite ao aluno o máximo de independência, encontrando equilíbrio na quantidade de informações oferecidas para que os alunos desenvolvam sua própria estratégia de resolução dos problemas, criando suas hipóteses e seus conceitos.

> Assim, é imprescindível que o professor prepare o aluno para este funcionamento adidático, integrando-o às fases didáticas: o aluno só pode aprender produzindo, fazendo com que os conhecimentos - ou seus conhecimentos - funcionem e evoluam em condições semelhantes"às que ele encontrará no futuro, senão a todo instante, pelo menos com bastante frequência. (BROUSSEAU, 2008, p. 90).

Porém, não é qualquer situação adidática que o aluno consegue resolver sozinho, a qualquer momento o estudante pode apresentar alguma dificuldade na resolução dos problemas e solicitar auxílio do professor. No momento que o professor orientá-lo no encaminhamento da resolução auxiliando e realizando as devidas explicações a situação adidática torna-se um tipo de Situação Didática. Brousseau indica:

> Uma interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais). (BROUSSEAU, 2008, p. 53).

Uma Situação Didática é constituída pela interação pedagógica entre aluno, professor e saber com o objetivo de desenvolver atividades direcionada para o ensino e para a aprendizagem de um determinado conteúdo. A união destes elementos constitui uma Situação Didática forma a parte necessária para a caracterização da sala de aula.

O objeto central de análise na teoria da Situação Didática é as relações entre professor, aluno e saber. De acordo com as relações entre aluno com o meio Brousseau classifica inicialmente as situações em Ação, Formulação e Validação, estas caracterizam a situação adidática, visto que o professor permite ao aluno percorrer os caminhos da descoberta e socializar o que aprendem, sem revelar sua intenção didática, tendo exclusivamente o papel de mediador. Vejamos:

1. Situação de Ação: o aluno tem a oportunidade de refletir, elaborar, testar e escolher diferentes estratégias, intuitiva ou racionalmente, momento em que os saberes são colocados em prática com o objetivo de resolver os problemas propostos. Conforme Brousseau (2008, p. 25): "A sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema."

2. Situação de Formulação: esta pode acontecer de duas maneiras distintas, quando um aluno observa a ação dos colegas sem participar e sem interferir ou quando o aluno relata aos colegas a estratégia utilizada, sendo esta vencedora ou não.

> A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um outro sujeito, a quem primeiro deverá comunicar uma informação). (BROUSSEAU, 2008, p. 29).

3. Situação de Validação: Nesse tipo de situação não basta apenas comunicar determinada informação, o aluno deve demonstrar que seu argumento é verdadeiro provando aos demais de que sua estratégia é verdadeira dentro de um determinado contexto.

> Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entra em confronto quando há dúvidas. Juntos, encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele. cada qual pode posicionar-se em relação ao enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio. (BROUSSEAU, 2008, p. 30).

Ocorre ainda uma quarta situação, a Situação Didática de Institucionalização, esta surge da necessidade do professor em formalizar o conhecimento construído pelos alunos durante as situações de ação, formalização e validação. Momento em que o professor revela sua intenção e relata os fatos observados e tudo que estiver ligado ao conhecimento em questão, analise e organização, propiciando a comunicação e estabelecendo convenções sociais.

> O papel do professor também consiste em institucionalizar! A institucionalização se realiza tanto sobre uma situação de ação - reconhece-se o valor de um procedimento que se converterá em um recurso de referência - como também sobre uma situação de formulação. Há formulações que serão conservadas (" se diz assim", "aquilo deve ser lembrado"). O mesmo acontece com as provas: é necessário identificar o que será retido das propriedades dos objetivos que encontramos. (BROUSSEAU, 1996, p. 56).

Na situação de institucionalização que se evidencia o papel do professor, este retoma parte da responsabilidade atribuída aos alunos, resumindo e analisando tudo que foi produzido pelos alunos, descartando algumas produções e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. Existe, assim, uma efetiva aprendizagem, validada pelo professor, na qual Brousseau (2008, p. 31) pondera que: "a necessidade de considerar as fases de institucionalização que deram a determinados conhecimentos o status cultural indispensável de saber.".

Durante a Situação Didática podemos identificar o Contrato Didático, este representa um conjunto de regras que organizam e ordenam as relações entre aluno e professor e a interação destes com o conhecimento dentro da sala de aula. Essas regras, explícitas ou não, fazem parte de um Contrato Didático que pode ser entendido como um recurso que auxilia na análise das relações professor, aluno e saber.

Portanto é através da teoria do Contrato Didático de Brousseau, que observamos as regras e as relações existentes entre alunos e professores dentro da sala de aula e, principalmente as expectativas que os alunos têm em relação ao comportamento do professor e vice-versa. Além do comportamento, através do Contrato Didático analisamos as concepções que aluno e professor têm em relação ao saber e as formas como é tratado por ambos.

> A relação professor-aluno está subordinada a muitas regras e convenções que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá a transgressão das mesmas. O conjunto das cláusulas estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber, constitui o chamado contrato didático. (SILVA, 1999, p. 43).

As regras que compõem o Contrato Didático estão em constante mudança, pois a cada novo conhecimento o contrato é renovado ou renegociado, logo o contrato não é inváriavel. Muitas vezes as regras e negociações passam despercebidas, mesmo assim, interferem na relação entre professor-aluno e aluno-conhecimento, visto que tudo que acontece no ambiente pedagógico interfere no processo ensino-aprendizagem.

Mesmo que de maneira implícita, existem algumas regras que fazem parte da atividade pedagógica escolar, sendo que são o resultado da interferência do cotidiano, do espaço da sala de aula, da instituição escolar e da sociedade. Porém é a partir do Contrato Didático que as regras podem ser analisadas para um melhor desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem a fim de garantir o sucesso do trabalho didático.

O planejamento pedagógico, isto é, a escolha das atividades e estratégias de ensino interferem no Contrato Didático, visto que, em algumas situações podem acontecer rupturas que podem prejudicar não apenas a relação de confiança entre professor e aluno como também a aquisição de conhecimento e consequentemente a aprendizagem.

Por exemplo, quando um aluno mostra desinteresse pela atividade ou problema proposto pelo professor, ele está rompendo com o contrato. Nesta situação cabe ao professor identificar os motivos que ocasionaram esse desinteresse e elaborar estratégias de superação, criando condições favoráveis para a continuidade do processo educativo.

Outro exemplo de ruptura do contrato é o caso em que a estratégia de solução para os problemas propostos não está compatível com o nível intelectual e cognitivo do aluno. Normalmente se espera que os problemas e atividades propostos pelo professor estejam de acordo com os conteúdos estudados.

Portanto é necessário identificar possíveis pontos de ruptura considerando os acontecimentos suscetíveis da atividade pedagógica escolar no qual o processo de ensino e aprendizagem pode ser obstruído. É a ruptura do contrato didático que possibilita o levantamento de hipóteses e a verificação dos erros, criando a oportunidade de analisar e avaliar o objetivo da atividade pedagógica e das relações didáticas e consequentemente alterando as regras.

O contrato didático não só está presente nas Situações Didáticas como também pré-existe a essas situações, organizando as relações entre aluno, professor e conhecimento. Mesmo o aluno sendo responsável por seu aprendizado, o planejamento e as ações do professor durante as atividades pedagógicas interferem diretamente no aprendizado do aluno.

2.7 RELAÇÃO ENTRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A teoria das Situações Didáticas apresenta de que forma podemos organizar e apresentar o conteúdo matemático aos estudantes, a fim de obter uma educação que tenha significado que faça parte da realidade destes. De acordo com Pais (2019, p. 65): “Um dos objetivos da Educação Matemática é contribuir para que o aluno possa desenvolver uma certa autonomia intelectual e que o saber escolar aprendido lhe proporcione condições para compreender e participar do mundo em que ele vive.”.

O trabalho com Situações Didáticas possibilita aos estudantes a busca por soluções de maneira autônoma, sem a interferência direta do professor, o que contribui positivamente para o aprendizado do aluno e para a aquisição de novas competências e habilidades. Neste modelo de ensino o aluno é desafiado a usar os conhecimentos já adquiridos na resolução dos problemas propostos, o que possibilita a construção de novos conhecimentos. Assim:

> Outro aspecto importante a ser analisado nas Situações Didáticas é o problema da apresentação do conteúdo em um contexto que seja significativo para o aluno ou, caso contrário, perde-se a dimensão de seus valores educativos. Sem esse vínculo palpável com uma realidade, fica impossível alcançar as transformações formativas do saber científico. Por esse motivo, a teoria das situações é colocada a partir da questão que consiste na forma de apresentação do conteúdo, buscando um campo de significado do saber, para o aluno. (PAIS, 2019, p. 64).

Ao aplicar a teoria das Situações Didáticas em sala de aula estamos promovendo a interação entre os estudantes. Durante a situação de formulação o aluno troca informações, de maneira escrita ou oral com um ou mais colegas, o que proporciona condições para construir uma linguagem compreensível em relação às situações matemáticas envolvidas na Situação Didática.

A situação de validação o aluno precisa ter domínio do conteúdo matemático e raciocínio lógico para demonstrar e provar que suas ideias estão corretas e defender suas hipóteses e soluções. Durante os processos de ação, formalização e validação o aluno constrói o significado de tudo que está sendo estudado e este é convencionalmente fixado durante a situação de institucionalização.

A teoria das Situações Didáticas analisa as formas de apresentação dos conteúdos matemáticos, sendo primordial a existência de uma intenção clara do professor quanto aos seus objetivos. Logo se algum erro cometido pelo aluno, nessa teoria, quando constatado, transforma-se em uma importante fonte de informação para a elaboração de novas situações problemas que possam atender, mais claramente, os objetivos propostos.

Com a finalidade de construir o conhecimento a partir da relação aluno, professor e saber, a teoria das Situações Didáticas proporciona ao professor momentos de reflexão, que auxiliam na orientação dos estudantes para que possam resolver as atividades, que possibilitam a aquisição de um novo saber matemático por parte dos alunos. Logo, a aprendizagem deve ser um processo interessante para o estudante, que organiza, transforma, aperfeiçoa e diversifica os esquemas de conhecimento já internalizados a respeito de diversos conteúdos. Segundo Chevallard, Bosch & Gascón, temos que:

> O professor deve imaginar e propor para os alunos situações matemáticas que eles possam vivenciar, que provoquem o surgimento de autênticos problemas matemáticos e nas quais o conhecimento em questão apareça como uma ótima solução para esses problemas, com a condição adicional de que esse conhecimento possa ser construído pelos alunos. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 214).

A teoria do Brousseau tem como pressuposto a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adequação a um meio que provoca discussões e dúvidas, desafiando e incentivando os estudantes. Porém o conceito de problema foi ampliado ao conceito de Situação Didática a fim de agir sobre os conhecimentos recriando e promovendo atividades matemáticas.

A proposta de trabalho do professor deve envolver o aluno de tal forma que este assuma responsabilidades e se comprometa na busca pelo conhecimento de forma a perceber a dinâmica de apropriação do saber que está em permanente construção. Assim sendo, o professor deve fazer as escolhas corretas, conhecendo o aluno, assim como os conteúdos a serem estudados, os métodos e estratégias pedagógicas, levando-se em conta as relações que se estabelecerão entre saber, professor e aluno.

Portanto o uso das Situações Didáticas a partir da resolução de problemas que contribuem de forma significativa para a formação de um aluno autônomo e responsável por seu processo de aprendizagem. Os desafios propostos através da Situação Didática que compõem a sequência didática favorecem a aquisição de novas competências e habilidades, além de possibilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

3 METODOLOGIA

Nesta seção apresentamos um relato sobre a importância de se trabalhar com a resolução de problemas nas aulas de matemática do Ensino Médio, onde se destacam os objetivos e as habilidades que podem ser desenvolvidas e aprimoradas por meio deles. Seguido de uma lista de problemas de análise combinatória, probabilidade e desafios que foram utilizados na Situação Didática. A seguir apresentamos um histórico da E.E.E.M. Waldemar Borges na qual a Situação Didática foi desenvolvida e o planejamento da mesma. Na seção 3.3 temos o planejamento de cinco aulas que fazem parte da Situação Didática.

3.1 PROBLEMAS E DESAFIOS ENVOLVENDO O JOGO DA ONÇA

Os problemas apresentado a seguir formam elaborados a partir do Jogo da Onça, este serviu de inspiração para a elaboração dos problemas que formam utlizados na Situação Didática. Muitos foram pensados enquanto jogava, determinadas situações em que se tinha muitas opções de captura de peças ou que a onça poderia ser imobilizada.

Os problemas de análise combinatória surgiram a partir da análise do que e de quantas maneiras poderiamos colocar peças no tabuleiro, ou então pintar as casas ou triângulos no tabuleiro. Questões que podem ser classificadas como não convencionais e que estão contextualizados e integrados com tabuleiro, peças, regras e diferentes situações do Jogo da Onça. Segundo Smole & Diniz temos:

> Os problemas não convencionais são aqueles que rompem com as características de um problema convencional [...]. Problemas não necessariamente relacionados a um conteúdo específico, problemas com várias soluções, problemas com excesso de informações e aqueles apresentados com diferentes tipos de textos permitem ao aluno desenvolver sua capacidade de leitura e análise crítica, pois, para resolver a situação proposta, é necessário voltar muitas vezes ao texto para lidar com os dados e analisá-los, selecionando os que são relevantes e descartando os supérfluos. (SMOLE; DINIZ, 2016b, p. 15).

O jogo é um recurso que auxilia no processo de ensino e aprendizagem, visto que a cada jogada um novo problema é apresentado ao oponente. Os jogos de estratégia, assim como o Jogo da Onça, necessitam de muita atenção dos jogadores, pois a cada jogada devemos prever os movimentos do oponente, e ter uma estratégia de jogo para os movimentos futuros evitando que a captura de uma das peças altere completamente o jogo. Segundo Smole & Diniz:

> Os jogos de regras podem ser entendidos como situações-problemas, pois, a cada movimento, os jogadores precisam avaliar as situações, utilizar os seus conhecimentos para planejar a melhor jogada, executar a jogada e avaliar sua eficiência para vencer ou obter melhores resultados.
> No processo de jogar, os alunos resolvem muitos problemas e adquirem novos conhecimentos e habilidades. Investigar, decidir, levantar e checar hipóteses são algumas das habilidades de raciocínio lógico solicitadas a cada jogada, pois, quando se modificam as condições do jogo, o jogador tem que analisar novamente toda a situação e decidir o que fazer para vencer. (SMOLE; DINIZ, 2016a, p. 20).

Durante todas as jogadas, independente de representar a onça ou os cachorros, podemos escolher aleatoriamente um movimento ou analisar cuidadosamente e matematicamente qual é a melhor estratégia, isto é, qual é a melhor solução para o problema proposto, usando não apenas a lógica matemática, mas usando análise combinatória e probabilidade. Os problemas associados ao Jogo da Onça tornam a aprendizagem interessante e prazerosa, despertam no aluno a curiosidade e potencializam de forma significativa a capacidade de resolvê-los e de pensar matemática.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz muitas considerações sobre o trabalho com resolução de problemas nas aulas de matemática do Ensino Médio, pois este é relevante para o desenvolvimento de diferentes competências e habilidades. Conforme a BNCC, a resolução de problemas implica no letramento matemático, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, e da representação, comunicação e argumentação matemática. Toledo, Machado & Horta ponderam:

> O caminho metodológico adotado pela BNCC para que essas vivências se façam possível é a resolução de problemas. Na perspectiva adotada, o problema é visto como o ponto de partida para a construção de novos conceitos e conteúdos, e os alunos são vistos como participantes ativos nos processos de aprendizagem, cabendo ao professor a proposição de boas situações e a mediação, sempre que for necessário. (TOLEDO et al., 2021, p. 71).

Conforme a BNCC, no Ensino Médio os alunos devem ampliar os conhecimentos e habilidades adquiridos no Ensino Fundamental, realizando atividades que estimulem a tomada de decisões orientadas pela ética e bem comum provocando reflexões e abstração e desenvolvendo o pensamento crítico, analítico, indutivo e dedutivo. No ensino da Matemática é importante levar em consideração a realidade e as vivências cotidianas dos alunos, suas condições socioeconômicas e exigências do mercado de trabalho.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 519).

O trabalho com resolução de problemas já havia sido evidenciado nos Parâmetros Curriculares Nacionais em 1997. Conforme este documento, podemos destacar que:

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL, 1997a, p. 32) .

De acordo com os Parâmetros Curriculares, temos que:

> A capacidade cognitiva tem grande influência na postura do indivíduo em relação às metas que quer atingir nas mais diversas situações da vida, vinculando-se diretamente ao uso de formas de representação e de comunicação, envolvendo a resolução de problemas, de maneira consciente ou não. A aquisição progressiva de códigos de representação e a possibilidade de operar com eles interfere diretamente na aprendizagem da língua, da matemática, da representação espacial, temporal e gráfica e na leitura de imagens. (BRASIL, 1997b, p. 47) .

As atividades realizadas nas aulas de matemática devem favorecer o desenvolvimento do raciocínio, da criatividade matemática e da criticidade. Conforme as diretrizes da BNCC esperamos que o aluno registre suas respostas usando diferentes linguagens, não apenas com símbolos e conectivos lógicos, justificando suas respostas, e seja capaz de apresentar uma argumentação consistente, interpretando as respostas dos colegas e interagindo com os demais, habilidades essenciais para o letramento matemático que é definido na BNCC, como:

> Na BNCC, o letramento matemático está assim definido: competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.
> O letramento deve também assegurar que todos os estudantes reconheçam que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo e para que também percebam o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e que pode também ser prazeroso. (BRASIL, 2017, p. 522).

Neste sentido os problemas elaborados a partir do Jogo da Onça e apresentados neste capítulo, estão de acordo com as seguintes competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio da Base Nacional Comum Curricular.

> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística , para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 523).

De acordo com a BNCC, Brasil (2017, p. 527) “No Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida; por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles". Portanto os problemas elaborados propõem-se a contribuir para o desenvolvimento das seguintes habilidades referentes a competência específica 3:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
> (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (BRASIL, 2017, p. 529).

Destacamos também as habilidades referentes à competência específica 5:

> (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.
> (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos. (BRASIL, 2017, p.).

Os problemas propostos neste estudo têm por objetivo: Reconhecer a importância dos conhecimentos matemáticos na análise, interpretação e resolução de problemas; compreender e aplicar conceitos de combinatória na resolução de problemas; e, desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a criatividade.

O problema 1 é sobre os movimentos iniciais da onça e do cachorro, o problema 2 analisa o meio do jogo, isto é, quando o jogo ainda não está determinado e ainda não está definido quem será o vencedor. Problemas simples e introdutórios que auxiliam na aprendizagem e reconhecimento das regras do jogo e na elaboração de estratégias. Esperamos que ao resolver os problemas o aluno desenvolva a intuição matemática e habilidades que serão importantes para a resolução dos demais, favorecendo a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

O objetivo do problema 3 é analisar e aprender como se realizam os movimentos da onça e dos cachorros; identificar como acontecem as capturas; saber diferenciar um movimento favorável ao cachorro de um favorável à onça; verificar qual a melhor maneira de organizar as peças que representam os cachorros para evitar que a onça capture as mesmas; aprender a imobilizar a onça identificando quais as melhores posições para imobilizá-la. Além da familiaridade com o jogo, os problemas iniciais tem como um dos objetivos discutir questões de análise combinatória e probabilidade.

No problema 4 o tabuleiro foi representado no plano cartesiano, usamos as regras do jogo para aprender a calcular o número de trajetórias entre dois pontos, estes problemas abrangem conteúdos de análise combinatória (permutação com repetição) e lógica matemática (uso dos conectivos e/ou). A forma como se conta o número de trajetórias não estão explícitas, sendo assim os estudantes deverão utilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e formular um processo de resolução.

O problema 5 tem como principal objetivo desenvolver a criatividade e o raciocínio lógico do aluno, para resolvê-lo é preciso conhecer o tabuleiro e já ter conhecimento das regras e já ter jogado várias vezes representando a onça para poder criar uma estratégia em que a onça possa capturar todos os cachorros em uma única jogada. Esta questão exige dos alunos o uso de diferentes registros e representação por meio de diferentes linguagens, sendo que estas são importantes para o entendimento, resolução e apresentação dos resultados, o que propicia o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Os problemas 6, 7 e 8 envolvem lógica matemática, sendo formulados com base no tabuleiro do Jogo da Onça. Colaboram para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e a criatividade, visto que provocam nos estudantes sentimentos de autoestima, e de perseverança na busca de soluções mobilizando seus conhecimentos e habilidades, a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução.

3.2 PROBLEMAS RELACIONADOS AO JOGO DA ONÇA

Problema 1 *Observando o tabuleiro representado na Figura 2, após o primeiro movimento da onça, e sabendo que quem representa o cachorro é o próximo a jogar, e que este será o primeiro movimento realizado pelos cães, responda:*

a. *Dos quatorze cães em jogo, quantos podem se movimentar?*

b. *Quantos movimentos cada um dos cães pode executar?*

c. *Quantos movimentos são possíveis?*

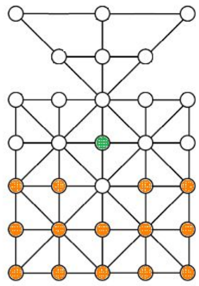
d. *Quantos movimentos são favoráveis para o cachorro?*

e. *Quantos movimentos são favoráveis para a onça?*

f. *Realizando um movimento de forma aleatória, qual a probabilidade deste movimento ser favorável para a onça?*

g. *Analise de forma intuitiva, isto é, baseada na experiência acumulada com o jogo, qual a melhor estratégia de jogo, isto é, quais posições são mais convenientes a serem ocupadas pelos cachorros?*

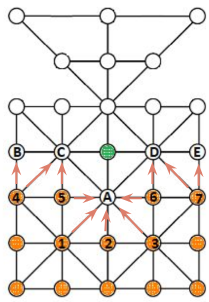
Figura 2 – Jogo da Onça - O ponto de vista do cachorro



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando o tabuleiro representado na Figura 3, temos que dos quatorze cachorros em jogo, sete podem se movimentar, destes os cães 1,2 e 3 tem um movimento possível, os cães 4, 5, 6 e 7 tem dois movimentos possíveis cada um, totalizando onze possibilidades de movimento. Desses, seis são favoráveis aos cachorros e cinco são favoráveis à onça, pois possibilitam a captura dos cães. Portanto a probabilidade de realizar um movimento de forma aleatória e este ser favorável à onça é $\frac{5}{11}$.

Figura 3 – Jogo da Onça - Ponto de vista do cachorro

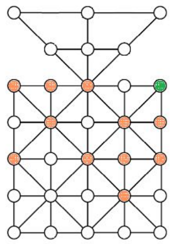


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Do ponto de vista dos cachorros, a melhor estratégia de jogo é ocupar a posição A, pois é uma casa muito forte para a onça. Portanto nessa posição a onça pode facilmente capturar um dos cachorros, e caso ela consiga ocupar essa posição os cachorros enfrentarão problemas para imobilizá-la.

Problema 2 *Observando a situação atual do tabuleiro representado na Figura 4, e sabendo que quem está jogando com o cachorro é o próximo a jogar, responda:*

Figura 4 – Jogo da Onça - Jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

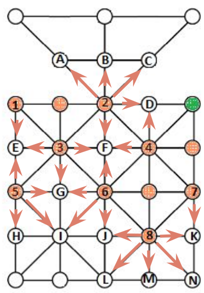
a. *Dos onze cães em jogo, quantos podem se movimentar?*

b. *Quantos movimentos são possíveis?*

c. *Quantas jogadas são favoráveis para o cachorro? Quantas jogadas serão favoráveis para a onça?*

d. *Suponha que um cachorro seja escolhido e movimentado ao acaso, qual a probabilidade desta jogada ser favorável ao cachorro?*

Figura 5 – Jogo da Onça - Possibilidades de movimento do cachorro

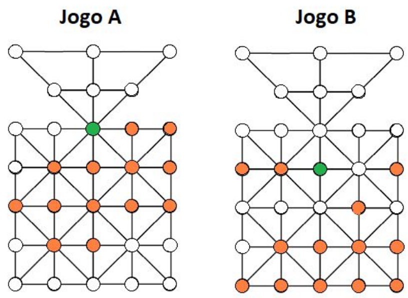


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando o tabuleiro representado na Figura 5, temos que dos onze cachorros em jogo, oito podem se movimentar, destes os cães 1 e 7 tem um movimento possível. O cão 4 tem dois movimentos possíveis, o cão 3 tem três movimentos possíveis, os cães 5 e 6 tem quatro movimentos possíveis, e os cães 2 e 8 tem cinco movimentos possíveis cada um, totalizando vinte e cinco possibilidades de movimento. Desses 19 são favoráveis aos cachorros e 6 são favoráveis à onça. Portanto a probabilidade de realizar um movimento de forma aleatória e este ser favorável ao cachorro é $\frac{19}{25}$.

Problema 3 *Observe a Figura 6, e determine qual a diferença entre as duas estratégias de jogo utilizadas por quem representa os cachorros.*

Figura 6 – Jogo da Onça em andamento - Comparação de estratégias

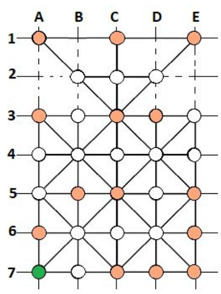


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Na Figura 6, observamos que no Jogo A a onça tem poucas casas para se movimentar e o ataque dos cachorros foi coordenado, não deixando cachorros desprotegidos e diminuindo as possibilidades de captura, enquanto que no Jogo B, os cachorros se movimentaram sem coordenação e foram deixados desprotegidos, os quais podem ser facilmente capturados.

Problema 4 *Considere o tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 7, onde os cachorros foram colocados de maneira aleatória. Determine:*

Figura 7 – Tabuleiro no plano cartesiano com cachorros em posição aleatória



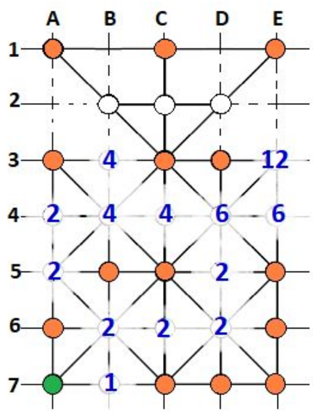
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. *De quantas maneiras distintas a onça pode se deslocar da posição 7A até a posição 3E sem capturar e sem alterar a posição dos cachorros que estão no tabuleiro sem passar duas vezes pela mesma casa?*

b. *Sabendo que a onça pode capturar os cachorros quando for possível, não pode retroceder verticalmente para baixo e não pode passar duas vezes no mesmo lugar, de quantas maneiras distintas a onça pode se deslocar da posição 7A até a posição 3E?*

Observando o tabuleiro representado na Figura 8, percebemos que a onça tem duas opções para chegar na posição 6B, uma pela diagonal e outra indo para direita e depois para cima passando por 7B, consequentemente duas possibilidades de chegar nas posições 6C, 6D, 5D, 5A e 4A. Para determinar quantas maneiras temos de chegar na posição 4B somamos as opções da posição 5A com 4A, que resulta em 4 alternativas. Analogamente o número de escolhas da posição 4D é a soma da posição 5D com a 4C, que resulta em 6 opções. Consequentemente se tem seis possibilidades de chegar na posição 4E e 12 maneiras de chegar na posição 3E, sendo que todas.

Figura 8 – Possibilidades de movimento da onça sem captura



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

I. 7B, 6B, 6C, 6D, 5D, 4D, 3E;

II. 6B, 6C, 6D, 5D, 4D, 3E;

III. 7B, 6B, 5A, 4A, 4B, 4C, 4D, 3E;

IV. 6B, 5A, 4A, 4B, 4C, 4D, 3E;

V. 7B, 6B, 5A, 4B, 4C, 4D, 3E;

VI. 6B, 5A, 4B, 4C, 4D, 3E;

VII. 7B, 6B, 6C, 6D, 5D, 4D, 4E, 3E;

VIII. 6B, 6C, 6D, 5D, 4D, 4E, 3E;

IX. 7B, 6B, 5A, 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 3E;

X. 6B, 5A, 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 3E;

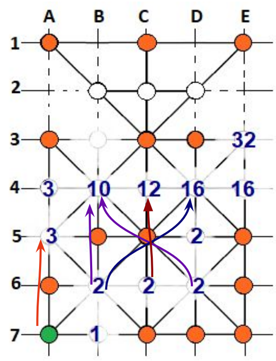
XI. 7B, 6B, 5A, 4B, 4C, 4D, 4E, 3E;

XII. 6B, 5A, 4B, 4C, 4D, 4E, 3E.

Portanto a onça tem 12 maneiras distintas de deslocar-se da posição 7A até a posição 3E sem capturar e sem alterar a posição dos cachorros que estão no tabuleiro, sendo esse valor a soma das possibilidades de chegar na posição 4E com a posição 4D.

Observando o tabuleiro representado na Figura 9, percebemos que assim como no item A a onça tem duas maneiras de chegar na posição 6B, e duas possibilidades de chegar nas posições 6C, 6D e 5D. Como é possível capturar as peças temos três possibilidades de chegar na posição 5A, valor que se repete em 4A. Para determinar quantas maneiras temos de chegar na posição 4B somamos as possibilidades da posição 5A com a posição 4A, acrescentamos duas possibilidade pois é possível ir da posição 6B até 4B capturando o cachorro que está na posição 5B e acrescentamos mais duas possibilidades pois é possível ir da posição 6D para a posição 4B capturando o cachorro que está na posição 5C totalizando dez possibilidades de chegar em 4B.

Figura 9 – Possibilidades de movimento da onça com captura

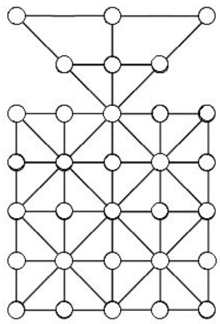


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Para chegar na posição 4C temos dez mais duas possibilidades pois é possível capturar o cachorro da posição 5C, analogamente o número de possibilidades da posição 4D é a soma da posição 5D com a posição 4C mais dois, que resulta em 16 possibilidades, sendo também 16 o número de possibilidades de chegar em 4E. Portanto a onça tem 32 maneiras distintas de se deslocar da posição 7A até a posição 3E podendo capturar, quando possível os cachorros que estão no tabuleiro, sendo esse valor a soma das possibilidades de chegar na posição 4E com a posição 4D.

Problema 5 *No Jogo da Onça é possível fazer a captura múltipla, que consiste em capturar mais de um cachorro, pulando sobre o cachorro indo para uma posição que esteja vazia. Dado o tabuleiro representado na Figura 10, coloque os 14 cachorros no tabuleiro e depois posicione a onça de forma que:*

Figura 10 – Jogo da Onça - Tabuleiro

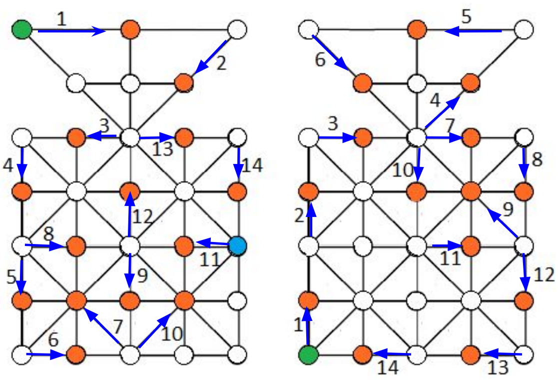


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. *A onça consiga capturar todos os cachorros em uma única jogada, e a posição de partida seja diferente da posição de chegada.*

b. *A onça consiga capturar todos os cachorros em uma única jogada, e a posição de partida seja a mesma da posição de chegada.*

Figura 11 – Jogo da Onça - Captura Múltipla



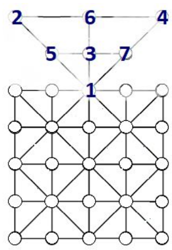
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Uma possível solução está representada na Figura 11. Nesta, a ordem dos movimentos esta numerada e as setas indicam a direção e o percurso executado pela onça para capturar todos os cachorros em uma única jogada, no tabuleiro da esquerda depois da captura a onça fica em uma posição diferente da chegada e na posição da direita a onça fica na mesma posição de partida depois da captura de todos os cachorros.

Problema 6 *Colocar os números de 1 até 7 na toca da onça, parte triangular do tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 10, de forma que dois números consecutivos não tenham nenhuma conexão, isto é, que não estejam interligados por uma aresta.*

Uma possível resposta está representada na Figura 12, sendo que esta não é a única solução.

Figura 12 – Números de 1 até 7 organizados na toca da onça de forma que dois números consecutivos não tenham nenhuma ligação



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

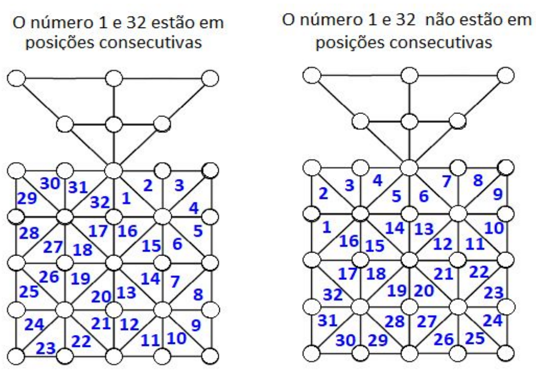
Problema 7 *Dado o tabuleiro representado na Figura 10, numere de 1 até 32 os triângulos da parte quadrada do tabuleiro de tal modo que números consecutivos fiquem em triângulos que tem um lado em comum.*

a. *Represente uma das possíveis soluções em que os números 1 e 32 fiquem em triângulos consecutivos.*

b. *Represente uma das possíveis soluções em que os números 1 e 32 não fiquem em triângulos consecutivos.*

As possíveis soluções estão representadas nas Figuras 13.

Figura 13 – Números de 1 até 32 representados no tabuleiro do Jogo da Onça

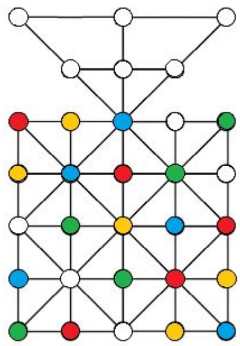


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 8 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 10, queremos pintar todas as casas, na parte quadrada do tabuleiro, com cinco cores, de modo que em cada linha e em cada coluna, haja apenas uma casa de cada cor, isto é, não pode-se repetir uma mesma cor numa mesma linha e numa mesma coluna. Represente uma solução.*

Uma possível resposta está representada na Figura 14.

Figura 14 – Representação de uma das soluções de como colorir com cinco cores, as casas em cada linha e coluna da parte quadrada do tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

3.3 PLANEJAMENTO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

A aplicação da Situação Didática aconteceu na Escola Estadual de Ensino Médio Waldemar Borges, Alegrete RS, a qual divide espaço com Escola Municipal de Educação Básica Waldemar Borges. O ano letivo de 2022 iniciou com 85 educandos e com três turmas em funcionamento no turno da noite, uma turma de 1º ano, do Novo Ensino Médio, uma turma de 2º ano e uma turma de 3º ano. A escola faz uso de três salas de aula, biblioteca, laboratório de informática, laboratório de ciências, refeitório e audiovisual, o qual possui equipamentos de projeção e notebook para uso dos alunos.

Alguns dos alunos da E.E.E.M. Waldemar Borges são trabalhadores informais. Muitos dos alunos trabalham durante o dia e estudam de noite, tentando conciliar o horário de trabalho com os estudos, enquanto que outros estão em condições de vulnerabilidade social e dificuldades financeiras. Entre as alunas, algumas são mães, e levam os seus filhos para a escola no período de aula, enquanto que outras ainda não têm apoio familiar para continuar seus estudos.

A escola possui turmas diversificadas quanto ao perfil dos discentes. Alguns alunos apresentam defasagem de série e idade, outros estudantes possuem dificuldades de aprendizagem, havendo alunos incluídos, mas sem diagnóstico. Todavia, a escola também conta com educandos que conseguem vencer obstáculos, demonstram perspectivas em prosseguir estudando, conquistando uma melhor qualidade de vida para si e a sua família.

Conforme (ESCOLA DE ENSINO MÉDIO WALDEMAR BORGES, 2022) o objetivo da escola é “Desenvolver no educando as potencialidades vivenciadas por eles, integrando-os na sociedade em que vivem, tornando-os solidários, críticos, criativos, participativos e atuantes” e sua filosofia é “Promover um espaço educativo potencializador das inteligências e dos valores de Humanismo, solidariedade e responsabilidade”. O trabalho pedagógico é desenvolvido com atividades planejadas, considerando a bagagem cultural dos educandos e buscando a interdisciplinaridade através de projetos, mostras, gincanas, visitas, oficinas e palestras a fim de preparar o educando para o exercício da cidadania, além da sua qualificação para o trabalho.

A atividade prática realizada na escola fundamentada na Teoria de Situação Didática de Brousseau, que faz referência ao processo de ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula, no qual considera a resolução de problemas essenciais neste processo. A proposta do projeto em questão não é para uma aula, e sim um plano de cinco aulas, com objetivos definidos com atividades diferenciadas e desafiadoras.

A Situação Didática que tem como tema O Jogo da Onça e a Resolução de Problemas foi planejada para ser aplicada aos alunos do Ensino Médio e realizada em 5 aulas, todas com previsão de duração de 90 minutos. Composta por problemas elaborados com base no Jogo da Onça, possui os seguintes objetivos:

- Conhecer as especificidades do presente jogo e de suas regras;
- Desenvolver a capacidade de dedução;
- Desenvolver a capacidade de raciocínio lógico e organizado;
- Perceber e compreender o inter-relacionamento entre o Jogo da Onça e os conteúdos trabalhados;
- Desenvolver a capacidade de interação entre os alunos.

Inicialmente será feita a apresentação oral com o uso de slides contendo o histórico e apresentação do Jogo da Onça. Logo em seguida será conduzida uma discussão coletiva das regras do jogo em foco a fim de verificar se os alunos têm alguma dúvida.

Em um segundo momento os alunos terão tempo disponível para jogar e interagir com os colegas, vivenciando em algumas partidas a posição da onça e em outra a posição do cachorro. Ao final da primeira aula, será oportunizado aos alunos um momento para comentarem o que acharam do jogo, quais as dificuldades encontradas e qual a diferença em jogar ocupando a posição da onça e dos cachorros.

A segunda, terceira e quarta aula seguirão uma mesma dinâmica de aplicação, em um primeiro momento os alunos receberão problemas impressos juntamente com o tabuleiro e as peças do Jogo da Onça. Eles terão um tempo para a leitura, interpretação, discussão e resolução dos problemas, sendo que a mesma poderá ser feita em duplas ou individualmente.

Durante todas as aulas o professor deverá observar e incentivar os alunos, orientando-os sempre que necessário e questionando-os sobre suas respostas e dúvidas. Ao final da aula o professor deverá discutir, comparar as respostas dos grupos e refletir sobre alguns resultados.

Os problemas utilizados na segunda aula estão relacionados às regras do jogo, tendo como objetivo analisá-las e perceber como se realizam os movimentos da onça e dos cachorros, identificar como acontecem as capturas, aprender diferentes estratégias de captura, imobilização da onça e defesa e qual a melhor maneira que quem representa o cachorro deve organizar as peças para evitar que a onça capture as mesmas e quais as melhores posições para imobilizar a onça.

O objetivo dos problemas utilizados na terceira aula é reconhecer a importância dos conhecimentos matemáticos na verificação, interpretação e resolução de problemas; compreender e aplicar conceitos de combinatória.

Os problemas utilizados na quarta aula estão relacionados à análise combinatória e lógica matemática, sendo que os mesmos podem ser caracterizados como desafios matemáticos. As questões apresentadas nesta aula têm como objetivo resolver problemas lógicos matemáticos elaborados com base no tabuleiro do Jogo da Onça, desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a criatividade.

Apresentamos na Tabela 1 os problemas utilizados em cada uma das aulas. A resolução dos mesmos consta no Seção 3.2.

Tabela 1 – Problemas utilizados na Situação Didática

Aula	Problema	Página	Tópicos
Aula 2	problema 1	página 52	problema relacionado às regras do jogo e probabilidade
Aula 2	problema 2	página 54	problema relacionado às regras do jogo e probabilidade
Aula 2	problema 3	página 55	problema relacionado às regras do jogo
Aula 3	problema 4	página 55	análise combinatória
Aula 3	problema 5	página 57	análise combinatória
Aula 4	problema 6	página 59	análise combinatória e lógica matemática
Aula 4	problema 7	página 59	análise combinatória e lógica matemática
Aula 4	problema 8	página 60	análise combinatória e lógica matemática

Fonte: Dados da Autora

Na quinta aula os alunos receberão uma folha contendo imagens do tabuleiro impresso juntamente com o tabuleiro e as peças do Jogo da Onça. Os alunos terão um tempo para elaborar e resolver problemas diferentes dos apresentados nas aulas anteriores, sendo que um problema deve estar relacionado às regras do jogo e o outro deve abranger conhecimentos de análise combinatória.

Os alunos deverão apresentar os problemas elaborados aos colegas, que terão um tempo para resolver e discutir a solução apresentada por quem elaborou o problema. Ao final da atividade os alunos terão um tempo para avaliar o jogo, os problemas apresentados pelo professor e o que aprenderam durante às aulas.

A avaliação das aulas, por parte do professor, ocorrerá através da observação do empenho e participação dos alunos nas atividades propostas e avanço nas estratégias utilizadas enquanto jogavam, no desenvolvimento das atividades e resolução dos problemas.

4 ANÁLISE GLOBAL DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

Nesta seção, apresentamos o relato de cada uma das aulas que compõem a Situação Didática que foi aplicada na Escola Estadual de Ensino Médio Waldemar Borges. E na análise de resultados temos os dados referentes ao que os alunos resolveram corretamente e o que eles erraram, observando o que pode ter interferido nas respostas dos alunos e indicamos alguns motivos que ocasionaram os erros e acertos nas atividades propostas em cada uma das aulas.

O grupo de alunos que participaram das aulas foi formado por alunos do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio e não foram identificados como sendo de uma turma ou de outra durante a realização das atividades. A atividade foi realizada às 17 horas, duas horas antes do horário em que os alunos costumam chegar na escola, ou seja, não foi no horário de aula, os discentes foram para a escola mais cedo para poder participar da atividade com o Jogo da Onça.

Os alunos receberam problemas impressos juntamente com a imagem impressa do tabuleiro para que pudessem usar como rascunho, o tabuleiro e as peças do Jogo da Onça. Eles tiveram um tempo para a leitura, interpretação, discussão e resolução dos problemas, atividade realizada em duplas ou individual.

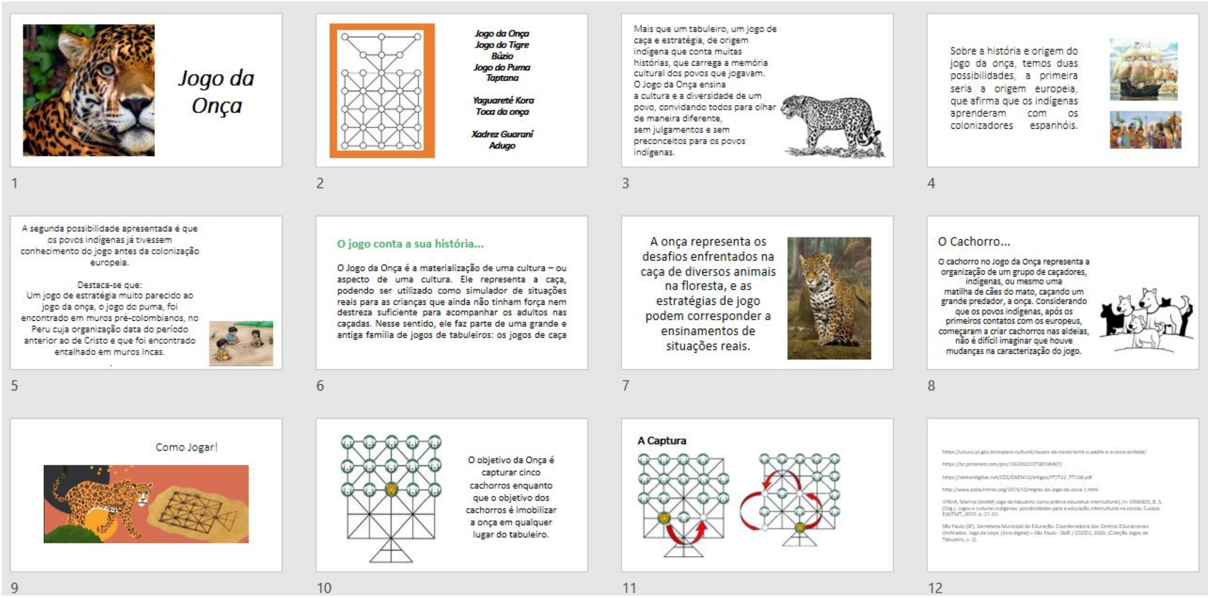
Em todas as aulas, durante a resolução das atividades os alunos permaneceram concentrados, mostraram-se interessados e comprometidos com a resolução dos problemas. Eles foram incentivados a resolver as questões e orientados sobre os processos de resolução sempre que solicitaram.

4.0.1 Relato da primeira aula

No primeiro dia compareceram 16 estudantes do ensino médio, eles foram recebidos no auditório da escola, e antes de iniciar a apresentação do jogo foram questionados se o conheciam, entre os presentes apenas um jovem afirmou conhecê-lo. Questionado de como ele conhecia, comentou que aprendeu a jogar com um tio quando era criança, mas que há muito tempo não jogava, e que não lembrava direito como se jogava.

Como ninguém mais conhecia o jogo, foi dado início a explanação com o uso de slides, conforme Figura 15, contendo: uma lista com todos os nomes que o Jogo da Onça pode receber de acordo com as diferentes regiões do Brasil; a história do jogo, destacando a existência de duas versões, a primeira afirmando que os indígenas aprenderam o Jogo da Onça com os colonizadores europeus e, a segunda, que os indígenas já conheciam o jogo muito antes da chegada dos colonizadores.

Figura 15 – Apresentação utilizada na primeira atividade



Fonte: Organizado pela autora

Durante a apresentação foi comentado que o Jogo da Onça é um jogo de caça pois o número de peças que representam a onça é diferente do número de peças que representam o cachorro. Destacamos também que o jogo podia ser usado pelos indígenas para ensinar aos mais jovens e para aqueles que ainda não saíam para caçar, estratégias de caça e, simulando situações reais.

Depois da apresentação do jogo foi explicado os objetivos e as regras do jogo, isto é, como a onça e os cachorros se movimentam e como acontecem as capturas, destacando que os cachorros vencem ao imobilizar a onça e que a onça vence ao capturar cinco cachorros. Logo em seguida foi realizada uma discussão coletiva das regras do jogo em foco a fim de verificar se os alunos tinham alguma dúvida.

Como na sala em que foi realizada a apresentação as classes não eram adequadas para colocar os tabuleiros, ao final da apresentação os alunos foram para uma outra sala que estava decorada com artesanatos de origem Guarani e os jogos já estavam organizados. Os alunos tiveram um tempo para conhecer os artesanatos e logo em seguida sentaram em duplas para jogar, sendo que os mesmos foram orientados a jogar algumas partidas na posição da onça e outras na posição do cachorro, conforme Figura 16.

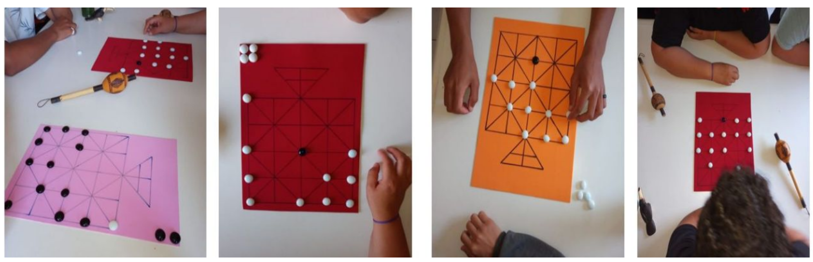
Enquanto jogavam, os alunos perguntaram se era permitido retroceder, se era possível capturar um cachorro quando está em um dos cantos e, se poderiam capturar duas peças quando estão juntas e como se faz para imobilizar a onça. Para essa última pergunta foi explicado que cada aluno deveria pensar em uma forma de imobilizá-la e que a melhor maneira de fazer isso era manter as peças que representam os cachorros juntas, evitando deixar muito espaço entre elas.

Figura 16 – Fotos da primeira atividade

Fonte: Acervo pessoal

Durante o jogo os alunos conversaram, pensaram, riram, alguns reclamaram ao perder pela terceira ou quarta vez, trocaram de dupla e desafiaram os colegas. Pediram ajuda para os colegas que estavam jogando ao lado para escolher a melhor jogada. Alguns alunos indicavam para o colega que estava jogando na dupla do lado que tinha um cachorro em uma posição que poderia ser capturado, assim evitavam a captura e interferiam na estratégia de jogo dos outros participantes, Figura 17.

Figura 17 – Fotos dos jogos dos estudantes durante a primeira atividade



Fonte: Acervo pessoal

Ao final da atividade os alunos foram questionados sobre o que acharam do jogo. Estes comentaram que é um jogo que precisa de muita atenção e concentração, pois basta um descuido para que uma peça que representa o cachorro seja capturada. Uma das alunas comentou que o jogo era uma terapia pois, enquanto ela jogava, tinha esquecido dos problemas pessoais.

Ao serem questionados sobre qual é a diferença em jogar ocupando a posição da onça e dos cachorros, os alunos relataram que a onça está em vantagem e que é muito difícil imobilizá-la, sendo mais fácil jogar com a onça que facilmente consegue capturar um cachorro. Destacaram que mesmo sendo em maior número os cachorros estão em desvantagem. Um dos alunos considerou que jogar com a onça é entediante pois precisam ficar cuidando dos cachorros e esperando uma oportunidade para capturar um cachorro enquanto que ao jogar com o cachorro é mais emocionante pois tem que pensar mais para encontrar uma maneira de prender a onça.

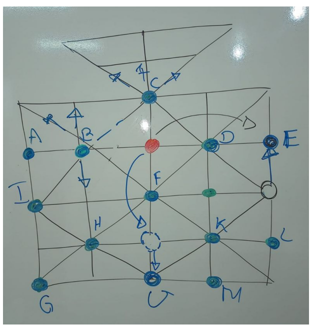
A partir da observação dos alunos enquanto jogavam e interagiam com os colegas, constatamos que eles tiveram dificuldade em organizar os cachorros e criar estratégias de forma que estes ficassem juntos, tanto que por várias vezes alguns alunos ao jogarem com a onça realizaram captura múltipla e em muitas situações a onça ficava em uma posição na qual podia escolher qual cachorro que iria capturar.

Ao final da atividade apenas um dos estudantes conseguiu encurralar a onça, o que mostra que os estudantes ainda não tiveram tempo suficiente para aprender a criar estratégias que evitassem a captura das peças e que fosse capaz de imobilizar a onça.

4.0.2 Relato da segunda aula

O segundo dia de atividades iniciou com a observação da representação de um jogo em andamento desenhado no quadro, conforme Figura 18, no qual foi identificado quais peças poderiam se mover, quantos movimentos cada uma das peças poderia executar analisando cada movimento, classificando-os como favoráveis para a onça ou para o cachorro.

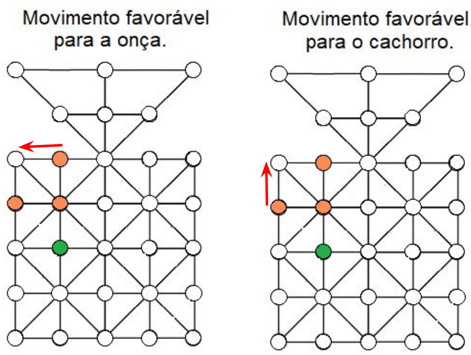
Figura 18 – Foto da representação de um jogo em andamento desenhado no quadro



Fonte: Acervo pessoal

Uma aluna comentou que um movimento favorável para cachorro seria ir para um dos cantos, pois no canto este estaria seguro visto que não poderia ser capturado. Foi explicado que isso depende da situação do jogo e que deslocar um cachorro para o canto pode ser favorável ou não para o cachorro, conforme ilustra a Figura 19.

Figura 19 – Exemplo de movimento favorável para a onça e para o cachorro



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Na segunda aula foram utilizados três problemas relacionados às regras do jogo, dois que analisavam o número de movimento das peças e quais movimentos eram favoráveis para a onça ou para o cachorro, e um terceiro problema que tinha por objetivo analisar dois jogos identificando quais estratégias foram utilizadas.

Enquanto resolviam os problemas, os discentes conversaram e trocaram ideias sobre as possibilidades e números de movimento, analisando quais seriam favoráveis para o cachorro ou para a onça e compararam as respostas. Durante todo o tempo todos os alunos mostraram-se atentos, interessados e comprometidos com a resolução dos problemas propostos, conforme ilustra Figura 20.

Figura 20 – Fotos da segunda aula

Fonte: Acervo pessoal

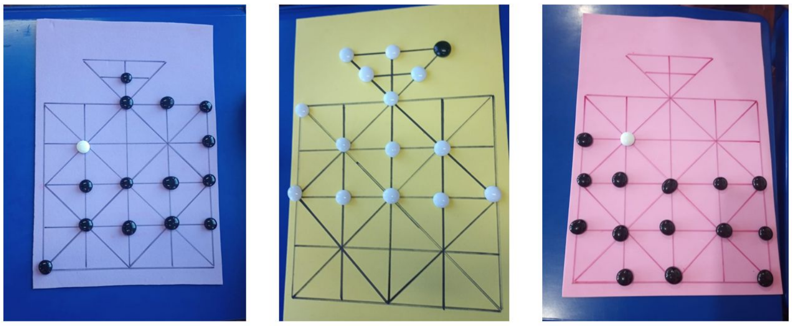
Foi possível observar que os alunos, mesmo resolvendo os problemas que envolvem raciocínio lógico matemático, não associaram as questões à Matemática. Uma aluna chegou a comentar que estava feliz por não serem problemas de matemática, visto que de matemática ela não gostava.

A dúvida mais comum era referente a contagem do número de movimentos favoráveis para a onça, pois alguns alunos contavam quantos cachorros podiam ser capturados e não quantos movimentos de determinada peça resultava em captura, dúvida esta que gerou muita discussão entre os alunos, que explicavam seu ponto de vista e defendiam as suas ideias e respostas.

4.0.3 Relato da terceira aula

Em um primeiro momento os alunos tiveram alguns minutos para jogar. Enquanto jogavam, foi observado uma mudança nas estratégias utilizada pelos estudantes que tentaram manter as peças que representam os cachorros juntas, deixando menos espaço para a onça se deslocar e evitando capturas, conforme ilustra a Figura 21.

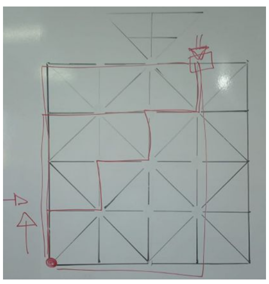
Figura 21 – Fotos dos tabuleiros com o Jogo da Onça em andamento na 3^a Aula



Fonte: Acervo pessoal

Para explicar aos alunos como se conta o número de movimentos de um ponto a outro no tabuleiro, foi feito um desenho no quadro, como representado na Figura 22. Os estudantes comentaram sobre quais caminhos a onça poderia seguir para chegar na posição indicada, tais como andar em escadinha (para cima, para direita, para cima, para a direita...), andar para cima e dobrar ao final da linha; subir três posições e logo em seguida dobrar para a direita, andar três e subir novamente.

Figura 22 – Foto da representação do tabuleiro desenhado no quadro

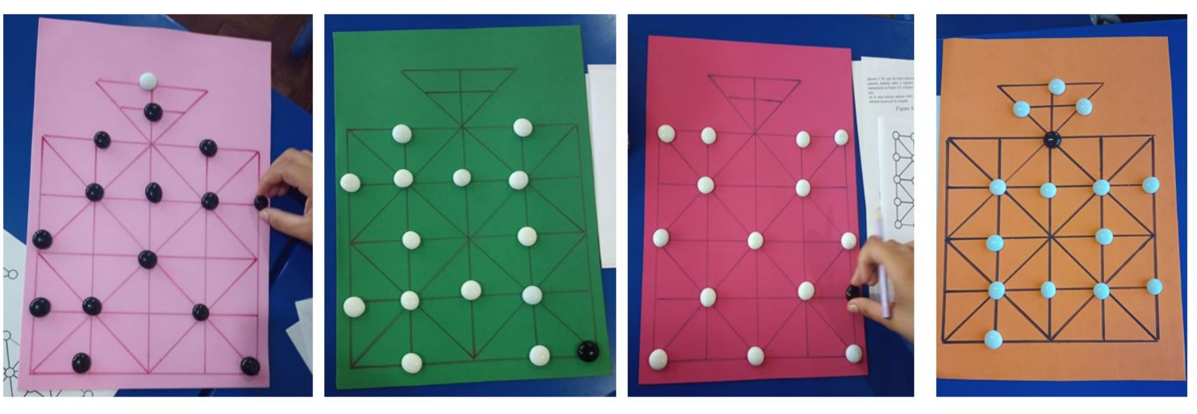


Fonte: Acervo pessoal

Nesta aula foram aplicados dois problemas relacionados com as regras do jogo e que envolvem lógica matemática e análise combinatória. O primeiro analisava de quantas maneiras a onça pode se descolar de um ponto a outro no tabuleiro e, o segundo desafia os alunos a colocar todas as peças que representam os cachorros e logo em seguida colocar a onça de forma que esta capture todos os cachorros.

Enquanto resolviam os problemas, os discentes conversaram e trocaram ideias com os colegas sobre o número de trajetórias e quais os caminhos a onça poderia seguir. Mas, na maior parte do tempo da aula, os alunos se dedicaram a resolver o problema da captura. Eles usaram o tabuleiro e as peças do jogo para organizar os 14 cachorros e tentar capturar todos em uma única jogada. Algumas das tentativas estão representadas na Figura 23.

Figura 23 – Foto de como alguns estudantes colocaram as peças no tabuleiro



Fonte: Acervo pessoal

Durante a aula todos os alunos mostraram-se atentos, interessados e comprometidos com a resolução dos problemas propostos, tanto que fizeram menos questionamentos sobre como resolver as questões. A maior dificuldade dos alunos foi lembrar a ordem do que havia sido pensado para resolver o problema da captura múltipla, pois realizavam a sequência de capturas usando as peças, mas quando precisaram registrar o que haviam feito não lembravam mais como era ou não conseguiam capturar todas as peças.

4.0.4 Relato da quarta aula

No quarto dia de atividade alguns alunos chegaram mais cedo do que nos dias anteriores para terem tempo de ficar jogando antes de resolverem os problemas propostos, conforme ilustra a Figura 24. Os estudantes que jogam com os cachorros usam estratégias nas quais as peças ficam organizadas de maneira que não fiquem espalhadas pelo tabuleiro, dificultando sua captura. Alguns alunos comentaram como é importante permanecer atento durante o jogo e assim evitar dar chance para a onça capturar os cachorros.

Figura 24 – Foto dos alunos jogando o Jogo da Onça durante a quarta aula

Fonte: Acervo pessoal

Na quarta aula trabalhamos com três questões sem ligação com as regras do jogo, mas que podem ser caracterizadas como desafios. Os problemas selecionados têm como objetivos desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a criatividade.

Mesmo em dupla os alunos resolveram os problemas individualmente, sendo que raramente trocaram ideias, conforme ilustra a Figura 25. Os alunos não tiveram dificuldades para resolver as questões, fizeram poucas perguntas, visto que não surgiram muitas dúvidas, porém ao concluir a atividade todos solicitaram a correção da mesma.

Figura 25 – Foto dos alunos resolvendo atividade durante a quarta aula

Fonte: Acervo pessoal

4.0.5 Relato da quinta aula

Para a última aula, os alunos foram recepcionados com a sala arrumada e os jogos organizados nas mesas. Em duplas tiveram um tempo disponível para jogar. A seguir, foi solicitado aos alunos que escrevessem um problema diferente dos apresentados nas aulas anteriores, sendo que o mesmo deveria estar relacionado às regras do jogo ou abranger conhecimentos de análise combinatória.

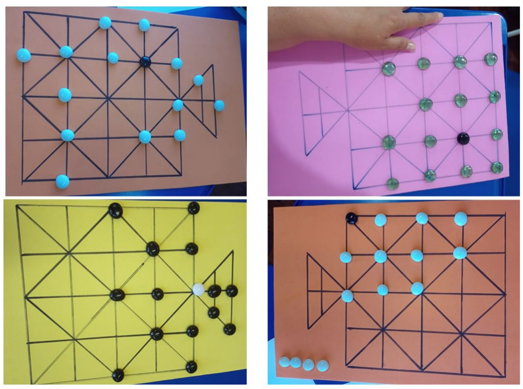
Além dos alunos que participaram de todos os encontros, compareceram alguns alunos novos que não conheciam o jogo. Para estes, foi apresentado o jogo e ensinado as suas regras. Assim, enquanto um grupo de alunos jogava, outro grupo de alunos elaborava as questões, Figura 26.

Figura 26 – Foto dos alunos jogando e elaborando questões durante a quinta aula

Fonte: Acervo pessoal

Durante o processo de elaboração e resolução dos problemas, os alunos foram orientados, incentivados e questionados sobre suas resoluções e dúvidas. A Figura 27, apresenta os tabuleiros onde os alunos organizaram as peças aleatoriamente enquanto elaboravam as questões. Destacamos que alguns alunos tiveram dificuldade na elaboração e foram auxiliados pelos colegas, que deram ideias de como posicionar as peças no tabuleiro. Portanto, alguns problemas foram resultados de um pensamento coletivo.

Figura 27 – Foto dos tabuleiros onde os alunos organizaram as peças aleatoriamente enquanto elaboravam as questões durante a quinta aula



Fonte: Acervo pessoal

Ao final da atividade, os alunos tiveram um tempo para realizar a avaliação do jogo e dos problemas que foram resolvidos nas aulas anteriores. Na avaliação os alunos responderam os seguintes questionamentos: Qual a opinião sobre o jogo? Qual a opinião sobre os problemas resolvidos durante as atividades? Qual o problema mais difícil? Qual o problema mais gostou de resolver?

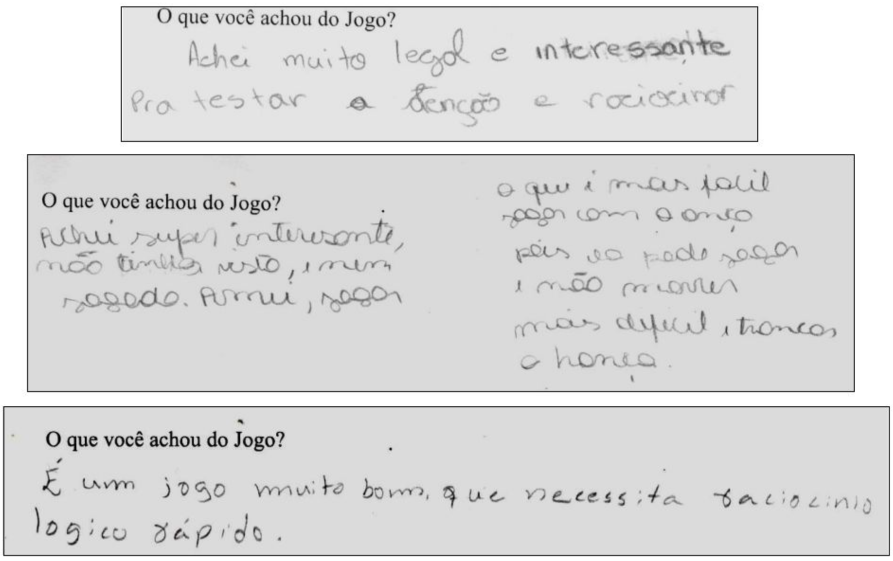
Inicialmente a avaliação seria feita apenas oralmente, mas como tínhamos alunos de diferentes turmas, para evitar constrangimentos, e levando em consideração que nem todos os alunos queriam falar, a avaliação não foi realizada somente de maneira oral, e os alunos puderam optar em se manifestar para o grande grupo ou apenas escrever sua avaliação.

Quando questionados sobre o que pensavam sobre o jogo, os alunos responderam que é muito bom e legal pois ajuda a pensar, divertido, desafiador, interessante sendo ótimo para testar atenção e raciocinar, visto que o jogo precisa de muita concentração.

Alguns estudantes consideram o Jogo da Onça difícil pois precisa fazer diferentes estratégias; uma aluna destacou que o jogo era horrível pois ela não tinha conseguido vencer nenhuma vez, enquanto que outro estudante considerou o jogo como sendo complicado, pois, a onça tem vantagem.

Um dos alunos escreveu que: “O jogo é muito difícil, principalmente quando se joga com os cachorros, porém é bem divertido, pois se usa bastante o cérebro.” A Figura 28 ilustra a resposta de três alunos sobre o Jogo da Onça.

Figura 28 – Avaliação dos alunos quanto ao Jogo da Onça.


O que você achou do Jogo?
Achei muito legal e interessante Pra testar a tenção e raciocinar

O que você achou do Jogo?
Achei super interessante, não tinha visto, nem jogado. Amei, jogar
o que é mais facil jogar com a onça pois só pode jogar e não morrer mais dificil, troncar a honça.

O que você achou do Jogo?
É um jogo muito bom, que necessita raciocinio logico rápido.

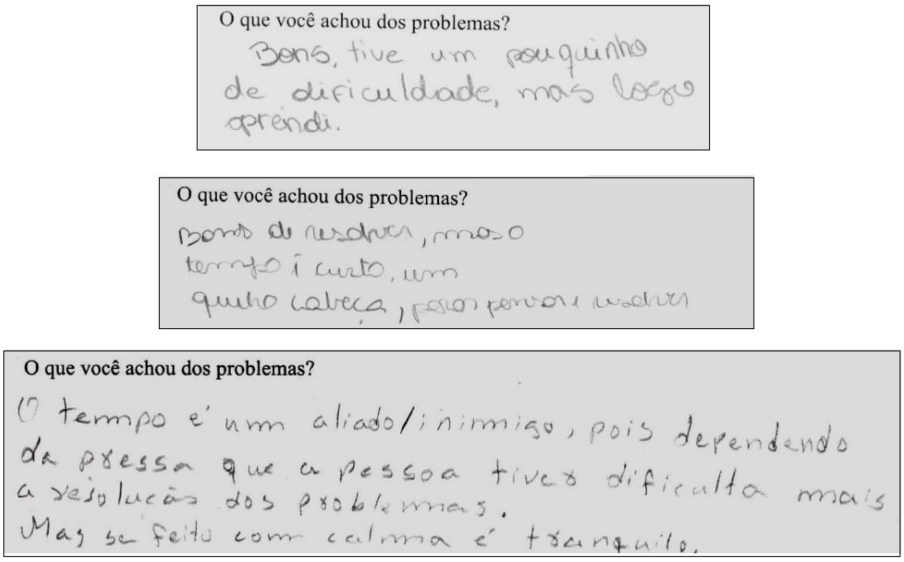
Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Praticamente em sua totalidade os alunos afirmaram que o difícil no jogo é imobilizar a onça. Um dos alunos escreveu que: “O mais difícil é jogar com o cachorro, pois é difícil jogar e vencer com eles."

No que se refere ao que é mais fácil no jogo, os alunos consideram que é capturar cachorros e jogar com a onça, pois é mais rápido e fácil de elaborar uma estratégia.

Quanto a opinião dos alunos sobre os problemas resolvidos durante as atividades, muitos os consideraram complicados e desafiadores. A Figura 29 ilustra a resposta de três alunos sobre os problemas resolvidos durante as aulas.

Figura 29 – Avaliação dos alunos quanto aos problemas resolvidos.



O que você achou dos problemas?
Bons, tive um pouquinho de dificuldade, mas logo aprendi.

O que você achou dos problemas?
Bom de resolver, mas o tempo é curto, um quebra cabeça, para pensar e resolver

O que você achou dos problemas?
O tempo é um aliado/inimigo, pois dependendo da pressa que a pessoa tiver dificulta mais a resolução dos problemas. Mas se feito com calma é tranquilo.

Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Alguns alunos destacaram que os problemas devem ser resolvidos com calma e tranquilidade, pois dependendo da pressa que a pessoa tem dificulta a sua resolução. Um dos alunos considerou que: "Os problemas são fáceis desde que se tenha entendido o jogo."

No que refere-se ao problema mais difícil, quatro foram os mais citados:

1. Problema 8, página 60, aplicado na 4^a aula;

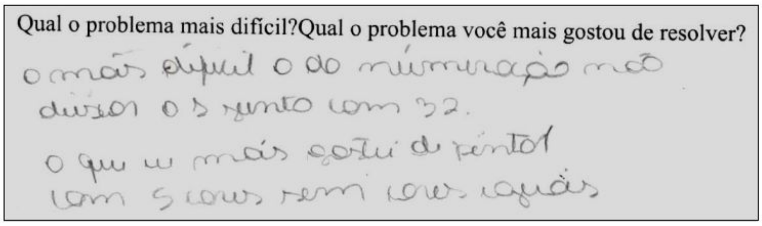
2. Problema 5 , página 57 , aplicado na 3^a aula;

3. Problema 7, página 59, aplicado na 4^a aula;

4. Problema 2, página 54, aplicado na 2^a aula;

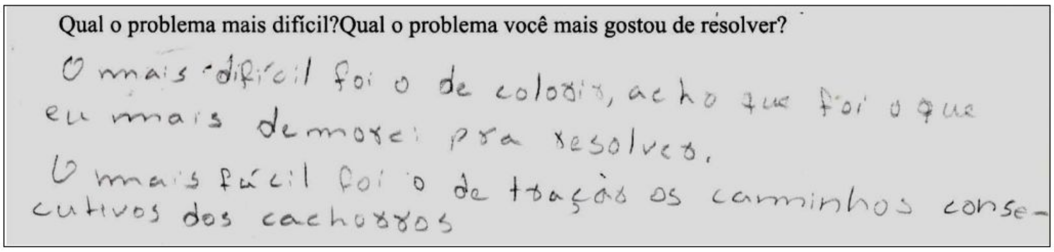
A Figura 30, apresenta a resposta de dois alunos sobre o problema que eles consideraram o mais difícil e o que mais gostaram de resolver.

Figura 30 – Avaliação de dois alunos quanto aos problemas mais difícil e o que mais gostou de resolver.


Qual o problema mais difícil?Qual o problema você mais gostou de resolver?

o mais difícil o do numeração não divisor o s junto com 32.

o que eu mais gostei de pintar com 5 cores sem cores iguais


Qual o problema mais difícil?Qual o problema você mais gostou de resolver?

O mais difícil foi o de colorir, acho que foi o que eu mais demorei pra resolver.

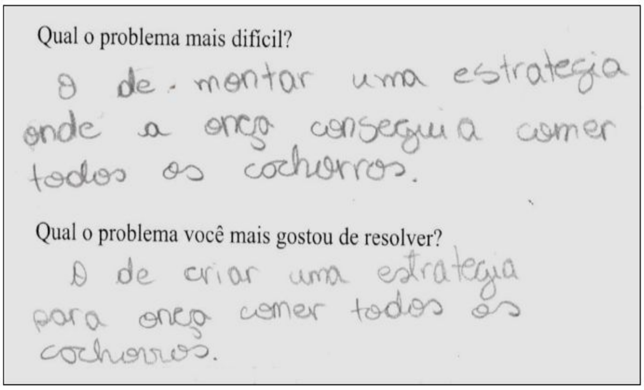
O mais fácil foi o de traçar os caminhos consecutivos dos cachorros

Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Questionados sobre os problemas que mais gostaram de resolver, três foram citados:

1. Problema 5, página 57, aplicado na 3^a aula;
2. Problema 8, página 60, aplicado na 4^a aula;
3. Problema 2, página 54, aplicado na 2^a aula;

Figura 31 – Avaliação de um aluno quanto aos problemas mais difíceis e o que mais gostou de resolver.


Qual o problema mais difícil?

O de montar uma estratégia onde a onça conseguia comer todos os cachorros.

Qual o problema você mais gostou de resolver?

O de criar uma estratégia para onça comer todos os cachorros.

Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Destacamos que um dos alunos considerou que o problema 5 que consitia em criar uma estratégia para onça capturar todos os cachorros em uma única jogada, resolvido na 3^a aula, foi o mais difícil de todos, porém o mesmo aluno afirma que mesmo difícil foi o que ele mais gostou de resolver, conforme representado na Figura 31. Salientamos que um segundo aluno classificou o problema 8, resolvido na 4^a aula, como irritante.

4.0.6 Relato do Campeonato - sexta aula

Mesmo não fazendo parte do planejamento, foi sugerido pelos alunos a realização de um campeonato de Jogo da Onça, portanto foi realizado uma 6^a aula na qual foi organizada a competição que contou com a participação de 14 estudantes, Figura 32. A competição teve premiação para os três primeiros lugares e foi dividida em duas fases: eliminatória e classificatória.

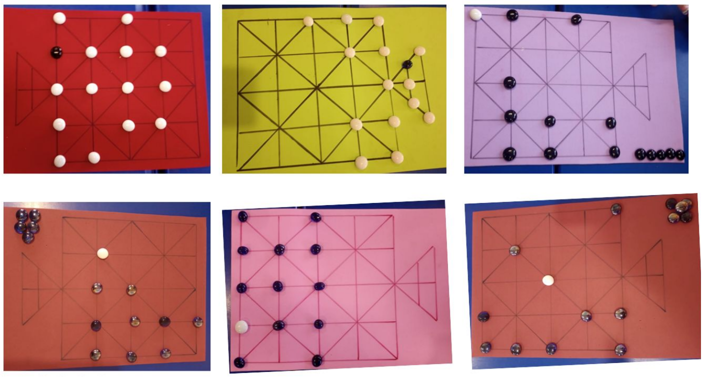
Figura 32 – Fotos dos alunos durante a 6^a aula

Fonte: Acervo pessoal

Na fase eliminatória todos os alunos jogaram três partidas independente do resultado, sendo que as duplas foram formadas através de sorteio de forma que ninguém jogasse mais de uma partida com um mesmo colega. A cada nome sorteado se dava início a torcida dos alunos que aguardavam ser chamados, alguns queriam a oportunidade de jogar com aquele aluno que acabara de ser selecionado, enquanto outros torciam para não serem escolhidos e ficavam na expectativa de poder jogar com outro colega com o qual acreditavam ter mais chances de ganhar.

Em seguida, os integrantes de cada dupla jogavam o dado e quem tirasse o número maior tinha o direito de escolher se queria representar a onça ou o cachorro. Observamos que os alunos que tiravam o número maior no dado optaram, na maioria das vezes, por jogar como onça, poucos alunos escolheram jogar com os cachorros. A Figura 33, apresenta fotos dos tabuleiros de alguns jogos depois que concluídos.

Figura 33 – Fotos do tabuleiro do Jogo da Onça com jogos já finalizados

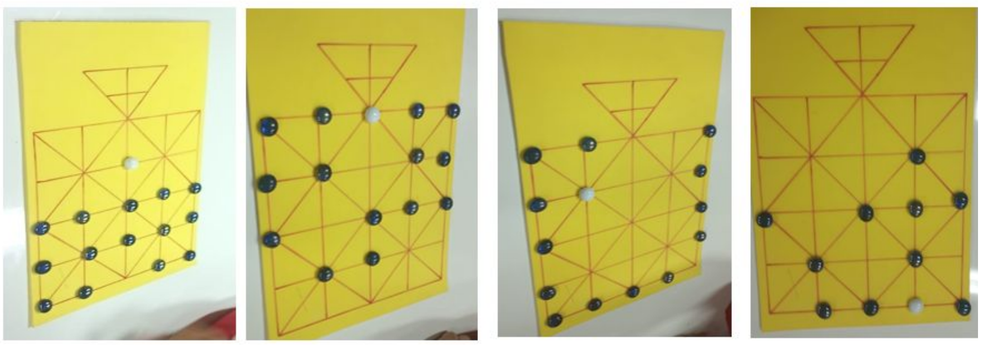


Fonte: Acervo pessoal

Dos 14 alunos que participaram da atividade, 2, 6, 3 e 3 alunos venceram 0, 1, 2 e 3 partidas respectivamente, portanto os três alunos que venceram as três partidas, foram classificados para a próxima fase, onde cada um dos alunos jogou com os outros dois classificados. O aluno que perdeu dois jogos na fase classificatória ficou em terceiro lugar e os outros dois alunos, com uma vitória cada um disputaram o primeiro lugar.

O jogo que decidiu que ganharia o primeiro lugar durou 35 minutos. O aluno que tirou o maior número no dado escolheu representar a onça. Ao longo do jogo, quem representava os cachorros movimentou as peças de forma que uma protegesse a outra, até a realização da primeira captura. Após perder o primeiro cachorro, quem jogava com estes teve que reorganizar o jogo e mudar de estratégia, e isso foi feito por mais duas vezes, conforme ilustra a Figura 34.

Figura 34 – Fotos do tabuleiro do Jogo da Onça em diferentes etapas de uma mesma partida



Fonte: Acervo pessoal

Com três cães a menos, o aluno que representava os cachorros conseguiu reorganizar as peças e criou uma estratégia que imobilizou a onça após a captura da quarta peça. Ao final do jogo, foi entregue a premiação, sendo que quem jogava com a onça ficou em segundo lugar e quem jogava com os cachorros em primeiro, Figura 35.

Figura 35 – Fotos dos alunos que venceram o Campeonato do Jogo da Onça

Fonte: Acervo pessoal

4.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção apresentamos uma análise das respostas dadas pelos alunos na resolução de cada um dos problemas que foram propostos durante as aulas. Além disso, incluímos alguns problemas elaborados e resolvidos pelos alunos durante a 5^a aula.

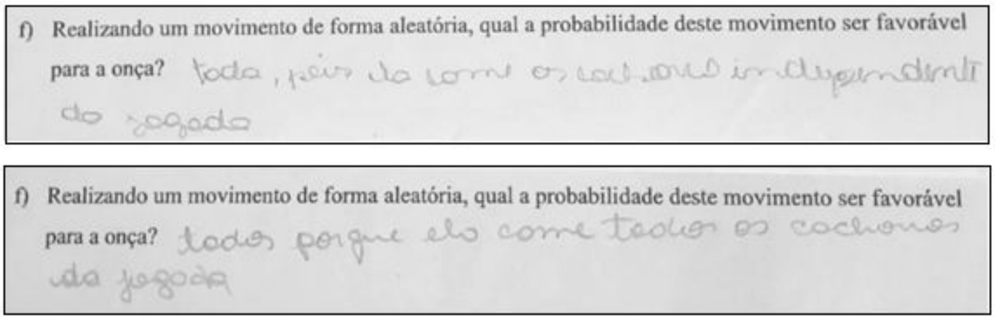
A questão 1, página 52, foi a primeira a ser resolvida. No primeiro item os alunos foram questionados sobre quantas peças que representam o cachorro poderiam se movimentar, e todos os alunos conseguiram identificar que dos 14 cachorros em jogo, 7 poderiam se movimentar. No item b, os alunos deveriam identificar quantos movimentos cada cachorro poderia executar, entre todos alunos que resolveram a atividade, um errou o problema e outros três deram uma resposta incompleta, isto é, não indicaram o número de movimento que todos os cachorros poderiam fazer.

No terceiro item todos os alunos conseguiram determinar o número total de movimentos possíveis, sendo a resposta do item c o somatório do número de movimentos que cada cachorro pode fazer e que formam indicados no item anterior. Observamos que os alunos que não responderam o item anterior corretamente conseguiram determinar o número total de movimentos que os cachorros podem realizar.

No quarto e quinto item os alunos deveriam determinar o número de movimentos favoráveis para o cachorro e para a onça respectivamente, dado que foi considerado favorável para a onça os movimentos que possibilitam a captura de uma peça. Dois erraram o quarto item e três o quinto item, o que mostra que alguns tiveram dificuldades de analisar os futuros movimentos da onça e prever o que pode acontecer quando se realiza determinado movimento.

A Figura 36, ilustra a resposta de dois alunos no item f, problema 1, estes responderam de maneira equivocada, a resposta dada pelos alunos indica que os mesmos não sabem o que é probabilidade ou então que não entenderam a pergunta ou até mesmo não entenderam as regras do jogo. Os alunos que não resolveram de maneira correta o item f, também não responderam corretamente os itens anteriores e as respostas dadas no item g foram confusas, visto que não conseguiram argumentar e descrever com clareza as suas respostas.

Figura 36 – Duas respostas dadas pelos alunos para o problema 1 - f, referente à probabilidade do movimento ser favorável para a onça.

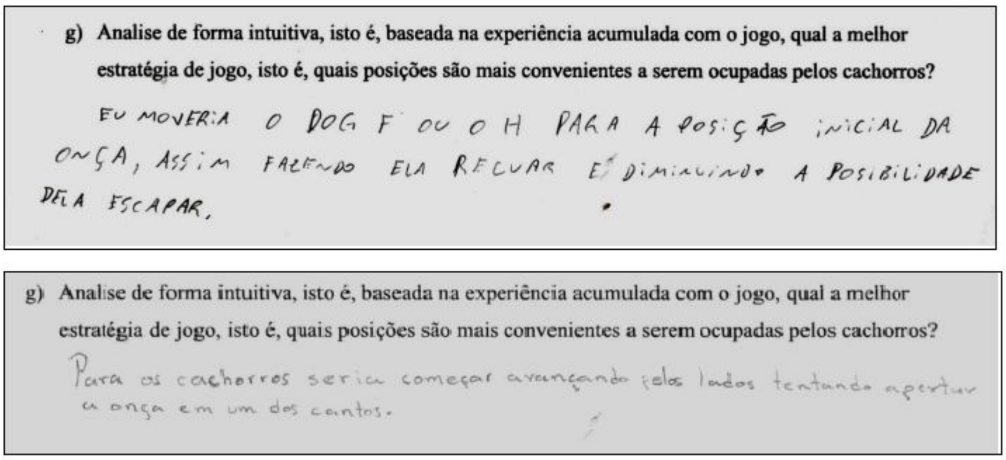

f) Realizando um movimento de forma aleatória, qual a probabilidade deste movimento ser favorável para a onça? toda, pois ela come os cachorros independente da jogada

f) Realizando um movimento de forma aleatória, qual a probabilidade deste movimento ser favorável para a onça? todos porque ela come todos os cachorros da jogada

Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Quanto ao último item do problema 1, no qual os alunos deveriam indicar as posições mais convenientes para serem ocupadas pelos cachorros, treze dos quinze alunos conseguiram argumentar e explicar quais posições estes deveriam ocupar. Os alunos indicaram que os cachorros deveriam ocupar as posições nas quais estes não podem ser capturados, como a posição central e as laterais, conforme ilustrado na Figura 37.

Figura 37 – Duas respostas dadas pelos alunos para o problema 1 - g, referente à melhor estratégia de jogo.


g) Analise de forma intuitiva, isto é, baseada na experiência acumulada com o jogo, qual a melhor estratégia de jogo, isto é, quais posições são mais convenientes a serem ocupadas pelos cachorros?

EU MOVERIA O DOG F OU O H PARA A POSIÇÃO INICIAL DA ONÇA, ASSIM FAZENDO ELA RECUAR E DIMINUINDO A POSIBILIDADE DELA ESCAPAR.

g) Analise de forma intuitiva, isto é, baseada na experiência acumulada com o jogo, qual a melhor estratégia de jogo, isto é, quais posições são mais convenientes a serem ocupadas pelos cachorros?

Para os cachorros seria começar avançando pelos lados tentando apertar a onça em um dos cantos.

Fonte: Extrato da resposta dos alunos

A segunda questão resolvida, isto é, o problema 2 na página 54, contém quatro itens e exibe o tabuleiro do Jogo da Onça com 11 peças que representam o cachorro sendo que, quem representa o cachorro deve executar o próximo movimento. Treze alunos responderam corretamente o primeiro item, identificando que oito dos onze cachorros podem se movimentar, porém um respondeu que seriam nove ao invés de oito, mas no tabuleiro que o mesmo entregou juntamente com as respostas percebemos que ele marcou os movimentos de oito cachorros, sendo assim existe a possibilidade de um erro na contagem e não na interpretação do problema.

No item b os alunos deveriam identificar o número total de movimentos, quatro e onze alunos responderam que eram possíveis 22 e 25 movimentos respectivamente, sendo assim, onze responderam de maneira correta este item. Para determinar o número de movimentos alguns alunos marcaram no tabuleiro os cachorros com as primeiras letras do alfabeto e indicaram quantos movimentos cada um poderia realizar.

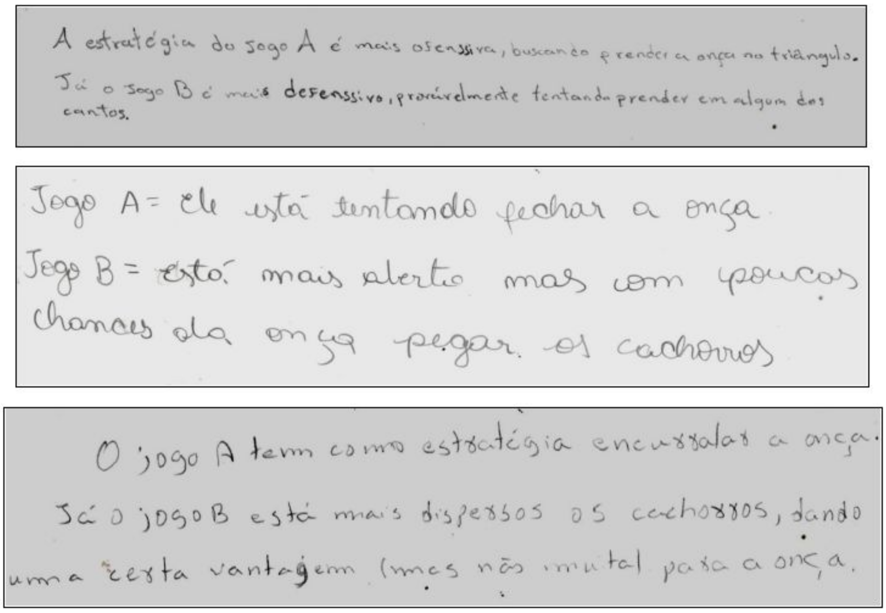
No item c os alunos deveriam responder duas perguntas, quantas jogadas seriam favoráveis para a onça e quantas seriam favoráveis para o cachorro, sendo que quatro alunos responderam corretamente indicando que 19 e 6 são movimentos favoráveis para os cachorros e para a onça respectivamente. Três alunos responderam que 18 movimentos seriam favoráveis para o cachorro e 7 seriam favoráveis para a onça, enquanto que outros alunos identificaram 23 movimentos para o cachorro.

Alguns alunos responderam que a onça teria quatro movimentos favoráveis, enquanto que outros indicaram que os cachorros teriam um ou quatro movimentos favoráveis. Ao analisar as respostas percebemos que os alunos tiveram dificuldades em identificar qual a consequência do movimento, isto é, não conseguem prever o que acontece se o cachorro vai para determinado lugar. Foi observado que enquanto os alunos resolviam os problemas, eles analisavam um movimento por cachorro, mesmo aqueles que poderiam ir para mais de uma posição.

Quatro alunos acertaram o item d que era sobre a probabilidade de uma jogada ser favorável para o cachorro, sendo que foram os mesmos que responderam corretamente o item anterior. Onze alunos erraram o último item do problema 2, pois erraram o item anterior, sendo que o erro está relacionado ao número de movimentos favoráveis ao cachorro.

Na terceira atividade, isto é, problema 3 na página 55, que consistia em determinar a diferença entre as duas estratégias, um dos alunos não respondeu de forma clara qual a diferença entre as duas estratégias enquanto que os demais alunos conseguiram argumentar de forma coerente sobre qual a diferença de estratégia dos jogos representado em cada um dos tabuleiros, conforme ilustrado na Figura 38. Através das respostas observamos que os alunos já perceberam a importância de manter as peças que representam o cachorro juntas, sem deixar muito espaço, pois isso impede que a onça realize a captura e aumenta as possibilidades de encurralar a onça.

Figura 38 – Três respostas dadas pelos alunos para o problema 3, referente à diferença de duas estratégias de jogo.


A estratégia do jogo A é mais ofenssiva, buscando prender a onça no triângulo. Já o jogo B é mais defenssivo, provávelmente tentando prender em algum dos cantos.

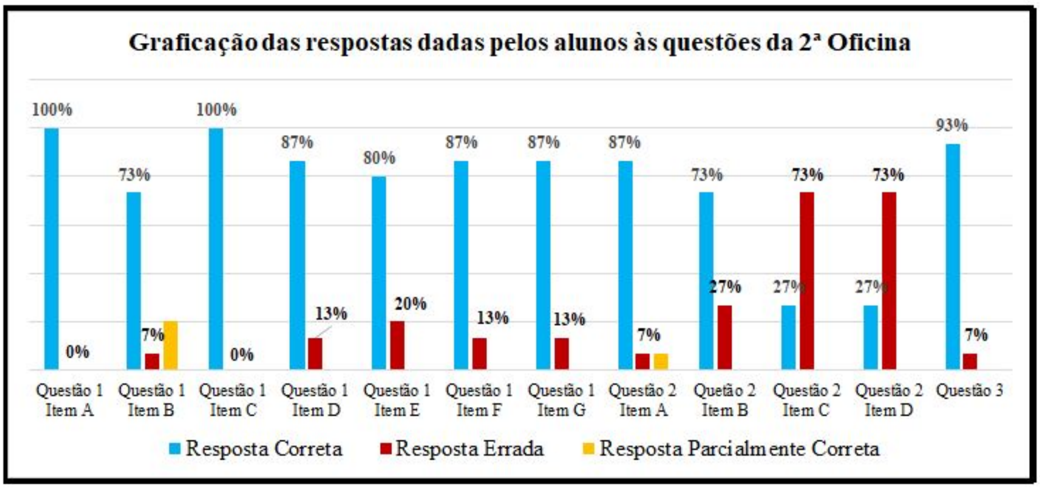
Jogo A = ele está tentando fechar a onça.
Jogo B = está mais alerto mas com poucos chances da onça pegar os cachorros

O jogo A tem como estratégia encurralar a onça.
Já o jogo B está mais dispersos os cachorros, dando uma certa vantagem (mas não muita) para a onça.

Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Analisando os dados apresentados na Figura 39, observamos que 100% dos alunos resolveram com sucesso os itens a e c do problema 1, página 52, e mais de 70% resolveram com sucesso os demais itens da mesma questão. No problema 2, página 54, 87% acertou o item a e 73% não resolveram corretamente os itens c e d dessa questão e 93% resolveram corretamente o problema 3.

Figura 39 – Graficação das respostas dos alunos na 2^a aula



Fonte: Gráfico elaborado pela autora no Excel.

Ao analisar as respostas dadas pelos alunos nos exercícios aplicados durante a 2^a aula percebemos que alguns tiveram dificuldade em interpretar os problemas e expressar as suas ideias e respostas. Constamos que os alunos compreenderam as regras do jogo, entenderam como a onça e o cachorro se movimentam e como acontecem as capturas, visto que conseguiram aplicar esses conhecimentos na resolução dos problemas.

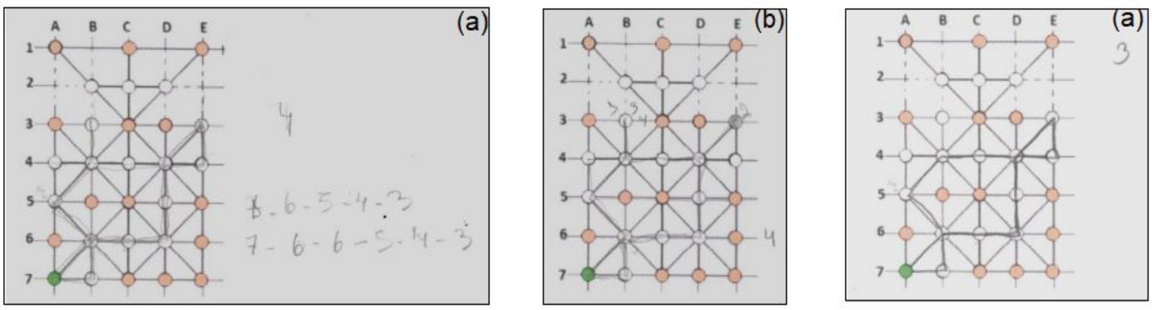
Ao resolver os problemas os alunos aprenderam a analisar o jogo identificando diferentes estratégias de captura, imobilização da onça e, a melhor maneira de organizar as peças que representam o cachorro para evitar que a onça capture as mesmas, além de identificar quais as melhores posições para imobilizar a onça. Salientamos que durante a 2^a aula os alunos tiveram a oportunidade de experienciar, criar e aplicar estratégias de resolução de problemas, o que favoreceu a construção do raciocínio matemático.

Na 3^a aula foram resolvidos dois problemas: o primeiro tinha dois itens e consistia em determinar quantas maneiras distintas a onça pode se deslocar de um ponto a outro, uma vez sem alterar a posição dos cachorros e no outro item a onça poderia capturar os cachorros quando possível. No segundo problema os alunos deveriam organizar as peças no tabuleiro de forma a onça conseguisse capturar todas as peças em uma única jogada.

No item a do problema 4, página 55 a resposta correta é 12, porém nove alunos não responderam corretamente a questão. Dos alunos que responderam, destacamos que 1, 1, 1 e 6 alunos responderam, respectivamente, que existe 4, 3, 6 e 1 maneiras distintas da onça se deslocar da posição 7A até a posição 3E sem capturar e sem alterar a posição das peças que estão no tabuleiro e sem passar duas vezes no mesmo lugar.

No item b, a resposta correta é 32, no entanto dos 9 alunos que responderam a questão destacamos que 1, 1, 1 e 6 alunos responderam, respectivamente, que existem 4, 1, 10 e 2 maneiras distintas da onça se deslocar da posição 7A até a posição 3E, sabendo que a mesma pode capturar os cachorros quando possível.

Figura 40 – Respostas dadas pelos alunos para a questão 4, item a e item b.

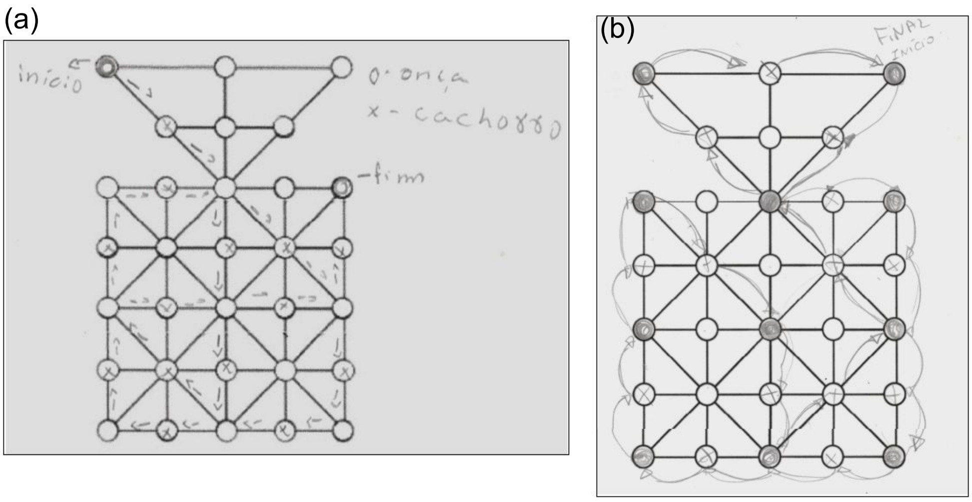


Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Na Figura 40, podemos observar de que forma os alunos identificaram os caminhos, logo verificamos que a dificuldade dos alunos foi em contar todos os percursos possíveis, e no item b os alunos não consideram os percursos nos quais eram possível realizar as capturas. Ressaltamos que os alunos não receberam nenhuma orientação de como deveriam realizar a contagem, até mesmo para que eles pudessem usar da criatividade e da intuição matemática para resolver o problema em questão.

Dos nove alunos que participaram da terceira aula, no que se refere ao problema 5, página 57, todos conseguiram resolver o item a em que a onça deveria terminar a captura em uma posição diferente de onde começou, enquanto que apenas seis alunos conseguiram resolver o item b na qual a onça deveria começar e terminar a captura na mesma posição. Na Figura 41, podemos observar a resposta de dois alunos, na qual a resposta está correta, sendo esta a representação do que foi elaborado com material concreto, tabuleiro e peças do jogo, pois os alunos organizaram e reorganizaram várias vezes as peças que representam o cachorro, posicionaram a onça e testaram diferentes percursos até encontrarem uma maneira dela capturar todos em uma única jogada.

Figura 41 – Respostas dadas pelos alunos para o problema 5, referente à captura múltipla.



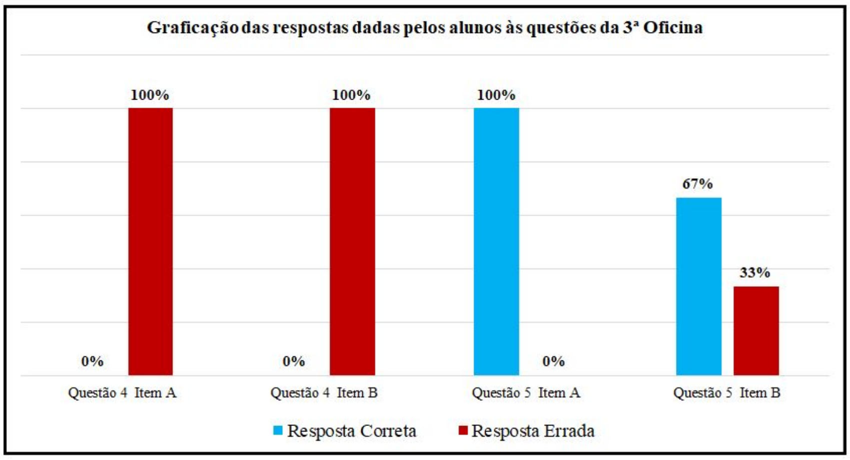
Fonte: Extrato da resposta dos alunos

A Figura 42, apresenta os dados referentes às respostas dos alunos na 3^a aula, onde se observa que 100% dos alunos não resolveram de forma satisfatória o problema 4, enquanto que 100% resolveram corretamente o item a do problema 5 e 67% resolveram o item b da mesma questão.

No problema em que se devia contar os números de caminhos entre duas posições os alunos não conseguiram identificar todos os caminhos, podemos definir algumas hipóteses para justificar o porquê de nenhum aluno resolver o problema corretamente. Podemos supor que os alunos não compreendem conceitos de combinatória, ou que não entenderam, por ainda não terem resolvido alguma questão parecida, ou então não tiveram tempo para resolver.

Acreditamos que independentemente dos motivos pelos quais os alunos não acer-

Figura 42 – Graficação das respostas dos alunos na 3^a aula

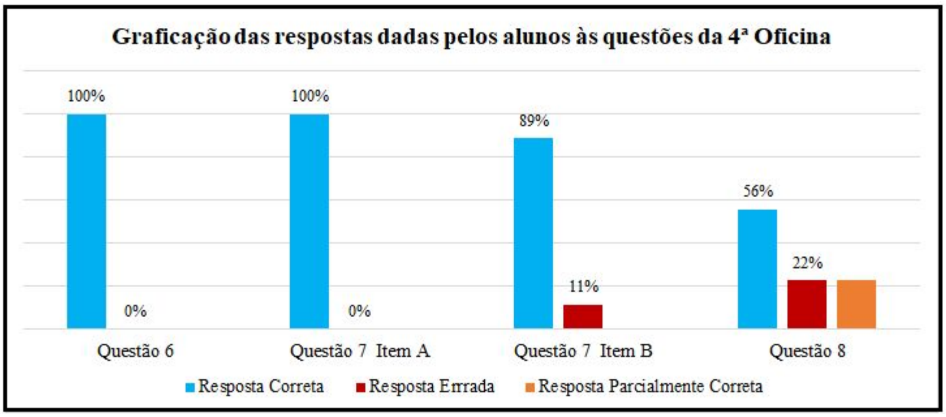


Fonte: Gráfico elaborado pela autora no Excel.

taram a resposta, podemos avaliar o que os alunos aprenderam durante o processo de resolução. Aprender a interpretar e resolver problemas e ter intuição matemática é algo que se aprende analisando e resolvendo diferentes problemas, podemos dizer que muitas vezes o processo de resolução é mais importante que a resposta final.

Quanto ao problema em organizar as peças de forma que a onça capture todas as peças em uma única jogada os alunos conseguiram resolver a questão. Eles explicaram oralmente enquanto concluiam a atividade com a ajuda das peças e do tabuleiro, mas tiveram dificuldade em descrever de que maneira acontece e qual a sequência de movimentos foi realizada pela onça. Enfatizamos que esse problema contribuiu para desenvolver a criatividade matemática, a lógica matemática e a imaginação, pois os alunos tiveram que conceber um processo de resolução e, os mesmos tiveram que aprender a expressar o raciocínio utilizado para demonstrar a resposta de forma compreensível.

Figura 43 – Graficação das respostas dos alunos na 4^a aula

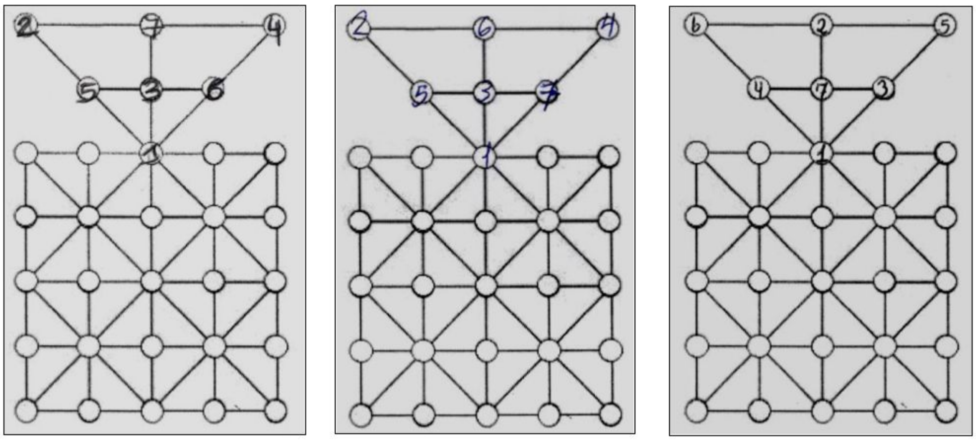


Fonte: Gráfico elaborado pela autora no Excel.

A 4^a aula contou com a participação de nove alunos que resolveram três questões de lógica matemática. Ao observar os dados apresentados no gráfico acima, Figura 43, percebemos que 100% dos alunos responderam corretamente o problema 6, página 59.

A Figura 44, ilustra a resposta dos alunos dada ao problema 6 que consistia em colocar os números de 1 a 7 na toca da onça de forma que dois números consecutivos não tenham nenhuma conexão e todos os alunos conseguiram resolver corretamente a questão.

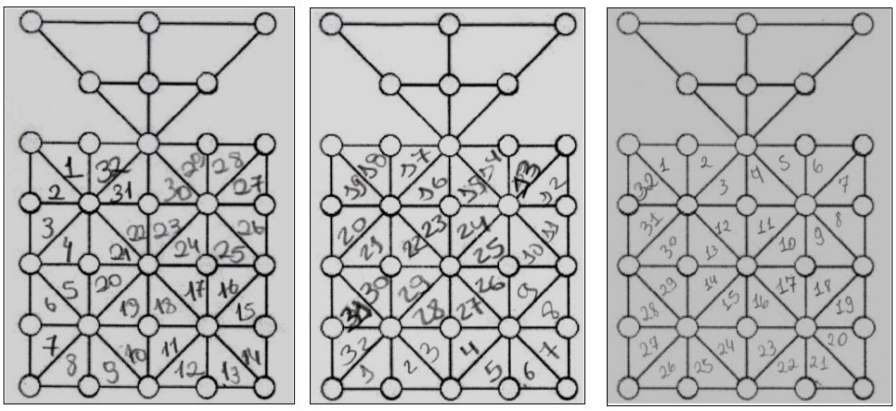
Figura 44 – Três respostas dadas pelos alunos para o problema 6.



Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Na Questão 7, página 59, os triângulos da parte quadrada do tabuleiro deveriam ser numerados de 1 até 32 de tal modo que números consecutivos fiquem em triângulos que tem um lado em comum. Conforme dados apresentados no gráfico da Figura 43, 100% dos alunos conseguiram resolver o item a, no qual os números 1 e 32 devem ficar em triângulos consecutivos, a resposta dos alunos está representada na Figura 45.

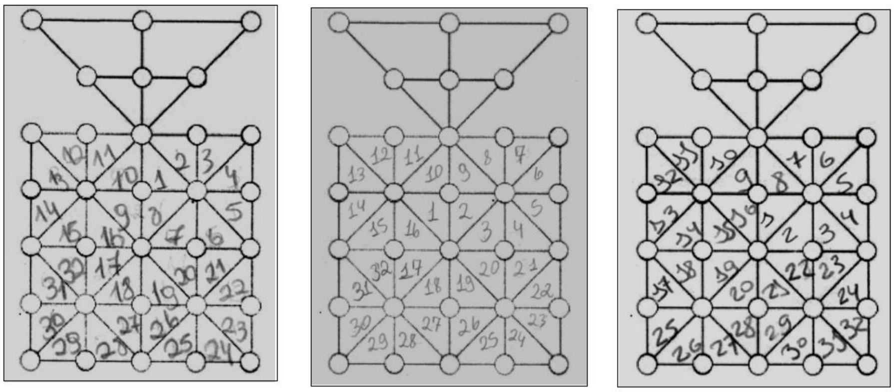
Figura 45 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 7 - a.



Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Um aluno não resolveu corretamente o item b no qual os números 1 e 32 não podem ficar em triângulos consecutivos, logo 89% dos alunos acertaram o item b da questão 7 conforme dados apresentados no gráfico da Figura 43. A Figura 46, ilustra algumas das respostas dadas pelos aluno no item b, sendo que a terceira resposta é a do aluno que não respondeu corretamente, visto que os números 16 e 17 não ficaram em triângulos consecutivos.

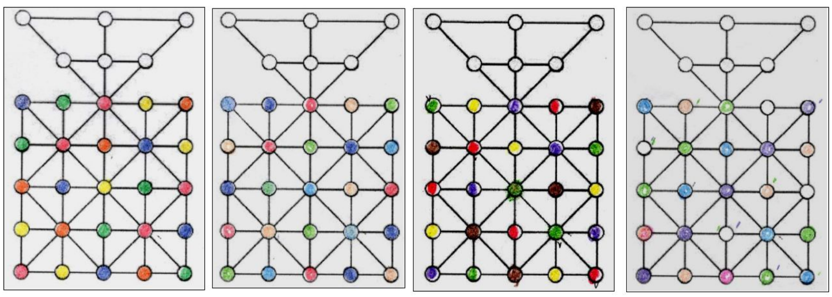
Figura 46 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 7 - b.



Fonte: Extrato da resposta dos alunos

A Figura 47, ilustra as respostas de quatro alunos ao problema 8, página 60. No quarto tabuleiro da esquerda para a direita, percebemos que um aluno não concluiu corretamente o problema, o mesmo tentou pintar as diagonais de uma mesma cor, mas na segunda coluna tem duas posições pintadas da mesma cor. Cinco alunos acertaram essa questão que consistia em pintar todas as casas da parte quadrada do tabuleiro com cinco cores, de modo que em cada linha e cada coluna, haja apenas uma casa de cada cor, porém dois alunos não concluíram a questão e dois não resolveram de maneira correta, isto é, 56% dos alunos resolveram a questão 8 enquanto que 22% não resolveram corretamente, dados estes apresentados no gráfico da Figura 43.

Figura 47 – Quatro respostas dadas pelos alunos para a questão 8.



Fonte: Extrato da resposta dos alunos

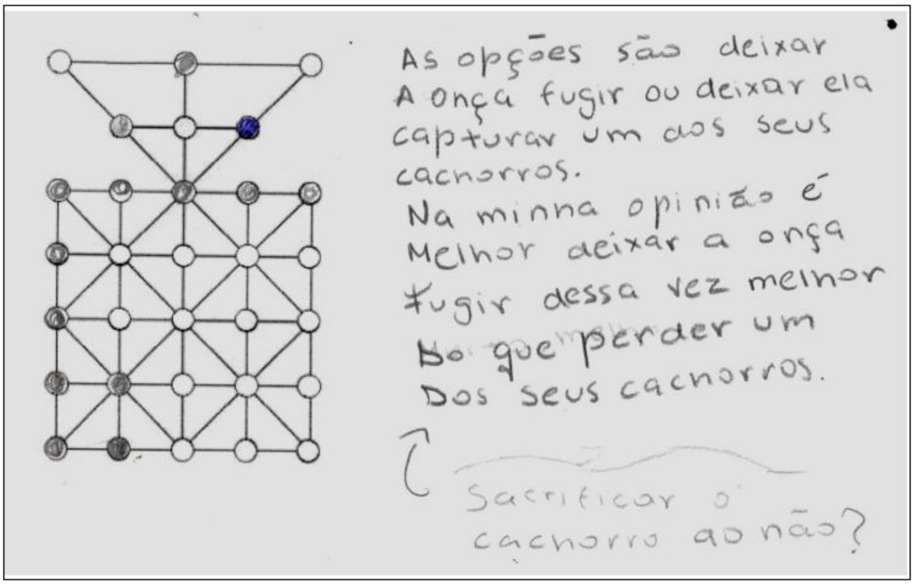
As questões apresentadas nessa aula tiveram como objetivo resolver problemas lógicos matemáticos elaborados com base no tabuleiro do Jogo da Onça, desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a criatividade. Problemas que apresentam uma matemática desafiadora que de certa forma pode ser até divertida e não como um conjunto de regras e técnicas para resolver listas de exercícios e problemas.

Ao resolver os problemas de lógica os alunos permaneceram concentrados, criaram diferentes hipóteses de resolução, testaram diferentes possibilidades, mostraram que possuem criatividade, e usaram muito da intuição e lógica matemática para resolver as questões. Em cada uma das questões os alunos tiveram a oportunidade de tomar decisões, imaginar, criar, testar e elaborar as respostas, potencializando a capacidade de resolver problemas e de pensar matemática.

As questões elaboradas pelos alunos durante a quinta aula, em sua maioria, foram relacionadas às regras do jogo, as possibilidades de capturar as peças que representam o cachorro ou maneiras de imobilizar a onça, o que mostra o quanto os alunos compreenderam as regras do jogo. A elaboração de problemas favorece a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, potencializando a capacidade de pensar matemática.

Um dos problemas elaborados, Figura 48, é sobre as regras do jogo no qual foi apresentado o tabuleiro do Jogo da Onça com um jogo em andamento, o problema analisa a possibilidade de sacrificar ou não um cachorro, isto é, permitir que um cachorro seja capturado. Em sua resposta o aluno que elaborou a questão considera que o melhor a fazer é evitar a captura, como o aluno comenta que a onça pode fugir, possivelmente ele pensou em mover a peça que está na entrada da toca da onça ao invés de protegê-la.

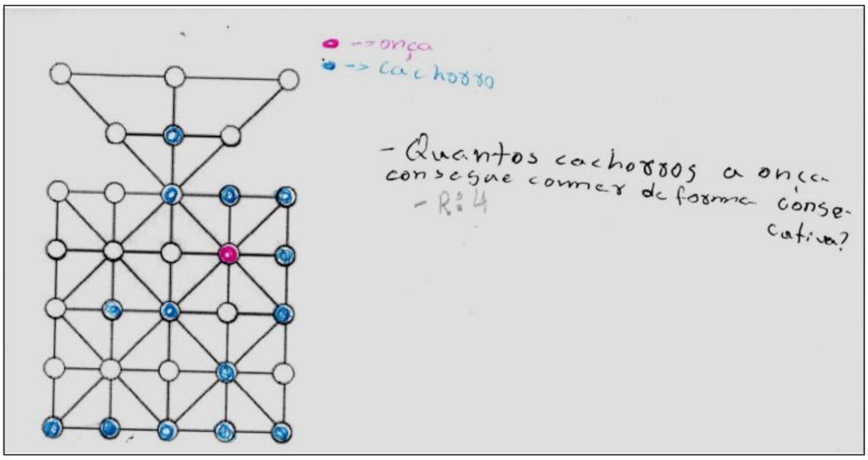
Figura 48 – Problema elaborado por um dos alunos



Fonte: Extrato da resposta dos alunos

No problema representado na Figura 49, as peças representam um jogo em andamento, no qual a onça está em uma posição em que pode capturar vários cachorros, o problema verifica o número de cachorros que pode ser capturado em uma única jogada. Em sua resposta, o aluno afirma que é possível capturar quatro cachorros de forma consecutiva, o que está correto, porém para perceber o percurso que a onça faz para capturar os quatro cachorros é preciso ter muita atenção e raciocínio lógico, caso contrário ao olhar o tabuleiro é possível identificar que é capturar apenas duas peças.

Figura 49 – Problema elaborado por um dos alunos.



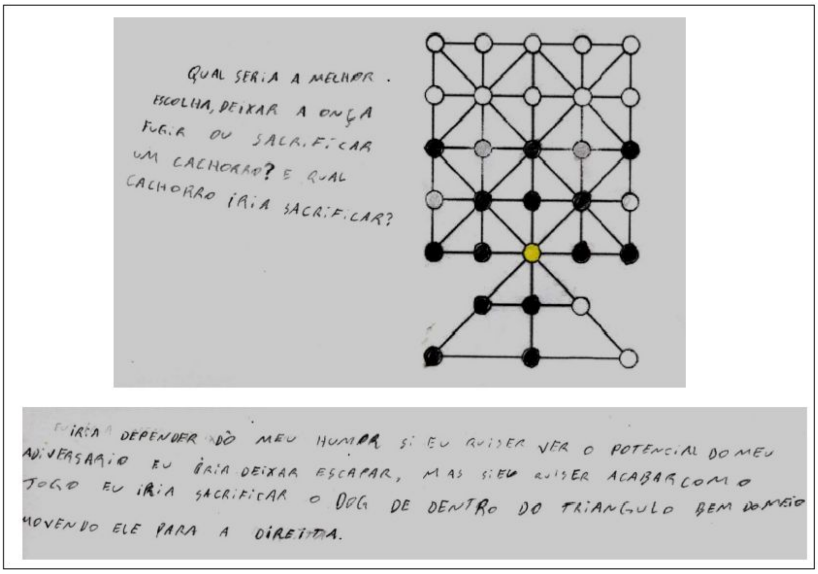
Fonte: Extrato da resposta dos alunos

Um terceiro aluno escreveu o problema, Figura 50, que representa o jogo em andamento, no qual a onça se encontra em uma posição que possibilita poucas opções de movimentos enquanto que os cachorros aparentemente estão em uma situação que qualquer que seja o movimento a ser realizado vai resultar na captura de uma peça, sendo assim quem joga com o cachorro deve escolher com cuidado a próxima peça a ser movimentada. Em sua resposta o aluno afirma que iria sacrificar, isto é, movimentar o cachorro que está na parte central da toca da onça, o que é uma ótima escolha pois dessa forma mantém a onça dentro da toca com poucas opções de movimento o que é favorável para o cachorro, pois em algumas situações pode ser mais fácil imobilizar a onça.

Para elaborar os problemas os alunos usaram estratégias aplicadas em algum momento durante os jogos e pensaram em situações novas do jogo no qual onça estivesse quase encurralada ou numa posição que possibilitasse a captura de algumas peças. Ao escrever novos problemas os alunos tiveram de mobilizar o seu próprio modo de pensar, raciocinar, representar as suas ideias e argumentar, comunicando e argumentando o que favorece o desenvolvimento do raciocínio matemático e a criatividade.

Analisando as respostas dos alunos aos seus próprios problemas percebemos que os alunos compreenderam as regras e os objetivos do jogo, tanto que além de responder usavam sua opinião pessoal indicando qual a melhor estratégia a ser usada. Ao resolver

Figura 50 – Problema elaborado por um dos alunos.



Fonte: Extrato da resposta dos alunos

seus próprios problemas os alunos tiveram de conceber um processo de resolução o que contribui para potencializar a capacidade de resolver problemas.

Aprender matemática não é somente resolver problemas com fórmulas, com regras ou com passo a passo de como se deve fazer, sendo assim o aluno deve ter a oportunidade de resolver problemas que vão além das regras e aplicações de fórmulas. Ao se trabalhar problemas de forma integrada a determinado jogo é possível despertar o interesse e a curiosidade dos alunos e desenvolver a capacidade de resolver qualquer problema.

No decorrer das aulas foi possível observar uma mudança de comportamento e de percepção por parte dos alunos em relação ao jogo e em relação aos problemas. Quanto aos problemas, durante a 2^a aula os alunos fizeram muitos questionamentos, sendo que foi possível perceber que os alunos estavam ansiosos e inseguros em relação às questões e em relação às respostas, porém na 3^a e 4^a aula os alunos perguntaram menos, sendo que na última os alunos estavam mais concentrados e seguros, buscaram por si próprio as soluções sem muitos questionamentos e sem medo de errar.

Em relação ao jogo observamos que no primeiro dia os alunos ficaram focados em aplicar as regras para vencer o jogo rapidamente, mas com o passar dos dias os alunos começaram a refletir sobre as jogadas, prevendo as possíveis jogadas do adversário e criando diferentes estratégias de jogo. Na 5^a aula uma aluna comentou que era importante não ter pressa para vencer o jogo, que era importante raciocinar e ter bastante tempo para pensar, o que indica que os alunos não jogam apenas por jogar, mas que estes estavam concentrados na atividade e que cada partida e cada jogada representou um novo desafio.

Sobre as aulas, três pontos interessantes merecem destaque, primeiramente os alunos solicitaram para chegar mais cedo a fim de terem mais tempo para ficarem jogando, a primeira e segunda aula iniciaram as 17h30min e nos outros dias os alunos começaram a chegar uma hora antes para ficarem jogando com os demais colegas. A solicitação para iniciar as aulas mais cedo demonstra o quanto os alunos se interessaram pelo jogo, e como uma atividade com jogos podem proporcionar momentos prazerosos e de aprendizagem.

O segundo ponto a ser destacado é que os alunos que participaram das aulas não eram apenas de uma turma, alguns alunos eram do 1º ano do Ensino Médio, outros do 2º ano e outros do 3º ano, indiferente dos alunos serem de anos diferentes, todos trabalharam e participaram da mesma forma. Não percebemos que um aluno do terceiro ano ou do primeiro ano teve mais dificuldades do que o outro, o que indica que esse trabalho pode ser aplicado em qualquer um dos três anos do Ensino Médio.

O terceiro ponto a ser destacado é que em cada aula compareceu pelo menos um aluno novo que foi acolhido pelos colegas que já conheciam o jogo e já haviam participado das outras aulas. Os alunos que já conheciam o jogo ensinavam como jogar para os colegas que estavam participando pela primeira vez, fato que contribui para interação social, para a aprendizagem colaborativa, pois favorece a integração de forma cooperativa para aprender e ensinar, além de desenvolver as habilidades de comunicação e argumentação.

Analisando as dificuldades dos alunos e as respostas erradas apresentadas podemos elaborar algumas hipóteses sobre os principais motivos que contribuíram para os erros, a primeira é que os alunos não estavam acostumados a resolver esse tipo de problema, outra é que para resolver as questões não se aplica de imediato um conceito ou um procedimento, também podemos supor que os alunos não interpretaram corretamente os problemas. Outro fato a ser considerado é que não foi realizada a resolução de atividades parecidas e não foram dadas explicações detalhadas de como os alunos deveriam ou poderiam resolver as questões, pois acreditamos que os estudantes devem conceber seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e resolver problemas.

Os erros apresentados pelos alunos não significam que não houve aprendizagem, pois é importante considerar o processo de resolução dos problemas. Enquanto os alunos resolveram os problemas, discutiram e trocaram ideias com os colegas, criaram e testaram diferentes soluções, precisaram argumentar e expressar suas respostas fazendo uso da linguagem escrita e da linguagem matemática.

Dado que durante as aulas foram desenvolvidas habilidades relativas aos processos de resolução de problemas, os estudantes desenvolveram autoestima, além da predisposição para realizar ações em grupo. As atividades contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, da criatividade matemática e da intuição, portanto podemos constatar que os objetivos das atividades propostas foram alcançados.

No que se refere às atividades planejadas e realizadas, consideramos que a dinâmica de realização poderia ter sido realizada de uma maneira diferente, após a conclusão das atividades percebemos que poderia ter sido aplicado apenas duas questões ou questões com um menor número de itens durante as aulas. Seria importante ter proporcionado momentos para discutir e comparar as respostas dadas pelos alunos, apresentando aos alunos diferentes possibilidades de resolução, o que poderia contribuir para a aprendizagem de conceitos e estratégias de resolução de problemas observados anteriormente pelos estudantes.

Ao finalizar a atividade, consideramos que trabalhar com resolução de problemas e desafios elaborados a partir de jogos de tabuleiro, foi uma experiência significativa, tanto para o professor, que ao pensar e elaborar situações que envolvessem os alunos, conseguiu desenvolver atividades significativas, lúdicas e prazerosas que contribuiram para a aprendizagem de conteúdos e para o desenvolvimento de diferentes competências e habilidades, quanto para o aluno que teve a possibilidade de aprender a aprender.

5 CONCLUSÃO

Diante das leituras, releituras e realização da presente pesquisa podemos assegurar que o trabalho com situação didática, resolução de problemas e jogos de estratégia nas aulas de matemática contribui positivamente para o desenvolvimento de diferentes habilidades. Destacamos que para alcançar os objetivos propostos devemos ter planejamento, seja para trabalhar com resolução de problemas ou com jogos, porém não existe receita, o que existe são perspectivas e ideias que podem fazer a diferença e tornar o ensino da matemática significativo.

A Situação Didática composta pelo Jogo da Onça e Resolução de Problemas, fazendo o uso de situações didáticas e adidáticas, nosso entendimento, é uma estratégia de ensino que poderá ser aplicada novamente em futuras práticas didático-pedagógicas. A participação dos alunos em todos os momentos da proposta é um indício de que esta proposta pode ser utilizada frequentemente, com o uso deste e talvez outros jogos, com mais tempo para criar e aplicar novas estratégias.

Ademais, a combinação entre a Matemática e lúdico, em especial o Jogo da Onça, se apresenta como um recurso ímpar, um jogo de estratégia que também é um jogo de caça, que requer muita atenção por parte dos jogadores o que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, proporcionando conhecimento, respeito e a valorização da cultura indígena.

Constatou-se, ainda, que o trabalho em sala de aula com problemas que possuem o Jogo da Onça como tema principal se tornam interessantes e significativos aos alunos, visto que estas questões podem ser resolvidas utilizando o próprio jogo para estudar e resolvê-las. Os problemas que abordam Análise Combinatória, Probabilidade e Lógica juntamente com o Jogo da Onça, permitem uma compreensão diferente destes conteúdos matemáticos por parte dos alunos, tornando a resolução de problemas um recurso interessante e desafiador, o que contribui positivamente para o processo de ensino-aprendizagem.

Com a realização desta pesquisa, concluimos que é possível ensinar matemática de forma lúdica, criativa, interessante e significativa que contribuem para a aprendizagem de conteúdos e para o desenvolvimento de diferentes competências e habilidades. Tanto o trabalho com Jogo da Onça quanto a resolução de problemas são recursos que podem enriquecer as aulas de Matemática possibilitando discussões e novas aprendizagens sobre os conteúdos e consequentemente valorizar, conhecer e interagir também com a cultura indígena, pois é importante que a temática indígena chegue até as salas de aula livre de preconceito, visto que precisamos de propostas didático-pedagógicas que respeitem, preservem e valorizem nossa história e cultura.

REFERÊNCIAS

ALLUÉ, J. M. **O grande livro dos jogos.** Belo Horizonte: Editora Leitura, 1998.

ALMEIDA, M. T. P. de. **Jogos, Quebra-cabeças, Enigmas e Adivinhações.** Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2007.

____. **Brincando com palitos e advinhações**. 2. ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2009.

BARROSO, J. M. (ed.). **Conexões com a Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 3.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria de Educação Fundamental**: matemática / secretaria de educação fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997a. v. 3. (Parâmetros Curriculares Nacionais, v. 3). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 3 dez. 2022.

____. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria de Educação Fundamental**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / secretaria de educação fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997b. v. 1. (Parâmetros Curriculares Nacionais, v. 1). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 3 dez. 2022.

____. Lei nº10.639, de 9 de janeiro de 2003. altera os artigos 26 e 79 da lei de diretrizes e bases 9.394 de 1996. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 9 jan. 2003. Disponível em: https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jspjornal=1&pagina=1&data=10/01/2003. Acesso em: 6 abr. 2023.

____. Lei nº11.645, de 10 de março de 2008. altera a lei de diretrizes e bases 9.394 de 1996, modificada pela lei nº10.639, de 9 de janeiro de 2003. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 10 mar. 2008. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/2008/lei-11645-10-marco-2008-572787-publicacaooriginal-96087-pl.html. Acesso em: 6 abr. 2023.

____. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**: Ensino médio. Brasília: Mec, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 3 dez. 2022.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da Matemática**: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed Editora, 1996. cap. 4, p. 48–72.

____. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúdos e métodos de ensino. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2008.

BURKE, T. J. **O Professor Revolucionário**: da pré-escola à universidade. 2. ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2003.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemática**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre, RS: Artmed Editora, 2001.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade**: Um curso introdutório. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

DINIZ, M. I. Os problemas convencionais nos livros didáticos. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. cap. 5, p. 99–100.

ESCOLA DE ENSINO MÉDIO WALDEMAR BORGES. **Projeto Político Pedagógico**. Alegrete, 2022.

FERREIRA, M. B. R.; VINHA, M.; SOUZA, A. F. de. Jogo de tabuleiro: Um percurso em etnias indígenas. **Revista Brasileira de Ciência e Movimento**, v. 16 (1), p. 47–55, 2008. Disponível em: https://portalrevistas.ucb.br/index.php/rbcm/article/view/1115. Acesso em: 7 abr. 2023.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. **Matemática Aula por Aula**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003. v. 2. (Coleção Matemática Aula por Aula, v. 2).

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Combinatória e probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. v. 5. (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, v. 5).

HOFMANN Ângela A. O mundo além da “terra à vista”: o lado de cá do oceano atlântico é outra história. In: BERGAMASCHI, M. A.; ZEN, M. I. H. D.; XAVIER, M. L. M. de F. (org.). **Povos Indígenas e Educação**. Porto Alegre: Editora Mediação, 2012. cap. 9, p. 127–138.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. Objetiva, 2009.

JULIANELLI, J. R. et al. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**: aprendendo com a resolução de problemas. Rio de Janeiro: Editora Ciências Moderna Ltda, 2009.

LIMA, M.; BARRETO, A. **O Jogo da Onça**. 2. ed. São Paulo: Panda Books, 2005. 53 p.

LOYO, T.; CABRAL, V. R. de S. **Metodologia do Ensino de Matemática**. Porto Alegre, RS: Sagah, 2018.

LUCIANO, G. dos S. **O Índio Brasileiro**: o que você precisa saber sobre os povos indígenas no brasil de hoje. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Continuada: LACED/Museu Nacional, 2006. v. 12. 236 p. (Coleção Educação para Todos, v. 12).

LUDOSOFIA. **Bhaga-Chall (Nepal) confronto estratégico entre tigres e cabras**. 2020. Disponível em: https://ludosofia.com.br/arqueologia/bhaga-chall-nepal-confronto-estrategico-entre-tigres-e-cabras/. Acesso em: 14 nov. 2022.

MACEDO, L. de; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar.** Porto Alegre, RS: Artmed, 2005.

MEDEIROS, J. S. Povos indígenas e a lei nº11.645: (in)visibilidades no ensino da história do brasil. In: BERGAMASCHI, M. A.; ZEN, M. I. H. D.; XAVIER, M. L. M. de F. (org.). **Povos Indígenas e Educação**. Porto Alegre: Editora Mediação, 2012. cap. 3, p. 49–62.

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991. v. 2. (Coleção Professor de Matemática, v. 2).

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção Profmat).

OLIVEIRA, V. B. de. A compreensão de sistemas simbólicos. In: OLIVEIRA, V. B. de; BOSSA, N. A. (org.). **Avaliação psicopedagógica da criança de sete a onze anos**. 11. ed. Petrópolis: Vozes, 2003. p. 15–46.

____. **Jogos de regras e a resolução de problemas.** 3. ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2007.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

PAIVA, M. **Matemática**: Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 2.

PINTO, N. B. **O Erro Como Estratégia Didática**: Estudo do erro no ensino da matemática elementar. 2. ed. Campinas: Papirus, 2009.

RIBAS, R. P. **21 Jogos abstratos de estratégias no mesmo tabuleiro**. Porto Alegre: Metamorfose, 2020.

SANTOS, J. P. de O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciências Moderna Ltda, 2007.

SILVA, B. A. da. Contrato didáticosituações didáticas. In: MACHADO, S. D. (org.). **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. cap. 3, p. 43–64.

SILVA, G. J. da; COSTA, A. M. R. F. da. **Histórias e culturas indígenas na Educação Básica**. Belo Horizonte: Autêntica, 2018. (Coleção Práticas Docentes).

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V. (org.). **Material manipulativo para o ensino das quatro operações básicas**. Porto Alegre: Penso, 2016a. v. 2. (Coleção Mathemoteca, v. 2).

____. **Resolução de Problemas nas aulas de Matemática**: o recurso problemateca. Porto Alegre: Penso, 2016b. v. 6. (Coleção Mathemoteca, v. 6).

SOUZA, J. O. C. de. Reconhecimento oficial da autonomia e da sabedoria dos agentes originários e reorientação do projeto (inter)nacional brasileiro. In: BERGAMASCHI, M. A.; ZEN, M. I. H. D.; XAVIER, M. L. M. de F. (org.). **Povos Indígenas e Educação**. Porto Alegre: Editora Mediação, 2012. cap. 1, p. 17–31.

STANCANELLI, R. Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. cap. 6, p. 103–120.

TOLEDO, M. E. de O. et al. **Tendências em Educação Matemática**. Porto Alegre: Sagah, 2021.

VINHA, M. Jogo de tabuleiro como prática educativa intercultural. In: GRANDO, B. S. (org.). **Jogos e Cultura Índigena**: possibilidades para a educação intercultural na escola. Cuiabá: EdUFMT, 2010. cap. 1, p. 21–33. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/236498. Acesso em: 16 out. 2022.

WITTMANN, L. T. (org.). **Ensino de História Indígena**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Práticas Docentes).

APÊNDICE A – JOGOS SIMILARES AO JOGO DA ONÇA

Os jogos viajam pelo mundo e vão sendo modificados, adaptados e aperfeiçoados ao longo do tempo. Por isso os jogos de diferentes culturas e regiões geográficas apresentam tabuleiros e princípios de funcionamento semelhantes. Destacamos os jogos Alquerque, Bhaga-Chall, Adu Nuli ou Cordeiros e Tigres, Leopardos e Vacas e o Jogo a Raposa e os Gansos. Jogos de outros lugares que de alguma forma tem relação com o jogo da onça e possibilitam conhecer um pouco mais de outras culturas através de jogos de tabuleiros, estes que são mais que peças e um tabuleiro, são a história de diferentes regiões do mundo.

Tabela 2 – Jogos Similares ao jogo da Onça Comparativo.

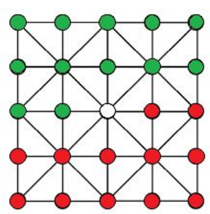
Nome do Jogo	Origem	Número de Peças
Alquerque	Egito	12 peças para cada jogador
Bagha-Chall	Nepal	4 tigres e 20 cabras
Adu Huli	Índia	3 tigres e 15 cordeiros ou cabras
Leopardos e Vacas	Índia	2 leopardos e 24 vacas
A Raposa e os Gansos	Europa	1 raposa e 13 gansos

Fonte: Adaptado de Allué (1998, p. 54), Ribas (2020, p. 55) e Ludosofia (2020).

A.1 – ALQUERQUE

Alquerque (ou Qhirkat), pode ser considerado o jogo (de tabuleiro) de captura mais antigo registrado pelo homem, tendo sido encontrado esculpido nas paredes de templo egípcio em Kurna, datado de pelo menos 1400 a.C.

Figura 51 – Tabuleiro do Jogo Alquerque



Fonte: Adaptado de Allué (1998, p. 54).

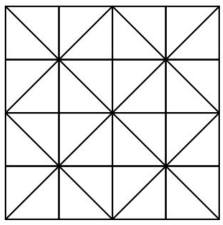
Inicialmente as peças ocupam todo o tabuleiro, com exceção da posição central, como representado na Figura 51. As peças se movimentam para frente e para trás, respeitando as linhas verticais, horizontais e diagonais, sempre para um espaço vazio e adjacente ou saltando sobre uma peça do adversário, isto é, capturando uma peça. A captura é obrigatória e é permitida realiza-la de forma múltipla, em que várias peças são capturadas em uma única jogada.

A.2 – BAGHA-CHALL

Jogo do Nepal, Bagha-Chall quer dizer, mudança de tigres ou tigres em movimento. Mesmo com um número diferente de peças e condições diferentes de estratégia, da mesma forma que no jogo do tigre, este ainda consegue ter o mesmo nível de dificuldade para ambos os jogadores.

Enquanto o jogo da onça tem uma onça e 14 cães, o jogo Bagha-Chall tem 4 tigres e 20 cabras, sendo que os tigres fazem o papel da onça e as cabras substituem os cachorros. Os tigres tem como objetivo capturar cinco cabras e, por sua vez, as cabras têm objetivo de encurralar os tigres, isto é, imobilizar os quatro tigres.

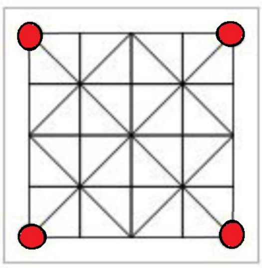
Figura 52 – Tabuleiro do Jogo Bagha-Chall



Fonte: Adaptado de Ribas (2020, p. 55).

Observando o tabuleiro do jogo Bagha-Chall representado na Figura 52, percebemos que este se diferencia do tabuleiro do jogo da onça pela falta da parte triangular, conhecida por toca da onça.

Figura 53 – Tabuleiro do Jogo Bagha-Chall



Fonte: Adaptado de Ribas (2020, p. 55).

Inicialmente os tigres são posicionados nos quatro cantos do tabuleiro representado na Figura 53, e as cabras ficam todas fora do tabuleiro, sendo colocadas uma a uma no decorrer do jogo em qualquer interseção livre.

O jogo inicia quando a primeira cabras é colocada no tabuleiro, conforme critério do jogador, na sua vez, os tigres se movimentam um de cada vez em qualquer intersecção adjacente, sendo que as cabras que já estão no tabuleiro não podem realizar nenhum movimento até que a última cabra tenha sido posicionada no tabuleiro.

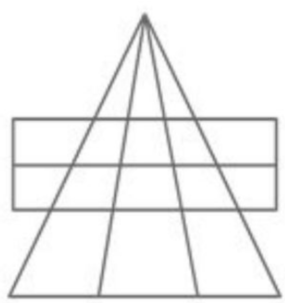
As regras do jogo Bagha-Chall se assemelham ao do jogo da onça: os tigres tem como objetivo capturar as cabras pulando sobre elas para uma posição adiante que esteja livre, a captura pode ser feita a qualquer momento sempre que for possível, desde que seja capturada uma cabra por vez, mas a captura não pode ser feita com movimentos para trás e não podem pular sobre outro tigre e, as cabras não podem pular sobre os tigres ou sobre outras cabras.

A.3 – ADU HULI

Jogo Adu Huli ou Tigres e Cordeiros ou ainda Tigres e Cabras, é um jogo muito conhecido na Índia. O mesmo jogo pode receber o nome de Meka Puli Aata, pois na língua Telugo, uma das muitas usadas na Índia, Meca significa jogar ou encurralar, Puli significa Tigre e Aata significa cordeiro. O Jogo Adu Huli também pode ser chamado de Pulijudam ou Pulijutam e o grau de dificuldade depende das habilidades dos jogadores.

A diferença do Jogo Adu Huli está no formato de tabuleiro que tem a forma triangular como observamos no tabuleiro representado na Figura 54. Ele é composto por 3 tigres e 15 cordeiros. Os tigres tem como objetivo capturar todos os cordeiros, e podem capturar mais de um cordeiro em uma mesma jogada, desde que tenha espaço livre que permita mais de um salto e, por sua vez, os cordeiros tem como objetivo imobilizar os três tigres.

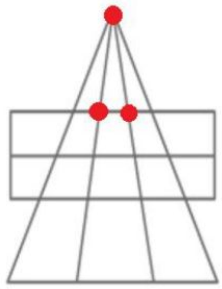
Figura 54 – Tabuleiro do Jogo Adu Huli



Fonte: Adaptado de Allué (1998, p. 55).

Todas as peças que representam os cordeiros ficam fora do tabuleiro e os tigres são posicionados antes do início do jogo como indicado na Figura 55. Quem representa os cordeiros deve iniciar o jogo e os cordeiros devem ser colocados um a um em qualquer interseção livre. Nas primeiras jogadas um novo cordeiro é colocado no tabuleiro, e eles só podem se mover depois que o último cordeiro for colocado no tabuleiro. Os tigres, uma vez situados no tabuleiro, já podem se mover desde a primeira jogada.

Figura 55 – Tabuleiro do Jogo Adu Huli



Fonte: Adaptado de Allué (1998, p. 55).

Sobre as regras destacamos que a captura dos cordeiros podem ser feitas em qualquer momento do jogo, mesmo que todos os cordeiros não tenham sido colocados no tabuleiro, porém não é permitido a realização de captura múltipla, isto é, não é permitido a captura de mais de um cordeiro na mesma jogada e para realizar a captura o tigre pode saltar sobre os cordeiros em qualquer direção, mas um tigre não pode saltar sobre outro tigre.

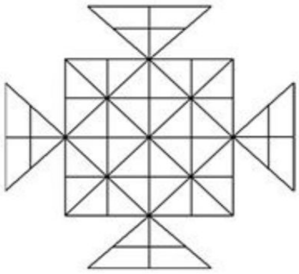
Os cordeiros podem se mover para intersecções vazias no mesmo alinhamento, isto é, na vertical e na horizontal, e não podem saltar um outro cordeiro ou os tigres. Os cordeiros vencem o jogo quando conseguem imobilizar os três tigres e o tigre vence quando consegue capturar todos os cordeiros.

A.4 – LEOPARDOS E VACAS

Leopardos e Vacas é um jogo tradicional do sul da Índia do Sri Lanka, o tabuleiro é muito parecido com o do jogo da onça, porém enquanto que no jogo da onça existe um triângulo, que representa a toca da onça, no jogo Leopardos e vacas tem quatro triângulos, um de cada lado da parte quadrada do tabuleiro, como representado na Figura 56.

É considerado um jogo de guerra ou um jogo de caça por ter números diferentes de peças: duas peças representam o leopardo e vinte e quatro peças representam as vacas, sendo ambos com objetivos diferentes. O leopardo tem por objetivo capturar todas as vacas ou eliminar tantas vacas, de forma que as que sobrarem não sejam suficientes para imobilizá-lo, enquanto que as vacas tem como objetivo encurralar os dois leopardos, impedindo o seu movimento.

Figura 56 – Tabuleiro do Jogo Leopardos e vacas



Fonte: Ludosofia (2020).

Iniciando o jogo por quem representa o Leopardo, os dois jogadores jogam alternadamente, sendo que nas duas primeiras jogadas, cada jogador coloca uma de suas peças em qualquer lugar que esteja livre no tabuleiro, isto é, em qualquer intersecção de duas ou mais linhas do traçado. A partir da terceira jogada, quem representa o leopardo pode movimentar as suas peças e se possível capturar alguma vaca, mas quem joga com as peças que representam as vacas só podem realizar movimentos depois que colocar todas as peças no tabuleiro.

Os movimentos das peças devem ser feitos em qualquer direção, para pontos adjacentes, desde que estejam livres e o movimento deve ser feito sobre as ligações traçadas no tabuleiro. A captura é feita da mesma maneira que no jogo da onça, isto é, o leopardo pula por cima da vaca, na mesma linha para o ponto livre que está logo depois da vaca, sendo que as vacas capturadas devem ser retiradas do tabuleiro, podemos destacar que as vacas não podem capturar os leopardos mas deve tentar encurralar os dois leopardos de forma que nenhum movimento seja possível.

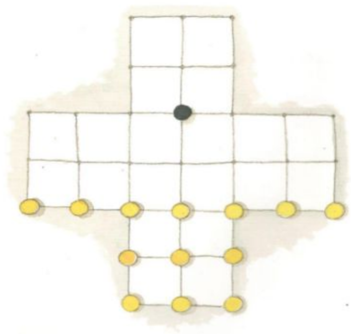
A.5 – A RAPOSA E OS GANSOS

O jogo A Raposa e os Gansos provavelmente seja de origem Europeia pois se tem registros na Inglaterra desde o século XV, porém existem indícios de que possa ser escandinava, pois um jogo conhecido como Hala-Tafl, o Jogo da Raposa, é citado na saga islândica de Grettis. Pesquisas indicam que o jogo pode ter chegado à América do Sul pelas mãos dos árabes, da mesma forma que chegou na Europa pelo sul, visto sua semelhança com um jogo de cerco chamado Como Cercar la Liebre, descrito pelo Rei Afonso em um manuscrito de 1283.

O mesmo jogo é encontrado com outros nomes, visto que muitas vezes as peças recebem nomes de acordo com a fauna local, na França e na Alemanha é conhecido como A Raposa e as Galinhas e na Itália, Holanda, Suécia e Rússia é conhecido como O Lobo e as Ovelhas. A raposa e os gansos é um jogo composto por uma peça que representa a raposa e outras treze peças que representam os gansos. Neste jogo a onça é substituída pela raposa e os cachorros por gansos. A raposa tem o objetivo de capturar os gansos enquanto que os gansos têm como objetivo bloquear, isto é, impedir que a raposa possa se movimentar.

Os gansos não podem saltar a raposa, e não podem capturá-la, mas a raposa pode capturar os gansos, para tanto, deve tentar saltar por cima dos gansos e aterrissar em um espaço livre. A raposa, que realiza o primeiro movimento, pode saltar por mais de um ganso na mesma jogada (se eles estiverem na sequência do salto), e todos gansos que foram saltados serão retirados. Regra essa que é semelhante às regras do jogo da onça. Mas, a grande diferença, está no tabuleiro do Jogo a Raposa e os Gansos que tem a forma de uma cruz, como representado na Figura 57.

Figura 57 – Tabuleiro do Jogo A raposa e os gansos



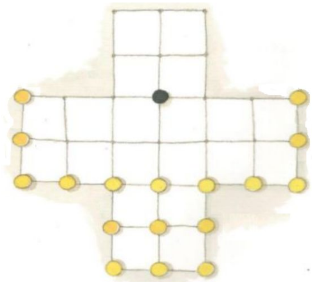
Fonte: Allué (1998, p. 46).

O jogo A Raposa e os Gansos possui uma variação, em que 17 peças representam os gansos, como representado na Figura 58. Nessa versão os gansos têm o objetivo de bloquear a raposa, porém diferentemente da versão com 13 gansos, existe restrição de movimento, logo os gansos só podem se movimentar para a frente, não podem andar na diagonal e não podem voltar. Nesta versão a Raposa não pode capturar os gansos e sim chegar ao outro lado do tabuleiro passando pelos gansos para vencer o jogo.

Existem diversas variantes do Jogo A Rapasa e os Gansos. Em algumas, os gansos não podem se mover na diagonal. Em outras os gansos não podem retroceder. Em algumas variantes o jogo tem treze gansos, em outras dezessete. Quando o jogo tem dezessete gansos, o oponente pode jogar com um ganso ou com um adicional de quatro gansos, neste caso os gansos adicionais ocupam as duas primeiras e as duas últimas posições na linha horizontal central do tabuleiro.

Uma outra diferença que se observa nas diferentes versões das regras do jogo é a posição inicial da Raposa, pois em algumas adaptações, a raposa pode ocupar inicial-

Figura 58 – Tabuleiro do Jogo A Raposa e os Gansos



Fonte: Adaptado de Allué (1998, p. 46).

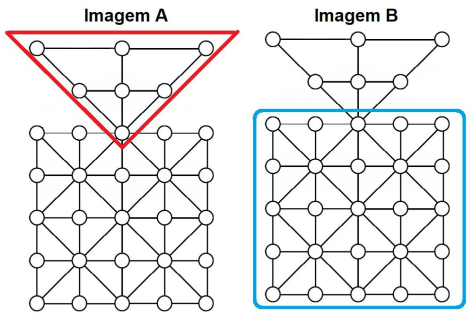
mente qualquer posição que esteja vazia. Podemos ressaltar que em algumas variantes a raposa vence se comer ou eliminar um número de gansos suficientes para que ela não seja imobilizada, enquanto que em outras o raposa só vence se ocupar uma das três posições, que eram ocupadas por gansos no início do jogo no outro lado do tabuleiro.

APÊNDICE B – GLOSSÁRIO DAS NOMENCLATURAS REFERENTES AO JOGO DA ONÇA UTILIZADA NOS PROBLEMAS

A seguir apresentamos uma lista de termos que foram usados nos problemas e seus respectivos significados, a qual tem por objetivo ajudar na leitura e interpretação dos problemas que estão relacionados ao tabuleiro do Jogo da Onça.

1. Toca da onça ou região triangular é a parte superior do tabuleiro destacado em vermelho, na Figura 59 - Imagem A;

Figura 59 – Tabuleiro do Jogo da Onça - Toca da onça e região quadrangular do tabuleiro

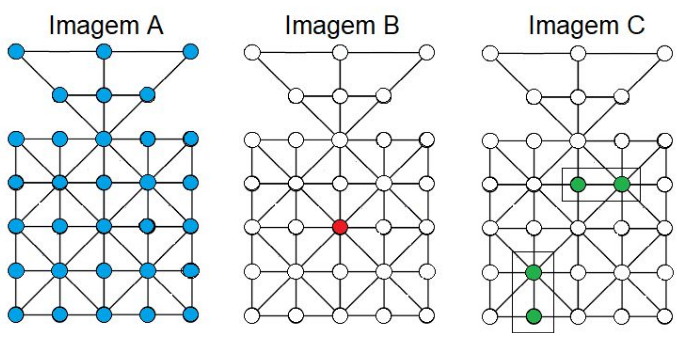


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

2. Parte quadrada ou região fora da toca da onça é a parte do tabuleiro destacado em azul na Figura 59 - Imagem B;

3. Posição ou casas são os locais destacados em azul no tabuleiro representado na Figura 60 - Imagem A, em alguns problemas as posições também podem ser chamadas de vértices ou de interseção;

Figura 60 – Tabuleiro do Jogo da Onça - Posições



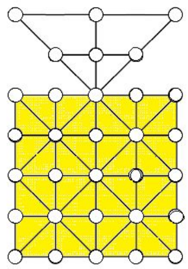
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

4. Posição central é o local que fica no centro da parte quadrada do tabuleiro do jogo da onça destacada em vermelho na Figura 60 - Imagem B;

5. Posição adjacente ou posição consecutiva é quando duas casas estão uma ao lado da outra como destacado em verde na Figura 60 - Imagem C;

6. Triângulos são as partes triângulares da parte quadrada do tabuleiro do Jogo da Onça destacado de amarelo na Figura 61;

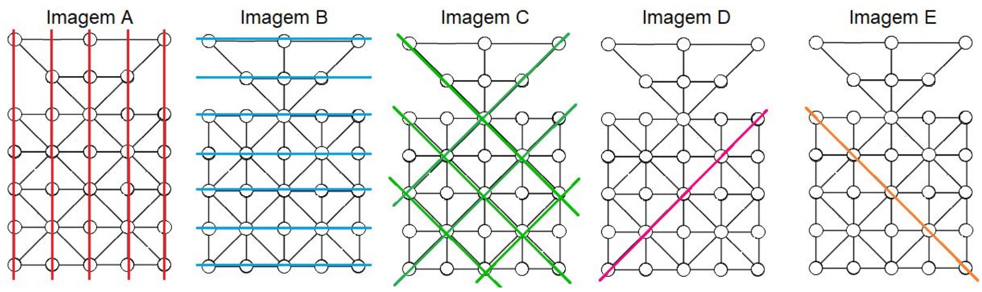
Figura 61 – Tabuleiro do Jogo da Onça - Triângulos



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

7. Colunas são as linhas verticais do tabuleiro do jogo da onça destacadas em vermelho na Figura 62 - Imagem A;

Figura 62 – Tabuleiro do Jogo da Onça - Colunas, linhas e diagonais



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

8. As retas horizontais do tabuleiro do jogo da onça destacadas em azul na Figura 62 - Imagem B e serão simplismente denotadas por linhas;

9. Diagonais são as retas destacadas em verde no tabuleiro do jogo da onça na Figura 62 - Imagem C;

10. Diagonal secundária é a reta destacada em cor-de-rosa no tabuleiro do jogo da onça na Figura 62 - Imagem D;

11. Diagonal principal é a reta destacada em alaranjado no tabuleiro do jogo da onça na Figura 62 - Imagem E;

APÊNDICE C – OBJETIVO DOS PROBLEMAS RELACIONADOS AO JOGO DA ONÇA

Nos primeiros dez problemas predominam questões sobre as regras do jogo, onde analisamos o tabuleiro e situações do jogo contando o número de movimentos possíveis, o número de movimentos favoráveis para a onça ou para o cachorro, as diferentes maneiras de capturar os cachorros e estudamos estratégias para imobilizar a onça. Para a elaboração dos jogos usamos imagens que representam diferentes momentos do jogo para elaborar situações problemas, fazendo uma análise das estratégias, identificando as melhores jogadas em cada uma das situações na perspectiva da onça ou dos cachorros.

O objetivo destes problemas é analisar e aprender como se realizam os movimentos da onça e dos cachorros; identificar como acontecem as capturas; sabendo diferenciar um movimento favorável ao cachorro de um favorável a onça; verificando qual a melhor maneira de organizar as peças que representam os cachorros para evitar que a onça capture as mesmas; aprendendo a imobilizar a onça e identificando quais as melhores posições para imobilizá-la. Além da familiaridade com o jogo, os problemas iniciais tem como um dos objetivos discutir questões de análise combinatória e probabilidade.

O problema 9 é sobre os movimentos iniciais da onça e do cachorro, e os 10 e 11 analisam o meio do jogo, isto é, quando ainda não está definido quem será o vencedor, problemas simples e introdutórios que auxiliam na aprendizagem e reconhecimento das regras do jogo e na elaboração de estratégias. Esperamos que ao resolvê-los o aluno desenvolva a intuição matemática e habilidades que serão importantes para a resolução dos demais problemas, favorecendo a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Do problema 18 ao 21 o tabuleiro foi representado no plano cartesiano, usamos as regras do jogo para aprender a calcular o número de trajetórias entre dois pontos, estes problemas abrangem conteúdos de análise combinatória (permutação com repetição) e lógica matemática (uso dos conectivos e/ou). A forma como se conta o número de trajetórias não estão explícitas, sendo assim os estudantes deverão utilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e formular um processo de resolução.

Do problema 14 ao 27 temos questões de probabilidade, ao resolvê-las percebemos que mesmo com a diferença entre o número de peças, os cachorros não levam vantagem, logo vencer o jogo com eles pode ser tão difícil quanto vencer com a onça. Esperamos que esses problemas ajudem os alunos a desenvolver sua criatividade e intuição matemática, possibilitando que os estudantes consigam resolver problemas de probabilidade em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.

Do problema 28 ao 31 juntamente com o 34 temos questões de análise combinatória que envolvem conhecimentos de fatorial, arranjo e permutação e alunos são desafiados a calcular de quantas formas é possível colocar algumas peças no tabuleiro. Estes problemas têm como objetivo principal aplicar conceitos de análise combinatória, utilizando o Jogo da Onça para ensinar conceitos matemáticos.

O problema 32 envolve as regras do jogo e requer muita atenção e criatividade para resolvê-lo, tendo por objetivo desenvolver o raciocínio lógico matemático e intuição matemática enquanto que o problema 33 abrange conteúdos de análise combinatória, e ajuda o aluno a compreender de que forma acontecem as capturas e qual a melhor maneira de evitá-las. Esse tipo de questão implica em ações que estimulam e provocam processos de reflexão e de abstração, dando sustentação a modos de pensar criativos, indutivos e dedutivos, auxiliando na compreensão do jogo e na elaboração de estratégias que impedem que os cachorros sejam capturados.

Os problemas 35 e 36, tem como principal objetivo apresentar aos alunos alguns conceitos como vertical, horizontal e diagonal, definir o que é consecutivo e diferenciar o que são posições consecutivas e o que é posição alinhada. Ao resolver estas questões os alunos aprendem novos conceitos e desenvolvem representações mais sofisticadas, visto que nestes problemas as habilidades da área de Matemática foram apresentadas de forma articulada, definindo uma junção entre geometria e análise combinatória, o que é importante para o melhoramento do pensamento matemático.

Do problema 29 ao 46 e do 49 até o 61 temos questões que envolvem análise combinatória que envolvem conhecimentos de princípio multiplicativo, fatorial, arranjo e permutação; probabilidade e lógica matemática. Destaca-se que estes problemas têm como objetivo principal compreender e aplicar conceitos de análise combinatória na resolução de problemas, potencializando de forma significativa a capacidade de resolver problemas e de pensar matemática.

O problema 47 é uma questão que envolvem lógica matemática, elaborado com base no tabuleiro do jogo da onça. Os últimos problemas são questões de simetria que analisam o desenho do tabuleiro e o posicionamento das peças, visto que ao movimentar as peças que representam o cachorro de maneira simétrica pode ser mais fácil imobilizar a onça, estes colaboram para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e a criatividade matemática.

Tabela 3 – Conteúdo relacionado a cada um dos problemas

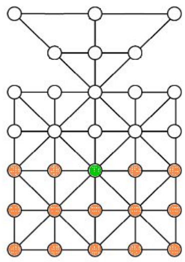
Problema	Página	Tópicos
Problema 9	página 109	lógica matemática
Problema 10	página 110	lógica matemática
Problema 11	página 111	probabilidade e lógica matemática
Problema 12	página 112	lógica matemática
Problema 13	página 114	lógica matemática
Problema 14	página 115	lógica matemática
Problema 15	página 116	lógica matemática
Problema 16	página 117	lógica matemática
Problema 17	página 118	lógica matemática
Problema 18	página 119	lógica matemática
Problema 19	página 121	análise combinatória
Problema 20	página 124	análise combinatória
Problema 21	página 126	análise combinatória e lógica matemática
Problema 22	página 129	probabilidade e lógica matemática
Problema 23	página 131	probabilidade
Problema 24	página 131	probabilidade
Problema 26	página 132	probabilidade
Problema 27	página 133	probabilidade
Problema 28	página 135	probabilidade
Problema 29	página 135	análise combinatória
Problema 30	página 135	análise combinatória
Problema 31	página 136	análise combinatória
Problema 32	página 136	análise combinatória
Problema 33	página 138	análise combinatória
Problema 34	página 141	análise combinatória
Problema 35	página 141	análise combinatória
Problema 36	página 143	análise combinatória
Problema 37	página 144	análise combinatória
Problema 38	página 146	análise combinatória
Problema 39	página 146	análise combinatória
Problema 40	página 147	análise combinatória
Problema 41	página 148	análise combinatória
Problema 42	página 149	análise combinatória
Problema 43	página 150	análise combinatória
Problema 44	página 151	análise combinatória
Problema 45	página 152	análise combinatória
Problema 46	página 153	análise combinatória
Problema 47	página 156	lógica matemática
Problema 49	página 157	análise combinatória
Problema 50	página 159	análise combinatória
Problema 51	página 159	análise combinatória
Problema 52	página 161	análise combinatória
Problema 53	página 161	análise combinatória
Problema 54	página 162	análise combinatória
Problema 55	página 163	análise combinatória
Problema 56	página 163	análise combinatória
Problema 57	página 164	análise combinatória
Problema 58	página 164	análise combinatória
Problema 59	página 165	análise combinatória
Problema 60	página 167	análise combinatória
Problema 61	página 168	análise combinatória
Problema 62	página 169	análise combinatória
Problema 63	página 170	simetria
Problema 64	página 171	simetria
Problema 65	página 171	simetria
Problema 66	página 173	simetria
Problema 67	página 174	simetria

Fonte: Dados da Autora

APÊNDICE D – PROBLEMAS RELACIONADOS AO JOGO DA ONÇA

Problema 9 *Sabendo que o primeiro movimento é sempre feito pela onça. Observe na Figura 63, a posição inicial do Jogo da Onça. Responda:*

Figura 63 – Jogo da Onça - posição inicial

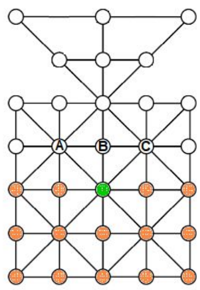


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. Quantas possibilidades de movimentos a onça tem para o primeiro movimento?

b. Considerando a experiência acumulada referente às estratégias do jogo, qual a vantagem e a desvantagem de cada movimento?

Figura 64 – Jogo da Onça - ponto de vista da onça

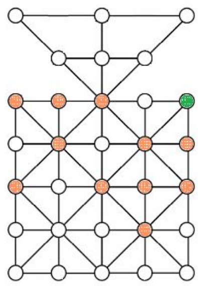


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando a imagem do tabuleiro representado na Figura 64, percebemos que a onça só pode se deslocar para as posições A, B ou C, portanto a mesma tem três possibilidades para o primeiro movimento. Se a posição escolhida for a posição B, a onça se aproxima da toca, mas tem a opção de criar estratégias de ataque aos cachorros para ambos os lados do tabuleiro, enquanto que se a posição escolhida for A ou C, ambas representando situações simétricas, vimos que elas possuem as mesmas características, logo a onça tem a vantagem de ocupar uma casa com mais opções de movimento. Entretanto esta possível escolha permite aos cachorros dominar facilmente o lado oposto à escolha do tabuleiro, restringindo assim a área de atuação da onça.

Problema 10 *Observando a situação atual do tabuleiro representado na Figura 65, e sabendo que quem está jogando com o cachorro é o próximo a jogar, indique qual peça que representa os cachorros que ao ser movimentada pode reverter a situação do jogo a favor da onça, criando a possibilidade de captura nas próximas jogadas e dificultando a imobilização da Onça. Descreva pelo menos quais serão as duas próximas jogadas da onça e dos cachorros, destacando quem estará em vantagem.*

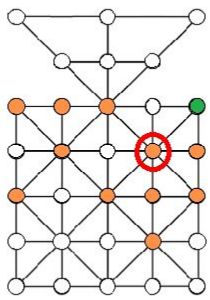
Figura 65 – Jogo da Onça - Jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observe que ao movimentar o cachorro em destaque na Figura 66, para cima, em seu próximo movimento a onça que aparentemente está encurralada com poucas opções de movimento não vai conseguir capturar nenhuma das peças, fato favorável aos cachorros, porém se a onça ocupar a posição do cachorro que foi movimentado, a estratégia de jogo usada por quem está jogando com os cachorros será completamente modificada, fato favorável para a onça.

Figura 66 – Jogo da Onça - peça que representa o cachorro que não pode ser movimentada

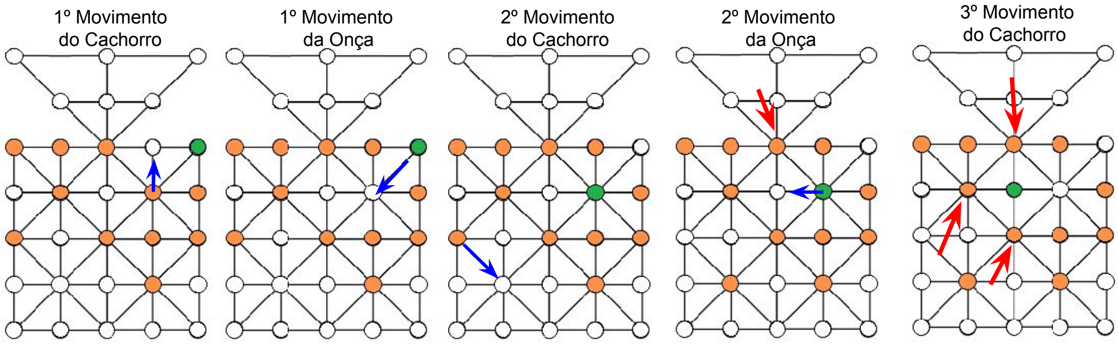


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Vejamos a sequência de movimentos do cachorro e da onça e a consequência das jogadas, representada na Figura 67:

I. No primeiro movimento o cachorro se desloca para cima, o que aparentemente é favorável ao cachorro, pois a onça não consegue realizar uma captura;

Figura 67 – Jogo da Onça - Sequência de Jogadas



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

II. No primeiro movimento da onça, esta ocupa a posição do cachorro que trocou de lugar, e fica em uma posição que lhe permite capturar dois cachorros, o que é favorável para a onça;

III. No segundo movimento do cachorro, o deslocamento deste tem por objetivo proteger o cachorro que ocupa a posição central, deixando o cachorro que está na entrada da toca da onça desprotegido, o que é favorável para a onça;

IV. No segundo movimento da onça, esta se desloca para a esquerda, mas já poderia ter capturado o cachorro que está na entrada da toca da onça desprotegido, o que lhe seria favorável;

V. No terceiro movimento do cachorro, três peças estão desprotegidas, sendo que não é possível proteger todas em um único movimento, logo uma peça será capturada. Portanto, a estratégia inicial de jogo terá de ser totalmente alterada a fim de beneficiar (ou proteger) os cachorros.

Problema 11 *Observando a situação atual do tabuleiro representado na Figura 68, e sabendo que um cachorro já foi capturado e que quem está jogando com o cachorro é o próximo a jogar, responda:*

a. Dos treze cães em jogo, quantos podem se movimentar?

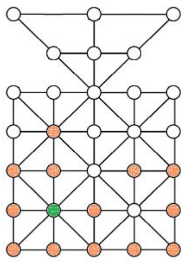
b. Quantos movimentos são possíveis?

c. Quantas jogadas são favoráveis para o cachorro?

d. Quantas jogadas serão favoráveis para a onça?

e. Suponha que um cachorro seja escolhido e movimentado ao acaso, qual a probabilidade desta jogada ser favorável ao cachorro?

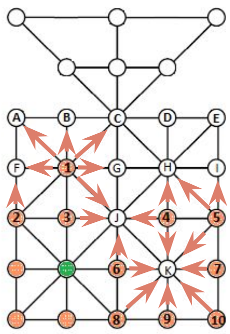
Figura 68 – Jogo da Onça - Jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando o tabuleiro representado na Figura 69, temos que dos treze cachorros em jogo, dez podem se movimentar. Destes, os cães 2, 3, 7, 8, 9 e 10 tem um movimento possível cada um; o cão 6 tem dois movimentos possíveis, os cães 4 e 5 tem três movimentos possíveis cada um, e o cão 1 tem seis movimentos possíveis, totalizando 20 possibilidades de movimento, dos quais, sete são favoráveis aos cachorros e 13 são favoráveis à onça. Logo a probabilidade de realizar um movimento de forma aleatória e este ser favorável ao cachorro é $\frac{7}{20}$.

Figura 69 – Jogo da Onça e possibilidades de movimento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

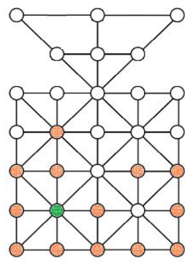
Problema 12 *Observando a situação atual do tabuleiro representado na Figura 70, e sabendo que um cachorro já foi capturado, responda:*

a. *Se o próximo movimento for realizado pelo cachorro, indique quais peças devem ser movimentadas para evitar uma captura múltipla.*

b. *Se o próximo movimento for realizado pela onça, qual movimento deve ser realizado para que ela fique em vantagem no jogo?*

c. *Suponha que o próximo movimento seja realizado pela onça, descreva o que pode acontecer na continuidade do jogo e de quantas jogadas aproximadamente a onça precisa para vencer o jogo.*

Figura 70 – Jogo da Onça - jogo em andamento

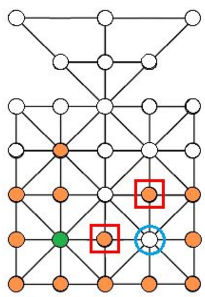


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Se o próximo movimento for realizado pelo cachorro, para impedir a captura múltipla das duas peças destacadas em vermelho na Figura 71, a posição destacada em azul deverá ser ocupada por qualquer uma das peças adjacentes.

Se o próximo movimento for realizado pela onça, esta pode se deslocar para a posição central e não capturar nenhuma peça, visto que a captura não é obrigatória. Mas para que a onça fique em vantagem, ela pode se deslocar para a direita e capturar as peças destacadas em vermelho na Figura 71.

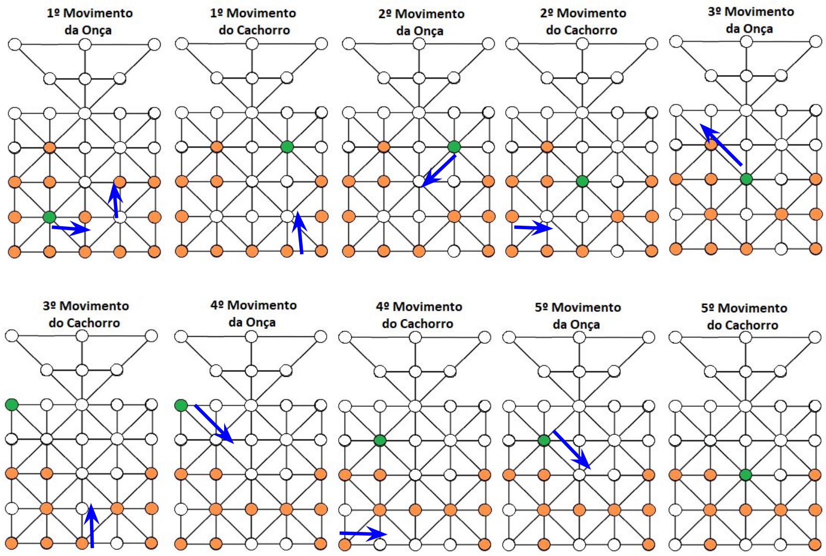
Figura 71 – Jogo da Onça - jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Na Figura 72, está representado um possível exemplo do que pode acontecer as próximas jogadas, exemplo este no qual a onça necessita aproximadamente seis jogadas para vencer o jogo, pois quando cachorro realiza o 5º movimento não será possível proteger todos os cachorros com um único movimento. Observe que com a captura múltipla de dois cachorros a dificuldade de imobilizar a onça aumenta, pois os cachorros ficam desprotegidos e desorganizados, sem uma aparente estratégia vencedora.

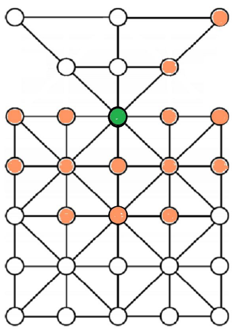
Figura 72 – Jogo da Onça - Sequência de jogadas



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 13 *Observando a Figura 73, analise a situação atual do tabuleiro e identifique qual foi o erro de estratégia cometido por quem está jogando com os cachorros, e qual a consequência desse erro para as futuras jogadas e para o resultado final do jogo.*

Figura 73 – Jogo da Onça - movimento da onça

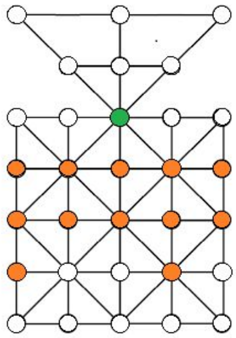


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Um dos erros identificados é que mesmo com um movimento coordenado, foi deixado mais de um cachorro desprotegido numa posição na qual dificilmente conseguirá protegê-los num único lance. Destacamos também que os cantos do quadrado principal e a toca da Onça são os melhores locais para encurralar a Onça. Com o desenvolvimento do jogo é indicado evitar ocupá-los com cachorro, pois isso fará o jogador perder tempo para criar uma estratégia eficiente para encurralar a onça em uma dessas posições.

Problema 14 *A Figura 74, que representa o Jogo da Onça em andamento. Observe que a Onça tem poucas opções de movimento, pois caso se dirija para um dos cantos, poderá ser imobilizada em cinco jogadas. Descreva as próximas cinco jogadas.*

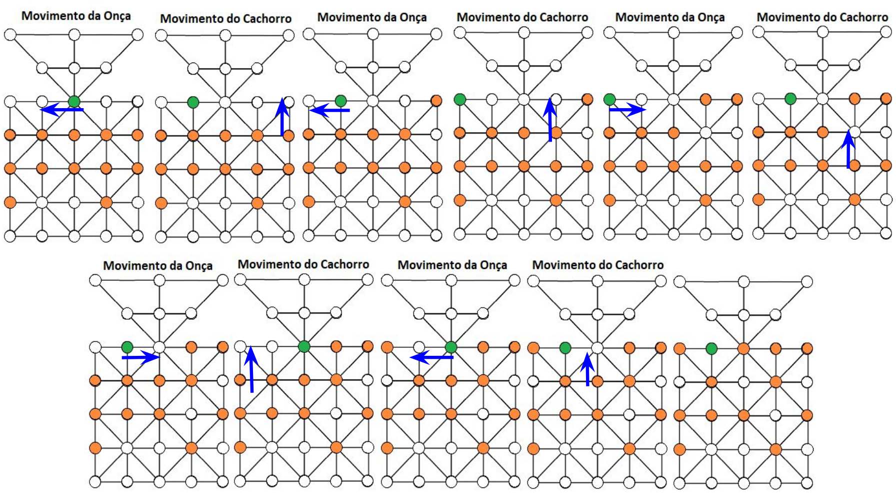
Figura 74 – Jogo da Onça - Jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observe na sequência de movimentos representados na Figura 75, que a estratégia de quem representa a onça é mantê-la perto dos cachorros, na espera que um dos cães fique desprotegido para poder capturá-lo. Entrar na toca poderia ser uma opção neste jogo, mas isso pode favorecer ainda mais os cachorros, pois estes ganham tempo para se organizar e se proteger a fim de imobilizar a onça.

Figura 75 – Jogo da Onça - Sequência de movimentos



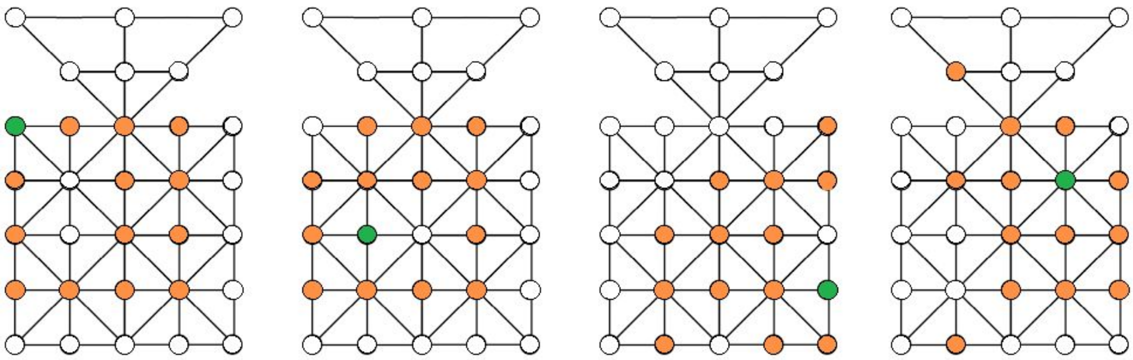
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Quem representa os cachorros os manteve todos juntos, de forma que todos ficassem protegidos, não deixando espaço vazio entre as peças. Em algumas situações é preciso movimentar uma das peças que está distante da onça, a fim de forçar o movimento da mesma para que ela fique em uma posição que permita movimentar a peça que representa o cachorro e que está perto da onça sem que essa seja capturada.

Para vencer é preciso ter paciência, analisar o movimento que será executado e prever pelo menos dois futuros movimentos analisando todas as possibilidades, inclusive as do adversário.

Problema 15 *Observe cada uma das situações representadas na Figura 76, sabendo que o próximo movimento será realizado por quem está jogando com os cachorros, use uma seta para indicar a melhor jogada, para encurralar a onça ou simplesmente para impedir que ela capture um ou mais cachorros.*

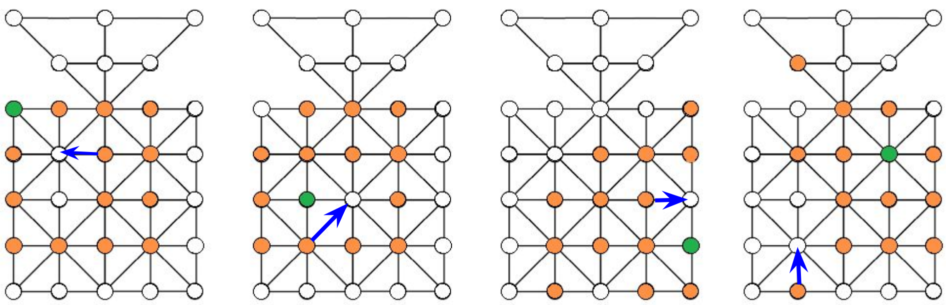
Figura 76 – Jogo da Onça - Jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Na Figura 77, está indicado com a seta a melhor opção de movimento a ser realizada pelo cachorro. No 1º e no 3º tabuleiros a onça será encurralada e no 2º e no 4º tabuleiros o movimento do cachorro impede que aconteça uma captura.

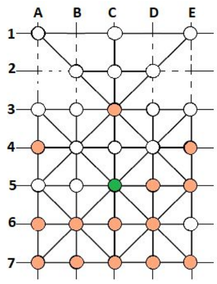
Figura 77 – Jogo da Onça - Jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 16 *Observe a situação atual do tabuleiro representado na Figura 78. Dado que o último movimento foi feito por quem joga com os cachorros. Sabemos que os próximos movimentos serão realizados pela onça, depois o cachorro e logo a seguir a onça joga novamente. Se quando a onça jogar pela segunda vez o cachorro que está na posição 5D for capturado e, logo depois da captura, a onça ficará na posição 6D, responda:*

Figura 78 – Jogo da Onça em andamento

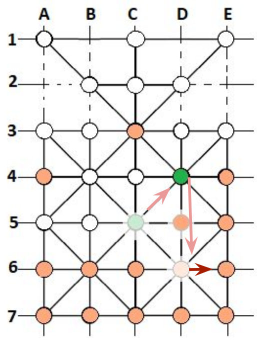


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. *Quais são os possíveis movimentos da onça e dos cachorros que aconteceram a partir da situação atual até o momento da captura.*

b. *Analise o movimento do cachorro e descreva, se era possível evitar a captura e, em caso de resposta afirmativa, de que forma seria possível evitá-la.*

Figura 79 – Descrição dos movimentos



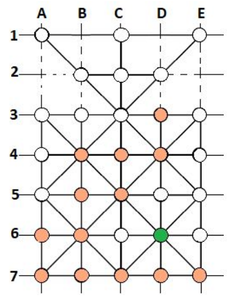
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando a Figura 79, temos que como o último movimento foi realizado pelos cachorros, o próximo movimento será realizado pela onça. Então descrevendo os possíveis movimentos, suponhamos que em seu primeiro movimento a onça saia da posição 5C e se desloque até a posição 4D. Quem representa o cachorro em sua vez de jogar movimenta o cachorro que está em 6D para a posição 6E, assim em seu segundo movimento a onça sai da posição 4D, captura o cão que está em 5D e fica na posição 6D.

Analisando o movimento do cachorro, percebemos que era possível evitar a captura em 5D não movendo o cachorro que está em 6D, e sim movimentado o cachorro 3C que também está em situação vulnerável, podendo ser capturado quando a onça ocupar as posições 3B, 3D, 4B, 4C e 4D.

Problema 17 *Observe a situação atual do tabuleiro na Figura 80, que representa um jogo em andamento. Sabendo que um cachorro já foi capturado, o último movimento foi realizado pela onça e, a onça será imobilizada na posição 6C depois de dois movimentos dos cachorros e um movimento da onça, determine:*

Figura 80 – Jogo da Onça em andamento

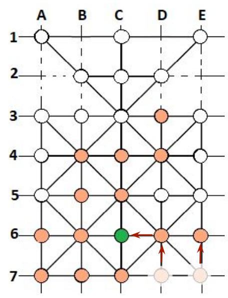


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. *Quais são os possíveis movimentos da onça e dos cachorros que aconteceram a partir da situação atual até o momento da imobilização?*

b. *Qual deveria ser o movimento da onça para evitar que ela fosse imobilizada?*

Figura 81 – Jogo da Onça - Descrição dos movimentos

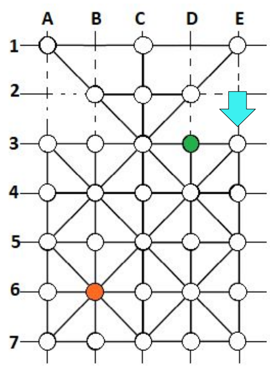


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Como o último movimento foi realizado pela onça, o próximo movimento será realizado pelos cachorros, conforme representado na Figura 81. Suponhamos que em seu próximo movimento, o cachorro saia da posição 7E e se desloque até a posição 6E, e a onça na sua vez de jogar se desloque da posição 6D para a posição 6C. Assim, em seu segundo movimento, quem representa o cachorro desloca o cão que está na posição 7D para a posição 6D, imobilizando a onça na posição 6C. Para a onça evitar ser imobilizada, esta deveria ter ido da posição 6D para a posição 5D ou 5E, pois dessa forma iria ampliar suas possibilidades de movimento e teria a possibilidade de capturar o cachorro que está na posição 4D.

Problema 18 *Supondo que um cachorro e a onça encontrem-se, respectivamente, nas posições 6B e 3D do tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 82. Suponhamos também que o cachorro só pode se mover nos sentidos positivos (para a direita e para cima) e a onça só pode se mover nos sentidos negativos (para a esquerda ou para baixo).*

Figura 82 – Jogo da Onça - Localização do cachorro e da onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

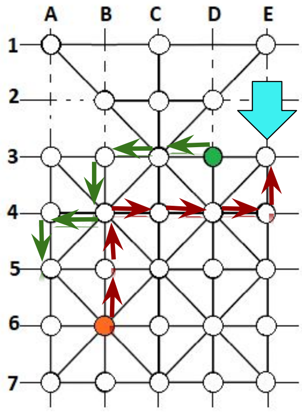
a. *Trace uma possível trajetória a ser seguida pelo cachorro para chegar na posição 3E sem ser capturado, considerando que o cachorro realiza o 1º movimento.*

b. *Trace uma possível trajetória a ser seguida pelo cachorro para chegar na posição 3E sem ser capturado, considerando que a onça realiza o 1º movimento.*

c. *Descreva uma estratégia vencedora, a ser realizada pela onça quando esta realiza o primeiro movimento, ou seja, a estratégia que deve ser usada pela onça para que capture o cachorro independente do que ele faça, impedindo o mesmo de chegar na posição 3E.*

Uma possível trajetória a ser seguida pelo cachorro para chegar na posição 3E, sem ser capturado, considerando que o cachorro realiza o 1º movimento, está representada na Figura 83. Destacamos que 6B, 5B, 4B, 4C, 4D, 4E, 3E e 3D, 3C, 3B, 4B, 4A, 5A são as trajetórias realizadas pelo cachorro e pela onça, respectivamente.

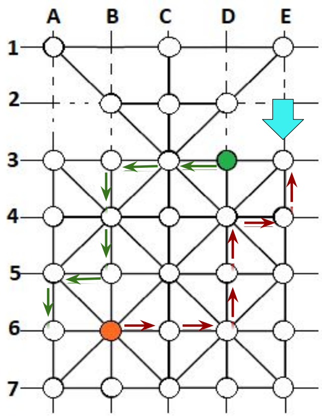
Figura 83 – Jogo da Onça - Trajetória do cachorro e da onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Uma possível trajetória a ser seguida pelo cachorro para chegar na posição 3E sem ser capturado, considerando que a onça realiza o 1º movimento esta representado na Figura 84. Neste caso 3C, 3B, 4B, 5B, 5A, 6A e 6C, 6D, 5D, 4D, 4E, 3E são as trajetórias realizadas pela onça e pelo cachorro, respectivamente.

Figura 84 – Jogo da Onça - Trajetória do cachorro e da onça

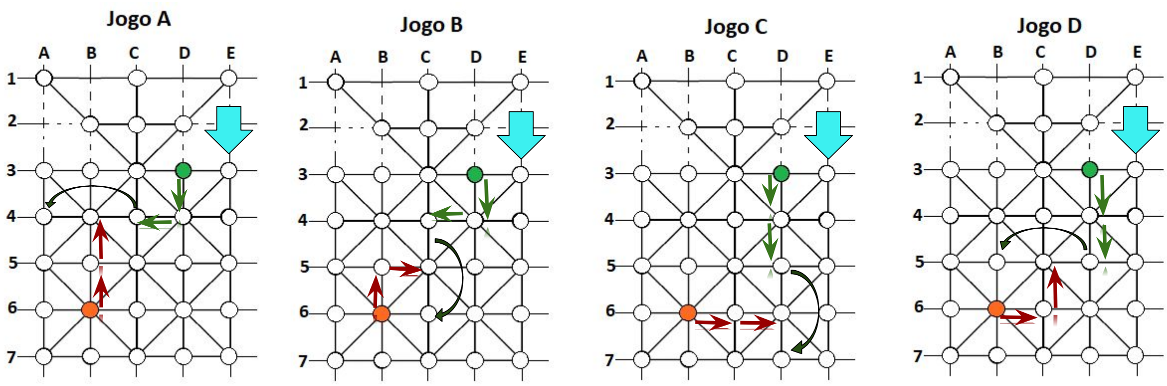


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Na Figura 85, está representada a estratégia vencedora realizada pela onça quando ela realiza o primeiro movimento, ou seja, a estratégia usada pela onça para capturar o cachorro independente do que ele faça, impedindo o mesmo de chegar na posição 3E e garantindo vitória da onça no seu primeiro movimento.

Observe que no seu primeiro movimento, a onça vai da posição 3D para a posição 4D. No seu segundo movimento a onça vai para a posição 4C se o cachorro foi para a posição 5B, como representado no Jogo A e B e, caso o cachorro se desloque para a posição 6C a onça vai para a posição 5D, como representado no Jogo C e D. Logo o cachorro será capturado, independente do que ele faça.

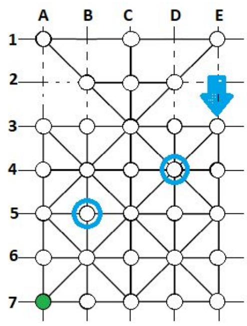
Figura 85 – Jogo da Onça - Trajetória do cachorro e da onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 19 *A onça pretende ir de 7A até 3E. Dado o tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 86, considere que o caminho terá de ser feito pelas linhas horizontais e verticais, sem passar pelas diagonais, ou seja, em cada vértice terá de optar por um movimento que a leve para o seu destino, andando apenas para a direita ou para a cima.*

Figura 86 – Jogo da Onça - Tabuleiro no plano cartesiano



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. *De quantas maneiras distintas a onça pode se deslocar da posição 7A até a posição 3E?*

b. *De quantas maneiras distintas a onça pode se deslocar da posição 7A até a posição 3E, sabendo que ela tem que passar pela posição 5B ou pela posição 4D?*

Observando o tabuleiro representado na Figura 86, temos que para a onça ir da posição 7A até a posição 3E, esta deverá se deslocar quatro vezes para a direita (D) e quatro vezes para cima (C). Por exemplo, ela pode deslocar seguindo o seguinte percurso 7B, 6B, 6C, 5C, 4C, 3C, 3D, 3E, isto é, D, C, D, C, C, C ,D, D, ou então pode se deslocar por outro percurso como 7B, 7C, 7D, 7E, 6E, 5E, 4E, 3E, isto é, D, D, D, D, C, C, C, C. Ou seja, o número total de deslocamentos é dado por permutação com repetição.

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 \tag{D.1}$$

Portanto é possível se deslocar de 70 maneiras distintas da posição 7A até a posição 3E.

Para determinar de quantas maneiras distintas a onça pode ir da posição 7A até a posição 3E, passando por 5B ou 4D, se faz a contagem do número de maneiras de se ir de 7A até 3E passando por 5B, mais o número de maneiras de se ir de 7A até 3E passando por 4D, descontando contagens repetidas, é preciso descontar as maneiras de se ir de 7A até 3E passando por 5B e por 4D.

Observe que:

I. Para ir da posição 7A até a posição 5B a onça se desloca uma vez para direita e duas vezes para cima; para ir da posição 5B até a posição 3E a onça se desloca três vezes para a direita e duas vezes para cima;

II. Para ir da posição 7A até a posição 4D a onça se desloca três vezes para a direita e três vezes para cima; e para ir da posição 4D até a posição 3E a onça se desloca uma vez para a direita e uma vez para cima;

III. Para ir da posição 7A até a posição 5B a onça se desloca uma vez para direita e duas vezes para cima; para ir da posição 5B até a posição 4D, a onça se desloca uma vez para cima e duas vezes para a direita; e para ir da posição 4D até a posição 3E a onça se desloca uma vez para cima e uma vez para a direita.

Assim, temos:

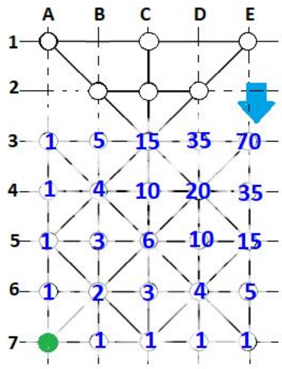
$$P_3^{2,1} \cdot P_5^{2,3} + P_6^{3,3} \cdot P_2^{1,1} - P_3^{2,1} \cdot P_3^{1,2} \cdot P_2^{1,1} = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} - \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 52 \tag{D.2}$$

Portanto é possível se deslocar de 52 maneiras distintas da posição 7A até a posição 3E passando por 5B ou por 4D.

O problema 19 também pode ser resolvido por meio da contagem de caminhos conforme representado na Figura 87. Observe que a onça tem uma maneira de chegar na posição 6A, e uma maneira de ir para a posição 7B, pois só pode ir para a direita ou para cima, não podendo andar na diagonal. Desta forma é possível chegar de duas maneiras na posição 6B, visto que o número de maneiras de chegar na posição 6B é a soma das possibilidades de chegar na posição 6A com a posição 7B.

E assim prosseguimos, preenchendo cada casa do tabuleiro com os números referentes às contagens de caminhos. Por exemplo, para determinar quantas maneiras temos

Figura 87 – Jogo da Onça - Número de trajetórias da posição 7A até a posição 3E

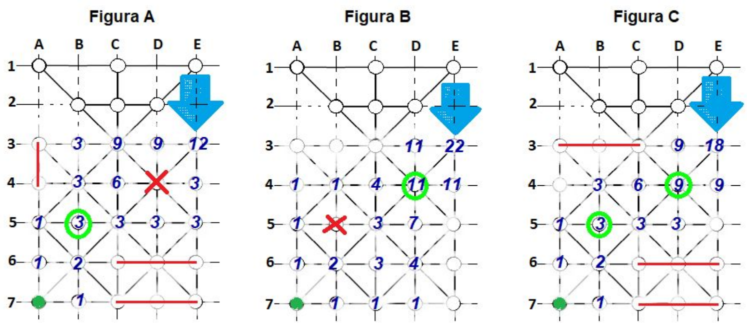


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

de chegar na posição 4C somamos as possibilidades da posição 5C com a posição 4B, que resulta em 10 possibilidades. Analogamente o número de possibilidades da posição 3E é a soma da posição 4E com a posição 3D, que resulta em 70 possibilidades.

Na Figura 88, estão representadas de quantas maneiras a onça pode se deslocar da posição 7A até a posição 3E, dividido em três casos: passando também por 5B sem passar por 4D; passando também por 4D sem passar por 5B; ou passando também por 5B e 4D. Observe que:

Figura 88 – Jogo da Onça - Número de trajetórias da posição 7A até a posição 3E passando por 5B ou 4D



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

I. A Figura A ilustra de quantos modos se pode ir até 3E, passando por 5B mas não passando por 4D;

II. A Figura B ilustra de quantos modos se pode ir até 3E, não passando por 5B mas passando por 4D;

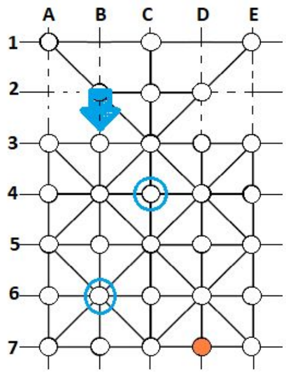
III. A Figura C ilustra de quantos modos se pode ir até 3E, passando por 5B e passando também por 4D.

Nesse caso, não existe contagem repetida, então o total é a soma dos três casos apresentados na Figura 88, isto é, $12 + 22 + 18 = 52$.

Portanto existem 70 maneiras distintas de ir da posição 7A até a posição 3E, e 52 maneiras distintas de ir da posição 7A até a posição 3E passando por 5B ou por 4D.

Problema 20 *Dado o tabuleiro representado na Figura 89, determine de quantas maneiras o cachorro pode ir da posição 7D até a posição 3B, seguindo as restrições de cada item.*

Figura 89 – Tabuleiro no plano cartesiano com um cachorro na posição 7D



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. *O cachorro deve andar sempre para cima e para a esquerda, sem andar pelas diagonais.*

b. *O cachorro deve andar sempre para cima e para a esquerda, além disso ele pode andar pelas diagonais oblíquas esquerdas.*

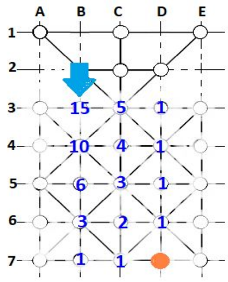
c. *O cachorro deve passar pela posição 6B ou 4C antes de chegar na posição 3B, ele pode andar para a esquerda, para cima e na diagonal, sendo que não pode retroceder e nem andar para a direita.*

Observando o tabuleiro representado na Figura 89, para o cachorro ir da posição 7D até a posição 3B andando sempre para cima e para a esquerda, sem andar pelas diagonais, ele deverá deslocar-se duas vezes para a esquerda (E) e quatro vezes para cima (C). Por exemplo: ele pode deslocar-se seguindo o percurso 6D, 6C, 5C, 4C, 4B, 3B, isto é, C, E, C, C, E, C; ou então, pode ir por outro percurso como 7C, 7B, 6B, 5B, 4B, 3B, isto é, E, E, C, C, C, C. Portanto, o número total de deslocamentos é dado por permutação com repetição. Vejamos:

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15 \tag{D.3}$$

Essa mesma questão pode ser resolvida por meio da contagem de caminhos conforme representado na Figura 90.

Figura 90 – Número de maneiras distintas do cachorro ir da posição 7D até a posição 3B



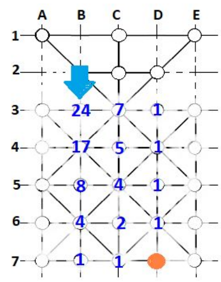
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observe que o cachorro tem uma maneira de chegar na posição 6D, e uma maneira de ir para a posição 7C, pois só pode se deslocar para a esquerda e para cima e não pode andar na diagonal. Desta forma é possível chegar de duas maneiras na posição 6C, visto que o número de maneiras de chegar na posição 6C é a soma das possibilidades de chegar na posição 6D com a posição 7C. E assim prosseguimos.

Portanto é possível se deslocar de 15 maneiras distintas da posição 7D até a posição 3B, se deslocando apenas para cima e para a esquerda.

Para determinar o número de maneiras do cachorro ir da posição 7D até a posição 3B andando sempre para cima e para a esquerda, podendo andar pelas diagonais, desde que seja oblíqua esquerda, podemos fazer a contagem de caminhos conforme representado na Figura 91.

Figura 91 – Número de maneiras distintas do cachorro ir da posição 7D até a posição 3B, podendo passar pelas diagonais

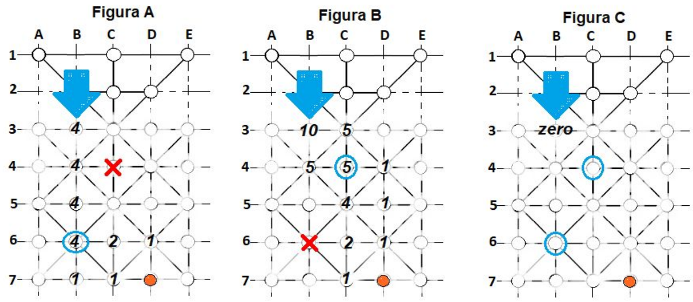


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Portanto, temos 24 maneiras distintas do cachorro ir da posição 7D até a posição 3B andando sempre para cima ou para a esquerda ou pela diagonal (oblíqua esquerda).

Para determinar o número de maneiras do cachorro ir da posição 7D até a posição 3B, passando primeiro pela posição 6B ou 4C antes de chegar na posição 3B, sendo que pode andar para a esquerda, para cima ou na diagonal, não pode retroceder e não pode andar para a direita, podemos fazer a contagem de caminhos conforme representado na Figura 92.

Figura 92 – Número de maneiras distintas do cachorro ir da posição 7D até a posição 3B, passado por 6B ou 4C



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

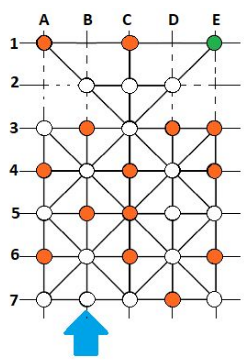
A Figura 92 (A) representa as possibilidades de percurso passando pela posição 6B sem passar pela posição 4C; na Figura B os possíveis caminhos que não passam por 6B e que passam por 4C e, a Figura C os caminhos que passam pelas casas 6B e 4C.

Há 4 maneiras distintas de ir de 7D até a posição 3B passando por 6B e não passando por 4C e 10 maneiras distintas de ir de 7D até a posição 3B não passando por 6B e passando por 4C. Observe que não é possível andar pela direita, portanto não existe nenhum caminho possível para que o cachorro passe pelas duas posições 6B e 4C.

Logo temos 14 maneiras de distintas de ir de 7D até a posição 3B passando por 6B ou por 4C.

Problema 21 *Considere o tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 93, onde os cachorros foram colocados de maneira aleatória. O caminho terá de ser feito pela onça com movimentos para baixo, para direita, para a esquerda ou na diagonal, sem retroceder e, sendo que em cada vértice terá de se optar por um caminho que a leve da posição 1E até a posição 7B sem passar duas vezes pelo mesmo lugar.*

Figura 93 – Tabuleiro do jogo da onça com cachorros em posição aleatória



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

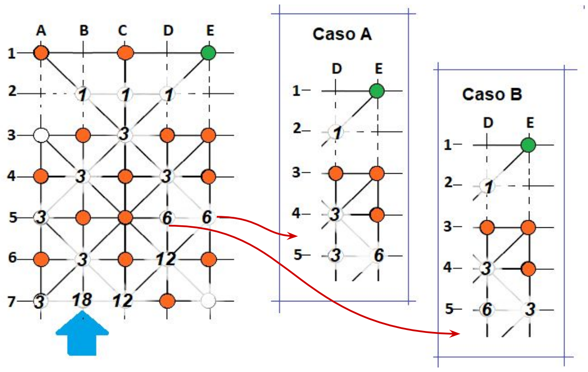
a. *Determine de quantas maneiras distintas a onça pode deslocar-se da posição 1E até a posição 7B sem capturar e sem alterar a posição dos cachorros que estão no tabuleiro.*

b. *Suponhamos que a onça pode capturar os cachorros que estão nas casas 5B ou 5C quando for possível. De quantas maneiras distintas a onça pode deslocar-se da posição 1E até a posição 7B?*

c. *Indique uma peça que representa o cachorro que ao ser trocada de lugar para uma posição adjacente diminui para menos da metade o número de possibilidades da onça deslocar-se da posição 1E até a posição 7B, sabendo que a onça pode capturar os cachorros das posições 5B ou 5C quando for possível.*

Observando o tabuleiro representado na Figura 94, percebemos que a onça tem uma maneira de ir até as posições 2D, 2C e 2E. O número de maneiras de chegar na posição 3C é a soma das possibilidades de chegar em 2B, 2C e 2D; logo temos três maneiras de chegar nas posições: 4B e 4D.

Figura 94 – Tabuleiro do jogo da onça com cachorros em posição aleatória



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

O número de maneiras de chegar nas posições 5D e 5E, não é soma e sim a sobreposição de dois casos, Caso A e Caso B, conforme destacado na Figura 94. Todas as possibilidades de ir de 2D até 6D são:

I. 2D, 3C, 4D, 5D, 6D;

II. 2D, 3C, 4D, 5D, 5E, 6D;

III. 2D, 3C, 4D, 5E, 6D;

IV. 2D, 3C, 4D, 5E, 5D, 6D;

V. 2D, 2C, 3C, 4D, 5D, 6D;

VI. 2D, 2C, 3C, 4D, 5D, 5E, 6D;

VII. 2D, 2C, 3C, 4D, 5E, 6D;

VIII. 2D, 2C, 3C, 4D, 5E, 5D, 6D;

IX. 2D, 2C, 2B, 3C, 4D,5D, 6D;

X. 2D, 2C, 2B, 3C, 4D, 5D, 5E, 6D;

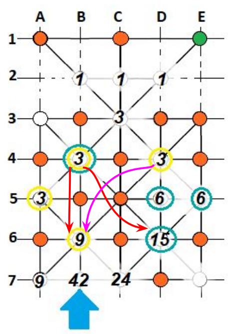
XI. 2D, 2C, 2B, 3C, 4D, 5E, 6D;

XII. 2D, 2C, 2B, 3C, 4D, 5E, 5D, 6D;

Para determinar quantas maneiras temos de chegar na posição 6D somamos as possibilidades da posição 5D com a posição 5E, que resulta em 12 possibilidades, sendo que esse valor repete em 7E. Analogamente o número de possibilidades de chegar na posição 7C é a soma da posição 6B com a posição 6D, que resulta em 15 possibilidades, consequentemente o número de possibilidade de chegar na posição 7B é a soma das possibilidades de chegar em 7A, 6B e 7C.

Portanto a onça tem 18 maneiras distintas de se deslocar da posição 1E até a posição 7B sem capturar e sem alterar a posição dos cachorros que estão no tabuleiro.

Figura 95 – Tabuleiro do jogo da onça com cachorros em posição aleatória



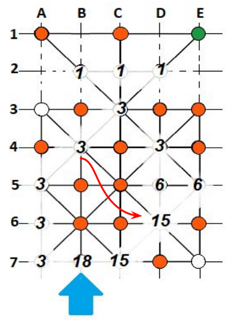
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando o tabuleiro representado na Figura 95, percebemos algumas diferenças relativas ao item A, como as 9 possibilidades de se chegar na posição 6B, pois é possível somar as possibilidade de ir da posição 4B até 6B capturando o cachorro que está na posição 5B com a possibilidade de ir da posição 4D até 6B capturando o cachorro que está na posição 5C. Ainda temos, o número de maneiras de chegar em 5A, e o número de maneiras que temos de chegar na posição 6D que é a soma das possibilidades de chegar na posição 5D com a posição 5E, mais três possibilidades, pois é possível ir da posição 4B até 6D capturando o cachorro que está na posição 5C.

Portanto a onça tem 42 maneiras distintas de deslocar-se da posição 1E até a posição 7B podendo capturar quando possível os cachorros que estão nas posições 5B ou 5C.

Observando o tabuleiro representado na Figura 96, percebemos que a peça que está na posição 6A, e que representa o cachorro, ao ser trocada de lugar para a posição adjacente 6B, o número de possibilidades da onça se deslocar da posição 1E até a posição 7B diminui para menos da metade, sendo que passou de 42 para 18 possibilidades.

Figura 96 – Tabuleiro do jogo da onça com cachorros em posição aleatória

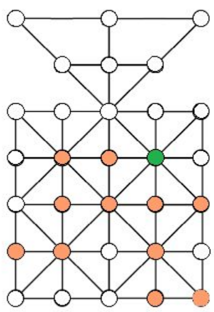


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Isso se deve ao fato de que ao fazer essa troca de posições as peças que estavam nas posições 5B e 5C não podem mais ser capturadas pelas peças que estão nas posições 4B e 4D respectivamente. Logo se percebe porque é importante manter as peças em posições adjacentes evitando assim capturas e aumentando as chances dos cachorros vencerem o jogo.

Problema 22 *Observe a situação atual do tabuleiro representada na Figura 97. Dado que o próximo movimento será realizado pelos cães, responda:*

Figura 97 – Jogo da Onça - jogo em andamento



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

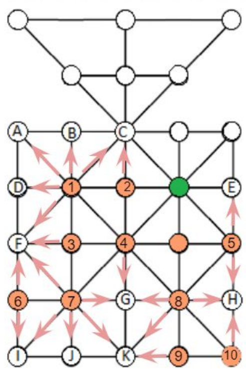
a. *Quais cachorros não devem ser movimentados para impedir que um dos cães seja capturado pela onça em seu próximo movimento?*

b. *Suponha que o próximo movimento seja aleatório, isto é, que um cachorro seja escolhido ao acaso. Qual a probabilidade do movimento ser favorável aos cães?*

Analisando todas as possibilidades de movimento, observamos que para impedir a onça de capturar um dos cachorros no seu próximo movimento, não se deve movimentar os cachorros representados pelos números 1, 7 e 8 para qualquer uma das posições adjacentes.

Observando o tabuleiro representado na Figura 98, temos que dos onze cachorros em jogo, dez podem se movimentar, destes, os cães 2, 3, 4, 9 e 10 tem um movimento possível cada um; os cachorros 5 e 6 tem dois movimentos possíveis, o 8 tem três movimentos possíveis, e os cachorros 1 e 7 tem cinco movimentos possíveis cada, totalizando 22 possibilidades de movimento, desses oito são favoráveis aos cachorros e quatorze são favoráveis à onça.

Figura 98 – Jogo da onça e possibilidades de movimento dos cachorros



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

São movimentos favoráveis ao cachorro:

I. Mover o cachorro 3 para a posição F;

II. Mover o cachorro 4 para a posição G;

III. Mover o cachorro 5 para a posição E;

IV. Mover o cachorro 5 para a posição H;

V. Mover o cachorro 6 para a posição F;

VI. Mover o cachorro 6 para a posição I;

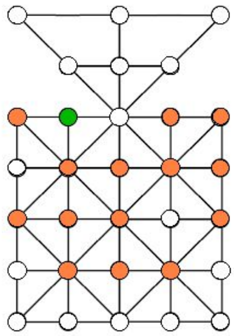
VII. Mover o cachorro 9 para a posição K;

VIII. Mover o cachorro 10 para a posição H.

Logo a probabilidade de realizar um movimento de forma aleatória e este ser favorável ao cachorro é $\frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

Problema 23 *Sabendo que quem representa os cachorros é o próximo a jogar, observe a disposição das peças no tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 99, e determine a probabilidade da onça ser imobilizada nesta jogada.*

Figura 99 – Probabilidade da onça ser imobilizada na próxima jogada dos cachorros

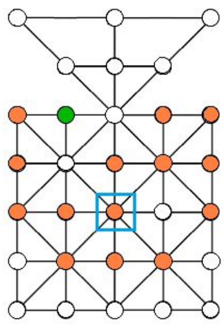


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Conforme Figura 99, verificamos que os cachorros têm vinte e duas possibilidades de movimento, sendo que destes dois resultam na imobilização da onça. Portanto $\frac{2}{22} = \frac{1}{11}$ é a probabilidade da onça ser imobilizada no próximo movimento do cachorro.

Problema 24 *Dado que em cada jogada, todos os possíveis movimentos são equiprováveis, isto é, tem a mesma probabilidade e sabendo que o próximo movimento será realizado pela onça, determine a probabilidade de a onça poder capturar a peça em destaque no centro do tabuleiro representado na Figura 100, ao realizar o segundo movimento.*

Figura 100 – Probabilidade da onça capturar o cachorro que ocupa a posição central no tabuleiro.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

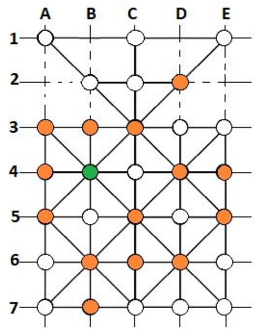
Observando a disposição das peças no tabuleiro, percebemos que se a onça se deslocar para a direita, o cachorro que ocupa a posição central não poderá ser capturado, mas se a onça se deslocar para baixo, quem joga com o cachorro tem 19 possibilidades de movimento em sua próxima jogada, sendo que entre os possíveis movimentos, cinco conduzem a captura do cachorro que ocupa a posição central.

Logo a probabilidade da onça poder capturar o cachorro que está na posição central é:

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{19} = \frac{5}{38} \tag{D.4}$$

Problema 25 *Dado o tabuleiro representado na Figura 101, suponhamos que o próximo movimento será realizado pela onça, e que em cada jogada, todos os possíveis movimentos são equiprováveis, isto é, tem a mesma probabilidade. Determine a probabilidade da onça capturar uma das peças ao realizar o seu segundo movimento.*

Figura 101 – Probabilidade da onça capturar um dos cachorros



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

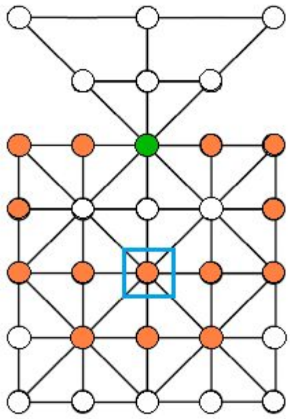
Analisando a situação do jogo na Figura 101, percebemos que a onça tem duas opções de movimento: se a onça desloca-se para a posição 4C, os cachorros terão a possibilidade de realizar 33 movimentos e, destes, 28 resultam em captura, enquanto que se a onça deslocar-se para a posição 5B os cachorros terão a possibilidade de realizar 33 movimentos e, destes, 27 resultam em captura.

Portanto a probabilidade da onça capturar uma peça ao realizar o seu segundo movimento é dado por:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{28}{33} + \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{33} = \frac{55}{66} = \frac{5}{6} \tag{D.5}$$

Problema 26 *Observe a disposição das peças no tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 102. Sabendo que a onça se moverá de forma aleatória e, em seguida, um dos cachorros também se moverá de forma aleatória, determine a probabilidade de no segundo movimento da onça ela possa capturar o cachorro que ocupa a posição central do tabuleiro.*

Figura 102 – Probabilidade da onça capturar o cachorro que ocupa a posição central no tabuleiro.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando a disposição das peças no tabuleiro, percebemos que:

I. A onça pode se deslocar para qualquer uma das três posições dentro da toca da onça, mas não terá como capturar a peça que ocupa a posição central do tabuleiro;

II. Se a onça se deslocar em uma das diagonais a probabilidade de capturar a peça que representa o cachorro que ocupa a posição central é de $\frac{4}{20}$, pois dos 20 possíveis movimentos que se pode fazer com qualquer uma das peças que representam os cachorros, quatro resultam na captura do cachorro que está na posição central do tabuleiro;

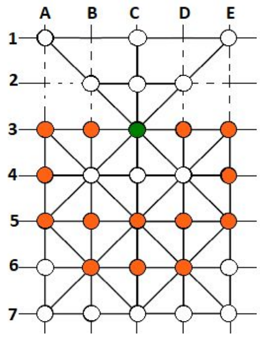
III. Se a onça se deslocar para baixo, a probabilidade de capturar a peça que representa o cachorro que ocupa a posição central é de $\frac{1}{25}$, pois dos 25 possíveis movimentos que se pode fazer com qualquer uma das peças que representam os cachorros, apenas um resulta na captura do cachorro que está na posição central do tabuleiro.

Logo a probabilidade da peça que representa o cachorro que está na posição central é:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{20} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{20} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{150} = \frac{11}{150} \tag{D.6}$$

Problema 27 *Observe a disposição das peças no tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 103. Considerando que um cachorro se desloca primeiro e em seguida a onça, e admitindo que a probabilidade de cada sequência de dois movimentos, como descrita, é igual, determine a probabilidade da onça capturar um cachorro. Restrinja os cachorros que podem ser movidos exclusivamente aos que se encontram nas posições 3A, 3B, 3D, 3E, 5C e 5D.*

Figura 103 – Probabilidade da onça capturar o cachorro que ocupa a posição central no tabuleiro.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Para cada movimento de um dos cachorros, a onça tem um número de movimentos possíveis, que podem ou não ser uma captura. Analisemos cada um dos casos que resultam na captura de uma peça:

I. Se o cachorro da posição 3A se desloca para a posição 4B, a onça tem 6 opções de movimento, sendo que um destes resulta na captura de uma peça que representa o cachorro;

II. Se o cachorro da posição 3B se desloca para a posição 4B, a onça tem 6 opções de movimento, sendo que nenhum resulta na captura de um cachorro;

III. Se o cachorro da posição 3D se desloca para a posição 4D, a onça tem 6 opções de movimento, sendo que nenhum resulta na captura de um cachorro;

IV. Se o cachorro da posição 3E se desloca para a posição 4D, a onça tem 6 opções de movimento, sendo que um destes resulta na captura de uma peça que representa o cachorro;

V. Se o cachorro da posição 5B se desloca para a posição 4B, a onça tem 5 opções de movimento, sendo que nenhum resulta na captura de um cachorro;

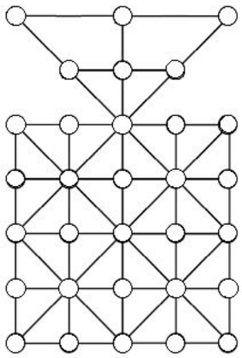
VI. Se o cachorro da posição 5C se desloca para as posições 4B ou 4D a onça tem 5 opções de movimento, sendo que nenhum resulta na captura de um cachorro, mas se o cachorro da posição 5C se deslocar para a posição 4C a onça terá 6 opções de movimento, sendo que um destes resulta na captura de uma peça que representa o cachorro;

VII. Se o cachorro da posição 5D se desloca para a posição 4D, a onça tem 5 opções de movimento, sendo que nenhum resulta na captura de um cachorro;

Logo a probabilidade da onça capturar uma peça é $\frac{3}{50}$, pois dos cinquenta movimentos possíveis da onça, três resultam na captura de uma peça.

Problema 28 *De quantos modos podemos colocar cinco cachorros em um tabuleiro do Jogo da Onça, Figura 104, de modo que não haja dois cachorros na mesma linha ou na mesma coluna, e que nenhum ocupe a toca da onça?*

Figura 104 – Jogo da Onça - Tabuleiro



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Haverá um cachorro em cada linha e em cada coluna, visto que a parte quadrada do tabuleiro possui cinco linhas e cinco colunas. A posição do cachorro da primeira linha pode ser escolhida de cinco modos diferentes, o da segunda linha de quatro e assim sucessivamente.

Logo a resposta é $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ modos de colocar cinco cachorros em um tabuleiro sem que tenha dois cachorros na mesma linha ou na mesma coluna.

Problema 29 *De quantas formas podemos dispor quatro cachorros e uma onça no tabuleiro do Jogo da Onça, Figura 104, de forma que em cada linha e em cada coluna da região quadrada haja só um animal, e que nenhum ocupe a toca da onça?*

O número total de maneiras que podemos dispor 4 cachorros e 1 onça de forma que em cada linha e em cada coluna haja só um animal, e que nenhum ocupe a região triangular, é dada por $5 \cdot 5! = 5 \cdot 120 = 600$. Para cada configuração do Problema 28 queremos trocar um dos cachorros pela onça, logo cada disposição dos 5 cachorros que tínhamos dá origem a outras 5 (convertendo um cachorro em onça).

Problema 30 *De quantas formas podemos dispor 5 cachorros e 1 onça no tabuleiro do Jogo da Onça, Figura 104, de forma que em cada linha e em cada coluna da parte quadrada do tabuleiro haja só um cachorro, sabendo que apenas a onça pode ocupar a toca da onça?*

Conforme o Problema 28, há 120 modos de colocar cinco cachorros em um tabuleiro sem que tenha dois cachorros na mesma linha ou na mesma coluna. O tabuleiro no total possui 31 posições, parte quadrada e parte triangular, como cinco já estão ocupadas temos 26 posições diferentes para colocar a onça, ou seja, para cada disposição dos cachorros sobram 26 para dispor a onça. Portanto, temos $26 \cdot 5! = 26 \cdot 120 = 3120$ formas de dispor 5 cachorros e 1 onça de forma que em cada linha e em cada coluna da parte quadrada haja só um cachorro, sabendo que apenas a onça pode ocupar a toca da onça.

Problema 31 *De quantas maneiras distintas podemos colocar duas peças, sendo que uma representa a onça e o outra o cachorro no tabuleiro do jogo da onça que está vazio e representado na Figura 104, consta na página 135?*

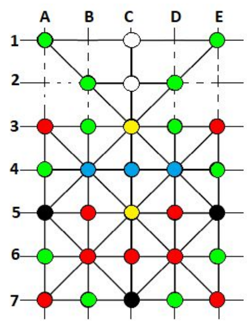
Observando o tabuleiro da Figura 104, consta na página 135, percebemos que para colocar a primeira peça temos 31 posições. Já a segunda peça não pode ocupar o mesmo lugar da primeira, então temos 30 posições disponíveis, assim temos $31 \cdot 30 = 930$. Portanto podemos colocar duas peças diferentes no tabuleiro, que representam a onça e o cachorro, de 930 maneiras distintas. O mesmo problema pode ser resolvido usando a fórmula de arranjo. Vejamos:

$$A_{31}^{2} = \frac{31!}{(31-2)!} = 31 \cdot 30 = 930 \tag{D.7}$$

Problema 32 *De quantas maneiras distintas podemos colocar duas peças distintas, uma que representa o cachorro e a outra a onça no tabuleiro do Jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, visto que este está vazio, de forma que a onça fique em uma posição que não consiga capturar o cachorro?*

Dividimos as 31 casas do tabuleiro em seis grupos:

Figura 105 – Jogo da Onça - Tabuleiro colorido de acordo com a possibilidade de capturar um cachorro



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

(a) as 4 posições que são vértices da parte quadrada do tabuleiro e as 5 posições internas que estão destacadas em vermelho na Figura 105, sendo estas: 3A, 3E, 5B, 5D, 6B, 6C, 6D, 7A e 7E;

(b) as 8 posições que são borda da parte quadrada do tabuleiro, mas que não são os casos pintados de vermelho e verde, nem a posição central superior na entrada da parte triangular do tabuleiro, isto é, a entrada da toca da onça, e as 4 posições que estão na parte triangular do tabuleiro, isto é na toca da onça, destacadas em verde na Figura 105, sendo estas: 1A, 1E, 2B, 2D, 3B, 3D, 4A, 4E, 6A, 6E, 7B e 7D;

(c) as 3 posições que são borda da parte quadrada do tabuleiro, mas que não são vértice nem a posição central superior na entrada da parte triangular do tabuleiro, isto é, não é a entrada da toca da onça, destacadas em preto na Figura 105, sendo estas: 5A, 5E e 7C;

(d) as 3 posições internas que estão destacadas em azul na Figura 105, sendo estas: 4B, 4C e 4D;

(e) a posição central da parte central da parte quadrada do tabuleiro e a posição que fica na borda e é a posição central superior na entrada da parte triangular do tabuleiro, isto é, a entrada da toca da onça que estão destacadas em amarelo na Figura 105, sendo estas: 3C e 5C;

(f) as 2 posições que estão na parte triangular do tabuleiro, isto é na toca da onça, destacadas em branco na Figura 105, sendo estas: 1C e 2C;

Vamos separar a contagem de acordo com a posição ocupada pela onça:

(a) Há 9 posições possíveis para a onça e para cada uma delas 27 posições para o cachorro;

(b) Há 12 posições possíveis para a onça e para cada uma delas 28 posições para o cachorro;

(c) Há 3 posições possíveis para a onça e para cada uma delas 25 posições para o cachorro;

(d) Há 3 posições possíveis para a onça e para cada uma delas 26 posições para o cachorro;

(e) Há 2 posições possível para a onça e para cada uma delas 22 posições para o cachorro;

(f) Há 2 posições possíveis para a onça e para cada uma delas 29 posições para o cachorro.

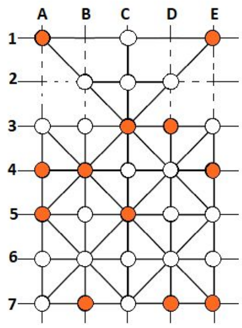
A resposta é:

$$9 \cdot 27 + 12 \cdot 28 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 26 + 2 \cdot 22 + 2 \cdot 29 = 834 \tag{D.8}$$

Portanto temos 834 maneiras distintas de colocar duas peças distintas, uma que representa o cachorro e a outra a onça no tabuleiro representado na Figura 104, consta na página 135, de forma que a onça fique em uma posição que não consiga capturar o cachorro.

Problema 33 *De quantas formas distintas podemos colocar três peças no tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 106, onde já foram posicionados aleatoriamente doze dos quatorze cachorros do jogo, sendo que duas são iguais às peças que já estão no tabuleiro e representam o cachorro, e a terceira é distinta das demais e representa a onça, de maneira que a onça fique em uma posição que não possa capturar nenhum dos cachorros, inclusive os que já estão no tabuleiro.*

Figura 106 – Jogo da Onça com doze cachorros organizados aleatoriamente



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Para determinar de quantas maneira podemos colocar a onça e dois cachorros evitando a captura dos cachorros que já estão no tabuleiro, e colocando os cachorros em posições que não podem ser capturados, vamos analisar cada uma das posições que não estão ocupadas.

I. Se a onça ocupar a posição 1C, o número de maneiras distintas de colocar os dois cachorros é dada por C_{18}^{2}, pois temos 18 posições possíveis para colocar os dois cachorros que ainda não estão no tabuleiros, visto que das 31 posições, 12 estão ocupadas por cachorros e uma posição está ocupada pela onça;

II. Se a onça ocupar a posição 2D o número de maneiras de colocar dois cachorros é dada por $C_{17}^{2} + 1$, pois se for colocado um cachorro na posição 2C o outro obrigatoriamente deve ficar na posição 2B, e se a posição 2C não for ocupada, temos C_{17}^{2} maneiras de colocar os dois cachorros;

III. Se a onça ocupar a posição 2C, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 4C para evitar que o cachorro que está em 3C seja capturado, e o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 17 outras posições restantes;

IV. Se a onça ocupar a posição 2B, um dos cachorros deve ser obrigatoriamente colocado na posição 4D para evitar que o cachorro que está em 3C seja capturado, e o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 17 outras posições restantes;

V. Se a onça está na posição 3A, o número de possibilidades distintas de colocar os dois cachorros é dada por C_{18}^{2};

VI. Se a onça ocupar a posição 3B, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 5B para evitar que o cachorro que está na posição 4E seja capturado, e o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 17 outras posições restantes;

VII. Se a onça ocupar a posição 3E, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 5E para evitar que o cachorro que está na posição 4B seja capturado, e o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 17 outras posições restantes;

VIII. Se a onça ocupar a posição 4C, os cachorros que estão nas posições 3C e 5C devem ser protegidos para não serem capturados, logo um cachorro deve ser colocado na posição 2C e o outro na posição 6C, o que pode ser feito de uma única maneira;

IX. Se a onça ocupar a posição 4D, os cachorros que estão nas posições 3C e 5C devem ser protegidos para não serem capturados, logo um cachorro deve ser colocado na posição 2B e o outro na posição 6B, o que pode ser feito de uma única maneira;

X. Se a onça ocupar a posição 5B, os cachorros que estão nas posições 4B e 5C devem ser protegidos, logo um dos cachorros deve ser colocado na posição 3B e o outro na posição 5D, o que pode ser feito de uma única maneira;

XI. Se a onça ocupar a posição 5D, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 5B para evitar que o cachorro que está na posição 5C seja capturado, logo o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 17 outras posições restantes;

XII. Se a onça ocupar a posição 5E, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 3E para evitar que o cachorro que está na posição 4E seja capturado, logo o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 16 outras posições entre as 17 restantes, pois não é possível ocupar a posição 6D, visto que nesta posição o cachorro não tem como ser protegido;

XIII. Se a onça ocupar a posição 6A, o número de maneiras de colocar dois cachorros é dada por $C_{17}^{2} + 1$, pois se for colocado um cachorro na posição 6B o outro obrigatoriamente deve ficar na posição 6C, e se a posição 6B não for ocupada, temos C_{17}^2 de colocar os dois cachorros;

XIV. Se a onça ocupar a posição 6B, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 4D para evitar que o cachorro que está na posição 5C seja capturado, logo o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 16 outras posições entre as 17 restantes, pois não é possível ocupar a posição 6C, visto que nesta posição o cachorro não tem como ser protegido;

XV. Se a onça ocupar a posição 6C, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 4C para evitar que o cachorro que está na posição 5C seja capturado, logo o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 15 outras posições entre as 17 restantes, pois não é possível ocupar as posições 6B e 6D, visto que nestas posições o cachorro não tem como ser protegido;

XVI. Se a onça ocupar a posição 6D, o número de maneiras de colocar dois cachorros é dada por $C_{16}^2 + 2$, pois se for colocado um cachorro na posição 5D o outro obrigatoriamente deve ficar na posição 4D ou se um cachorro for colocado na posição 6C o outro obrigatoriamente deve ficar na posição 6B, porém se as posições 5D e 6C não forem ocupadas, temos C_{16}^2 de colocar os dois cachorros;

XVII. Se a onça ocupar a posição 6E, o número de maneiras de colocar dois cachorros é dada por $C_{17}^2 + 1$, pois se for colocado um cachorro na posição 6D o outro obrigatoriamente deve ficar na posição 6C, e se a posição 6D não for ocupada, temos C_{17}^2 de colocar os dois cachorros;

XVIII. Se a onça ocupar a posição 7A, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 7C para evitar que o cachorro que está na posição 7B seja capturado, logo o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 17 posições restantes;

XIX. Se a onça ocupar a posição 7C, um dos cachorros obrigatoriamente deve ocupar a posição 7A para evitar que o cachorro que esta na posição 7B seja capturado, logo o outro cachorro pode ser colocado em qualquer uma das 16 outras posições entre as 17 restantes, pois não é possível ocupar a posição 6D, visto que nesta posição o cachorro não tem como ser protegido.

Seguindo tais restrições, temos:

$$\begin{aligned}
&C_{18}^2 + C_{17}^2 + 1 + 17 + 17 + C_{18}^2 + 17 + 17 + 1 + 1 + 1 + 17 + 16 + \\
&C_{17}^2 + 1 + 16 + 15 + C_{16}^2 + 2 + C_{17}^2 + 1 + 17 + 16 \\
&= 2 \cdot C_{18}^2 + 3 \cdot C_{17}^2 + C_{16}^2 + 6 \cdot 17 + 3 \cdot 16 + 15 + 2 + 6 \cdot 1 \\
&= 2 \cdot \frac{18!}{16! \cdot 2!} + 3 \cdot \frac{17!}{15! \cdot 2!} + \frac{16!}{14! \cdot 2!} + 173 = 1.007
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Portanto existem 1.007 maneiras distintas de colocar dois cachorros conforme as restrições do enunciado.

Problema 34 *Considere o tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 104, consta na página 135, sem nenhuma peça. Responda:*

a. *De quantas maneiras distintas você pode colocar duas peças iguais, que representam dois cachorros no tabuleiro do jogo da onça?*

b. *Quantas são as opções de colocar duas peças no tabuleiro, sendo uma dentro da toca, considere que a toca é composta de sete posições, e outra fora da toca da onça?*

c. *De quantas maneiras distintas é possível colocar cinco peças iguais que representam o cachorro no tabuleiro do Jogo da Onça?*

d. *Seja n um número nattural, tal que* $1 < n < 31$*, de quantas maneiras distintas é possível colocar n cachorros no tabuleiro do Jogo da Onça?*

Para determinar o número de opções de colocar duas peças iguais no tabuleiro, devemos escolher duas entre as 31 posições, assim temos:

$$C_{31}^{2} = \frac{31!}{29! \cdot 2!} = \frac{31 \cdot 30}{2} = 465 \tag{D.10}$$

Observe que se tem sete posições dentro da toca da onça e 24 fora da toca da onça, então para calcular quantas opções temos de escolher uma posição dentro da toca e outra fora, logo temos que:

$$C_{24}^{1} \cdot C_{7}^{1} = 7 \cdot 24 = 168 \tag{D.11}$$

O número de opções de escolher cinco entre as 31 posições para colocar as peças é dada por:

$$C_{31}^{5} = \frac{31!}{26! \cdot 5!} = 169.911 \tag{D.12}$$

O número de opções de escolher n entre as 31 posições para colocar as peças é dada por:

$$C_{31}^{n} = \frac{31!}{(31-n)! \cdot n!}, \qquad n \leq 31 \tag{D.13}$$

Problema 35 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 104, consta na página 135, determine:*

a. *De quantas maneiras distintas é possível alinhar cinco peças que representam o cachorro, de forma que ocupem posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro?*

b. *De quantas maneiras distintas é possível dispor cinco peças que representam o cachorro, de maneira que as peças não fiquem alinhadas em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro?*

c. *De quantas maneiras distintas é possível alinhar cinco peças em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro, sendo que quatro representam o cachorro e uma, diferente, representa a onça?*

O tabuleiro do Jogo da Onça, representado na Figura 104, consta na página 135, possui:

I. Cinco linhas horizontais na parte quadrada do tabuleiro e em cada uma dessas linhas é possível colocar cinco peças em posições consecutivas;

II. Quatro diagonais (com cinco casas) é possível colocar cinco peças em posições consecutivas;

III. Cinco verticais sendo que em quatro verticais é possível colocar cinco peças em posições consecutivas e a vertical que fica no centro do tabuleiro possui sete posições consecutivas.

Portanto temos: cinco maneiras distintas de alinhar cinco peças que representam o cachorro nas linhas horizontais em posições adjacentes; quatro maneiras distintas de alinhar cinco peças que representam o cachorro nas diagonais em posições adjacentes; três maneiras distintas de alinhar na vertical central cinco peças que representam o cachorro em posições adjacentes e quatro maneiras distintas de alinhar cinco peças que representam o cachorro na vertical em posições adjacentes.

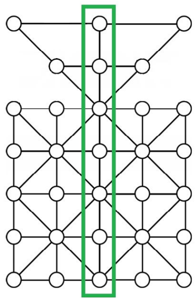
Logo temos 16 maneiras distintas de alinhar cinco peças que representam o cachorro no tabuleiro do Jogo da Onça, de forma que as peças ocupem sempre posições adjacentes seguindo as linhas do tabuleiro.

O número de opções de escolher cinco entre as 31 posições para colocar as peças é dada por $C_{31}^{5} = \frac{31!}{26! \cdot 5!} = 169.911$ e destas, em 16 maneiras distintas, as peças ocupam sempre posições adjacentes. Portanto o número de maneiras distintas de dispor cinco peças que representam o cachorro no tabuleiro do jogo da onça de maneira que todas as peças não fiquem alinhadas em posições adjacentes seguindo as linhas do tabuleiro é $169.911 - 16 = 169.895$.

Temos 16 maneiras distintas de alinhar cinco peças no tabuleiro do Jogo da Onça, de forma que as peças ocupem sempre posições adjacentes, sendo 5 na horizontal, 4 na diagonal e 7 na vertical. Queremos dispor quatro cachorros e uma onça, logo cada configuração anterior de cinco cachorros dá origem a cinco configurações destas, uma para cada escolha de conversão de um cachorro por uma onça. Portanto há $5 \cdot 16 = 80$ maneiras distintas de se dispor quatro cachorros e uma onça, alinhadas e em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro.

Problema 36 *Dada a vertical destacada no tabuleiro do Jogo da Onça, Figura 107, determine:*

Figura 107 – Tabuleiro do Jogo da Onça com uma das verticais em destaque



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

a. *De quantas maneiras distintas é possível dispor quatro peças que representam o cachorro na vertical destacada? Represente todas as soluções encontradas.*

b. *De quantas maneiras distintas é possível dispor três peças que representam o cachorro na vertical destacada, de maneira que as peças fiquem em posições consecutivas?*

c. *Numere as posições na vertical indicada com os números 1,2,3,4,5, 6 e 7, iniciando na toca da onça, e represente cada uma das soluções da questão anterior, com o número formado pela posição das peças.*

d. *De quantas maneiras é possível dispor três peças em posições consecutivas, sendo que duas peças representam o cachorro e uma das peças representa a onça? Represente todas as soluções encontradas.*

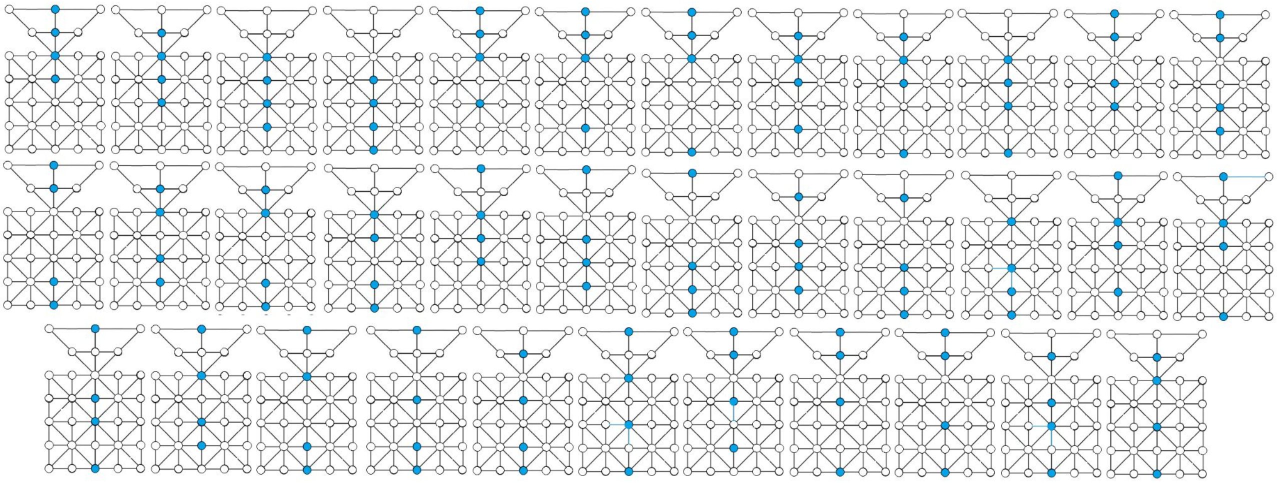
O número de maneiras distintas de dispor quatro peças que representam o cachorro na vertical destacada que possui sete posições é dada por: $C_7^4 = 35$ e as soluções estão representadas na Figura 108.

Existem cinco maneiras distintas de dispor três peças que representam o cachorro na vertical destacada, de maneira que as peças fiquem em posições consecutivas e as soluções estão representadas na Figura 109.

Numerando as posições na vertical indicada com os números 1,2,3,4,5, 6 e 7, iniciando na toca da onça, a representação de cada uma das soluções da questão anterior, com o número formado pela posição das peças é: 123, 234, 345, 456, 567.

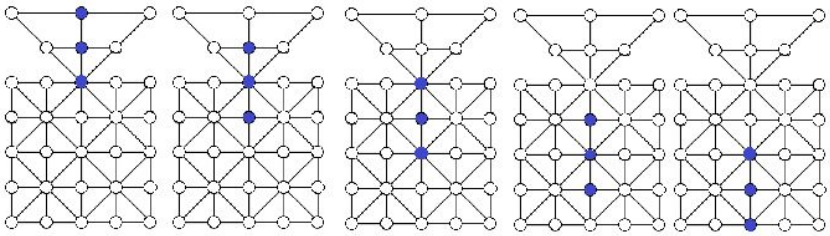
Existem 15 maneiras distintas de dispor três peças em posições consecutivas, sendo que duas peças representam o cachorro e uma das peças representa a onça e as soluções estão representadas na Figura 110.

Figura 108 – Quatro peças na vertical central do Tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Figura 109 – Três peças alinhadas na vertical central do Tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

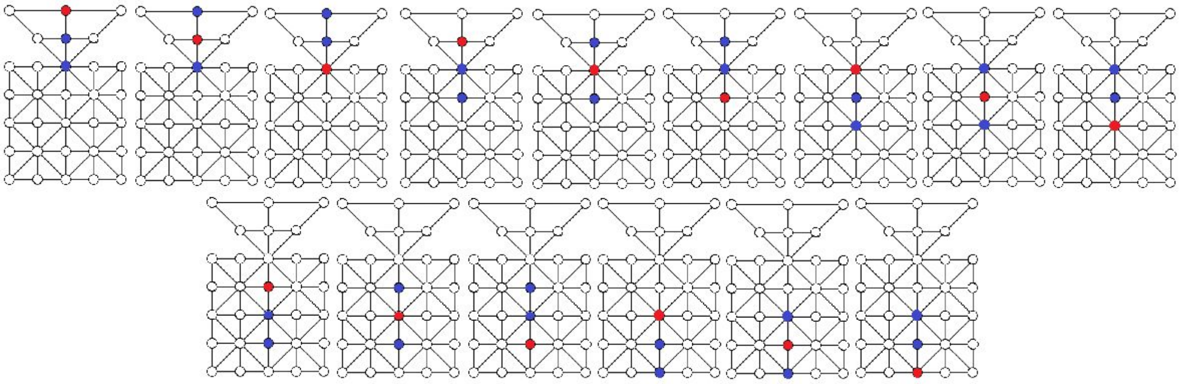
Problema 37 *Dado o tabuleiro do Jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar três peças iguais que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro.*

Para determinar de quantas maneiras distintas é possível colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro, devemos analisar cada uma das casas alinhadas no tabuleiro, nos três sentidos: horizontal, diagonal e vertical.

I. O tabuleiro possui cinco horizontais e em cada horizontal se tem 3 maneiras distintas de colocar três peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas, portanto existem 15 maneiras distintas de colocar na horizontal três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas;

II. O tabuleiro possui duas linhas horizontais dentro da toca da onça nas quais é pos-

Figura 110 – Três peças alinhadas na vertical central do Tabuleiro do Jogo da Onça, sendo que duas peças representam o cachorro e uma peça representa a onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

sível colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas de duas maneiras distintas e em posições consecutivas, portanto há duas maneiras para esse caso;

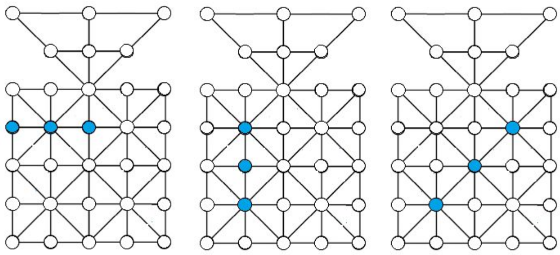
III. O tabuleiro possui duas diagonais em cada sentido e em cada diagonal se tem 3 maneiras distintas de colocar três peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas. Portanto existem 12 maneiras distintas de colocar na diagonal três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas;

IV. O tabuleiro possui duas diagonais menores nas quais é possível colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas de 2 maneiras distintas, portanto há duas maneiras nesse caso;

V. O tabuleiro possui quatro verticais iguais e a vertical que fica no meio, e em cada uma das quatro verticais se tem 3 maneiras distintas de colocar três peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas, e na vertical que fica no meio temos 5 maneiras distintas de colocar três peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas. Portanto existem 17 maneiras distintas de colocar na vertical três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas.

Logo temos 48 maneiras distintas de colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro, sendo que três possíveis soluções estão representadas na Figura 111.

Figura 111 – Colocar três peças no tabuleiro do Jogo da Onça de forma que fiquem alinhadas em posições consecutivas

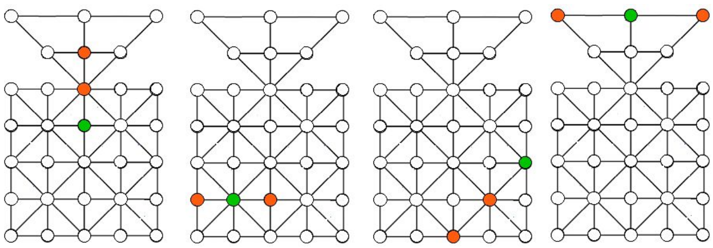


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 38 *Dado o tabuleiro do Jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar três peças, alinhadas e em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro, sendo que duas representam os cachorros e uma representa a onça.*

Para resolver esta questão usamos o raciocínio do problema 37, trocando um cachorro pela onça. Assim, em cada uma das 48 maneiras distintas de colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas, temos três posições para colocar a onça, totalizando $48 \cdot 3 = 144$ maneiras distintas. Quatro possíveis soluções estão representadas na Figura 112.

Figura 112 – Colocar três peças, dois cachorros e uma onça, no tabuleiro do Jogo da Onça de forma que fiquem alinhadas em posições consecutivas

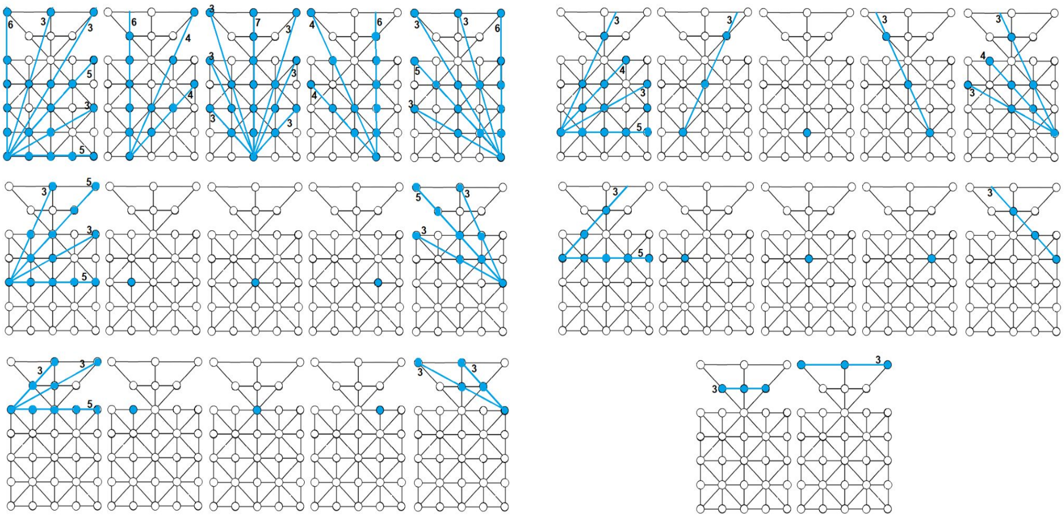


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 39 *Dado o tabuleiro do Jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas.*

A busca de todas as retas com três ou mais pontos alinhados, representada na Figura 113, foi feita a partir de cada um dos pontos do tabuleiro do Jogo da Onça, iniciando de baixo para cima, indo da esquerda para a direita. Destacamos que os tabuleiros com apenas um ponto indicam que nenhuma nova reta será traçada.

Figura 113 – Retas em que é possível alinhar no mínimo três peças



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Para determinar de quantas maneiras distintas é possível colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas, devemos observar a Figura 113, na qual estão representadas todas as retas que possuem no mínimo três casas alinhadas.

Determinar de quantas maneiras se pode colocar três peças em uma mesma reta, é o mesmo que calcular quantos subconjuntos de casas é possível formar em cada reta. Por exemplo, em uma reta que se tem 5 casas, há C_5^3 maneiras distintas de escolher 3 das 5 casas alinhadas. Calculando o número de quantas maneiras podemos colocar três peças alinhadas. No nosso caso,

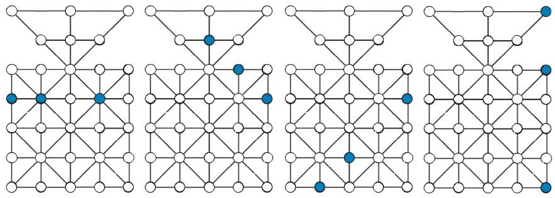
$$
\begin{aligned}
&30 \cdot C_3^3 + 6 \cdot C_4^3 + 9 \cdot C_5^3 + 4 \cdot C_6^3 + 1 \cdot C_7^3 \\
&= 30 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} + 9 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} + 4 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} + 1 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} \\
&= 30 + 24 + 90 + 80 + 35 = 259
\end{aligned} \tag{D.14}
$$

Logo temos 259 maneiras distintas de colocar três peças iguais, que representam o cachorro, no tabuleiro do Jogo da Onça de forma que fiquem alinhadas. Quatro possíveis soluções estão representadas na Figura 114.

Problema 40 *Dado o tabuleiro do Jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar três peças, sendo que duas representam os cachorros e uma representa a onça, seguindo as linhas do tabuleiro.*

Neste caso, tal número pode ser determinado por $C_{31}^2 \cdot C_{29}^1$, pois temos 31 posições

Figura 114 – Colocar três peças no tabuleiro do Jogo da Onça de forma que fiquem alinhadas

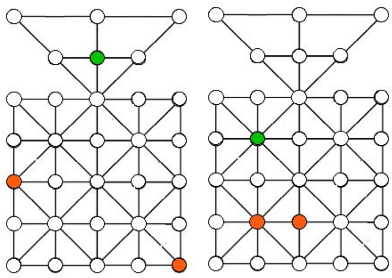


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

para escolher onde será colocado as duas peças que representam os cachorros e 29 para escolher onde colocar a peça que representa a onça, após ter disposto os dois cachorros. Uma outra solução é dada por $3 \cdot C_{31}^{3}$, pois escolhidas três posições para se colocar as três peças, em cada uma das escolhas a onça tem três posições para substituir um dos cachorros.

Logo se tem 13.485 maneiras distintas de colocar três peças conforme solicitado. Algumas das soluções representadas na Figura 115.

Figura 115 – Colocar três peças duas representam os cachorros e uma representa a onça, no tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 41 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar no tabuleiro três peças iguais, que representam os cachorros, de forma que não se tenha duas peças na mesma linha horizontal.*

O número de opções de escolher três entre as 31 posições para se colocar as peças é dada por $C_{31}^{3} = \frac{31!}{28! \cdot 3!} = 4.495$. Porém não se pode ter duas ou três peças na mesma linha horizontal. Logo do valor total, temos que descontar de quantas maneiras é possível colocar três peças na mesma linha e o número de maneiras de colocar duas peças na mesma linha e uma fora da linha em que já estão duas das três peças. Assim temos:

I. O tabuleiro possui duas linhas horizontais dentro da toca da onça na qual se tem uma maneira de colocar três peças alinhadas em cada linha. Portanto existem 2 maneiras de colocar três peças, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas em uma das linhas horizontais, na parte que representa a toca da onça.

II. O tabuleiro possui cinco horizontais e, o número de maneiras distintas de colocar três peças, um em cada uma das linhas, é dado por $C_5^3 = 10$. Portanto existem 50 maneiras distintas de colocar três peças de forma que fiquem alinhadas em uma das linhas horizontais, na parte quadrada do tabuleiro;

III. O tabuleiro possui duas linhas horizontais dentro da toca da onça na qual o número de maneiras distintas de colocar na horizontal duas peças de forma que fiquem alinhadas em uma das linhas horizontais é dado por $C_3^2 = 3$. Portanto existem 3 maneiras de colocar duas peças na mesma linha, e para cada uma dessas configurações, existe uma terceira peça para ser colocada no tabuleiro de 28 maneiras diferentes, assim temos $28 \cdot 3 = 84$ maneiras de colocar três peças de forma que duas estejam alinhadas e outra peça fora, mas como são duas linhas dentro da toca temos um total de 168 maneiras de colocar três peças de forma que duas estejam alinhadas e outra peça fora;

IV. O tabuleiro possui cinco horizontais e, o número de maneiras distintas de colocar na horizontal duas peças de forma que fiquem alinhadas em cada uma das linhas horizontais é dado por $C_5^2 = 10$. Portanto existem 50 maneiras distintas de colocar duas peças iguais, e para cada uma das 50 configurações, existe uma terceira peça para ser colocada no tabuleiro de 26 maneiras diferentes, assim temos $26 \cdot 50 = 1.300$ maneiras de colocar três peças de forma que duas estejam alinhadas.

Portanto o número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro três peças iguais, que representam os cachorros, de forma que não se tenha duas peças na mesma linha horizontal é dado por:

$$4.495 - (2 + 50 + 168 + 1300) = 4.495 - 1.520 = 2.975 \tag{D.15}$$

Duas soluções estão representadas na Figura 116, consta na página 150.

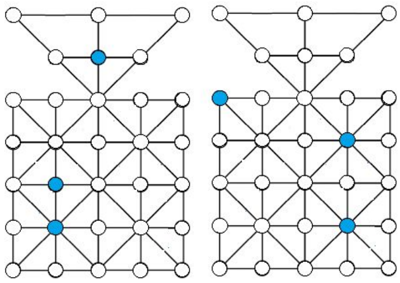
Problema 42 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar três peças, que representam os cachorros, de forma que sejam os vértices de um triângulo.*

O número de modos de se escolher três casas do tabuleiro é $C_{31}^3 = 4.495$. Entretanto, se houver três peças alinhadas, não se tem um triângulo.

Conforme o Problema 39, temos 259 maneiras distintas de colocar três peças alinhadas no tabuleiro, em posições consecutivas ou não. Consequentemente, o número de maneiras de escolher três posições que não estejam alinhadas é $4.495 - 259 = 4.236$.

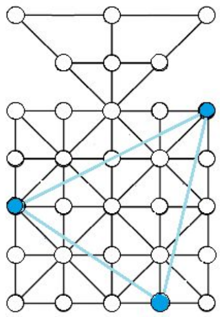
Um exemplo de solução está representado na Figura 117.

Figura 116 – Três peças iguais, que representam os cachorros, de forma que não se tenha duas peças na mesma linha horizontal



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Figura 117 – Três peças, que representam os cachorros, que são os vértices de um triângulo



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 43 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine:*

a. De quantas maneiras distintas é possível escolher três posições no tabuleiro?

b. Qual é a probabilidade de três casos escolhidos aleatoriamente estarem em uma mesma linha e na horizontal?

c. Qual é a probabilidade de três casos escolhidos aleatoriamente estarem alinhadas em uma mesma reta seguindo as linhas do tabuleiro em posições adjacentes?

d. Qual é a probabilidade das peças não estarem alinhadas?

e. Qual é a probabilidade de escolher três posições de forma que estas sejam os vértices de um triângulo?

Para o item (a) o número de maneiras distintas de escolher três posições no tabuleiro é dada por:

$$C_{31}^{3} = 4.495 \tag{D.16}$$

Quanto ao item (b), conforme o Problema 39, item I e item II, o número de maneiras de colocar as peças em uma mesma linha horizontal é dado por: $5 \cdot C_5^3 + 2 = 5 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} + 2 = 52$. Portanto a probabilidade das três posições escolhidas estarem em uma mesma linha e na horizontal é $\frac{52}{4.495}$.

Para o item (c) de acordo com o Problema 38, temos 48 maneiras distintas de colocar três peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas. Portanto, a probabilidade das três posições estarem alinhadas em uma mesma reta e em posições adjacentes é $\frac{48}{4.495}$.

Quanto ao item (d) conforme o Problema 39, temos 259 maneiras distintas de colocar três peças alinhadas no tabuleiro. Consequentemente, o número de maneiras de escolher três posições que não estejam alinhadas é $4.495 - 259 = 4.236$ e, portanto a probabilidade das peças não estarem alinhadas é $\frac{4.236}{4.495}$.

Finalmente para o item (e), a probabilidade de escolher três posições de forma que estas sejam os vértices de um triângulo é $\frac{4.236}{4.495}$, pois se as três peças são o vértice de um triângulo é porque não estão alinhadas.

Problema 44 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104,consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro.*

Para determinar de quantas maneiras distintas é possível colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas, devemos analisar cada uma das casas nos três sentidos: horizontal, diagonal e vertical.

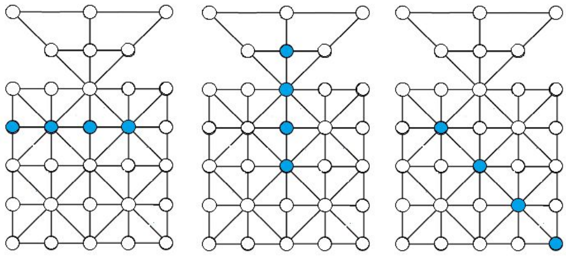
I. O tabuleiro possui cinco horizontais e em cada uma se tem duas maneiras distintas de colocar quatro peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas. Portanto existem 10 maneiras distintas de dispor as peças.

II. O tabuleiro possui quatro diagonais com cinco posições, e em cada uma se tem duas maneiras distintas de colocar quatro peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas, totalizando 8 maneiras distintas de dispor as peças. O tabuleiro também possui quatro diagonais com quatro posições cada uma, sendo assim só exite uma maneira de organizar as quatro peças nessas diagonais de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas. Portanto há 12 maneiras para esse caso;

III. O tabuleiro possui quatro verticais iguais e a vertical que fica no meio, em cada uma das quatro verticais se tem duas maneiras distintas de colocar quatro peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas, e na vertical central, temos quatro maneiras distintas de organizar quatro peças de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas. Portanto existem 12 maneiras distintas de dispor as peças nesse caso.

Logo temos 32 maneiras distintas de colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas e em posições consecutivas seguindo as linhas do tabuleiro. Algumas soluções estão representadas na Figura 118.

Figura 118 – Quatro peças alinhadas em posições consecutivas



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 45 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas.*

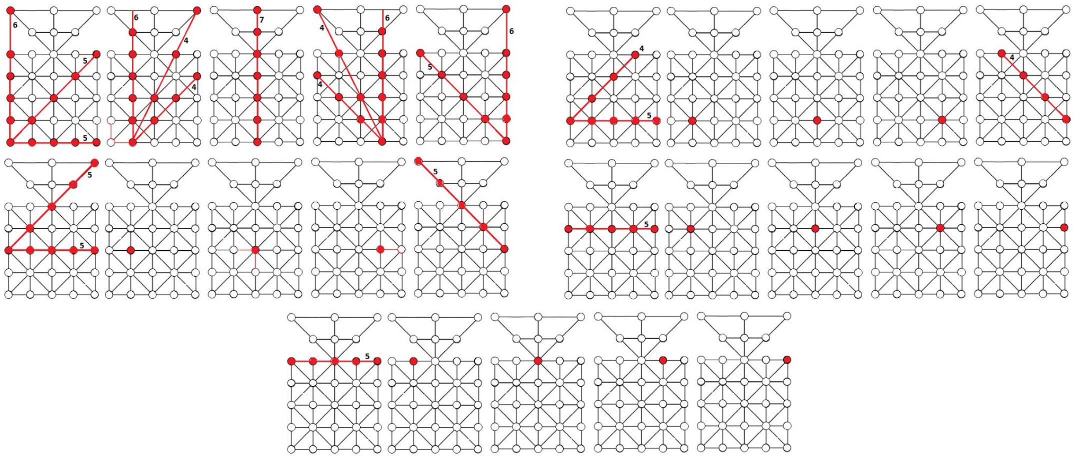
A busca de todas as retas com quatro ou mais pontos alinhados, representado na Figura 113, foi feita a partir de cada um dos pontos do tabuleiro do Jogo da Onça, iniciando de baixo para cima, indo da esquerda para a direita. Destacamos que os tabuleiros com apenas um ponto indicam que nenhuma nova reta será traçada.

Para determinar de quantas maneiras distintas é possível colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, de forma que fiquem alinhadas, devemos observar a Figura 119, na qual estão destacadas todas as retas que possuem no mínimo quatro casas alinhadas.

Determinar de quantas maneiras se pode colocar quatro peças em uma mesma reta, é o mesmo que calcular quantos subconjuntos de 4 casas é possível formar em cada reta, por exemplo em uma reta que tem 6 casas há C_6^4 maneiras distintas de escolher quatro das seis casas alinhadas. Calculando o número de quantas maneiras podemos colocar quatro peças alinhadas, temos:

$$\begin{aligned}
&6 \cdot C_4^4 + 9 \cdot C_5^4 + 4 \cdot C_6^4 + 1 \cdot C_7^4 \\
&= 6 + 9 \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} + 4 \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} + 1 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} \\
&= 6 + 45 + 60 + 35 = 146
\end{aligned} \tag{D.17}$$

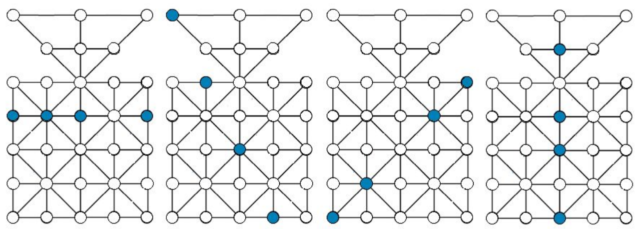
Figura 119 – Retas em que é possível alinhar no mínimo quatro peças



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Logo temos 146 maneiras distintas de colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, no tabuleiro do Jogo da Onça de forma que fiquem alinhadas, conforme algumas soluções representadas na Figura 120.

Figura 120 – Quatro peças alinhadas



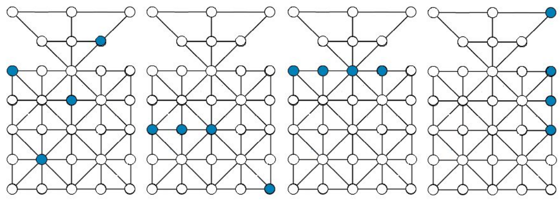
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 46 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, determine de quantas maneiras distintas é possível colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, de tal forma que essas peças sejam os vértices de um quadrilátero.*

O número de modos de se escolher quatro casas do tabuleiro é $C_{31}^{4} = 31.465$. Entretanto, se houver quatro ou três peças alinhadas, não se tem um quadrilátero, conforme representado na Figura 121.

Para determinar o número de quadriláteros, devemos descontar as maneiras distintas de colocar quatro peças iguais no tabuleiro do Jogo da Onça de forma que fiquem alinhadas, descontando também as maneiras distintas de colocar quatro peças iguais, no

Figura 121 – Situações em que não é possível formar um quadrilátero



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

tabuleiro do Jogo da Onça, sendo que três delas fiquem alinhadas e a quarta não. Assim, devemos descontar de 31.465 esse casos.

Conforme o Problema 45 temos 146 maneiras distintas de colocar quatro peças alinhadas no tabuleiro, em posições consecutivas ou não. Para determinar de quantas maneiras distintas é possível colocar quatro peças de forma que três peças fiquem alinhadas, e a quarta peça fique em uma outra linha, devemos observar que no tabuleiro do Jogo da Onça temos: 30, 6, 9, 4 e 1 retas com 3, 4, 5, 6 e 7 casas alinhadas respectivamente, de acordo com a Figura 113, consta na página 147. Observe que:

I. O tabuleiro possui 30 retas com exatamente três casas alinhadas. Logo há $C_3^3 = 1$ maneiras distintas de alinhar três peças em cada uma das trinta retas. Portanto existem 30 maneiras distintas de colocar três peças alinhadas no tabuleiro e 28 casas para colocar a quarta peça desalinhada.

   Logo temos um total de $30 \cdot 1 \cdot 28 = 840$ maneiras de colocar no tabuleiro do Jogo da Onça quatro peças de forma que três fiquem alinhadas e uma desalinhada, sendo que as três alinhadas estão numa reta que possui exatamente 3 casas alinhadas;

II. O tabuleiro possui 6 retas com exatamente quatro casas alinhadas. Logo há $C_4^3 = 4$ maneiras distintas de alinhar três peças em cada uma das seis retas. Portanto existem 24 maneiras distintas de colocar três peças alinhadas no tabuleiro e 27 casas para colocar a quarta peça desalinhada.

   Logo temos um total de $24 \cdot 27 = 648$ maneiras de colocar no tabuleiro do Jogo da Onça quatro peças de forma que três fiquem alinhadas e uma desalinhada, sendo que as três alinhadas estão numa reta que possui exatamente 4 casas alinhadas;

III. O tabuleiro possui 9 retas com exatamente cinco casas alinhadas. Logo há $C_5^3 = 10$ maneiras distintas de alinhar três peças em cada uma das nove retas. Portanto existem 90 maneiras distintas de colocar três peças alinhadas no tabuleiro e 26 casas para colocar a quarta peça desalinhada.

   Logo temos um total de $90 \cdot 26 = 2.340$ maneiras de colocar no tabuleiro do Jogo da Onça quatro peças de forma que três fiquem alinhadas e uma desalinhada, sendo que as três alinhadas estão numa reta que possui exatamente 5 casas alinhadas;

IV. O tabuleiro possui 4 retas com exatamente seis casas alinhadas. Logo há $C_6^3 = 20$ maneiras distintas de alinhar três peças em cada uma das quatro retas. Portanto existem 80 maneiras distintas de colocar três peças alinhadas no tabuleiro e 25 casas para colocar a quarta peça desalinhada.

Logo temos um total de $80 \cdot 25 = 2.000$ maneiras de colocar no tabuleiro do Jogo da Onça quatro peças de forma que três fiquem alinhadas e uma desalinhada, sendo que as três alinhadas estão numa reta que possui exatamente 6 casas alinhadas;

V. O tabuleiro possui 1 retas com exatamente sete casas alinhadas. Logo há $C_7^3 = 35$ maneiras distintas de alinhar três peças. Portanto existem 35 maneiras distintas de colocar três peças alinhadas no tabuleiro e 24 casas para colocar a quarta peça desalinhada.

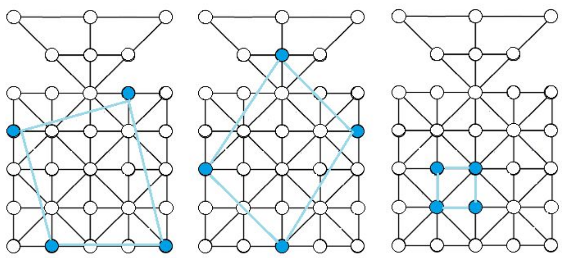
Logo temos um total de $35 \cdot 24 = 840$ maneiras de colocar no tabuleiro do Jogo da Onça quatro peças de forma que três fiquem alinhadas e uma desalinhada, sendo que as três alinhadas estão numa reta que possui exatamente 7 casas alinhadas;

Logo o número de maneiras distintas de colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, no tabuleiro do Jogo da Onça de forma que três exatamente três delas fiquem alinhadas é dado por:

$$\begin{aligned} & 30 \cdot C_3^3 \cdot 28 + 6 \cdot C_4^3 \cdot 27 + 9 \cdot C_5^3 \cdot 26 + 4 \cdot C_6^3 \cdot 25 + 1 \cdot C_7^3 \cdot 24 \\ & = 840 + 648 + 2.340 + 2.000 + 840 = 6.668 \end{aligned} \tag{D.18}$$

Portanto existem $31.465 - 146 - 6.668 = 24.651$ maneiras distintas de colocar quatro peças iguais, que representam o cachorro, de forma que sejam os vértices de um quadrilátero. Algumas soluções estão representadas na Figura 122.

Figura 122 – Situações em que é possível formar um quadrilátero

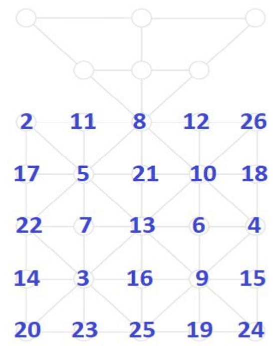


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 47 *Colocar os números de 2 até 26 nas casas da parte quadrada do tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, de forma que dois números consecutivos não fiquem ligados e que um número não tenha nenhuma ligação com um dos seus divisores. Descreva a estratégia utilizada para organizar os números no tabuleiro.*

Uma possível resposta está representada na Figura 123, destacamos que esta não é a única solução.

Figura 123 – Números de 2 até 26 organizados na parte quadrada do tabuleiro da onça de forma que dois números consecutivos não tenham nenhuma ligação e nenhum número esteja ligado a um divisor seu



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Neste caso a estratégia utilizada para colocar os números de 2 até 26 nas casas da parte quadrada do tabuleiro do Jogo da Onça, de forma que dois números consecutivos não fiquem ligados e que um número não tenha nenhuma ligação com um dos seus divisores foi:

I. Escolher uma casa com poucas casas adjacentes, isto é, vizinhas, para colocar o número dois. Neste caso foi escolhido um dos cantos pois contém três casas adjacentes;

II. Colocar três números ímpares, diferente de três nas casas vizinhas ao números dois, pois todo número par é divisível por dois;

III. Distribuir os demais números diferentes de 11, 13, 17, 19 e 23, de forma que números consecutivos não fiquem em casa vizinha, por exemplo os números 4, 5 e 6 não podem ficar juntos pois são consecutivos;

IV. Escolher entre os números 11, 13, 17, 19 e 23 um número para ocupar a posição central do tabuleiro porque é a posição com maior número de casas adjacentes;

V. Como os números 11, 13, 17, 19 e 23, são primos, isto é, só são divisíveis por um e por ele mesmo, sendo assim estes números possuem poucas restrições para serem colocados no tabuleiro, logo podem ser utilizados sempre que não se tem nenhum número para ocupar determinada posição, ou serem colocados por último.

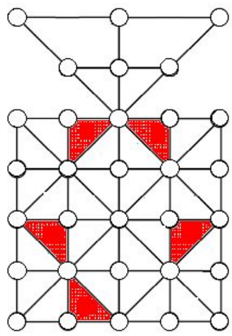
Problema 48 *De quantas maneiras distintas é possível escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, fora da toca da onça, para pintar de vermelho?*

A parte quadrada do tabuleiro, fora a toca da onça é composta por 32 triângulos, assim temos que escolher 5 destes para pintar de vermelho, sendo que a ordem de escolha não altera o resultado. Logo o número total de escolhas é dado por:

$$C_{32}^{5} = \frac{32!}{27! \cdot 5!} = 201.376 \tag{D.19}$$

Portanto existem 201.376 maneiras distintas de escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça para pintar de vermelho, sendo que uma possível resposta está representada na Figura 124.

Figura 124 – Pintar cinco triângulos no tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 49 *De quantas maneiras distintas é possível escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, fora da toca da onça, para pintar de vermelho, amarelo e verde, de forma que cada uma das cores seja utilizada pelo menos uma vez?*

Observe que a escolha dos triângulos a serem pintados pode ser da seguinte forma:

I. 3 vermelhos, 1 amarelo e 1 verde;

II. 3 amarelos, 1 vermelho e 1 verde;

III. 3 verdes, 1 vermelho e 1 amarelo;

IV. 2 vermelhos, 2 amarelos e 1 verde;

V. 2 verdes, 2 amarelos e 1 vermelho;

VI. 2 vermelhos, 2 verdes e 1 amarelo.

De acordo com os itens I, II e III temos três maneiras distintas de escolher 3, 1 e 1 triângulos para pintar com as cores vermelho, amarelo e verde, visto que cada uma das cores deve ser utilizada pelo menos uma vez, logo o números de maneiras de escolher três dos 32 triângulos é dada por C_{32}^{3}; o número de maneiras de escolher um triângulo para pintar de uma cor diferente da primeira é dada por C_{29}^{1}; observe que quando a segunda cor é utilizada não se tem 32 triângulos disponíveis e sim 29. E, o número de maneiras distintas de escolher o quinto triângulo para pintar de uma outra cor diferente das duas anteriores é dada por C_{28}^{1}.

Conforme os itens IV, V e VI temos três maneiras distintas de escolher 2, 2 e 1 triângulos para pintar, sendo dois de uma cor, dois de uma outra cor diferente da primeira e um diferente das duas cores anteriores, desta forma o número de modos de escolher os dois primeiros triângulos é C_{32}^{2}, o número de modos de escolher mais dois triângulos é dada por C_{30}^{2} e o número de escolher o último triângulo para pintar com a terceira cor é C_{28}^{1}.

Portanto o número de maneiras distintas que é possível escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça, fora da toca da onça, para pintar de vermelho, amarelo e verde, de forma que cada uma das cores seja utilizada pelo menos uma vez é dado por:

$$3 \cdot C_{32}^{3} \cdot C_{29}^{1} \cdot C_{28}^{1} + 3 \cdot C_{32}^{2} \cdot C_{30}^{2} \cdot C_{28}^{1} = 30.206.400 \tag{D.20}$$

Em uma segunda solução, temos que entre os 32 triângulos devemos escolher 5 triângulos para pintar, sendo que dos cinco escolhidos devemos escolher 3 para pintar com uma das três cores, 1 para pintar com uma outra cor e 1 para pintar com uma cor diferente das demais conforme descrição nos itens I, II e III, ou então podemos escolher 2 para pintar com uma das três cores, 2 para pintar com uma outra cor e 1 para pintar com uma cor diferente das demais como descrito nos itens IV, V e VI.

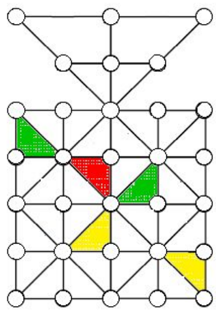
Portanto, a segunda solução é dada por:

$$3 \cdot C_{32}^{5} \cdot P_{5}^{3,1,1} + 3 \cdot C_{32}^{5} \cdot P_{5}^{2,2,1} = 30.206.400 \tag{D.21}$$

Destacamos que neste problema a utilizamos a Fórmula de Combinação porque ao escolher três dos 32 triângulos ou dois dos 30 ou ainda um dos 29 triângulos estamos formando subconjuntos com um determinado número de elementos que fazem parte de um conjunto maior, sendo que a ordem da escolha não é importante, isto é, suponhamos que todos os triângulos da parte quadrada do tabuleiro do jogo da onça estiverem identificados com as letras do alfabeto, logo escolher os triângulos A, B e C é o mesmo que escolher os triângulos B, C e A.

Portanto existem 30.206.400 maneiras distintas de escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça, fora da toca da onça, para pintar de vermelho, amarelo e verde, de forma que cada uma das cores seja utilizada pelo menos uma vez e uma possível resposta está representada na Figura 125.

Figura 125 – Pintar cinco triângulos no tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 50 *De quantas maneiras distintas é possível escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, fora da toca da onça, para pintar de vermelho, amarelo ou verde, isto é, não existe a necessidade de cada uma das cores ser utilizada pelo menos uma vez?*

Há C_{32}^{5} maneiras distintas de escolher cinco dos 32 triângulos da parte quadrada do tabuleiro do jogo da onça. Feito isso há três cores disponíveis para pintar cada um dos triângulos pois não existe a necessidade de cada uma das cores ser utilizada pelo menos uma vez, isto é, podemos usar apenas uma das cores, ou usar duas ou então usar as três cores. Logo temos três cores disponíveis para escolher e pintar cada um dos triângulos, sendo assim o número de maneiras de pintar os cinco triângulos é 3^5.

Logo o número de maneiras distintas que é possível escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça, fora da toca da onça, para pintar de vermelho, amarelo ou verde é dado por:

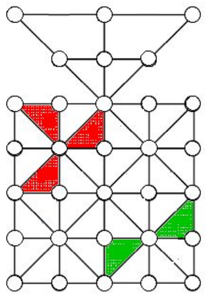
$$C_{32}^{5} \cdot 3^5 = 48.934.368 \tag{D.22}$$

Portanto existem 48.934.368 maneiras distintas de escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça, fora da toca da onça, para pintar de vermelho ou amarelo ou verde, sendo que uma possível resposta está representada na Figura 126.

Problema 51 *Suponha que se possui sete cores diferentes para pintar cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, fora da toca da onça.*

a. *De quantas maneiras distintas é possível pintar cinco triângulos?*

Figura 126 – Pintar cinco triângulos no tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

b. *De quantas maneiras distintas é possível pintar cinco triângulos, se todos os triângulos forem pintados da mesma cor?*

A parte quadrada do tabuleiro é composta por 32 triângulos, destes cinco serão escolhidos para pintar com qualquer uma das sete cores disponíveis, então o número de maneiras de escolher cinco triângulos é C_{32}^{5}. Destacamos que ao escolher cinco dos 32 triângulos estamos criando um subconjunto com triângulos coloridos, o que justifica o uso da fórmula de combinação.

Ao escolher cinco triângulos, cada um poderá ser pintado com qualquer uma das sete cores, pois não existem restrições para o uso das cores, logo temos 7^5 maneiras de pintar os triângulos.

Portanto o número de maneiras distintas que é possível escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça, fora da toca da onça, para pintar, quando se tem sete cores disponíveis e todas podem ou não ser utilizadas, é dado por:

$$C_{32}^{5} \cdot 7^5 = 3.384.526.432 \tag{D.23}$$

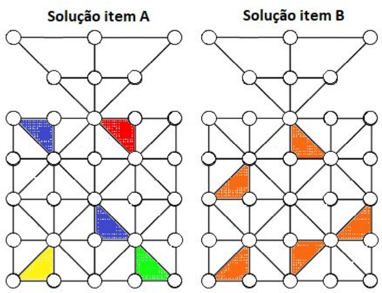
Há C_{32}^{5} maneiras distintas de escolher cinco triângulos que devem ser pintados de uma única cor, portanto para colorir o primeiro triângulo podemos usar qualquer uma das sete cores e os outros quatro triângulos serão pintados com a mesma cor do primeiro, logo temos $7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ maneiras de pintar os cinco triângulos.

Portanto o número de maneiras distintas que é possível escolher cinco triângulos do tabuleiro do jogo da onça, fora da toca da onça, para pintar, quando se tem sete cores disponíveis e todos os triângulo devem ter a mesma cor é dado por:

$$C_{32}^{5} \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.409.632 \tag{D.24}$$

Logo existem 3.384.526.432 maneiras distintas de pintar cinco triângulos usando qualquer uma das cores disponíveis e 1.409.632 maneiras distintas de pintar os cinco triângulos da mesma cor quando se tem sete cores diferentes para escolher. Uma possível solução está representada na Figura 127.

Figura 127 – Pintar cinco triângulos no tabuleiro do Jogo da Onça

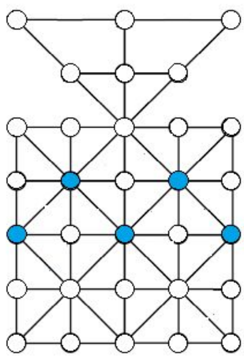


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 52 *Dado o tabuleiro do jogo da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, de quantas maneiras distintas é possível pintar cinco casas de azul?*

O número de maneiras distintas de pintar cinco das 31 interseções do tabuleiro do Jogo da Onça é dado por C_{31}^{5}, logo existem 169.911 maneiras distintas de pintar cinco das 31 interseções de azul, sendo que uma das soluções está representada na Figura 128.

Figura 128 – Pintar cinco posições no tabuleiro do Jogo da Onça

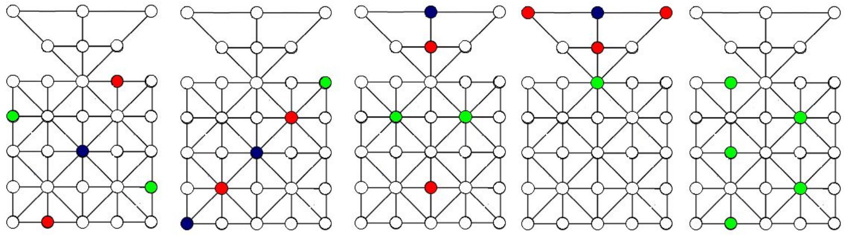


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 53 *Dado o tabuleiro do jogo da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, de quantas maneiras distintas é possível pintar cinco casas de três cores?*

O número de maneiras distintas de pintar cinco das 31 interseções do tabuleiro do Jogo da Onça é dado por C_{31}^{5} e, como temos três cores diferentes que podem ser escolhidas para pintar qualquer uma das interseções, o total é dado por $C_{31}^{5} \cdot 3^5$. Logo existem 41.288.373 maneiras distintas de pintar cinco das 31 interseções com três cores diferentes e algumas soluções estão representadas na Figura 129.

Figura 129 – Pintar cinco triângulos no tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 54 *Dado o tabuleiro do jogo da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, de quantas maneiras distintas é possível pintar de uma única cor, cinco casas na parte quadrada do tabuleiro de forma que em cada linha e em cada coluna se tenha apenas uma casa pintada?*

Supor que a pintura seja feita em uma linha de cada vez.

I. Na primeira linha se tem cinco casas para escolher e pintar;

II. Na segunda linha se tem quatro casas para escolher e pintar, pois não podemos pintar duas casas na mesma coluna;

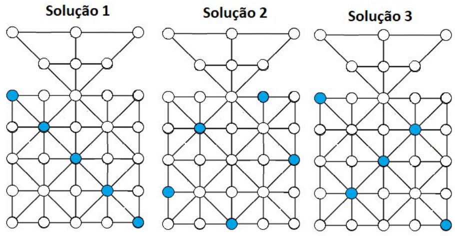
III. Na terceira linha se tem três casas para escolher;

IV. Na quarta linha se tem duas casas para escolher;

V. Na quinta linha se tem uma casa para escolher.

Portanto o número total de maneiras distintas de pintar com uma única cor, cinco casas na parte quadrada do tabuleiro de forma que em cada linha e em cada coluna se tenha apenas uma casa pintada é $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, na Figura 130, estão representadas algumas das possíveis soluções.

Figura 130 – Representação de três soluções de como se pode pintar com uma única cor, cinco casas no tabuleiro de forma que em cada linha e em cada coluna se tenha apenas uma casa pintada

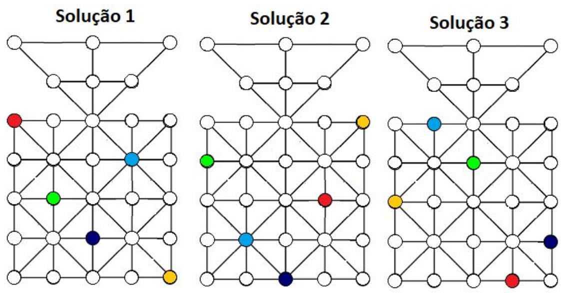


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 55 *Dado o tabuleiro do jogo da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, de quantas maneiras distintas é possível pintar com cinco cores, cinco casas na parte quadrada do tabuleiro de forma que em cada linha e em cada coluna se tenha apenas uma casa pintada e cada uma das cores pode ser utilizada apenas uma vez.*

Observando as soluções representadas na Figura 131, temos que:

Figura 131 – Representação de três soluções de como colorir com cinco cores, cinco casas na parte quadrada do tabuleiro do Jogo da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

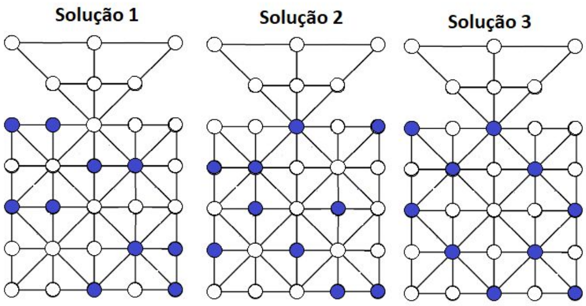
I. Na primeira linha se tem cinco casas e cinco cores para escolher;
II. Na segunda linha se tem quatro casas e quatro cores para escolher, pois não podemos pintar duas casas na mesma coluna e não podemos usar uma cor duas vezes;
III. Na terceira linha se tem três casas e três cores para escolher;
IV. Na quarta linha se tem duas casas e duas cores para escolher;
V. Na quinta linha se tem uma casa e uma cor para escolher.

Portanto o número total de maneiras distintas de pintar com cinco cores, cinco casas na parte quadrada do tabuleiro de forma que em cada linha e em cada coluna se tenha apenas uma casa pintada e cada uma das cores seja utilizada uma única vez é $5! \cdot 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \cdot 120 = 14.400$.

Problema 56 *Dado o tabuleiro do jogo da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, queremos pintar de uma única cor dez das casas da parte quadrada do tabuleiro de forma que em cada linha e em cada coluna tenhamos duas casas pintadas. Represente três soluções.*

Destacamos que foi elaborado um programa de computador para resolver este problema, visto que não encontramos na literatura uma solução (embora possa existir), e assim foram computadas 2040 possibilidades. Três possíveis respostas estão representadas na Figura 132.

Figura 132 – Representação de três soluções de como colorir duas interseções em cada linha e em cada coluna da parte quadrada do tabuleiro do jogo da onça

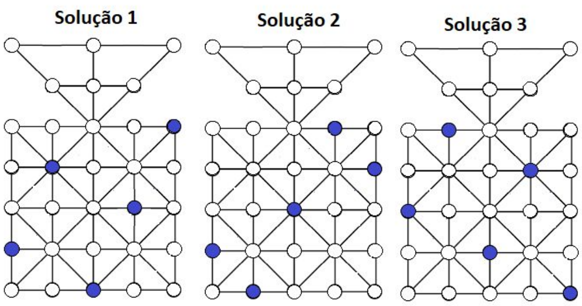


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 57 *Dado o tabuleiro do jogo da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, queremos pintar cinco interseções, na parte quadrada do tabuleiro, de modo que em cada linha, em cada coluna e em cada uma das diagonais, diagonal principal e diagonal secundária, haja apenas uma casa pintada. Represente três soluções.*

Três possíveis soluções estão representadas na Figura 133.

Figura 133 – Representação de três soluções de como colorir uma interseção em cada linha, coluna e diagonal da parte quadrada do tabuleiro do jogo da onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 58 *De quantas maneiras distintas podemos colorir as casas da parte quadrada do tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, fora da toca da onça, usando as cores azul, verde e vermelho de modo que todas apareçam e que as casas adjacentes possuam cores diferentes?*

Dado o tabuleiro Figura 104, que foi colocado no plano cartesiano, supor que a posição 5C seja a primeira a ser pintada, logo temos três cores para escolher: azul, verde ou vermelho. Se a posição 5C for pintada de vermelho, analisamos uma segunda casa, que lhe é adjacente, a posição 4D, essa pode ser pintada de duas cores, azul ou verde; supor que a cor escolhida seja azul. Considerando que duas cores já foram utilizadas, analisemos uma terceira casa, que também lhe é adjacente, a posição 4C, a qual está ligada às duas posições anteriores, 5C e 4D, esta só pode ser verde.

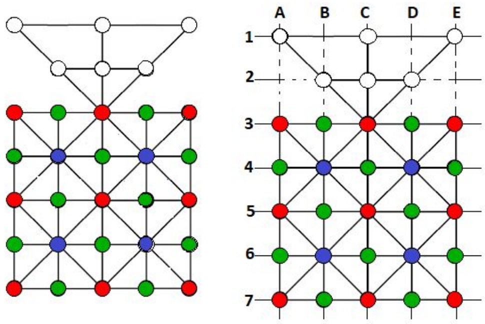
Observamos que: a posição 5D só pode ser pintada de verde, pois as posições adjacentes 4D e 5C estão pintadas de azul e vermelho respectivamente; a posição 6D só pode ser pintada de azul, pois as posições adjacentes 5C e 5D estão pintadas de vermelho e verde respectivamente; a posição 5E só pode ser pintada de vermelho, pois as posições adjacentes 5D e 6D estão pintadas de verde e azul, respectivamente.

Seguindo de maneira análoga, todas as próximas interseções estarão definidas, assim temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1^{23} = 6 \tag{D.25}$$

Uma possível resposta está representada na figura 134.

Figura 134 – Representação de uma das soluções de como colorir as interseções da parte quadrada do tabuleiro do jogo da onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 59 *De quantas maneiras distintas podemos colorir as casas da parte triangular do tabuleiro do jogo da onça, toca da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, usando as cores azul, verde e vermelho de modo que todas apareçam e que as casas adjacentes possuam cores diferentes?*

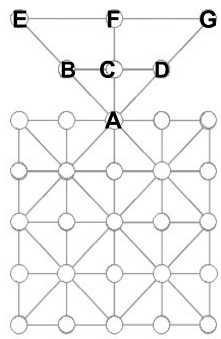
Observando a Figura 135, temos que:

I. Iniciando pela posição A temos três cores disponíveis para escolher: azul, verde ou vermelho; suponhamos que a cor escolhida seja verde;

II. A segunda posição a ser pintada pode ser a posição C, para isso temos duas cores para escolher, azul ou vermelho; suponhamos que a cor escolhida seja vermelho;

III. A terceira posição a ser pintada pode ser a posição B, e como duas casas consecutivas não podem ter a mesma cor, esta só podemos pintar de azul;

Figura 135 – Posições na Toca da Onça



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

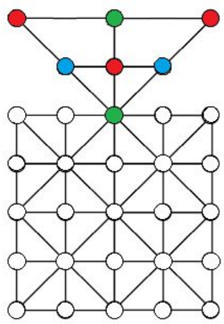
IV. Observe que a posição D só pode ser pintada de azul, independente da ordem que as posições são pintadas, as posições B e D sempre terão a mesma cor;

V. Quanto à posição F, temos ainda alguma liberdade.

   A. Comecemos pelo caso em que a pintamos da mesma cor da posição A, assim as posições F e D terão cores diferentes, logo as posições E e G terão a mesma cor da posição C;

   Observe uma das possíveis soluções na Figura 136.

Figura 136 – A posição F pode ser pintada com a mesma cor da posição A



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

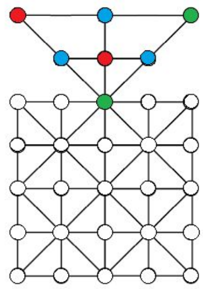
   B. O outro caso é aquele em que F é pintada da mesma cor das posições B e D, neste caso para colorir as posições E e G, se tem duas cores para escolher, sendo que estas podem ser pintadas ou não da mesma cor.

   Observe uma das possíveis soluções na Figura 137.

Observe:

I. Três cores para pintar a posição A;

Figura 137 – A posição F pode ser pintada da mesma cor das posições B e D



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

II. Duas cores para pintar a posição C;

III. Uma cor para pintar a posição B;

IV. Uma cor para pintar a posição D;

V. Aqui separamos em dois casos:

   A. Uma cor para pintar a posição F; uma cor para pintar a posição E sendo F igual a A; uma cor para pintar a posição G sendo F igual a A

   B. Uma cor para pintar a posição F; duas cores para pintar a posição E sendo F diferente de A; duas cores para pintar a posição G sendo F diferente de A.

Portanto o número de maneiras distintas pela qual podemos colorir as interseções da parte triangular do tabuleiro do jogo da onça, toca da onça, representado na Figura 104, consta na página 135, usando as cores azul, verde e vermelho de modo que todas apareçam e que as interseções adjacentes possuam cores diferentes é:

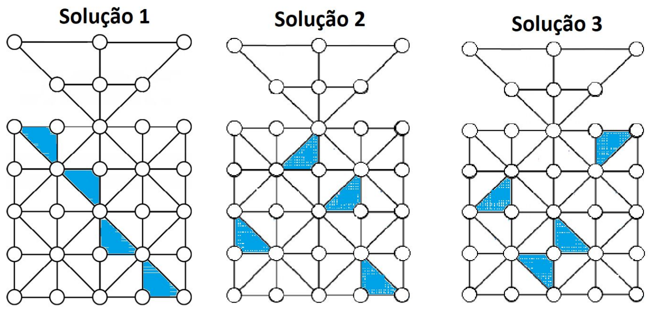
$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 6 + 24 = 30 \tag{D.26}$$

Problema 60 *Determine de quantas maneiras distintas é possível pintar alguns dos triângulos contidos no tabuleiro do jogo da onça representado na Figura 104, consta na página 135, fora da toca da onça, de modo que em cada linha e em cada coluna haja apenas um triângulo pintado. Represente três soluções.*

Observe que para pintar os triângulos na primeira linha temos 8 triângulos disponíveis, para pintar um triângulo na segunda linha temos 6 triângulos disponíveis, pois não podemos pintar dois triângulos na mesma coluna e na mesma linha. Para pintar um triângulo na terceira linha temos 4 triângulos disponíveis para escolher e na quarta e última linha temos 2 triângulos para escolher.

Portanto o número total de maneiras distintas de pintar alguns dos triângulos contidos no tabuleiro do jogo da onça, fora da toca da onça, de modo que em cada linha e em cada coluna haja apenas um triângulo pintado é $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$. Na Figura 138, estão representadas algumas das possíveis soluções.

Figura 138 – Representação de três soluções de como pintar apenas um triângulo em cada linha e em cada coluna



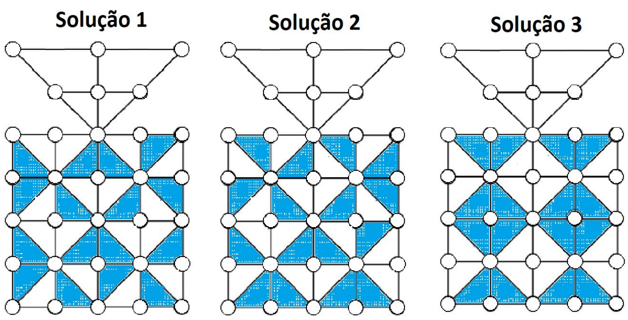
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Problema 61 *Determine de quantas maneiras distintas podemos pintar cada triângulo da parte quadrada do tabuleiro do jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, de forma que em cada linha tenhamos a mesma quantidade de cores azul e branca?*

Em cada linha temos que escolher quatro dos oito triângulos para pintar de azul. Assim temos:

$$(C_8^4)^5 = (\frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!})^5 = (\frac{8!}{4! \cdot 4!})^5 = 1.680.700.000 \qquad \text{(D.27)}$$

Figura 139 – Representação de soluções de como pintar os triângulos de forma que em cada linha tenhamos a mesma quantidade de triângulos nas cores azul e branca



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Portanto temos 1.680.700.000 maneiras de pintar cada triângulo da parte quadrada no tabuleiro do jogo da Onça de forma que em cada linha tenhamos a mesma quantidade de cores azul e branca, na Figura 139, estão representadas algumas das possíveis soluções.

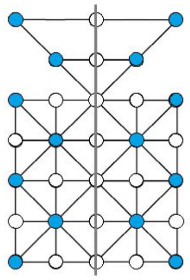
Problema 62 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça representado na Figura 104, consta na página 135, responda:*

a. *Pinte de uma única cor as posições do tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo central, isto é, vertical principal.*

b. *De quantas maneiras distintas é possível pintar de uma única cor as posições do tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical central, isto é, vertical principal.*

Uma possível resposta está representada na Figura 140.

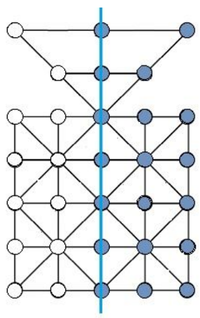
Figura 140 – Representação de uma das soluções de como colocar peças no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observe na Figura 141, que o tabuleiro possui 19 posições que podem ser escolhidas ou não para pintar no tabuleiro, logo $2^{19} = 524.288$ é o número de maneiras distintas de pintar o tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical central, visto que a parte esquerda do eixo central deve ser pintada em harmonia com a parte direita.

Figura 141 – Indicação das posições que podem ser escolhidas no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

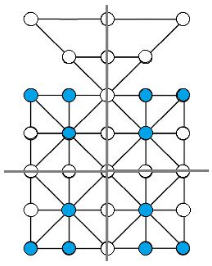
Problema 63 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça Figura 104, consta na página 135, responda:*

a. Pinte de uma única cor as posições do tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal e ao eixo horizontal central da parte quadrada.

b. De quantas maneiras distintas é possível pintar de uma única cor as posições do tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal e ao eixo horizontal central da parte quadrada.

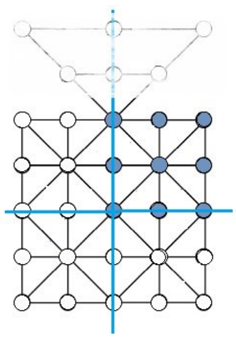
Uma possível resposta está representada na Figura 142.

Figura 142 – Representação de uma das soluções de como colocar peças no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal e ao eixo horizontal central da parte quadrada.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Figura 143 – Indicação das posição que podem ou não ser escolhidas para colocar as peças no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal e ao eixo horizontal central da parte quadrada.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observe inicialmente que a toca da onça, isto é, parte triangular só é simétrica em relação ao eixo vertical principal, logo o tabuleiro possui nove posições que podem ser escolhidas ou não para pintar no tabuleiro, conforme representado na Figura 143, logo

$2^9 = 512$ é o número de maneiras distintas de pintar o tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal e ao eixo horizontal central da parte quadrada do tabuleiro, visto que as demais posições irão ser pintadas em harmonia com elas.

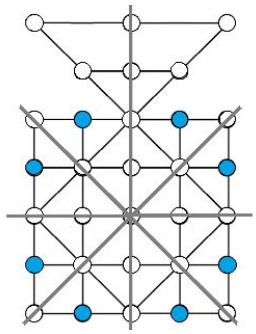
Problema 64 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça Figura 104, consta na página 135, responda:*

a. *Pinte de uma única cor as posições do tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal, horizontal central e aos eixos diagonais maiores da parte quadrada do tabuleiro.*

b. *De quantas maneiras distintas é possível pintar de uma única cor as posições do tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal, horizontal central e aos eixos diagonais maiores da parte quadrada do tabuleiro.*

Uma possível resposta está representada na Figura 144.

Figura 144 – Representação de uma das soluções de como colocar peças no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical, horizontal e diagonal.



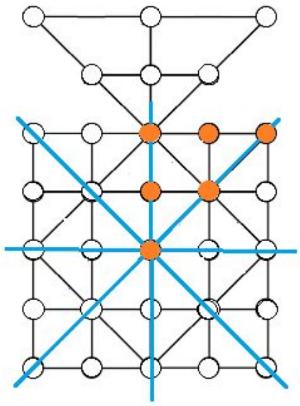
Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observe que o tabuleiro possui 6 posições que podem ser escolhidas inicialmente ou não para pintar no tabuleiro, conforme representado na Figura 145, logo $2^6 = 64$ é o número de maneiras distintas de pintar o tabuleiro de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal, horizontal central e aos eixos diagonais maiores da parte quadrada do tabuleiro, pois as demais posições irão ser pintadas em harmonia com elas.

Problema 65 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça Figura 104, consta na página 135, responda:*

a. *Como é possível dispor 14 peças que representam o cachorro no tabuleiro mantendo a simetria vertical e horizontal na parte quadrada do tabuleiro.*

Figura 145 – Indicação das posição que podemos ou não escolher para colocar as peças no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical principal, horizontal central e aos eixos diagonais maiores da parte quadrada do tabuleiro.

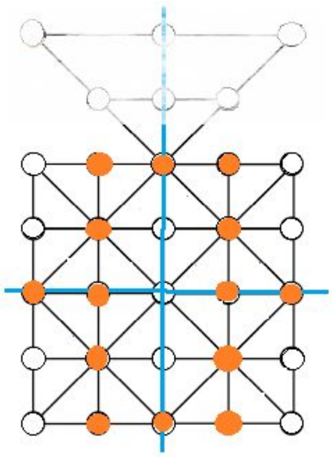


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

b. *De quantas maneiras é possível dispor 14 peças que representam o cachorro no tabuleiro mantendo a simetria vertical e horizontal na parte quadrada do tabuleiro.*

A Figura 146, representa uma possível solução, na qual 14 peças que representam o cachorro estão dispostas no tabuleiro mantendo a simetria vertical e horizontal, destacamos que a simetria horizontal acontece apenas na parte quadrada do tabuleiro.

Figura 146 – Representação de uma das soluções de como colocar 14 peças no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical e horizontal

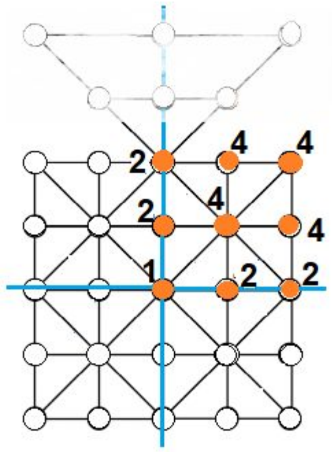


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando a Figura 147, podemos identificar quantas peças devem ser colocadas no tabuleiro, conforme a posição inicial escolhida.

A escolha pode ser feita das seguintes maneiras :

Figura 147 – Indicação de quantas peças devem ser colocadas no tabuleiro conforme a posição escolhida de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical e horizontal.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

I. Podemos escolher duas posições que replicam 4 peças e três posições que replicam duas peças, assim temos: $4 + 4 + 2 + 2 + 2 = 14$;

$$C_4^2 \cdot C_4^3 = 10 \tag{D.28}$$

II. Podemos escolher três posições que replicam 4 peças e uma posição que replica duas peças, assim temos: $4 + 4 + 4 + 2 = 14$.

$$C_4^3 \cdot C_4^1 = 8 \tag{D.29}$$

Portanto temos 18 maneiras distintas de dispor 14 peças que representam o cachorro de maneira que a configuração esteja simétrica em relação ao eixo vertical principal e ao eixo horizontal central, na parte quadrada do tabuleiro.

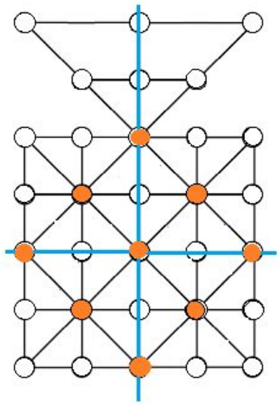
Problema 66 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça Figura 104, consta na página 135, responda:*

a. Como é possível dispor 9 peças que representam o cachorro no tabuleiro mantendo a simetria vertical e horizontal na parte quadrada do tabuleiro.

b. De quantas maneiras é possível dispor 9 peças que representam o cachorro no tabuleiro mantendo a simetria vertical e horizontal na parte quadrada do tabuleiro.

A Figura 148, apresenta uma possível solução, na qual 9 peças que representam o cachorro estão dispostas no tabuleiro mantendo a simetria vertical e horizontal, destacamos que a simetria horizontal acontece apenas na parte quadrada do tabuleiro.

Figura 148 – Representação de uma das soluções de como colocar nove peças no tabuleiro do Jogo da Onça de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical e horizontal



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Observando a Figura 147, podemos identificar quantas peças devem ser colocadas no tabuleiro, conforme a posição inicial escolhida, percebemos que a escolha pode ser feita das seguintes maneiras :

I. Podemos escolher duas posições que replicam 4 peças e uma posição que replica uma peça, assim temos: $4+4+1=9$;

$$C_4^2 \cdot C_1^1 = 6 \tag{D.30}$$

II. Podemos escolher quatro posições que replicam 2 peças e uma posição que replica uma peça, assim temos: $2+2+2+2+1=14$, o que pode ser feito de apenas uma maneira.

III. Podemos escolher uma posição que replica 4 peças, duas posições que replicam 2 peças e uma posição que replica uma peça, assim temos: $4+2+2+1=9$;

$$C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_1^1 = 11 \tag{D.31}$$

Portanto temos 18 maneiras distintas de dispor 9 peças que representam o cachorro de maneira que a configuração esteja simétrica em relação ao eixo vertical principal e ao eixo horizontal central, na parte quadrada do tabuleiro.

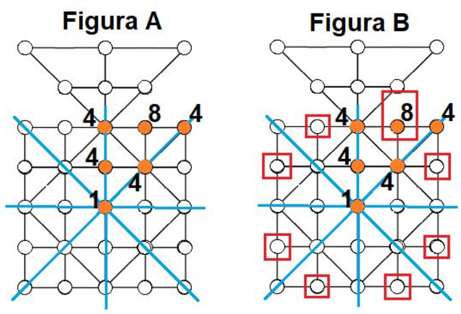
Problema 67 *Dado o tabuleiro do Jogo da Onça Figura 104, consta na página 135, responda:*

1. *Se dispomos de no máximo 14 peças que representam o cachorro, determine o maior número de peças que é possível dispor no tabuleiro mantendo a simetria vertical, horizontal e diagonal.*

2. *Se dispomos de no máximo 14 peças que representam o cachorro, de quantas maneiras distintas é possível colocar as peças no tabuleiro mantendo a simetria vertical, horizontal e diagonal.*

Observe na como representado na Figura 149, que dependendo da posição escolhida para colocar a peça, esta deve ser colocada em outras tantas posições como indicado na Figura A, por exemplo na Figura B se escolhido a posição indicada com o número oito está será replicada nas posições em destaque para que a simetria seja mantida. Portanto 13 é o número máximo de peças que é possível colocar no tabuleiro.

Figura 149 – Indicação de quantas peças se deve colocar no tabuleiro do Jogo da Onça, conforme a posição escolhida de maneira que a figura fique simétrica em relação ao eixo vertical, horizontal e diagonal

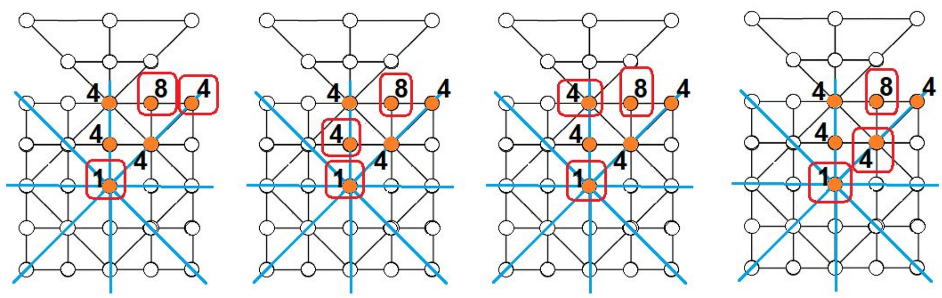


Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

A escolha pode ser feita das seguinte maneiras :

1. Escolher as posições que replicam 8, 4 e 1 peças, pois $8 + 4 + 1 = 13$, o que pode ser feito de quatro maneiras distintas pois se tem quatro posições que replicam em quatro posições, como representado na Figura 150.

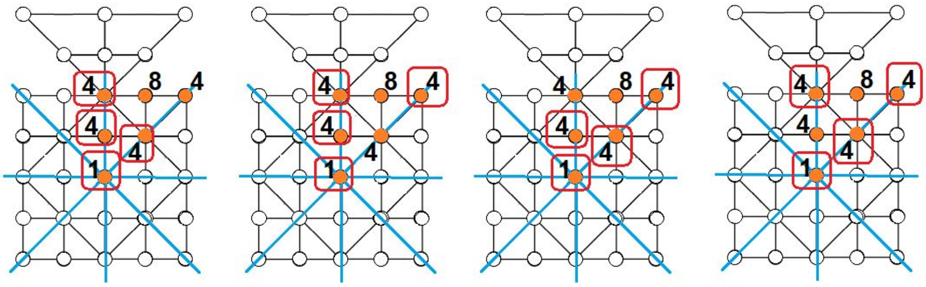
Figura 150 – Indicações de como escolher as posições que replicam 8, 4 e 1 peças, mantendo a simetria vertical, horizontal e diagonal.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

2. Escolher as posições que replicam 1,4,4 e 4 peças, pois $4 + 4 + 4 + 1 = 13$, o que pode ser feito de 4 maneiras distintas pois temos quatro posições que replicam em quatro posições, como representado na Figura 151.

Figura 151 – Indicações de como escolher as posições que replicam 1,4,4 e 4 peças, mantendo a simetria vertical, horizontal e diagonal.



Fonte: Adaptado de Lima e Barreto (2005).

Portanto temos oito maneiras distintas de dispor 13 peças que representam o cachorro no tabuleiro mantendo a simetria vertical, horizontal e as diagonais.