



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS DIADEMA



LUCAS DE LIMA ERVOLINO

**OS FRACTAIS ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS: UMA
POSSIBILIDADE DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

DIADEMA

2023

LUCAS DE LIMA ERVOLINO

**OS FRACTAIS ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS: UMA
POSSIBILIDADE DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

Orientador(a): Verilda Speridião Kluth

DIADEMA

2023

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Ervolino, Lucas de Lima

Os Fractais articulados à Teoria do Caos: uma possibilidade de ensino na Educação Básica / Lucas de Lima Ervolino. -- Diadema, 2023.

198 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2023.

Orientadora: Verilda Speridião Kluth

1. caos. 2. fractais. 3. sistemas dinâmicos. 4. matemática contemporânea. 5. ensino. I. Título.

LUCAS DE LIMA ERVOLINO

**OS FRACTAIS ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS: UMA
POSSIBILIDADE DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

Aprovado em: 09/10/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof(a). Dr(a) Verilda Speridião Kluth
Universidade Federal de São Paulo

Prof(a). Dr(a). Gleiciane da Silva Aragão
Universidade Federal de São Paulo

Prof(a). Dr(a). Tânia Baier
Universidade Regional de Blumenau

Prof(a). Dr(a). Theotônio Mendes Pauliquevis Junior
Universidade Federal de São Paulo

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus e ao Universo por terem me concedido saúde e forças para levar adiante o mestrado e o desenvolvimento da referida dissertação.

Quero expressar gratidão à minha orientadora, Professora Verilda Speridião Kluth, pelos aprendizados, pelas trocas durante as orientações e por ter acreditado em meu potencial, possibilitando-me explorar e desenvolver capacidades que se encontravam, até então, adormecidas e inexploradas.

Aos professores da banca por disponibilizarem o seu tempo e conhecimento para avaliar a dissertação, bem como por estarem presentes na defesa dela, expresso meu profundo agradecimento. É uma honra tê-los presentes neste importante momento.

Sou grato aos professores do curso do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Unifesp Diadema, os quais tive a honra de conhecer e que me proporcionaram, durante esse período, uma gama de aprendizados, assim como me permitiram enriquecer e fundamentar os conhecimentos adquiridos.

Agradeço à minha família e ao meu namorado Henrique França, que estiveram comigo durante todo o trajeto, dando-me suporte e apoio durante os árduos momentos e me incentivando a continuar, compreendendo todos os momentos nos quais tive que me fazer ausente para me dedicar aos estudos.

Além disso, desejo estender meus agradecimentos aos meus amigos, que do mesmo modo, entenderam a minha recusa aos convites e o meu distanciamento em alguns momentos, contudo mesmo diante disso, mantiveram-se presentes e torcendo pelo meu sucesso.

Por conseguinte, agradeço aos meus colegas de curso: Fabiano, Rui e Patrícia. Agradeço ao Fabiano pela parceria nos estudos – presenciais ou remotos – parceria essa, que possibilitou uma troca de experiências e conhecimentos que se fizeram de grande valia no decorrer do curso. Nesse sentido, agradeço também à Patrícia e ao Rui pelas trocas de experiência durante as aulas, pela tensão partilhada nos dias anteriores e nos dias de realização das provas. Igualmente, agradeço aos colegas mencionados pelos doces e pelos cafés levados nos dias das provas, símbolos que ajudaram a amenizar a tensão que nos acompanhava.

Por fim, agradeço a todos os envolvidos – diretamente ou indiretamente – que tornaram possível a realização e a conclusão do mestrado, assim como da dissertação apresentada.

RESUMO

A presente dissertação tem o objetivo de apresentar uma possibilidade de ensino dos fractais articulados à Teoria do Caos na Educação Básica. Desse modo, buscou-se por meio da hermenêutica filosófica, estabelecer uma dialógica entre pergunta e resposta no que se refere à “Como introduzir os fractais na Educação Básica tendo como inspiração a Teoria do Caos?”. Assim, o processo investigativo teve início na História da Matemática e da Ciência, de modo a compreender o processo de construção e concepção dos fractais. Para ir além, fez-se necessário investigar o caos da perspectiva filosófica e matemática, possibilitando distinguir o caos do senso comum que, por sua vez, pode remeter à desordem - do caos matemático que se fundamenta na sensibilidade às condições iniciais. Desse modo, os Sistemas Dinâmicos - caracterizados por mudanças ocorridas em alguns sistemas com o decorrer do tempo - designam-se como a rota pela qual o caos transita e se expressa, visto que estes possibilitam descrever os fenômenos intrínsecos da natureza e da vida que, em sua grande maioria, são fenômenos não lineares e não determinísticos. No entanto, introduzir os fractais na Educação Básica tendo como inspiração a Teoria do Caos, consiste em identificar o elemento que conecta o caos aos fractais: o atrator estranho. As órbitas desses atratores no espaço de fase desvelam estruturas fractais intrincadas e se apresentam como um caminho viável para desenvolver estes dois conceitos da Matemática contemporânea no contexto da sala de aula. Para possibilitar a inserção das supracitadas temáticas, esta dissertação propõe, ao final, uma sequência didática orientada para o ensino dos fractais articulados ao caos, tendo como referencial a Educação Básica.

Palavras-chave: caos; fractais; sistemas dinâmicos; matemática contemporânea; ensino.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to present the possibility of teaching fractals in conjunction with Chaos Theory in Basic Education. Thus, through philosophical hermeneutics, we sought to establish a dialog between question and answer with regard to "How to introduce fractals in Basic Education with Chaos Theory as inspiration?". This investigative process began in the History of Mathematics and Science, in order to understand the process of construction and conception of fractals. Furthermore, it was necessary to investigate chaos from a philosophical and mathematical perspective, making it possible to distinguish between common sense chaos - which refers to disorder - and mathematical chaos, which is based on sensitivity to initial conditions. Dynamic Systems - characterized by changes that occur in some systems over time - are designated as the route through which chaos transits and expresses itself, since they make it possible to describe the intrinsic phenomena of nature and life, the vast majority of which are non-linear and non-deterministic phenomena. However, introducing fractals in Basic Education, inspired by Chaos Theory, consists of understanding the element that makes it possible to establish this connection between chaos and fractals: the strange attractor. The orbits of these attractors in phase space reveal ornamental fractal structures and are a viable way of developing these two concepts of modern mathematics in the classroom. In order to enable the insertion of these themes, this dissertation proposes a didactic sequence oriented towards the teaching of fractals articulated with chaos, using Basic Education as a reference.

Keywords: chaos; fractals; dynamic systems; contemporary math; teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Curva de Hilbert – 5 primeiras iterações	28
Figura 2: Conjunto de Cantor – 5 primeiras iterações	28
Figura 3: Primeiras iterações da Curva de Koch	36
Figura 4: Primeiras iterações do Floco de Neve de Koch	36
Figura 5: Representação da curva de Peano	40
Figura 6: Etapas iterativas da Curva de Hilbert	41
Figura 7: Representação do conjunto de Cantor	42
Figura 8: Conjunto de Cantor – Representação por intervalos	43
Figura 9: Representação do Triângulo de Sierpinski	43
Figura 10: Representação do Tapete de Sierpinski	46
Figura 11: Representação da Pirâmide de Sierpinski	48
Figura 12: Etapas de construção da Esponja de Menger	50
Figura 13: Fractal tipo Dürer – Pentágono regular (3 primeiras iterações)	52
Figura 14: Fractal tipo Dürer – Heptágono regular (4 primeiras iterações)	52
Figura 15: Árvores bifurcadas	53
Figura 16: Árvores pitagóricas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo escaleno e isósceles, respectivamente	54
Figura 17: O Conjunto de Mandelbrot à esquerda, seguido de duas ampliações de suas estruturas.	56
Figura 18: Os Conjuntos de Julia (à esquerda) e de Douady (à direita)	56
Figura 19: Fractais naturais - Brócolis, árvore, raios, floco de neve, nuvens e montanhas	57
Figura 20: Fractais naturais gerados através de simulação gráfica	57
Figura 21: Tapete de Sierpinski	58
Figura 22: A autossimilaridade presente no tapete de Sierpinski	59
Figura 23: Fractais naturais: Brócolis romanesco (à esquerda) e samambaia (à direita)	59
Figura 24: Triângulo de Sierpinski – 4ª e 5ª iterações, respectivamente	60
Figura 25: Complexidade infinita e irregularidade encontradas nas linhas costeiras	60
Figura 26: Autossimilaridade em um segmento de reta subdividida em duas, três e quatro partes congruentes.	62
Figura 27: Autossimilaridade em um quadrado de lado unitário em três situações distintas.	63
Figura 28: Autossimilaridade em um cubo de aresta unitária em três situações distintas.	64
Figura 29: O Conjunto de Cantor	65
Figura 30: Triângulo de Sierpinski	66
Figura 31: Tapete de Sierpinski	66
Figura 32: Curva de Von Koch	66
Figura 33: Curva de Peano	67
Figura 34: Pirâmide de Sierpinski	67
Figura 35: Esponja de Menger	68
Figura 36: Representação gráfica do sistema dinâmico discreto $f(x) = x^2 - 2$	81
Figura 37: Mapa de $x_{n+1} = 0,9x_n$, com $x_0 = 10$ (à esquerda) e mapa de $x_{n+1} = \cos(x_n)$ com $x_0 = 2$ (à direita)	82
Figura 38: Mapa de $x_{n+1} = 3,45x_n(1 - x_n)$, com $x_0 = 0,001$	82
Figura 39: Diagrama de teia de aranha do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 0,6x_n + 2$ para os valores iniciais $x_0 = -17$ (à esquerda) e $x_0 = 18$ (à direita)	84
Figura 40: Conceito de estabilidade: equilíbrio estável e instável.	85
Figura 41: Conceito de estabilidade utilizando pêndulos.	86
Figura 42: Análise de ponto fixo estável atrator	87
Figura 43: Análise de ponto fixo instável e repulsor.	88

Figura 44: Mapa de $x_{n+1} = 2x_n - 1$, com $x_0 = 1,05$ e mapa de $x_{n+1} = 2x_n - 1$, com $x_0 = 0,99$; respectivamente.....	88
Figura 45: Análise de ponto fixo neutro ou indiferente.....	89
Figura 46: Diagrama de <i>cobweb</i> $x_{n+1} = 0,6x_n + 1$, com $x_0 = -10$ (à esquerda) e $x_0 = 15$ (à direita).....	90
Figura 47: Diagramas de teia de aranha do sistema dinâmico discreto não linear $x_{n+1} = x_n^3$, com...91	91
Figura 48: Diagrama de <i>cobweb</i> do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 13x_n + 4$, para os valores iniciais $x_0 = 3$ e $x_0 = 9$	92
Figura 49: Espaço de fase ou espaço fásico (à esquerda) e retrato de fase (à direita). ... Erro! Indicador não definido.	
Figura 50: Campo vetorial da equação autônoma $v = -g$ que representa o movimento de queda livre.	93
Figura 51: Retrato de fase do sistema dinâmico contínuo unidimensional $f(x) = x^3 - 4x$	97
Figura 52: Retrato de fase do sistema dinâmico contínuo unidimensional $f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$	98
Figura 53: Diagrama de teia de aranha do mapa logístico $x_{n+1} = 2,6 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,3$	103
Figura 54: Diagrama de teia de aranha do mapa logístico $x_{n+1} = 3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,1$	104
Figura 55: Diagrama de teia de aranha do mapa logístico $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,1$	104
Figura 56: Mapa logístico com valores de k variando de 0 a 4.	105
Figura 57: Atrator de um sistema dinâmico.....	107
Figura 58: Ferradura de Smale.....	109
Figura 59: O atrator de Lorenz.....	111
Figura 60: O atrator de Hénon.....	112
Figura 61: Atrator de Hénon. Erro! Indicador não definido.	
Figura 62: Atrator de Rössler e atrator double scroll, respectivamente, representados no espaço de fase.	112
Figura 63: Atrator de Lorenz – Representação no espaço de fase.....	119
Figura 64: Ponto médio do segmento de reta com extremidades no vértice C e no ponto P_0	122
Figura 65: Segunda iteração do Jogo do Caos.....	
Figura 66: Triângulo de Sierpinski obtido através do Jogo do Caos.....	123
Figura 67: Jogo do Caos adaptado e aplicável ao hexágono e ao quadrado.....	123
Figura 68: A sequência de Fibonacci.	133
Figura 69: Representação gráfica ou evolução das equações de diferenças das letras a, b, c e d no <i>software</i> Maxima.....	140
Figura 70: Evolução do mapa unidimensional $x_{n+1} = 0,95 \cdot x_n$, com $x_0 = 10$ após as 100 primeiras iterações.	141
Figura 71: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 0,3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,6$	143
Figura 72: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 2,3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,45$	144
Figura 73: Representação do mapa unidimensional $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,5$	145
Figura 74: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 3,45 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,5$	146
Figura 75: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 3,57 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,5$	147
Figura 76: Diagrama que sintetiza o comportamento do Mapa Logístico para os distintos valores assumidos pela constante k	149
Figura 77: Diagrama de <i>cobweb</i> do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = -2x_n + 1$, com $x_0 = 0,2$. ..	152
Figura 78: Diagrama de <i>cobweb</i> do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 0,8x_n + 3$, com $x_0 = 10$	153
Figura 79: Diagrama de <i>cobweb</i> do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = -x_n + 3$, com $x_0 = 1$	154
Figura 80: Diagrama de <i>cobweb</i> do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,1$	155

Figura 81: Diagrama de <i>cobweb</i> do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,9$	156
Figura 82: Diagrama de <i>cobweb</i> do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,45$	157
Figura 83: Explorando o tema: A matemática do Caos.	162
Figura 84: Mapa unidimensional com as 50 primeiras iterações do sistema dinâmico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, quando $k = 3,6$ e $x_0 = 0,25$ (à esquerda) e diagrama de <i>cobweb</i> (à direita).	163
Figura 85: Mapa unidimensional com as 50 primeiras iterações do sistema dinâmico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, quando $k = 3,6$ e $x_0 = 0,5$ (à esquerda) e diagrama de <i>cobweb</i> (à direita).	164
Figura 86: Mapa unidimensional com as 50 primeiras iterações do sistema dinâmico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, quando $k = 3,6$ e $x_0 = 0,75$ (à esquerda) e diagrama de <i>cobweb</i> (à direita).	164
Figura 87: Atrator de Lorenz no Espaço de Fase – <i>software</i> Geogebra.	167
Figura 88: Atrator de Rössler no Espaço de Fase – <i>software</i> Geogebra.	167
Figura 89: Da esquerda para a direita: Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Curva de Koch.	168
Figura 90: Construção dos estágios 1 e 2 no <i>software</i> Mathigon.....	169
Figura 91: Curva de Koch: construção no Geogebra.	170
Figura 92: Fractal tipo Dürer – Pentágono regular.	171
Figura 93: Fractal triminó: Níveis 1, 2 e 3.....	172
Figura 94: Fractal heptaminó em H - Níveis 1, 2 e 3.....	172
Figura 95: Fractal extensão – 1 do triângulo de Sierpinski: Níveis 1, 2, 3 e 4.	173
Figura 96: Fractal triminó.	173
Figura 97: Nível 4 do triminó.....	174
Figura 98: Fractal heptaminó em H.	174
Figura 99: Fractal extensão – 1 do triângulo de Sierpinski.....	175

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Número de segmentos do Floco de Neve de Koch	36
Tabela 2: Perímetro do Floco de Neve de Koch	37
Tabela 3: Número de triângulos remanescentes ao final de cada iteração do triângulo de Sierpinski ..	44
Tabela 4: Área do Triângulo de Sierpinski em função do número de iterações n	45
Tabela 5: Área do tapete de Sierpinski em função do número de iterações n	47
Tabela 6: Volume da Pirâmide de Sierpinski a cada iteração	49
Tabela 7: Volume da Esponja de Menger a cada processo iterativo n	51
Tabela 8: Relação entre o número de subdivisões (n) e o fator de redução (r) realizadas em um segmento de reta	63
Tabela 9: Relação entre o número de subdivisões (n) e o fator de redução (r) realizadas nas medidas dos lados de um quadrado.	63
Tabela 10: Relação entre o número de subdivisões (n) e o fator de redução (r) realizadas nas medidas das arestas de um cubo.	64
Tabela 11: Órbitas do sistema dinâmico $x_{n+1} = 3x_n - 2$	79
Tabela 12: Órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 13x_n + 4$	84
Tabela 13: Títulos das dissertações lidas durante o desenvolvimento deste trabalho.	124

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. EXPLICITAÇÃO DA PERGUNTA	19
3. A TRAJETÓRIA METODOLÓGICA E SEUS FUNDAMENTOS.....	21
4. FRACTAIS: ASPECTOS HISTÓRICOS E MATEMÁTICOS	25
4.1 FRACTAL: DEFINIÇÕES	31
4.2 CLASSIFICAÇÃO DOS FRACTAIS.....	32
4.2.1. Fractais gerados por meio de processos iterativos	33
4.2.1.1 Fractais pela Fronteira.....	34
4.2.1.1.1 A Curva e a Ilha de Von Koch.....	35
4.2.1.1.2 A Curva de Peano	39
4.2.1.1.3 A Curva de Hilbert	40
4.2.1.2 Fractais por remoção.....	41
4.2.1.2.1 Conjunto de Cantor	41
4.2.1.2.2 Triângulo de Sierpinski	43
4.2.1.2.3 Tapete de Sierpinski	46
4.2.1.2.4 Pirâmide de Sierpinski	48
4.2.1.2.5 Esponja de Menger.....	49
4.2.1.3 Fractais tipo Dürer	51
4.2.1.4 Fractais tipo Árvore	52
4.2.1.4.1 Árvores Bifurcadas	53
4.2.1.4.2 Árvore Pitagórica	53
4.2.2 Fractais obtidos por meio de uma relação de recorrência	54
4.2.3 Fractais aleatórios ou naturais	56
4.3 CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS.....	58
4.3.1 Autossimilaridade.....	58
4.3.2 Complexidade Infinita e Irregularidade	59
4.3.3 Dimensão Fractal.....	61
4.3.3.1 Dimensão do Conjunto de Cantor	65
4.3.3.2 Dimensão do Triângulo de Sierpinski	65
4.3.3.3 Dimensão do Tapete de Sierpinski	66
4.3.3.4 Dimensão da Curva de Koch	66
4.3.3.5 Dimensão da Curva de Peano.....	67
4.3.3.6 Dimensão da Pirâmide de Sierpinski	67

4.3.3.7 Dimensão da Esponja de Menger	68
5. SISTEMAS DINÂMICOS E A TEORIA DO CAOS	69
5.1 SISTEMAS DINÂMICOS	75
5.1.2 Estabilidade nos sistemas dinâmicos contínuos	93
5.1.3 Modelos Populacionais	99
5.1.3.1 Modelo de Malthus	100
5.1.3.2 Modelo de Verhulst.....	101
5.1.4 Atrator de um sistema dinâmico	107
5.2 A TEORIA DO CAOS.....	113
5.2.1 O Jogo do Caos	121
6. EM BUSCA DE HORIZONTES PARA INTRODUIZIR OS FRACTAIS ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	124
7. O VISLUMBRAR DE UM NOVO HORIZONTE: INTRODUIZINDO OS FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS E ALINHADOS COM OS CONTEÚDOS CURRICULARES DA BNCC...132	
7.1 Compreendendo um Sistema Dinâmico Discreto	133
7.2 O que é o caos? De que modo o caos se expressa e se manifesta?.....	158
7.3 Atratores: Definição e classificação	165
7.4 Fractais: Definição e Características.	167
8. REFLETINDO SOBRE O PESQUISADO.....	176
REFERÊNCIAS	179
APÊNDICE A – Modelo de Fichamento	184

1. INTRODUÇÃO

Durante a evolução da história do conhecimento humano, uma das maiores inquietações da ciência e da humanidade era a necessidade de explicar o mundo em que vivemos, em outras palavras, decifrar o código por meio do qual o universo foi concebido. Nesse sentido, as contribuições iniciais partiram de Galileu Galilei (1564 – 1642), que se utilizou de métodos experimentais e da linguagem matemática para descrever os fenômenos da vida e da natureza. Galilei se baseou em representações geométricas de antigas civilizações, estas sintetizadas e contempladas por Euclides em sua obra, que elabora leis a partir da compreensão de que a natureza pode ser descrita unicamente por meio da matemática. (BAIER, 2005).

Desse modo, a exposição sob a qual Galileu compreendia, por natureza, calcava-se na investigação de formas, movimentos dos corpos e quantidades que fossem passíveis de mensuração. O teórico contribuiu para uma visão de mundo que considera fundamental à pesquisa científica ater-se aos métodos quantitativos, subtraindo, assim, dos métodos científicos os métodos qualitativos. (BAIER, 2005).

Passados alguns séculos, Henri Poincaré (1860 – 1934) assume uma nova postura, tornando-se um crítico incisivo dos procedimentos quantitativos e os substituindo pelos qualitativos. Poincaré aprimora suas ideias a partir de sua obra filosófica, “A Ciência e a Hipótese”, que apresenta a Geometria Qualitativa, hoje conhecida por Topologia. (BAIER, 2005). A Topologia, por sua vez, estuda a Geometria das Deformações. Segundo Stewart (1991), apud Baier (2005):

A topologia já foi definida como a geometria da folha de borracha. Mais propriamente, é a matemática da continuidade [...]. Um ceramista, ao moldar um bocado de argila em suas mãos, deforma-a de maneira contínua; quando arranca um fragmento, porém, a deformação se torna descontínua. A continuidade é uma das mais fundamentais de todas as propriedades matemáticas [...]. Para o topólogo, todas as formas geométricas que nos ensinaram com tanta insistência quando éramos crianças, são uma só. (p. 88)

Poincaré também foi o responsável pelo primeiro trabalho desenvolvido que contempla a Teoria do Caos. Esse trabalho, intitulado de: “Sobre o Problema dos Três Corpos e as Equações da Dinâmica” (1890), apresenta os fundamentos de uma teoria de sistemas dinâmicos. Além disso, Poincaré observa que alguns sistemas apresentam comportamentos caóticos. Embora sua preocupação fosse pautada unicamente em compreender as órbitas dos corpos celestes em meio a seu trajeto, Poincaré colidiu com o caos. (BAIER, 2005). Caos capaz de revelar que, mesmo em sistemas determinísticos, a irregularidade e a imprevisibilidade podem se fazer presentes. Segundo Stewart (1991), apud Baier (2005): “A capacidade das equações, mesmo simples, de gerar movimento tão complexo, tão sensível à mensuração que parece aleatório. Isto é chamado, com muita propriedade, de caos” (p. 90).

Devido à tecnologia computacional não ser suficientemente avançada e à falta de interesse dos cientistas da época acerca do estudo dos fenômenos irregulares, a Teoria do Caos acaba por ter seu processo de edificação interrompido. “Foi preciso outra época, equipada com a teoria qualitativa das equações diferenciais criada pelo próprio Poincaré, além de computadores e outros auxílios tecnológicos, para lançar alguma luz sobre as profundezas caóticas e revelar sua beleza” (STEWART, 1991; apud BAIER, 2005, p. 90).

Mediante os progressos obtidos, Benoît Mandelbrot (1924 – 2010) questiona a Geometria que comumente utilizamos para descrever os fenômenos da natureza e da vida:

Por que é que a geometria é habitualmente descrita como fria e austera? Uma razão reside na sua inaptidão em descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de uma linha costeira, de uma árvore. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e a casca de uma árvore não é suave, nem os relâmpagos se propagam em linha reta (...). A natureza exhibe não apenas um grau mais elevado, mas um nível de complexidade completamente diferente. (MANDELBROT, 1983).

Em busca de uma geometria que pudesse descrever os fenômenos complexos presentes na natureza, Mandelbrot identifica e se depara com objetos matemáticos que não são contemplados dentre os conceitos estabelecidos e alicerçados na Geometria Euclidiana. A descoberta desses objetos causou espanto nos cientistas e matemáticos da época, que optaram por ignorá-los e os intitularam de “monstros matemáticos”. Em 1975, Mandelbrot denomina esses objetos matemáticos de “fractais”, tendo como inspiração o adjetivo em latim *fractus* e o verbo correspondente em latim, *frangere*, que significa quebrar e criar fragmentos irregulares.

Desse modo, o termo fractal passa a caracterizar os objetos matemáticos encontrados na natureza - ou decorrente de seus fenômenos - e que se expressam de forma irregular e fragmentada. (BAIER, 2005).

Por conseguinte, Mandelbrot chega à conclusão de que a geometria fractal era uma geometria pela qual a natureza se manifesta e que carrega consigo uma súplica incessante no que se refere ao caos estatístico. Desse modo, ele constata que a geometria fractal é uma geometria da natureza, mas também é uma geometria do caos: caos este, que se efetua de duas formas: estatística e determinista; isto é, os objetos fractais não se propõem apenas a descrever nuvens, montanhas, árvores, galáxias, mas também a possibilitar essa descrição por meio de fórmulas matemáticas que imitem imagens da realidade. (BAIER, 2005).

Conduzindo nossas reflexões ao panorama educacional atual, inferimos que os fractais e a Teoria do Caos se apresentam como áreas de conhecimento que possibilitam o aprendizado de uma matemática mais contemporânea e que pode potencializar e estimular o interesse dos alunos. Sobre a matemática do futuro, D' Ambrósio (2003; p.59), apud Carvalho (2005), discorre:

Pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama de matemática discreta e igualmente o que se chamavam “casos patológicos”, desde a não-linearidade até a teoria do caos, fractais, fuzzies, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica. [...] Justamente por representar a matemática do futuro, é muito mais interessante para o jovem. Os problemas tratados são mais interessantes, a visualização é no estilo moderno, parecido com o que se vê na TV e nos computadores. (p.77)

Ainda sobre a Geometria Fractal, Carvalho (2005) relata que, por se tratar de uma geometria intuitiva e dinâmica, proporciona ao professor ferramentas para correlacionar os conceitos matemáticos empregados em sala de aula aos mais distintos contextos cotidianos experienciados pelos alunos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC – 2018) cita os fractais de maneira explícita, como habilidade a ser trabalhada no Ensino Médio, dentro do estudo das noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composição destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). Além do mais, a BNCC no que se refere ao eixo da Matemática e suas Tecnologias carrega consigo o desafio de

despertar a compreensão dos alunos de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada que se caracteriza por um conjunto de regras e/ou técnicas, mas sim, uma ciência em contínuo processo de construção e que, portanto, se interroga e se transforma de acordo com as mudanças que ocorrem no mundo e na sociedade, ou seja, a matemática é uma construção histórico-cultural. De acordo com Lopes et al. (2013, p. 49), apud Silva (2015), “a geometria fractal, por meio de conexões e da interdisciplinaridade, apresenta um potencial histórico e cultural para explorar conteúdos matemáticos”.

Embora a habilidade mencionada contemple apenas o Ensino Médio, os fractais e a Teoria do Caos carregam consigo a capacidade de viabilizar e contextualizar o estudo de inúmeros conceitos matemáticos, dentre os quais: área e perímetro de figuras planas; sequências; progressão geométrica; logaritmos; funções; funções iterativas (compostas); construção de tabelas; reconhecer e descrever padrões; números complexos; noção básica de limite; entre outros. Além disso, as tecnologias computacionais dispõem de diversas ferramentas (aplicativos, *softwares*), que podem tornar os processos de ensino e de aprendizagem desses temas mais dinâmico, interessante e enriquecedor. Segundo Barbosa (2005); apud Silva (2015), há diversos pontos positivos ao se trabalhar com os fractais no contexto da sala de aula, os quais se podem elencar: a conexão da geometria fractal com as mais distintas ciências; a possibilidade de difundir o acesso à tecnologia da informática em diversos níveis de escolarização; inserir os alunos no mundo da arte, despertando e desenvolvendo neles o senso estético com as construções dos fractais e causar a sensação de surpresa diante da ordem no caos. Tendo em vista os argumentos citados, depreende-se a necessidade de difundir aos alunos da Educação Básica uma geometria distinta da Euclidiana – a Fractal – propiciando e criando espaços para reflexões que promovam o pensamento crítico, científico e criativo acerca da realidade de mundo que os circunscreve.

No entanto, embora as contribuições desses conceitos para o processo de ensino e aprendizagem da matemática sejam incontestáveis, há um grande desafio no que diz respeito ao modo de difundir os conhecimentos de maneira acessível e tangível aos estudantes da Educação Básica. Desse modo, somos tomados por um desconforto e uma perplexidade que nos remete a questionar: Como podemos introduzir os fractais e a Teoria do Caos na Educação Básica? Além disso: Como correlacionar esses dois temas e difundi-los no contexto da sala de aula? O âmago dessa inquietação é o que nos move rumo à estrutura da pergunta norteadora desta pesquisa, bem como nos impulsiona na busca por respostas: Como introduzir os fractais no Ensino Básico tendo como inspiração a Teoria do Caos?

A fim de fundamentar a pesquisa que persegue a pergunta norteadora, bem como enunciar as perguntas que se revelam subjacentes a ela e fruto da perplexidade vivida pelo pesquisador, bem como do conjunto de suas experiências, tanto de vida quanto na esfera da sala de aula, serão explicitados os aspectos filosófico-científicos da interrogação, já que ela possui a incumbência de conduzir-nos aos elementos essenciais do que se almeja questionar, alcançar e prescrutar.

Este caminhar será retratado em um total de 8 capítulos. A “Introdução” que se constitui como primeiro capítulo deste trabalho. O segundo capítulo, denominado “Explicitação da pergunta”, no qual emerge a pergunta norteadora desta pesquisa, bem como, as questões que se perfazem subjacentes a ela. Já o terceiro capítulo intitulado “A Trajetória metodológica e seus fundamentos” tem por finalidade enunciar a metodologia de pesquisa do autor tal qual o aporte teórico empregado. No quarto capítulo, denominado de “Aspectos históricos e matemáticos dos fractais”, o autor busca na história da matemática e da ciência, a base nas quais os conhecimentos matemáticos contemporâneos – dentre os quais, os fractais – se edificaram e se constituíram. Além disso, neste capítulo, os fractais são investigados e estudados no que se refere às suas classificações, características e propriedades. O quinto capítulo, intitulado de “Sistemas Dinâmicos e a Teoria do Caos”, concentra-se no estudo dos sistemas dinâmicos discretos e contínuos e no estudo das dinâmicas populacionais de Malthus e Verhulst. Desse modo, o caos é perscrutado do ponto de vista filosófico e matemático, buscando compreendê-lo em toda a sua amplitude e profundidade. O sexto capítulo denominado: “Em busca de horizontes para introduzir os fractais articulados à Teoria do Caos na Educação Básica”, apresenta as descrições das leituras realizadas durante este percurso investigativo e quais foram suas contribuições no que se refere ao despertar para o vislumbrar de novos prismas que possibilitem a introdução dos fractais na Educação Básica por intermédio da Teoria do Caos. No sétimo e penúltimo capítulo denominado de “O vislumbrar de um novo horizonte: Introduzindo os fractais na Educação Básica articulados à Teoria do Caos e alinhados com os conteúdos curriculares da BNCC”, são sugeridas e propostas atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula, porém, agora, com um olhar mais amplo e abrangente. Outrossim, essas atividades foram divididas em tópicos, visando à construção de uma sequência didática que valorize a construção dos conhecimentos matemáticos em todo o seu processo. Por fim, o oitavo e último capítulo deste trabalho, denominado “Refletindo sobre o pesquisado”, traz consigo as ponderações finais do autor acerca do tema investigado, bem como possibilitou

o compreender do caminhar desta pesquisa por intermédio da dialética estabelecida entre a pergunta e a resposta.

2. EXPLICITAÇÃO DA PERGUNTA

Todo perguntar e todo querer saber pressupõem um saber que não se sabe, mas de maneira tal que é um não saber determinado o que conduz a uma pergunta determinada. (GADAMER, 1997, p. 539, apud KLUTH, 2005, p. 40).

No ano de 2013, durante a graduação, deu-se o primeiro encontro entre o sujeito – pesquisador – e o fenômeno que, neste momento, é assumido como objeto de estudos e investigações desta pesquisa: a busca por um método de ensinar os fractais na Educação Básica. Como implicações decorrentes desse encontro, manifestaram-se também a admiração pelo tema, além de questionamentos que ecoavam no pesquisador e que aspiravam a ganhar forma e sentido no campo das ideias. No entanto, como o ato de questionar-se reivindica do sujeito que indaga o ímpeto em relação ao que se deseja saber, torna-se fundamental a ação do tempo no germinar das sementes outrora plantadas no solo fértil da interrogação numa perspectiva fenomenológica, pois aí, segundo Kluth (2001),

A interrogação assume novo sentido, ela volta-se para o sujeito que a formulou, ela é o avesso e o direito da historicidade de quem pergunta, é o passado, o presente e o futuro unidos em um só ato de perplexidade. É o veículo que, quando animado pelo pensar filosófico, pode nos conduzir à clareira da sabedoria. (p. 5)

Com o advento do tempo e com as experiências adquiridas pelo pesquisador e professor no contexto da sala de aula, os questionamentos iniciais foram criando e firmando suas raízes; estas, que suplicavam pressurosamente por serem enxergadas e contempladas. Dessa forma, o desconforto gerado pela interrogação atrelado ao anseio profundo de mergulhar nas águas desconhecidas do querer saber são os encarregados de motivar-nos e impelir-nos na busca pela compreensão do interrogado.

Em meio a essa imersão, fez-se conhecer uma teoria igualmente fascinante e que, por sua vez, apresenta conexão com os fractais: o caos. Ao adentrar esse universo desconhecido, somos instigados a investigá-lo e elucidá-lo, o que nos leva à interrogação norteadora desse

trabalho: “Como introduzir os fractais no Ensino Básico tendo como inspiração a Teoria do Caos?”

Uma vez que a pergunta norteadora deste projeto se consolida, isto nos convida a uma reflexão intrínseca acerca do que se deseja investigar. Ao perguntar sobre: “Como introduzir os fractais no Ensino Básico tendo como inspiração a Teoria do Caos?”, afinal o que o querer saber deseja esquadrihar, vasculhar e enfim, compreender e/ou responder?

Haja vista que a conjunção “como” nos remete aos termos “de que maneira”, “de que modo”, “de que jeito”, o “como” presente na pergunta norteadora deste projeto carrega consigo a intenção de dar sentido e direcionamento à caminhada enunciada, isto é, nos impulsiona na busca incansável por estratégias, ferramentas e metodologias que nos possibilitem introduzir os fractais no Ensino Básico. O “como” aponta para o verbo “introduzir”, que consiste em inserir, apresentar e incluir os fractais na dinâmica da sala de aula do Ensino Básico. Observa-se que o “como introduzir” presente na estrutura da pergunta, depende do “tendo como inspiração”, isto é, o desafio consiste em aplicar os fractais tendo como fascínio a Teoria do Caos e as articulações destas referências em prol da Educação Básica.

No entanto, para incorporar os fractais ao contexto da educação básica, torna-se necessário o conhecimento do processo histórico que perfaz a sua construção. Além disso, é essencial a compreensão da distinção de como os fractais foram concebidos inicialmente e como são vistos na atualidade. Ademais, há a necessidade de analisar os fractais do ponto de vista matemático, procurando estabelecer quais são as características e propriedades de que dispõem. Desse modo, as questões que se expressam subjacentes à pergunta norteadora se desvelam: O que são fractais? Como os fractais são concebidos na Matemática? Quais as suas aplicações? De que modo se deu a construção do corpo de conhecimento dos fractais? Quais as características e particularidades dos fractais? Quais as diferenças existentes entre a Geometria Fractal e a Geometria Euclidiana? O que é a dimensão fractal? Como a dimensão de um fractal pode ser calculada? Por que os fractais não estão presentes nos currículos da Educação Básica? Qual a importância de introduzir os fractais no Ensino Básico? Além de outras perguntas.

Não obstante, como o intuito desta dissertação é de que a introdução dos fractais seja realizada mediante uma correlação com a Teoria do Caos, acrescenta-se às perguntas já enunciadas: O que é o caos do ponto de vista filosófico e matemático? De que modo o caos se expressa e é estudado? O que são Sistemas Dinâmicos? É possível obter fractais por meio do

caos? De que maneira se dá essa construção? A profundidade e a imensidão das questões aqui fomentadas são e serão a fonte do desejo de querer saber de um ser que, todavia, não o sabe, mas que pretende, em meio a esse percurso, encontrar caminhos e respostas, mantendo sempre a convicção de que a fonte do que se deseja saber, porém, não se sabe, flui inesgotável.

3. A TRAJETÓRIA METODOLÓGICA E SEUS FUNDAMENTOS

A palavra metodologia deriva da palavra “método”, do latim, “*methodus*” e tem por significado: “caminho ou a via para a realização de algo”; isto é, apreende-se por metodologia um conjunto estabelecido de técnicas que conduzam à realização de um desígnio. Segundo Kluth (2005), para Heidegger, a técnica é uma forma de fazer emergir à superfície o que se encontra no mais íntimo de sua essência e, portanto, torna-se necessário uma percepção abrangente das características edificadoras do procedimento, de modo que, na prática, ele não se converta em um mecanismo utilizado de maneira inconsciente e que não se interroga durante seu processo de desenvolvimento.

Destarte, essa pesquisa terá como enfoque uma metodologia orientada pela estrutura da pergunta: “Como introduzir os fractais na Educação Básica tendo como inspiração a Teoria do Caos?” e assumirá uma abordagem hermenêutica filosófica gadameriana que pretende durante todo o seu trajeto, questionar-se em relação às técnicas e aos procedimentos adotados, transformando o ato de investigar em um contínuo exercício do filosofar.

Na leitura de Kluth (2005), Gadamer destacou-se por realizar uma investigação fenomenológica que colocava em *epoché* os fenômenos de compreensão e as maneiras de interpretar estabelecidos historicamente. Em um cenário investigativo fenomenológico, *epoché* significa colocar em suspensão, isto é, renunciar aos conhecimentos pré-estabelecidos e enraizados e se permitir apreciar o objeto de estudo de um novo horizonte. Ao remetermos o nosso pensamento para o visualizar do pôr do sol no horizonte, verificamos que o deslumbramento que nos acomete não se concentra apenas no sol ou no horizonte, mas sim, também, em toda a vastidão que nos cerca e que se interpõe a eles, em todas as direções.

O conceito de horizonte torna-se interessante aqui porque expressa essa visão superior e mais ampla que deve ter aquele que compreende. Ganhar um horizonte quer dizer sempre aprender a ver para além do que está próximo e muito próximo, não para abstrair dele, mas precisamente para vê-lo melhor, em um todo mais amplo e com critérios mais justos. (GADAMER, 2011; apud SANTIAGO; MIRANDA, 2019, p. 8).

Por meio desta análise, Gadamer concebe um novo panorama acerca da compreensão e da interpretação de obras humanas, compatíveis à proporção que se mostram conexos com a natureza e à essência da presença assim como uma reconceituação do que se depreende por tradição. Em relação à “pre-sença”, Leão (1993), apud Kluth (2005) discorre que:

[...] é uma abertura que se fecha e, ao se fechar, abre-se para a identidade e a diferença, na medida e toda vez que o homem se conquista e assume o ofício de ser, quer num encontro, quer num desencontro, com tudo que ele é e não é, que tem e não tem. É esta “pre-sença” que joga originalmente nosso ser no mundo. (p. 28).

Essa nova concepção ficou conhecida como Círculo Hermenêutico Gadameriano e neste cenário, a tradição, que outrora era tida como um impedimento para a interpretação e explanação de textos e obras, passa a ser considerada como experiência que advém da historicidade da “pre-sença” e que pode ser veiculada e compartilhada por meio da linguagem, possibilitando, desse modo uma compreensão e interpretação abrangente das obras humanas realizadas. Essa partilha expressa por meio da linguagem se estabelece na estrutura da pergunta e da resposta, constituindo assim, uma autêntica conversação do modo de ser da presença do pesquisador com as demais presenças no mundo à sua volta, destacando assim, a temática da qual o texto fala e a qual a pergunta se remete.

A hermenêutica, enquanto metodologia, tem por base duas vertentes: a primeira relaciona a tradição com a experiência, isto é, que a presença está em constante mobilidade; já a segunda refere-se ao modo com o qual nos aproximamos da obra humana quando queremos interpretá-la e compreendê-la, isto é, o modo interrogativo que nos impulsiona para obtenção de respostas. Dessa maneira, a tarefa da hermenêutica é cumprida à proporção que os conhecimentos prévios e as tradições de quem busca compreender tornam-se conscientes ao eu e postos imediatamente em suspensão. Essa suspensão é concebida como a conduta do investigador de voltar-se para a pergunta e se deixar guiar por sua estrutura, de modo a estar acessível à infinitude de possibilidades que ela desperta e desencadeia. Ainda nesta perspectiva, o pensamento histórico deve passar a refletir simultaneamente à própria historicidade, ou seja, deve presumir um nexos que se estabeleça entre a realidade inerente a seu contexto histórico, tal qual à realidade de quem busca compreendê-lo.

Segundo Bicudo (1991), apud Kluth (2005):

Interrogar o que é dito no texto, interrogar o tema, passa por um trabalho hermenêutico que visa tirar do obscuro a experiência primária homem/mundo, as formas de elas serem expressas linguisticamente, os recursos usados pela mente humana e que estão à disposição do contexto histórico e social (tradição), carregados de significados ideológicos e já padronizados pela sociedade, os quais, por si, obscurecem ou modificam (roubam) o sentido daquela experiência de que o texto fala. (p. 28 - 29).

Para Gadamer, sempre que uma obra humana ou tradição tiver que sair de sua obscuridade, faz-se necessário a tomada de consciência histórica efetual que, em primeira instância, define-se como a consciência hermenêutica da situação, tal como a demanda por seu questionamento. Segundo Kluth (2005), para Gadamer, a consciência da história efetual ocorre por meio da experiência. Experiência essa fomentada por um vínculo entre o que se compreendeu e as consequências desta compreensão no transcorrer do panorama histórico. Segundo ele, dizer que experienciamos algo é o mesmo que dizer que o vivenciamos e, portanto, o resultado dessa vivência transforma a nossa compreensão e o nosso conhecimento a tal ponto, que se torna impossível experimentá-la da mesma forma novamente. Isso ocorre devido ao fato de adquirirmos uma nova consciência acerca da situação experienciada, tornando o que antes era tido como inesperado e imprevisível em algo que se pode esperar e presumir. Portanto, Gadamer conclui que a compreensão é uma forma de efeito, e a essa estrutura de experiência, denominamos de “dialética”. Assim, a dialética se apresenta como o conjunto de experiências vividas e experienciadas pelo homem e que o tornam capaz de entender a sua finitude e os seus limites em relação ao que se é factível de realizar e à razão norteadora do que ele projeta.

De acordo com Kluth (2005), Gadamer considera que a consciência hermenêutica consiste na experiência pressuposta pela estrutura da pergunta, já que o experienciar não ocorre de fato, sem questionar-se. Assim, a pergunta se transforma no elo condutor da dialética, pois permite que os envolvidos na conversa, a saber, a pergunta e a resposta, não se menosprezem, estabelecendo-se assim um diálogo autêntico no qual a estrutura pautada na pergunta e na resposta anuncia-se como principal responsável pela compreensão.

Contudo, a postura hermenêutica a ser adotada nesta pesquisa se concentrará no pano de fundo histórico dos fractais e da Teoria do Caos, trazidas à luz mediante a compreensão e a historicidade do ser pesquisado que se revela por meio da pre-sença. Investigar com esse objetivo, exige receptividade para com a historicidade da construção dessas áreas de

conhecimento, tal qual com o que ela deseja nos anunciar, isto é, estar totalmente entregue às possibilidades e às experiências resultantes desse encontro, pois:

O tempo já não é mais, primariamente, um abismo a ser transposto porque divide e distância, mas é, na verdade, o fundamento que sustenta o acontecer, onde a atualidade finca suas raízes. A distância de tempo não é, por conseguinte, algo que tenha que ser superado. Esta era, antes, a pressuposição ingênua do historicismo, ou seja, que era preciso deslocar-se ao espírito da época, pensar segundo seus conceitos e representações em vez de pensar segundo os próprios, e somente assim se poderia alcançar a objetividade histórica. Na verdade, trata-se de reconhecer a distância de tempo como possibilidade positiva e produtiva do compreender. Não é um abismo devorador, mas está preenchido pela continuidade da herança histórica e da tradição, a cuja luz nos é mostrado o transmitido. (GADAMER, 1997, apud KLUTH, 2005, p. 37).

Desse modo, a hermenêutica empodera-se no sentido de apropriar-se e fundamentar-se sob a estrutura da pergunta e da resposta, estabelecendo entre elas, um nexos de orientação, comunicação e cognição, pois “o que a ferramenta do “método” não alcança tem de ser conseguido e pode realmente sê-lo através de uma disciplina do perguntar e do investigar [...]” (GADAMER, 1997, apud KLUTH, 2005, p. 41).

Para além da teoria acerca dos procedimentos que compõem o método de perfazer hermenêutico filosófico, consideremos a situação: estamos diante de uma lareira que não está acesa. Desejamos abrasá-la, e para isso precisamos de lenha. Consideremos a lareira como a consciência inicial que o eu possui a respeito de determinado assunto. A lenha representa as indagações forjadas mediante a perplexidade do pesquisador e que o suscitam a investigar minuciosamente e intensamente. O modo de dispor e organizar a lenha, tal qual a quantidade necessária para se obter o fogo que deseja, faz parte das técnicas e ou experiências que serão adotadas e empregadas no decorrer da pesquisa. Portanto, a compreensão no tocante ao vínculo dialético existente entre pergunta e resposta, assim como, os métodos que serão empregados na construção e condução desse diálogo são primordiais, já que é por meio dessa comunicação que se torna factível o incendiar da chama da compreensão. Logo, responder à pergunta norteadora, busca auferir ao curso dessa pesquisa a iluminação do perguntado - de maneira crítica, cuidadosa e rigorosa, que outrora era obscurecida e nos mantinha presos em nossos preconceitos, tradições e julgamentos.

Isto posto, nos concerne a enunciar e desvelar os processos da trajetória metodológica a serem percorridos. Com o intuito de encontrar respostas às perguntas subjacentes, pretende-se buscar na História da Matemática, na epistemologia da Matemática e em dissertações e produções acadêmicas desenvolvidas que tenham por objeto de pesquisa os fractais e a Teoria do Caos. Algumas dessas dissertações foram desenvolvidas por alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e outras foram selecionadas, à medida que suas contribuições auferiram iluminação ao pesquisador acerca do interrogado. Outrossim, assumindo a postura de uma metodologia que se fundamenta na hermenêutica filosófica, foram elaborados fichamentos (modelo no Apêndice A) de cada leitura feita pelo pesquisador durante o curso de construção desta dissertação. Esses fichamentos foram concebidos utilizando como referência as perguntas norteadoras dessa pesquisa, isto é, eles detêm a finalidade de agrupar as respostas encontradas mediante à expansão da compreensão das leituras realizadas. Um desses fichamentos será apresentado ao final da dissertação, no campo dedicado aos apêndices, com o intuito de possibilitar aos leitores a percepção e a compreensão da trajetória percorrida pelo pesquisador no decorrer do processo de elaboração deste trabalho.

Para mais além dos procedimentos adotados, o objetivo final desta dissertação é o de propor ideias e sugestões de atividades que explorem os fractais articulados à Teoria do Caos, e de modo que estes conceitos possam ser introduzidos na Educação Básica, proporcionando aos alunos a oportunidade de acesso a conhecimentos fundamentais que têm suas raízes na Matemática Contemporânea.

4. FRACTAIS: ASPECTOS HISTÓRICOS E MATEMÁTICOS

O interesse da humanidade por instrumentos que viabilizem a compreensão da vida e da natureza, bem como de suas ações, reações e enigmas insondáveis, não se restringe apenas à dinâmica dos dias atuais. Esse ávido empenho e sede por elucidação nos acompanha durante séculos, milênios, a fio. Contudo, é por volta do século XVII, que Galileu Galilei (1564 – 1642) corrobora a convicção de que a natureza, o mundo e os fenômenos que reverberam, expressam-se e comportam-se unicamente por linguagem e leis provenientes da matemática. Galileu fundamenta-se então, nas noções e concepções geométricas das antigas civilizações egípcia,

grega e mesopotâmica, as quais foram organizadas e sintetizadas por Euclides, e concebe uma nova perspectiva do cosmos. A saber:

[...] neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas [...]. (GALILEI, 1999, p. 46; apud BAIER, 2005, p. 20–21).

Desse modo, Galileu caracteriza e delimita o estudo do Universo por meio das formas e das propriedades que se apresentam passíveis de mensurar, estabelecendo um nexos entre o espaço físico e o espaço geométrico euclidiano. Mediante a postura adotada por Galileu, uma nova compreensão de ciência se fez conhecer: uma ciência voltada para as análises quantitativas em detrimento das qualitativas, ou seja, uma ciência que caminha para uma sistemática pautada apenas na utilização de fórmulas geométricas e (BAIER, 2005). Não obstante, a natureza e seus fenômenos tiveram que acomodar-se mediante os elementos da geometria de Euclides, de modo que até hoje, ela é a responsável por exercer grande influência e expressividade no campo de estudos científicos e matemáticos. Segundo Carvalho (2005),

Diante dos seus axiomas, postulados e teoremas, as formas euclidianas pareciam encaixar-se bem do ponto de vista teórico, sem quebras e sem lacunas. Talvez por isso permanecem sem modificações significativas durante dois mil anos, dando a estas formas a forte impressão de naturalidade [...] (p. 14)

De acordo com Boyer (1996), a geometria teve suas origens no Egito, nos arredores do Rio Nilo e tinha por finalidade instaurar as fronteiras entre as propriedades impactadas pelas constantes inundações. Desde então, a geometria se estabelece como “medida da terra” e foi posteriormente nomeada de Geometria Euclidiana, em homenagem a Euclides de Alexandria, que foi o pioneiro no que se refere à sistematização dessa geometria nos padrões atuais. Segundo Santos (2020), o livro “Os Elementos” foi de extrema relevância para o desenvolvimento da matemática, visto que nele está contido e organizado todo o escopo de conhecimento matemático de uma época. O que impulsionou as novas investigações e estudos na área da geometria foram os questionamentos suscitados acerca da estruturação lógica do quinto postulado de Euclides. Além disso, o processo de construção das Geometrias Não-Euclidianas ocorre no século XIX, confrontando a concepção até então estabelecida, de que a Geometria Euclidiana era a única capaz de expressar efetivamente as leis que regem o Universo.

Entretanto, vale ressaltar que as Geometrias Não-Euclidianas surgem com o intuito de agregar e ampliar as possibilidades de atuação, tendo em vista as limitações intrínsecas da Geometria Euclidiana – limitações estas, que embora existam, não são capazes de refutar a grandiosidade da obra de Euclides e de sua influência científica inigualável que reverbera até os dias hodiernos.

Segundo Capra (1998, p.109) apud Baier (2005, p. 86):

Do século XVII em diante, o estilo europeu da matemática mudou gradualmente a partir da geometria, a matemática das formas visuais, para a álgebra, a matemática das fórmulas [...] Poincaré inverteu essa tendência [...] voltando novamente para os padrões visuais. No entanto, a matemática visual de Poincaré não é a geometria de Euclides. É uma geometria de um novo tipo, uma matemática de padrões e relações conhecida como topologia.

Henri Poincaré (1860 – 1934) institui a Geometria Qualitativa, compreendida como a Geometria das deformações e intitulada, atualmente, de Topologia. Na Topologia, o que se considera como essencial e significativo, são as características que não se alteram mediante as transformações realizadas continuamente; isto é, um topólogo não se enclausura no que se pode mensurar e quantificar. Além disso, um topólogo acredita que todas as formas geométricas que nos foram ensinadas desde a infância, na verdade, se caracterizam como uma só, já que “tomando um pouco de massa de modelar, podemos modificá-la de modo contínuo, formando uma esfera, um cubo, um cilindro. Um triângulo pode ser deformado continuamente, assumindo a forma de um quadrado, de um círculo” (BAIER, 2005, p. 88).

Com as contribuições da Geometria Qualitativa e das demais Geometrias Não-Euclidianas, a humanidade passa a inferir e a despertar, mesmo vagarosamente, que existem outras perspectivas e modos de avistar o mundo que nos circunda e acolhe, bem como os elementos e fenômenos de sua natureza singular. Conseqüentemente, manifestam-se no final do século XIX os primeiros objetos que conhecemos hodiernamente como fractais. (BAIER, 2005).

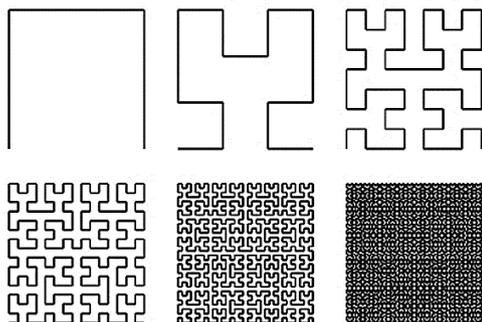
As raízes da geometria fractal podem ser remontadas até a busca de rigor lógico em análise, levando à invenção, por volta de 1900, de uma variedade de “curvas patológicas” cujo principal papel era mostrar que argumentos intuitivos ingênuos podem dar errado. Por exemplo, Hilbert definiu uma curva que passa por todo ponto

dentro de um quadrado – não só chega perto, mas atinge exatamente cada ponto.
(STEWART, 2019, p. 241-242).

No entanto, visto a concepção científica da época ainda estar alicerçada nos fundamentos da Geometria Euclidiana, os cientistas e matemáticos reagem com aversão e estranheza, denominando esses objetos como “monstros matemáticos” e curvas patológicas – “embora não sejam patológicas para a natureza, ou mesmo para os matemáticos: simplesmente elas assim pareciam para os matemáticos do período” (STEWART, 2019, p. 248). Alguns exemplos são as Curvas de Peano, criadas em 1890 por Giuseppe Peano (1852 – 1943), o Conjunto de Cantor, desenvolvido pelo matemático alemão Georg Cantor (1845 – 1918), a curva de Koch, apresentada pelo matemático sueco Helge von Koch (1870 – 1924) e o Triângulo e o Tapete de Sierpinski, anunciados pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 – 1969). Dentre os fractais citados, o Conjunto de Cantor (ver Figura 2) possui dimensão não-inteira compreendida no intervalo $[0,1]$. “Com efeito, apesar de parecer constituir uma série de pontos (portanto de dimensão zero), existe uma estrutura subjacente. Sua estrutura está entre a reta e o ponto [...] tem uma dimensão fractal 0,6309.” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 91; apud BAIER, 2005, p. 118). Já as Curvas de Peano apresentam dimensão no intervalo $[1,2]$ e têm por finalidade passar por todos os pontos de um quadrado. Um ano após Peano, David Hilbert (1862 – 1943) desenvolve uma curva semelhante (ver Figura 1), que preenche todos os pontos de um quadrado, porém, sem apresentar pontos de intersecção. Essas curvas são consideradas como patológicas, pois visam preencher planos que possuem dimensão euclidiana 2 por meio de linhas com dimensão euclidiana igual a 1.

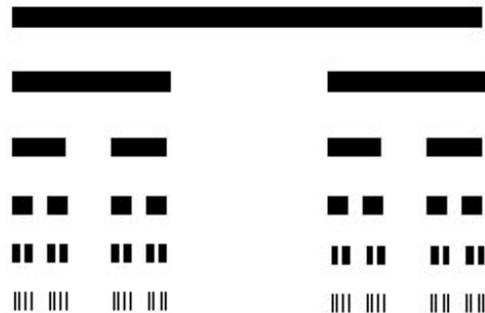
Segundo Baier (2005): “Curvas que preenchem planos passam a integrar a galeria dos monstros matemáticos, exercendo forte impacto por serem contraexemplos da matemática vigente e, após Mandelbrot, são entendidas como sendo fractais” (p. 122).

Figura 1: Curva de Hilbert – 5 primeiras iterações



Fonte: researchgate.net

Figura 2: Conjunto de Cantor – 5 primeiras iterações



Fonte: topologia.wordpress.com

Destarte, o termo fractal veio a ser utilizado mais tarde, somente após a metade do século XX, pelo matemático Benoît Mandelbrot que teve como influxo o adjetivo em latim *fractus*, que possui como verbo correspondente em latim, *frangere*, e tem por significado: quebrar e fragmentar em partes irregulares. (BAIER, 2005).

Segundo Stewart (2019, p. 240), Mandelbrot nasceu em Varsóvia, na Polônia, no dia 20 de novembro de 1924. No ano de 1936, mudou-se com sua família para Paris. Seu tio, Szolem Mandelbrot, ocupava a posição de professor de matemática em um colégio renomado em Paris, o que suscitou a admiração de Mandelbrot, bem como o interesse de seguir a mesma carreira. Durante a adolescência, seu tio encarregou-se de sua educação, levando-o a Lycée Rolin, em Paris. Não obstante, a França estava ocupada pelos nazistas, transformando a infância de Mandelbrot - que era judeu - em um cenário de pobreza e de temor pela morte. Em 1944, em Lyon, durante seus estudos, Mandelbrot observa que possui aptidões geométricas intuitivas e que por meio delas, consegue obter aproximações e explicar resultados para problemas advindos das mais diversas áreas da Matemática. Desse modo, ele é admitido na renomada École Normale Supérieure em Paris, a fim de proceder com seus estudos na área. Todavia, por reconhecer suas habilidades em Geometria, Mandelbrot parece não se satisfazer com os rumos da abstração e da algebrização de Bourbaki - centrada em matemática pura - e, portanto, opta por se mudar para os Estados Unidos em 1948, onde assume um posto no Instituto de Pesquisa James Watson da IBM (International Business Machines Corporation).

Durante suas investigações na IBM, Mandelbrot desenvolve e publica artigos científicos que, a princípio, soam desconexos e desarticulados entre si. Dentre as temáticas dos artigos, encontram-se: distribuição da riqueza, comprimento das linhas costeiras, bolsa de valores, demografia populacional, a estrutura do Universo, entre outros. (STEWART, 2019).

Uma de suas investigações na IBM teve por finalidade observar os 'ruídos' espontâneos que se manifestavam por intermédio de interferências no processo de transmissão de dados entre computadores, via linha telefônica. Embora especialistas da área tenham tentado, não encontraram solução para a problemática. Mandelbrot decifrou a situação a partir do instante em que aceitou os ruídos como sendo inevitáveis e, portanto, impossíveis de serem eliminados. Dessa forma, Mandelbrot procura descrever e separar as transmissões por meio de períodos - perfeitos e com ruídos - e nota que os períodos de erros, se ampliados, abarcavam em suas estruturas, intervalos de transmissão ainda menores; levando-o a

identificar um padrão geométrico que representasse adequadamente a situação: o Conjunto de Cantor. Sobre isso, Baier (2005) discorre:

Mandelbrot (1997) aponta a semelhança de sua descrição do amontoamento de erros com a construção matemática denominada conjunto de Cantor, avaliando ser esse o primeiro problema concreto cuja abordagem demanda a utilização de fractais. (p. 119).

Em 1975, Mandelbrot é contemplado com um *insight* de compreensão que o possibilita estabelecer o nexos entre cada um dos artigos científicos publicados: o conceito de fractal. O termo fractal surge então com a incumbência de representar a irregularidade e a complexidade intrínseca aos fenômenos da natureza e da vida.

A natureza detesta a linha reta e não morre de amores por outras coisas vindas de Euclides e dos textos sobre cálculo. Mandelbrot cunhou um nome para esse tipo de estrutura: fractal. E promoveu, com energia e entusiasmo, o uso de fractais em ciência, a fim de modelar muitas das estruturas irregulares da natureza. (STEWART, 2019, p. 246).

Benoît Mandelbrot faleceu em 2010 e deixou um legado de contribuições expressivas para o avanço da Geometria, já que:

Era preciso ter uma imaginação excepcional para considerar a possibilidade de uma geometria diferente daquela de Euclides, pois o espírito humano por dois milênios estivera limitado, pelo preconceito da tradição, à firme crença de que o sistema de Euclides era certamente a única maneira de descrever em termos geométricos o espaço físico, e que qualquer sistema geométrico contrário não poderia ser consistente. (EVES, 1997, p. 22; apud FARIAS, 2019, p. 22).

Os fractais são objetos geométricos ou naturais que se expressam por meio da autossimilaridade presente em suas estruturas, independentemente da escala. Ademais, os fractais, em sua grande maioria, possuem dimensão não inteira, o que representa o seu grau de irregularidade e rugosidade, e por fim, carregam consigo o vislumbre de uma complexidade infinita, que resultam em padrões belos, ornamentais e harmoniosos. Com o intuito de descrever os fractais em sua completude, explicaremos a seguir a sua definição, bem como as suas características e propriedades.

4.1 FRACTAL: DEFINIÇÕES

A primeira definição para a palavra fractal foi concebida pelo próprio Benoît Mandelbrot em 1976: “Um conjunto é dito fractal se a dimensão Hausdorff deste conjunto for maior do que a sua dimensão topológica.” No entanto, essa definição foi considerada um tanto restrita e rigorosa, de modo que até Mandelbrot não se deu por satisfeito. Segundo Alves (2007); apud Silva (2015): “Inicialmente, Benoît Mandelbrot apresentou, com relutância, uma definição de fractal, reforçando que se tratava apenas de uma tentativa de definição e, mais tarde, retirou essa definição” (p. 25).

Em consequência, matemáticos e estudiosos da área impulsionaram suas investigações em busca de uma definição considerada mais formal e acessível. Desse modo, Jeans Felder, em sua obra intitulada “Fractais” (1988), propõe a seguinte definição: “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao todo sobre alguns aspectos.” (Felder, 1988; apud Barbosa, 2005, p.18). Outra definição foi desenvolvida por Kenneth J. Falconer, em sua obra *Fractal Geometry* (1990), na qual ele relata que F é fractal se apresentar todas ou a maioria das propriedades descritas a seguir:

- a. F tem estrutura fina, isto é, apresenta detalhes em qualquer escala;
- b. F é localmente ou globalmente muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional;
- c. F apresenta autossimilaridade, ou seja, cada parte de F é uma cópia reduzida do todo. Esta autossimilaridade, às vezes, é aproximada ou estatística;
- d. A dimensão fractal de F é maior que sua dimensão topológica;
- e. F é obtido por meio de um processo recursivo simples.

Para além das definições mencionadas, o conceito de fractal ainda é considerado como um campo a ser explorado e examinado, visto que todos os que se arriscaram na busca por uma definição formal, não obtiveram sucesso no que diz respeito a empreender todas suas características e especificidades. Acerca disso, Mandelbrot (1989, p. 14), apud Carvalho (2005), relata que:

Será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para em seguida dizer que um objeto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo? Considerando que um tal formalismo seria prematuro, adotei (...) um

método baseado numa caracterização aberta e intuitiva, onde os avanços se efetuam por retoques sucessivos. (p. 18)

Diante de sua insatisfação com a definição inicial, Mandelbrot, mais tarde, sugeriu definir fractal como: “[...] uma forma composta de partes que de algum modo são semelhantes ao todo.” (ALVES, 2007; apud SILVA, 2015, p. 25).

Destarte, tomando como referência os conceitos expostos, nos arriscamos a propor uma definição que sintetize e contemple as ideias de Mandelbrot, Felder e Falconer: fractal é um ente geométrico ou natural de complexidade infinita, que apresenta autossimilaridade exata ou aproximada, em diferentes escalas; e pode ser obtido de três formas distintas – por meio de processo iterativo; relação de recorrência ou por intermédio de um sistema dinâmico. Além disso, pode apresentar dimensão fracionária, devido às suas rugosidades e fragmentações.

Nosso objetivo a seguir será classificar os fractais e definir os modos pelos quais eles são gerados. Além disso, pretende-se analisar minuciosamente cada um dos atributos e propriedades dos fractais, descrevendo-os de modo a trazer esclarecimento ao que ainda se encontra encoberto e obscuro em nossa compreensão.

4.2 CLASSIFICAÇÃO DOS FRACTAIS

Nesta seção, iremos classificar os fractais e discorrer de maneira detalhada sobre os critérios que nos possibilitam realizar essa especificação. Além disso, com a finalidade de exemplificar e enriquecer o exposto, serão mencionados e demonstrados os fractais clássicos que se enquadram em cada uma das classificações.

Os fractais podem ser classificados em 3 (três) tipos:

1. Fractais gerados por meio de processos iterativos;
2. Fractais obtidos por meio de uma relação de recorrência;
3. Fractais aleatórios ou naturais.

4.2.1. Fractais gerados por meio de processos iterativos

Os fractais gerados por meio de processos iterativos são conhecidos como fractais determinísticos ou geométricos. Esses fractais possuem uma regra fixa baseada em um processo iterativo geométrico e apresentam a autossimilaridade exata como um de seus traços mais notáveis e significativos. Além disso, é necessário definir o contexto matemático relacionado com funções. A palavra “iterar” significa repetir, refazer; e seu significado no contexto matemático corresponde à aplicação de uma função nela mesma indefinidamente, isto é, iterar corresponde a executar uma função composta. Consideremos o seguinte exemplo:

Suponha que uma pessoa tenha depositado em uma poupança, com rendimento de 6% ao mês e no regime de juros compostos, uma quantia de R\$1 300,00. Qual será o montante dessa aplicação após uma quantidade n de meses?

Seja P_n o valor em reais, obtido ao final dos n meses de aplicação e P_0 o valor inicial aplicado na poupança. Após o primeiro mês, temos:

$$P_1 = P_0 + 0,06P_0 = 1,06P_0.$$

Após o segundo mês de aplicação, obteremos:

$$P_2 = P_1 + 0,06P_1 = 1,06P_1.$$

E assim, sucessivamente:

$$P_3 = P_2 + 0,06P_2 = 1,06P_2$$

$$P_4 = P_3 + 0,06P_3 = 1,06P_3$$

. . .

$$P_n = P_{n-1} + 0,06P_{n-1} = 1,06P_{n-1}.$$

Note que para calcularmos o montante de cada mês subsequente, precisamos impreterivelmente do montante referente ao mês anterior. Nesse caso, estamos utilizando o conceito de iteração e, conseqüentemente, de função composta. Podemos definir a função $F(x) = 1,06x$ para representar a situação, já que precisamos apenas multiplicar o montante obtido no mês anterior por 1,06.

Desse modo, obtemos:

$$P_1 = 1,06P_0 = F(P_0)$$

$$P_2 = 1,06P_1 = F(P_1) = F(F(P_0)) = F \circ F(P_0) = F^2(P_0)$$

$$P_3 = 1,06P_2 = F(P_2) = F(F(F(P_0))) = F \circ F \circ F(P_0) = F^3(P_0)$$

...

$$P_n = 1,06P_{n-1} = F(P_{n-1}) = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{n \text{ vezes}}(P_0) = F^n(P_0).$$

Logo, se $F(x) = 1,06x$; então:

$$F^n(x) = (1,06)^n x.$$

Em que F^n representa n -ésima iteração da função F . Dessa maneira, conhecendo a aplicação inicial, somos capazes de calcular os valores obtidos nos meses posteriores.

A iteração é a transformação aplicada repetidamente ao objeto e a recursividade é a característica do processo iterativo que recorre sempre à mesma forma de maneira idêntica ou transformada. A ideia subjacente aos fractais é que diante da iteração de uma fórmula simples se pode obter uma estrutura muito complexa e rica. (MOISSET, 2003, p. 135; apud DOMINGOS, 2013, p. 18).

No que se refere aos fractais geométricos, o processo iterativo se caracterizará por meio de uma regra bem estabelecida, isto é, a iteração pode ocorrer por meio da substituição de partes do fractal por um número maior de fragmentos ou então, essa iteração pode ocorrer de maneira inversa: remover um fragmento do fractal considerado a cada iteração. Os fractais determinísticos que são gerados por meio de uma iteração de acréscimo são denominados de fractais pela fronteira. Já os que representam iterações por remoções, são chamados de fractais por remoção.

4.2.1.1 Fractais pela Fronteira

Os fractais clássicos que se enquadram nessa classificação são: A Curva e a Ilha de Von Koch, a Curva de Peano e a Curva de Hilbert. A seguir exibiremos cada um deles, tais quais suas etapas de construção.

4.2.1.1.1 A Curva e a Ilha de Von Koch

No que se refere à “A Curva e a Ilha de Von Koch”, segundo Farias (2019), foram desenvolvidas pelo matemático Niels Fabian Helge Von Koch em 1906. Além disso, Koch nasceu em 25 de janeiro de 1870 e realizou diversos trabalhos nas áreas da Teoria dos Números e das Equações Diferenciais. A Curva de Koch fez parte da galeria dos “monstros matemáticos” da época. Ao aplicarmos o método recursivo utilizado na Curva de Koch sobre os lados de um triângulo equilátero, obtemos a famosa Ilha de Von Koch, também chamada de Floco de Neve de Koch. (RABAY, 2013). A Ilha de Von Koch é gerada mediante o limite da construção desse processo iterativo. Para fins de aplicação do Cálculo Diferencial, a Curva de Koch é considerada contínua em toda a sua extensão, porém, não é diferenciável em nenhum de seus pontos. Mais tarde, mediante seus estudos, Mandelbrot reconheceu como um instrumento adequado para o cálculo da dimensão fractal das linhas costeiras. Segundo Baier (2005):

Para Mandelbrot, a curva proposta por Niels von Koch é um modelo muito rudimentar de litoral, ou seja, um modelo matemático preliminar para modelar costas litorâneas, que se torna mais adequado quando é construído com técnicas envolvendo aleatoriedade. (p. 126)

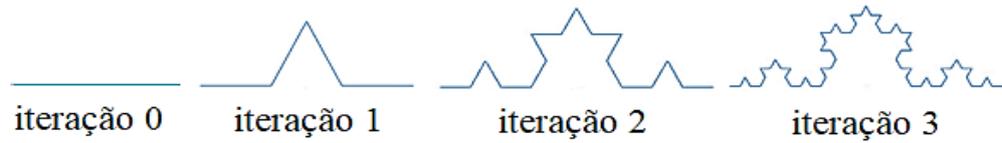
E de acordo com Mandelbrot (1997, p.40); apud Baier (2005):

[...]a curva de Koch lembra um mapa, mas apresenta os maiores defeitos encontrados em quase todos os primeiros modelos [...] Suas partes são idênticas umas às outras [...]. Assim, a curva de Koch é um modelo muito preliminar de litoral costeiro. (p. 127)

A Curva de Koch (ver Figura 3) é construída mediante o seguinte processo iterativo:

- i. Na iteração 0, tomamos um segmento de reta de comprimento l ;
- ii. Dividimos o segmento de reta em três segmentos congruentes de medida $\frac{l}{3}$;
- iii. Retiramos a parte central e em seu lugar acrescentamos dois segmentos de mesma medida formando um triângulo equilátero que tem como base o terço médio removido;
- iv. Realizamos os procedimentos (ii) e (iii) repetidamente e indefinidamente.

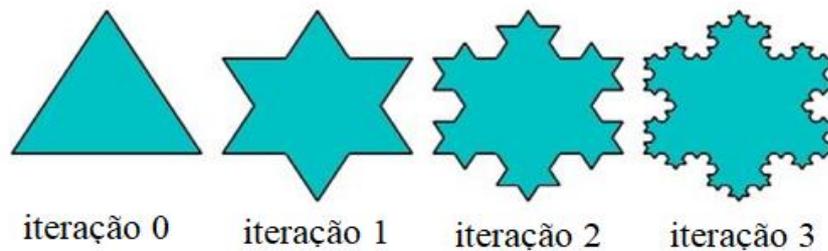
Figura 3: Primeiras iterações da Curva de Koch



Fonte: Mendes Junior (2017)

Conforme mencionado, ao aplicarmos o mesmo procedimento iterativo sobre os lados de um triângulo equilátero, geramos o fractal denominado Ilha de Von Koch (também chamado de Floco de Neve de Koch), conforme ilustrado na figura 4:

Figura 4: Primeiras iterações do Floco de Neve de Koch



Fonte: Sedrez (2009)

Vamos estudar e analisar o Floco de Neve de Koch por meio da construção de tabelas e na busca por generalizações que nos permitam obter o número total de segmentos de cada iteração, bem como, uma expressão que nos possibilita calcular o seu perímetro.

Observando a figura acima, na iteração 0, temos 3 segmentos; já na iteração 1, cada lado do triângulo equilátero é dividido em três segmentos congruentes e o terço médio é substituído por mais dois segmentos de mesma medida, isto é, cada lado do triângulo equilátero inicial passará a contemplar 4 segmentos, isto é, teremos um total de 12 segmentos. Na 2ª iteração, cada um dos segmentos da iteração 1 serão substituídos por 4 segmentos de mesma medida, resultando em $12 \cdot 4 = 48$ segmentos ao todo. Construímos a Tabela 1 com a intenção de sintetizar os dados coletados:

Tabela 1: Número de segmentos do Floco de Neve de Koch

Iteração	Número de segmentos
0	3
1	$3 \cdot 4 = 12$
2	$3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2 = 48$
3	$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^3 = 192$
...	...
n	$3 \cdot 4^n$

Fonte: Autoria própria

Em relação ao perímetro, consideremos que as medidas dos lados do triângulo equilátero são iguais a l . Na primeira iteração, os lados são divididos em três partes iguais, isto é, $\frac{l}{3}$; porém a parte central é removida e substituída por dois segmentos de mesma medida, o que resulta que cada lado do triângulo equilátero inicial passará a medir $\frac{4}{3}l$. Construímos a Tabela 2 com o intuito de organizar os valores obtidos a cada iteração.

Tabela 2: Perímetro do Floco de Neve de Koch

Iteração	Número de segmentos	Medida de cada segmento	Perímetro
0	3	l	$3l$
1	$3 \cdot 4 = 12$	$\frac{1}{3}l$	$12 \cdot \frac{1}{3}l = 4l$
2	$3 \cdot 4^2 = 48$	$\frac{1}{9}l$	$48 \cdot \frac{1}{9}l = \frac{16}{3}l$
3	$3 \cdot 4^3 = 192$	$\frac{1}{27}l$	$192 \cdot \frac{1}{27}l = \frac{64}{9}l$
...
n	$3 \cdot 4^n$	$\frac{1}{3^n}l$	$3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{3^n}l = \left(\frac{4^n}{3^{n-1}}\right)l$

Fonte: Autoria própria

Note que o perímetro pode ser reescrito da seguinte maneira: $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n l$, isto é, o perímetro representa uma progressão geométrica (PG) de razão $q = \frac{4}{3}$, o que significa que o perímetro da Ilha de Koch tende ao infinito, pois como a razão dessa PG é maior que 1, ela diverge quando n tende ao infinito.

Não obstante, também podemos calcular a área do Floco de Neve de Koch. Como iniciamos o nosso processo iterativo utilizando um triângulo equilátero, temos:

$$A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Na primeira iteração, acrescentamos em cada lado do triângulo inicial, um triângulo equilátero de lado $\frac{l}{3}$. Calculando a área desse triângulo, temos que:

$$A_1 = \frac{\left(\frac{l}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{9}}{4} = \frac{1}{9} A_0.$$

Na segunda iteração, serão acrescentados quatro triângulos equiláteros em cada lado do triângulo equilátero inicial e cada um deles terá área igual a $\frac{1}{9} A_1$, resultando assim em um acréscimo em cada lado do triângulo inicial de $\frac{4}{9} A_1$. Na terceira iteração, teremos o acréscimo de mais $16 = 4^2$ triângulos equiláteros em cada um dos três lados do triângulo inicial. Como a área de cada um deles será igual a $\frac{1}{9} A_2$, temos então que o acréscimo na área será de $\frac{16}{9} A_2$. Como $A_2 = \frac{1}{9} A_1$, substituindo, obtemos:

$$A_3 = \frac{16}{9} A_2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{9} A_1 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 A_1.$$

Desse modo, podemos concluir que a área acrescida a cada lado do triângulo inicial na iteração n , será dada por: $A_n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} A_1$. Como as áreas referem-se a apenas um dos lados do triângulo equilátero inicial, temos que a área total do Floco de Neve de Koch pode ser determinada da seguinte maneira:

$$A_t = A_0 + 3 \cdot A_1 + 3 \cdot \frac{4}{9} A_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 A_1 + \dots$$

Podemos reescrever essa soma:

$$A_t = A_0 + 3 \cdot A_1 \cdot \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots \right].$$

(*)

Observe agora que (*) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita (PG) de razão $q = \frac{4}{9} < 1$. Realizando essa soma, encontramos:

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Substituindo o valor encontrado, chegamos à:

$$A_t = A_0 + 3 \cdot A_1 \cdot \frac{9}{5} = A_0 + \frac{27}{5} \cdot A_1.$$

Como $A_1 = \frac{1}{9} A_0$, temos:

$$A_0 + \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{9} A_0 = A_0 + \frac{3}{5} A_0 = \frac{8}{5} A_0.$$

Portanto, quando o número de iterações da Ilha de Koch tende ao infinito, sua área corresponde a $\frac{8}{5}$ da área do triângulo equilátero inicial.

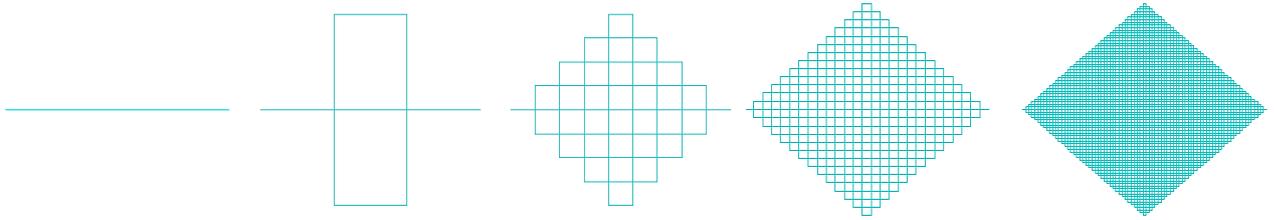
4.2.1.1.2 A Curva de Peano

Segundo Rabay (2013), Giuseppe Peano nasceu em Cuneo, na Itália, no ano de 1858. Prestou várias contribuições às áreas de Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear, Cálculo Vetorial e no que diz respeito às aplicações geométricas de Cálculo Infinitesimal. Tornou-se renomado devido aos axiomas de Peano, que contemplam propriedades inerentes ao conjunto dos números naturais. Devido à precisão e ao rigor lógico que adotava em seus trabalhos, cooperou significativamente para a área da Lógica Matemática, sendo considerado por alguns como o ‘Pai da Lógica’. No ano de 1890, publicou sua “curva patológica”, a “Curva de Peano”, que surge com a proposta de preencher a superfície plana de um quadrado em sua totalidade.

A Curva de Peano (ver Figura 5) pode ser construída por meio do seguinte processo iterativo:

- i. Na iteração 0, consideramos um segmento de reta de comprimento l , que será a medida da diagonal do quadrado ao qual a curva pretende preencher;
- ii. Nessa etapa, dividimos o segmento de reta inicial em três partes congruentes de medida $\frac{l}{3}$ e acrescentamos 6 fragmentos de mesma medida, formando dois quadrados opostos na parte central;
- iii. Repetimos o procedimento anterior para cada segmento de reta, indefinidamente, até que a superfície plana do quadrado considerado seja preenchida totalmente.

Figura 5: Representação da Curva de Peano



Fonte: Santos (2020)

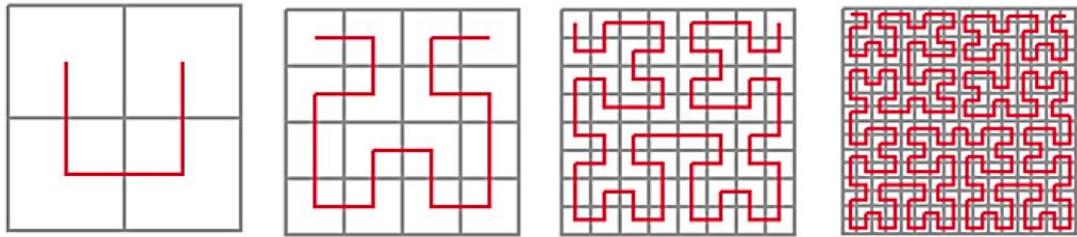
4.2.1.1.3 A Curva de Hilbert

Considerado um dos matemáticos mais notáveis, tendo em vista que seus tópicos de pesquisa são essenciais nos variados ramos da Matemática, David Hilbert nasceu em Königsberg, na Alemanha, no ano de 1862. (RABAY, 2013). Destacou-se por consolidar a Teoria dos Invariantes, que aborda axiomáticamente a geometria euclidiana; a Teoria dos números algébricos e a criação dos espaços de Hilbert, que retratam as equações integrais e as formas quadráticas. Em 1891, um ano após Peano, Hilbert publica o seu ‘monstro’ denominado Curva de Hilbert. (RABAY, 2013). A Curva também tem a intenção de cobrir toda a superfície plana de um quadrado, sem que haja a interseção de pontos.

O processo iterativo que possibilita a obtenção da Curva de Hilbert (ver Figura 6) se dá por meio das seguintes etapas:

- i. Consideramos inicialmente um quadrado e o dividimos em quatro quadrados da mesma área. Assim, a curva será determinada por três segmentos de reta consecutivos, com extremidades os pontos centrais dos quadrados;
- ii. Como o realizado em (i), construímos novos quadrados e modificamos parcialmente a curva, a fim de conectar por meio de segmentos de retas consecutivas e sequenciais cada um dos pontos centrais;
- iii. Repetimos os procedimentos (i) e (ii) indefinidamente até que a superfície do quadrado seja preenchida totalmente e sem apresentar intersecções.

Figura 6: Etapas iterativas da Curva de Hilbert.



Fonte: Moreira (2013)

4.2.1.2 Fractais por remoção

Alguns dos fractais clássicos que se enquadram na classificação fractais por remoção são o Conjunto de Cantor, o Triângulo, o Tapete e a Pirâmide de Sierpinski, bem como a Esponja de Menger. Exibiremos adiante cada um desses fractais, bem como os procedimentos pelos quais são obtidos.

4.2.1.2.1 Conjunto de Cantor

Segundo Farias (2019), George Cantor nasceu em São Petersburgo, na Rússia, no ano de 1845. Cantor foi renomado por elaborar a moderna Teoria dos Conjuntos. Cantor suscitou novos problemas relacionados aos conjuntos infinitos, já que, mediante suas investigações, obteve o conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas dos cardinais e ordinais, estabelecendo as distinções entre esses conceitos.

Assim sendo, os conceitos inovadores propostos por Cantor enfrentaram inúmeras resistências por parte da comunidade matemática da época, porém, atualmente, são reconhecidas como contribuições significativas. Cantor provou que os conjuntos infinitos não possuem a mesma cardinalidade, distinguindo assim os enumeráveis dos contínuos. Cantor provou também que o conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}) é enumerável, enquanto o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) é contínuo, por meio do famoso método da diagonal. Em 1883, Cantor desenvolveu o “Conjunto de Cantor”, um objeto que também tem seu lugar garantido na galeria dos ‘monstros’ matemáticos e que Cantor demonstra não se tratar de um conjunto enumerável. (RABAY, 2013).

Para construir o Conjunto de Cantor (ver Figura 7), procedemos do seguinte modo:

- i. Consideramos um segmento de reta unitário;
- ii. Dividimos o segmento de reta em três partes congruentes e retiramos a parte central, isto é, o terço médio;
- iii. Repetimos sucessivamente (iteramos) o processo (ii) nos segmentos restantes ao final de cada etapa.

Figura 7: Representação do Conjunto de Cantor



Fonte: Moreira (2013)

Note que a iteração 0 se inicia no intervalo $[0,1]$. Dividimos o segmento em três partes congruentes que medem $\frac{1}{3}$. Ao fim da 1ª iteração, removemos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Logo, a iteração 1, que representaremos por I_1 , pode ser expressa por:

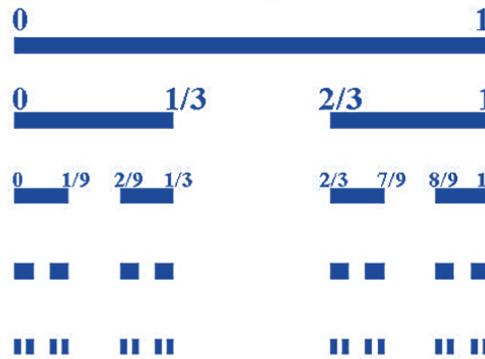
$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Prosseguindo no desenvolvimento do processo recursivo, dividimos novamente os segmentos da I_1 em três segmentos congruentes, de medida igual a $\frac{1}{9}$, e, portanto, removemos os intervalos abertos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, obtendo ao final da iteração I_2 :

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Concluimos então que cada etapa posterior I_{n+1} será expressa pela união dos intervalos fechados obtidos por meio do processo recursivo no qual, de I_n , removemos os intervalos abertos - terços médios - dos segmentos que o constituem (ver Figura 8). Desse modo, verificamos que I_n sempre será formado por 2^n intervalos fechados, cada um com comprimento igual a 3^{-n} , isto é, o comprimento do Conjunto de Cantor em uma iteração I_n , será dada por $2^n \cdot 3^{-n}$.

Figura 8: Conjunto de Cantor – Representação por intervalos



Fonte: matemelga.wordpress.com

4.2.1.2.2 Triângulo de Sierpinski

Segundo Rabay (2013), Waclaw Sierpinski nasceu na Varsóvia, Polônia, em 1882. Apresentou grandes contribuições na Teoria dos Números e na Topologia de Conjuntos. Criou os objetos matemáticos denominados Triângulo e Tapete de Sierpinski.

Nesse sentido, o Tapete de Sierpinski é considerado uma generalização do Conjunto de Cantor e representa cada face da Esponja de Menger (uma representação tridimensional). Além do mais, o Triângulo de Sierpinski é a referência para a construção da Pirâmide de Sierpinski. Também criou a curva de Sierpinski, uma curva fechada que preenche completamente a área quadrangular e que possui aplicações em otimização de rotas.

As etapas para a construção do Triângulo de Sierpinski (ver Figura 9) são:

- i. Consideremos a superfície de um triângulo equilátero;
- ii. Traçamos suas bases médias, obtendo desse modo, 4 triângulos equiláteros;
- iii. Retiramos o triângulo central;
- iv. Realizamos de modo iterativo e indefinidamente as etapas (ii) e (iii) nos triângulos remanescentes ao final de cada iteração do processo.

Figura 9: Representação do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Moreira (2013)

Para mais além, podemos investigar algumas propriedades do Triângulo de Sierpinski, dentre as quais, o número de triângulos remanescentes após um total de n iterações e o desenvolvimento do processo de obtenção de sua área.

Com o intuito de organizar as informações e facilitar a visualização, elaboramos a Tabela 3 onde estão correlacionadas a iteração, bem como, o número de triângulos restantes ao final dela.

Tabela 3: Número de triângulos remanescentes ao final de cada iteração do triângulo de Sierpinski

Iteração	Número de triângulos
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
...	...
n	3^n

Fonte: Autoria própria

Portanto, na n ésima iteração do Triângulo de Sierpinski, teremos um total de 3^n triângulos.

Em relação à área, vamos chamar a área do triângulo equilátero inicial de A_0 . Logo, após a 1ª iteração teremos 3 triângulos, cada qual com área igual a $\frac{1}{4}A_0$, totalizando uma área total de $\frac{3}{4}A_0$. Após a 2ª iteração, obtemos um total de 9 triângulos, cada um com área igual a $\frac{1}{16}A_0$, totalizando uma área total de $\frac{9}{16}A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$. Observe a Tabela 4 a seguir:

Tabela 4: Área do Triângulo de Sierpinski em função do número de iterações n

Iteração	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área do Fractal
0	1	A_0	A_0
1	3	$\frac{1}{4}A_0$	$3 \cdot \frac{1}{4}A_0 = \frac{3}{4}A_0$
2	9	$\frac{1}{16}A_0$	$9 \cdot \frac{1}{16}A_0 = \frac{9}{16}A_0$
3	27	$\frac{1}{64}A_0$	$27 \cdot \frac{1}{64}A_0 = \frac{27}{64}A_0$
4	81	$\frac{1}{256}A_0$	$81 \cdot \frac{1}{256}A_0 = \frac{81}{256}A_0$
...
n	3^n	$\left(\frac{1}{4}\right)^n A_0$	$3^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$

Fonte: Autoria própria

Note que a expressão para o cálculo da área desse fractal confirma uma noção intuitiva de nossa parte, já que a cada iteração n , a superfície ocupada (colorida) é cada vez menor, isto é, a área do Triângulo de Sierpinski tende a zero.

Além disso, podemos calcular a soma de cada uma dessas áreas, com o objetivo de enriquecer o exposto até o momento e devido ao fato de ser algo que nos deixa curiosos e perplexos, buscando respostas. Chamando de A_t a área total obtida como a soma de todas as infinitas iterações, segue:

$$A_t = A_0 + \frac{3}{4}A_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 A_0 + \dots$$

Colocando em evidência, temos:

$$A_t = A_0 + \frac{3}{4}A_0 \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots \right] \quad (*)$$

Note que (*) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita (PG) de razão $q = \frac{3}{4} < 1$. Realizando essa soma, encontramos:

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Substituindo o valor encontrado, chegamos à:

$$A_t = A_0 + \frac{3}{4} A_0 \cdot 4 = A_0 + 3A_0 = 4A_0.$$

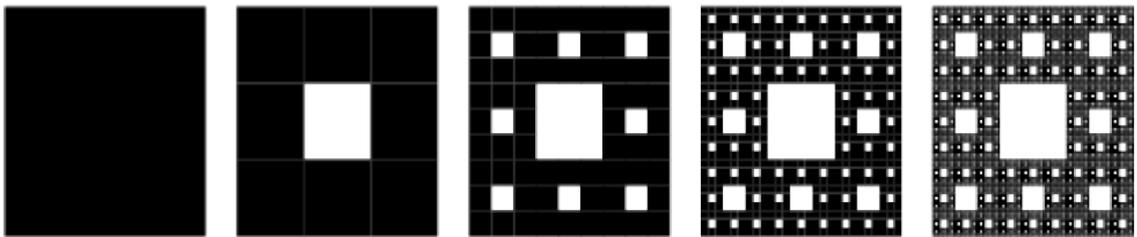
Portanto, chegamos à conclusão de que a área total gerada pela soma de todas as infinitas iterações é equivalente a área de 4 triângulos equiláteros iniciais.

4.2.1.2.3 Tapete de Sierpinski

Os procedimentos envolvidos na construção do Tapete de Sierpinski (ver Figura 10) são basicamente os mesmos empregados na construção anterior, com algumas modificações:

- i. Consideremos a superfície de um quadrado;
- ii. Dividimos o quadrado em um total de nove quadrados congruentes;
- iii. Extraímos o quadrado central e
- iv. Realizamos de modo iterativo as etapas (ii) e (iii) nos quadrados restantes ao final de cada etapa.

Figura 10: Representação do Tapete de Sierpinski



Fonte: Moreira (2013)

De maneira semelhante ao realizado com o Triângulo de Sierpinski, podemos encontrar uma expressão que nos permita calcular o número de quadrados da n ésima iteração do Tapete de Sierpinski, bem como calcular a área desse fractal.

Com relação ao número de quadrados, basta observar que na iteração 0, temos um único quadrado. Após a 1ª iteração, dispomos de um total de 8 quadrados. Na 2ª iteração, cada um desses 8 quadrados da iteração anterior, produzirá mais 8 quadrados, gerando um total de $8^2 = 64$. Na 3ª iteração, cada um dos 64 quadrados obtidos na iteração 2 conceberá mais 8 quadrados, o que resulta em $64 \cdot 8 = 512 = 8^3$. Desse modo, concluímos que o número de quadrados após a iteração n será dado por 8^n .

Para calcularmos a área do fractal, elaboramos a Tabela 5 abaixo:

Tabela 5: Área do tapete de Sierpinski em função do número de iterações n

Iteração	Número de quadrados	Área de cada quadrado	Área do fractal
0	1	A_0	A_0
1	8	$\frac{1}{9}A_0$	$8 \cdot \frac{1}{9}A_0 = \frac{8}{9}A_0$
2	64	$\frac{1}{81}A_0$	$64 \cdot \frac{1}{81}A_0 = \frac{64}{81}A_0$
3	512	$\frac{1}{729}A_0$	$512 \cdot \frac{1}{729}A_0 = \frac{512}{729}A_0$
...
n	8^n	$\left(\frac{1}{9}\right)^n A_0$	$8^n \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n A_0 = \left(\frac{8}{9}\right)^n A_0$

Fonte: Autoria própria

Destarte, o Tapete de Sierpinski de modo análogo ao Triângulo de Sierpinski, possui uma área que tende a zero, de acordo com o aumento indefinido da quantidade de iterações n . Além disso, também conseguimos obter a soma das áreas obtidas nas indefinidas iterações desse fractal. Chamando essa área total (soma) de A_t , segue:

$$A_t = A_0 + \frac{8}{9}A_0 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 A_0 + \dots .$$

Colocando em evidência, temos:

$$A_t = A_0 + \frac{8}{9}A_0 \cdot \left[1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \dots \right].$$

(*)

Note que (*) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita (PG) de razão $q = \frac{8}{9} < 1$. Realizando essa soma, obtemos:

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9.$$

Por fim, substituindo, chegamos à:

$$A_t = A_0 + \frac{8}{9}A_0 \cdot 9 = A_0 + 8A_0 = 9A_0.$$

Logo, concluímos que a área total gerada pela soma de todas as infinitas iterações equivale a área de 9 quadrados iniciais.

Podemos também, estender o conceito de fractais para objetos tridimensionais. Dois exemplos são a Pirâmide de Sierpinski e a Esponja de Menger.

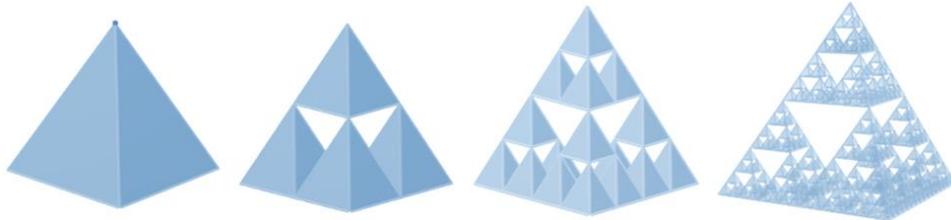
4.2.1.2.4 Pirâmide de Sierpinski

No caso da Pirâmide de Sierpinski, consideramos o processo de construção análogo ao Triângulo de Sierpinski, no entanto, utilizando como referência um tetraedro regular. A grande diferença reside no fato de que construiremos planos paralelos à base do tetraedro em substituição à necessidade de traçar as bases médias do triângulo (objeto bidimensional).

As etapas do processo de construção da Pirâmide de Sierpinski (ver Figura 11) são:

- i. Consideremos um tetraedro regular;
- ii. Construimos planos que sejam paralelos a todas as faces do tetraedro e que interceptam os pontos médios de suas arestas;
- iii. Retiramos o poliedro central – formado por dois tetraedros que juntos compõem um octaedro - e obtemos quatro tetraedros com vértices que pertencem ao tetraedro inicial;
- iv. Realizamos de modo iterativo e indefinidamente as etapas (ii) e (iii) nos tetraedros restantes.

Figura 11: Representação da Pirâmide de Sierpinski



Fonte: iesenriquenieto.educacion.es

Analisando o processo iterativo da Pirâmide de Sierpinski, somos capazes de desenvolver uma expressão que nos possibilita calcular o número de tetraedros restantes depois de n iterações. Observe que na iteração 0, temos um único tetraedro. Já na iteração 1, resultam dos procedimentos realizados, 4 tetraedros. Na 2ª iteração, cada um dos 4 tetraedros obtidos anteriormente gera mais 4 tetraedros, o que nos leva a $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ tetraedros. Esse raciocínio se mantém, o que nos leva a constatar que na n ésima iteração teremos um total de 4^n tetraedros. Não obstante, a medida da aresta é sempre igual a metade

da medida da aresta do tetraedro da iteração anterior, logo, ao repetirmos o processo n vezes, teremos que as medidas das arestas serão iguais a $\frac{1}{2^n}$.

Além disso, há a possibilidade de calcular o volume da Pirâmide de Sierpinski? O volume de um tetraedro de aresta l é obtido por meio da expressão $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Cabe ressaltar que durante o processo iterativo, a aresta é a única medida que sofrerá variações. A Tabela 6 a seguir foi elaborada com a intenção de facilitar a visualização e compreensão:

Tabela 6: Volume da Pirâmide de Sierpinski a cada iteração

Iteração	Medida da aresta	Volume do fractal
0	l	$V_0 = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$
1	$\frac{1}{2}l$	$V_1 = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1l}{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = 4 \cdot \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = \frac{4}{8} \cdot \left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{2}V_0$
2	$\frac{1}{4}l$	$V_2 = 16 \cdot \frac{\left(\frac{1l}{4}\right)^3\sqrt{2}}{12} = 16 \cdot \frac{l^3\sqrt{2}}{64} = \frac{16}{64} \cdot \left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{4}V_0$
3	$\frac{1}{8}l$	$V_3 = 64 \cdot \frac{\left(\frac{1l}{8}\right)^3\sqrt{2}}{12} = 64 \cdot \frac{l^3\sqrt{2}}{512} = \frac{64}{512} \cdot \left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{8}V_0$
...
n	$\frac{1}{2^n}l$	$V_n = \frac{1}{2^n} \cdot V_0$

Fonte: Autoria própria

Portanto, na enésima iteração teremos que o volume da Pirâmide de Sierpinski será dado por $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0$ e que, portanto, seu volume tende a zero, quando o número de iterações cresce indefinidamente.

4.2.1.2.5 Esponja de Menger

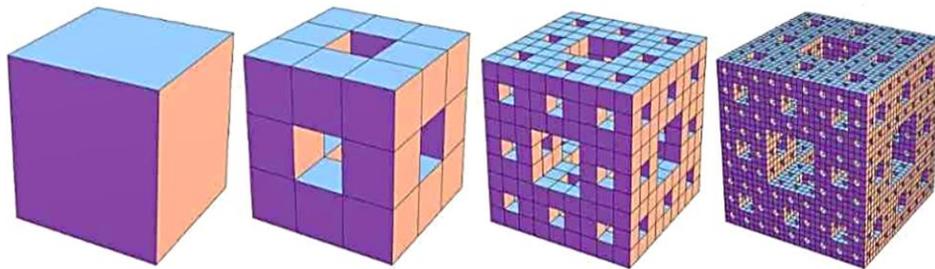
De acordo com Rabay (2013), Karl Menger nasceu em Viena, na Áustria, em 1902. Concebeu diversas ferramentas nas áreas da Álgebra, da Geometria Hiperbólica, bem como no estudo da dimensão topológica, na Teoria dos Jogos e nas ciências sociais. No ano de 1926, divulgou a Esponja de Menger ao explorar o conceito de dimensão topológica. Como cada uma

das faces da Esponja de Menger corresponde ao Tapete de Sierpinski, logo é considerada como uma expansão tridimensional desse fractal.

As etapas para obtenção da Esponja de Menger (ver Figura 12) são:

- i. Tomemos o espaço ocupado por um cubo;
- ii. Dividimos o cubo em 27 cubos de mesmo volume, isto é, equivalentes;
- iii. Retiramos o cubo central da estrutura, assim como, os cubos centrais de cada face;
- iii. Repetimos o contido em (ii) e (iii) nos cubos remanescentes ao final de cada etapa, indefinidamente.

Figura 12: Etapas de construção da Esponja de Menger



Fonte: Moreira (2013)

Semelhantemente ao realizado com o Triângulo, o Tapete e a Pirâmide de Sierpinski, podemos calcular o número de cubos que compõem a Esponja de Menger após uma quantidade n de iterações. Para isto, basta observar que na iteração 0, temos um único cubo. Na 1ª iteração, dividimos o cubo inicial em 27 cubos menores e retiramos 7 cubos (o central de cada uma das faces e o central do cubo), restando assim, um total de 20 cubos ao final da primeira iteração. Na segunda iteração, cada um dos 20 cubos restantes irá gerar mais 20 cubos, isto é, teremos, por fim, $20 \cdot 20 = 20^2 = 400$ cubos. Na terceira iteração, cada um dos 400 cubos conceberá mais 20 cubos cada, o que resulta em $20^2 \cdot 20 = 20^3 = 8\,000$ cubos. Assim, concluímos que o número de cubos da n ésima iteração será obtido por meio da expressão 20^n .

Outrossim, podemos calcular o volume da Esponja de Menger. Seja V_0 o volume do cubo inicial, conforme a Tabela 7:

Tabela 7: Volume da Esponja de Menger a cada processo iterativo n

Iteração	Número de cubos	Volume de cada cubo	Volume do fractal
0	1	V_0	V_0
1	20	$\frac{1}{27}V_0$	$20 \cdot \frac{1}{27}V_0 = \frac{20}{27}V_0$
2	400	$\frac{1}{729}V_0$	$400 \cdot \frac{1}{729}V_0 = \frac{400}{729}V_0$
3	8000	$\frac{1}{19683}V_0$	$8000 \cdot \frac{1}{19683}V_0 = \frac{8000}{19683}V_0$
...
n	20^n	$\left(\frac{1}{27}\right)^n V_0$	$20^n \left(\frac{1}{27}\right)^n V_0 = \left(\frac{20}{27}\right)^n V_0$

Fonte: Autoria própria

Portanto, o volume da Esponja de Menger é igual a $\left(\frac{20}{27}\right)^n V_0$, o que nos permite concluir que o volume desse fractal tende a zero, à medida que n cresce indefinidamente.

Cabe ressaltar, a título de curiosidade, que ainda existem dois subgrupos de fractais geométricos: Os fractais de Dürer e os fractais tipo Árvore. Não temos por intenção aprofundar essas duas categorias de classificação, portanto, assumimos uma abordagem rápida que possibilite a compreensão acerca das especificidades dos fractais que se encaixam nesses grupos, visando despertar e impulsionar os leitores na busca por informações.

4.2.1.3 Fractais tipo Dürer

De acordo com Rabay (2013), Albert Dürer nasceu na Nuremberga, Alemanha, em 1471, vindo a falecer em 1528. Destacou-se como matemático e como grande pintor de sua época. Foi um dos precursores da introdução do conceito de perspectiva, aplicando-a em suas pinturas. Dürer foi também professor de Matemática e explorou diversos conceitos da Geometria. Dentre as suas obras, originou o que conhecemos atualmente como fractais de Dürer. Os polígonos resultantes de suas construções geométricas eram obtidos minuciosamente.

Para obtermos um fractal do tipo Dürer, devemos seguir as etapas:

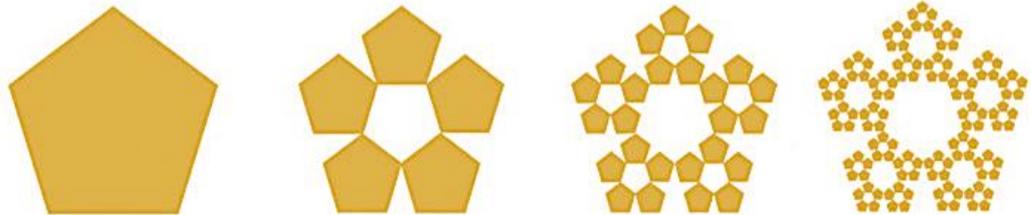
- i. Consideramos um polígono regular de n lados;
- ii. Substituímos cada um dos vértices do polígono por um polígono regular que tenha a mesma quantidade n de lados; de modo que o vértice de cada polígono acrescentado coincida com um dos vértices do polígono inicial e que pelo menos dois vértices desse polígono coincidam com dois vértices adjacentes dos demais polígonos acrescentados;

Observação: Os polígonos devem ser semelhantes e estar devidamente e igualmente espaçados.

- iii. Repetir o processo descrito em (ii) em cada vértice dos polígonos acrescentados ao fim de cada etapa iterativa, de maneira indefinida.

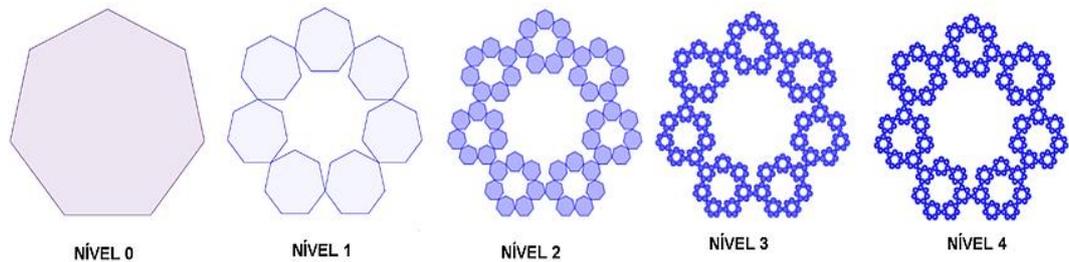
Confira os resultados obtidos nas Figuras 13 e 14:

Figura 13: Fractal tipo Dürer – Pentágono regular (3 primeiras iterações)



Fonte: Rabay (2013)

Figura 14: Fractal tipo Dürer – Heptágono regular (4 primeiras iterações)



Fonte: Friske; Mathias (2015)

4.2.1.4 Fractais tipo Árvore

Os fractais tipo árvore, como seu próprio nome sugere, são fractais que possuem estruturas ramificadas que geralmente são auto semelhantes às árvores. Existem dois tipos de fractais tipo árvore: as Árvores bifurcadas e as Árvores pitagóricas.

4.2.1.4.1 Árvores Bifurcadas

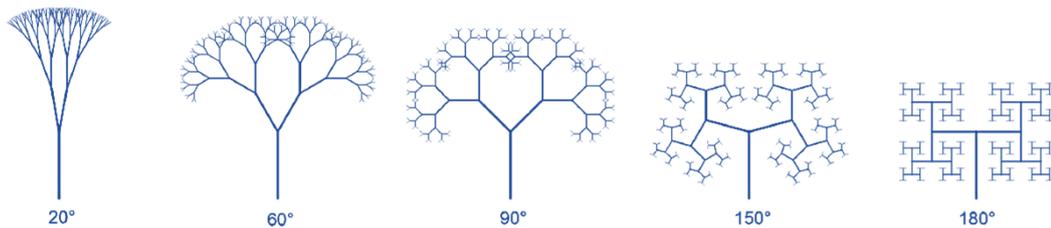
Ao construirmos uma árvore bifurcada, começamos com um segmento vertical – no caso, o seu tronco – e a partir dele adotaremos um ângulo de bifurcação, que será o responsável por ramificar o tronco, gerando a cada iteração novos galhos, de acordo com um fator de redução ou ampliação r , bem definido e fixado.

Uma propriedade interessante desses fractais é a capacidade de determinar se a árvore bifurcada construída é limitada ou não. Para isso, utiliza-se ferramentas da trigonometria, o que permite com base nos valores assumidos por r , concluir que:

- Se $r < 1$, a árvore será limitada e,
- Se $r \geq 1$, a árvore não possui região que a limite.

A seguir, as ilustrações da Figura 15 representam algumas dessas árvores bifurcadas, juntamente com seus ângulos de bifurcação.

Figura 15: Árvores bifurcadas



Fonte: Rabay (2013)

4.2.1.4.2 Árvore Pitagórica

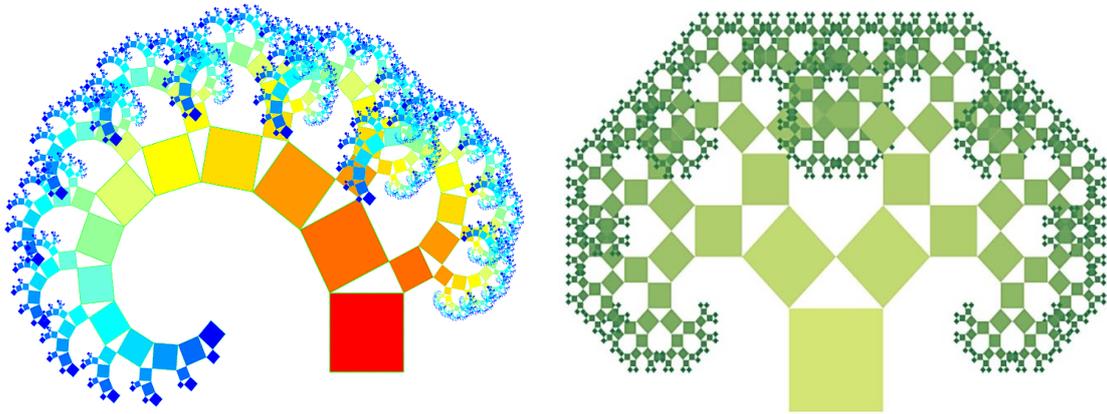
A Árvore Pitagórica é um fractal geométrico tipo árvore no qual as suas estruturas e ramificações são constituídas de quadrados e triângulos.

O processo iterativo que permite construir uma Árvore Pitagórica (ver Figura 16) ocorre nas seguintes etapas:

- Consideremos um triângulo retângulo (escaleno ou isóscele) com uma de suas bases – de preferência, a hipotenusa – posicionada horizontalmente;

- ii. Construimos um quadrado para cada lado do triângulo, de modo que a medida dos lados dos quadrados coincida com a medida dos lados dos triângulos sobre os quais eles estão sendo construídos (em conformidade com o Teorema de Pitágoras). Assim, consideramos o quadrado que sustenta a hipotenusa do triângulo como tronco principal;
- iii. A partir dos lados livres centrais dos outros dois quadrados, construímos um triângulo semelhante ao do passo (i), também com sua hipotenusa na horizontal e coincidindo com a medida do lado do quadrado;
- iv. Repita os procedimentos (ii) e (iii).

Figura 16: Árvores pitagóricas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo escaleno e isósceles, respectivamente.



Fonte: www.gratispng.com

4.2.2 Fractais obtidos por meio de uma relação de recorrência

Os fractais que são gerados por meio de uma relação recursiva também podem ser denominados de fractais de fuga do tempo. Isso se deve ao fato de possuírem uma autossimilaridade mais livre que se caracteriza por uma quase-autossimilaridade, isto é, embora apresentem inúmeras cópias reduzidas, não há uma autossimilaridade exata, já que as distorções e as degenerações são a marca registrada desses fractais. Com o avanço das tecnologias e das ferramentas computacionais, atualmente dispomos de *softwares* e aplicativos capazes de produzir e reproduzir esses fractais - possuidores de uma imponente beleza e de uma complexidade infinda. Esses fractais são utilizados também na modelagem de sistemas dinâmicos, temática que abordaremos com maiores detalhes no Capítulo 5 desta dissertação. Isto posto, tomaremos como exemplos que se enquadram nessa classificação, dois fractais renomados: o **Conjunto de Mandelbrot** e o **Conjunto de Julia**.

Segundo Stewart (2019), o tio de Mandelbrot havia lhe indicado a leitura de um artigo de Gaston Julia (1893 – 1978) que havia sido publicado em 1917. Mandelbrot por considerar o trabalho de Julia abstrato, o rejeita; no entanto, não esperava que, anos à frente, em 1980, ao estudar as aplicações da Geometria Fractal, encontraria novamente este artigo e sequer que o contido nele seria a fonte de contribuições expressivas às suas investigações.

Julia e outro matemático, Pierre Fatou (1878 – 1929), haviam estudado o misterioso comportamento das funções complexas mediante um processo iterativo. Desse modo, eles optaram por dirigir e focar as suas pesquisas nos casos mais simples: as funções quadráticas da forma $f(z) = z^2 + c$, onde c era uma constante complexa. A representação gráfica dessa função dependia profundamente do valor da constante complexa c . Julia e Fatou dedicaram-se a provar diversos teoremas árdios e intrincados a respeito dessa iteração, entretanto, não conseguiram ir além, já que a ausência de recursos tecnológicos, impossibilitaram a agilidade dos cálculos e o vislumbrar da geometria empreendida durante o processo.

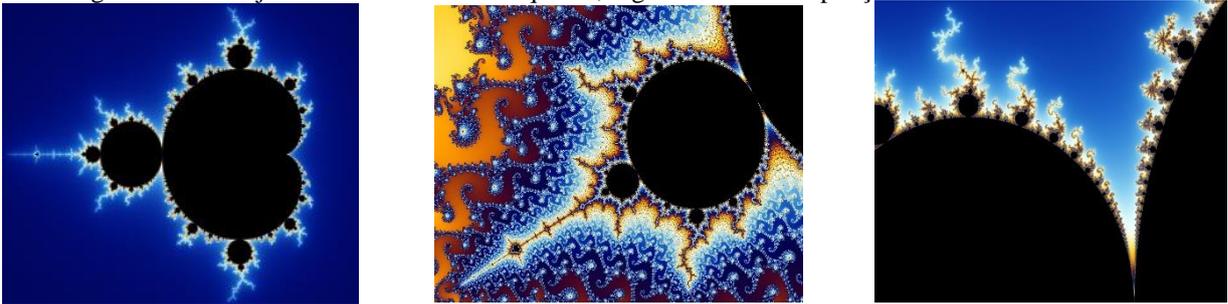
Segundo Stewart (2019), Mandelbrot trabalhava na IBM e acompanhava o enorme avanço dos computadores; logo, teve a ideia de programar um deles para realizar os cálculos necessários, bem como, obter a representação geométrica resultante da iteração dessa função. A imagem obtida descortinou uma perplexidade: a dinâmica complicada expressa pela iteração das funções estudadas por Julia e Fatou conduziam a um único ente geométrico – o qual, em suas fronteiras, dispunha de estruturas fractais. Esse fractal é atualmente chamado de Conjunto de Mandelbrot (ver Figura 17) e dele procedem imagens de extrema profundidade e formosura. Os conjuntos que pertencem à parte interna do Conjunto de Mandelbrot recebem o nome de conjuntos preenchidos de Julia. Um Conjunto de Julia famoso é o Coelho de Douady (ver Figura 18), caso em que $c = -0,123 + 0,745i$. O nome desse conjunto foi dado em homenagem ao matemático Adrien Douady (1935 – 2006), que inclusive foi o responsável por cunhar o nome do fractal descoberto por Mandelbrot. Junior (2017), discorre:

O que leva a formar o Conjunto de Mandelbrot, à primeira vista, é a mesma iteração da função $z^2 + c$, tomando valores complexos. Mas o que o torna diferente em relação ao Conjunto Preenchido de Julia? A resposta é simples: sutileza. [...] e a sutileza da sua criação consiste em tomar o valor inicial igual a 0 em todos os processos iterativos. (p. 69)

Mandelbrot (1991, p. 222); apud Baier (2005, p. 128) relatou o seu:

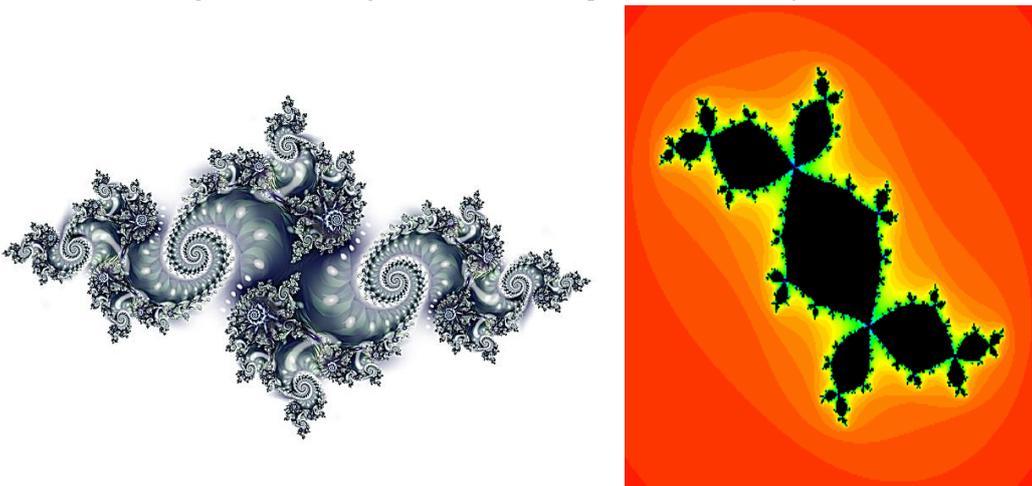
privilégio de enriquecer a teoria de Fatou-Julia com uma nova janela, propondo [o] Conjunto de Mandelbrot [...] procedi de uma forma afastado da do teórico, mais próxima da do explorador e do naturalista, inebriados pela visão de um mundo prestes a ser descoberto. Percorri-o, contemplei-o e dissequei-o, graças ao espantoso equivalente do microscópio, que é um computador programado para se observar um domínio cada vez menor de uma forma cada vez mais pormenorizada. [...] A intuição forma-se pouco a pouco, a imaginação inspira-se, o olho torna-se um guia cada vez mais seguro. Realizei esse trabalho em 1979-1980, quando já usufruía de dez anos de prática quotidiana da interação entre o pensamento e o instrumento através do olho.

Figura 17: O Conjunto de Mandelbrot à esquerda, seguido de duas ampliações de suas estruturas.



Fonte: Moreira (2013); commons.wikimedia.org.

Figura 18: Os Conjuntos de Julia (à esquerda) e de Douady (à direita)



Fonte: www2.ufjf.br; math.bu.edu

4.2.3 Fractais aleatórios ou naturais

Os fractais naturais também são denominados de fractais aleatórios ou fractais obtidos por meio de processos estocásticos. Esses fractais se caracterizam por meio dos modelos irregulares e fragmentados encontrados na natureza, na vida e nos fenômenos que os

contemplam, bem como em simulações computacionais com o propósito de expressar essas estruturas e eventos. Não obstante, os fractais naturais possuem correlação com a Teoria do Caos, buscando impor ordem ao comportamento caótico desencadeado por alguns sistemas dinâmicos. Retratemos a Teoria do Caos de maneira minuciosa no Capítulo 5 deste trabalho.

De acordo com Mandelbrot (1998), apud Domingos (2013): “[...]o mundo que nos cerca é caótico, mas podemos tentar imitá-lo no computador. A geometria fractal é uma imagem muito versátil que nos ajuda a lidar com os fenômenos caóticos e imprevisíveis” (p. 15).

Além disso, esses fractais apresentam autossimilaridade estatística ou aproximada, isto é, a similaridade inerente a eles diz respeito à conservação de suas medidas numéricas ou estatísticas, independentemente da escala. Para mais além, estes fractais são utilizados como instrumentos de modelagem nas mais diversas áreas do conhecimento: Medicina, Economia, Biologia, Geologia, Ciências da Computação; dentre outras. A seguir, nas Figuras 19 e 20, apresentamos exemplos de fractais naturais reais, juntamente com suas representações, realizadas mediante simulações gráficas.

Figura 19: Fractais naturais - Brócolis, árvore, raios, floco de neve, nuvens e montanhas



Fonte: Research Gate; br.freepik.com; www.agro20.com.br; vocenaneve.com.br; br.freepik.com; segredosdomundo.r7.com.

Figura 20: Fractais naturais gerados através de simulação gráfica



Fonte: fromabove.altervista.org; www.gratispng.com; br.pinterest.com.

4.3 CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS

Em sua obra, *Complexidade e Caos* (2003), Herch Moysés Nussenzveig descreve certas características e propriedades dos fractais, dentre as quais: **autossimilaridade**, **complexidade infinita**, **irregularidade** e **dimensão fracionada**.

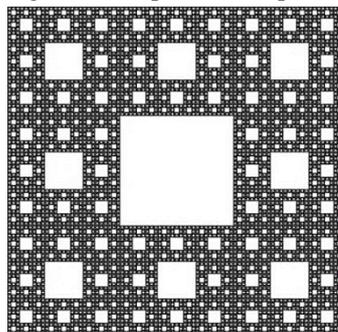
4.3.1 Autossimilaridade

Quando partes do objeto são exatamente semelhantes ao todo, diz-se que o objeto apresenta autossimilaridade linear. No entanto, os fractais mais importantes divergem da autossimilaridade linear. Alguns destes fractais são gerados por um processo randômico, enquanto que outros são fractais que podem descrever sistemas caóticos, ou não-lineares. (MANDELBROT, 1992, p. 125; apud BAIER, 2005, p. 126).

A autossimilaridade é um aspecto fundamental que diz respeito aos objetos fractais e caracteriza-se por meio da similaridade que se observa entre a estrutura fractal inicial e os fragmentos que o compõe; ou seja, cada porção é uma réplica perfeita do fractal, porém, vista em uma escala menor. Podemos descrever a autossimilaridade como uma simetria contemplada em todas as escalas. A autossimilaridade pode ser classificada como exata ou estatística e aproximada.

A autossimilaridade exata pode ser encontrada em fractais geométricos ou determinísticos. Nesse caso, o fractal é composto por réplicas menores que se assemelham perfeitamente a ele. Consideremos o fractal conhecido como Tapete de Sierpinski, com o intuito de ilustrar e demonstrar a propriedade mencionada (ver Figura 21).

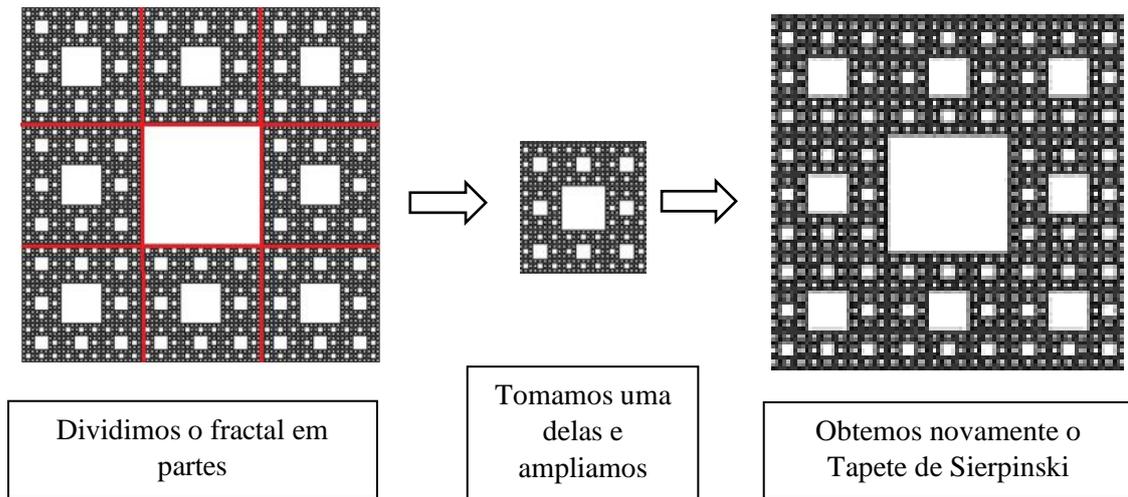
Figura 21: Tapete de Sierpinski



Fonte: acervolima.com

Note que se dividirmos o fractal em nove partes menores e ampliarmos cada uma delas, estaremos diante de uma coincidência surpreendente: elas são réplicas exatas do fractal considerado (ver Figura 22).

Figura 22: A autossimilaridade presente no tapete de Sierpinski



Fonte: acervolima.com

Por outro lado, temos a autossimilaridade estatística ou aproximada que pode ser encontrada nos fractais naturais – chamados também de fractais aleatórios (ver Figura 23). Estes fractais, embora disponham de estruturas semelhantes ao todo, o fazem de maneira aproximada, uma vez que apresentam irregularidades inerentes aos elementos da natureza.

Figura 23: Fractais naturais: Brócolis romanescos (à esquerda) e samambaia (à direita)



Brócolis romanescos

Samambaia

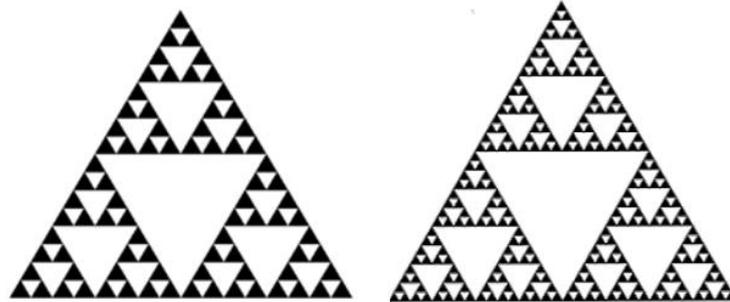
Fonte: paisagismodigital.com

4.3.2 Complexidade Infinita e Irregularidade

A complexidade infinita está relacionada com a infinidade de detalhes que encontramos ao ampliar um objeto fractal. Isto é, a cada ampliação, independente da escala, um fractal exibirá infinitas reentrâncias, saliências e rugosidades, impossibilitando desse modo, a representação de sua totalidade.

Não obstante, o termo rugosidade refere-se à irregularidade e fragmentação que o fractal compreende. Se remetermos nosso pensamento à construção dos fractais geométricos - apresentadas anteriormente - basta recordarmos que eles são obtidos por meio de um processo iterativo que se repete indefinidamente, o que nos leva a concluir que de fato, não há a possibilidade de expressá-los em sua completude, já que sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores e que são inerentes aos objetos fractais. A seguir, na Figura 24, temos dois exemplos capazes de ilustrar essas propriedades:

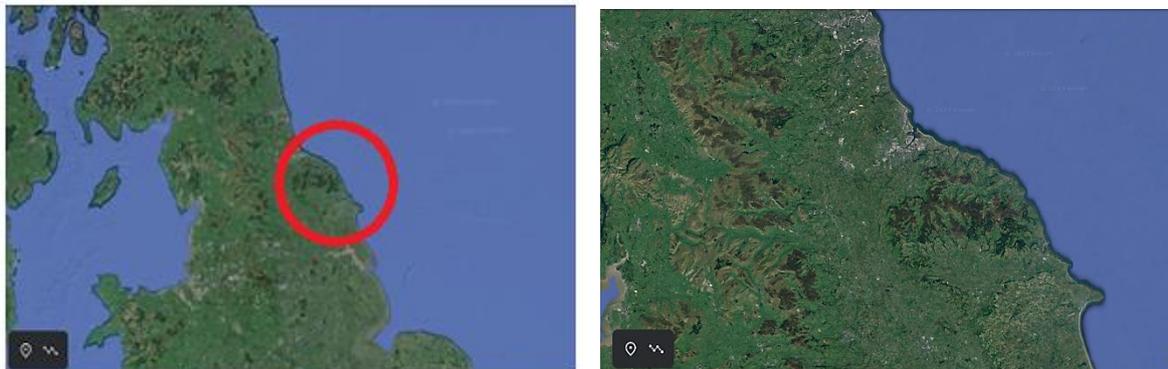
Figura 24: Triângulo de Sierpinski – 4ª e 5ª iterações, respectivamente



Fonte: Moreira (2013)

Note que no Triângulo de Sierpinski, após a transição da 4ª para a 5ª iteração, obtemos um número maior de fragmentos, diagramados com uma riqueza de detalhes e profundidade. Se continuarmos iterando esse fractal, encontraremos elementos cada vez menores, o que o torna detentor de uma complexidade superior e infinita.

Figura 25: Complexidade infinita e irregularidade encontradas nas linhas costeiras



Fonte: Google Earth

Observe que ao ampliarmos a Figura 25, obtemos à direita, uma riqueza de detalhes que se expressam irregulares e detentoras de uma complexidade contínua. Cabe ressaltar que, ao mencionamos o grau de irregularidade de um fractal, estamos, de fato, associando essa condição a uma variável denominada dimensão. Segundo Capra (1998, p. 119); apud Baier (2005, p. 116):

Podemos entender intuitivamente essa ideia compreendendo que uma linha dentada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. Quanto mais dentada for a linha, mais perto de 2 estará a sua dimensão fractal. De maneira semelhante, um pedaço de papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos do que uma esfera. Desse modo, quanto mais amarrotado e apertado estiver o papel, mais perto de 3 estará a sua dimensão fractal.

Tendo em vista que a dimensão é um conceito de suma importância e relevância quando abordamos os fractais, a seção a seguir será dedicada exclusivamente a este assunto: A dimensão fractal.

4.3.3 Dimensão fractal

Nas aulas de Matemática, aprendemos acerca dos entes geométricos primitivos: o ponto, a reta, o plano e o espaço, bem como, nos é ensinado o conceito de dimensão. Todas essas noções são estudadas tendo como referencial a Geometria Euclidiana. Logo, compreendemos que dimensão se caracteriza pelo espaço no qual um objeto encontra-se inserido e que o ponto possui dimensão euclidiana igual a 0 (adimensional), a reta apresenta dimensão euclidiana igual a 1 (unidimensional), as figuras planas têm dimensão euclidiana igual a 2 (bidimensionais) e as figuras espaciais (sólidos geométricos) são tridimensionais – dimensão euclidiana igual a 3. Desse modo, passamos a associar a dimensão dos objetos a uma medida inteira que pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. No entanto, a Geometria Euclidiana tem como enfoque apenas retas, curvas e superfícies lisas, isto é, a Geometria de Euclides não abrange as irregularidades e descontinuidades específicas dos objetos físicos e dos elementos da natureza. Surge então, a concepção da dimensão fractal:

[...] uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação [...]. É conveniente dizer, a respeito de certas curvas planas muito irregulares, que a sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, definir conjuntos de pontos sobre uma linha cuja dimensão fractal está entre 0 e 1. (MANDELBROT, 1991, p. 14; apud BAIER, 2005, p. 116)

Portanto, a dimensão fractal é identificada pelo espaço ocupado por um fractal, bem como pelo seu grau de irregularidade, rugosidade e aspereza. Logo, sua dimensão é mais

qualitativa, podendo ser expressa por números não inteiros e irracionais contidos no intervalo $[0,3]$.

A origem da dimensão fractal encontra-se nos escritos de Felix Hausdorff (1868-1942), porém, foi Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) o responsável por aprimorar o trabalho de Hausdorff e possibilitar avanços no que diz respeito ao cálculo de dimensões fracionárias, dando condições a Mandelbrot de transformar a noção de fractal - a princípio, intuitiva - em uma concepção matemática. (TAVARES, 2021)

Entretanto, a demonstração da definição proposta por Hausdorff é um tanto rigorosa e não se enquadra na conjuntura do que pretende se alcançar com este trabalho. Logo, iremos explorar a dimensão Hausdorff - também conhecida como dimensão fractal - com base no conceito de autossimilaridade, isto é, vamos calcular a dimensão de objetos fractais autossimilares que não possuam, necessariamente, dimensão inteira. Para esta análise, vamos a princípio, utilizar como referência cada um dos elementos da Geometria Euclidiana, aplicando a eles um fator de redução r e dividindo-os em n partes congruentes e autossimilares. Por fim, nosso objetivo será o de estabelecer uma relação entre n e r e que nos forneça subsídios para calcular a dimensão de qualquer objeto fractal considerado.

Iniciaremos esse processo utilizando a reta, que tem dimensão euclidiana igual a 1. Consideremos esse segmento de reta em quatro contextos distintos: sem nenhuma divisão ou dividido em dois, três ou quatro segmentos congruentes. Note que os segmentos de reta apresentam autossimilaridade (ver Figura 26).

Figura 26: Autossimilaridade em um segmento de reta subdividida em duas, três e quatro partes congruentes.



Fonte: Moreira (2013)

Assim, chamando de n as subdivisões obtidas após um fator de divisão r ser aplicado ao segmento de reta inicial, construímos a Tabela 8:

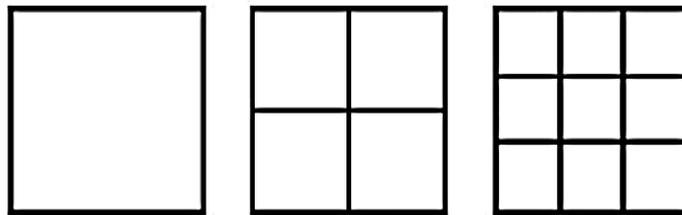
Tabela 8: Relação entre o número de subdivisões (n) e o fator de redução (r) realizadas em um segmento de reta.

Fator de divisão (r)	Subdivisões obtidas (n)	Relação entre n e r
1	1	$1 = 1^1$
2	2	$2 = 2^1$
3	3	$3 = 3^1$
4	4	$4 = 4^1$
...
r	n	$n = r^1$

Fonte: Autoria própria

Vamos considerar agora um quadrado de lado unitário em três situações distintas: sem que haja um fator de redução na medida de seus lados ou dividindo cada um de seus lados em duas ou três partes congruentes, obtendo assim quadrados de mesma área e autossimilares, como mostrado na Figura 27:

Figura 27: Autossimilaridade em um quadrado de lado unitário em três situações distintas.



Fonte: Moreira (2013)

Analisando as imagens e constatando o número de subdivisões n obtidas após um fator de divisão r ser aplicado a cada um dos lados desse quadrado, construímos a seguinte Tabela 9:

Tabela 9: Relação entre o número de subdivisões (n) e o fator de redução (r) realizadas nas medidas dos lados de um quadrado.

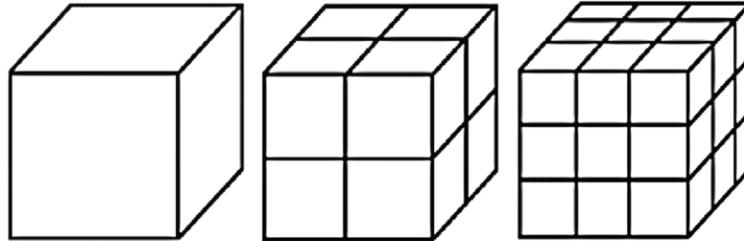
Fator de divisão (r)	Subdivisões obtidas (n)	Relação entre n e r
1	1	$1 = 1^2$
2	4	$4 = 2^2$
3	9	$9 = 3^2$
4	16	$16 = 4^2$
...
r	n	$n = r^2$

Fonte: Autoria própria

Enfim, iremos nos atentar ao cubo (dimensão euclidiana igual a 3) de aresta unitária. Vamos analisá-lo em três contextos: sem que haja divisão nas medidas de suas arestas ou no

caso em que há duas ou três divisões congruentes na medida de suas arestas, conforme a Figura 28:

Figura 28: Autossimilaridade em um cubo de aresta unitária em três situações distintas.



Fonte: Moreira (2013)

Com base na figura, estabelecemos uma relação entre n e r , exposta na Tabela 10 abaixo:

Tabela 10: Relação entre o número de subdivisões (n) e o fator de redução (r) realizadas nas medidas das arestas de um cubo.

Fator de divisão (r)	Subdivisões obtidas (n)	Relação entre n e r
1	1	$1 = 1^3$
2	8	$8 = 2^3$
3	27	$27 = 3^3$
4	64	$64 = 4^3$
...
r	n	$n = r^3$

Fonte: Autoria própria

Tendo como base os elementos geométricos referendados, bem como as tabelas construídas, chegamos à conclusão de que qualquer que seja o fator de divisão r , a relação existente entre n e r se manterá. Logo, denominando d a dimensão do objeto considerado, temos:

$$n = r^d.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade e utilizando as propriedades dos logaritmos, obtemos:

$$\log n = \log r^d$$

$$\log n = d \cdot \log r$$

$$d = \frac{\log n}{\log r}.$$

Portanto, denominamos d de dimensão fractal e a partir de agora, a denotaremos como d_f . A seguir determinaremos o cálculo da dimensão fractal de alguns fractais geométricos clássicos que foram expostos anteriormente.

4.3.3.1 Dimensão do Conjunto de Cantor

Observando o processo iterativo que permeia a construção do Conjunto de Cantor, assumimos $r = 3$, como o fator de redução do segmento de reta inicial e $n = 2$ o número de segmentos de reta obtidos após a divisão e, conseqüentemente, após a retirada do terço médio (ver Figura 29).

Figura 29: O Conjunto de Cantor



Fonte: Moreira (2013)

Logo, temos que a dimensão fractal do Conjunto de Cantor pode ser expressa por:

$$d_f = \frac{\log n}{\log r} \Rightarrow d_f = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63.$$

4.3.3.2 Dimensão do Triângulo de Sierpinski

Analisando as etapas do processo de iteração do Triângulo de Sierpinski, conseguimos calcular a sua dimensão fractal. Seja $r = 2$ como o fator de divisão de cada lado do triângulo equilátero e $n = 3$ como o número de triângulos restantes ao final da 1ª iteração (ver Figura 30).

Figura 30: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Moreira (2013)

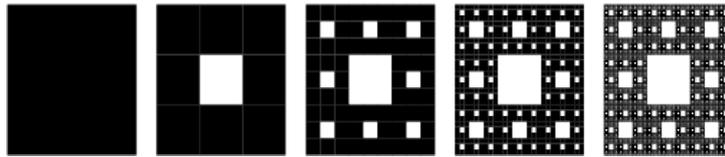
Temos:

$$d_f = \frac{\log n}{\log r} \Rightarrow d_f = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,58 .$$

4.3.3.3 Dimensão do Tapete de Sierpinski

Com base nas etapas do processo de iteração do Tapete de Sierpinski, podemos obter a sua dimensão fractal. Seja $r = 3$ o fator de divisão de cada lado do quadrado e $n = 8$ o número de quadrados restantes ao final da 1ª iteração (ver Figura 31).

Figura 31: Tapete de Sierpinski



Fonte: Moreira (2013)

Logo:

$$d_f = \frac{\log n}{\log r} \Rightarrow d_f = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1,89 .$$

4.3.3.4 Dimensão da Curva de Koch

Observando o processo iterativo da construção da Curva de Koch, concluímos que o fator de divisão é $r = 3$ e o número de subdivisões obtidas após a primeira iteração é $n = 4$ (ver Figura 32).

Figura 32: Curva de Von Koch



Fonte: Mendes Junior (2017)

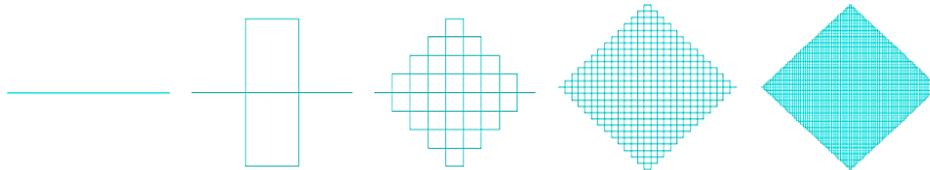
Desse modo, a dimensão fractal da Curva de Von Koch é dada por:

$$d_f = \frac{\log n}{\log r} \Rightarrow d_f = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,26.$$

4.3.3.5 Dimensão da Curva de Peano

Tendo como base as etapas do processo iterativo da Curva de Peano, logramos calcular a sua dimensão fractal. Seja $r = 3$ o fator de divisão do segmento de reta inicial e $n = 9$, o número de segmentos de reta obtidos ao final da 1ª iteração (ver Figura 33).

Figura 33: Curva de Peano



Fonte: Santos (2020)

Logo:

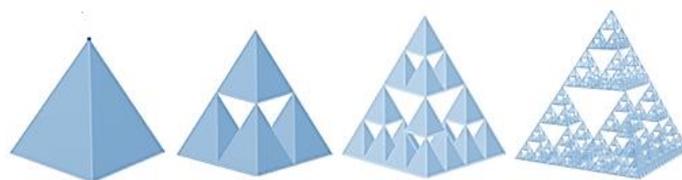
$$d_f = \frac{\log n}{\log r} \Rightarrow d_f = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{\log 3^2}{\log 3} = \frac{2 \cdot \log 3}{\log 3} = 2.$$

Cabe ressaltar que o resultado já era esperado por nós, tendo em vista que a Curva de Peano preenche a superfície plana de um quadrado – que possui dimensão igual a 2.

4.3.3.6 Dimensão da Pirâmide de Sierpinski

Observando o processo iterativo que permeia a construção da Pirâmide de Sierpinski, assumimos $r = 2$, como o fator de redução das medidas das arestas do tetraedro inicial e $n = 4$ o número de tetraedros restantes ao final da primeira iteração (ver Figura 34).

Figura 34: Pirâmide de Sierpinski



Fonte: iesenriquenieto.educacion.es

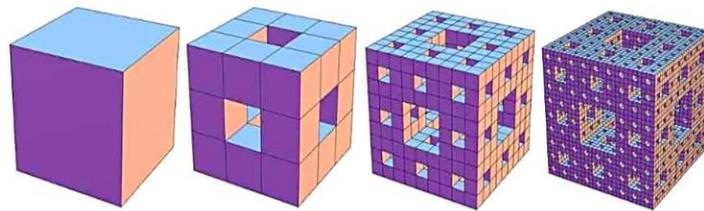
Logo, temos que a dimensão fractal da Pirâmide de Sierpinski pode ser expressa por:

$$d_f = \frac{\log n}{\log r} \Rightarrow d_f = \frac{\log 4}{\log 2} = 2.$$

4.3.3.7 Dimensão da Esponja de Menger

Observando o processo iterativo da construção da Esponja de Menger, concluímos que o fator de divisão é $r = 3$ e o número de cubos obtidos após a primeira iteração é $n = 20$ (ver Figura 35).

Figura 35: Esponja de Menger



Fonte: Moreira (2013)

Desse modo, a dimensão fractal da Esponja de Menger é dada por:

$$d_f = \frac{\log n}{\log r} \Rightarrow d_f = \frac{\log 20}{\log 3} \cong 2,73.$$

Tendo isto posto e levando em consideração que os fractais naturais e os fractais de fuga estão intimamente relacionados à Teoria do Caos e aos Sistemas Dinâmicos, recordamos que a proposta desta dissertação é a de introduzir os fractais na Educação Básica por meio desta Teoria: o Caos. Portanto, no próximo capítulo nos dedicaremos inteiramente a essas temáticas, tendo em vista que o caos emerge de comportamentos assumidos por alguns Sistemas Dinâmicos.

Assim, buscaremos conceituar os Sistemas Dinâmicos, bem como os termos: ‘órbitas’, ‘mapas’, ‘atratores’ e explorar os comportamentos que alguns desses sistemas apresentam. Essas definições serão fundamentais e essenciais para uma compreensão mais ampla desses assuntos, possibilitando-nos explorar, investigar e vislumbrar as contribuições que o caos em nexos com os fractais pode proporcionar ao âmbito do contexto da sala de aula.

5. SISTEMAS DINÂMICOS E A TEORIA DO CAOS

Neste capítulo conduzimos e dedicaremos a nossa atenção aos Sistemas Dinâmicos e a Teoria do Caos. No entanto, antes de adentrarmos especificamente essas áreas, faz-se necessário o vislumbrar dos fundamentos que caracterizam o processo de edificação de seu conhecimento. Para isso, buscaremos então compreender o paradigma de duas concepções de mundo e da Natureza que são consideradas como divisor de águas na história da ciência e da humanidade e que marcam a transição da ciência moderna para a contemporânea, a saber: a teoria mecanicista e a sistêmica.

A teoria mecanicista cartesiana tem início com René Descartes (1596 – 1650): “Ele estabelece uma visão mecanicista da realidade, em que a natureza e o corpo humano são concebidos como máquinas, instaurando no pensamento ocidental uma visão de mundo, tanto entre cientistas como no entendimento popular.” (BAIER, 2005, p. 23). Descartes, inicialmente, desenvolveu no século XVII uma ferramenta matemática soberana, denominada de Geometria Analítica. Essa ferramenta possibilita um novo enfoque da Geometria, visando descrever as operações e estruturas algébricas por meio da linguagem geométrica. Desse modo, Descartes configura um método pautado na razão e no rigor matemático e que tinha como premissa a decomposição de cada situação apresentada em outra que fosse mais acessível e, portanto, de solução mais factível e notória. O teórico acredita que a razão, aliada ao raciocínio lógico, é a única capaz de assegurar o encontro da verdade em sua totalidade, tal qual a exatidão e a precisão de uma dedução matemática. (BAIER, 2005).

Descartes, por sua vez, fortalece a concepção de Galileu ao buscar na Matemática subsídios capazes de expressar o conhecimento científico, rechaçando dessa forma os atributos do objeto considerado, já que compartilhava da crença de Galileu de que tudo na Natureza pode ser quantificado e mensurado. Além disso, na época de Descartes, instaura-se em grande escala a mecanização de animais e bonecos que reproduziam sons e movimentos, o que o fez conceber uma visão mecanicista da realidade – visão esta, na qual o mundo, a natureza e o corpo humano desempenham suas funções semelhantemente às das máquinas. Assim, a visão de Descartes ganha espaço tanto entre os cientistas da época, quanto no meio popular e fica reputada como modelo mecanicista cartesiano. (BAIER, 2005).

Não obstante, Descartes também levanta questionamentos acerca da veracidade das informações que nos são fornecidas mediante as sensações corpóreas advindas de nossos cinco sentidos e daí, desenvolve seu famoso lema: *cogito ergo sum*, isto é, *penso, logo, existo*. Com

essa frase, Descartes busca estabelecer uma dicotomia entre mente e um Eu que é pleno pensamento, denominado de *res cogitans* (coisa pensante) e a coisa extensa – matéria, no caso, o corpo – chamada de *res extensa*. Esta divisão é bem aceita pela comunidade de pesquisadores das ciências naturais que adotam o modelo mecanicista cartesiano de Descartes como única ferramenta metodológica científica. (BAIER, 2005).

Logo, essa concepção se consolida ao comparar o mundo e suas unicidades ao funcionamento de uma extensa máquina em perfeito funcionamento e que tem como componentes inúmeros objetos, os quais se apresentam completamente dissociados de seu pensamento. Ademais, essa noção também é difundida na Natureza e busca compreender os organismos vivos como máquinas cujo funcionamento ocorre por meio da interação existente entre os fragmentos que o compõe.

A consonância por parte dos pesquisadores em aceitar a visão de mundo cartesiana como sendo absoluta no que se refere ao fornecimento de contribuições científicas ganha força com o sucesso alcançado por Isaac Newton (1642 – 1729) em seus trabalhos. Newton tinha como pressupostos que o espaço e o tempo são únicos e que a matéria é constituída por pequenas partículas imutáveis que agem uma sobre as outras mediante de forças - entre as quais, destaca-se a gravitação. Além disso, conhecendo-se a velocidade dessas partículas em qualquer instante, bem como suas posições e o modo de calcular a força atuante entre elas, pode-se usar as leis de movimento para obter suas posições e velocidades em qualquer que seja o instante posterior. Os pesquisadores que se fundamentavam na concepção newtoniana assumiram a possibilidade de prever a evolução de um sistema, desde que se fizessem conhecidas e mensuradas as suas condições iniciais e os modelos matemáticos caracterizados pelas equações que correlacionam suas variáveis. Desse modo, a concepção newtoniana viabiliza depreender as posições futuras dos planetas, desde que sejam conhecidas suas posições iniciais e a velocidade na qual transitam em qualquer instante. O método desenvolvido por Newton torna possível a previsão de eclipses lunares e solares, tal qual, a obtenção por meio de cálculos, das órbitas e da massa dos planetas, do movimento de naves espaciais e das órbitas de satélites artificiais. (BAIER, 2005).

Mais adiante, Newton e Leibniz (1646 – 1716) dão à luz o Cálculo Diferencial e Integral, que se descreve como uma ferramenta efetiva e preponderante, tendo em vista a sua gama de recursos e aplicabilidade na resolução de diversos problemas e situações. Os cientistas da época voltaram a atenção a essa ferramenta, desconsiderando a inconsistência de sua fundamentação teórica. Desse modo, no meio científico, o modelo proposto por Newton é

admitido como definitivo e as pesquisas precedentes são reputadas como uma expansão da Mecânica. (BAIER, 2005).

Segundo Baier (2005), a obra de Laplace (1749 – 1827), intitulada *Mécanique Celeste*, consolida a convicção de que há uma ordem natural infinita e intrínseca aos fenômenos da natureza e da vida. Segundo Stewart, Laplace depreende que: “Um intelecto que, num momento qualquer, conhecesse todas as forças que animam a Natureza e as posições mútuas dos seres que a compõem, se esse intelecto fosse vasto o suficiente para submeter seus dados à análise, seria capaz de condensar numa única fórmula o movimento dos maiores corpos do universo e o do menor dos átomos: para tal intelecto nada poderia ser incerto; e tanto o futuro quanto o passado estariam presentes diante de seus olhos” (STEWART, 1991, p. 17; apud BAIER, 2005, p. 29).

Portanto, o sucesso alcançado pela concepção newtoniana exerce uma enorme influência no mundo científico, direcionando-os a formular e resolver equações diferenciais. Difunde-se então a concepção, de que independente de quem seja o pesquisador, há a possibilidade de prever a evolução de um sistema, uma vez que esse sistema seja representado por equações diferenciais e que sua condição inicial tenha sido mensurada. (BAIER, 2005). Assim, o universo se caracteriza como “um grande sistema mecânico funcionando de acordo com as leis newtonianas do movimento. Desse modo, as equações diferenciais de Newton tornaram-se o fundamento matemático do paradigma mecanicista” (CAPRA, 1998, p. 105; apud BAIER, 2005, p. 29). Para mais além, o elevado grau de precisão dos instrumentos desenvolvidos por Newton induziu à percepção de que tudo no universo poderia ser antecipado e determinado, isto é, todo acontecimento acarreta uma consequência que poderia ser predita matematicamente. Daí, emerge a concepção de mundo conhecida como determinismo, isto é, todos os fenômenos são admitidos como um nexos causa-efeito. Segundo Capra (1998, p. 105); apud BAIER (2005, p. 30):

A máquina newtoniana do mundo era vista como completamente causal e determinista. Tudo o que acontecia tinha uma causa definida e dava origem a um efeito definido [...]”. Dessa forma, incute-se a aceitação de que há uma íntima relação linear entre causa e efeito e que ela se revela em todos os fenômenos manifestos pela natureza.

No início do século XIX, o cenário mecanicista cartesiano se depara com alguns obstáculos, já que a Mecânica newtoniana se mostra limitada no que diz respeito ao estudo dos

movimentos individuais das moléculas, tal como na segunda lei da Termodinâmica, a qual discorre sobre a tendência que os fenômenos físicos possuem de voluntariamente dirigirem-se de um estado de ordem para um estado de crescente desordem. Nesta última, com o intuito de expressar matematicamente essa direção, os físicos concebem uma medida denominada entropia, que tem por sua vez apresentar o grau de desordem de um fenômeno físico. Desse modo, quanto maior for o nível de desordem de um sistema, maior será a sua entropia e vale a recíproca, ou seja, quanto menor a entropia de um conjunto, menor será o seu grau de desordem. (BAIER, 2005).

Além disso, no final desse mesmo século, dois grandes dilemas se instauram: o primeiro decorre da compreensão dos biólogos de que o mundo vivo se encaminha para um grau elevado de ordem e complexidade – compreensão que carece de embasamento matemático – e a segunda, apoiada nas leis da Termodinâmica de que a energia Mecânica de um corpo se dissipa na forma de calor, e que, então, não pode ser recuperado, levando à conclusão de que toda máquina existente no mundo acabaria em contínua suspensão. Henri Poincaré, também no final do século XIX, é desafiado pelo rei da Suécia na busca por soluções para o Problema dos Três Corpos – uma das limitações da concepção de Newton, que embora houvesse descrito com êxito o movimento do sistema Sol-Terra, não obteve soluções exatas ao adotar o mesmo procedimento para três corpos celestes. Desse modo, Poincaré prova que não existem soluções fechadas para esse problema e é premiado pelos avanços alcançados, já que desenvolve métodos geométricos que serão de suma relevância para a área de conhecimento que mais adiante será intitulada de Sistemas Dinâmicos. Não obstante, Poincaré constata que em alguns sistemas considerados determinísticos pode não haver previsibilidade, semeando as raízes precursoras da Teoria do Caos e abalando os alicerces da concepção newtoniana outrora consolidada. (BAIER, 2005).

De acordo com Baier (2005), na primeira metade do século XX, os instrumentos matemáticos conhecidos e disponíveis se revelam insuficientes mediante a complexidade dos organismos vivos e, desse modo, a concepção mecanicista, embora abalada, ainda não é totalmente desacreditada pela comunidade científica. No entanto, essa convicção é continuamente confrontada, tendo em vista que cada vez se tornam mais evidentes as suas delimitações. Uma dessas oposições é empreendida pelo embriologista Hans Driesch (1867 – 1941), que desenvolve suas investigações precursoras por meio de ovos de ouriço-do-mar. Driesch analisa que ao destruir uma das células de um embrião de ouriço-do-mar em estágio

inicial (no caso, 2 células), a célula remanescente se desenvolve totalmente e dá origem a um organismo completo e não a um organismo pela metade, como se poderia imaginar.

Portanto, Driesch dissemina e aprimora a consciência de que seus ovos de ouriço-do-mar são aptos a desempenhar o que nenhuma máquina é passível de realizar: regenerar-se totalmente a partir de um número reduzido de seus fragmentos. Isto posto, infere-se a inexistência do determinismo como agente absoluto nos fenômenos inerentes à natureza e à vida. Merleau Ponty contempla as descobertas de Driesch e infere que:

[...] animais aparentemente muito simples apresentam-nos algo muito diverso de uma atividade maquinal. As máquinas não passam de organismos incompletos, aos quais faltam duas propriedades para aparecer como organismos: a construção de formas e a regeneração. (PONTY, 2000, p. 275); apud BAIER (2005, p. 61).

Os experimentos de Driesch, em conjunto com as investigações dos biólogos organísmicos, descortinam-se como divergentes ao modelo mecanicista. Os biólogos organísmicos defendem a ideia de que o ingrediente indispensável para o discernimento das relações organizadoras e, conseqüentemente, do termo organização é a consciência de que ela foi aprimorada em nexos com a auto-organização. Logo, segundo eles, compreender o padrão de auto-organização é a chave para abrir a porta que conduz ao entendimento da essência natural da vida. Desta forma, paulatinamente, os cientistas vão se dando conta de que o modelo mecanicista é inoperante no que diz respeito ao entendimento científico de casos que não podem ser resolvidos isoladamente, já que possuem interligações, interconexões e interdependências. Essa nova concepção que se estabelece no meio científico do século XX é denominada de concepção sistêmica. Essa visão de mundo é alicerçada e expressa pela metáfora da rede, ou seja, uma parte representa meramente um padrão pertencente a uma rede de interligações em que as propriedades do sistema só podem ser auferidas mediante a dinâmica do conjunto em sua totalidade. (BAIER, 2005). De acordo com Capra:

A teia da vida consiste em redes dentro de redes. Em cada escala, sob estreito e minucioso exame, os nodos da rede se revelam como redes menores [...]. Na natureza não há acima ou abaixo, e não há hierarquias. Há somente redes aninhadas dentro de outras redes [...]. Na segunda metade do século XX a concepção de rede foi a chave para os recentes avanços na compreensão científica não apenas dos ecossistemas, mas também da própria natureza da vida (CAPRA, 1998, p. 45; apud BAIER, 2005, p. 63)

Destarte, o bioquímico Lawrence Henderson (1878 – 1942) foi o pioneiro na utilização da palavra sistema, na intenção de se referir tanto ao conjunto de seres vivos como de sistemas sociais. Logo, nesse instante em diante,

[...] um sistema passou a significar um todo integrado cujas propriedades essenciais surgem das relações entre suas partes, e pensamento sistêmico, a compreensão de um fenômeno dentro do contexto de um todo maior [...]. Entender as coisas sistemicamente significa, literalmente, colocá-las dentro de um contexto, estabelecer a natureza de suas relações. (CAPRA, 1998, p. 39; apud BAIER, 2005, p. 62-63).

Por conseguinte, a noção de redes se estende em todas as direções, ou seja, as relações factuais em um padrão de redes se apresentam de maneira não-linear. Cabe ressaltar que padrões não podem ser mensurados e muito menos terem sua massa ponderada; padrões devem ser unicamente mapeados, já que os aspectos a serem considerados nesse mapeamento são qualitativos. Não obstante, a compreensão dos conceitos matemáticos de mapeamento e padrões, torna-se indispensável também, a noção do termo iteração, visto que essas três concepções são reputadas como alicerces na qual a ciência aliada ao pensamento sistêmico encontra-se edificada. Além disso, elas são ideias integrantes da linguagem matemática utilizada para descrever os sistemas que se apoiam em processos não-lineares e que contemplam interconexões por meio de redes. (BAIER, 2005). Segundo Capra: “Matematicamente, um laço de realimentação corresponde a um tipo especial de processo não-linear conhecido como *iteração* (palavra que em latim significa *repetição*) na qual uma função opera continuamente sobre si mesma.” (CAPRA, 1998, p. 107; apud BAIER, 2005, p. 84).

De acordo com Baier (2005), no decorrer das últimas décadas do século XX, propagou-se a concepção de que na natureza, bem como no cosmos, predominam os fenômenos não-lineares, os quais se constituem como atributo crucial dos padrões de rede dos sistemas vivos. A matemática primogênita que possibilita e disponibiliza aos cientistas subsídios para investigar a complexidade intrínseca aos fenômenos não-lineares e é renomada como:

a nova matemática da complexidade e, tecnicamente, como teoria dos sistemas dinâmicos, dinâmica dos sistemas, dinâmica complexa ou dinâmica não-linear [...]. Para evitar confusões, é útil ter sempre em mente o fato de que a teoria dos sistemas dinâmicos não é uma teoria dos fenômenos físicos, mas sim, uma teoria matemática cujos conceitos e técnicas são aplicados a uma ampla faixa de fenômenos. O mesmo

é verdadeiro para a teoria do caos e para a teoria dos fractais, importantes ramos da teoria dos sistemas dinâmicos (CAPRA, 1998, p. 99; apud BAIER, 2005, p. 85).

5.1 SISTEMAS DINÂMICOS

No século XX, o avanço e o desenvolvimento das ferramentas computacionais contribuíram para a fundamentação de uma ciência mais sofisticada e contemporânea, bem como foram e perpetuaram-se como as responsáveis por desvendar inúmeros enigmas e problemas considerados inescrutáveis. Com o aval dessas tecnologias, os estudos dos fenômenos intrínsecos à natureza e a humanidade foram intensificados e aprimorados, culminando na descoberta de novas áreas de conhecimento, destacando-se entre elas a dos Sistemas Dinâmicos. (BAIER, 2005).

A palavra sistema origina-se do latim *systema* e do grego *sýstema*, que significa aquilo que permanece junto. No dicionário Aurélio, nos deparamos com a seguinte definição: “Sistema é uma reunião dos elementos que, concretos ou abstratos, se interligam de modo a formar um todo organizado.” Por outro lado, ao analisarmos a palavra dinâmica, verificamos que se origina do grego *dynamikós*, que denota força. De mesmo modo, ao procurar no dicionário o seu significado, nos deparamos com “Reunião das forças, ou do potencial interno, causadoras do incentivo, do estímulo ou da evolução de alguma coisa [...]”. Desse modo, podemos concluir que um sistema dinâmico se caracteriza por um conjunto de elementos interligados – sejam eles de natureza material, conceitual, física, biológica, econômica ou social – e que estão submetidos à análise com o intuito de verificar os processos desencadeados nesse conjunto em função de uma variável que pode ser contínua ou discreta. Logo, por definição, um sistema dinâmico é uma série de estados possíveis em um espaço, descrito por uma regra ou um conjunto de regras deterministas que definem os estados atuais em função dos estados posteriores, ou seja, a partir de uma condição inicial denominada x_0 . Em suma, é um sistema no qual observam-se as transformações ocorridas com o decorrer do tempo.

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados em dois subtipos: mapas iterados (também chamados de **equações de diferenças**) ou **equações diferenciais**. Os mapas iterados representam os sistemas dinâmicos discretos e as equações diferenciais descrevem os sistemas dinâmicos contínuos. Nos sistemas dinâmicos discretos, o espaço dos estados se caracteriza

por meio de um conjunto discreto e, portanto, as variáveis só podem progredir ou se deslocar no conjunto de pontos discretos $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

Um **sistema dinâmico discreto** é representado por meio de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que possibilita obter x_{n+1} num instante t_{n+1} , a partir do estado x_n , no instante t_n :

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1)$$

Note que essa função é caracterizada por meio de um processo recursivo, já que, a partir de um valor inicial x_0 podemos obter o valor de x_1 ; ao aplicar f no valor de x_1 , podemos obter x_2 e assim sucessivamente, ou seja, aplicamos a função f nela mesma continuamente, utilizando o conceito matemático de função composta e de iteração – ambos citados anteriormente no Capítulo 4. Além disso, a equação (1) também pode ser denotada como:

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}) \text{ com } n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

sendo f uma função qualquer.

Nos sistemas dinâmicos contínuos, temos as equações diferenciais, que são utilizadas para descrever a evolução temporal dos estados de um sistema em tempo contínuo, isto é, o espaço de estados consiste em valores reais (ou complexos). Neste trabalho, vamos nos ater apenas às equações diferenciais ordinárias (EDOs), visto que apresentam relação com apenas uma variável independente. As EDOs de ordem n são da forma:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde f é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, $y = y(x)$ e $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Podendo ser reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \text{ onde } F \text{ é uma função contínua de valores reais de}$$

$n + 1$ variáveis.

Um dos aspectos mais importantes a ser considerado nos sistemas dinâmicos discretos e contínuos, é a sua **linearidade**. Desse modo, um sistema dinâmico discreto será dito **linear** apenas quando a função f em (2) for linear nas variáveis que se estendem de x_{n-1} até x_{n-k} . Caso contrário, dizemos que o sistema dinâmico discreto considerado é **não-linear**.

De maneira mais sucinta, um sistema dinâmico discreto linear é expresso por uma equação da seguinte forma:

$$x_n = c_1(n)x_{n-1} + c_2(n)x_{n-2} + \dots + c_k(n)x_{n-k} + c_{k+1}(n).$$

Nessa equação, $c_i(n)$ são os coeficientes das variáveis x_i . Assim sendo, o sistema será linear, caso mantenha a linearidade nas variáveis x_i , independentemente dos coeficientes $c_i(n)$ serem funções não lineares de n .

Exemplo 4.1.1: Classificação dos sistemas dinâmicos em lineares e não lineares.

Sistemas dinâmicos lineares

$$x_n = n^2 \cdot x_{n-1}$$

$$x_n = 7 \cdot x_{n-2} + 9 \cdot x_{n-3} + \text{sen } n$$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Sistemas dinâmicos não lineares

$$x_n = x_{n-1}^2$$

$$x_n = x_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}}$$

Já no que se refere aos sistemas dinâmicos contínuos, dizemos que uma EDO de ordem n (3) é linear se f for linear em $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Isso significa que uma EDO de n -ésima ordem é linear quando (3) for da forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Além disso, para que um sistema dinâmico contínuo seja linear, deve atender às seguintes propriedades:

1. Aditividade

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2. Homogeneidade

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

E essas duas propriedades podem ser resumidas em uma única:

$$f(\alpha(x + y)) = \alpha f(x + y) = \alpha f(x) + \alpha f(y).$$

Assim sendo, caso a função atenda as propriedades listadas, concluímos que o sistema dinâmico contínuo considerado é **linear** e caso não as satisfaça, o classificamos como **não-linear**.

Em geral, os pesquisadores buscam concentrar suas investigações no estudo dos sistemas dinâmicos lineares, tendo em vista a sua efetividade no que tange a produção de modelos matemáticos mais simples e capazes de descrever os fenômenos da natureza e da vida. Além disso, os sistemas compostos de equações lineares apresentam uma resolução mais facilitada, o que já não ocorre com os sistemas não lineares, já que são mais complexos e árduos e que na grande maioria das vezes apresentam apenas solução geral e não exata. Essa profunda complexidade advinda de tais sistemas foi o que os caracterizou como empecilhos durante um longo período da história, pois, conforme mencionado anteriormente, acreditava-se que todos os fenômenos intrínsecos à natureza poderiam ser expressos por modelos matemáticos quantitativos. No entanto, é o estudo desses sistemas que conduz à compreensão e à percepção do qualitativo, tal qual, nos faz vislumbrar que a ordem e o controle tão almejados são permeados pela aleatoriedade e a dinâmica do caos.

A princípio vamos aprofundar a nossa discussão acerca dos **sistemas dinâmicos discretos** e para isso iremos definir os conceitos de órbita, ponto fixo e estabilidade e mais adiante iremos abordar os **sistemas dinâmicos contínuos**.

A sequência $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, obtida por meio das iterações sucessivas de um **sistema dinâmico discreto** é denominada de **órbita** ou **trajetória** do sistema a partir de x_0 . Utilizaremos a notação $O(x_0)$ para órbita.

Exemplo 4.1.2: Obtenha as primeiras órbitas dos sistemas dinâmicos discretos a seguir:

a. $x_{n+1} = 2x_n - 1$, com $x_0 = 4$

$$x_0 = 4$$

$$x_1 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$x_2 = 2x_1 - 1 = 2 \cdot 7 - 1 = 14 - 1 = 13$$

$$x_3 = 2x_2 - 1 = 2 \cdot 13 - 1 = 26 - 1 = 25$$

...

Logo, $O(4) = (4, 7, 13, 25, \dots)$

b. $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$, com $x_0 = 3$

$$x_0 = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{3}x_0 + 4 = \frac{1}{3} \cdot 3 + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{3}x_1 + 4 = \frac{1}{3} \cdot 5 + 4 = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}x_2 + 4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{3} + 4 = \frac{17}{9} + 4 = \frac{53}{9}$$

...

Logo, $O(3) = (3, 5, \frac{17}{3}, \frac{53}{9}, \dots)$

c. $x_{n+1} = 2x_n - 1$, com $x_0 = 1$

d. $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$, com $x_0 = 6$

$$\begin{array}{ll}
 x_0 = 1 & x_0 = 6 \\
 x_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 & x_1 = \frac{1}{3}x_0 + 4 = \frac{1}{3} \cdot 6 + 4 = 2 + 4 = 6 \\
 x_2 = 2x_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 & x_2 = \frac{1}{3}x_1 + 4 = \frac{1}{3} \cdot 6 + 4 = 2 + 4 = 6 \\
 x_3 = 2x_2 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 & x_3 = \frac{1}{3}x_2 + 4 = \frac{1}{3} \cdot 6 + 4 = 2 + 4 = 6 \\
 \dots & \dots \\
 \text{Logo, } O(1) = (1, 1, 1, 1, \dots) & \text{Logo, } O(6) = (6, 6, 6, 6, \dots)
 \end{array}$$

Nos exemplos anteriores, consideramos os mesmos sistemas dinâmicos discretos nas letras (a) e (c), bem como nas letras (b) e (d) e alteramos apenas o seu valor inicial x_0 . Observamos com isso a mudança de comportamento que um sistema dinâmico pode apresentar mediante o valor inicial considerado. Na letra (a), com $x_0 = 4$, o sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 2x_n - 1$ tende a crescer a cada iteração, o que não se observa na letra (c), já que partindo de $x_0 = 1$, o sistema tende a se estabilizar e a manter o valor fixo 1 em todas as iterações. Algo análogo ocorre com o sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$, visto que partindo de $x_0 = 3$, os valores obtidos nas iterações sucessivas são crescentes e tendem a se aproximar de 6 e quando adotamos $x_0 = 6$, os valores das iterações sucessivas fixam-se em 6. Essa análise preliminar será explorada com maior profundidade adiante.

Exemplo 4.1.3: Tabela com as primeiras órbitas do sistema dinâmico $x_{n+1} = 3|x_n| - 2$.

Tabela 11: Órbitas do sistema dinâmico $x_{n+1} = 3|x_n| - 2$.

$x_{n+1} = 3 x_n - 2$							
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	4	10	28	82	244	730	
-3	7	19	55	163	487	1459	
$\frac{7}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{83}{2}$	$\frac{245}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$	-1	1	1	1	1	1	
-0,75	0,125	-1,625	2,875	6,625	17,875	51,625	

Fonte: Autoria própria

Com base na Tabela 11 inferimos que quando x_0 assume os valores $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ as órbitas tendem a estacionar nos valores $-\frac{1}{2}$ e 1 , respectivamente. Já nos demais casos as trajetórias percorridas pelas órbitas correspondem a pontos discretos que evoluem crescentemente a cada iteração.

Quando nos remetemos ao conceito de órbita podemos classificá-la em dois subgrupos: órbita periódica e órbita de um ponto fixo. Uma órbita é denominada periódica se o ponto x_0 é um ponto periódico, isto é, se temos $f^n(x_0) = x_0$ para algum $n > 0$ e $f^k(x_0) \neq x_0$ para $k < n$. Portanto, se x_0 for um ponto periódico de período n , então a órbita de x_0 será uma sequência de números que se repetem a cada bloco de n elementos.

Exemplo 4.1.4: Seja $f(x) = x^2 - 1$ e $x_0 = 0$. Temos:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 1 &\Rightarrow f(0) = 0^2 - 1 = -1 \\ f(-1) &= (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ f(0) &= 0^2 - 1 = -1 \\ f(-1) &= (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Logo a órbita $O(0) = (0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots)$ é periódica de período 2, já que o bloco que se repete é composto por dois elementos, no caso, os elementos 0 e -1.

Outro aspecto elementar dos sistemas dinâmicos que diz respeito à sua estabilidade é o conceito de ponto fixo. Um ponto x_{PF} é um ponto fixo do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$, se satisfaz à equação:

$$f(x_{PF}) = x_{PF}.$$

Ao aplicarmos ao sistema dinâmico o ponto fixo x_{PF} , as sucessivas iterações conduzirão sempre ao mesmo ponto, ou seja:

$$f^n(x_{PF}) = f^{n-1}(f(x_{PF})) = f^{n-1}(x_{PF}) = \dots = f(x_{PF}) = x_{PF}.$$

Dessa forma, a órbita de um ponto fixo x_{PF} é a sequência constante $O(x_{PF}) = (x_{PF}, x_{PF}, x_{PF} \dots)$. No Exemplo 3.1, os sistemas dinâmicos apresentados nas letras (c) e (d) têm como **pontos fixos**, 1 e 6, respectivamente, pois, ao adotarmos o ponto fixo como valor inicial x_0 , note que todas as iterações subsequentes conduzirão ao seu valor, ou seja, $f^n(x_{PF}) = x_{PF}$. Os pontos fixos de um sistema dinâmico discreto são obtidos resolvendo a equação $f(x) = x$ ou geometricamente por meio da intersecção da representação gráfica de f com a reta $y = x$.

Exemplo 4.1.4: Determine os pontos fixos do sistema dinâmico discreto $f(x) = x^2 - 2$ e faça a sua representação gráfica.

Com o intuito de obter os pontos fixos de $f(x)$, devemos então, resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ x^2 - 2 &= x \\ x^2 - x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau por soma e produto, obtemos:

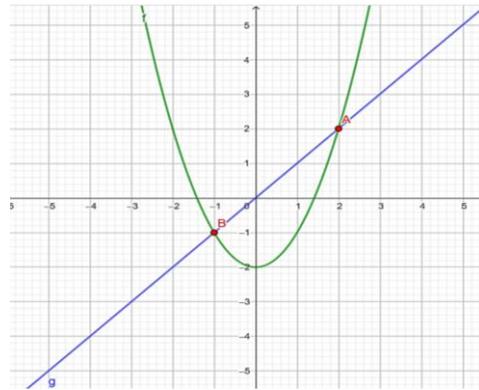
$$S = -\frac{b}{a} = 1 = 2 + (-1)$$

$$P = \frac{c}{a} = -2 = 2 \cdot (-1)$$

Logo, $x' = -1$ e $x'' = 2$ são os pontos fixos do sistema dinâmico discreto $f(x) = x^2 - 2$.

Fazendo o esboço da representação gráfica na Figura 36:

Figura 36: Representação gráfica do sistema dinâmico discreto $f(x) = x^2 - 2$.



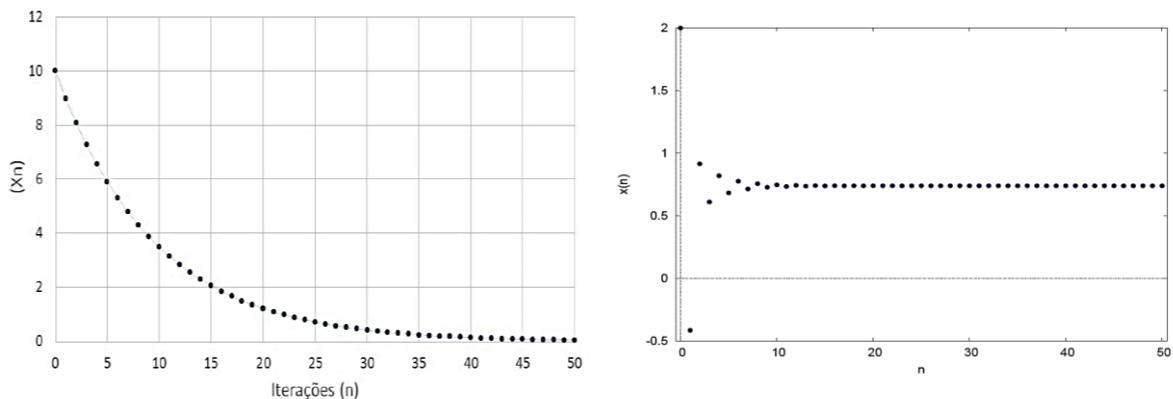
Fonte: Autoria própria – software Geogebra.

Observe que a intersecção da função $f(x)$ com a reta $y = x$ são os pontos fixos do sistema, ou seja, -1 e 2.

Existem representações gráficas que possibilitam e facilitam o estudo do comportamento dos sistemas dinâmicos, haja vista que se caracterizam por meio de um processo recursivo. Essas representações visam contemplar as iterações sucessivas do sistema, bem como a trajetória percorrida pelas suas órbitas e convida-nos a analisar diligentemente a dinâmica do sistema com o passar do tempo, na busca por identificar convergências ou divergências em torno de seus pontos fixos ou até mesmo prever tendências ou padrões. Dentre essas ferramentas, destacam-se os mapas unidimensionais e o diagrama de *cobweb* – que também pode ser chamado de diagrama de teia de aranha ou de rede.

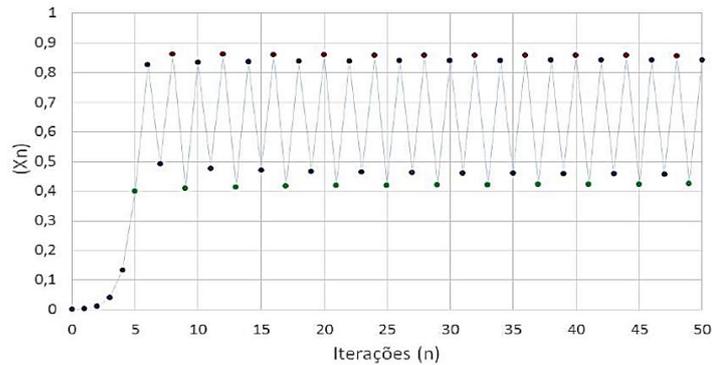
Os mapas unidimensionais são representados pelo conjunto de pontos $(n, x_n); n \in \mathbb{N}$, onde x_n é o n -ésimo termo da órbita $O(x_0)$ dado pelo sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$.

Figura 37: Mapa de $x_{n+1} = 0,9x_n$, com $x_0 = 10$ (à esquerda) e mapa de $x_{n+1} = \cos(x_n)$ com $x_0 = 2$ (à direita).



Fonte: Jesus (2016); Morais (2014).

Figura 38: Mapa de $x_{n+1} = 3,45x_n(1 - x_n)$, com $x_0 = 0,001$.



Fonte: Jesus (2016)

Note que no mapa de $x_{n+1} = 0,9x_n$, com $x_0 = 10$ (na Figura 37), as órbitas vão decrescendo sucessivamente e a partir da quadragésima iteração tendem a se aproximar e a fixar-se em zero. Já no mapa do sistema dinâmico $x_{n+1} = \cos(x_n)$, onde $x_0 = 2$, as órbitas passam a se estabilizar após a décima iteração, chegando ao ponto de equilíbrio $0,7390\dots$. Por fim, na Figura 38, temos as órbitas do mapa $x_{n+1} = 3,45x_n(1 - x_n)$ e $x_0 = 0,001$ que a princípio, crescem lentamente, porém, a partir de 0,4; tendem a oscilar e a assumir constantemente quatro valores próximos de 0,42; 0,84; 0,46 e 0,86, ou seja, acontece um bloco de repetição que se dá a cada quatro elementos e, portanto, o sistema é composto por órbitas de período quatro.

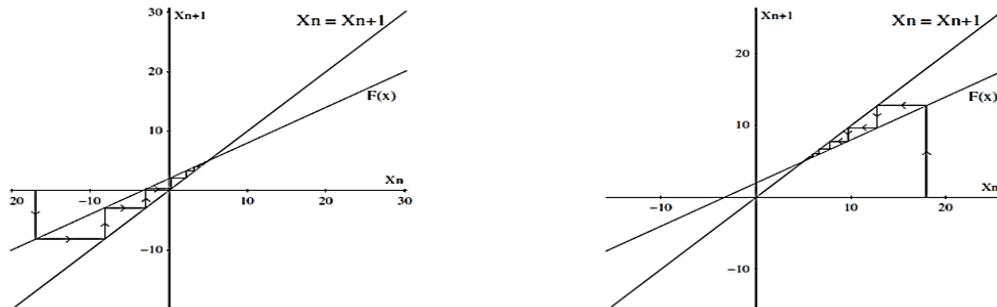
Por outro lado, o diagrama de teia de aranha consiste na representação no mesmo eixo de coordenadas cartesianas, da função identidade $y = x$ e da equação que caracteriza o sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$. A intersecção resultante dessas funções nos fornecerá os pontos fixos do sistema e representaremos por setas a trajetória das órbitas a cada iteração. Nos diagramas de teia de aranha abaixo, observe que temos na Figura 39 a representação do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 0,6x_n + 2$, considerando os valores iniciais $x_0 = -17$ (à esquerda) e $x_0 = 18$ (à direita). A intersecção entre as funções resulta em um único ponto fixo x_{PF} , a saber:

$$f(x) = 0,6x + 2 \Rightarrow 0,6x + 2 = x \Rightarrow 0,6x - x = -2 \Rightarrow -0,4x = -2 \Rightarrow x = 5.$$

Sobre esse diagrama, Moraes (2014, p. 35) discorre que:

Começando por x_0 no eixo horizontal, traçamos uma reta vertical até a função $f(x)$ onde encontramos $f(x_0) = x_1$. Em seguida, traçamos uma reta horizontal de (x_0, x_1) até a reta $x_n = x_{n+1}$, onde encontramos o ponto (x_1, x_1) . Repetindo esse processo vamos encontrar (x_1, x_2) ; (x_2, x_2) e assim por diante [...].

Figura 39: Diagrama de teia de aranha do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 0,6x_n + 2$ para os valores iniciais $x_0 = -17$ (à esquerda) e $x_0 = 18$ (à direita).



Fonte: Morais (2014)

Quando determinamos os pontos fixos de um sistema dinâmico, nossos interesses se concentram em examinar se esses pontos fixos são estáveis ou instáveis, já que isso nos permite compreender e visualizar o comportamento e a dinâmica do sistema considerado. Desse modo, um ponto fixo x_{PF} é considerado **estável**, se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|x_n - x_{PF}| < \varepsilon; \forall n \in \mathbb{N}$ sempre que $|x_0 - x_{PF}| < \delta$. Em contrapartida, um ponto fixo x_{PF} é **instável** caso não seja estável. Logo, ao tomarmos um valor x_0 próximo de x_{PF} , se as iteradas sucessivas penderem a se aproximar cada vez mais do valor de x_{PF} , temos que o ponto fixo considerado é **estável**.

Exemplo 4.1.5: Seja o sistema dinâmico $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$. Adote valores para x_0 que são próximos à x_{PF} tanto pela esquerda (valores menores que x_{PF}), quanto pela esquerda (valores maiores que x_{PF}) e observe se as órbitas tendem ou não ao ponto fixo.

Como vimos anteriormente, o sistema dinâmico $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$ tem como ponto fixo $x_{PF} = 6$. Observe na Tabela 12 os valores assumidos por x_0 , bem como as órbitas obtidas por meio de suas consecutivas iterações:

Tabela 12: Órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$.

$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$				
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
5,7	5,9	5,966...	5,988...	5,996...
5,91	5,97	5,99	5,996...	5,998...
6,1	6,033...	6,011...	6,003...	6,001...
6,05	6,016...	6,0053...	6,00176...	6,000586...

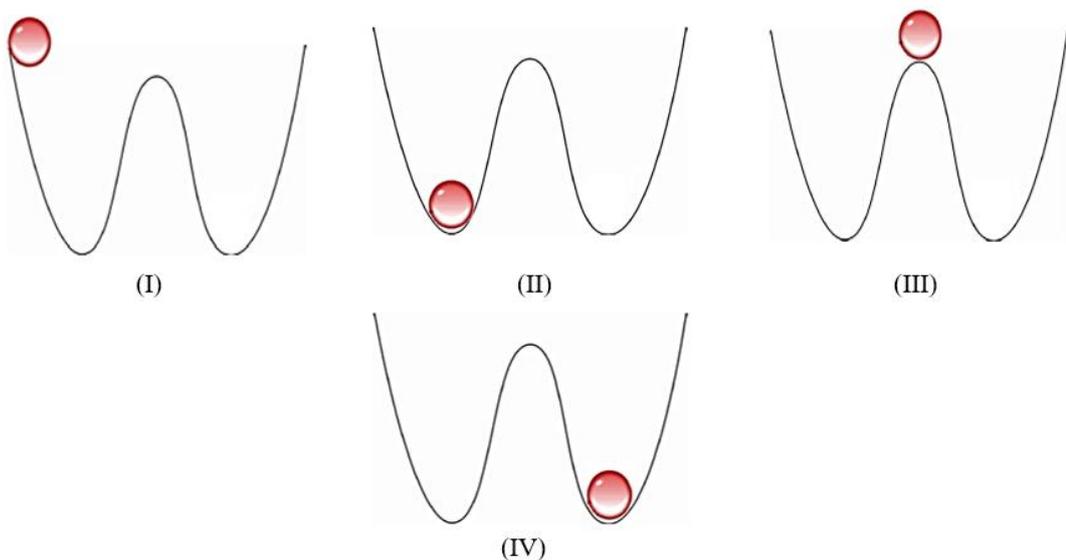
Fonte: Autoria própria.

Com base na Tabela 12 conseguimos auferir que as órbitas tendem a 6 tanto pela esquerda quanto pela direita, ou seja, $x_{PF} = 6$ é um **ponto fixo estável**.

Ainda no que diz respeito a estabilidade e instabilidade de pontos fixos, analisemos as seguintes situações.

Situação 1: Uma esfera será lançada do alto de uma colina, conforme a ilustração (I) da Figura 40.

Figura 40: Conceito de estabilidade: equilíbrio estável e instável.

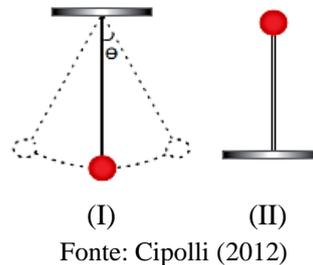


Fonte: Jesus (2016)

Espera – se que com o passar do tempo, a bolinha pare em uma das concavidades da colina ou no pico. No caso de a bolinha estacionar em uma das concavidades – conforme as ilustrações (II) e (IV) da Figura 40 – note que uma pequena perturbação empregada neste ponto a conduzirá novamente a ele, caracterizando-o como ponto de **equilíbrio estável**. Analisando a posição (III), na qual a bolinha encontra-se no topo de um dos picos da colina, é intuitiva a percepção de que qualquer perturbação a distanciará dessa posição, caracterizando-o em um ponto de **equilíbrio instável**.

Situação 2: Examinemos um pêndulo não forçado, porém sujeito a um amortecimento. Seja θ o ângulo entre o fio e o eixo vertical que passa pelo seu ponto de sustentação, conforme a Figura 41 abaixo:

Figura 41: Conceito de estabilidade utilizando pêndulos.



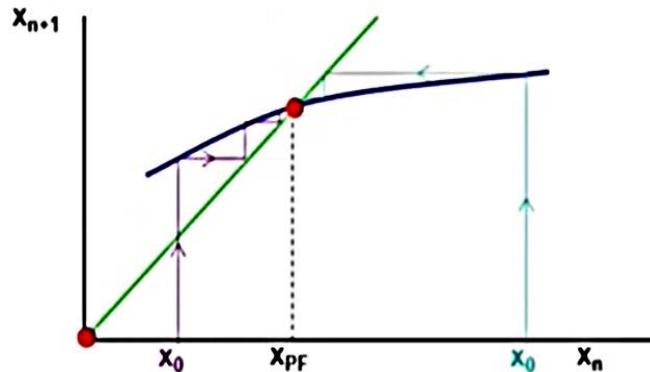
Conforme a Figura 41, suponhamos que o pêndulo da figura (I) seja levemente distanciado de seu ponto de equilíbrio, onde $\theta = 0$ e realize movimentos semelhantes aos representados pelos pontilhados. Note que embora a princípio, haja uma ampliação na abertura do ângulo θ , a tendência é de que essa amplitude diminua e de que o pêndulo retorne à sua posição vertical inicial, isto é, o ponto de equilíbrio em questão é estável. Perceba também que independentemente da direção à qual o pêndulo é conduzido, ele sempre retornará ao mesmo ponto de equilíbrio, isto é, qualquer que seja a condição inicial considerada e que seja próxima desse ponto, tenderá a ter por desfecho ele mesmo, e portanto, é também ponto fixo. Na figura (II), a massa do pêndulo está suspensa sobre uma barra e o ponto que o representa é instável, pois qualquer que seja a perturbação empregada nele o levará a se afastar de sua posição inicial.

Com base nas situações apresentadas, podemos definir pontos fixos estáveis e instáveis. Logo, um ponto fixo é denominado estável quando atrai todas as órbitas correspondentes aos valores iniciais de sua vizinhança, ou seja, qualquer valor inicial considerado que seja próximo ao ponto fixo, terá sua trajetória convergindo para ele. Em contraposto, dizemos que um ponto fixo é instável quando repele ou afasta todas as trajetórias decorrentes de valores iniciais adjacentes.

Para classificar os **pontos fixos** x_{PF} de um sistema dinâmico discreto, podemos utilizar a representação gráfica do diagrama de teia de aranha, bem como o conceito de derivadas. Suponha que x_{PF} seja um ponto fixo de $f(x_n) = x_{n+1}$ e que f seja derivável em x_{PF} . Desse modo, temos:

- Se $|f'(x_{PF})| < 1$, x_{PF} é um ponto fixo **estável**, chamado também de **atrator** (ver Figura 42).

Figura 42: Análise de ponto fixo estável atrator



Fonte: MOOC (2018)

Observe no mapa unidimensional na Figura 42 que tomando valores para x_0 de tal modo que $x_0 > x_{PF}$, a trajetória das órbitas (indicadas pelas setas em azul) serão atraídas para o ponto fixo. Caso $x_0 < x_{PF}$, analisamos que o mesmo comportamento se repete, já que as órbitas – representadas agora em roxo – também convergem para o ponto fixo. Desse modo, concluímos que se um ponto fixo x_{PF} é **atrator**, o trajeto percorrido pelas órbitas $O(x_0)$ convergirão até ele, independentemente do valor inicial x_0 considerado.

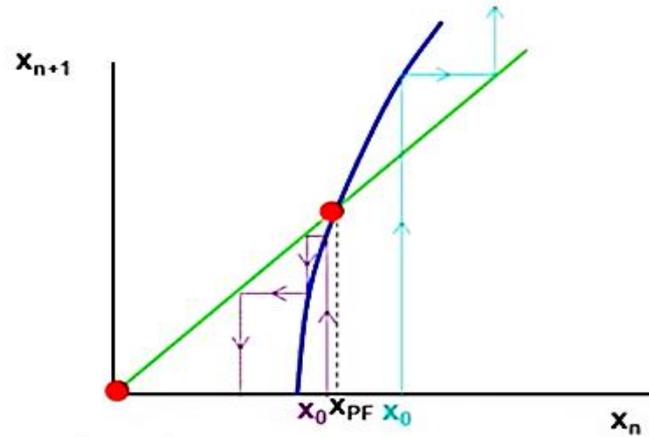
Podemos utilizar como exemplo novamente o diagrama de teia de aranha (ver Figura 39) do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 0,6x_n + 2$ para os valores iniciais $x_0 = -17$ (à esquerda) e $x_0 = 18$ (à direita). Note que o ponto fixo x_{PF} é a intersecção entre as retas $y = x$ e a reta que representa a equação do sistema, a saber:

$$f(x) = x \Rightarrow 0,6x + 2 = x \Rightarrow 0,6x - x = -2 \Rightarrow -0,4x = -2 \Rightarrow x = 5.$$

Não obstante houvessem sido considerados valores iniciais um tanto distantes do ponto fixo $x_{PF} = 5$, constatamos por meio do diagrama que as órbitas são atraídas até ele em ambas as situações ($x_0 > x_{PF}$ e $x_0 < x_{PF}$) e, portanto, classificamos esse ponto como fixo estável ou atrator.

- Se $|f'(x_{PF})| > 1$, x_{PF} é um ponto fixo **instável**, chamado também de **repulsor**.

Figura 43: Análise de ponto fixo instável e repulsor.

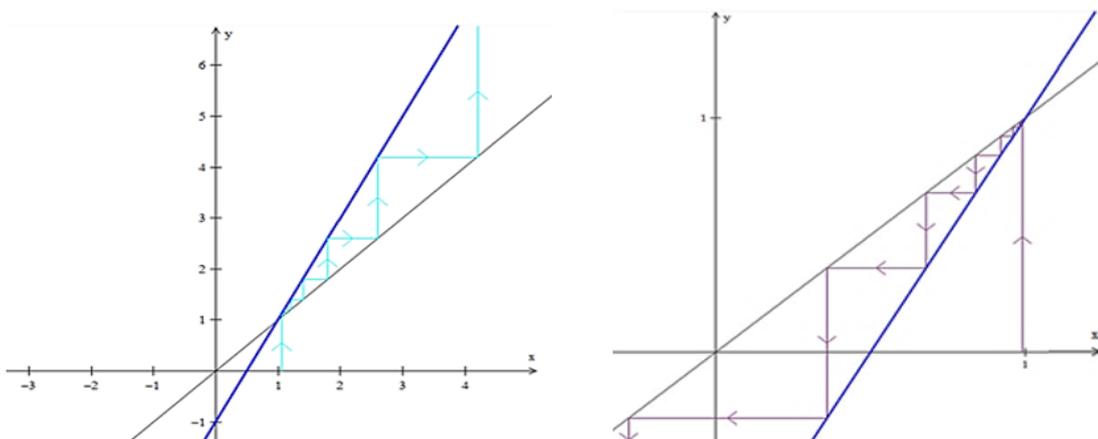


Fonte: MOOC (2018)

Podemos verificar no mapa da Figura 43, que atribuindo valores para x_0 de modo que $x_0 > x_{PF}$, a trajetória das órbitas – indicadas pelas setas em azul – serão repelidas pelo ponto fixo, afastando-se dele continuamente. Se considerarmos $x_0 < x_{PF}$, averiguamos que o mesmo comportamento ocorre, já que as órbitas – representadas agora em roxo – também são repelidas pelo ponto fixo. Portanto, depende-se que, embora o valor inicial x_0 esteja significativamente próximo ao ponto fixo x_{PF} , o destino percorrido por suas órbitas $O(x_0)$ tendem a ser repelidas e a se afastarem dele de modo gradual.

Tomemos como exemplo o sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 2x_n - 1$ e façamos a construção de seu diagrama de teia de aranha para dois valores iniciais $x_0 = 0,99$ e $x_0 = 1,05$; conforme a Figura 44.

Figura 44: Mapa de $x_{n+1} = 2x_n - 1$, com $x_0 = 1,05$ e mapa de $x_{n+1} = 2x_n - 1$, com $x_0 = 0,99$; respectivamente.

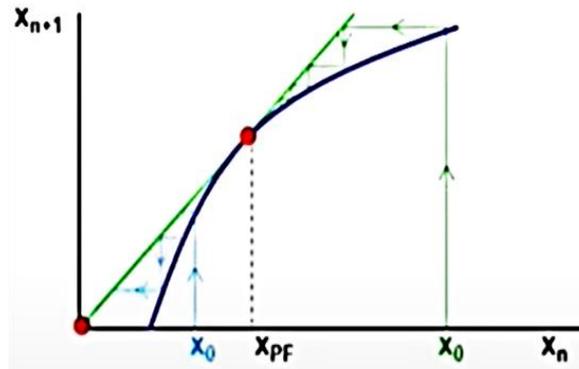


Fonte: Autoria própria – software Winplot.

Por meio dos diagramas de *cobweb*, fica evidente que o ponto fixo $x_{PF} = 1$ que é a intersecção das retas $y = x$ e da função $f(x) = x_{n+1}$ é repulsor, visto que afasta a trajetória das órbitas, mesmo que o valor inicial x_0 seja consideravelmente próximo dele.

- Se $|f'(x_{PF})| = 1$, x_{PF} é um ponto fixo **neutro** ou **indiferente** (ver Figura 45).

Figura 45: Análise de ponto fixo neutro ou indiferente.



Fonte: MOOC (2018)

Com base no diagrama da Figura 45, constatamos que o ponto fixo x_{PF} não é atrator e nem repulsor. Basta notar que quando $x_0 > x_{PF}$, temos que as órbitas (em verde) convergem ao encontro do ponto fixo, no entanto, isto já não ocorre se $x_0 < x_{PF}$, pois as trajetórias (em azul) se afastam progressivamente do ponto fixo do sistema. Quando isso ocorre, o ponto fixo em questão é denominado de ponto fixo **neutro** ou **indiferente**.

De maneira resumida, temos:

- Se $|f'(x_{PF})| < 1$, x_{PF} é um ponto fixo estável, chamado também de atrator;
- Se $|f'(x_{PF})| > 1$, x_{PF} é um ponto fixo instável, chamado também de repulsor;
- Se $|f'(x_{PF})| = 1$, x_{PF} é um ponto fixo neutro ou indiferente.

Nos critérios acima, $f'(x_{PF})$ é a derivada primeira de f calculada no ponto fixo x_{PF} .

Exemplo 4.1.6: Determine os pontos fixos dos sistemas dinâmicos discretos

$x_{n+1} = f(x_n)$ a seguir e classifique-os. Construa o diagrama de *cobweb* de cada um deles.

a. $f(x) = 0,6x + 1$

Vamos obter a princípio o ponto fixo do sistema, resolvendo a equação $f(x) = x$.

Daí, segue:

$$\begin{aligned} 0,6x + 1 &= x \\ 0,6x - x &= -1 \\ -0,4x &= -1 \\ x &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

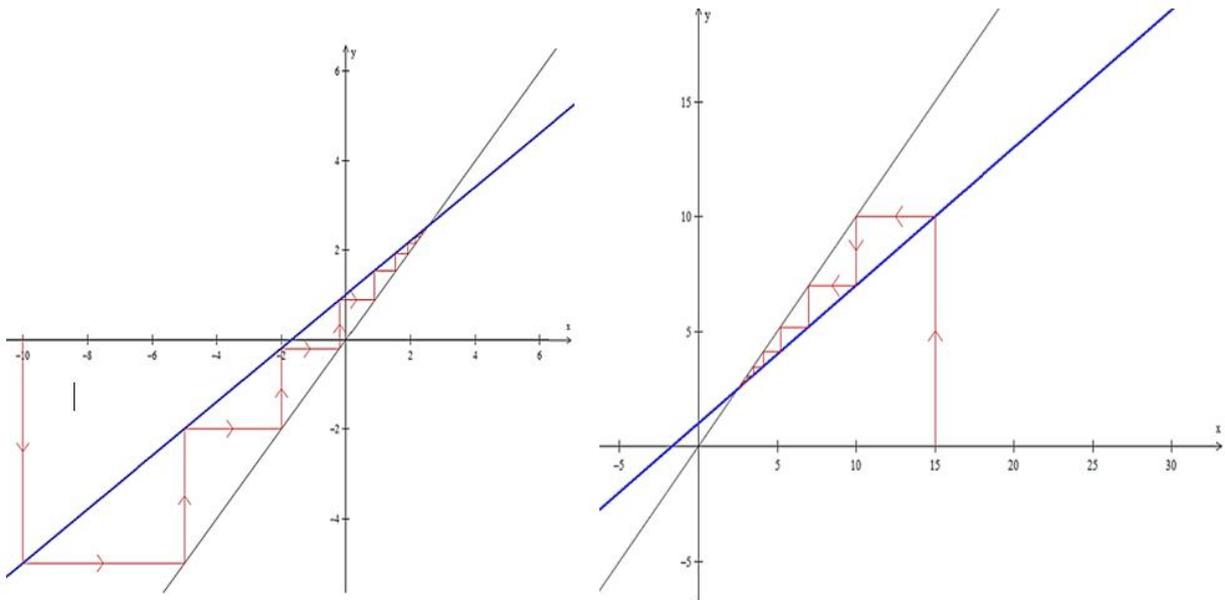
Logo, o único ponto fixo x_{PF} é $\frac{5}{2}$.

Calculando a derivada de $f(x)$, obtemos $f'(x) = 0,6$. Aplicando o ponto fixo x_{PF} :

$$\left| f' \left(\frac{5}{2} \right) \right| = 0,6 < 1 \Rightarrow x_{PF} \text{ é ponto } \mathbf{fixo\ estável\ e\ atrator}.$$

Desse modo, todas as órbitas do sistema dinâmico convergem para o ponto fixo $\frac{5}{2}$, conforme ilustra os diagramas de *cobweb* na Figura 46:

Figura 46: Diagrama de cobweb $x_{n+1} = 0,6x_n + 1$, com $x_0 = -10$ (à esquerda) e $x_0 = 15$ (à direita)



Fonte: Autoria própria – software Winplot.

b. $f(x) = x^3$

Inicialmente, vamos resolver a equação $f(x) = x$, ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 = x &\Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \\ &\mathbf{x = 0, x = 1\ ou\ x = -1.} \end{aligned}$$

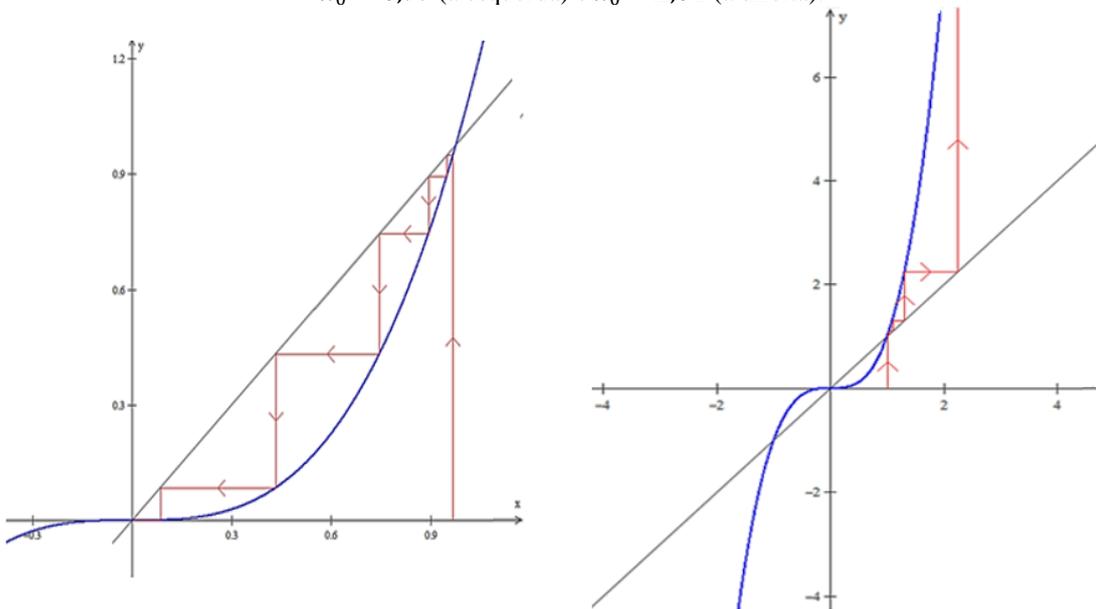
Logo, $-1, 0$ e 1 são os **pontos fixos** x_{PF} de f .

A derivada de $f'(x) = 3x^2$ e agora vamos calcular $|f'(x_{PF})|$ para os 3 pontos fixos encontrados e representar esse sistema por meio de um diagrama de *cobweb*:

- $|f'(-1)| = |3| = 3 > 1$ e, portanto, -1 é ponto fixo **instável (repulsor)**;
- $|f'(0)| = |0| = 0 < 1$ e, portanto, 0 é ponto fixo **estável (atrator)**;
- $|f'(1)| = |3| = 3 > 1$ e, portanto, 1 é ponto fixo **instável (repulsor)**.
-

Veja o diagrama para os pontos fixos 0 e 1 na Figura 47:

Figura 47: Diagramas de teia de aranha do sistema dinâmico discreto não linear $x_{n+1} = x_n^3$, com $x_0 = 0,99$ (à esquerda) e $x_0 = 1,01$ (à direita).



Fonte: Autoria própria – software Winplot.

c. $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$, com $x_0 = 3$

O ponto fixo x_{PF} é dado pela intersecção entre as funções, ou seja:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 4 = x \Rightarrow \frac{1}{3}x - x = -4 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = -4 \Rightarrow x = 6.$$

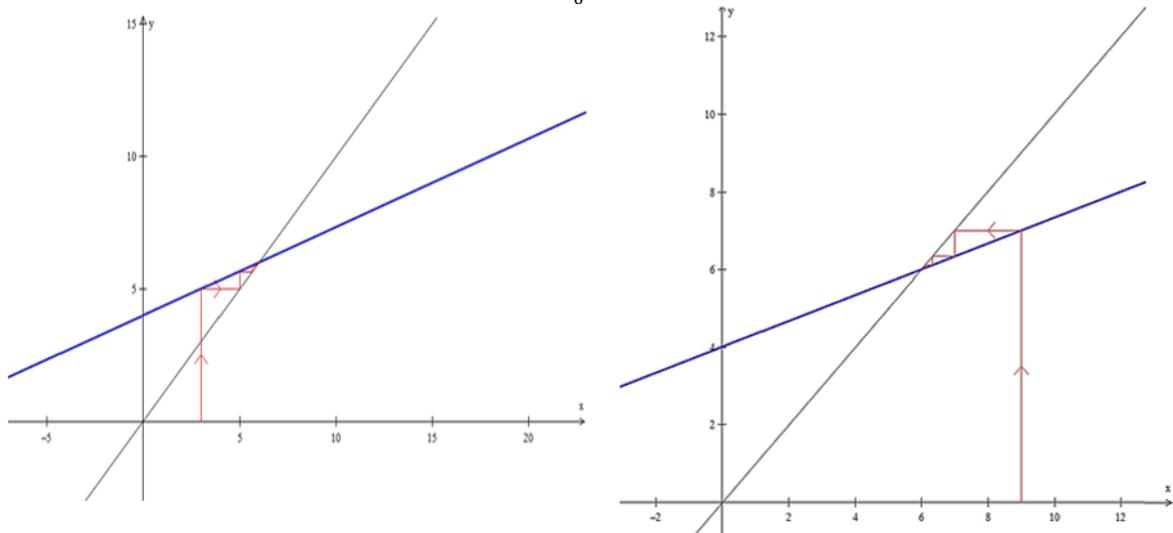
Logo, o único ponto fixo x_{PF} é 6 .

Calculando a derivada de $f(x)$, obtemos $f'(x) = \frac{1}{3}$. Aplicando o ponto fixo x_{PF} :

$$|f'(6)| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow x_{PF} \text{ é ponto } \mathbf{fixo\ estável\ e\ atrator}.$$

Com o auxílio do *software* Winplot, construímos o diagrama de teia de aranha (ver Figura 48) do sistema $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$, para os valores iniciais $x_0 = 3$ e $x_0 = 9$. Não obstante, é possível visualizar no diagrama, que a trajetória das órbitas representada pelas setas em vermelho tende a se aproximar do ponto fixo, o que nos leva a inferir que o ponto em questão é um ponto fixo **estável e atrator**.

Figura 48: Diagrama de *cobweb* do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4$, para os valores iniciais $x_0 = 3$ e $x_0 = 9$.



Fonte: Autoria própria – *software* Winplot.

Até o momento nos concentramos nas definições de estabilidade que constituem os sistemas dinâmicos discretos, bem como os métodos que podemos utilizar para classificar seus pontos fixos – em estáveis (atratores), instáveis (repulsores) ou então neutros ou indiferentes. Na próxima seção, nosso objetivo será o de investigar, analisar e compreender a estabilidade de alguns sistemas dinâmicos contínuos e quais recursos visuais ou algébricos podem ser empregados em meio a esse estudo. Contudo, cabe ressaltar que essa investigação será realizada de maneira sucinta e considerando apenas os aspectos relevantes e imprescindíveis para o avanço dessa pesquisa, visto o grau de complexidade ostentado por esses sistemas.

5.1.2 Estabilidade nos sistemas dinâmicos contínuos

Conforme mencionado no início deste capítulo, os sistemas dinâmicos contínuos se caracterizam por meio de equações diferenciais, dentre as quais, destacamos por meio deste trabalho, as EDOs (equações diferenciais ordinárias). As EDOs de ordem n são da forma:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde f é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis, $y = y(x)$ e $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Considere o sistema da forma:

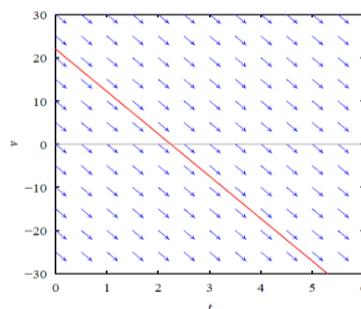
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

onde $x_i = x_i(t)$, $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ e f_i é uma função contínua de valores reais de n variáveis, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Essas equações também podem ser denominadas de equações de movimento e são consideradas como ponto de partida para um sistema dinâmico contínuo. Com o intuito de abordá-las com mais clareza, realizaremos a nossa investigação por intermédio dos sistemas autônomos. Nestes sistemas, as equações diferenciais são descritas por funções que não dependem explicitamente da variável, ou seja, as funções f_i não dependem da variável t .

Dito isto, voltemos à nossa atenção aos sistemas autônomos. Os sistemas autônomos podem ser melhor vislumbrados mediante um campo vetorial que é uma função que varia no espaço de fase de acordo com as suas coordenadas (ver Figura 49).

Figura 49: Campo vetorial da equação autônoma $\dot{v} = -g$ que representa o movimento de queda livre.



Fonte: Villate (2007)

Desse modo, um sistema dinâmico autônomo de primeira ordem ou unidimensional é um sistema que se define por meio de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, autônoma e é da forma:

$$\dot{x} = f(x).$$

Essa equação também é denominada de **equação de evolução**, já que, a partir de uma condição inicial x_0 , é possível compreender e definir a evolução da variável de estado do sistema. Além disso, assim como nos sistemas dinâmicos discretos, nos sistemas contínuos, é necessário determinar os pontos fixos ou críticos x_{PF} do sistema, ou seja, os pontos onde o fluxo é estacionário:

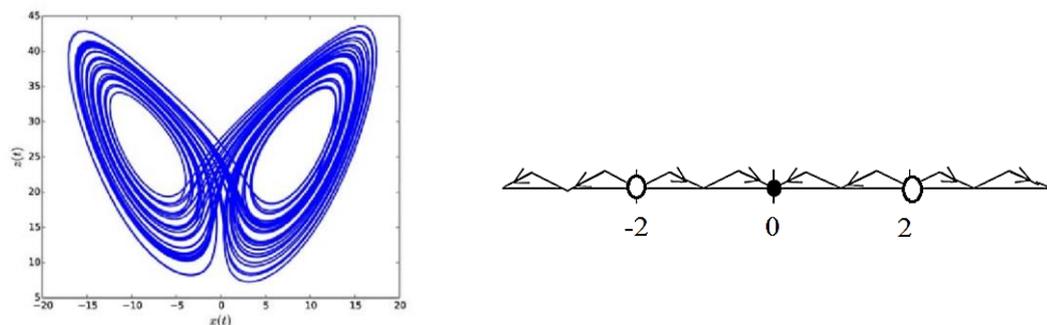
$$f(x_{PF}) = 0.$$

Nos sistemas dinâmicos contínuos, os pontos fixos representam as mudanças no fluxo de movimentação do sistema, bem como se caracterizam como soluções de equilíbrio para a equação de evolução, visto que ao considerarmos um valor inicial $x_0 = x_{PF}$, o sistema se manterá integralmente em x_{PF} , isto é, o sistema tende a estabilizar-se no ponto fixo x_{PF} , independentemente das possíveis perturbações que o acometem.

Não obstante, faz-se necessário a definição de dois conceitos que serão de extrema importância para a compreensão acerca dos comportamentos assumidos por sistemas dinâmicos contínuos e autônomos, a saber: o **espaço de fase** e o **retrato de fase**.

O **espaço de fase** é formado pelas variáveis ou coordenadas do sistema e se caracteriza como o espaço no qual as etapas percorridas pelo sistema dinâmico se desenvolvem. Já no **retrato de fase**, a representação é feita por meio da reta real. Indicamos na reta os **pontos fixos** e representamos por meio de **setas** a dinâmica das direções do fluxo (convergência ou divergência em relação aos pontos fixos) do sistema considerado (ver Figura 50).

Figura 49: Espaço de fase ou espaço fásico (à esquerda) e retrato de fase (à direita).



Fonte: Research Gate; Autoria própria.

Outrossim, os pontos fixos podem ser classificados de acordo com o comportamento assumido pelo sistema em suas adjacências. De modo análogo aos sistemas dinâmicos discretos, podem ser qualificados inicialmente como estáveis – também denominados de atratores ou escoadores – e instáveis que também podem ser chamados de repulsores. Os pontos fixos estáveis são responsáveis por atrair todos os pontos localizados em sua vizinhança a si, e os instáveis, em contrapartida, repelem todos os pontos de seus arredores, de modo que eles não converjam na sua direção. Uma maneira tangível de visualizar a dinâmica decorrente do fluxo das direções das equações de movimento se dá mediante o retrato de fase, conforme referido anteriormente.

Com o intuito de classificar os pontos fixos de um sistema dinâmico contínuo, iremos nos ater apenas aos modelos unidimensionais, ou seja, aos modelos que possuem uma única dimensão e nossa base de análise será por meio do conceito de estabilidade linear. Esta concepção consiste em linearizar o sistema considerado mediante à expansão em série de potências. Podemos utilizar a série de potências quando a função em questão contempla regras matemáticas de diferenciação e continuidade em um intervalo definido. Não obstante, o propósito deste trabalho não consiste em aprofundar-se na análise dos sistemas dinâmicos contínuos em dimensões superiores a 1, e, portanto, concentramos nossas investigações no caso unidimensional. Nos casos unidimensionais, ao descrevermos uma perturbação $a(t)$ em torno de um ponto fixo x_{PF} , obtemos:

$$a(t) = x(t) - x_{PF} \Rightarrow x(t) = a(t) + x_{PF}.$$

Para expressar uma aproximação da função $f(x)$ em torno de um ponto c escolhido arbitrariamente, empregamos a expansão em séries de potência de Taylor:

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot \frac{(x-c)}{1!} + f''(c) \cdot \frac{(x-c)^2}{2!} + f'''(c) \cdot \frac{(x-c)^3}{3!} + \dots$$

Aplicando essa expansão ao redor do ponto $c = x_{PF}$, temos:

$$f(x) = f(x_{PF} + a) = f(x_{PF}) + (x - x_{PF}) \cdot f'(x_{PF}) + O(2).$$

Rejeitando os termos que apresentam ordem superior, no caso, a partir de $O(2)$ (ordem 2), e recordando que $f(x_{PF}) = 0$, concluímos:

$$f(x) = f(x_{PF} + a) = (x - x_{PF}) \cdot f'(x_{PF}).$$

Fazendo $\dot{\eta} = f(x) = \frac{dx}{dt}$, segue:

$$\dot{\eta} = \eta \cdot f'(x_{PF}).$$

Desse modo, temos que um ponto fixo x_{PF} :

- É **estável** ou **atrator**, se $f'(x_{PF}) < 0$ e, desse modo, a perturbação em torno do ponto fixo x_{PF} decresce;
- É **instável** ou **repulsor**, se $f'(x_{PF}) > 0$ e, portanto, a perturbação em torno do ponto fixo tende a crescer consideravelmente com o passar do tempo.
- É **neutro** ou **indiferente**, se $f'(x_{PF}) = 0$.

Logo, as inferências acima correspondem a classificar o ponto fixo x_{PF} em um ponto de mínimo ou de máximo. Cabe, no entanto, ressaltar que o processo de linearização só pode ser realizado caso $f'(x_{PF}) \neq 0$ e caso os termos de ordem superior forem pequenos. Para além, ao representarmos um sistema dinâmico contínuo por meio de um retrato de fase, caracterizamos os pontos fixos estáveis como pontos fechados (preenchidos) e os pontos fixos instáveis ou repulsores como pontos abertos (não preenchidos). A seguir apresentamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos contínuos unidimensionais, tal qual de que modo se obtém seus pontos fixos e realiza-se a sua classificação. Do mesmo modo, há a representação dos fluxos da dinâmica do sistema por intermédio do retrato de fases.

Exemplo 4.1.2.1: Obtenha os pontos fixos dos sistemas dinâmicos contínuos $\dot{x} = f(x)$ a seguir, classifique-os em estáveis ou instáveis e faça a representação de seu retrato de fase.

a. $f(x) = x^3 - 4x$

Primeiramente, resolvemos a equação $f(x) = 0$, com o intuito de determinar os pontos fixos do sistema:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

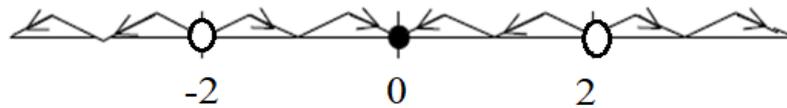
Portanto, -2 , 0 e 2 são os **pontos fixos** x_{PF} do sistema.

Desenvolvendo a derivada de $f(x)$, obtemos $f'(x) = 3x^2 - 4$. Calculando a derivada $f'(x_{PF})$ nos 3 pontos fixos encontrados, temos:

- $f'(-2) = 8 > 0$ e, portanto, -2 é ponto fixo **instável (repulsor)**;
- $f'(0) = -4 < 0$ e, portanto, 0 é ponto fixo **estável (atrator)**;
- $f'(2) = 8 > 0$ e, portanto, 2 é ponto fixo **instável (repulsor)**.

Fazendo a representação do retrato de fase do sistema, na Figura 51:

Figura 50: Retrato de fase do sistema dinâmico contínuo unidimensional $f(x) = x^3 - 4x$.



Fonte: Autoria própria

b. $f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$

Inicialmente devemos fazer $f(x) = 0$, visto que as raízes obtidas serão os pontos fixos x_{PF} do sistema.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Assim, temos que os pontos fixos x_{PF} do sistema $f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ são 0 e $\frac{1}{2}$.

Desenvolvendo a derivada de $f(x)$, obtemos $f'(x) = 2x - \frac{1}{2}$. Calculando a derivada $f'(x_{PF})$ nos 2 pontos fixos encontrados, temos:

- $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$ e, portanto, 0 é ponto fixo **estável (atrator)** e
- $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ e, portanto, $\frac{1}{2}$ é ponto fixo **instável (repulsor)**.

Fazendo a representação do retrato de fase do sistema, na Figura 52:

Figura 51: Retrato de fase do sistema dinâmico contínuo unidimensional $f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$.



Fonte: Autoria própria

Exemplo 4.1.2.2: Obtenha e classifique os pontos fixos do sistema dinâmico contínuo unidimensional $\dot{x} = (2 - x) \cdot \text{sen } x$;

A princípio, resolveremos a equação $f(x) = 0$, a fim de determinar os pontos fixos do sistema:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow (2 - x) \cdot \text{sen } x = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \text{ ou } \text{sen } x = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = n\pi, \text{ com } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto, 2 e $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, são os **pontos fixos** x_{PF} do sistema.

Desenvolvendo a derivada de $f(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 - x)' \cdot \text{sen } x + (2 - x) \cdot (\text{sen } x)' = -\text{sen } x + (2 - x) \cdot \cos x = \\ &= -\text{sen } x + 2 \cos x - x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Calculando a derivada $f'(x_{PF})$ nos pontos fixos encontrados, temos as seguintes situações:

- $f'(2) = -\text{sen } 2 + 2 \cdot \cos 2 - 2 \cdot \cos 2 = -\text{sen } 2 = -0,03489 < 0$ e, portanto, 2 é ponto fixo **estável (atrator)**;

Em relação ao ponto fixo e $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, temos os seguintes contextos:

- Se n for positivo e par ou n for negativo e ímpar, temos que $f'(n\pi) < 0$ e, portanto, o ponto fixo x_{PF} será **estável (atrator)**;
- Se n for zero ou negativo e par ou for positivo e ímpar, temos que $f'(n\pi) > 0$ e, portanto, o ponto fixo x_{PF} será **instável (repulsor)**.

Contudo, neste trabalho abordaremos apenas os sistemas dinâmicos contínuos unidimensionais e lineares, tendo em vista que sistemas que possuam dimensão maior que 1, bem como, os sistemas dinâmicos contínuos não lineares carregam consigo um grau maior de

complexidade e, portanto, são mais predispostos a assumir e vislumbrar um comportamento caótico. Porém, será que apenas os sistemas dinâmicos contínuos não lineares são capazes de expressar-se por meio do caos? Em busca de respostas, remetemos nossas investigações à conjuntura que permeia o processo das dinâmicas populacionais. No que diz respeito a este contexto, é importante enfatizar que inúmeros estudos e modelos foram desenvolvidos, dentre os quais se destacam o modelo de Malthus e o mapa logístico de Verhulst, que contribuíram com avanços significativos para a teoria dos sistemas dinâmicos e que serão retratados na próxima seção.

5.1.3 Modelos Populacionais

Na década de 1960, o ecologista matemático Robert May desenvolveu estudos pioneiros no que diz respeito às dinâmicas das populações. (BAIER, 2005). May procurou conduzir suas investigações de maneira distinta às que foram assumidas nas pesquisas populacionais que se fundamentam na concepção de mundo da ciência moderna. Segundo Lorenz (1996, p. 181); apud Baier (2005, p. 100), os pressupostos das dinâmicas populacionais outrora convencionados durante a edificação da ciência moderna era de que:

Se a população é muito pequena, ela se multiplicará livremente, produzindo uma população bem maior, mas ainda bastante pequena, no próximo ano. Se ela é muito grande, ela irá se reproduzir ainda mais, mas não haverá alimento suficiente para mantê-la viva, e novamente no próximo ano a população será pequena. Então, um ano com população maior deverá ser sucedido por um ano com uma população de tamanho médio. May achava que, para uma taxa adequada de multiplicação e morte por inanição, o tamanho da população flutuaria caoticamente.

Com o passar dos anos, os ecologistas apreenderam o comportamento inusitado e complexo proveniente dos dados coletados intrínsecos às disseminações de epidemias e à interação existente entre distintas espécies, o que os impulsionou na busca por modelos matemáticos capazes de descrever os fenômenos de eminente complexidade da vida. No entanto, essa pesquisa não teve êxito, visto que as únicas equações matemáticas disponíveis estavam ancoradas nas teorias clássicas da Física e se mostravam inadequadas e insuficientes para lidar com a profunda dificuldade inerente a esses processos.

Desse modo, os ecologistas tomam consciência das limitações impostas pelas equações matemáticas utilizados pelos físicos e passam a concentrar seus interesses por

modelos matemáticos que contemplem e vislumbrem comportamentos irregulares, já que, por sua vez, esses modelos fornecem ferramentas capazes de se correlacionar com as dinâmicas biológicas populacionais pesquisadas.

Assim, modelos gerais discretos que caracterizam a dinâmica de populações passam a ser desenvolvidos e sua análise se dá em função das condições ambientais do local, bem como, da quantidade de alimentos e insumos disponíveis, e da possibilidade de existência de predadores. Esses modelos podem ser formulados e representados por meio de equações da forma $x_{n+1} = f(x_n)$, visto que a população de um certo ano n e a do ano imediatamente subsequente, $n + 1$ podem se correlacionar por meio de uma lei ou função matemática, ou seja, há uma dependência entre as populações x_{n+1} e x_n .

5.1.3.1 Modelo de Malthus

Segundo Jesus (2016), no ano de 1978, Thomas Malthus propôs um simples modelo de crescimento populacional, partindo do pressuposto de que a população de determinado país cresce de maneira mais ágil que sua produção de alimentos. Além disso, Malthus considerava que uma população cresce em determinado instante t , de maneira proporcional à população total nesse mesmo instante. Assim sendo, o modelo proposto por Malthus pode ser representado pela seguinte equação matemática:

$$x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Nessa equação, x_{n+1} pode representar tanto o número de indivíduos da população no ano $n + 1$, tal qual a massa biológica da população em questão e α caracteriza a taxa de crescimento ou decréscimo da população. Vale ressaltar que o modelo de Malthus não considera o caráter finito do ambiente, ou seja, desconsidera fatores extremamente importantes na dinâmica que permeia o desenvolvimento de uma população, tais quais: a interação entre as diferentes espécies; a disputa por território ou alimentos; dentre outros.

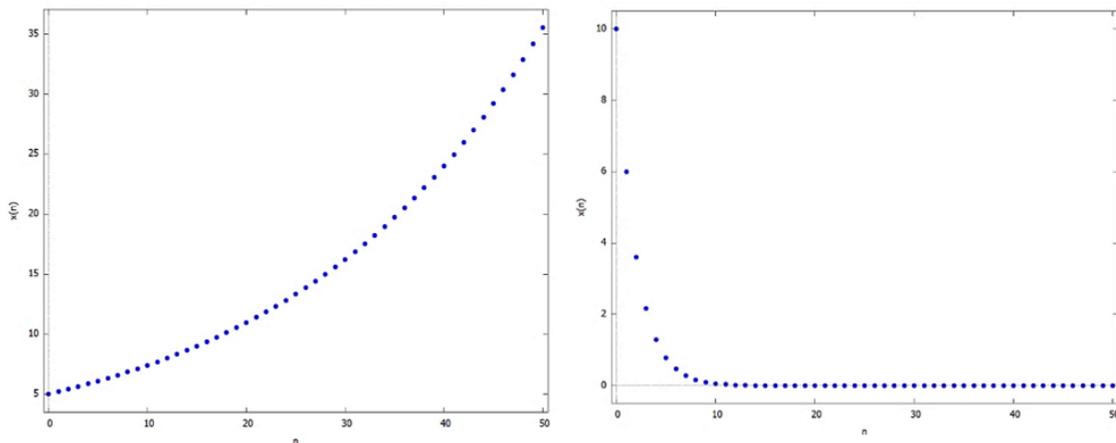
Desse modo, o modelo proposto por Malthus é utilizado para descrever a dinâmica que desponta em uma população apenas em um breve intervalo de tempo, já que, a longo prazo, os resultados obtidos têm grande chance de não coincidirem com a realidade.

Direcionando novamente a nossa atenção à equação $x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n$ e à taxa α , temos:

- Se $\alpha > 0$, a população x_{n+1} resultará da multiplicação entre a população x_n e um número maior que 1, o que nos leva a inferir que a população tenderá a crescer sem oscilações, e, portanto, com o passar dos anos, a região considerada será totalmente povoada;
- Se $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow 0 < 1 + \alpha < 1$ e, logo, a população x_{n+1} resultará da multiplicação entre a população x_n e um número menor que 1, o que acarreta um decrescimento gradual da população e que por sua vez, culminará em sua total extinção;
- Note que devemos ter sempre $\alpha > -1$, pois caso $\alpha = -1$, teremos $1 + \alpha = 0$ e a população irá estabilizar-se, o que é improvável ocorrer na natureza de uma dinâmica populacional; e se $\alpha < -1 \Rightarrow 1 + \alpha < 0$ e, desse modo, os valores obtidos para a população x_{n+1} seriam negativos.

Exemplo 4.3.1: Mapas de crescimento populacional de acordo com o modelo Malthusiano (ver Figura 53).

Figura 53: Evolução dos modelos malthusianos $x_{n+1} = 1,04x_n$, com $x_0 = 5$ e $x_{n+1} = 0,6x_n$, com $x_0 = 10$, respectivamente.



Fonte: Autoria própria - software Maxima.

5.1.3.2 Modelo de Verhulst

Na segunda metade do século XIX, Pierre François Verhulst (1804 – 1849), reavaliou os modelos populacionais eminentes e constatou a existência e a incidência de fatores responsáveis em coibir o processo de crescimento e desenvolvimento de uma população. (BAIER, 2005). Verhulst, dessa forma, sugeriu que a taxa de crescimento populacional não é constante, mas, sim, proporcional à quantidade máxima de indivíduos que uma população pode

atingir, levando em consideração o ambiente na qual se encontra inserida. Esse modelo ficou renomado como modelo logístico discreto e é expresso por meio da função $x_{n+1} = f(x_n) = kx_n(1 - x_n)$, onde k é uma constante positiva que varia de acordo com as condições do meio em que a população se situa.

Além disso, devemos sempre ter $k > 0$ e $0 < x_n < 1$, caso contrário, a população assumiria valores negativos. Neste modelo, faz-se necessário a compreensão do valor de x_{n+1} como a biomassa populacional, visto que os valores obtidos serão decimais entre 0 e 1 e é pouco provável que a população assuma os valores 0 ou 1, já que a população 0 representa a extinção da população e 1 representa a população máxima suportada pela região investigada. É importante analisar que, à medida que o valor de x_n diminui e se aproxima de 0, o fator $(1 - x_n)$ fica mais próximo de 1, o que possibilita o crescimento da população e, em contrapartida, quando o valor de x_n aumenta, aproximando-se de 1, o fator $(1 - x_n)$ diminui, colaborando com a desaceleração da dinâmica de crescimento. Isto pode ser explicado mediante à disputa dos indivíduos da população na busca por recursos e na detenção e ampliação de territórios.

Segundo Baier (2005), na década de 1960, Robert May investiga o modelo logístico discreto de Verhulst e percebe que ele apresenta sensibilidade às condições iniciais, também conhecida como efeito borboleta – característica principal dos fenômenos caóticos. A fim de desvelar como o caos se desdobra no mapa logístico, utilizamos o processo de iteração, com o intuito de analisar qual o comportamento de uma população que apresenta variações no decorrer dos anos. Ademais, sabe-se que, no modelo logístico discreto, conhecendo-se o parâmetro k e a população x_n em certo ano, pode-se calcular a população x_{n+1} nos anos seguintes, iterando-se sucessivamente a função.

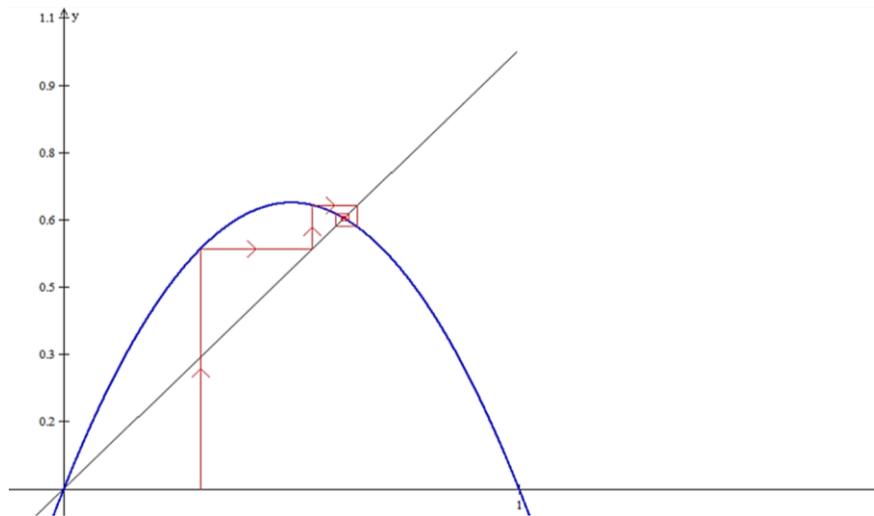
A complexidade do mapa logístico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ reside na atribuição de distintos valores para a constante k , que varia de acordo com as condições do ambiente considerado. Desse modo, aumentando gradualmente os valores da constante k e realizando as iterações sucessivas de $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ com o auxílio de ferramentas computacionais, somos capazes de detectar e verificar padrões complexos e inusitados inerentes ao mapa logístico discreto. Logo, se $0 < k < 1$, observa-se que todas as órbitas convergem para 0, isto é, a população tende a ser totalmente extinta. Por outro lado, se aumentarmos o valor do parâmetro k , como a população passa a ter melhores condições para se desenvolver,

percebe-se que as sucessivas iterações convergem para um estado de equilíbrio. Considerando $x_0 = 0,3$ e $k = 2,6$; teremos após dez iterações (ver Figura 53):

$$x_0 = 0,3; x_1 = 0,546; x_2 = 0,644; x_3 = 0,595; x_4 = 0,626; x_5 = 0,606;$$

$$x_6 = 0,619; x_7 = 0,612; x_8 = 0,616; x_9 = 0,614; x_{10} = 0,615.$$

Figura 52: Diagrama de teia de aranha do mapa logístico $x_{n+1} = 2,6 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,3$.

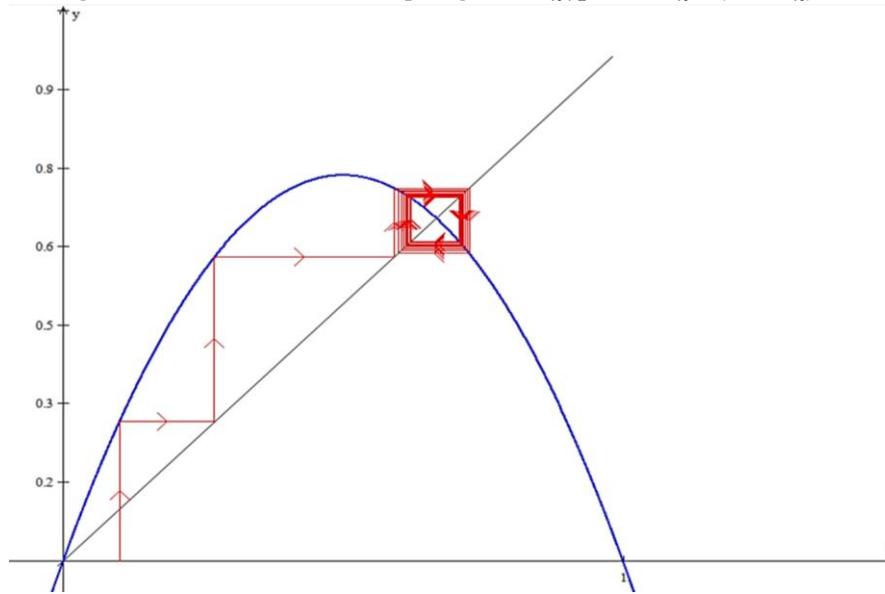


Fonte: Autoria própria – software Winplot.

Analisando a representação do diagrama, verificamos que a teia de aranha percorre a trajetória das órbitas até o momento no qual começa a espiralar na direção do ponto onde a reta diagonal $y = x$ coincide com a parábola, ou seja, “esse é o ponto fixo; e o resultado é estabilidade porque a teia espirala para dentro”. (STEWART, 1991, p. 172; apud BAIER, 2005, p. 108).

Ao adotarmos $k < 3$, as sucessivas iterações convergem para um ponto de equilíbrio, ou seja, a população tende a se estabilizar após determinado tempo. Quando $k = 3$ (ver Figura 54), “o ponto fixo é marginalmente estável: a convergência para ele é extremamente lenta. Isto é sinal de que estamos no limiar de algo dramático. De fato, para $k > 3$, o ponto fixo se torna instável.” (STEWART, 1991, p. 172, apud BAIER, 2005, p. 108).

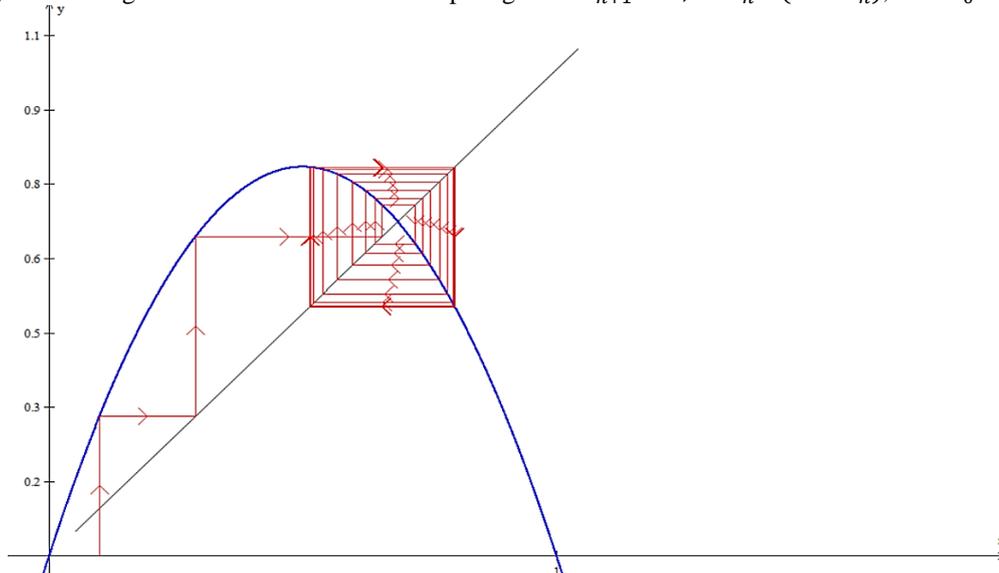
Figura 53: Diagrama de teia de aranha do mapa logístico $x_{n+1} = 3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,1$.



Fonte: Autoria própria – *software* Winplot.

Ao atribuímos o valor 3,2 para k , uma mudança inesperada ocorre, conduzindo-nos a uma transição: de um estado no qual havia um único ponto de equilíbrio a um estado no qual há dois pontos de equilíbrio, isto é, a população oscila entre dois valores que se repetem sucessivamente, voltando à mesma situação a cada dois anos (ver Figura 55). A essa duplicação de período, denominamos bifurcação.

Figura 54: Diagrama de teia de aranha do mapa logístico $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,1$.



Fonte: Autoria própria – *software* Winplot.

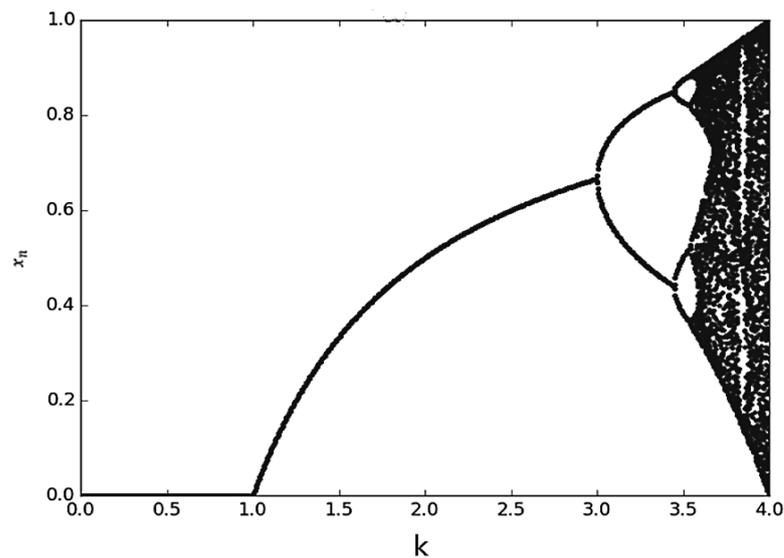
Uma nova alteração sucede quando atribuímos à constante k o valor de 3,45. Essa mudança se caracteriza não mais pela oscilação entre dois estados de equilíbrio, mas sim,

quatro, ou seja, o número de sujeitos da população se repete no período de quatro em quatro anos. Para mais além, novas duplicações tendem a surgir com o aumento progressivo dos valores atribuídos a k , gerando uma cascata de bifurcações. Segundo Stewart (1991, p. 176), apud Baier (2005, p. 109): “Uma bifurcação é qualquer mudança qualitativa do atrator de um sistema dinâmico; o mapeamento logístico está simplesmente repleto de bifurcações [...]”.

Com o advento e a utilização de recursos computacionais mais avançados, é possível constatar que a partir do momento que o parâmetro k assume um valor maior que 3,5699456... o mapa logístico discreto revela um comportamento extremamente complexo, intercalando regiões periódicas e regiões nas quais o caos se faz notório e presente. Em meio as regiões caóticas, podem ser vislumbradas partes mais claras – essas que representam os estados de periodicidade descobertos e envoltos no caos proeminente. Com a intenção de propiciar uma visualização mais abrangente e privilegiada, as órbitas obtidas de acordo com a variação da constante k podem ser expressas por meio de um diagrama.

No diagrama da Figura 56, os valores atribuídos ao parâmetro k localizam-se no eixo horizontal e o número de indivíduos x_n da população considerada se situam no eixo vertical.

Figura 55: Mapa logístico com valores de k variando de 0 a 4.



Fonte: arodadavida.wordpress.com

Analisando o mapa logístico, verificamos que quando o valor de k é muito pequeno, a população tende a se extinguir. A partir do momento que a constante k assume valores entre 1 e 3, o número de sujeitos da população tende a crescer e estabilizar-se em um ponto. Conforme visto anteriormente, quando o valor de k ultrapassa 3,5699456..., há uma bifurcação, isto é, o segmento se divide em dois e apresenta um formato curvilíneo que se assemelha a um garfo

com dois dentes. Essa bifurcação representa a oscilação que ocorre na população a cada dois anos. É possível observar que aumentando paulatinamente o valor do parâmetro k , o surgimento de períodos de oscilação tende a duplicar, ou seja, a órbita de período dois que representava a oscilação do número de sujeitos da população passa por outra bifurcação, gerando assim, períodos nos quais o número de habitantes da região considerada alterna de quatro em quatro anos, de oito em oito, e assim, ininterruptamente.

Encaminhando nossa atenção ao lado direito do mapa logístico, verificamos que as bifurcações são descontinuadas abruptamente por regiões mais obscuras. Essas descontinuidades aguçam a nossa compreensão e percepção no que diz respeito às transformações aleatórias pelas quais a população investigada está sendo submetida no momento. Observe, ainda do lado direito do diagrama, que o caos se faz soberano no sistema e o número de indivíduos da população passa a refletir infinitos valores distintos, alternando entre períodos de ordem e, portanto, determinísticos, e períodos caóticos, de maneira sucessiva. Segundo Stewart (1991, p. 28); apud Baier (2005, p. 111), a civilização ocidental:

chegou a conceber o universo como uma engrenagem dotada da precisão de um relógio e a embarcar na ilusão de que equações determinísticas sempre conduzem a comportamentos regulares [...]. Os matemáticos estão começando a ver a ordem e o caos como duas manifestações distintas de um determinismo subjacente.

Não obstante, embora o modelo logístico discreto se expresse de modo profundamente complexo e caótico, em contrapartida, ostenta intercaladamente períodos de regularidade e ordem. Além disso, retomando as características dos fractais, podemos inferir que o mapa logístico possui estruturas autossimilares, visto que elas se reiteram em escalas cada vez menores e em camadas cada vez mais finas. Outro fator inerente ao mapa logístico é a existência de um atrator estranho, pois, “atratores estranhos encontrados em sistemas dinâmicos contínuos apresentam estrutura tipo Cantor, autossimilaridade e dimensão fractal.” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 89).

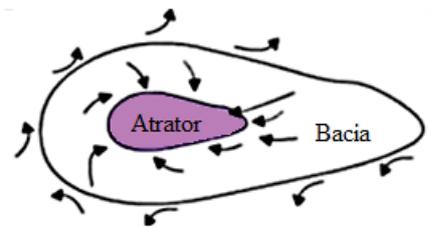
Seguidamente, discorreremos sobre os atratores, bem como sobre suas classificações, a saber: atrator de ponto fixo e atrator estranho; tal qual abordaremos alguns atratores clássicos e qual a correlação dos atratores estranhos com os sistemas dinâmicos, as estruturas que denominamos fractais e com a Teoria do Caos.

5.1.4 Atrator de um sistema dinâmico

O atrator de um sistema dinâmico pode ser definido como um ponto ou uma região na qual as trajetórias vizinhas do sistema tendem a convergir após determinado tempo (caso seja um sistema contínuo) ou após algumas iterações (se for um sistema dinâmico discreto). O período que antecede o surgimento do atrator é denominado ‘transiente’. De maneira sucinta, o atrator é um conjunto fechado e possui as seguintes propriedades (ver Figura 57):

1. É invariante diante da dinâmica do sistema, ou seja, qualquer trajetória que comece no atrator permanecerá nele indefinidamente;
2. Atrai a si um conjunto aberto de condições iniciais que estão suficientemente próximas a ele. Ao maior conjunto que se caracteriza por essas atribuições, denominamos **bacia de atração**;
3. Nenhum subconjunto do atrator pode satisfazer as propriedades anteriores, isto é, o atrator é mínimo.

Figura 56: Atrator de um sistema dinâmico.



Fonte: MOOC

Além disso, segundo Stewart (1991), apud Moura (2011, p. 45) a dimensão fractal – retratada anteriormente no Capítulo 4 – “vem a ser uma propriedade-chave do atrator, governando várias características quantitativas da dinâmica.” (p. 239). Os atratores de um sistema podem ser classificados em dois tipos principais: **ponto fixo** e **estranho**.

Por sua vez, o **atrator ponto fixo** já teve seu conceito explorado durante este capítulo e se trata de um ponto de estabilidade do sistema. Desse modo, ao considerarmos pontos iniciais em sua proximidade, as trajetórias percorridas por eles tendem a direcionar-se ao ponto fixo. Foram apresentados no decorrer do desenvolvimento deste capítulo uma gama de exemplos que contemplam esse tipo de atrator.

Já o **atrator estranho** corresponde a um atrator que exibe uma dependência extrema às condições iniciais. Em outras palavras, trajetórias que se iniciam nesses atratores não possuem regularidade e, portanto, separam-se exponencialmente, desvelando um comportamento caótico. Esses atratores foram nomeados a princípio de estranhos, pois apresentavam **estrutura fractal**. Segundo Baier (2005, p. 92):

Um atrator que evolui por um processo de alongamentos e dobras é chamado de *atrator estranho*, denominação introduzida por Ruelle e Takens. É também denominado *atrator caótico* ou *atrator fractal*. “Muitos livros de *Mecânica* se referem aos sistemas dinâmicos cujos atratores são pontos, aproximações de círculos ou outras formas de Euclides. Mas eles são raras exceções, e o comportamento da maioria dos sistemas dinâmicos é incomparavelmente mais complexo: seus atratores ou repulsores tendem a ser fractais.

Por conseguinte, concluímos que, embora os atratores estranhos se apresentem como emissores do caos, também são responsáveis por dar à luz às estruturas que designamos por fractais. A origem desses fractais está alicerçada nos sistemas dinâmicos não lineares, que apresentam um comportamento complexo e caótico. Cabe ressaltar, porém, que grande parte dos fractais não possui correlação alguma com o caos.

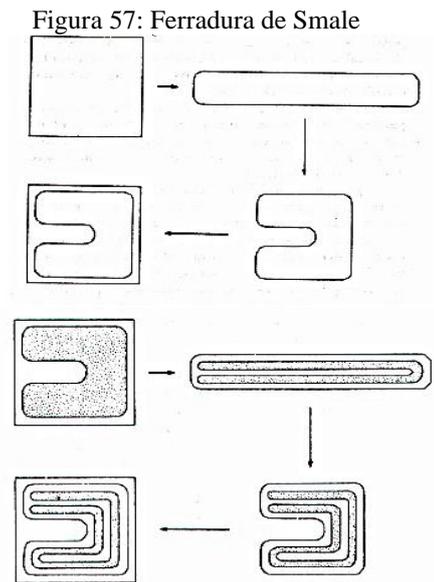
O nexos estabelecido entre o comportamento caótico e a **propriedade autossimilaridade exibida pelos atratores fractais** possibilitou o vínculo entre a Teoria do Caos e a Geometria Fractal, visto que essas duas áreas foram desenvolvidas de maneira independente e de que só adiante percebeu-se que:

[...] os atratores estranhos são exemplos extraordinários de fractais. Se partes da sua estrutura são ampliadas, elas revelam uma subestrutura em muitas camadas nas quais os mesmos padrões são repetidos muitas e muitas vezes. Por isso, tornou-se comum definir atratores estranhos como trajetórias no espaço de fase que exibem geometria fractal. (CAPRA, 2006, p.119; apud MOURA, 2011, p. 46).

Com o intuito de explorar e aprimorar o conceito de atrator estranho, apresentaremos alguns exemplos. Iniciaremos pela ferradura de Smale, desenvolvida pelo topólogo Stephen Smale que retomou no início da década de 1960 as teorias qualitativas das equações diferenciais – criadas posteriormente por Poincaré. (BAIER, 2005). Smale assume uma nova interpelação, denominando o que antes era reputado por sistemas de equações diferenciais por sistemas dinâmicos. Além disso, Smale procurava ponderar os sistemas dinâmicos de um ponto de vista geométrico, baseando-se na Topologia e no retrato de fase, rejeitando, desse modo, a utilização de fórmulas pelas quais eles pudessem se estabelecer.

A construção da ferradura de Smale se inicia com um quadrado que é alargado até se transformar em um retângulo. Feito isto, o retângulo é dobrado, de modo a assumir o formato

de uma ferradura (letra U) e inserido dentro do quadrado inicial. Na próxima etapa, estica-se novamente o quadrado – agora contendo a ferradura em seu interior – até que se transforme em um retângulo novamente e voltamos a reintroduzi-lo no quadrado inicial. Ao final dessa etapa, a ferradura terá dado 3 voltas completas na forma de um U. Desse modo, o processo iterativo alargar/dobrar se estende indefinidamente, ao passo que ao término de cada iteração o número de voltas obtidas sempre será o dobro da etapa anterior acrescida de uma e no limite, lograremos uma curva que lembra o formato de uma serpente (ver Figura 58).



Fonte: BAIER (2005)

Observando a imagem da Figura 58, podemos remeter o nosso pensamento a um padeiro em meio ao seu processo de fabricação. Suponha que esse padeiro esteja modelando uma massa, de tal modo que, a comprime (diminuindo o seu volume), a estica e a comprime novamente, dobrando-a no formato de uma ferradura. Tendo isto feito, o padeiro a coloca no quadrado inicial. Levando em consideração o processo iterativo que permeia a construção da ferradura, bem como as imagens que a retratam, Ekeland (1993, p. 90); apud Baier (2005, p. 98), constata que:

Elas estão contidas nas outras e que, por sua vez, se desdobram. Na intersecção de todas as intersecções (é aí que a nossa intuição nos abandona) esconde-se um objeto estranho, composto por uma infinidade de bandas, mas conexo, comum a todas as metamorfoses da ferradura: é o atrator estranho. Ele escapa à nossa geometria intuitiva, construída a partir da nossa experiência corrente, mas existe: para o pôr em evidência basta seguir a trajetória dum ponto qualquer do quadrado. Vê-se desenhar um objeto híbrido, que não é curva nem superfície: trata-se do atrator estranho.

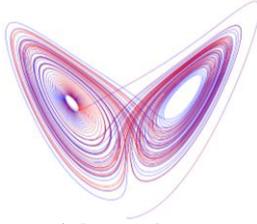
Outro atrator estranho reconhecido é o atrator de Edward N. Lorenz que, na década de 1960, investigou equações matemáticas capazes de modelar o clima atmosférico. (BAIER, 2005). Sua investigação consistia em simular as condições atmosféricas e com base nelas, realizar previsões meteorológicas precisas e apropriadas. Lorenz procura fundamentar a sua compreensão no determinismo contemplado pelas leis físicas newtonianas tradicionais e pressupõe que obtidas as equações que comandam o clima atmosférico, seria possível, então, prever o tempo com exatidão. Além disso, os meteorologistas da época tinham a convicção de que o clima atmosférico poderia ser modelado matematicamente e esses modelos, por sua vez, acarretaria previsões acertadas. Em 1961, durante o inverno, Lorenz simula por intermédio de seu computador e, mediante as equações encontradas, o clima atmosférico. (BAIER, 2005).

Dessa forma, durante o processo de uma simulação, Lorenz decide não reiniciar o seu computador e insere números a partir da impressão anterior. Prevalecia no meio científico, a ideia de que pequenas alterações exerciam influências mínimas e que, portanto, poderiam ser desconsideradas. Com base nessa concepção, Lorenz digita 0,506 ao invés de 0,506127 e ao verificar a nova sequência, constata uma ligeira divergência em relação à simulação obtida anteriormente. Lorenz depreende, então, que embora o seu modelo esteja fundamentado em equações determinísticas, ele possui a capacidade de gerar a imprevisibilidade. Este fenômeno passa a integrar uma das principais características da denominada Teoria do Caos, que no meio científico é conhecida como sensibilidade às condições iniciais e é popularmente reputada como efeito borboleta. Acerca disso, Lorenz (1996, p. 28), apud Baier (2005, p. 94), discorre:

A expressão tem uma história meio obscura. Parece ter surgido logo após a publicação de um artigo que apresentei em um encontro na cidade de Washington, em 1972, intitulado *O bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?* [...] O que tornou a origem da frase um pouco incerta foi a peculiaridade do primeiro sistema caótico que estudei de forma detalhada. Subsequentemente, descobriu-se que uma representação gráfica resumida de uma coleção especial de estados conhecida como um *atrator estranho*, assemelhava-se a uma borboleta.

O atrator de Lorenz (ver Figura 59) é expresso por três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, dadas por:

Figura 58: O atrator de Lorenz



Fonte: qparticle.wordpress.com

$$\begin{aligned}\dot{X} &= 10(-X + Y) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - \frac{8Z}{3}\end{aligned}$$

Contudo, devido a essas equações demonstrarem sensibilidade às condições iniciais, é estabelecido como obstáculo à obtenção de uma previsão meteorológica que seja precisa a longo prazo. Isto ocorre, pois alterações mínimas nas condições iniciais repercutem e acabam por criar inúmeros cenários, outrora, imprevistos.

Em relação à dimensão fractal do Atrator de Lorenz, segue que:

[...] não é exatamente uma superfície, mas também não constitui um volume. De fato, as folhas não têm extensão transversal e são separadas por espaço vazio. A dimensão fractal desse atrator é 2,06, ou seja, ela é bastante próxima daquela de uma superfície, mas ligeiramente superior. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 107; apud BAIER, 2005, p. 117).

Para mais além, podemos citar também um atrator estranho que é um mapa bidimensional: o mapa de Hénon. O mapa de Hénon é um dos mais investigados no que se refere a teoria dos sistemas dinâmicos, pois, embora seja descrito por meio de equações simples, possui uma dinâmica extremamente interessante. Esse mapa é definido pelo seguinte conjunto de equações:

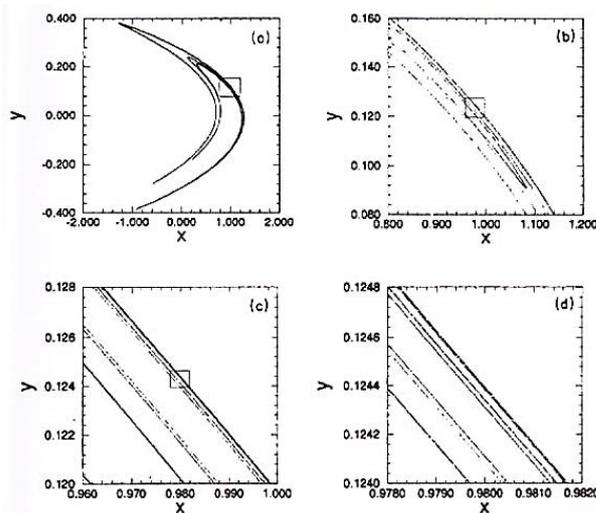
$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

Neste sistema, temos que a representa o parâmetro de não-linearidade e b , o parâmetro de dissipação. Já x_{n+1} e y_{n+1} são as variáveis dinâmicas e o tempo considerado é discreto, visto que estamos retratando um sistema dinâmico discreto. Ao atribuímos valores para os parâmetros a e b , inferimos que o mapa de Hénon pode evidenciar inúmeros cenários, dentre os quais: a convergência para uma órbita periódica, apresentar comportamento caótico ou até mesmo divergir. Sendo assim, dizemos que o mapa de Hénon é caótico, uma vez que, também apresenta sensibilidade às condições iniciais e conforme mencionamos anteriormente, a sensibilidade às condições iniciais é um dos principais atributos dos sistemas caóticos. Podemos dizer que esse atributo é a “marca registrada” do caos. Michel Hénon, em seus estudos, atribuiu

os seguintes valores para os parâmetros: $a = 1,4$ e $b = 0,3$; tendo assim descoberto um comportamento predominantemente caótico.

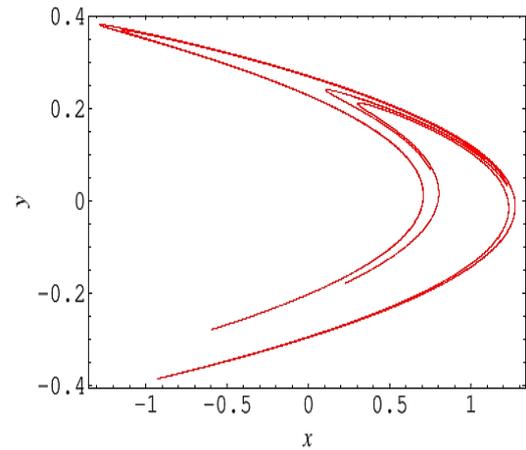
No que se refere às Figuras 60 e 61 e à dimensão fractal do mapa de Hénon, observa-se “uma sequência de ampliações mostrando as camadas fractais típicas a atratores estranhos. A dimensão fractal associada é 1,265, sendo evidente o seu caráter autossimilar. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 93; apud BAIER, 2005, p. 117).

Figura 59: O atrator de Hénon.



Fonte: Stewart (1991) - Retirado de Baier, 2005.

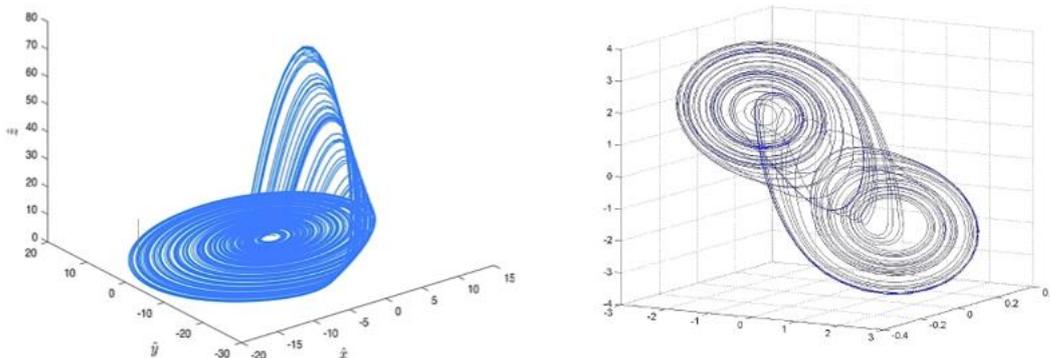
Figura 60: Atrator de Hénon.



Fonte: mathworld.wolfram.com

A título de curiosidade e com a intenção de aguçar o interesse dos leitores e pesquisadores, fazemos questão de mencionar mais dois atratores estranhos, bem como apresentar suas representações gráficas na Figura 62, sem, no entanto, adentrar e aprofundar os conhecimentos relativos a eles.

Figura 61: Atrator de Rössler e atrator double scroll, respectivamente, representados no espaço de fase.



Fonte: www.researchgate.net; www.chuacircuits.com.

No decorrer desta seção, averiguamos que os atratores estranhos possuem estruturas fractais e que, para mais além, são tidos como vislumbres do caos. Foi este vislumbre que possibilitou correlacionar os fractais à Teoria do Caos, embora elas tenham se desenvolvido de maneira isolada. Por fim, inferimos que o caos tem uma característica significativa: ele se expressa mediante a sensibilidade às condições iniciais auferidas a um sistema. Portanto, na última seção deste capítulo nosso enfoque será a Teoria do Caos, tal qual, seu contexto histórico, filosófico e matemático. Por fim, abordaremos o Jogo do Caos como mecanismo que possibilita a articulação entre a Teoria do Caos e os fractais.

5.2 A TEORIA DO CAOS

A primeira interação entre mundo e caos, de que se tem conhecimento, pode ser encontrada na literatura ocidental, mais precisamente, no início da Teogonia. A Teogonia é uma clássica obra literária grega cujo objetivo é narrar, por meio do poeta Hesíodo, os fundamentos da origem do Universo e dos deuses.

Em Hesíodo, lemos que no princípio era o caos. Caos, em grego, no sentido próprio e primordial, significa vazio, nada. É do vazio mais total que o mundo emerge. Mas, já em Hesíodo, também o universo é caos, no sentido de que não é perfeitamente ordenado, de que não se submete a leis plenas de sentido. No princípio, reinava a desordem mais total, depois, foi criada a ordem, o cosmos. Contudo, nas ‘raízes’ do universo, para além da paisagem familiar, o caos continua a reinar soberano. (CASTORIADIS, 1987. p.291/92, apud PERRUSI, 1998, p. 35).

Assim, a palavra caos – do grego *kháos*, tem sua origem no verbo grego “*kháínein*” que significa estar aberto ou o entreabrir-se de algo. Essa abertura pode representar um hiato ou um abismo e imperscrutável, bem como, caracterizar o abrir da boca ao bocejar ou o vislumbrar da aurora entre céu e terra. Por conseguinte, esse entreabrir-se caótico convida-nos inocentemente a arquitetar cenários – estes que se apresentam como fonte inesgotável de possibilidades. Ademais, o caos pode ser compreendido como o vazio primordial ou aquele que antecede à criação de tudo o que há no Universo. Segundo o dicionário Michaelis, o caos é considerado um estado no qual predominam a desordem, o desequilíbrio e a confusão total. Não obstante, se o caos é visto como desordem, logo ele precede o cosmos (a ordem) e desse modo,

torna-se evidente que o mundo não existiria sem a atuação de ambos, visto que da desordem, emerge a ordem e em meio ao cosmos, podemos nos deparar também com o caos. Segundo Carneiro Leão (1994, p.8); apud Perrusi (1998, p. 36):

[...] o caos não só não é uma coisa. O caos é sobretudo o princípio da possibilidade de tudo. Trata-se de uma experiência de ser e de realidade tão rica e inaugural que dela se origina tudo, que é e não é, nela se nutre toda criação em qualquer área ou nível, seja do real ou irreal, seja do necessário ou contingente.

No entanto, mesmo que a interdependência existente entre caos e cosmos seja evidente, os referenciais históricos sempre buscaram conceber o caos como algo nocivo e negativo, visto que a desordem e a confusão, aparentemente expressas por ele, se desvelam em oposição direta à ordem e à harmonia. Esse ponto de vista se instaurou de tal modo, que os cientistas, físicos e matemáticos da época carregavam consigo a crença de que todos os fenômenos expressos pela natureza eram lineares e, portanto, regidos por sistemas de equações determinísticas que possibilitam antever e analisar de maneira precisa o Universo que nos circunscreve. Assim, o ser humano mascara a inexistência do caos inequívoco e procura incansavelmente auferir ordem aos acontecimentos que escapam de seu controle e à sua compreensão. Segundo Perrusi (1998, p. 37): “O mundo é sem sentido, e o ser humano, não conseguindo se deparar com o caos, sente uma necessidade de determiná-lo. [...] a humanidade só sobrevive enquanto humanidade num mundo em que haja sentido.”

Esse extenso cenário de significações aparenta descortinar-se com o desenvolvimento das equações diferenciais. Essas equações tinham o compromisso de suprir os anseios e as necessidades de toda comunidade científica, ou seja, tinham por objetivo: modelar matematicamente, prever e determinar a complexidade dos fenômenos naturais inerentes à subsistência humana. Em meio a esse contexto determinístico privilegiado pela física newtoniana clássica, são dados os primeiros passos rumo à Teoria do Caos. Esses avanços ocorrem devido a Henri Poincaré, que ao dedicar-se à resolução do Problema dos Três Corpos, constatou que as equações diferenciais consideradas não apresentavam solução analítica, ou seja, elas não eram “integráveis”. Poincaré propôs, porém, uma solução geométrica para a questão – solução essa, pautada em uma análise qualitativa topológica – e semeou a concepção de que sistemas governados por equações determinísticas também podem dar à luz à imprevisibilidade.

Como outros antes, ele fracassou na solução das equações, mas, diferentemente de seus antecessores, ele resolveu o problema em um sentido bem real: provou que as equações não tinham solução. Na realidade as equações possuem uma solução geral, mas não uma solução que nos seja possível achar. (LORENZ, 1996, p. 146; apud BAIER, 2005, p. 86).

Empregando sua metodologia qualitativa topológica, Poincaré logrou identificar a forma geral das trajetórias percorridas pelos três corpos investigados: “O que Poincaré representou em sua mente é hoje denominado de atrator estranho.” (CAPRA, 1998, p. 110; apud BAIER, 2005, p. 88). No final do século XIX, duas áreas da matemática se designavam como alicerces das edificações tocantes às teorias científicas – a saber: a Análise Matemática e Estatística. (BAIER, 2005). As equações diferenciais da Análise Matemática eram utilizadas para descrever modelos simples e deterministas, à medida que a Análise Estatística era adotada para análise de sistemas complexos. Nesta época, instaurou-se na esfera da ciência a convicção de que um sistema dinâmico pode ser classificado unicamente como determinista ou randômico; enaltecendo, dessa maneira, a compreensão de que simplicidade e complexidade não podem coexistir: “Uma lei para o ordenado, outra para o desordenado [...] Duas maneiras de ver o mundo [...] Pode um sistema determinístico simples comportar-se como um sistema randômico? É uma pergunta que contraria o senso comum” (STEWART, 1991, p. 63; apud BAIER, 2005, p. 89).

Entretanto, Poincaré verificou em suas pesquisas, que sistemas regidos por leis deterministas podem não se comportar de maneira constante e previsível, ou seja, ao analisá-los, não existe a possibilidade de obter uma prognose rigorosa e irrestrita. Essas descobertas impactaram a concepção de mundo fundamentalmente determinista, motivando os cientistas e pesquisadores da área a refletirem cuidadosamente antes de caracterizarem um sistema como determinístico. Além disso, Poincaré descreveu também a manifestação, do que mais adiante, Lorenz viria a intitular como sensibilidade às condições iniciais. Em seu trabalho, intitulado *Science et Méthode* (1908), Poincaré discorre que:

Uma causa muito pequena, que nos passa despercebida, determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver, e então dizemos que o efeito é devido ao acaso. Se conhecêssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente a situação desse mesmo universo no momento seguinte. Contudo, mesmo que as leis naturais já não tivessem segredos para nós, ainda assim poderíamos conhecer a situação aproximadamente. Se isso nos

permitisse prever a situação seguinte com a mesma aproximação, seria tudo o que precisaríamos, e diríamos que o fenômeno tinha sido previsto, que é governado por leis. Mas nem sempre é assim; pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes nos fenômenos finais. Um pequeno erro nas primeiras produzirá um erro enorme nas últimas. A previsão torna-se impossível. (POINCARÉ, 1908; apud FERRARI, 2008, p. 41).

As ideias inovadoras e precursoras de Poincaré passam a ser seguidas e estudadas por alguns pesquisadores, tendo como objetivo, desenvolver novas ferramentas e conceitos matemáticos aplicáveis ao campo dos sistemas dinâmicos. Entretanto, o agente do caos plantado e germinado por Poincaré desabrochou apenas anos mais tarde, já que a ausência dos computadores e a resistência da comunidade científica aos fenômenos irregulares inviabilizaram o progresso e o aperfeiçoamento de suas investigações.

No início da década de 1960, tendo em vista as desordens proeminentes das turbulências marítimas e das variações ocorridas no âmbito das dinâmicas populacionais, a comunidade científica compreende a extrema necessidade e urgência do estudo dos sistemas não-lineares. Na natureza, grande parte dos fenômenos manifestos são não-lineares, isto é, fenômenos nos quais a relação causa e efeito não ocorre proporcionalmente, bem como, se apresentam de maneira irregular e imprevisível a longo prazo. Esses fenômenos irregulares do Universo podem ser descritos por sistemas de equações não-lineares, contudo, semelhantemente ao inferido por Poincaré, esses sistemas não possuem solução analítica, tornando-se indispensável a adoção de uma abordagem topológica qualitativa. Essa abordagem utilizada por Poincaré é adequada tanto para a análise de sistemas lineares, quanto não-lineares, embora, sua eficácia e potencialidade sejam comprovadas unicamente no estudo dos sistemas não-lineares. Verificar qualitativamente essas equações, equivale a realizar um estudo geométrico de identificação de suas principais características, independentemente dessas equações possuírem ou não, solução analítica. Com o advento dos computadores, novos recursos são descobertos e empregados, possibilitando a inferência e a resolução desses sistemas de equações, no entanto,

As soluções são de um tipo muito diferente. O resultado não é uma fórmula, mas uma grande coleção de valores para as variáveis que satisfazem a equação, e o computador pode ser programado para desenhar a solução como uma curva, ou um conjunto de curvas, num gráfico. Essa técnica permitiu aos cientistas resolver as complexas equações não-lineares associadas aos fenômenos caóticos e descobrir a ordem sob o caos aparente. Para revelar esses padrões ordenados, as variáveis de um sistema

complexo são exibidas num espaço matemático abstrato denominado *espaço de fase*. Essa é uma técnica bem conhecida, que foi desenvolvida na termodinâmica, na virada do século. (CAPRA, 1998, p. 111; apud BAIER, 2005, p. 90-91).

Desde então, este conjunto de técnicas ganhou notoriedade e passou a integrar uma etapa substancial no processo de investigação dos sistemas dinâmicos expressos por equações não-lineares. Assim, ao ilustrar as trajetórias percorridas pelas soluções no espaço de fase, torna-se factível depreender o fluxo da dinâmica atuante no sistema, bem como, contemplar suas principais particularidades. Não obstante, embora a representação gráfica dessas soluções desvele, a princípio, o comportamento caótico intrínseco a esses sistemas, ao final, o que se nos apresenta é um ornamento de magistral beleza e detentora de estruturas autossimilares fascinantes, que são responsáveis por nos despertar uma sensação de ordem - ordem que emerge das profundezas do caos até então instaurado. Além disso, à medida que as trajetórias se deslocam no espaço de fase, a convergência para determinado ponto faz-se cada vez mais evidente, nos permitindo caracterizá-los como um atrator estranho do sistema considerado.

Segundo a definição de Ruelle e Takens, um atrator é chamado estranho quando as linhas de fluxo dependem *sensitivamente das condições iniciais*. Com efeito, num atrator estranho, pontos inicialmente arbitrariamente próximos estarão macroscopicamente (exponencialmente) separados depois de um intervalo de tempo suficientemente longo. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 88; apud BAIER, 2005, p. 92).

Na década de 1960, Edward N. Lorenz, desenvolve equações diferenciais que tinham por finalidade expressar e modelar matematicamente o clima atmosférico. (BAIER, 2005). Essas equações possuíam três variáveis dinâmicas e eram suscetíveis a serem resolvidas numericamente de maneira confiável e rápida, graças a contribuição dos computadores. Ao realizar simulações em seu computador, Lorenz se deparou com algo surpreendente: realizando uma pequena supressão no valor inicial considerado, a sequência de valores obtidos se revela totalmente distinta da anterior. Essa descoberta fez com que Lorenz inferisse que em sistemas dinâmicos não-lineares, embora, aparentemente simples, pequenas alterações nos valores iniciais acabam por gerar cenários imprevisíveis.

Nos sistemas lineares, pequenas mudanças produzem pequenos efeitos, e grandes efeitos se devem a grandes mudanças ou a uma soma de muitas pequenas mudanças. Em sistemas não-lineares, ao contrário, pequenas mudanças podem ter efeitos

dramáticos, pois podem ser amplificadas repetidamente por meio de realimentação de auto reforço. Esses processos de realimentação não-lineares constituem a base das instabilidades e da súbita emergência de novas formas de ordem, tão típicas da auto-organização (CAPRA, 1998, p. 107; apud BAIER, 2005, p. 94).

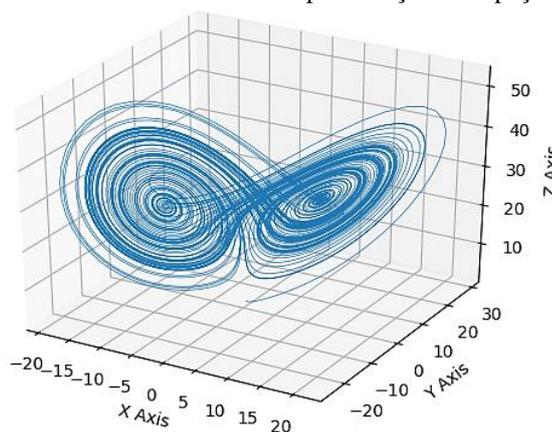
A Teoria do Caos desponta, desse modo, como a consciência acerca do comportamento imprevisível e complexo que alguns sistemas dinâmicos não-lineares – sejam eles: simples, determinísticos, discretos ou contínuos – manifestam mediante à sensibilidade às condições iniciais que lhe são impostas. A compreensão do que vem a caracterizar essa sensibilidade às condições iniciais, também conhecida como Efeito Borboleta, abala a segurança - outrora fundamentada - de que fenômenos inesperados deveriam ser descritos unicamente por intermédio de sistemas aleatórios e randômicos; ou seja, os sistemas determinísticos também podem se apresentar com comportamento imprevisível e como trajeto fidedigno para o caos.

Tocamos aí no coração do problema: a propriedade que certas funções não-lineares possuem de amplificar exponencialmente qualquer erro, por mínimo que seja, impede qualquer predição a longo prazo e acarreta um comportamento errático, que parece obedecer apenas às regras do acaso, apesar do determinismo estrito dessas funções. Esta propriedade de amplificação exponencial dos desvios, que reconcilia as noções de determinismo e de imprevisibilidade, é chamada de "sensibilidade às condições iniciais" ou SCI. Para bem identificar, do ponto de vista da semântica, esse comportamento errático ligado a um processo determinista entre outros comportamentos imprevisíveis, "aleatórios", ligados, pelo contrário, a processos muito mais complexos e não-deterministas, consagraram-lhe o adjetivo "caótico". (BERGÉ, 1994, p.74; apud FERRARI, 2008, p. 35)

Acerca da representação do atrator de Lorenz no espaço de fase (ver Figura 63), Capra (1998, p. 16); apud Baier (2005, p. 95), relata que:

A impossibilidade de predizer por que ponto do espaço de fase a trajetória do atrator de Lorenz passará num certo instante, mesmo que o sistema seja governado por equações deterministas, é uma característica comum a todos os sistemas caóticos. No entanto, isto não significa que a teoria do caos não é capaz de quaisquer previsões. Ainda podemos fazer previsões muito precisas, mas elas se referem às características qualitativas do comportamento do sistema e não aos valores precisos de suas variáveis num determinado instante.

Figura 62: Atrator de Lorenz – Representação no espaço de fase



Fonte: matplotlib.org

Desse modo, Lorenz estabelece em seus estudos, duas propriedades fundamentais inerentes aos sistemas dinâmicos: 1^a) A sensibilidade às condições iniciais são um atributo específico dos fenômenos expressos por sistemas dinâmicos não-lineares; 2^a) Os sistemas simples e determinísticos também são capazes de desvelar um comportamento caótico e complexo. Os avanços obtidos por Lorenz culminam em inúmeros trabalhos e pesquisas na área e encaminham-se para o despontar do surgimento da Teoria do Caos. Essa Teoria se consolida entre o final dos anos de 1960 e o início de 1970, tendo como enfoque, três trabalhos de suma relevância: O primeiro deles foi o artigo do topólogo Stephen Smale, publicado em 1967 – e já mencionado anteriormente na subseção destinada aos atratores – no qual, Smale apresenta por meio de processos de transformações geométricas - dobrar e esticar – a ferradura de Smale. Anos mais tarde, David Ruelle afirma que o artigo de Smale é uma das influências mais incontestáveis no contexto de descoberta dos atratores denominados estranhos. Em seguida, temos o artigo do matemático e astrônomo francês Michel Hénon, publicado em 1969 em colaboração com Carl Heiles, que aspirava trazer uma solução para o Problema dos Três Corpos de Poincaré. Esse artigo propôs uma solução sofisticada ao problema, evidenciando de maneira definitiva que o comportamento caótico pode ser manifesto em um sistema conservativo de três corpos. Além disso, em 1976, Michel Hénon desenvolveu o mapa bidimensional reputado por atrator de Hénon – também enunciado na subseção dedicada aos atratores.

Por fim, dispomos do artigo de David Ruelle e Floris Takens, de 1971. Ruelle e Takens dedicavam-se na obtenção de um modelo que se mostrasse apto durante o processo de identificação da turbulência em fluidos. Durante suas investigações, defrontaram-se com um insólito atrator, ao qual denominaram, atrator estranho. A principal referência na qual pautaram

o trabalho desenvolvido foi, justamente, Stephen Smale. Esse artigo teve uma repercussão respeitável na comunidade científica e possibilitou e impulsionou o desenvolvimento de inúmeros grupos de pesquisa no campo que se referem à mecânica dos fluidos.

É de suma importância ressaltar, a contribuição do físico australiano Robert May, que no início da década de 1960, investigou e explorou o modelo discreto do mapa logístico desenvolvido por Verhulst (abordado anteriormente na seção Modelos Populacionais) e constatou que, embora esse mapa iterado fosse caracterizado por meio de uma equação simples, ao adotarmos valores distintos para o parâmetro k , o sistema pode comportar-se de maneira caótica. As suas bifurcações ou duplicações de período desvelam-se como uma rota pela qual o caos transita indubitavelmente. Portanto, o mapa logístico se configura como um sistema que abarca as principais características do caos e apresenta-se, desta maneira, como um modelo convenientemente eficaz no que diz respeito à compreensão do conceito do que venha a ser um atrator.

Anos mais tarde, Benoît Mandelbrot concentra seus estudos nas formas irregulares e fragmentadas da natureza e que são intrínsecas aos fenômenos universais. A essas formas, Mandelbrot denomina fractais. Ao analisar seus trabalhos, de modo geral, Mandelbrot relata que a princípio, sua intenção era a de representar computacionalmente, por intermédio de fórmulas, elementos reais da natureza. No decorrer de suas pesquisas, Mandelbrot encontra os escritos de Poincaré e observa que as técnicas computacionais que vinha empregando para gerar imagens reais da natureza também poderiam ser aplicadas na área dos sistemas dinâmicos.

[...] a geometria fractal era uma geometria da natureza, que fazia um apelo constante ao caos estatístico. Mas, com a sua utilização, o seu papel alargou-se enormemente. É uma *geometria da natureza* e é uma *geometria do caos*, sob duas formas: estatística e determinista. Para ser mais preciso, os *Objetos Fractais*, de 1975, propunham-se não só a descrever as montanhas, as nuvens, as árvores e os amontoados de galáxias, mas também descrevê-los de uma forma suficientemente perfeita para permitir *imitar* imagens do real por meio de fórmulas. Essas imitações baseavam-se em modelos estatísticos. Pouco depois, no entanto, [...] verificava (lendo Poincaré) que as mesmas técnicas podiam ser aplicadas em dinâmica. (MANDELBROT, 1991, p. 208; apud BAIER, 2005, p. 114)

Mandelbrot aprofunda suas pesquisas e depreende a existência de uma estreita relação entre os fractais e a teoria do caos, haja vista que as duas áreas haviam se desenvolvido de

maneira independente. Ele observa que os atratores estranhos da dinâmica possuem dimensão fracionária e que, não obstante, a representação desses atratores no espaço de fase resultam em padrões autossimilares constantemente presentes nos fractais. Esses atratores passam a ser, então, o elo que une os fractais à teoria do caos e, portanto, podem ser denominados também de **atratores caóticos** ou **atratores fractais**. Mandelbrot infere que o comportamento adotado pela grande maioria dos sistemas dinâmicos não-lineares é complexo e que, portanto, as trajetórias percorridas pelo sistema, bem como, seus atratores e repulsores não representam pontos, círculos ou outras formas geométricas euclidianas no espaço de fase; mas sim, ostentam e vislumbram estruturas irrefutavelmente fractais.

No entanto, embora inúmeras infraestruturas fractais sejam geradas por meio de sistemas de equações não-lineares, há a necessidade de enfatizar que grande parte delas não possuem correlação com o comportamento caótico. Entretanto, é a geometria fractal que se estabelece como a linguagem pela qual o caos se desvela e se engrandece e para mais além, é ela que nos possibilita vislumbrar a ordem, que embora proeminente, subordina-se ao comportamento hegemonicamente caótico dos fenômenos não-lineares.

[...] quando ambos estavam na infância, o caos e os fractais pareciam não ter qualquer relação entre si. Mas eram primos matemáticos. Ambos enfrentam a estrutura da irregularidade. Em ambos, a imaginação geométrica é a senhora. Mas, enquanto no caos a geometria presta vassalagem à dinâmica, nos fractais ela reina absoluta. Os fractais oferecem uma nova linguagem para descrever a forma do caos. (STEWART, 1991, p. 233; apud BAIER, 2005, p. 86).

Na última seção deste capítulo, abordaremos o Jogo do Caos quanto recurso que viabiliza explorar a interconexão existente entre caos e fractais.

5.2.1 O Jogo do Caos

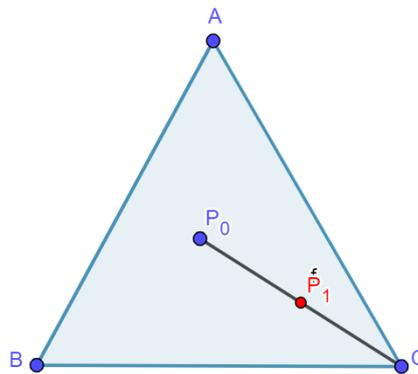
Segundo Mendes Junior (2017), O Jogo do Caos foi criado pelo matemático britânico Michael Fielding Barnsley, no ano de 1988. Este jogo caracteriza-se por meio de um processo recursivo, aplicado de modo aleatório e tem por finalidade desenvolver a compreensão de que processos randômicos também podem resultar em algo determinístico, isto é, o caos pode conceber padrões nos quais a ordem possa ser contemplada. Para a realização desse jogo, consideramos um triângulo ABC qualquer, bem como, uma ferramenta construída aleatoriamente. Essa ferramenta aleatória será um dado não viciado e ao realizarmos o seu

lançamento, deveremos realizar a seguinte correspondência entre o número obtido em sua face superior e os vértices do triângulo ABC considerado:

1 ou 2 – Vértice A 3 ou 4 – Vértice B 5 ou 6 – Vértice C

Esse processo inicia-se com um ponto arbitrário P_0 do plano. Realizamos o lançamento do dado e estabelecemos a correspondência entre o valor obtido e o vértice do triângulo. Daí, traçamos o ponto médio de P_0 e do vértice associado, obtendo assim o ponto P_1 . Esse processo iterativo continua indefinidamente, considerando sempre o ponto médio P_i , obtido do segmento de extremidades P_{i-1} e do vértice associado a ele aleatoriamente. Observe o exemplo a seguir, no qual um ponto P_0 do plano foi tomado, e após o lançamento do dado, obteve-se o número 3, o que significa que devemos determinar o ponto médio do segmento de reta de extremidades C e P_0 ; indicado por P_1 , na Figura 64:

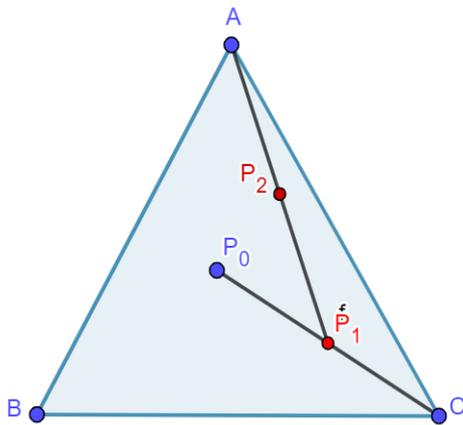
Figura 63: Ponto médio do segmento de reta com extremidades no vértice C e no ponto P_0 .



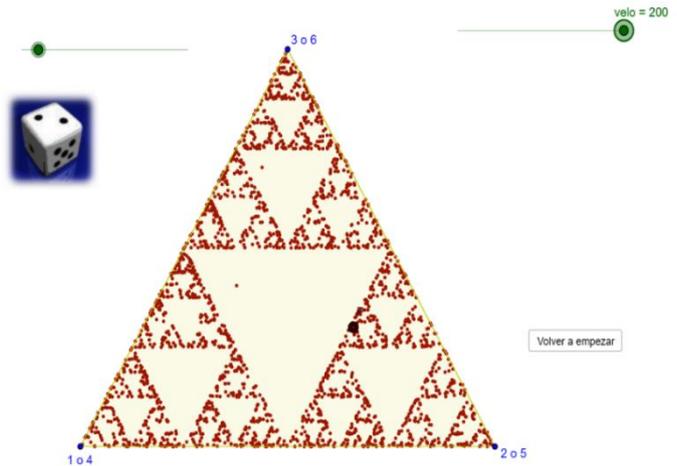
Fonte: Autoria própria – Geogebra.

Dando continuidade no processo iterativo do triângulo acima, suponhamos que no próximo lançamento do dado, o número 1 seja retirado – o que coincide com o vértice A do triângulo. Desse modo, devemos determinar o ponto médio do segmento de reta AP_1 e o denominaremos de P_2 (ver Figura 65). Mantendo o procedimento indefinidamente nas sucessivas iterações, encontraremos um padrão em meio ao caos inicial aparente: o fractal chamado de Triângulo de Sierpinski (ver Figura 66).

Figura 64: Segunda iteração do Jogo do Caos Figura 65: Triângulo de Sierpinski obtido através do Jogo do Caos



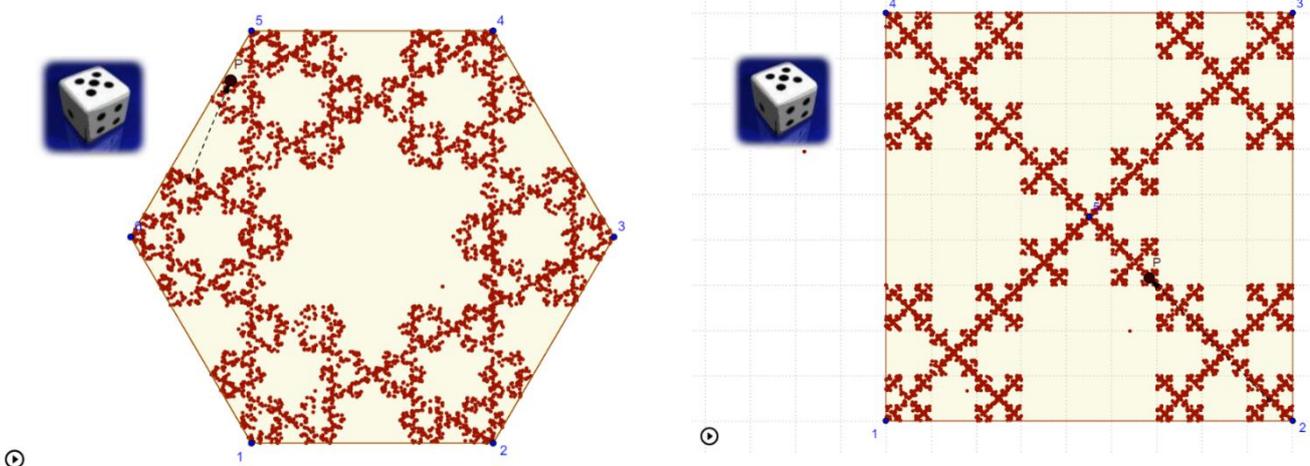
Fonte: Autoria própria – Geogebra.



Fonte: Jezael; Sada - *Software Geogebra*.

Outrossim, o Jogo do Caos pode ser adaptado e aplicado a outros polígonos, concebendo padrões fractais autossimilares e de extrema beleza e comprovando novamente que sistemas ou processos randômicos também podem gerar ordem e modelos passíveis de serem determinados a longo prazo. O recurso utilizado é mostrado na imagem acima se encontra no Geogebra, no seguinte *link*: <https://www.geogebra.org/m/qngvvhur> e intitula - se como **El juego del Caos en un triángulo equilátero**. As imagens da Figura 67 também foram retiradas do banco de dados do Geogebra e foram desenvolvidas por Manuel Sada.

Figura 66: Jogo do Caos adaptado e aplicável ao hexágono e ao quadrado.



Fonte: Sada – Geogebra.

Mediante o exposto neste capítulo, inferimos que o elo sutil entre a Teoria do Caos e os fractais é o atrator; porém, essa correlação se dá por meio de um atrator específico: o atrator

estranho. Esses atratores são capazes de outorgar ordem ao caos decorrente de alguns sistemas dinâmicos e para além, possuem estruturas fractais, que ao serem representadas no espaço de fase, se desvelam detentoras de uma beleza exímia e imperscrutável.

No seguinte capítulo, nossa intenção será o vislumbrar do pôr do sol – do ponto de vista de Gadamer (citado anteriormente no Capítulo 3). Esse vislumbre se dará ao observar este poente - trabalhos do PROFMAT que abordam os fractais e o caos, bem como, demais artigos e referenciais bibliográficos que contemplem os dois temas - de distintos sítios e maneiras, de modo a suscitar a compreensão e o desdobramento de novos horizontes e caminhos em meio aos já percorridos anteriormente, e que possam ser motivo de contemplação no que se refere à introdução dos fractais articulados à Teoria do Caos, no contexto da Educação Básica.

6. EM BUSCA DE HORIZONTES PARA INTRODUIZIR OS FRACTAIS ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

A diligente procura por novos horizontes – esses, capazes de promover uma ampla compreensão dos fractais e da Teoria do Caos, tal qual, o modo pelo qual podem ser explanados na Educação Básica – terá como ponto de partida a análise das dissertações de alguns alunos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A Tabela 13 abaixo contém a relação das dissertações lidas e analisadas, bem como, o nome de seus respectivos autores e ano de conclusão:

Tabela 13: Títulos das dissertações lidas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Título da dissertação	Autor	Ano de conclusão
Fractais	Rafael de Lima Moreira	2013
Estudo e Aplicações da Geometria Fractal	Yara Silvia Freire Rabay	2013
Equações de Diferenças, Caos e Fractais	Leonardo Morais	2014
Sistemas Dinâmicos Discretos	Eliane Alves Jesus	2016
Uma nova abordagem dos complexos para o Ensino Médio: O estudo dos Fractais e do Caos na composição do Conjunto preenchido de Julia e o Conjunto de Mandelbrot	Daniel de Carvalho Mendes Junior	2017
Fractais: Uma abordagem introdutória	Mailson Alves Farias	2019
Sistemas Dinâmicos e Caos - Análises de mapas discretos e possibilidades de aplicação no Ensino Médio	Cássio Kiechaloski Correia de Mello	2021

Fonte: Autoria própria.

É importante ressaltar, que conforme mencionado no Capítulo 3, as dissertações foram selecionadas tendo em vista a proximidade de suas vertentes com o enfoque e a questão norteadora desta pesquisa em curso. A investigação dessas dissertações consistirá na elaboração de breves resumos que serão expostos adiante (na ordem exposta na Tabela 13) e que carregam consigo a essência das ideias e dos objetivos de cada pesquisador, bem como, as ferramentas e proposições às quais reputam por aplicáveis e factíveis de serem desenvolvidas. Para mais além, espera-se que essa reflexão nos confira iluminação, possibilitando-nos a descoberta de caminhos que até então eram encobertos à nossa compreensão e desenvolvendo a nossa capacidade de enxergar por outro prisma os trajetos outrora percorridos pelos demais pesquisadores dos fractais e da Teoria do Caos.

O primeiro resumo é inerente ao trabalho intitulado “Fractais” (2013), de Rafael de Lima Moreira. Em sua dissertação, o autor discorre sobre os fractais Clássicos, bem como, especifica as etapas do processo de construção de cada um deles. O autor apresenta definições para o termo fractal e percebe que essas definições estão intimamente ligadas às características intrínsecas desses objetos matemáticos: a autossimilaridade; a dimensão fractal e o fato de que podem ser concebidos mediante um processo iterativo ou recursivo. Dentre os atributos mencionados, Moreira (2013) concentra sua atenção no conceito de dimensão e para isso, retoma a dimensão da geometria clássica-euclidiana e estabelece e desenvolve os conceitos de dimensão topológica, dimensão Hausdorff e a dimensão similaridade. Além disso, o autor evidencia como calcular a dimensão de alguns fractais por meio da dimensão similaridade. Tendo isto feito, Moreira propõe atividades e situações-problema que podem ser aplicadas na Educação Básica – algumas delas no Ensino Fundamental II e grande maioria, no Ensino Médio. O autor utiliza situações e contextos que desenvolvem os conceitos de sequência, leis de formação, perímetro, áreas de figuras planas, volume de sólidos geométricos, logaritmos, progressões, dentre outros. Não obstante, Moreira (2013) propõe a utilização do *software* de geometria dinâmica, Geogebra, como subsídio para a construção dos fractais expostos em sua pesquisa.

A segunda dissertação foi desenvolvida por Yara Silvia Freire Rabay e tem por título: “Estudo e Aplicações da Geometria Fractal” (2013). Rabay (2013), por meio de citações, exhibe a definição da palavra fractal e, em seguida, as principais características que estes elementos matemáticos dispõem: autossimilaridade, complexidade infinita, irregularidade e dimensão não-inteira. Adiante, a autora classifica os fractais, tendo como parâmetro o modo pelo qual são obtidos e o nível de autossimilaridade verificada. Desse modo, ela propõe a classificação em

três grupos: Fractais definidos por sistemas de funções iteradas; Fractais definidos por uma relação de recorrência e fractais aleatórios. Cada um desses grupos pode ser dividido em subgrupos, e Rabay (2013), os conceitua, tal qual, exemplifica quais fractais pertencem a cada categoria de classificação. Além disso, a autora apresenta as etapas para construção de cada um dos fractais mencionados. Ao adentrar o grupo dos fractais obtidos por meio de uma relação de recorrência, a autora discorre que estes fractais são empregados na modelagem de sistemas dinâmicos. Desse modo, ela define de maneira breve os sistemas dinâmicos e estabelece os conceitos de atrator, repulsor e órbita, por meio de exemplos numéricos e gráficos. Tendo isto posto, Rabay (2013) volta sua atenção à dimensão dos fractais e explicita como calculá-la por dois métodos: método de Hausdorff e o processo *Box-Counting*. Por fim, a autora propõe atividades que podem ser desenvolvidas na Educação Básica, preferencialmente, no Ensino Médio. Essas atividades se constituem na construção de fractais por meio de dobraduras e na investigação da relação (lei de formação) que permeia cada etapa iterativa deste processo. Rabay (2013) propõe também atividades que explorem o cálculo do perímetro, da área e do volume de alguns fractais, tal qual, o famoso Jogo do Caos.

A terceira dissertação, intitulada: “Equações de Diferenças, Caos e Fractais” (2014), foi produzida por Leonardo Moraes. No Capítulo 1, o autor conceitua os sistemas dinâmicos discretos e relata que eles podem exibir uma diversidade de comportamentos dinâmicos, como oscilações periódicas e o caos. Moraes (2014) define mapa unidimensional e órbitas de um sistema e utiliza um *software* matemático que possibilita o estudo dos mapas e sua construção, bem como observar o comportamento de suas órbitas: o Maxima. Outra ferramenta apresentada por ele é o diagrama de *cobweb* (que pode ser construído no *software* Winplot), que viabiliza o estudo e a análise da evolução do modelo de um sistema dinâmico discreto. Moraes (2014) define formalmente pontos fixos estáveis, instáveis, atratores e repulsores.

Para mais além, ele dá enfoque em um modelo de crescimento populacional: o mapa logístico de Verhulst. O autor dá exemplos no *software* Maxima com o intuito de possibilitar a compreensão e a visualização do comportamento complexo do mapa logístico, bem como, a inferência de que o comportamento caótico também pode surgir de equações consideradas determinísticas. No Capítulo 2, intitulado “Fractais”, Moraes (2014) apresenta de maneira resumida a origem desses entes matemáticos e faz menção aos mais populares: a poeira de Cantor, o Triângulo de Sierpinski e a curva de Koch. Após, o autor se concentra nos atributos dos fractais: autossimilaridade, complexidade infinita e a dimensão. O autor explana o conceito de dimensão fractal e afirma ser uma das características mais relevantes dos fractais, visto que

está intimamente relacionada com o seu grau de irregularidade, isto é, quanto maior a irregularidade de um fractal, maior será a sua dimensão. Além disso, diferentemente do que costumávamos obter na Geometria Euclidiana, a dimensão de um fractal pode ser fracionária.

Tendo isto posto, Moraes (2014) destaca o processo de obtenção da dimensão de um fractal e exemplifica. Por fim, o autor expõe outros fractais clássicos e sugere maneiras de trabalhá-los na Educação Básica. Essas sugestões envolvem os conceitos de área, perímetro, sequência, progressões e trigonometria. Ao final do trabalho, o autor apresenta um plano de aula desenvolvido para a 1ª série do Ensino Médio que contempla atividades relacionadas ao Triângulo de Sierpinski.

O quarto resumo diz respeito ao trabalho desenvolvido por Eliane Alves de Jesus e alcunhado de “Sistemas Dinâmicos Discretos” (2016). A autora inicialmente conceitua as equações de diferenças (também chamadas de relação de recorrência) e as classifica por meio de exemplos e formalmente em lineares e não-lineares. Além disso, ela destaca o conceito de órbitas e mapa de uma equação de diferenças e dá exemplos numéricos e gráficos de ambos. Jesus (2016) apresenta os pontos fixos de uma relação de recorrência e de que modo podemos classificá-los em estáveis, instáveis, atratores ou repulsores. Outrossim, ela se propõe a investigar as órbitas periódicas e caóticas do mapa logístico de Verhulst. A autora conduz essa investigação atribuindo distintos valores aos parâmetros α e β do modelo de Verhulst e analisando o mapa obtido por meio dessas simulações.

Por fim, Jesus (2016) procura discorrer sobre as equações de diferenças em uma linguagem mais acessível e adequada aos alunos do Ensino Médio. Em meio a essa exposição, a autora utiliza a concepção de fatorial, a sequência de Fibonacci e os fundamentos dos modelos populacionais de Malthus e de Verhulst. A autora encerra a dissertação com um plano de aula que viabiliza o estudo das equações de diferenças por meio de ferramentas computacionais.

A síntese seguinte refere-se à dissertação que tem por título: “Uma nova abordagem dos Complexos para o Ensino Médio: O Estudo dos fractais e do caos na composição do Conjunto Preenchido de Julia e o Conjunto de Mandelbrot.” Essa dissertação foi escrita por Daniel de Carvalho Mendes Júnior e concluída em 2017. O autor define o termo **iteração** como um processo de repetição, isto é, iterar uma função, significa compor a função com ela mesma. Segundo o autor, alguns Sistemas Dinâmicos são muito sensíveis às alterações em suas condições iniciais. Se tomarmos dois valores distintos, porém, bem próximos um do outro, veremos que após algumas iterações, a diferença entre eles se torna grandiosa. Tendo isto posto,

Junior (2017) define um sistema dinâmico: “... um conjunto de estados possíveis, que junto com uma determinada regra, calcula o estado do tempo presente em função do tempo passado.”

Para mais além, Júnior (2017) nos convida a observar sistemas que possuem comportamentos periódicos e caóticos e, para tal, enuncia o **modelo logístico de crescimento populacional**. Com o intuito de aprofundar o conceito de Sistemas Dinâmicos, o autor expõe o conceito de ponto atrator e repulsor. Segundo o autor, no início dos anos 80, os fractais adentraram o universo da Matemática por meio de Benoît Mandelbrot, com o intuito de expressar e classificar certas estruturas que não podiam ser definidas e representadas pela geometria euclidiana. Os fractais, em sua grande maioria, não apresentam dimensão inteira, mas sim, fracionária, já que carregam consigo um grau de irregularidade em qualquer escala. Junior (2017) discorre que podemos definir fractal como um objeto que possui autossimilaridade, autossemehança e cuja geometria se repete infinitamente em porções menores, ou seja, a parte está no todo e o todo está na parte. O autor menciona que há diversas formas de calcular a dimensão de um fractal, entretanto, evidencia um desses métodos, hoje conhecido como dimensão fractal. Desse modo, o autor apresenta alguns fractais clássicos e realiza o cálculo da dimensão de cada um deles e evidencia também os procedimentos para as suas respectivas construções. Segundo ele, um estudo interessante dentro da Geometria Fractal decorre da ideia de como eles podem surgir por meio de um Sistema Dinâmico.

Por conseguinte, o autor destaca como um caso particular dessa interação, o Jogo do Caos. Este jogo se caracteriza por meio de uma variável aleatória (um dado comum) e da associação realizada entre cada face obtida no lançamento do dado com os vértices A, B e C de um triângulo equilátero. Após inúmeras repetições desse processo aleatório, pode-se observar um padrão emergindo: o fractal reputado como Triângulo de Sierpinski. O autor define os Conjuntos de Julia e Mandelbrot, como os lugares do plano complexo onde se vislumbra o comportamento caótico da iteração de uma função complexa, $f(z) = z^2 + c$, onde z e c são complexos. No entanto, no Conjunto de Julia, pode-se atribuir infinitos valores para a constante c , e conseqüentemente, iterar a função $f(z)$ também para infinitos valores, tomando algum valor inicial para z_0 , enquanto, no Conjunto de Mandelbrot, a sutileza consiste em tomar o valor inicial igual a 0 em todos os processos iterativos e observar o comportamento das órbitas sob essas condições.

Por fim, o autor expõe propostas de atividades que foram desenvolvidas por ele no contexto da sala de aula, dentre as quais: A construção da Pirâmide de Sierpinski, a aplicação

do Jogo do Caos e a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) na construção e visualização dos Conjuntos de Julia e de Mandelbrot por parte dos alunos da Educação Básica.

O penúltimo compêndio é inerente à dissertação de Mailson Alves Farias e intitula-se: “Fractais: Uma abordagem introdutória” (2019). Inicialmente, Farias (2019) discorre sobre alguns conceitos e noções preliminares que serão fundamentais para o desenvolvimento de sua pesquisa: limites, sequências, logaritmos; dentre outros. Feito isto, o autor procura estabelecer algumas concepções acerca da Geometria Euclidiana e da Geometria Fractal, bem como, explicar a origem e o processo de construção de cada uma delas. A partir de então, Farias (2019) dá enfoque nos fractais e expõe suas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento.

Com o intuito de tornar o conhecimento acerca dos fractais mais acessível, Farias classifica os fractais em 3 grupos: fractais gerados por meio de relações de recorrência; fractais gerados por meio de sistemas de funções iteradas e, por último, os fractais aleatórios. Após explorar e especificar cada uma das três classificações, Farias (2019) evidencia as características e propriedades das quais os fractais dispõem – autossemelhança, complexidade infinita e a dimensão fractal. Ele menciona que a dimensão é o atributo mais relevante e significativo de um fractal e demonstra de que modo pode-se obter a dimensão de um objeto fractal. No Capítulo 4, Farias (2019) apresenta um breve histórico dos fractais Clássicos (Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski) e dá ênfase nas etapas de construção, bem como, no cálculo da dimensão de cada um deles. Além disso, o teórico expõe e demonstra algumas proposições inerentes a cada um dos fractais abordados. Essas proposições têm por intuito o cálculo do comprimento e da área de cada fractal após n iterações e em alguns casos, contemplam conceitos referentes à Topologia.

A última dissertação do PROFMAT selecionada como ferramenta de estudo e investigação foi a de Cassio Kiechaloski Correia de Mello e tem por título: “Sistemas Dinâmicos e Caos - Análise de Mapas Discretos e possibilidades de aplicação no Ensino Médio” (2021). Nesta dissertação, o autor introduz os sistemas dinâmicos, definindo-os formalmente e apresentando cada um dos elementos que os compõem. Mello (2021) evidencia também as noções e proposições acerca de ponto fixo atrator e repulsor e realiza as demonstrações necessárias.

Com o intuito de possibilitar a visualização das órbitas de um sistema dinâmico discreto, o teórico menciona o diagrama de *cobweb* – diagrama esse, que permite visualizar e compreender as trajetórias percorridas pelas órbitas de um sistema dinâmico discreto, bem como, compreender seu comportamento no decorrer do tempo.

Ademais, explana e expõe o processo de construção do gráfico de *cobweb* de maneira minuciosa. Mello (2021) aborda outro conceito de extrema relevância no estudo dos sistemas dinâmicos discretos: os pontos fixos. Após, apresenta inúmeros exemplos, nos quais pode-se observar a evolução do sistema por meio da construção de seu mapa e compreender a trajetória percorrida por suas órbitas por intermédio do diagrama de *cobweb*. Ainda, menciona que as construções foram realizadas por meio do *software* Maxima. No Capítulo 2, Mello (2021) se concentra no estudo das dinâmicas populacionais, mais propriamente, no estudo do mapa logístico, no qual, se propõe a investigar mediante mapas de evolução e dos diagramas de *cobweb*, o comportamento manifesto pelo sistema para os distintos valores de r e n . Após este estudo aprofundado, o autor explora o diagrama de bifurcação e discorre sobre os expoentes de Lyapunov. Mais adiante, o autor volta a sua discussão aos modelos de evolução populacional e foca seus estudos nas dinâmicas populacionais isoladas, considerando para isso, a ação externa e investiga de mesmo modo o modelo simbiótico de duas espécies isoladas. Por fim, Mello (2021) sugere atividades que podem ser aplicadas e desenvolvidas com os alunos do Ensino Médio.

Dessa forma, o teórico propõe atividades simulando um modelo migratório, bem como, contemplando a dinâmica populacional por meio do mapa logístico e a noção de ação externa. Em todas as atividades sugeridas, faz-se necessário a utilização de ferramentas computacionais, com o intuito de possibilitar uma melhor compreensão e visualização do comportamento adotado por cada um dos sistemas dinâmicos considerados.

Além disso, é de suma importância mencionar o livro “Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula”, escrito por Ruy Madsen Barbosa e publicado em 2005. O livro explora o conceito de caos e fractais, bem como, enuncia o contexto histórico que entremeia o processo de construção dessas áreas de conhecimento. Em seguida, o autor dá ênfase a cada um dos clássicos fractais, enunciando seus estágios de construção, assim como, as propriedades que dispõem. Para cada um dos fractais mencionados, Barbosa (2005) procura apresentar curiosidades ou sugestões de atividades que podem ser realizadas com os alunos na sala de aula.

Assim, ao mencionar os matemáticos Pierre Fatou e Gaston Julia, o autor considera relevante expor as noções de órbita, iteração, ponto fixo, ponto atrator e repulsor. No Capítulo 3, Barbosa (2005) sugere a construção de outros fractais pela fronteira e por remoção, abrindo

uma gama de possibilidades criativas que podem ser investigadas com os alunos em classe. O autor soma a esses os fractais tipo Dürer e as árvores pitagóricas. Barbosa (2005) demonstra e exemplifica também o processo utilizado para calcular a dimensão de um objeto fractal. A partir do Capítulo 4, são propostas atividades investigativas aplicáveis aos fractais clássicos ou aos fractais construídos no decorrer do Capítulo 3. Essas atividades incluem o estudo do perímetro, área e volume (caso seja possível) de cada fractal; a percepção de uma relação numérica entre seus elementos a cada etapa do processo iterativo. Outros conceitos como Contagem, Trigonometria e o Teorema de Pitágoras também podem ser estudados por intermédio dos fractais até então evidenciados.

Já a partir do Capítulo 5, Barbosa (2005) volta sua atenção para a construção de fractais no cenário da sala de aula – seja por meio de materiais concretos ou recursos computacionais. As propostas idealizadas pelo autor são variadas e enriquecedoras, visto que propiciam aos estudantes o contato com materiais concretos, bem como, a utilização de *softwares* de geometria dinâmica e de linguagem de programação.

O processo de investigação e explanação dos trabalhos do PROFMAT, assim como, do livro *Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula*, possibilitou o alvorecer da compreensão do pesquisador, garantindo-lhe um novo horizonte em meio aos já vislumbrados e descritos pelos autores mencionados – horizonte esse, que será contemplado não apenas pela luz do sol ao amanhecer, mas sim também por todo o cenário vasto que o circunscreve. Além disso, cabe ressaltar que essas leituras fizeram -se essenciais para o despertar do perscrutar do horizonte que se nos apresenta e que seus contributos, de maneira coletiva, nos possibilitam visualizar e contemplar os fractais articulados à teoria do caos de um novo prisma.

Desse modo, o seguinte e último capítulo desta dissertação, terá por objetivo, conduzir os leitores a avistarem este novo horizonte e em meio ao processo que se estabelece ao questionar o interrogado, alcançarem para si, novas perspectivas e prenúncios. Portanto, o capítulo a seguir apresentará recomendações de atividades, sequências didáticas, metodologias e recursos que podem ser utilizados para que os fractais possam ser introduzidos na Educação Básica em articulação à Teoria do Caos.

7. O VISLUMBRAR DE UM NOVO HORIZONTE: INTRODUZINDO OS FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS E ALINHADOS COM OS CONTEÚDOS CURRICULARES DA BNCC.

Este capítulo terá por intuito conduzir os leitores ao vislumbrar de um novo horizonte – horizonte esse, contemplado anteriormente de distintos ângulos e perspectivas, bem como, por inúmeros autores e pesquisadores da área. O objetivo deste capítulo é demonstrar, por intermédio de ideias e sugestões de atividades e sequências didáticas, a expansão da compreensão e da visão do pesquisador ao entrar em contato com as leituras mencionadas no Capítulo 6 e como a junção dessas concepções contribuíram para que um novo horizonte fosse de fato fitado e apreciado.

Desse modo, serão apresentados aqui alguns percursos que podem ser realizados pelo professor da Educação Básica, caso queira introduzir os fractais articulados à Teoria do Caos no contexto da sala de aula. Esse percurso será dividido em 4 etapas:

1. Compreendendo um Sistema Dinâmico Discreto;
2. O que é o caos? De que modo o caos se expressa e se manifesta?
3. Atratores: Definição e classificação;
4. Fractais: Definição e Características.

Em cada um desses momentos serão sugeridas atividades que possam servir de apoio para que o professor desenvolva o seu trabalho em sala de aula. Essas etapas foram assim organizadas, pois, a finalidade desta pesquisa é a de introduzir os fractais, porém, de modo que eles estejam articulados à Teoria do Caos. Assim, buscou-se iniciar a abordagem pelos Sistemas Dinâmicos Discretos e logo em seguida pelo caos, finalizando com o estudo dos atratores e identificando o elo entre os fractais e o caos – o atrator estranho. No entanto, cabe ressaltar que a ordem aqui concebida não é um impeditivo e nem um limitador do trabalho docente, visto que o professor pode adequar as propostas aqui apresentadas para o contexto da realidade de seus estudantes, bem como, visando os objetivos e as habilidades que deseja alcançar e desenvolver em seus discentes.

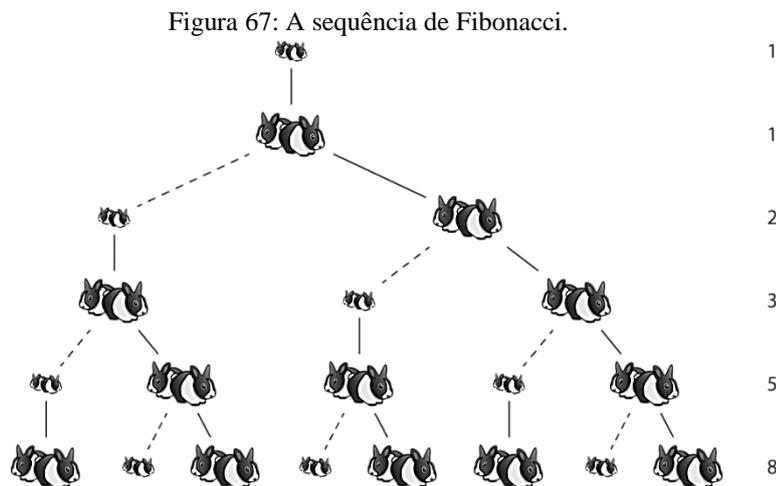
7.1 Compreendendo um Sistema Dinâmico Discreto

Para implementar o conceito de Sistemas Dinâmicos Discretos na Educação Básica, faz-se necessário uma abordagem prévia sobre relações de recorrência. Essas relações podem ser trabalhadas conjuntamente ao conteúdo de sequências numéricas e progressões, despertando os estudantes para uma compreensão inicial do que vem a se constituir como um Sistema Dinâmico Discreto. Desse modo, tendo como fundamento o trabalho de Jesus (2016) – mencionado no Capítulo 6 – a primeira atividade sugerida terá como enfoque a Sequência de Fibonacci.

Atividade 1 – A Sequência de Fibonacci

O italiano Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) elaborou essa sequência tendo como parâmetro os resultados obtidos por intermédio da observação do desenvolvimento populacional de coelhos. Segundo Souza (2013, p.42), essa sequência pode ser enunciada da seguinte forma:

“Considere um casal de coelhos que, a partir do 2º mês de vida, dá cria a um novo casal todos os meses, que se reproduzem da mesma maneira. A sequência de Fibonacci é formada pelo número de casais de coelhos em cada mês (ver a Figura 68).”



Fonte: criptofy.com

Assim, temos a seguinte sequência:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Podemos observar, do 3º termo em diante, que cada termo resulta da soma dos dois termos posteriores, ou seja:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & 13 & \rightarrow & 21 & \rightarrow & 34 & \rightarrow & 55 & \rightarrow & 89 & \rightarrow & \dots \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & (1+1) & & (1+2) & & (2+3) & & (3+5) & & (5+8) & & (8+13) & & (13+21) & & (21+34) & & (34+55) & &
 \end{array}$$

Logo, é possível estabelecer uma lei de formação para essa relação, expressa por:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_0 = 1; x_1 = 1 \end{cases}; \text{ onde } x_n \text{ é o número de casais de coelhos no mês } n.$$

Essa lei de formação recebe o nome de **relação de recorrência**, visto que cada termo x_n , a partir do 3º, depende dos dois termos precursores a ele; podendo ser chamada também de **equação de diferenças**. Nessa primeira atividade, o interessante é definir a sequência de Fibonacci enunciada por Souza (2013) e possibilitar algum tempo para que os estudantes, em pares ou grupos colaborativos, obtenham a sequência numérica que caracteriza o número total de casais de coelhos em cada n -ésimo mês, bem como, percebem de que maneira essa sequência é formada.

Desse modo, o professor pode solicitar aos alunos a lei de formação da sequência de Fibonacci – essa lei de formação pode ser descrita algebricamente ou com as próprias percepções dos estudantes, no que se refere ao comportamento da sequência. Tendo isto feito, o professor pode apresentar as respostas de cada dupla e propiciar um ambiente de debate acerca das respostas encontradas. Por fim, o professor, juntamente com a classe, deve apresentar a lei de formação e enfatizar a dependência que os termos (a partir do 3º) têm dos termos imediatamente posteriores a ele.

Outrossim, o docente pode aproveitar este momento para definir as relações de recorrência e trabalhar mais alguns exemplos com a classe, de modo a desenvolver e aprimorar o conceito recém-descoberto e introduzido. Como sugestão, indicamos a situação a seguir como exemplo adicional:

Em um experimento, uma determinada colônia de bactérias tem uma população inicial de 50.000. A população é contada a cada 2 horas, e ao final do intervalo de 2 horas, a população triplica. Seja a_n o número de bactérias presentes no início do n -ésimo período.

(a) Deduza a relação de recorrência. Justifique.

Resolução: Do enunciado, temos que $a_0 = 50\,000$. Ao final de cada intervalo – que ocorre de 2 em 2 horas - a população triplica, logo, temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= 50\,000 \\ a_1 &= 3 \cdot a_0 = 3 \cdot 50\,000 = 150\,000 \\ a_2 &= 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 150\,000 = 450\,000 \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 450\,000 = 1\,350\,000 \\ &\dots \\ a_n &= 3 \cdot a_{n-1}. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que no n -ésimo período teremos o triplo de bactérias presentes no início do período $n - 1$ e que a relação de recorrência que representa essa situação será dada por:

$$\begin{cases} a_n = 3 \cdot a_{n-1} \\ a_0 = 50\,000 \end{cases}$$

(b) No início de qual período haverá um total de 1.350.000 bactérias?

Resolução: De acordo com as iterações apresentadas no item (a), observamos que no início do 3º período haverá um total de 1.350.000 bactérias.

De acordo com as iterações apresentadas no item (a), observamos que no início do 3º período haverá um total de 1.350.000 bactérias.

Ainda no que se refere à Sequência de Fibonacci, o professor pode solicitar aos alunos que determinem o número de casais x_n de coelhos no n -ésimo mês, usando para isso, a lei de formação encontrada. Por exemplo, para obter o número de casais de coelhos no mês 11, por meio da relação obtida, devemos adotar o procedimento iterativo, isto é, aplicar a lei de formação nela mesma até obtermos o valor x_{11} :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= x_1 + x_0 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$x_3 = x_2 + x_1 = 2 + 1 = 3$$

$$x_4 = x_3 + x_2 = 3 + 2 = 5$$

$$x_5 = x_4 + x_3 = 5 + 3 = 8$$

$$x_6 = x_5 + x_4 = 8 + 5 = 13$$

$$x_7 = x_6 + x_5 = 13 + 8 = 21$$

$$x_8 = x_7 + x_6 = 21 + 13 = 34$$

$$x_9 = x_8 + x_7 = 34 + 21 = 55$$

$$x_{10} = x_9 + x_8 = 55 + 34 = 89$$

$$x_{11} = x_{10} + x_9 = 89 + 55 = 144.$$

Portanto, no mês 11 haverá um total de 144 casais de coelhos.

Por meio desse exemplo, o docente pode formalizar com os estudantes o conceito de **iteração**, bem como, fazer com que os alunos percebam a correlação do processo iterativo com o conceito de função composta.

Tendo em vista que as equações de diferenças podem descrever modelos de dinâmica populacional, as próximas atividades recomendadas terão como fundamento os modelos populacionais de Malthus e Verhulst. Para mais além, essas atividades terão como intuito explorar de maneira minuciosa os conceitos de iteração, mapas e órbitas, e por fim, enunciar a definição de sistemas dinâmicos discretos.

Atividade 2: Modelo Populacional de Malthus

Conforme mencionado anteriormente no Capítulo 5 desta dissertação, Thomas Malthus, em 1798, propôs um modelo simplificado de dinâmica populacional. Malthus tinha a concepção de que a população de determinada localidade crescia em determinado instante t , de maneira proporcional à população total neste mesmo instante. O modelo apresentado por Malthus é expresso pela seguinte equação de diferenças (lei de recorrência):

$$x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n,$$

onde:

- x_{n+1} representa o número de indivíduos da população no ano $n + 1$, bem como, pode caracterizar a massa biológica da população considerada;
- α é a taxa de ascensão ou decrescimento da população investigada.

O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos conheçam o modelo populacional de Malthus, que utilizem e aprimorem o processo iterativo e que representem graficamente, por meio de ferramentas computacionais – no caso, o Maxima - a evolução dessa equação de diferenças para distintos valores iniciais x_0 e taxas α . Em seu trabalho intitulado “Introdução ao Maxima” (2019), Bruna Santos caracteriza o Maxima como “uma linguagem computacional que permite realizar cálculos numéricos e simbólicos, representações gráficas e efetuar programação, possuindo uma grande variedade de comandos para os mais variados fins de aplicação.”

Questões sugeridas

Exercício 1: Considere a equação de diferenças $x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n$, conhecida como modelo populacional de Malthus. Desse modo, com o auxílio da calculadora, obtenha as 5 primeiras iterações e analise o comportamento dessa expressão para os seguintes valores de x_0 e α :

- $x_0 = 10$ e $\alpha = 0,05$
- $x_0 = 10$ e $\alpha = -0,05$
- $x_0 = 10$ e $\alpha = 0$
- $x_0 = 10$ e $\alpha = -1,02$
- $x_0 = 20$ e $\alpha = 0,8$
- $x_0 = 20$ e $\alpha = -0,8$
- $x_0 = 20$ e $\alpha = 0$
- $x_0 = 20$ e $\alpha = -1,05$

Resolução:

- Substituindo $\alpha = 0,05$ na equação de diferenças $x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n$, temos:

$$x_{n+1} = (1,05) \cdot x_n, \text{ com } x_0 = 10.$$

Utilizando o processo recursivo, segue:

$$x_0 = 10$$

$$x_1 = (1,05) \cdot x_0 = (1,05) \cdot 10 = \mathbf{10,5}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= (1,05) \cdot x_1 = (1,05) \cdot 10,5 = \mathbf{11,025} \\
 x_3 &= (1,05) \cdot x_2 = (1,05) \cdot 11,025 = \mathbf{11,57625} \\
 x_4 &= (1,05) \cdot x_3 = (1,05) \cdot 11,57625 = \mathbf{12,1550625} \\
 x_5 &= (1,05) \cdot x_4 = (1,05) \cdot 12,1550625 = \mathbf{12,762815625} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

b) Substituindo $\alpha = -0,05$ na equação de diferenças $x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n$, temos:

$$x_{n+1} = (0,95) \cdot x_n, \text{ com } x_0 = 10.$$

Utilizando o processo recursivo, segue:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 10 \\
 x_1 &= (0,95) \cdot x_0 = (0,95) \cdot 10 = \mathbf{9,5} \\
 x_2 &= (0,95) \cdot x_1 = (0,95) \cdot 9,5 = \mathbf{9,025} \\
 x_3 &= (0,95) \cdot x_2 = (0,95) \cdot 9,025 = \mathbf{8,57375} \\
 x_4 &= (0,95) \cdot x_3 = (0,95) \cdot 8,57375 = \mathbf{8,1450625} \\
 x_5 &= (0,95) \cdot x_4 = (0,95) \cdot 8,1450625 = \mathbf{7,737809375} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

c) Substituindo $\alpha = 0$ na equação de diferenças $x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n$, temos:

$$x_{n+1} = x_n, \text{ com } x_0 = 10.$$

Utilizando o processo recursivo, segue:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 10 \\
 x_1 &= x_0 = \mathbf{10} \\
 x_2 &= x_1 = \mathbf{10} \\
 x_3 &= x_2 = \mathbf{10} \\
 x_4 &= x_3 = \mathbf{10} \\
 x_5 &= x_4 = \mathbf{10} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

d) Substituindo $\alpha = -1,02$ na equação de diferenças $x_{n+1} = (1 + \alpha) \cdot x_n$, temos:

$$x_{n+1} = (-0,02) \cdot x_n, \text{ com } x_0 = 10.$$

Utilizando o processo recursivo, segue:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 10 \\
 x_1 &= (-0,02) \cdot 10 = -\mathbf{0,2} \\
 x_2 &= (-0,02) \cdot (-0,2) = +\mathbf{0,004} \\
 x_3 &= (-0,02) \cdot (+0,004) = -\mathbf{0,00008} \\
 x_4 &= (-0,02) \cdot (-0,00008) = +\mathbf{0,0000016} \\
 x_5 &= (-0,02) \cdot (+0,0000016) = -\mathbf{0,000000032} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

A resolução dos itens **e** até o **h** são de maneira análoga as apresentadas acima.

Após, os estudantes deverão responder às seguintes perguntas:

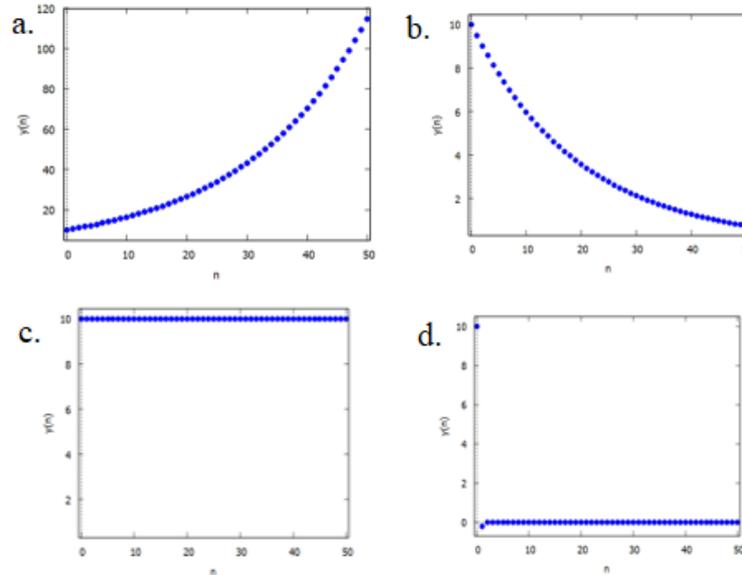
- O que ocorre quando o valor de $\alpha > 0$? Isto ocorre para outros valores de α ? Apresente suas verificações.
- O que ocorre quando o valor de α está entre 0 e 1? Isto ocorre para outros valores de α neste intervalo? Apresente suas verificações.
- O que ocorre quando o valor de α é igual a 0? Isto ocorre sempre? Apresente suas verificações. Além disso, no contexto de uma dinâmica populacional, você acredita que o valor de α pode ser igual a 0? Justifique.
- O que ocorre quando o valor de α é menor que 0? Você acredita que isso pode ocorrer no contexto de uma dinâmica populacional?

Tendo isto feito, a próxima questão terá como intuito explorar as representações gráficas das equações de diferenças (dos itens **a** ao **h**) que caracterizam o modelo de dinâmica populacional malthusiano.

Exercício 2: Represente graficamente por meio do *software* Maxima cada uma das equações de diferença do exercício 1, considerando as 50 primeiras iterações. O que você analisa em cada representação? Esta análise confirma as conclusões obtidas por você no exercício 1?

Resolução: Segue as representações gráficas na Figura 69 (mapas unidimensionais) das equações de diferenças dos itens **a**, **b**, **c** e **d**.

Figura 68: Representação gráfica ou evolução das equações de diferenças das letras a, b, c e d no *software* Maxima.



Fonte: Autoria própria.

Para representar graficamente cada uma das equações de diferença no Maxima, basta digitar na tela inicial o comando *evolution* (x, y, z), onde x , y e z são, respectivamente, a função a ser iterada, a condição inicial considerada e o número de iterações. Após, basta selecionar o comando na tela, direcionar-se à aba “Gráfico” e clicar em “Gráfico 2d”, o que acarretará a exibição gráfica da evolução temporal da equação investigada. Tomemos como exemplo o Exercício 1 (item a) no qual temos que obter as 5 primeiras iterações de $x_{n+1} = (1,05) \cdot x_n$, com $x_0 = 10$. Nesse caso, o comando digitado na tela inicial seria: *evolution* ($1.05 * y, 10, 5$).

No final da atividade, o professor pode comparar as respostas dadas pelos alunos e generalizar o comportamento adotado pelo modelo de Malthus da seguinte maneira:

- Se $\alpha > 0$, a população x_{n+1} tenderá a crescer sem oscilações, e, portanto, com o passar dos anos, a região considerada será totalmente povoada;
- Se $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow 0 < 1 + \alpha < 1$ e, logo, a população x_{n+1} apresentará um decréscimo paulatino que, por sua vez, culminará a longo prazo, em sua total extinção;

- Além disso, é imprescindível que α assumo sempre um valor maior que -1, visto que se $\alpha = -1$, teremos $1 + \alpha = 0$ e a população irá estabilizar, o que é improvável ocorrer na natureza de uma dinâmica populacional;
- Se $\alpha < -1 \Rightarrow 1 + \alpha < 0$ e, desse modo, os valores obtidos para a população x_{n+1} seriam negativos, o que configura um cenário impossível.

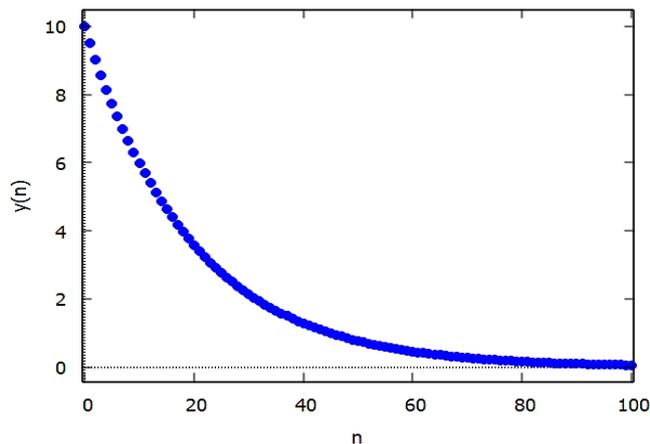
Outrossim, o docente pode aproveitar a representação gráfica feita por meio do *software* Maxima, para introduzir a definição de mapa e órbita, conforme segue:

- A sequência $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, obtida por intermédio das iterações sucessivas de uma equação de diferenças, é denominada de **órbita** ou **trajetória** do sistema a partir de x_0 . Adotaremos a notação $O(x_0)$ para órbita. Por exemplo, no Exercício 1 (item a), temos que a órbita de $x_{n+1} = 1,05 \cdot x_n$, com $x_0 = 10$ é dada pela sequência:

$$O(10) = (10; 10,5; 11,025; 11,57625; \dots).$$

- Os mapas unidimensionais são representados pelo conjunto de pontos $(n, x_n); n \in \mathbb{N}$, onde x_n é o enésimo termo da órbita $O(x_0)$ dado pela equação de diferenças $x_{n+1} = f(x_n)$. Utilizando as ferramentas computacionais, podemos obter a representação gráfica desses mapas e observar a sua evolução de acordo com o número de iterações n consideradas. Tomando como exemplo a equação de diferenças do Exercício 1 (item b) e representando graficamente no Maxima, conseguimos verificar o seu comportamento após 100 iterações – comportamento este, que confirma que a população decresce gradualmente até que seja totalmente extinta (ver Figura 70).

Figura 69: Evolução do mapa unidimensional $x_{n+1} = 0,95 \cdot x_n$, com $x_0 = 10$ após as 100 primeiras iterações.



Fonte: Autoria própria - *software* Maxima.

Após finalizar a atividade, o professor pode questionar aos estudantes o que foi compreendido da situação em questão, e por meio dessa discussão, constatar quais foram as percepções e impressões obtidas por eles, bem como, as dúvidas e incertezas que ainda pairam no cosmo da classe em sua totalidade. A próxima atividade sugerida também tem como enfoque um modelo renomado de dinâmica populacional: O Modelo de Verhulst – popularmente reputado como mapa logístico. A proposta dessa tarefa é a de fortalecer os conceitos e as ideias desenvolvidas no decorrer das atividades 1 e 2, bem como, explorar e investigar o comportamento do Mapa Logístico.

Conforme mencionado no Capítulo 5 deste trabalho, na segunda metade do século XIX, Pierre François Verhulst (1804 – 1849) revisou os modelos de dinâmica populacional existentes e observou a ocorrência de fatores que refreiam o processo de crescimento e, conseqüentemente, o desenvolvimento de uma população. Verhulst pressupôs que a taxa de crescimento populacional não é constante, mas sim, diretamente proporcional à quantidade extrema de sujeitos que uma população pode alcançar, tendo em vista o meio no qual estes indivíduos se encontram inseridos.

Desse modo, o modelo logístico discreto se caracteriza pela seguinte equação de diferenças:

$$x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n).$$

Nesta equação, k é uma constante que pode sofrer alterações mediante as condições ambientais às quais a população se encontra submetida.

Atividade 3: Modelo de Verhulst – O Mapa Logístico

Exercício 1: Considere a equação $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, conhecida como modelo populacional de Verhulst ou como Mapa Logístico Discreto. Com o auxílio de uma calculadora, obtenha as 5 primeiras iterações e construa a representação gráfica por meio do Maxima para analisar o comportamento assumido por essa expressão para os seguintes valores de x_0 e k :

- a) $k = 0,3$ e $x_0 = 0,6$
- b) $k = 1,3$ e $x_0 = 0,6$
- c) $k = 0,9$ e $x_0 = 0,45$
- d) $k = 2,3$ e $x_0 = 0,45$
- e) $k = 3,2$ e $x_0 = 0,5$

- f) $k = 3,45$ e $x_0 = 0,5$
 g) $k = 3,57$ e $x_0 = 0,5$
 h) $k = -0,2$ e $x_0 = 0,34$

Resolução: Serão expostas as soluções dos itens **a, d, e, f e g.**

- a) Substituindo $k = 0,3$ na equação de diferenças $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, temos:

$$x_{n+1} = 0,3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \text{ com } x_0 = 0,6.$$

Utilizando o processo recursivo, segue:

$$x_0 = 0,6$$

$$x_1 = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = \mathbf{0,072}$$

$$x_2 = 0,3 \cdot 0,072 \cdot 0,928 = \mathbf{0,0200448}$$

$$x_3 = 0,3 \cdot 0,0200448 \cdot 0,9799552 = \mathbf{0,005892901}$$

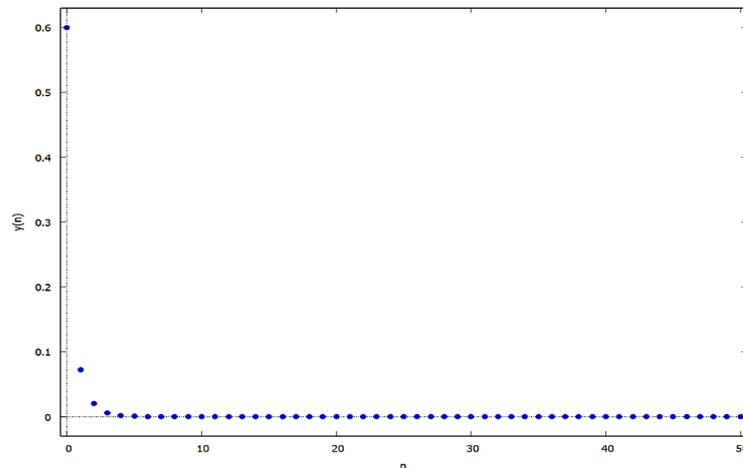
$$x_4 = 0,3 \cdot 0,005892901 \cdot 0,994107098 = \mathbf{0,001757452}$$

$$x_5 = 0,3 \cdot 0,001757452 \cdot 0,998242547 = \mathbf{0,000526309}$$

...

Fazendo os comandos corretamente no Maxima, obtemos a seguinte representação gráfica na Figura 71:

Figura 70: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 0,3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,6$



Fonte: Autoria própria - *software* Maxima.

- d) Fazendo $k = 2,3$ na equação de diferenças $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, obtemos:

$$x_{n+1} = 2,3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \text{ com } x_0 = 0,45.$$

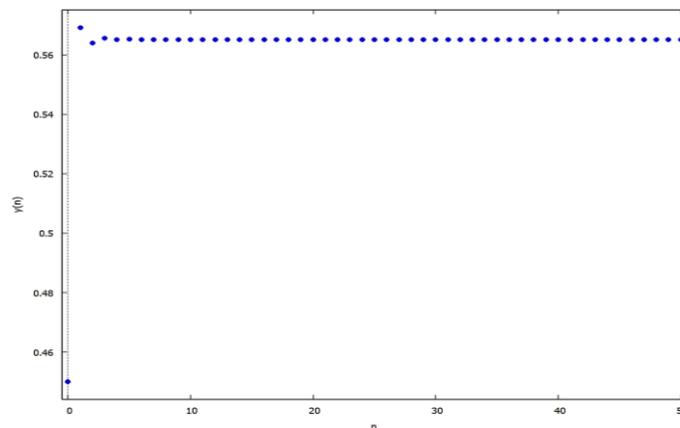
Utilizando o processo recursivo, segue:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0,45 \\x_1 &= 2,3 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = \mathbf{0,56925} \\x_2 &= 2,3 \cdot 0,56925 \cdot 0,43075 = \mathbf{0,563970206} \\x_3 &= 2,3 \cdot 0,563970206 \cdot 0,436029793 = \mathbf{0,565587969} \\x_4 &= 2,3 \cdot 0,565587969 \cdot 0,434412031 = \mathbf{0,565105902} \\x_5 &= 2,3 \cdot 0,565105902 \cdot 0,434894097 = \mathbf{0,565250809}\end{aligned}$$

...

Desenvolvendo a representação no Maxima temos a Figura 72:

Figura 71: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 2,3 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,45$.



Fonte: Autoria própria - *software* Maxima.

e) Tomando $k = 3,2$ na equação de diferenças $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, temos:

$$x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \text{ com } x_0 = 0,5.$$

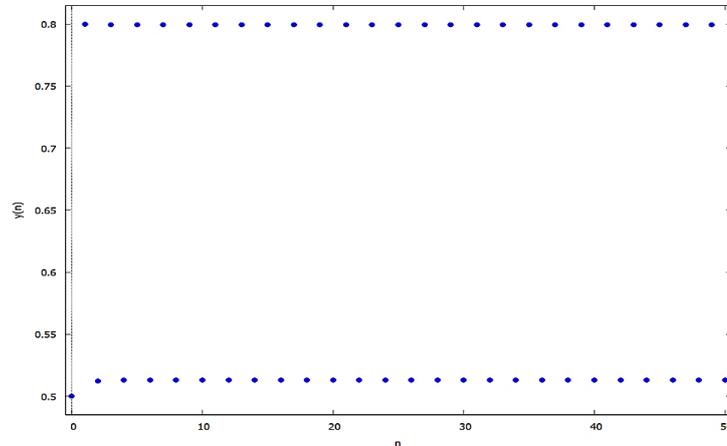
Utilizando o processo recursivo, segue:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0,5 \\x_1 &= 3,2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = \mathbf{0,8} \\x_2 &= 3,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = \mathbf{0,512} \\x_3 &= 3,2 \cdot 0,512 \cdot 0,488 = \mathbf{0,7995392} \\x_4 &= 3,2 \cdot 0,7995392 \cdot 0,2004608 = \mathbf{0,512884056} \\x_5 &= 3,2 \cdot 0,512884056 \cdot 0,487115943 = \mathbf{0,799468802}\end{aligned}$$

...

Desenvolvendo a representação no Maxima temos a Figura 73:

Figura 72: Representação do mapa unidimensional $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,5$.



Fonte: Autoria própria - *software* Maxima

- f) Considerando $k = 3,45$ na equação de diferenças $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, segue:

$$x_{n+1} = 3,45 \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \text{ com } x_0 = 0,5.$$

Utilizando o processo recursivo, segue:

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 3,45 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = \mathbf{0,8625}$$

$$x_2 = 3,45 \cdot 0,8625 \cdot 0,1375 = \mathbf{0,409148437}$$

$$x_3 = 3,45 \cdot 0,409148437 \cdot 0,590851562 = \mathbf{0,834023676}$$

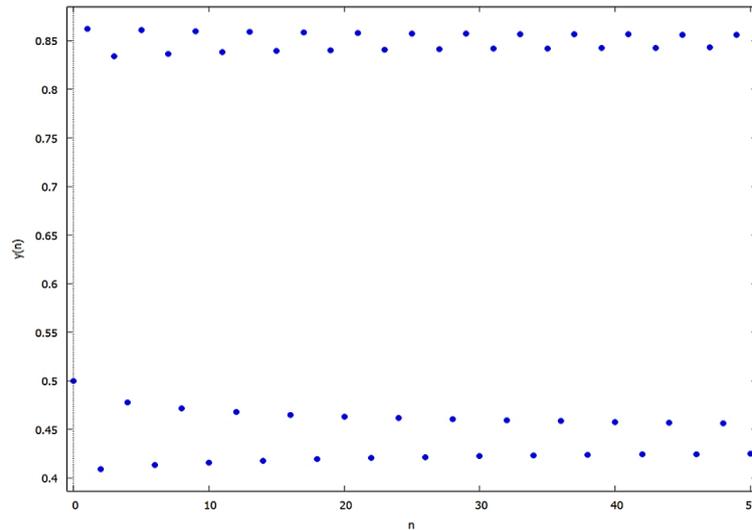
$$x_4 = 3,45 \cdot 0,834023676 \cdot 0,165976323 = \mathbf{0,477577231}$$

$$x_5 = 3,45 \cdot 0,477577231 \cdot 0,522422768 = \mathbf{0,860765406}$$

...

Representando no *software* Maxima temos a Figura 74:

Figura 73: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 3,45 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,5$.



Fonte: Autoria própria - *software* Maxima.

g) Adotando $k = 3,57$ na equação de diferenças $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, segue:

$$x_{n+1} = 3,57 \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \text{ com } x_0 = 0,5.$$

Utilizando o processo recursivo, segue:

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 3,57 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = \mathbf{0,8925}$$

$$x_2 = 3,57 \cdot 0,8925 \cdot 0,1075 = \mathbf{0,342519187}$$

$$x_3 = 3,57 \cdot 0,342519187 \cdot 0,657480812 = \mathbf{0,803963262}$$

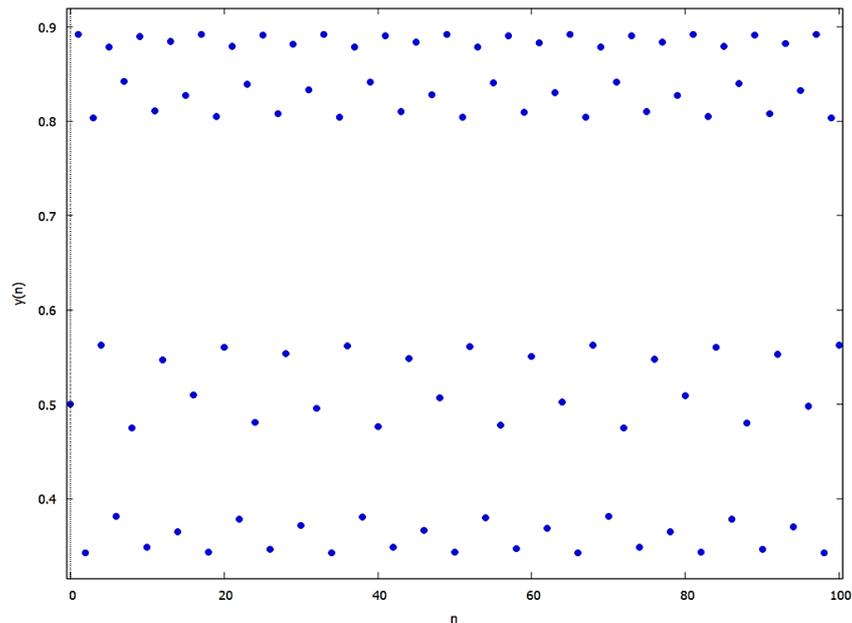
$$x_4 = 3,57 \cdot 0,803963262 \cdot 0,196036737 = \mathbf{0,562654616}$$

$$x_5 = 3,57 \cdot 0,562654616 \cdot 0,437345383 = \mathbf{0,878485604}$$

...

Ao introduzir os comandos no *software* Maxima (nesse caso, considerando um total de 100 iterações), obtemos a Figura 75:

Figura 74: Representação gráfica do mapa $x_{n+1} = 3,57 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,5$.



Fonte: Autoria própria - *software* Maxima.

Ao término do Exercício 1, o docente pode propiciar um espaço de interação e discussão acerca das respostas encontradas pelos estudantes e utilizando o *software* Maxima, apresentar exemplos adicionais que permitam generalizar, inferir e identificar o comportamento adotado pelo mapa logístico para os distintos valores assumidos pela constante k . Assim, o professor deve evidenciar que:

- Se $0 < k < 1$, todas as órbitas confluem para 0, ou seja, a população tende a se extinguir (ver a resolução do Exercício 1 – item **a**);
- Ao adotarmos $k < 3$, a população passa a ter melhores condições de desenvolvimento e as sucessivas iterações convergem para um ponto de equilíbrio, ou seja, a população tende a estabilizar-se após determinado tempo. Verificar a resolução do Exercício 1 (item **d**), onde $k = 2,3$;
- Quando $k = 3,2$; o mapa logístico desvela uma transição – transição esta, que se caracteriza pela mudança de estado de um único ponto de equilíbrio para dois pontos de estabilidade. Desse modo, a população passa a oscilar entre dois valores (órbita de período 2) que se repetem sucessivamente, isto é, a população retorna à mesma condição a cada dois anos. Essa duplicação de período recebe o nome de bifurcação (observe a resolução do Exercício 1 – item **e**);

- Uma nova transição irrompe quando k assume o valor 3,45; visto que a população começa a oscilar de dois estados de equilíbrio para quatro, ou seja, o número de indivíduos da população considerada é a mesma a cada período de quatro anos (analise a resolução do Exercício 1 – item f);
- Por fim, quando $k > 3,5699456$; temos que o mapa logístico exhibe um comportamento complexo no qual, intercala regiões periódicas (nas quais há oscilação de estados de equilíbrio) e áreas nas quais o **caos** se manifesta e se desvela imponentemente.

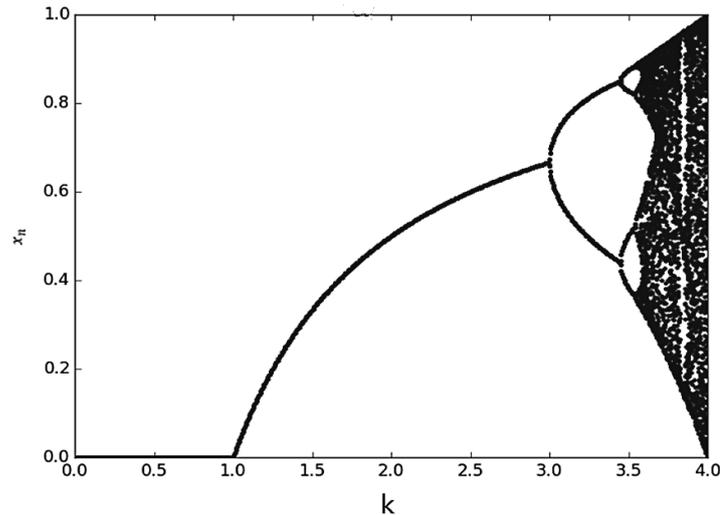
Tendo isto posto, o professor pode apresentar aos estudantes o diagrama, conforme a Figura 76, que exhibe as reações do mapa logístico conforme os valores atribuídos à constante k (que varia de acordo com as condições do meio no qual a população está inserida) e pode, conjuntamente com a classe, elaborar e construir uma definição para Sistemas Dinâmicos, tendo como referência o contexto das atividades trabalhadas até o instante momento. Desse modo, o docente pode definir um Sistema Dinâmico como um sistema no qual se observam as transformações ocorridas com o decorrer do tempo e que é descrito por uma regra ou um conjunto de regras que, a partir de uma condição inicial x_0 , define os estados atuais em função dos estados posteriores – isto é, se caracteriza por um processo recursivo.

Nesse sentido, o professor pode mencionar também que há dois subtipos de sistemas dinâmicos: os **discretos** (representados pelos mapas iterados e pelas equações de diferenças) e os **contínuos** – os quais, devido ao seu grau de complexidade, não serão contemplados de maneira minuciosa no Ensino Básico. Cabe ressaltar que durante o desenvolvimento dessa atividade os alunos terão o seu primeiro contato com o **caos** e, portanto, faz-se necessário que o docente questione os estudantes com respeito ao que depreende do termo e possibilitar que relatem as suas impressões acerca das representações do mapa logístico nas quais o caos se perfaz inequívoco. O professor pode então conceituar o caos de maneira concisa, ressaltando, porém, que esta concepção será investigada de maneira aprofundada nas atividades subsequentes.

Outrossim, o docente pode complementar a definição de sistemas dinâmicos discretos, enunciando que esse subtipo de sistema é representado por meio de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que possibilita obter x_{n+1} num instante t_{n+1} , a partir do estado x_n , no instante t_n ; ou seja:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Figura 75: Diagrama que sintetiza o comportamento do Mapa Logístico para os distintos valores assumidos pela constante k .



Fonte: arodadavida.wordpress.com

Caso o docente considere necessário, há a possibilidade de explorar a construção dos diagramas de teia de aranha (*cobweb*) do mapa logístico no Winplot, possibilitando aos estudantes o contato com distintas maneiras de representação, bem como, o desenvolvimento de noções – mesmo que preliminares – a respeito do que venha a se constituir como pontos fixos. Para mais além, é interessante que os estudantes observem as movimentações das espirais e compreendam o que ocorre com o mapa logístico nas duas representações gráficas apresentadas (mapas unidimensionais e diagrama de *cobweb*). Caso o professor se interesse por essa sugestão, alguns diagramas de teia de aranha foram apresentados no Capítulo 5 desta dissertação, bem como, a próxima atividade sugerida terá como enfoque a construção desses diagramas no Winplot para identificação de pontos fixos atratores e repulsores.

Atividade 4: Construção dos Diagramas de *Cobweb* no Winplot e identificação dos pontos fixos atratores e repulsores.

A princípio, é de extrema importância ressaltar que alguns conceitos devem ser explorados com os estudantes antes que esta atividade seja realizada. O ideal é que o professor diferencie os sistemas dinâmicos discretos lineares dos não-lineares (conforme exposto no Capítulo 5 deste trabalho) e que apresenta a definição de ponto fixo:

Um ponto x_{PF} é um ponto fixo do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$, se satisfaz à equação:

$$f(x_{PF}) = x_{PF}.$$

Em seguida, o docente pode explorar alguns exemplos com os alunos, possibilitando a compreensão no que se refere ao processo de obtenção dos pontos fixos de um sistema dinâmico discreto. Ademais, o professor pode enunciar o diagrama de teia de aranha (*cobweb*) e descrever a sua construção, tanto manual quanto no Winplot. O diagrama de teia de aranha consiste na representação no mesmo eixo de coordenadas cartesianas da função identidade $y = x$ e da equação que caracteriza o sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$. Para mais além, a intersecção resultante dessas funções nos fornece os pontos fixos do sistema, bem como nos permite analisar a trajetória percorrida pelas órbitas a cada iteração.

Para realizar essa construção no Winplot, devemos primeiramente selecionar a opção “2 dimensões”, que abrirá uma janela adicional contendo um eixo de sistemas coordenados. Nesta janela, devemos ir até a opção “Equa” e clicar em “*Explicit*”. Logo em seguida, será aberta uma aba adicional na qual devemos colocar a função que caracteriza o sistema dinâmico e após confirmarmos, a representação da função será exposta no plano cartesiano e uma nova aba surgirá na tela do Winplot. Nesta tela devemos clicar em “*web*” e completar com a “*constant*” (valor inicial do sistema) e os “*steps*” (quantidade de iterações). Feito isto, aparecerá no plano cartesiano o diagrama de teia de aranha – setas em vermelho que representam a trajetória das órbitas do sistema e que nos possibilita verificar se essas trajetórias convergem ou divergem do ponto fixo do sistema dinâmico discreto considerado.

Após ter concluído essas etapas, o professor pode aplicar aos estudantes o seguinte exercício:

Exercício: Em cada um dos sistemas dinâmicos discretos a seguir, com o auxílio de uma calculadora, determine as 5 primeiras órbitas; o ponto fixo x_{PF} e realize a construção do diagrama de teia de aranha (*cobweb*) no Winplot para as 30 primeiras iterações:

a) $x_{n+1} = -2x_n + 1$, com $x_0 = 0,2$

b) $x_{n+1} = 1,5x_n - 3$, com $x_0 = 5$

c) $x_{n+1} = 0,4x_n + 0,5$, com $x_0 = 0,8$

d) $x_{n+1} = 0,8x_n + 3$, com $x_0 = 10$

e) $x_{n+1} = -x_n + 3$, com $x_0 = 1$

f) $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,1$

g) $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,9$

h) $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,45$

i) $x_{n+1} = 3,57 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,5$

Resolução: Serão apresentadas as resoluções dos itens **a, d, e, f, g e h**.

- a) Calculando as 5 primeiras órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = -2x_n + 1$, com $x_0 = 0,2$; temos:

$$x_0 = 0,2$$

$$x_1 = -2 \cdot 0,2 + 1 = -0,4 + 1 = 0,6$$

$$x_2 = -2 \cdot 0,6 + 1 = -1,2 + 1 = -0,2$$

$$x_3 = -2 \cdot (-0,2) + 1 = +0,4 + 1 = 1,4$$

$$x_4 = -2 \cdot 1,4 + 1 = -2,8 + 1 = -1,8$$

$$x_5 = -2 \cdot (-1,8) + 1 = +3,6 + 1 = 4,6$$

...

$$O(0,2) = (0,2; 0,6; -0,2; 1,4; -1,8; 4,6; \dots).$$

Para obtermos o ponto fixo x_{PF} , devemos ter:

$$f(x_{PF}) = x_{PF}$$

$$-2x_{PF} + 1 = x_{PF}$$

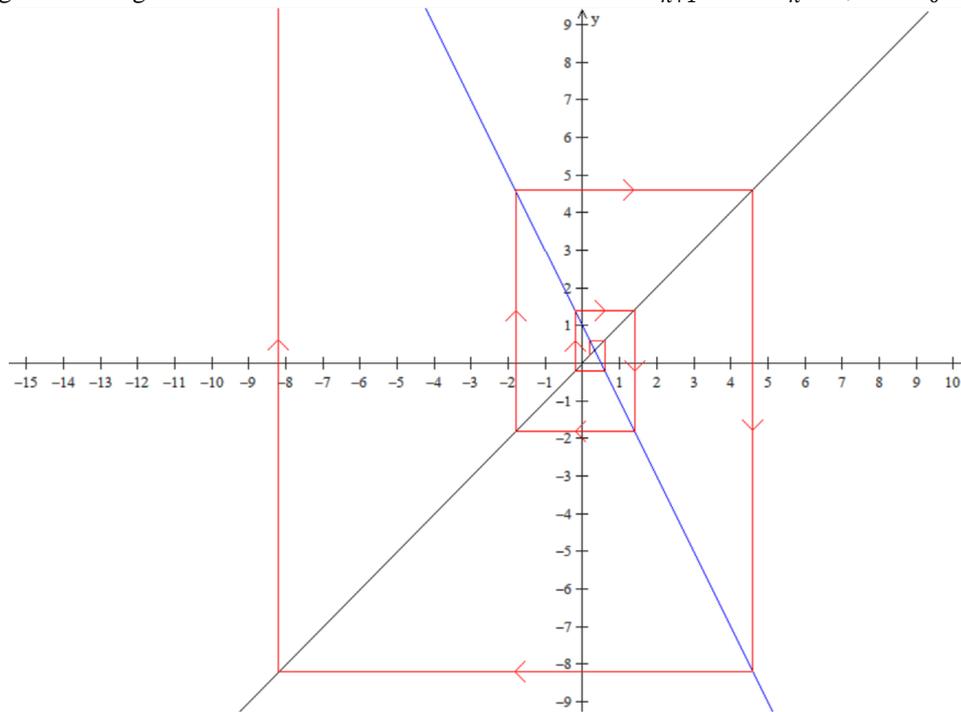
$$-2x_{PF} - x_{PF} = -1$$

$$-3x_{PF} = -1$$

$$x_{PF} = \frac{1}{3}.$$

Realizando corretamente a construção no Winplot, temos a Figura 77:

Figura 76: Diagrama de *cobweb* do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = -2x_n + 1$, com $x_0 = 0,2$.



Fonte: Autoria própria – Winplot.

d) Calculando as 5 primeiras órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 0,8x_n + 3$, com $x_0 = 10$; obtemos:

$$x_0 = 10$$

$$x_1 = 0,8 \cdot 10 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$x_2 = 0,8 \cdot 11 + 3 = 8,8 + 3 = 11,8$$

$$x_3 = 0,8 \cdot 11,8 + 3 = 9,44 + 3 = 12,44$$

$$x_4 = 0,8 \cdot 12,44 + 3 = 9,952 + 3 = 12,952$$

$$x_5 = 0,8 \cdot 12,952 + 3 = 10,3616 + 3 = 13,3616$$

...

$$O(10) = (10, 11; 11,8; 12,44; 12,952; 13,3616; \dots).$$

Para obter o ponto fixo x_{PF} :

$$f(x_{PF}) = x_{PF}$$

$$0,8x_{PF} + 3 = x_{PF}$$

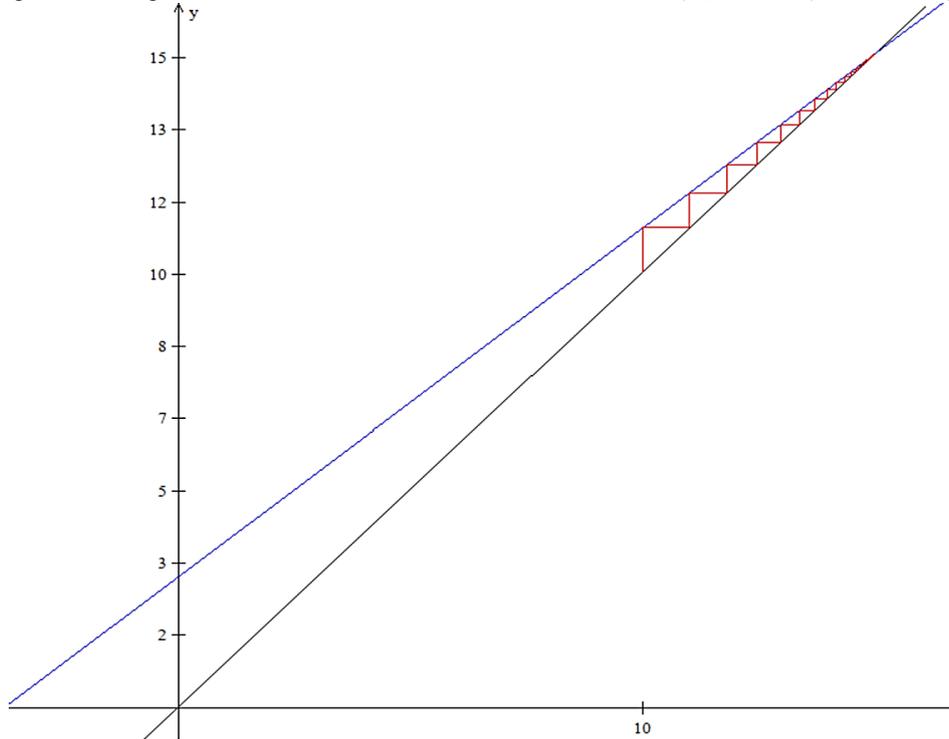
$$x_{PF} - 0,8x_{PF} = 3$$

$$0,2x_{PF} = 3$$

$$x_{PF} = \frac{3}{0,2} \Rightarrow x_{PF} = 15.$$

Fazendo a construção no Winplot, segue a Figura 78:

Figura 77: Diagrama de *cobweb* do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 0,8x_n + 3$, com $x_0 = 10$.



Fonte: Autoria própria – Winplot.

e) Ao calcular as 5 primeiras órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = -x_n + 3$, com $x_0 = 1$; obtemos:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = -1 + 3 = 2$$

$$x_2 = -2 + 3 = 1$$

$$x_3 = -1 + 3 = 2$$

$$x_4 = -2 + 3 = 1$$

$$x_5 = -1 + 3 = 2$$

$$\dots$$

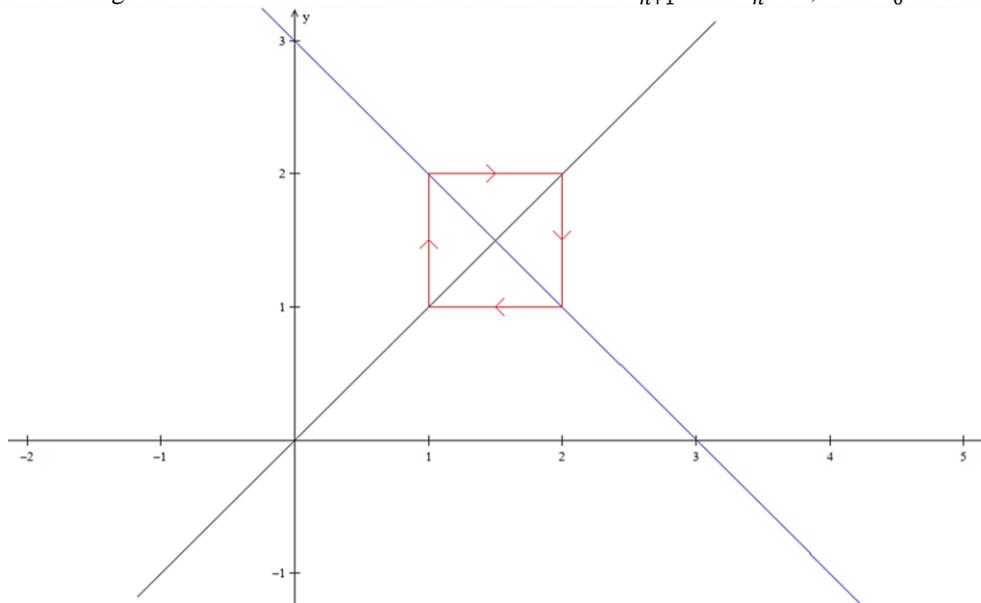
$$O(1) = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$$

Com o intuito de obter o ponto fixo x_{PF} :

$$\begin{aligned} f(x_{PF}) &= x_{PF} \\ -x_{PF} + 3 &= x_{PF} \\ x_{PF} + x_{PF} &= 3 \\ 2x_{PF} &= 3 \\ x_{PF} &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Representando graficamente no Winplot obtemos a Figura 79:

Figura 78: Diagrama de *cobweb* do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = -x_n + 3$, com $x_0 = 1$.



Fonte: Autoria própria – Winplot.

f) Ao calcular as 5 primeiras órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,1$; temos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,1 \\ x_1 &= (0,1)^2 = 0,01 \\ x_2 &= (0,01)^2 = 0,0001 \\ x_3 &= (0,0001)^2 = 0,00000001 \\ x_4 &= (0,00000001)^2 = 0,0000000000000001 \\ x_5 &= (0,0000000000000001)^2 = 0,0000000000000000000000000001 \\ &\dots \\ O(0,1) &= (0,1; 0,01; 0,0001; 0,00000001; 0,0000000000000001; \dots). \end{aligned}$$

Calculando os pontos fixos x_{PF} :

$$f(x_{PF}) = x_{PF}$$

$$x_{PF}^2 = x_{PF}$$

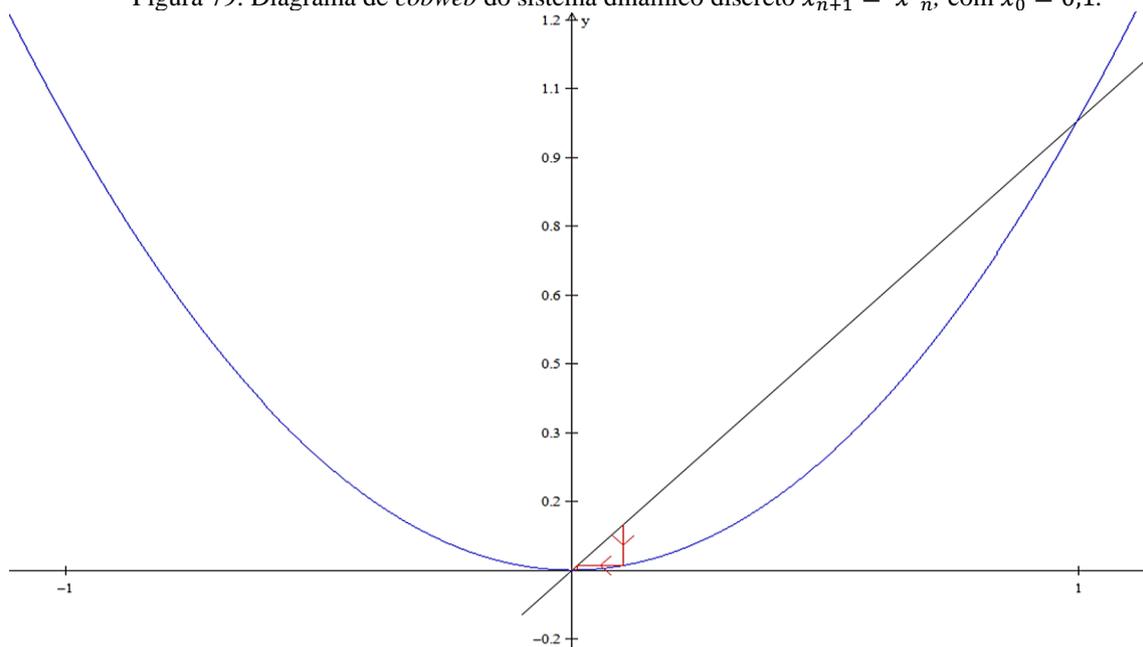
$$x_{PF}^2 - x_{PF} = 0$$

$$x_{PF} \cdot (x_{PF} - 1) = 0$$

$$x_{PF} = 0 \text{ e } x_{PF} = 1.$$

Fazendo a representação gráfica no Winplot, segue a Figura 80:

Figura 79: Diagrama de *cobweb* do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,1$.



Fonte: Autoria própria – Winplot.

g) Calculando as primeiras 5 órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,9$; obtemos:

$$x_0 = 0,9$$

$$x_1 = (0,9)^2 = 0,81$$

$$x_2 = (0,81)^2 = 0,6561$$

$$x_3 = (0,6561)^2 = 0,43046721$$

$$x_4 = (0,43046721)^2 = 0,185302018$$

$$x_5 = (0,185302018)^2 = 0,034336837$$

...

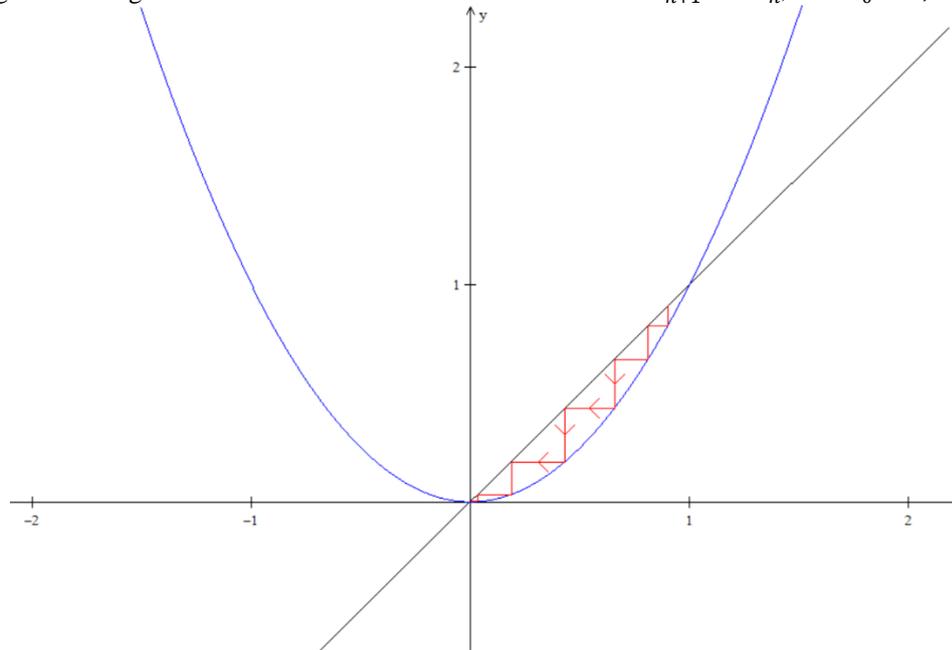
$$O(0,9) = (0,9; 0,81; 0,6561; 0,43046721; 0,185302018; 0,03433683; \dots).$$

Como o sistema dinâmico discreto considerado é o mesmo do item f, logo, os pontos fixos x_{PF} são:

$$x_{PF} = 0 \text{ e } x_{PF} = 1.$$

Realizando a representação gráfica no Winplot, obtemos a Figura 81:

Figura 80: Diagrama de cobweb do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 0,9$.



Fonte: Autoria própria – Winplot.

h) Calculando as 5 primeiras órbitas do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,45$; temos:

$$x_0 = 0,45$$

$$x_1 = 3,2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,792$$

$$x_2 = 3,2 \cdot 0,792 \cdot 0,208 = 0,5271552$$

$$x_3 = 3,2 \cdot 0,5271552 \cdot 0,4728448 = 0,797640304$$

$$x_4 = 3,2 \cdot 0,797640304 \cdot 0,202359695 = 0,516512797$$

$$x_5 = 3,2 \cdot 0,516512797 \cdot 0,483487202 = 0,799127447$$

...

$$O(0,45) = (0,45; 0,792; 0,5271552; 0,797640304; 0,516512797; 0,799127447; \dots).$$

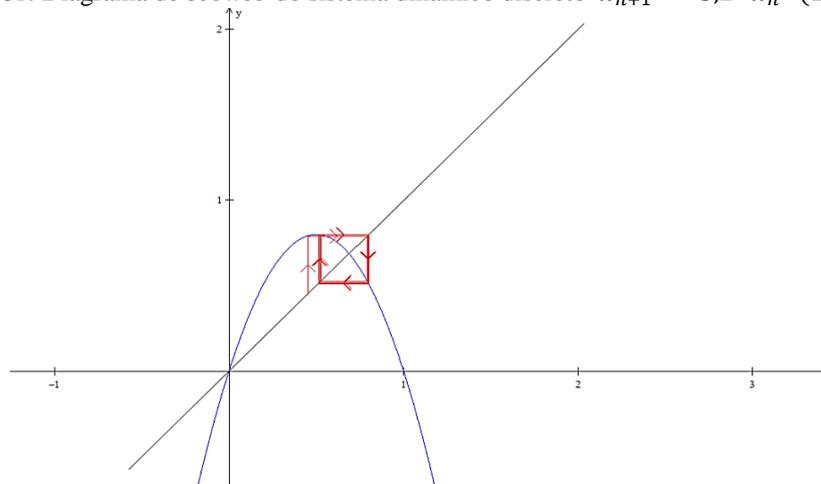
Para obter o ponto fixo x_{PF} , considera-se:

$$f(x_{PF}) = x_{PF}$$

$$\begin{aligned}
 -3,2x_{PF}^2 + 3,2x_{PF} &= x_{PF} \\
 -3,2x_{PF}^2 + 3,2x_{PF} - x_{PF} &= 0 \\
 -3,2x_{PF}^2 + 2,2x_{PF} &= 0 \\
 x_{PF} \cdot (-3,2x_{PF} + 2,2) &= 0 \\
 x_{PF} = 0 \text{ e } -3,2x_{PF} + 2,2 &= 0 \\
 x_{PF} = 0 \text{ e } -3,2x_{PF} &= -2,2 \\
 x_{PF} = 0 \text{ e } x_{PF} = \frac{11}{16} &= 0,6875.
 \end{aligned}$$

Representando graficamente no Winplot, obtemos a Figura 82:

Figura 81: Diagrama de *cobweb* do sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = 3,2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com $x_0 = 0,45$.



Fonte: Autoria própria – Winplot.

Ao término desta atividade, o docente deverá direcionar os estudantes a observarem as trajetórias percorridas pelas órbitas, bem como, a estabelecerem uma relação entre essas trajetórias e o ponto fixo do sistema-relação essa, facilitada com a análise da representação gráfica feita no Winplot.

O professor deve apresentar aos alunos três classificações possíveis para os pontos fixos: atratores, repulsores e neutros. Com base nas classificações e nas análises realizadas, o docente pode propor aos estudantes que classifiquem os pontos fixos de cada sistema dinâmico do Exercício 1. Logo em seguida, com o intuito de compreender de que modo os alunos conceberam essa classificação, o professor deve viabilizar e possibilitar um espaço de diálogo e de discussão acerca das respostas encontradas e definir juntamente com a classe que:

- Um ponto fixo é denominado **atrator** quando todas as órbitas são atraídas a ele, ou seja: Ao considerarmos valores para x_0 de tal modo que $x_0 > x_{PF}$, a trajetória das órbitas será atraída para o ponto fixo e ao tomarmos $x_0 < x_{PF}$, analisamos que o mesmo comportamento se repete, já que as órbitas também convergem para ele;
- Um ponto fixo é denominado **repulsor** quando todas as órbitas são repelidas por ele, isto é, atribuindo valores para x_0 de modo que $x_0 > x_{PF}$, a trajetória das órbitas será repelida pelo ponto fixo, afastando-se dele continuamente e ao considerarmos $x_0 < x_{PF}$, averiguamos que o mesmo comportamento ocorre. Portanto, embora o valor inicial x_0 esteja significativamente próximo do ponto fixo x_{PF} , a trajetória percorrida por suas órbitas divergirá dele de maneira gradual;
- Um ponto fixo é denominado **neutro** quando ao considerar $x_0 > x_{PF}$, notamos que as trajetórias das órbitas convergem para o ponto fixo x_{PF} e, em contrapartida, ao tomarmos $x_0 < x_{PF}$, observamos que as órbitas divergem de x_{PF} (ou vice-versa), ou seja, o ponto fixo em questão não é atrator e nem repulsor, visto que as trajetórias não convergem e nem divergem totalmente do ponto fixo considerado.

Tendo isto posto, o docente pode vislumbrar com os estudantes o conceito de estabilidade e instabilidade (analisar contextos expostos no Capítulo 5 desta dissertação) e para mais além, desenvolver com os alunos a noção de órbita de um ponto fixo. É imprescindível ressaltar que as atividades sugeridas nessa primeira etapa têm por finalidade estabelecer uma noção intuitiva e preliminar acerca dos Sistemas Dinâmicos e que o professor tem a liberdade de aplicá-las conforme julga ser adequado e adaptá-las à realidade do contexto de suas turmas e da sala de aula.

7.2 O que é o caos? De que modo o caos se expressa e se manifesta?

Nesta etapa, serão sugeridas duas atividades que têm por objetivo despertar os estudantes para a reflexão do seja o caos e de que modo ele se expressa no cotidiano e no contexto que permeia os Sistemas Dinâmicos Discretos. O professor, antes de desenvolver as

duas atividades aqui propostas, pode solicitar aos estudantes que pesquisem os significados da palavra caos e que compartilhem as respostas encontradas com os colegas de classe, possibilitando um espaço de interação e de troca de conhecimentos, abrindo espaço para a reflexão acerca do que foi pesquisado e gerando uma discussão saudável tendo como enfoque o tema. O professor deve ser o mediador da discussão, tomando nota das convicções e das dúvidas dos estudantes e complementando que intervirá apenas no decorrer das atividades propostas.

Atividade 1: O que é o caos? De que modo se expressa e se manifesta?

Esta atividade consiste em apresentar trechos de dois filmes, dentre os quais: Efeito Borboleta (2004) e O Curioso Caso de Benjamin Button (2008). O docente deve fazer uma breve resenha dos filmes e logo em seguida, apresentar os trechos selecionados aos estudantes. No filme Efeito Borboleta (2004), o docente pode selecionar diversas cenas do filme, nas quais o personagem principal, Evan Treborn – interpretado pelo ator Ashton Kutcher – realiza viagens no tempo com o intuito de mudar algo em seu passado ou no passado de amigos e pessoas próximas. Em meio a essas tentativas de interferir e mudar os acontecimentos passados, Evan acaba desencadeando acontecimentos inesperados e caóticos no futuro de todos os envolvidos. Já no filme, O Curioso Caso de Benjamin Button, o trecho que faz menção ao caos se caracteriza pela descrição das atividades realizadas por duas mulheres e um taxista durante o seu dia. A primeira mulher sai de casa para fazer compras, no entanto, esquece o seu casaco e precisa retornar para buscá-lo. Ao buscar o casaco, o telefone toca e ela resolve atender a ligação e se mantém nela por alguns minutos. Enquanto isso, a outra mulher envolvida no contexto – denominada Deise – estava ensaiando para uma apresentação. Enquanto Deise ensaiava, a mulher encerra a ligação e sai para pegar um táxi. Além disso, um taxista deixa seu passageiro mais cedo e realiza uma pausa para tomar café. Neste ínterim, Deise continua ensaiando. O taxista que havia parado anteriormente para o café é o responsável por atender a moça que não conseguiu pegar o táxi mais cedo (visto haver esquecido o casaco em casa). Todos esses acontecimentos, acrescidos de interferências e pausas durante o trajeto deste taxista, culminam no atropelamento de Deise pelo motorista do táxi. A cena em questão se encerra com a seguinte afirmação: “Se apenas uma dessas situações tivesse ocorrido de maneira distinta, Deise não teria sido atropelada.” Desse modo, em ambas as cenas são evidenciadas as consequências grandiosas e catastróficas advindas de atitudes ou situações aparentemente irrelevantes, simples e sutis. Encerrando a apresentação, o professor deve sugerir que os alunos se reúnam em duplas ou trios e que respondam às seguintes perguntas:

Exercício

1. O que foi compreendido em relação aos dois trechos exibidos em classe? Estes trechos possuem algo em comum? Se sim, o quê?

2. Dentre os significados que você e sua classe encontraram para a palavra “caos”, há algum que se encaixa exatamente com o retratado nas cenas desses filmes? Qual? Em caso negativo, elabore uma definição para a palavra caos que reflita o exposto nos filmes.

3. Juntamente com seus colegas, pesquisem o significado do termo “Efeito Borboleta”. O que vocês encontraram? O significado deste termo apresenta alguma conexão com as cenas assistidas? Explique com suas palavras.

4. Apresente uma ou mais situações na qual o caos (também conhecido como Efeito Borboleta) se faça evidente.

Ao término da atividade, o professor convida os estudantes a compartilharem suas respostas e a classe deverá em conjunto elaborar e concordar no que se refere a uma definição para o caos do ponto de vista científico - matemático. O docente, então, poderá mencionar novamente o caos no mapa logístico – termo que surgiu durante o processo de realização da Atividade 3 da etapa 1 – retomar o mapa unidimensional e mostrar aos alunos que o caos também se desvela como a impossibilidade de previsão a longo prazo, visto que, mudanças, por mais singelas que sejam, se apresentam como catalisadoras e propulsoras de cenários complexos e caóticos.

Uma possibilidade de dar fundamentação ao exposto é discorrer sobre os modelos de previsão meteorológicas e retratar que esses modelos foram construídos e concebidos tendo como referencial diversos fatores ambientais e atmosféricos e que, portanto, quaisquer mudanças, por mínimas que sejam, podem afetar os prognósticos realizados.

Atividade 2: O mapa logístico como rota para o caos – A Sensibilidade às condições iniciais

Nessa atividade, o objetivo será aprofundar os conhecimentos a respeito do Mapa Logístico (desenvolvidos nas Atividades 3 e 4 da etapa 1) e reconhecê-lo como peça-chave e elementar na concepção do caos e de que maneira se manifesta - mediante a sensibilidade às condições iniciais. Desta maneira, será utilizado como referência uma atividade proposta em um livro didático do 9º ano, intitulado “Vontade de saber matemática”, da editora FTD (Souza

e Pataro, 2009, p. 107), enunciada no trabalho “Atratores caóticos” de Edilson de Moura (2011). O objetivo é que os estudantes leiam o texto proposto, respondam às questões propostas (itens a, b, c, d) e que, além disso, utilizem o Winplot para construir os diagramas de *cobweb* referentes às situações enunciadas no item d, com a intenção de analisar os distintos comportamentos assumidos pelo mapa logístico. Para mais além, a proposta é de que sejam realizadas algumas alterações no enunciado do item d, tendo em vista a linguagem adotada no decorrer desta dissertação. Além disso, sugere-se um item adicional (letras e), visando aprimorar o processo investigativo e o entendimento de como o comportamento caótico se manifesta no modelo de Verhulst. Ainda com relação ao Mapa Logístico e ao contexto das dinâmicas populacionais, Baier (2005), afirma que:

Na atualidade, frente à ameaça que a postura mecanicista representa, torna-se urgente a incorporação nos currículos da Matemática do pensamento não-linear e a abordagem de questões ecológicas. Essa ligação pode acontecer, por exemplo, com o estudo da dinâmica populacional, por meio do modelo logístico de May, relacionado com os temas fractais, função composta e função quadrática, que revela a fragilidade do equilíbrio ecológico, pois é *sensivelmente dependente das condições iniciais*. Não se trata de rejeitar os avanços tecnológicos, mas de reconhecer a capacidade limitada do meio ambiente de sobreviver equilibradamente no turbilhão de ações predatórias. (p. 139)

Abaixo, na Figura 83, segue a atividade proposta no livro didático Vontade de saber matemática (2019) – 9º ano:

Figura 82: Explorando o tema: A matemática do caos.

Explorando o tema

Anote as respostas no caderno.

A matemática do caos

Pode o bater de asas de uma borboleta provocar um furacão?

É um fato conhecido que epidemias como rubéola, sarampo e outras têm a tendência de ocorrer em ciclos que podem ser irregulares. O biomatemático australiano Robert May, radicado na Inglaterra, descobriu na década de 70 que esses ciclos podem ser entendidos matematicamente. E por meio de uma simples equação do segundo grau!

May pesquisou o que ocorreria com uma epidemia se, de repente, houvesse uma vacinação em massa. Ele usou uma função de segundo grau [...], concebida pelo matemático belga Pierre François Verhulst em 1845, para simular o comportamento da epidemia, e verificou que poderiam ocorrer grandes oscilações, isto é, em algum momento o número de infectados tenderia a crescer abruptamente e num momento posterior a diminuir drasticamente. Mas será que essa experiência matemática com uma mera função do segundo grau corresponderia à realidade das epidemias?

Borboleta: 5 cm a 10 cm de comprimento
Pictobase/ Getty Images



Uma campanha de vacinação contra a rubéola na Inglaterra havia surpreendido os médicos pelas oscilações no número de infectados, exatamente como May descobrira naquela simples equação. Após essa constatação, funcionários da saúde e médicos não podem mais tirar conclusões apressadas sobre o sucesso de uma vacinação em massa: graças a uma simples função de segundo grau, que se aprende no ensino fundamental!

Por volta de 1963, Edward Lorenz, pesquisador de meteorologia do MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), já havia descoberto que mesmo simplificando muito seu modelo do clima, ele já se mostrava "caótico". Quem poderia imaginar que em fórmulas que pareciam simples já poderia aparecer o caos? Impressionado, Lorenz disse uma vez que uma borboleta poderia, com um mero bater de asas, alterar o curso de um furacão a milhares de quilômetros de distância e muitos anos mais tarde!

[...]

Geloneze, Antônio. In: *Galileu*, ano 10, n. 115. Rio de Janeiro: Globo, fevereiro/2001. p. 84.



Pictobase/ Getty Images

a) Qual a ideia principal do texto? Apresentar o comportamento matemático do caos por meio de exemplos simples.

b) De acordo com os exemplos contidos no texto, o que você entende como sendo o comportamento caótico? Resposta esperada: uma simples mudança em algo pequeno pode acarretar imensas mudanças.

c) O que o autor quer mostrar com a seguinte afirmação: "uma borboleta poderia, com um mero bater de asas, alterar o curso de um furacão a milhares de quilômetros de distância e muitos anos mais tarde!"? Resposta esperada: mesmo um acontecimento pouco significativo pode gerar grandes consequências.

d) O modelo de Verhulst citado no texto é dado por $y = k \cdot p \cdot (1 - p)$, no qual k representa uma característica da população e p (cujo valor máximo é 1) representa o percentual do número de indivíduos vivos nessa população. Com o auxílio de uma calculadora, considere $k = 4,5$ e use os valores 0,25; 0,5; 0,75 para p . Em seguida, faça o mesmo para $k = 5$. O que você pôde observar? para $k = 4,5$, $y(0,25) = 0,84375$; $y(0,5) = 1,125$; $y(0,75) = 0,84375$
para $k = 5$, $y(0,25) = 0,9375$; $y(0,5) = 1,25$; $y(0,75) = 0,9375$

d) Resposta esperada: uma pequena alteração na função para o mesmo k provoca grandes oscilações para o valor de y . Além disso, é possível obter valores iguais para y a partir de valores diferentes de p .

Fonte: Souza e Pataro (2009) – retirado de Moura (2011)

Após realizada a alteração no item d, teríamos:

d. O modelo de Verhulst (também conhecido como Mapa Logístico) citado no texto é expresso pelo sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, no qual k varia de acordo com as condições ambientais do local onde a população se encontra inserida e x_n representa o percentual de indivíduos integrantes dessa população no período n . Com o auxílio de uma calculadora, considere $k = 4,5$ e utilize como valores iniciais $x_0 = 0,25$; $x_0 = 0,5$ e $x_0 = 0,75$. Em seguida, faça o mesmo para $k = 5$. O que você consegue observar?

O item adicional sugerido seria:

e. Com base na descrição fornecida pelo professor ao final da Atividade 3 da etapa 1, escolha 4 valores para a constante k , de modo que o mapa logístico desvele um comportamento caótico e faça a representação dos mapas e dos diagramas de *cobweb* para $x_0 = 0,25$; $x_0 = 0,5$ e $x_0 = 0,75$ para as 50 primeiras iterações. O que você observa?

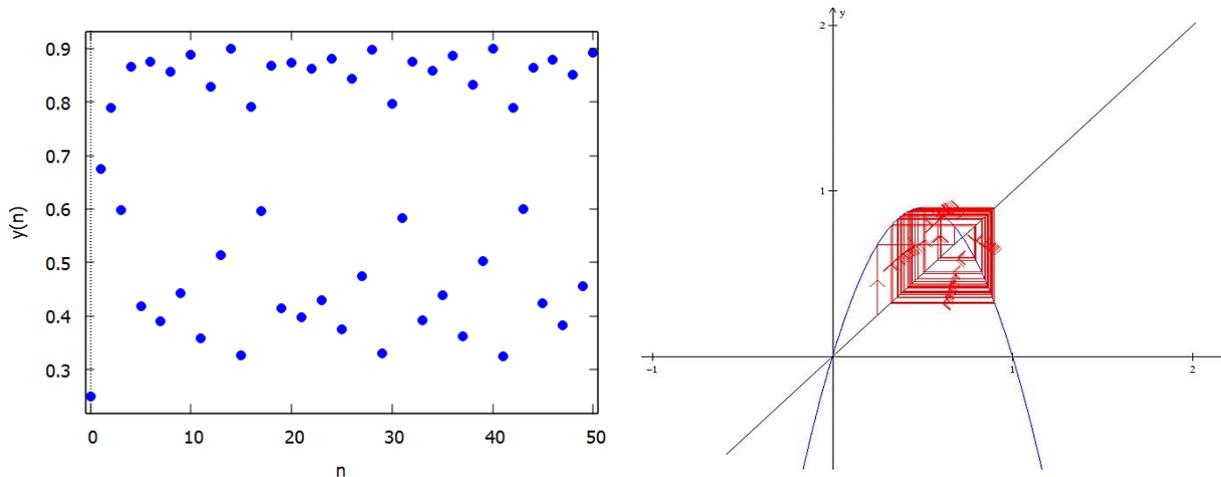
Resolução do item e:

e) Sendo o mapa logístico caracterizado pelo sistema dinâmico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, teremos que construir os mapas unidimensionais e os diagramas de *cobweb*, quando $3,5699456 < k < 4$ assumir e quando $x_0 = 0,25$; $x_0 = 0,5$ e $x_0 = 0,75$.

Caso consideremos $k = 3,6$; obteremos:

- $k = 3,6$ e $x_0 = 0,25$ (ver Figura 84)

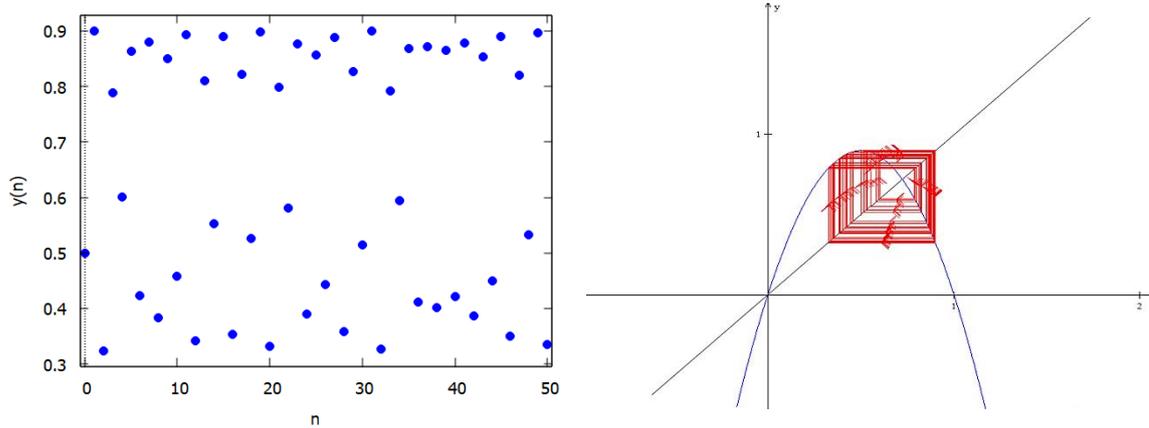
Figura 83: Mapa unidimensional com as 50 primeiras iterações do sistema dinâmico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, quando $k = 3,6$ e $x_0 = 0,25$ (à esquerda) e diagrama de *cobweb* (à direita).



Fonte: Autoria própria – *softwares* Maxima e Winplot.

- $k = 3,6$ e $x_0 = 0,5$ (ver Figura 85)

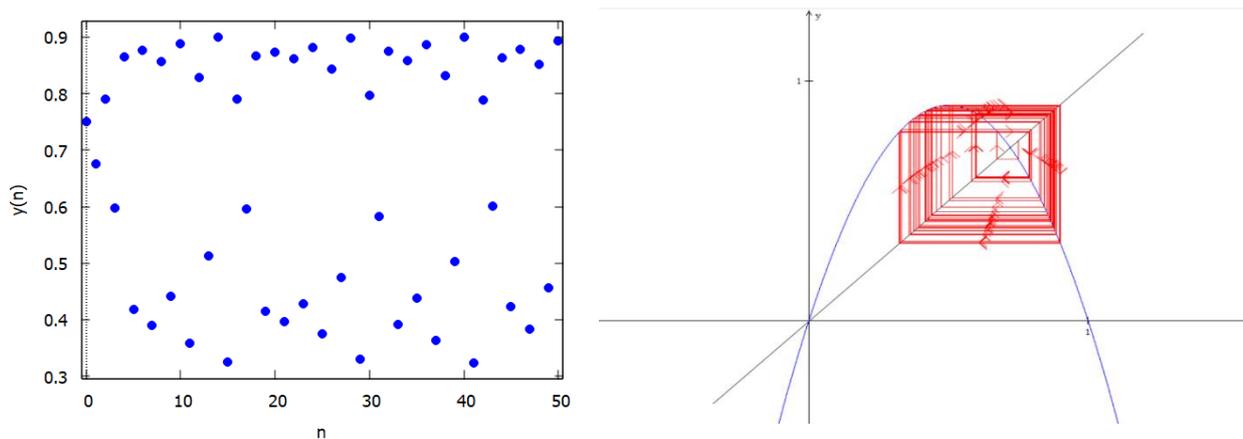
Figura 84: Mapa unidimensional com as 50 primeiras iterações do sistema dinâmico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, quando $k = 3,6$ e $x_0 = 0,5$ (à esquerda) e diagrama de *cobweb* (à direita).



Fonte: Autoria própria – softwares Maxima e Winplot.

- $k = 3,6$ e $x_0 = 0,75$ (ver Figura 86)

Figura 85: Mapa unidimensional com as 50 primeiras iterações do sistema dinâmico $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, quando $k = 3,6$ e $x_0 = 0,75$ (à esquerda) e diagrama de *cobweb* (à direita).



Fonte: Fonte: Autoria própria – softwares Maxima e Winplot.

Para finalizar a questão, os estudantes devem escolher mais 3 valores para k que estejam no intervalo considerado como “zona caótica” e utilizando os *softwares* Maxima e Winplot, representar graficamente as trajetórias das órbitas, analisando-as posteriormente e descrevendo as percepções obtidas e o conhecimento depreendido no decorrer do processo.

Ao término da atividade, o professor possibilitará durante a aula uma discussão sobre as percepções dos estudantes e deverá ressaltar a ocorrência de períodos caóticos e períodos nos quais ocorrem bifurcações – considerando os mapas unidimensionais – e se concentrará na trajetória espiral das órbitas (em vermelho) – destacadas nos diagramas de *cobweb*.

7.3 Atratores: Definição e classificação

Nesta seção, será apresentada uma única atividade que pode ser subdividida em duas partes e que aborda a definição e a classificação dos atratores de um sistema dinâmico. Este conceito é de suma relevância, visto que a noção de atrator é o que permite estabelecer uma correlação entre a Teoria do Caos e os fractais.

Parte 1: O que é um atrator? Tipos de atratores: atrator de um ponto fixo e atrator estranho.

Na primeira parte da atividade, o objetivo é conceituar e definir o atrator de um sistema dinâmico. Para isso, sugere-se que o docente retome as construções dos diagramas de *cobweb* realizadas pelos estudantes e que explore novamente a classificação dos pontos fixos em repulsores e atratores. Tendo isto posto, o professor pode definir o termo atrator e classificá-los em dois grupos: os atratores de um ponto fixo e os atratores estranhos. O professor pode utilizar mais uma vez os diagramas como referência para ilustrar os atratores de um ponto fixo e juntamente com a sala elaborar uma definição para esse tipo de atrator.

Parte 2: Atratores estranhos – o elo entre a Teoria do Caos e os fractais.

Na segunda e última parte da atividade, o docente deve instigar os estudantes com a seguinte pergunta: O que seria um atrator estranho? O professor deve então viabilizar um espaço de escuta para que os alunos apresentem suas suposições e após, apresentar três atratores estranhos famosos: O atrator de Lorenz, o atrator de Rössler e o mapa de Hénon – todos expostos no capítulo 5 na seção intitulada “Atrator de um Sistema Dinâmico”. Ao expor a representação gráfica de cada um desses atratores, sugerimos que o professor enuncie o contexto inerente a cada um deles, evidenciando que o mapa de Hénon é o único dentre os três que se caracteriza como um sistema dinâmico discreto e que os outros representam sistemas dinâmicos contínuos. O docente, de maneira conveniente, pode aproveitar o texto da Atividade 2 da Seção 7.2 – que menciona o Efeito Borboleta – e buscar uma correspondência entre o termo e a representação visual do atrator de Lorenz. De mesmo modo, seria fascinante que os alunos tivessem conhecimento - ainda que modestamente - de como Lorenz chegou a essa representação, quais eram as suas intenções ao desenvolver esse modelo e quais foram as conclusões finais obtidas por ele. É importante ressaltar mais uma vez que o professor não deve se ater às especificidades das equações diferenciais que caracterizam o atrator de Lorenz e de Rössler, visto o grau de complexidade desse tema para o Ensino Médio.

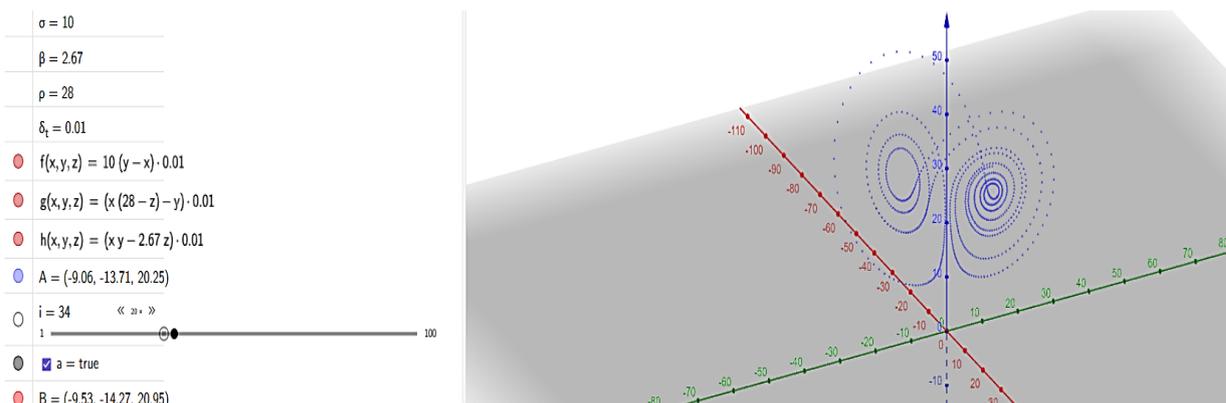
O docente deve mencionar que as representações demonstradas recebem o nome de Espaço de Fase, ou seja, caracterizam um espaço que tem por finalidade ilustrar a trajetória percorrida pelas órbitas de um sistema dinâmico com o passar do tempo, bem como, considerando também as demais variáveis envolvidas (quando houver). Com o intuito de analisar a trajetória das órbitas no espaço de fases, o docente deve separar os estudantes em duplas e/ou trios e fornecer dois *links* do *software* Geogebra (*links* que serão disponibilizados juntamente com as imagens a seguir). Os alunos deverão acessar os *links* e verificar o processo que permeia a construção de cada um desses atratores no espaço de fases (ver Figuras 87 e 88).

O docente deve orientar as duplas ou trios a registrarem suas percepções acerca das órbitas, bem como, se atentarem se há ou não a existência de um ponto específico para o qual elas tendem a convergir. Após esta análise, o professor permitirá que os estudantes compartilhem suas impressões com a classe e construirá de maneira conjunta uma definição para atrator estranho.

Atrator estranho: corresponde a um atrator que exhibe dependência extrema às condições iniciais. Desse modo, trajetórias que se iniciam nesses atratores não apresentam regularidade e, portanto, separam-se de maneira exponencial, expressando um comportamento caótico. Ademais, a evolução desses atratores ocorre por meio de processos de alongamentos e dobras, que ao serem ampliados(as), descortinam camadas **autossimilares** e que se repetem continuamente, consolidando assim o **atrator estranho** como **ponto intersecção entre os fractais e a Teoria do Caos** – podendo ser chamado também de atrator caótico ou atrator fractal.

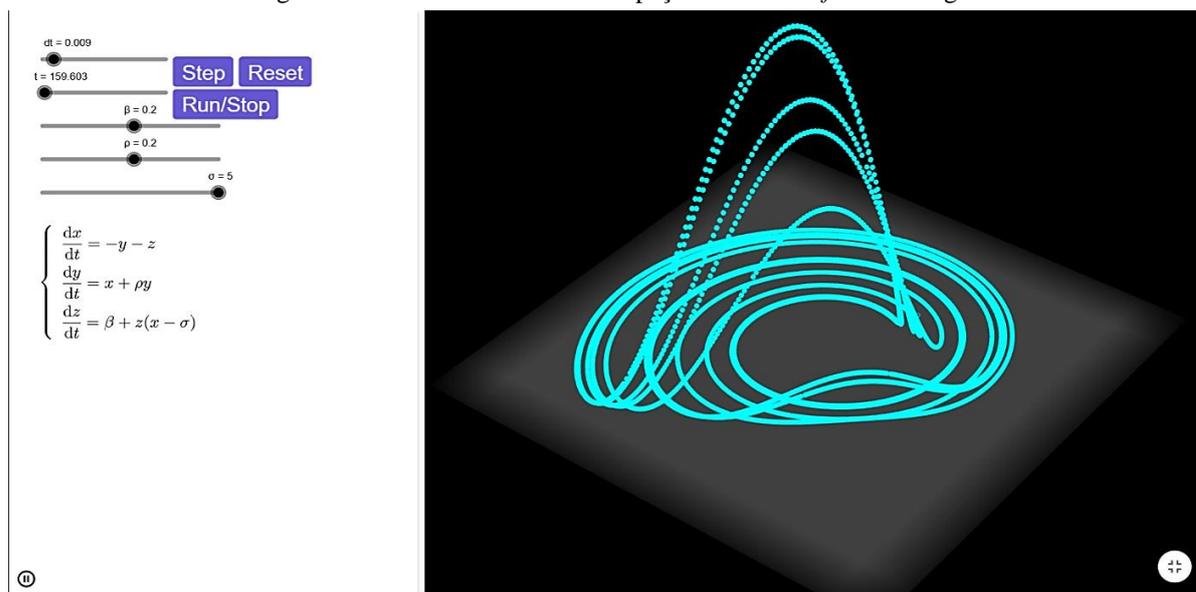
Por fim, o docente pode perguntar aos alunos o que eles observam nas representações visuais dos atratores (caso isso ainda não seja trago por eles durante a discussão) e deve acrescentar que os atratores estranhos possuem **estruturas fractais**. A sugestão, com base nessa colocação final, é a de que o docente estimule os alunos a pesquisarem o que significa o termo fractal e que tragam na aula seguinte as respostas encontradas – possibilitando assim um maior engajamento dos estudantes e utilizando a metodologia da sala de aula invertida.

Figura 86: Atrator de Lorenz no Espaço de Fase – *software* Geogebra.



Fonte: Geogebra. Atrator de Lorenz. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gecfchcr>.

Figura 87: Atrator de Rössler no Espaço de Fase – *software* Geogebra.



Fonte: Geogebra. Rössler Attractor. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rtj7ruyb>.

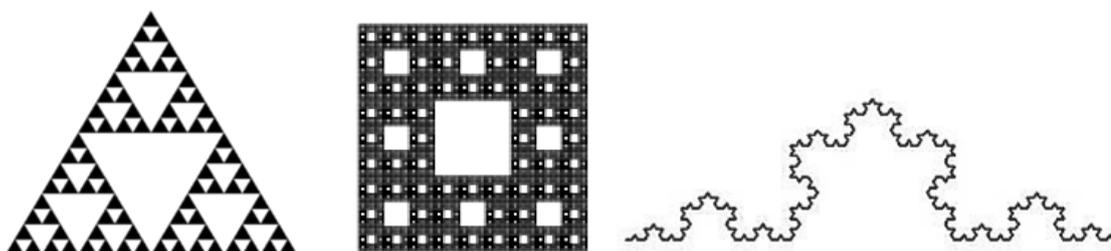
7.4 Fractais: Definição e Características.

Na última etapa, as atividades sugeridas terão como enfoque os fractais – senhores de uma exímia beleza irregular e complexa. Desse modo, nesta etapa (composta por 3 atividades), serão trabalhados o conceito de fractal, bem como, suas características e classificação. No processo de construção dessas atividades, procurou-se priorizar os fractais Clássicos; no entanto, isso não impede o docente de explorar outros fractais – inclusive, neste trabalho, no decorrer do Capítulo 4, há menção a distintos tipos de fractais. No que se refere a Atividade 3 desta etapa, serão utilizados alguns fractais expostos no livro “Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula”, escrito por Ruy Madsen Barbosa (2005) e será proposto aos estudantes que escolham um desses fractais e que realizem a sua construção, tendo como suporte o *software* Mathigon.

Atividade 1: O que são fractais? Características dos fractais.

Para o desenvolvimento desta atividade, o professor deve mostrar aos estudantes três fractais clássicos que possibilitam o começo da discussão acerca do conceito de fractal, bem como, a percepção acerca dos atributos que os caracterizam. Caso o docente deseje, pode solicitar aos estudantes na aula que antecede o início desta atividade, que façam uma pesquisa sobre o que significa o termo fractal – conforme sugerido no final da atividade da Seção 7.3 (Parte 2). Assim, o professor pode pedir para que os alunos compartilhem as respostas encontradas e, logo em seguida, apresentar as imagens ou animações inerentes aos fractais: Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski e Carpete de Sierpinski. (ver Figura 89). O docente, com base na pesquisa dos estudantes, deve questioná-los se as figuras expostas podem ou não ser consideradas fractais e em caso afirmativo, incitá-los a justificarem as suas respostas. Tendo isto feito, o professor pedirá aos alunos, que de maneira colaborativa (grupos com 4 estudantes), construam uma definição para o termo fractal e, após, descrevam as características encontradas nos três fractais expostos na aula. Cada grupo pode realizar uma apresentação de slides no PowerPoint ou no Canva, ou então, usar a lousa digital do Jamboard (Gmail) e ao final, compartilhar com os demais grupos suas percepções acerca dos fractais. Além disso, caso o docente já tenha abordado os atratores estranhos, há a possibilidade de retomar a discussão com a classe e verificar as estruturas fractais de que dispõem, estabelecendo, assim, o elo e o nexo entre os fractais e a Teoria do Caos.

Figura 88: Da esquerda para a direita: Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Curva de Koch.



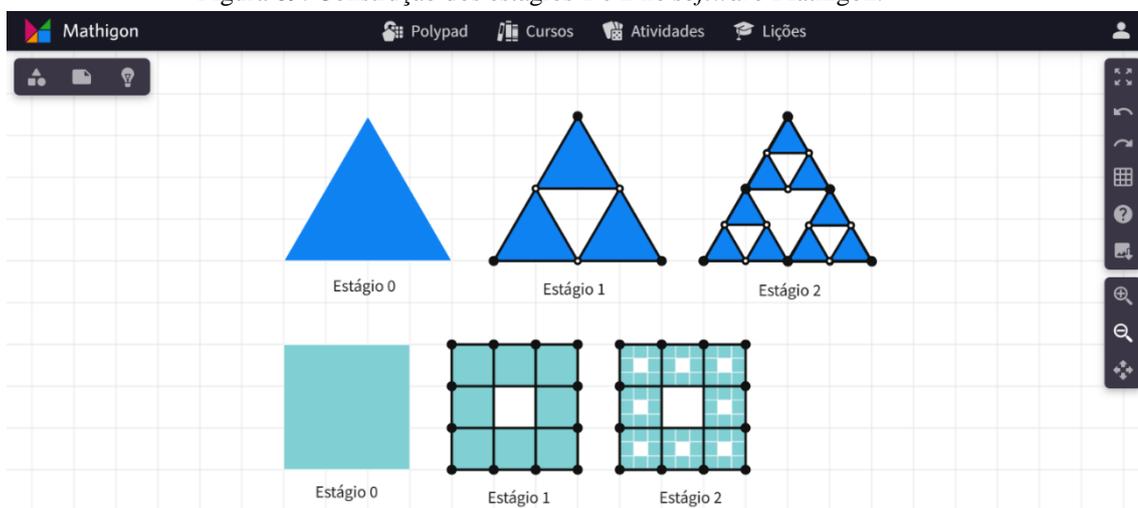
Fonte: Moreira (2013)

Atividade 2: Como obter os fractais? – Classificação

O objetivo desta atividade é explorar com os estudantes os mais variados fractais – sejam eles obtidos por meio de processos iterativos, por meio de uma relação de recorrência ou, então, randômicos ou encontrados na natureza. Desse modo, o docente pode sentir-se livre para usar como base o exposto neste trabalho no Capítulo 4. Sugerimos que o professor utilize os

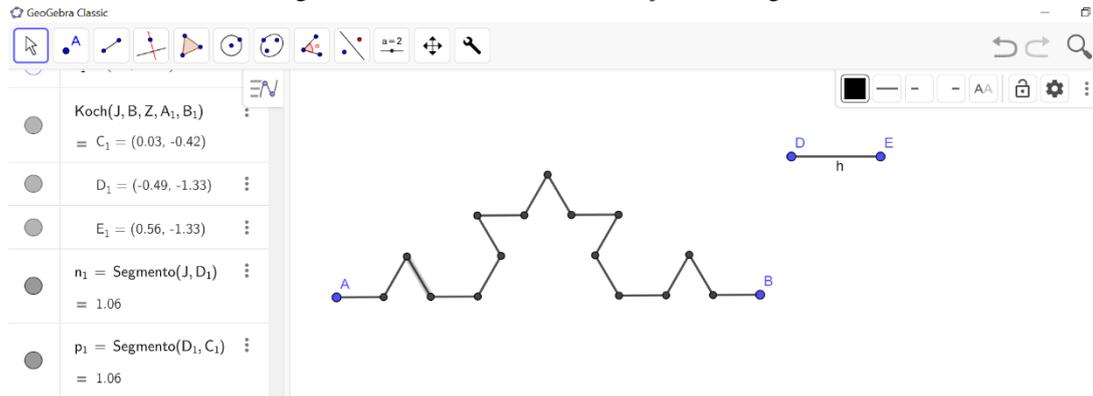
três fractais da Atividade 1 desta etapa e apresente aos estudantes o descritivo das etapas de construção de cada um deles. Após, o professor pode propor que a sala se organize em grupos e que com base nas descrições, tentem construir as primeiras iterações de cada fractal. Esta construção pode ser realizada manualmente com o auxílio de régua e compasso ou podem ser utilizados *softwares* como Geogebra ou Mathigon (ver Figuras 90 e 91). O professor deve mediar e intervir caso seja necessário. Após, os grupos devem compartilhar as suas construções com a classe e o professor pode apresentar as primeiras iterações de cada um dos fractais trabalhados, com o intuito de que os estudantes comparem e constatem se suas representações estão corretas ou próximas do esperado e caso não estejam, compreendam os equívocos cometidos durante o processo. Feito isto, o professor pode enunciar que os fractais podem ser classificados de acordo com o processo empregado em sua construção e classificar os fractais Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski como fractais por remoção – tendo em vista que a cada iteração há a remoção de partes integrantes do fractal – e a curva de Koch como um fractal pela fronteira – considerando que a cada etapa do processo iterativo há o acréscimo de mais fragmentos a estrutura inicial do fractal considerado. Além disso, o professor pode classificar esses fractais no subgrupo dos fractais geométricos e mencionar que podem ser chamados também de determinísticos. O mais aconselhável é que o docente apresente mais exemplos de fractais geométricos por remoção e pela fronteira aos estudantes, buscando, desse modo, reforçar os conceitos introduzidos e desenvolvidos.

Figura 89: Construção dos estágios 1 e 2 no *software* Mathigon.



Fonte: Autoria própria – Mathigon.

Figura 90: Curva de Koch: construção no Geogebra.



Fonte: Autoria própria – Geogebra

Para mais além, o docente pode aproveitar a oportunidade para trabalhar os conceitos de perímetro e área com os fractais, bem como, obter leis de formação que possibilitem calcular o número de elementos que o fractal apresenta a cada iteração.

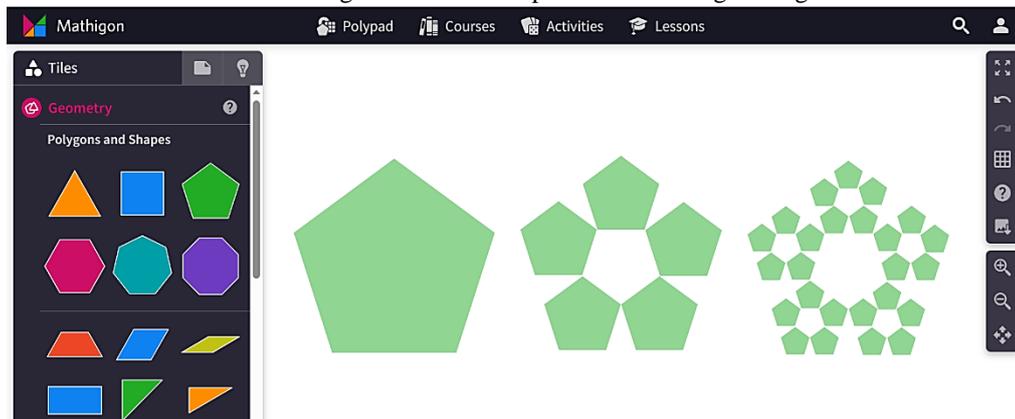
No Capítulo 4 desta dissertação, há sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula e que contemplam os conteúdos citados anteriormente. Caso o docente opte por explorar objetos tridimensionais, há a possibilidade de trabalhar também com a Esponja de Menger e a Pirâmide de Sierpinski e analisar juntamente com os alunos o que ocorre com o volume do cubo e da pirâmide dos estágios iniciais a cada processo iterativo. Outrossim, recomendamos que o docente se norteie pelo processo de construção desses fractais e utilize como subsídio para introdução do conceito de dimensão fractal.

Ademais, o professor pode fazer a seguinte pergunta aos estudantes: “Qual é a dimensão do fractal Triângulo de Sierpinski?” Desse modo, o docente pode conduzir os alunos à compreensão de que a construção do Triângulo de Sierpinski tem como estágio inicial um triângulo equilátero – que possui dimensão 2 - e que a cada etapa iterativa, da superfície deste triângulo inicial, são removidos triângulos menores, o que resulta então, em uma dimensão compreendida entre 1 e 2, ou seja, uma dimensão fracionária, já que o Triângulo de Sierpinski, mesmo após as remoções não será um segmento de reta (dimensão 1) e nem terá a sua superfície novamente preenchida.

Tendo isto feito, o mais adequado é que o professor introduza o conceito de autossimilaridade – com o intuito de desenvolver a compreensão acerca do cálculo da dimensão fractal – e que apresente exemplos adicionais aos estudantes, possibilitando e incentivando-os, em seguida, a calcular a dimensão de alguns dos fractais expostos e considerados. O docente, caso deseje, pode propor também a investigação dos fractais Tipo Dürer, conforme a Figura 92,

bem como das árvores bifurcadas e da árvore pitagórica, ampliando assim o referencial dos estudantes acerca dos fractais e das características que lhes são intrínsecas.

Figura 91: Fractal tipo Dürer – Pentágono regular.



Fonte: Autoria própria - Mathigon.

Como a proposta desta atividade é a de explorar os mais distintos tipos de fractais, recomenda-se adotar um percurso – percurso esse, que pode ser alterado e ajustado às necessidades e às demandas de cada docente, bem como de suas turmas. Este trajeto se caracteriza por iniciar a abordagem pelos fractais geométricos ou determinísticos e após, citar de maneira breve, os fractais obtidos por meio de uma relação de recorrência; finalizando com os fractais naturais ou randômicos.

Convém mencionar que esta atividade tem como objetivo desenvolver propostas de introdução aos fractais determinísticos, tais como, utilizá-los como parâmetro para desenvolver o conceito de dimensão fractal. Desse modo, o docente pode sentir-se mais livre e à vontade para trabalhar os fractais naturais, bem como, os obtidos por meio de uma lei de recorrência com seus alunos e, pode, caso necessário, utilizar o Capítulo 4 desta dissertação como ferramenta de consulta e de referencial bibliográfico, em busca de ideias e sugestões de atividades que possam ser aplicadas em sala de aula.

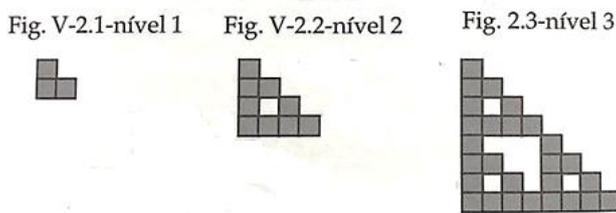
Atividade 3: Construção de fractais.

A última atividade da quarta etapa é voltada para a construção de diferentes tipos de fractais e tem como inspiração o Capítulo V do livro *Descobrendo a Geometria Fractal* para a sala de aula, escrito por Ruy Madsen Barbosa (2005). O Capítulo V que tem por título: “Construindo fractais em sala de aula com manipulação de materiais concretos”. Desse modo, serão tomados como referência os fractais expostos por Barbosa (2005), porém, o ideal é que as construções aqui propostas sejam realizadas com recursos computacionais ao invés de

materiais concretos – no entanto, nada impede que o professor alterne e concilie os dois métodos. A sugestão é que o professor dê início a atividade compartilhando alguns fractais com os estudantes e que logo em seguida, proponha que eles realizem a construção de cada um deles utilizando algum *software* – recomenda-se a utilização do Mathigon e do Geogebra, devido ao fato de serem ferramentas de simples utilização e de fácil acesso. Cabe enfatizar, no entanto, que o docente possui autonomia para escolher o instrumental que utilizará com os seus alunos durante o processo do fazer pedagógico e pode usar a criatividade para propor outros fractais ou então, de maneira semelhante, usar como fonte de inspiração os fractais apresentados por Barbosa (2005) em sua obra.

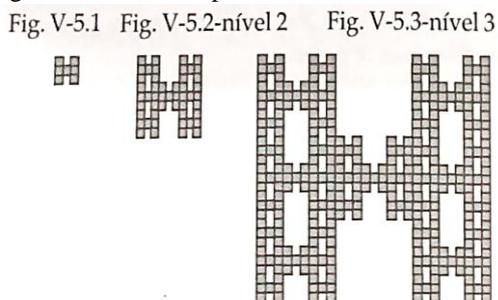
Para a realização desta atividade, serão considerados: O fractal triminó e o fractal heptaminó em H, assim como, o fractal extensão 1 do triângulo de Sierpinski – ambos encontrados no Capítulo V do livro de Barbosa (2005) e expostos a seguir nas Figuras 93, 94 e 95, respectivamente:

Figura 92: Fractal triminó: Níveis 1, 2 e 3.



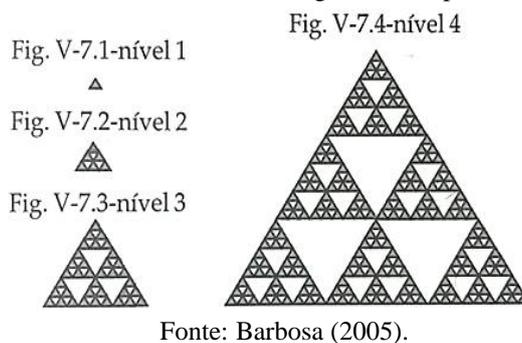
Fonte: Barbosa (2005)

Figura 93: Fractal heptaminó em H - Níveis 1, 2 e 3.



Fonte: Barbosa (2005).

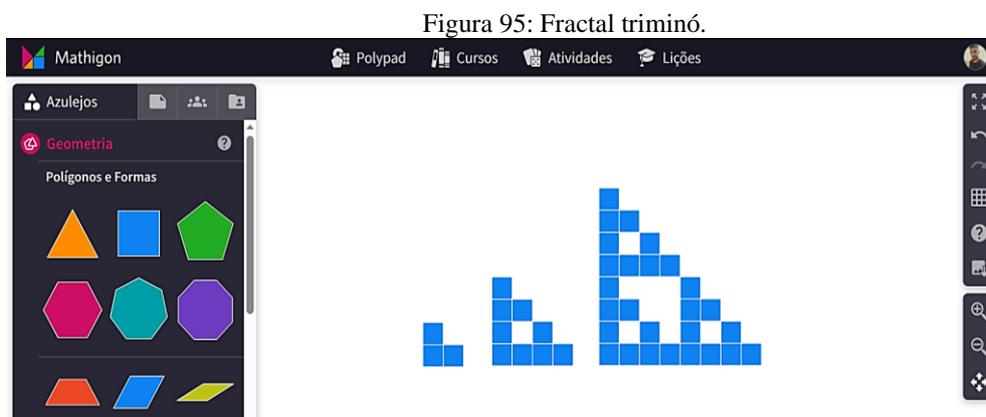
Figura 94: Fractal extensão – 1 do triângulo de Sierpinski: Níveis 1, 2, 3 e 4.



Para esta atividade, o recomendável é que o docente mostre o nível 0 ou 1 (em último caso, ambos) de cada fractal e apresente uma pequena descrição das etapas de seu processo iterativo. Em seguida, o professor deve desafiar os estudantes a construírem apenas com base nas descrições, os próximos 2 ou 3 níveis desses fractais no Mathigon.

Fractal Triminó

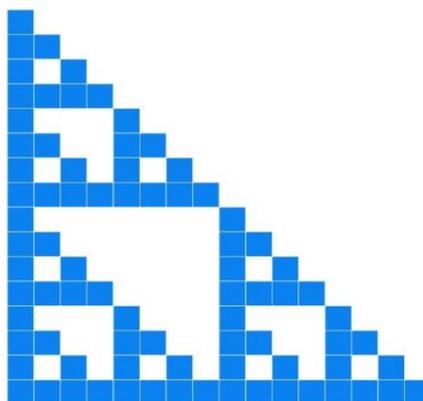
Segundo Barbosa (2005), no nível 1, deve-se considerar o triminó construído pela junção de 3 quadrados. A cada processo iterativo, deve ser realizada a substituição de cada peça quadrada por um triminó no formato de um L, ou seja, no mesmo formato inicial (nível 1). Após a construção (ver Figura 96), o professor pode explorar com os estudantes o número de peças utilizadas em cada um dos níveis e encontrar uma lei de formação capaz de determinar o número de elementos que compõem o n -ésimo nível desse fractal.



Além disso, após as construções, o docente pode mostrar aos alunos que substituir cada peça quadrada por um triminó no formato de um L equivale também a construir o fractal utilizando 3 figuras idênticas à do nível posterior. Por exemplo, o nível 4 do triminó será obtido

substituindo cada quadradinho do nível 1 pelo equivalente ao fractal obtido no nível 3, conforme a Figura 97:

Figura 96: Nível 4 do triminó.

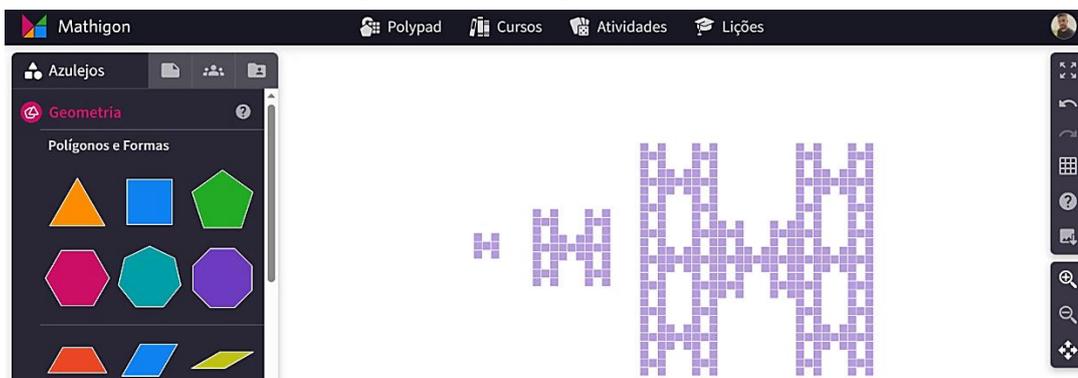


Fonte: Autorial própria – Mathigon.

Fractal heptaminó em H

Segundo Barbosa (2005), na construção do fractal heptaminó em H (ver Figura 98), deve-se partir da superfície de um quadrado no nível 0. Divide-se, então, esse quadrado em 9 peças quadradas congruentes e remove-se 2 delas (as peças centrais da 1ª e da 3ª linha), de modo a obter a letra H (nível 1). A partir daí, a cada iteração, deve-se realizar o mesmo procedimento com cada peça quadrada, de modo que ela tenha o mesmo formato, ou seja, há a substituição de cada quadrado por um H. De modo análogo ao triminó, pode-se investigar com os alunos o número de quadrados em cada uma das etapas e obter uma lei de formação que possibilite calcular o número de quadrados do enésimo nível desse fractal.

Figura 97: Fractal heptaminó em H.

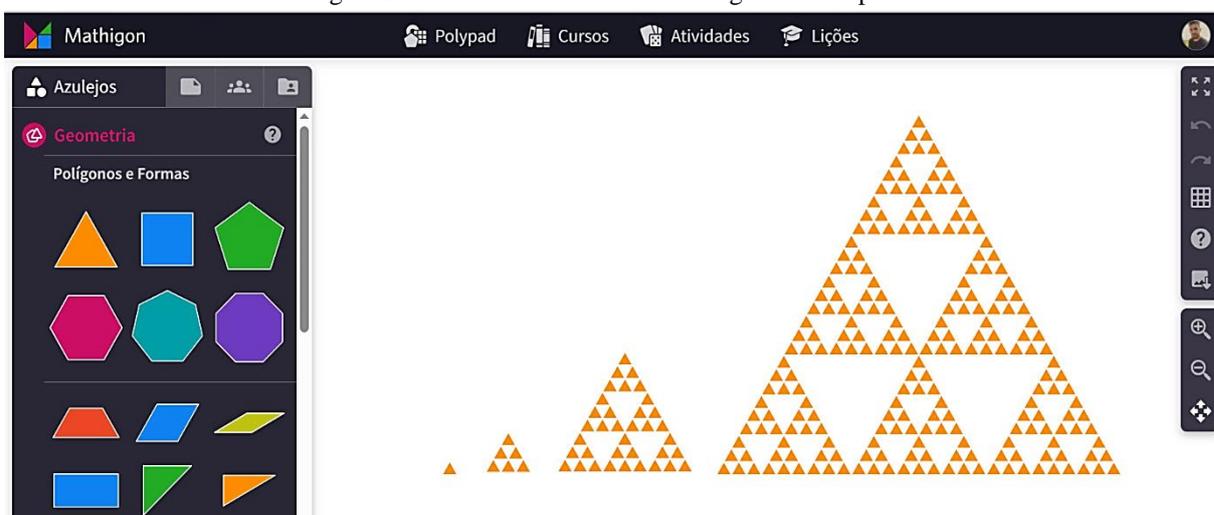


Fonte: Autorial própria - Mathigon.

Fractal extensão – 1 do Triângulo de Sierpinski

Barbosa (2005) não apresenta a descrição de obtenção desse fractal em seu livro, porém, de acordo com a imagem na Figura 99, observa-se que o nível 1 do fractal é um triângulo equilátero. Para o nível 2, é considerado um triângulo equilátero que possui as medidas de seus lados igual ao triplo do triângulo equilátero do nível 1. Para obter o nível 3, há que substituir a superfície de cada triângulo equilátero do nível 2 – ou seja, cada triângulo nível 1 que o compõe – por um triângulo nível 2 e assim, sucessiva e iterativamente. Ao término da construção, o docente pode analisar com os alunos a quantidade de triângulos equiláteros utilizados em cada nível e obter uma expressão algébrica que possibilite generalizar a quantidade de triângulos utilizados no nível n .

Figura 98: Fractal extensão – 1 do triângulo de Sierpinski



Fonte: Autoria própria - Mathigon.

Para esta atividade, procurou-se tomar como referência apenas os três fractais mencionados, porém, há diversas possibilidades e cenários que podem ser desenvolvidos e investigados com os estudantes em classe, com o intuito de aprimorar os conhecimentos adquiridos acerca do caos e dos fractais.

Como encerramento para as atividades aqui propostas, recomenda-se que o docente retome o conceito de atrator estranho e que estabeleça novamente com os alunos o nexo existente entre esses atratores caóticos e os fractais – visto que estes atratores são detentores de fascinantes estruturas autossimilares de complexidade infinda e dimensão fragmentada. Cabe ao docente ressaltar que a grande maioria dos fractais não possui relação alguma com o caos; no entanto, é no solo dos sistemas dinâmicos não-lineares onde as estruturas fractais fincaram suas raízes e romperam na forma dos atratores estranhos – hoje, de todos, conhecidos.

Por fim, é importante frisar que ao sugerir cada uma das atividades elencadas acima, não houve, por pretensão, estipular ou prever uma quantidade específica de aulas para realização de cada uma delas. Isto se deve ao fato de que mediante o tema deste trabalho ser a Teoria do Caos, irrompe-se a concepção de que o ambiente da sala de aula é um território no qual o caos se faz vigente e eminente e que, portanto, deve-se reconhecer que por menor que seja o controle ou a certeza que alguém acredite deter ou manter – seja sobre a vida, sobre o plano anual de aula, sobre a sua programação diária – sempre haverá a suscetibilidade às incertezas, às inconstâncias e às reações caóticas advindas do singelo bater das asas de uma borboleta que se encontra do outro lado do hemisfério.

8. REFLETINDO SOBRE O PESQUISADO

Esta dissertação teve por finalidade explorar dois conceitos inerentes à Matemática contemporânea, dentre os quais: os fractais e a Teoria do Caos. Em meio a este processo investigativo, inúmeros questionamentos ganharam forma – estes, que de certo modo, indicavam e conduziam à questão que se perfaz norteadora deste projeto, a saber: “Como introduzir os fractais na Educação Básica tendo como inspiração a Teoria do Caos?”. Inúmeros questionamentos – tomados como subjacentes à questão norteadora – impulsionaram o pesquisador na procura por respostas e ao encontro de estratégias e propostas que fizessem sentido no contexto da sala de aula, bem como, no processo de ensino e desenvolvimento do conhecimento matemático, possibilitando a introdução e o contato dos estudantes com um conteúdo matemático contemporâneo que possui extensa aplicabilidade nas ciências e que se encontra mais próximo dos cenários que os circunscrevem.

Desse modo, essa pesquisa teve como ponto de partida a compreensão do contexto histórico dos fractais, seguido do processo que permeia a sua constituição e construção, como se classificam e quais são as características e propriedades de que dispõem, etapas que configuram o seu processo de teorização. Além disso, fez-se necessário pesquisar os Sistemas Dinâmicos Discretos e Contínuos, com o intuito de conceber como o caos se expressa e se manifesta nestes sistemas, o que possibilitou a identificação do impulso propulsor do nexo entre a Teoria do Caos e os fractais – o atrator estranho. Por fim, foram revisitadas, sistematicamente, as dissertações, as teses e as obras lidas no decorrer deste trajeto, elaborando resumos orientados

pela pergunta norteadora da pesquisa, o que objetivou o vislumbre de um horizonte no que se refere à introdução dos fractais articulados à Teoria do Caos na Educação Básica. No último capítulo, foram sugeridas propostas e atividades que podem ser seguidas sequencialmente pelo docente e utilizadas como meios para apresentar de maneira introdutória os fractais e o caos aos estudantes da Educação Básica.

Ainda no que se refere ao penúltimo capítulo desta dissertação, tendo em vista que a questão norteadora deste trabalho se arquiteta: “Como introduzir os fractais na Educação Básica tendo como inspiração a Teoria do Caos?”, percebeu-se a necessidade de expor as atividades sugeridas e propostas neste capítulo em 4 subdivisões, a saber: 1. Compreendendo um Sistema Dinâmico Discreto; 2. O que é o caos? De que modo o caos se expressa e se manifesta? 3. Atratores: Definição e classificação e 4. Fractais: Definição e Características. Essa ordem foi concebida de modo a abordar inicialmente os Sistemas Dinâmicos Discretos e o caos, fornecendo assim noções e subsídios eficazes para a compreensão dos atratores estranhos e do elo que estes atratores permitem estabelecer entre o caos e os fractais. Além disso, a escolha tomada se caracterizou como uma sequência didática, uma vez que, as atividades conversam entre si e se interconectam, fazendo com os que os estudantes utilizem nas atividades posteriores todos os conceitos trabalhados até o momento e que assumam, desse modo, o protagonismo no que se refere ao processo de construção de seu próprio conhecimento.

Na primeira etapa, ao abordar os Sistemas Dinâmicos Discretos, optou-se por trabalhar com relações de recorrência, dentre elas, a Sequência de Fibonacci, bem como, com os modelos populacionais de Malthus e de Verhulst. Posto que a primeira etapa tem por compromisso familiarizar os estudantes com os Sistemas Dinâmicos Discretos, a escolha consistiu em sugerir e apresentar um número maior de atividades – estas, de caráter analítico – investigativo e que permitissem aos estudantes um aprimoramento dos conhecimentos adquiridos no decorrer do processo. Além disso, sugeriu-se a utilização de dois *softwares* no que se refere à construção dos mapas unidimensionais e dos diagramas de *cobweb*: o Maxima e o Winplot – permitindo aos estudantes o contato com ferramentas tecnológicas que divergem das empregadas por eles diariamente e que se constituem como apoio para a construção de um conhecimento científico-matemático contemporâneo.

Já na etapa 2, o foco foi depreender o significado do caos do ponto de vista matemático, renunciando ao senso comum de que o caos é sinônimo de desordem. Para isto, na primeira atividade, tomou-se como referência dois filmes que fazem menção a Teoria do Caos – Efeito Borboleta (2004) e O Curioso Caso de Benjamin Button (2008) – com o intuito de gerar uma

discussão acerca dos significados atribuídos à palavra caos, bem como, inferir que o caos se apresenta nos filmes expostos e em alguns fenômenos intrínsecos da natureza e da existência humana. Com a intenção de aprofundar as discussões sobre o caos, na segunda atividade desta etapa, o enfoque passa a se concentrar no mapa logístico como itinerário para o caos. Dessa maneira, foram realizadas análises numéricas e gráficas (no Maxima e no Winplot) para verificar e constatar o comportamento das órbitas para os mais distintos valores de k e x_0 e identificar os intervalos nos quais este comportamento se designa caoticamente.

Na etapa 3, há o aprofundamento do estudo dos atratores, a compreensão de suas propriedades e o como se classificam. Outrossim, nesta etapa cria-se a possibilidade de enxergar o nexo caos – fractais e por meio desta percepção, suscitar os estudantes para as atividades da etapa final, que consiste em esquadrihar os fractais, assim como, seus atributos e propriedades.

Ao concluir a etapa 4, sugere-se que o docente retome os atratores estranhos e evidencie as estruturas fractais presentes em sua composição. Logo, essa divisão foi realizada com a intencionalidade de propor um material didático de fácil compreensão para os estudantes e para os professores que desejarem introduzir esta temática nas escolas da Educação Básica.

Ao refletir sobre os caminhos trilhados no decorrer desta pesquisa, percebe-se que, se constitui como essencial o papel condutor da pergunta norteadora em todo o seu desenvolvimento e que mediante a estrutura da pergunta e da resposta como meio de interpretação, tornou-se possível galgar novos horizontes no que se refere ao como introduzir os fractais em articulação com o caos nos componentes curriculares de Matemática da Educação Básica. Ademais, este caminhar investigativo foi capaz de trazer à consciência do pesquisador uma compreensão mais ampla e abrangente sobre a conexão dos fractais com o caos, que possibilitou o desprender-se de preconceitos outrora estabelecidos e mergulhar nas profundezas do saber desconhecido, buscando o que se almejava conhecer. Desse modo, esta dissertação desvela-se como resultado dos árduos e incansáveis mergulhos realizados pelo pesquisador, na diligência de obter ferramentas capazes de revisitar o que antes estava encoberto – possibilitando uma nova perspectiva – ao sujeito (pesquisador), mas também a todos os professores da escola básica que possuem interesse no assunto.

REFERÊNCIAS

BAIER, Tânia. **O Nexo “Geometria Fractal – Produção da Ciência Contemporânea” tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico**. 2005. 147 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005. Disponível em: [O nexo geometria fractal - produção da ciência contemporânea tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico \(unesp.br\)](https://unesp.br/handle/unesp/110518)

Acesso em: 21 nov. 2022.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a geometria fractal: para a sala de aula**. Editora Autêntica. Belo Horizonte, 2005.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza. F. Gomide. 2.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular-Ensino Médio**. Brasília, 2018.

Disponível em: [BNCC EnsinoMedio embaixa site 110518.pdf \(mec.gov.br\)](https://bncce.mec.gov.br/images/stories/pdf/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf)

Acesso em: 03 jan. 2023.

CARVALHO, Hamilton Cunha. **Geometria Fractal**. Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática. 2005. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005. Disponível em:

<https://www.repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/1857>

Acesso em: 04 jan. 2023.

CIPOLLI, Valéria Guedes. **Sistemas Dinâmicos Discretos- análise de estabilidade**. 2012. 147 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2012.

Disponível em: [cipolli_vg_me_rcla.pdf;jsessionid=D44F44F13478456F6D212772D99216E3 \(unesp.br\)](https://unesp.br/handle/unesp/110518)

Acesso em: 13 fev. 2023.

DOMINGOS, António Manuel Fonseca. **Fractais: da geometria à videoarte**.

2013. 160 f. Dissertação (Mestrado em Expressão Gráfica e Audiovisual). Universidade Aberta, Lisboa, 2013. Disponível em: [Acervo Digital: Fractais : da geometria à videoarte \(unesp.br\)](https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/10361) Acesso em: 17 jan. 2023.

FARIAS, Mailson Alves. **Fractais: uma abordagem introdutória**. 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

Disponível em: sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=5212&id2=170210361

Acesso em: 14 jan. 2023.

FERRARI, Paulo Celso. **Temas Contemporâneos na formação docente a distância – Uma introdução à Teoria do Caos**. 2008. 135 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, 2008. Disponível em: [Temas contemporâneos na formação docente a distância: uma introdução à teoria do caos \(ufsc.br\)](https://repositorio.ufsc.br/handle/151683/110518)

Acesso em: 23 mar. 2023.

Fractais e o Jogo do Caos. XXII SEMAT e XII SEMEST – UFU. Universidade Federal de Uberlândia. 2022. 1 vídeo (1h05m). Publicado pelo SEMAT SEMEST - UFU. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=FmQQd2PHSrQ> Acesso em: 18 out. 2022.

FRISKE, Andréia Luisa; MATHIAS, Carmen Vieira. Fractais do tipo Dürer e Geogebra: uma aplicação para as Transformações Lineares. **Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 2, 2016.

Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1247>

Acesso em: 23 jan. 2023.

JESUS, Eliane Alves. **Sistemas Dinâmicos Discretos**. 2016. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal de São João Del-Rei, Minas Gerais, 2016.

Disponível em: [profmat.tcc.php \(profmat-sbm.org.br\)](http://profmat.tcc.php (profmat-sbm.org.br))

Acesso em: 08 fev. 2023.

KLUTH, Verilda Speridião. Dos Significados da Interrogação para a Investigação em Educação Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 14, n. 15, 2001. Disponível em: [Do Significado da Interrogação para a Investigação em Educação Matemática | Bolema - Boletim de Educação Matemática \(unesp.br\)](http://Do Significado da Interrogação para a Investigação em Educação Matemática | Bolema - Boletim de Educação Matemática (unesp.br)) Acesso em: 29 set. 2022.

KLUTH, Verilda Speridião. **Estruturas da Álgebra: Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento**. 2005. 204 f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2005. Disponível em: [Estruturas da álgebra: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento \(unesp.br\)](http://Estruturas da álgebra: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento (unesp.br))

Acesso em: 22 out. 2022.

KLUTH, Verilda Speridião. O movimento da construção das estruturas da álgebra: uma visada fenomenológica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 20, n. 28, 2007, p.93-113.

Disponível em: [O Movimento da Construção das Estruturas da Álgebra: uma visada fenomenológica | Bolema - Boletim de Educação Matemática \(unesp.br\)](http://O Movimento da Construção das Estruturas da Álgebra: uma visada fenomenológica | Bolema - Boletim de Educação Matemática (unesp.br))

Acesso em: 19 dez. 2022.

LOVIS, Karla Aparecida; FRANCO, Valdeni Soliani; LIMA, Vanderléa Mendes de. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o Ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na educação: teoria & prática**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, 2013. Disponível em: [Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o Ensino de Geometria Euclidiana | Informática na educação: teoria & prática \(ufrgs.br\)](http://Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o Ensino de Geometria Euclidiana | Informática na educação: teoria & prática (ufrgs.br))

Acesso em: 19 jan. 2023.

LUTZ, Mauricio Ramos. **Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na Licenciatura em Matemática do IFFAR**. 2020. 253 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020. Disponível em: UFN Universidade Franciscana: POSSIBILIDADE DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFFAR

Acesso em: 23 jan. 2023.

MASCENA, José Hugo Alves. **Sistemas dinâmicos e caos: do clássico ao quântico**. 2021. 91 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação/Bacharelado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021. Disponível em: [JHAM21122021.pdf \(ufpb.br\)](http://JHAM21122021.pdf (ufpb.br))

Acesso em: 02 mar. 2023.

MEES, Leonardo. Nietzsche e o Caos como caráter geral do mundo. **Revista Ítaca**, n. 16, Rio de Janeiro, p. 51-61, 2011.

Disponível em: [Nietzsche e o caos como caráter geral do mundo | Mees | Ítaca \(ufrj.br\)](http://Nietzsche e o caos como caráter geral do mundo | Mees | Ítaca (ufrj.br))

Acesso em: 24 mar. 2023.

MELLO, Cássio Kiechaloski Correia. **Sistemas Dinâmicos e Caos – Análise de mapas discretos e possibilidades de aplicação no Ensino Médio**. 2021. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2021.
Disponível em: sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=5835&id2=171052142
Acesso em: 12 fev. 2023.

MENDES JUNIOR, Daniel de Carvalho. **Uma nova abordagem dos Complexos para o Ensino Médio: O Estudo dos Fractais e do Caos na composição do Conjunto Preenchido de Julia e o Conjunto de Mandelbrot.** 2017. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.
Disponível em: sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=3359&id2=75600
Acesso em: 22 set. 2022.

MOOC Caos y Dinámica no lineal. Canal UPM (Universidade Politécnica de Madrid). 3 vídeos(30min.).
Disponível em: https://www.youtube.com/playlist?list=PL8bSwVy8_IcMAek0-u64DDnLjQRoaCbr1.
Data de acesso: 13 dez. 2022.

MORAIS, Leonardo. **Equações de Diferenças, Caos e Fractais.** 2014. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.
Disponível em: sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=1072&id2=951
Acesso em: 25 set. 2022.

MOREIRA, Rafael de Lima. **Fractais.** 2013. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.
Disponível em: [profnat_tcc.php \(profnat-sbm.org.br\)](https://profnat_tcc.php(profnat-sbm.org.br)) Acesso em: 27 nov. 2022.

MORITA, Ana Maria M.; LENARDUZZI, Fernando N.; PRECIOSO, Juliana C. Caos e Fractais. **Revista e-Xacta**, v.2, n.03, 2009. Belo Horizonte, 2019.
Disponível em: [Caos e Fractais | Precioso | e-xacta \(unibh.br\)](https://Caos_e_Fractais|Precioso|e-xacta(unibh.br))
Acesso em: 09 fev. 2023.

MOURA, Edilson de. **O Conceito Fractal e sua presença pedagógica na educação básica.** 2011. 127 f. Dissertação (Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.
Disponível em: [Microsoft Word - Disserta\347\343o do Edilson - 15-9-2011 - Revisada\)\(diaadia.pr.gov.br\)](https://Microsoft Word - Disserta\347\343o do Edilson - 15-9-2011 - Revisada)(diaadia.pr.gov.br))
Acesso em: 17 mar. 2023.

NASCIMENTO, Maristel do; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da; MACIEL, Nilcéia Aparecida. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na Educação Básica. **VIDYA**, v. 32, n. 2, p.113-132, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012. Disponível em: [UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA | VIDYA \(ufn.edu.br\)](https://UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA | VIDYA (ufn.edu.br)) Acesso: 18 out. 2022.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações.** 2006. 78 f. Tese (Mestrado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto - Departamento de Matemática Pura, 2006. Disponível em: [tese_final_alterada.dvi \(diaadia.pr.gov.br\)](https://tese_final_alterada.dvi(diaadia.pr.gov.br)) Acesso em: 10 dez. 2022.

PEREIRA, Tiago; BORGES, Fabio Alexandre. A Geometria dos fractais no Ensino de Matemática: Uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae v.19 n.4**, Canoas, p.563-581, jul./ago. 2017. Disponível em: [A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos | Borges | Acta Scientiae \(ulbra.br\)](https://A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos | Borges | Acta Scientiae (ulbra.br)) Acesso em: 19 jan. 2023.

PERRUSI, Martha Solange. A Apropriação do “conceito” grego de caos no pensamento de Castoriadis. **REVISTA SYMPOSIUM – ANO 1- N.1**, Recife, p. 34-41, jul./dez. 1998.

Disponível em: [integra.pdf \(puc-rio.br\)](#)

Acesso em: 20 mar. 2023.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal**. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: [profmat_tcc.php \(profmat-sbm.org.br\)](#) Acesso em: 10 jan. 2023.

RESENDE, Ana Isabel; NEVES, Catarina; CASTANHEIRA, Sandra. **Geometria Fractal e Teoria do Caos**. 2003 – 2004. 101 f. Fundamentos e Ensino da Álgebra - Departamento de Matemática Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Disponível

em:

<https://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2004/Geometria%20Fractal%20e%20Teoria%20do%20Caos.pdf>

Acesso em: 07 nov. 2022.

SANTIAGO, Luciano Lima Maquiné; MIRANDA, Luis Uribe. O conceito de tradição na hermenêutica filosófica de Gadamer. **Hybris - Revista de Filosofia v.10 n.1**, Maranhão, p. 43-61, maio 2019. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7020936.pdf>

Acesso em: 05 jan. 2023.

SANTOS, Bruna. **Introdução ao software Maxima**. 2009. 110 f. Centro de Matemática da Universidade do Porto. Disponível em: [Manuais do Maxima \(sourceforge.io\)](#)

Acesso em: 01 jul. 2023.

SANTOS, Lucas Fernandes dos. **A inserção da Geometria Fractal nas aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental: Um estudo de caso**. 2020. 114 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática-Licenciatura) – Universidade Federal do Alagoas. Arapiraca, 2020. Disponível em: [A inserção da geometria fractal nas aulas de matemática nos anos finais do Ensino fundamental: um estudo de caso \(ufal.br\)](#)

Acesso em: 19 jan. 2023.

SANTOS, Roberta Rayane de Farias; COUTINHO, Ana Emílio Victor Barbosa. Geometria fractal e pensamento computacional: um relato de experiência na formação de professores. **Anais VIII Congresso Nacional de Educação**. Campina Grande: Realize Editora, 2022. Disponível em: [GEOMETRIA FRACTAL E PENSAMENTO COMPUTACIONAL: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES | Plataforma Espaço Digital \(editorarealize.com.br\)](#)

Acesso em: 06 jan. 2023.

SEDREZ, Maycon Ricardo; PEREIRA, Alice T. Cybis. CAAD e Criatividade, uma experiência com arquitetura fractal. **Risco Revista De Pesquisa Em Arquitetura E Urbanismo**, (9), p.168-179, 2009. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/risco/article/view/44770>

Acesso em: 17 jan. 2023.

SIDI, Pilar de Moraes; CONTE, Elaine. A hermenêutica como possibilidade metodológica à pesquisa em educação. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v.12, n.4, p.1942–1954, 2017. Disponível em: [A hermenêutica como possibilidade metodológica à pesquisa em educação | Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação \(unesp.br\)](#) Acesso em: 23 out. 2022.

SILVA, Kauê Matsumoto. **Fractais e algumas aplicações ao ensino**. 2015. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: [TCC Kauê.pdf \(ifsp.edu.br\)](#) Acesso em: 21 dez. 2022.

SILVA, Marcus Vinicius Oliveira Lopes da. **Geometria Fractal e Atividades para o Ensino de Matemática: Degraus Fractais e Esponja de Menger**. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional

em Matemática) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: [profmat_tcc.php \(profmat-sbm.org.br\)](http://profmat_tcc.php(profmat-sbm.org.br)) Acesso em: 17 set. 2022.

SILVA, Nelly Almeida da. **Sistemas Dinâmicos Discretos: Uma introdução às equações de diferenças e um breve estudo de modelos populacionais**. 2019. 107 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2019. Disponível em: [Repositório UFT: Sistemas dinâmicos discretos: uma introdução às Equações de Diferenças e um breve estudo de modelos populacionais](#)

Acesso em: 10 fev. 2023.

STEWART, Ian. **Desbravadores da Matemática. Da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot**. Zahar, 2019. 320 p. Disponível em: [Desbravadores da matematica Da - Ian Stewart - Baixar pdf de Doceru.com](#)

Acesso em: 12 jan. 2023.

STEWART, Ian. **Será que Deus Joga Dados? A nova matemática do caos**. Zahar, 1991, 360 p. Disponível em: [Sera que Deus joga dados - Baixar pdf de Doceru.com](#)

Acesso em: 17 mar. 2023.

TAVARES, Fabio G. **A Geometria de Fractais no Ensino Médio: Uma proposta de atividade para cálculo de dimensões fractais**. 2021. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: [profmat_tcc.php \(profmat-sbm.org.br\)](http://profmat_tcc.php(profmat-sbm.org.br)).

Acesso em: 28 mar. 2023.

VILLATE, Jaime E. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma abordagem prática com o Maxima**. Portugal, 2007. 222 f.

Disponível em: [Villate 2007 Sistemas Dinamicos.pdf](#)

Acesso em: 17 mar. 2023.

WANDERLEY, Lucas R.; SOUTO, Rafael A.; DIDIER, Maria Ângela C.; TANAKA, Thiago Yukio. Construção de Fractais Geométricos com o GeoGebra: Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, ed. 104. Disponível em: [RPM - Fractais e GeoGebra -\(1\).pdf](#)

Acesso em: 12 set. 2022.

APÊNDICE A – Modelo de Fichamento

FICHAMENTO DE LEITURA	Data: 04/12/2022
Aluno: Lucas de Lima Ervolino	Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Título da dissertação: O Nexa “Geometria Fractal – Produção da Ciência Contemporânea” - Tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico	
Autora: Tânia Baier	Publicação: 2005
Conteúdo da dissertação:	
Apresentar resumo informativo, destacando:	
a) as principais ideias defendidas no texto;	
b) a estrutura do texto e abordagem utilizada pelo autor para apresentar suas ideias;	
c) as conclusões do autor.	
<p>A autora apresenta a princípio, a motivação para a sua dissertação – motivação essa, fruto de sua atuação em sala de aula e que ganhou forma ao propor e questionar aos alunos de quais modos a matemática contemporânea poderia ser aplicada na Educação Básica. Para mais além, a autora revela o germe do seu desconforto ao interrogar – se em meio a esse processo: Os conteúdos aprendidos na Educação Básica são atualizados de acordo com as mudanças científicas atuais? Dentre os temas que se destacam em meio ao contexto de desenvolvimento da ciência contemporânea, a autora se identificou com os fractais. Essa identificação ocorre, segundo ela, devido ao fato de os fractais terem um apelo visual muito forte e que se desvela por meio de padrões geométricos irregulares e autossimilares. A autora relata que embora os fractais não pareçam ter qualquer relação com a Matemática, ao aprofundar os conhecimentos a seu respeito, percebemos que muitos conceitos presentes em sua fundamentação são trabalhados durante a Educação Básica. Baier acredita que ter uma visão abrangente do processo histórico que permeia a construção da ciência contemporânea pode possibilitar a compreensão e a percepção de como essa junção – entre matemática clássica e contemporânea - pode ser feita e executada em sala de aula e indaga se o estudo dos fractais seria ou não uma ferramenta com a capacidade de tornar os conteúdos matemáticos aprendidos na escola mais próximos e condizentes com a realidade de mundo que nos circunscreve.</p> <p>No Capítulo 2, a autora dá início a sua investigação, tendo como enfoque a ciência moderna, visto que a considera como solo onde as sementes da interrogação foram germinadas e suas raízes deram fruto ao que reputamos por ciência contemporânea. Desse modo, ela se propõe a abordar três concepções</p>	

de mundo que considera ser os pilares do pensamento da ciência moderna: A concepção de mundo Galileana, a Cartesiana e a Newtoniana.

Baier começa a sua abordagem sobre a concepção Galileana, afirmando que desde os primórdios, a humanidade buscava desvendar os segredos da natureza, da existência e do Universo. Galileu foi um dos precursores nessa investigação. Ele se fundamentava na geometria criada pelas civilizações antigas - mesopotâmica, egípcia e grega – e auferiu e desenvolveu suas leis com base na convicção de que o Universo é um livro escrito em caracteres matemáticos e que suas formas se assemelham a triângulos, circunferências, quadrados e outras figuras geométricas. Para Galileu só era possível compreender o Universo se houvesse o entendimento da linguagem com a qual ele foi escrito: a matemática. Com o intuito de descrever os fenômenos inerentes à natureza, Galileu conclui que a ciência deve se concentrar no estudo das formas, das quantidades e no movimento dos corpos, ou seja, no que é passível de ser mensurado. Após, Baier inicia a sua descrição acerca da visão de mundo cartesiana. Segundo ela, René Descartes consolida e fortalece a visão de Galileu, já que busca na matemática as ferramentas para expressar o conhecimento científico, ignorando assim, todas as qualidades, emoções e sensações transmitidas pelo objeto, avaliando apenas os seus atributos quantitativos. Assim, de modo análogo a Galileu, Descartes assume que na natureza tudo pode ser quantificado. Além disso, Descartes também foi responsável por conceber uma visão mecanicista de mundo, isto é, para ele, a natureza e o corpo humano funcionavam de modo similar às máquinas. Essa concepção instaurou – se no pensamento científico e popular de tal modo que ficou conhecida como modelo mecanicista cartesiano. Outrossim, Descartes é o criador da seguinte máxima: *cogito ergo sum* – isto é, penso, logo existo. Descartes chegou a esse princípio, devido ao fato de colocar em dúvida as informações obtidas por meio das sensações corpóreas, isto é, ele defendia uma dicotomia entre a mente os sentidos do corpo. Essa dicotomia entre mente e corpo, defendida por Descartes, é bem aceita pelos cientistas da época, que passam a considerar a teoria mecanicista como único procedimento científico a ser empregado. Baier relata que o sucesso alcançado pelos trabalhos de Isaac Newton fez com que os cientistas entrassem em acordo e a partir de então, adotassem o modelo mecanicista como único procedimento capaz de fornecer novos subsídios e avanços científicos. Newton defendia que o espaço e o tempo eram absolutos, além disso, acreditava que a matéria tinha em sua composição, minúsculas partículas – essas, que reputava por imutáveis e que influíam umas sobre as outras por meio de forças. Os cientistas que se pautavam na concepção Newtoniana tinham a compreensão de que sendo conhecidas as condições iniciais de um sistema, bem como, as equações que o descrevem, poderiam realizar previsões futuras sobre ele, bem como, acompanhar a sua evolução no decorrer do tempo. Logo, o modelo newtoniano possibilitou depreender as movimentações futuras dos planetas, assim como, depreender e antever a ocorrência de eclipses lunares e solares. O êxito alcançado por Newton fez com que os cientistas se debruçassem sobre o Cálculo Diferencial e sua aplicabilidade e instigou a esfera científica a elaborar e resolver equações diferenciais, já que, dissemina – se a ideia de que ao representar

um sistema através de equações, torna – se possível mensurar sua condição inicial e assim, conseqüentemente, obter com precisão o seu processo de transformação.

Baier discorre que no início do século XIX, surge um empecilho para a total aceitação do modelo mecanicista cartesiano. Esse obstáculo surge devido ao fato das leis de Newton não se mostrarem efetivas no estudo do movimento individual das moléculas. Ainda no final do século XIX, alguns dilemas se estabelecem, dentre os quais: a ordem e a complexidade elevada do mundo vivo – analisada pelos biólogos – e a compreensão de que a energia mecânica é dissipada em forma de calor, que não pode ser reavido, o que nos leva a inferir o fim de toda a máquina existente no mundo. Apesar dos avanços obtidos com as pesquisas, muitos paradoxos e questionamentos ainda se mantiveram e só foram ser desvendados posteriormente.

No Capítulo 4, a autora aborda a concepção contemporânea de mundo: a concepção sistêmica. Ela dá início apresentando duas vertentes da biologia: o mecanicismo e a visão sistêmica. Muitos biólogos se ancoravam no modelo mecanicista cartesiano, isto é, na concepção de que todos os seres vivos, a natureza e o universo, funcionavam como máquinas. Embora a concepção mecanicista tenha contribuído com avanços na área da Biologia, foi também por meio dela que os primeiros passos para uma visão sistêmica de mundo foram dados. Com o desenvolvimento da Ecologia, algumas descobertas foram ganhando forma e revelando que a teoria mecanicista cartesiana não era absoluta e ilimitada. A investigação pioneira que despertou a comunidade científica para esse novo parecer foi a do embriologista Hans Driesch. Ele conclui que os organismos vivos possuem uma capacidade a qual as máquinas não possuem: a de regenerar – se em sua totalidade, a partir de suas partes integrantes. Desse modo, gradualmente, os pesquisadores passam a perceber que a concepção mecanicista cartesiana não é eficaz no processo de compreensão científico de casos que não podem ser estudados separadamente (tendo em vista as suas interconexões). Surge então, em meados do século XX, uma nova concepção: a sistêmica. A visão sistêmica de mundo é expressa pela metáfora da “rede”, ou seja, um elemento do sistema representa um padrão pertencente a uma rede de interligações e suas propriedades só podem ser apreendidas a partir da dinâmica do todo. A partir daí, surge o entendimento da ameaça de assumir uma postura que seja completamente pautada na visão cartesiana e o antídoto se apresenta como único: o cuidado.

De acordo com a autora, é apenas durante as últimas décadas do século XX que dissemina-se a compreensão de que na natureza os fenômenos predominantes na natureza e na vida são não-lineares. O estudo dos padrões, ou seja, das qualidades, não é significativo na visão de mundo mecanicista, porém se torna de extrema importância na concepção sistêmica e na atualidade, visto ser essencial e indispensável para a compreensão acerca dos sistemas vivos.

Baier considera que o processo iterativo assume um papel fundamental no processo de construção da ciência contemporânea. A autora afirma que iterar significa repetir e que processos iterativos ocorrem em diversos contextos: no processo de divisão celular, nas operações bancárias

envolvendo juros, nas aproximações encontradas pelos gregos para o valor de π . Além disso, iterações geométricas reproduzem fractais.

Baier cita Capra, que relata que desde meados do século XX, tem surgido uma nova linguagem, voltada para a compreensão dos complexos e altamente integrativos sistemas de vida. Algumas de suas concepções – chave são os atratores caóticos e os fractais. No entanto, Baier afirma que o novo conjunto de conceitos e ferramentas criadas para lidar com a complexidade sistêmica não tem uma denominação definitiva e que, portanto, será utilizada a nomenclatura menos técnica e mais popular: a Matemática do Caos. O trabalho conhecido como pioneiro na Teoria do Caos é realizado por Henri Poincaré. Poincaré é desafiado pelo rei da Suécia, Oscar II, a responder a seguinte pergunta: O Sistema Solar é estável? Poincaré não consegue resolver completamente a questão, porém é premiado devido aos avanços alcançados. Assim, Poincaré oferece uma nova perspectiva aos problemas que envolviam a mecânica celeste, estabelecendo assim, os fundamentos de uma teoria de sistemas dinâmicos. Buscando compreender as órbitas dos corpos celestes, Poincaré se depara com o caos e a partir daí, adota uma nova postura – postura essa que privilegia os métodos qualitativos ao invés dos quantitativos. Essa nova geometria recebe o nome de Topologia (geometria das deformações). Ademais, ao responder ao desafio proposto por Oscar II, Poincaré deparou – se com o que hoje conhecemos como atrator estranho. As ideias inovadoras de Poincaré passaram a ser relevantes para os pesquisadores, que desenvolveram novas ferramentas matemáticas para lidar com os sistemas dinâmicos, com o auxílio dos computadores. A autora discorre que a construção da Teoria do Caos não se dá na época de Poincaré e isso se deve a dois motivos: a falta de tecnologias computacionais, assim como, o desinteresse dos cientistas pelos fenômenos que se comportam de modo irregular. No entanto, natureza, por toda parte, ocorrem fenômenos dos quais os efeitos não são proporcionais à grandeza das causas e a isso se deve a relevância da compreensão dos sistemas não – lineares. A abordagem qualitativa adotada por Poincaré pode ser aplicada tanto para equações diferenciais lineares quanto para as não – lineares. A autora afirma que com o desenvolvimento dos computadores, as equações que não apresentavam soluções analíticas poderiam ser resolvidas, no entanto, essas soluções eram obtidas de outra forma, por meio da ferramenta denominada espaço de fase. O computador era programado então, para desenhar as soluções – soluções essas que poderiam ser representadas por uma única curva ou um conjunto de curvas. Esse procedimento deu suporte e auxílio aos cientistas no que se refere à resolução de inúmeras equações não – lineares, possibilitando auferir ordem ao caos vigente e eminente. Uma propriedade importante de um sistema dinâmico diz respeito a seu comportamento, que pode se estabilizar em um atrator. Visando enriquecer o conceito de atrator, Baier apresenta citações de alguns autores, dentre os quais, Fiedler-Ferrara e Prado, Lorenz e Stewart. De acordo com Fiedler-Ferrara (1994), atrator “é um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo”. Já para Lorenz (1999), “os estados de qualquer sistema que frequentemente se repitam, ou que frequentemente sejam praticamente atingidos com precisão cada vez maior, pertencem então a um conjunto bastante restrito. Este conjunto

é o de atratores”. Por conseguinte, a autora cita Stewart (1991) que explana que “a essência de um atrator é ser uma porção do espaço de fase tal que qualquer ponto que se ponha em movimento nas suas proximidades se aproxima cada vez mais dele”. Além disso, Baier destaca um atrator que pode ser obtido por meio de um processo de dobras e alongamentos: esse atrator recebe nome de atrator estranho, denominação introduzida por Ruelle e Takens e pode ser chamado também de atrator fractal ou atrator caótico.

Os pesquisadores das diferentes áreas do conhecimento, embora isolados em suas especialidades, procuram encontrar maneiras de lidar com os fenômenos irregulares. Nas mais variadas investigações, surge a concepção de que em alguns sistemas, a desordem dá origem a padrões ordenados, isto é, ordem e caos coexistem e despontam simultaneamente.

Baier afirma que na década de 1960, Edward N. Lorenz, realizou uma investigação com o intuito de obter equações matemáticas capazes de descrever o clima atmosférico. Lorenz acreditava que encontrando as equações que descrevessem o clima, seria possível realizar previsões precisas acerca da temperatura atmosférica. Desse modo, no inverno de 1961, ao realizar simulações em seu computador, Lorenz opta por digitar números diretamente da impressão anterior e se vê perplexo ao observar que a nova simulação computacional obtida diverge completamente da anterior. Ele conclui então, que o seu modelo, embora baseado em equações determinísticas, dá à luz a um cenário de imprevisibilidades. Este fenômeno descoberto por Lorenz é o que se tornou a principal característica do que hoje reputa – se por Teoria do Caos. Esse fenômeno é chamado pelos cientistas de dependência ou sensibilidade às condições iniciais e é popularmente conhecido como efeito borboleta.

A autora discorre que a propriedade denominada dependência sensível às condições iniciais também se manifesta na dinâmica existente nas populações animais. Para os cientistas da Ecologia, os modelos matemáticos clássicos não passavam de representações distantes e inadequadas para lidar com a complexidade manifesta pelos fenômenos da natureza. Pesquisadores dessa área buscam então, investigar o crescimento, decréscimo e extinção populacional, bem como os modos de interação entre presas e predadores e a maneira pela qual uma doença epidêmica se propaga. De acordo com a autora, na década de 1960, o ecologista matemático Robert May desenvolve as primeiras pesquisas em dinâmica populacional. Ele busca conduzir as suas investigações de maneira distinta a que foi assumida no estudo de populações segundo os pressupostos de Newton, Galileu e seus seguidores, durante a construção da ciência moderna. Uma das abordagens adotadas por May propicia o entendimento acerca da sensibilidade às condições iniciais expostas no trabalho pioneiro de Lorenz e que caracteriza uma propriedade essencial dos fenômenos nos quais o caos se faz presente. Segundo a autora, com o intuito de verificar de qual modo o caos ocorre no mapa logístico, busca-se utilizar o processo de iteração, que consiste em aplicar uma mesma função continuamente. Dessa forma, ao investigar uma população que varia com o passar dos anos, temos que a população do segundo ano será obtida a partir da população do primeiro ano considerado; a população do terceiro ano será calculada tendo como base o número de

indivíduos encontrados no segundo ano e assim, sucessivamente. No modelo logístico discreto, sabendo – se o parâmetro k , assim como a população x_n em determinado ano, logramos calcular a população x_{n+1} dos anos posteriores, iterando a função sucessivamente a fim de investigar a variação da população considerada ao longo do tempo.

A autora afirma que para uma melhor compreensão acerca da propriedade fundamental da Teoria do Caos (a sensibilidade às condições iniciais), além do conhecimento sobre iteração, faz – se necessário a apresentação dos conceitos de órbita e valor inicial. Ela cita um exemplo que se baseia no modelo populacional desenvolvido por Malthus e generaliza o conceito de órbitas de um sistema dinâmico. De modo generalizado, as órbitas de um processo iterativo podem ser representadas da seguinte forma: $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow \dots$; onde x_0 é o valor inicial do sistema $f(x_n) = x_{n+1}$. O processo iterativo pode ser representando geometricamente também, por meio da construção de um diagrama de rede, também chamado de diagrama de *cobweb*. Para construir o diagrama, deve-se representar a função linear $f(x_n) = x_{n+1}$ e a função identidade $y = x$, no mesmo sistema de eixos coordenados. Tendo isto feito, ela retoma a sua análise do mapa logístico e observa o comportamento adotado por ele para diferentes intervalos de valores assumidos pela constante k . A autora apresenta essas análises visualmente por meio da construção do gráfico de *cobweb* e nos possibilita compreender o comportamento das órbitas do mapa logístico de acordo com a variação dos valores da constante k . Além disso, fica evidenciado que o mapa logístico também apresenta um comportamento caótico. Baier afirma que as regiões obtidas no mapa logístico possuem camadas autossemelhantes, já que as estruturas repetem – se indefinidamente em escalas cada vez mais finas.

Na Seção 5.3:” Explicitando a linguagem dos Fractais”, a autora cita o responsável por conceber a palavra fractal: Benoît Mandelbrot. A autora afirma que Mandelbrot criou essa palavra tendo como referência o adjetivo em latim *fractus* e que usou o termo para qualificar matematicamente as irregularidades e fragmentações existentes na natureza e na vida. A autora expõe que os fractais são entes matemáticos obtidos por meio da remoção ou acréscimo de diversas partes e que esse processo de construção é realizado indefinidamente. Baier menciona novamente a propriedade da autossimilaridade, dizendo que ela se faz presente não somente no mapa logístico, mas também, na natureza como um todo. Ela diz que os fractais possuem essa característica, pois suas partes, independentemente da escala em que forem consideradas, serão semelhantes ao todo. Além disso, essa propriedade também marca presença na Teoria do Caos, já que os atratores estranhos também são exemplos de fractais. Baier menciona Capra, que relata que ao serem ampliadas, as estruturas dos atratores estranhos exibem camadas nas quais os mesmos padrões se repetem constantemente e que por isso tornou – se comum afirmar que os atratores estranhos são trajetórias no espaço de fase que revelam uma geometria fractal.

Baier discorre que os objetos matemáticos atualmente conhecidos como fractais, tiveram sua edificação no final do século XIX, porém, como o mundo ainda se encontrava voltado e ancorado na concepção da ciência moderna, esses objetos foram rejeitados. Para mais além, havia outro conceito que

já não se perfazia mediante a Matemática Clássica: o conceito de dimensão. Para isso, Mandelbrot desenvolveu a dimensão fractal, que não invalida de nenhum modo a dimensão euclidiana, mas sim, a torna mais abrangente. Assim, a Teoria do Caos desponta a visão de mundo que propicia a produção, tal qual, a edificação da ciência contemporânea. Ademais, a Teoria dos Fractais dialoga com a visão sistêmica no que se refere à percepção das interações indissociáveis existentes entre o ser humano e a natureza.

A autora cita que as contribuições deixadas por Euclides nos fazem afirmar convictamente que o mundo que nos cerca é tridimensional, isto é, possui três dimensões. Por outro lado, a dimensão fractal se caracteriza como o grau de irregularidade ou fragmentação de um objeto. Baier afirma que a dimensão Euclidiana possuía limitações no que tange a descrever objetos e elementos que não se enquadravam como unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais e que a dimensão fractal transpôs esses limites.

A autora exhibe uma citação de Mandelbrot, na qual ele destaca que quando fragmentos do objeto são precisamente similares ao objeto em sua totalidade, dizemos que este ente possui autossimilaridade linear. Entretanto, há fractais que são concebidos de maneiras distintas, seja através de um processo aleatório ou com o intuito de descrever sistemas com comportamento caótico ou não – lineares.

No Capítulo 6, a autora retoma brevemente o contexto do processo de construção da ciência moderna, bem como a transição entre a visão de mundo mecanicista e sistêmica – tendo essa última se consolidado como base de desenvolvimento para a ciência contemporânea. Baier afirma que na procura por iluminação acerca da intercorrelação entre homem e mundo, surge a fenomenologia, com a intenção de resgatar a subjetividade humana. A fenomenologia considera cada indivíduo em seu processo de construção de conhecimento e de significações e expressa essa correlação mediante o diálogo. Segundo a autora, para que a fenomenologia encontre espaço no contexto da sala de aula, há a necessidade de que o professor esteja empenhado a ser – tanto com os alunos, quanto com os conteúdos ensinados. Para mais além, no movimento fenomenológico, estar – no mundo – com – os – outros significa habitar a totalidade da essência humana. Assumir essa postura na área da educação não consiste em rejeitar ou abandonar o planejamento pedagógico, mas sim, depreender que não há como prever e controlar tudo o que está à nossa volta, visto a dinâmica de imprevisibilidades intrínsecas à sala de aula e à vida. Segundo Baier, o professor precisa reconhecer que o processo educativo se fomenta na interação de estar – no mundo com os outros – nesse caso, os alunos; e, portanto, o planejamento não pode ser visto como algo fixo e imutável, mas sim, que precisa ser adaptado de acordo com as demandas expressas pelos alunos. Em meio a esse processo de educar fenomenológico, o currículo é considerado como um trajeto a ser percorrido e que perpassa inúmeros cenários de escolhas a serem realizadas durante o processo. O professor, ao compreender – se como um ser que se constrói mediante sua interação no mundo com os outros, buscará utilizar todos os recursos e conhecimentos prévios dos alunos, fazendo desse modo, uma

leitura da subjetividade de mundo intrínseca de cada indivíduo e produzindo subsídios para constituir um currículo que se aproxime da realidade que os circunscreve.

De acordo com a autora a inserção dos fractais possibilita a valorização de recursos visuais e permite articular o ensino da Matemática e aproximá-lo da visão de mundo dos alunos, bem como, da concepção de mundo que se caracteriza pelo panorama científico contemporâneo. Baier afirma que na escola, os conceitos matemáticos desenvolvidos transmitem a sensação e a percepção de que o mundo no qual vivemos é regular, preciso e totalmente previsível e que isso corrobora para a aceitação de uma relação linear de causa – efeito expressa em todos os fenômenos naturais. No entanto, as recentes descobertas da ciência contemporânea têm feito questão de mostrar que modelos deterministas não são a garantia de precisão e predição total, o que nos autoriza a inferir que abordar conceitos como fractais e a Teoria do Caos nas escolas contribui com o entendimento de um Universo no qual predominam a incerteza, a instabilidade e a imprevisibilidade, bem como, desenvolve a noção de que caos e ordem coexistem intimamente.

Em que esta leitura contribui para o meu Trabalho de Conclusão de Curso? (Verificar se a leitura apresentou respostas à interrogação norteadora e às perguntas subjacentes do trabalho).

1. O que são fractais?

A autora afirma que o termo fractal foi desenvolvido por Benoît Mandelbrot para caracterizar as formas irregulares e fragmentadas presentes na natureza e na vida.

2. Como os fractais são concebidos na Matemática?

Baier afirma que a grande maioria dos fractais são obtidos por meio de um processo iterativo, no qual são retirados ou acrescentados partes, indefinidamente. Além disso, a autora cita um fractal encontrado na natureza: os litorais; devido à sua grande fragmentação e irregularidade, bem como à autossimilaridade que possui em qualquer escala. A autora menciona também alguns fractais obtidos por meio de relações de recorrência: O mapa bidimensional de Hénon e o Conjunto de Mandelbrot. A autora menciona uma citação de Mandelbrot na qual ele relata que os fractais mais importantes são gerados por meio de um processo randômico (aleatório), enquanto outros, podem descrever o comportamento expresso por sistemas dinâmicos caóticos ou não-lineares.

3. Quais as aplicações dos fractais?

A autora relata que os fractais possuem aplicação na construção de cenários de filmes e jogos computacionais, bem como, possui aplicações nos sistemas dinâmicos. Segundo Baier, as estruturas fractais são responsáveis por auferir ordem em meio ao caos eminente de alguns sistemas dinâmicos caóticos não-lineares. A autora cita também as aplicações no que se refere

ao conceito de dimensão, visto que a dimensão fractal tornou a dimensão euclidiana mais abrangente, possibilitando o cálculo da dimensão de diversos elementos outrora não contemplados pela Geometria de Euclides. Para mais além, os fractais se fazem presentes no mapa logístico (dinâmicas populacionais) também, visto que suas estruturas são autossimilares em qualquer escala (atrator estranho).

4. De que modo se deu a construção do corpo de conhecimento dos fractais?

Da leitura da dissertação de Baier, fica subentendido que a construção do corpo de conhecimento dos fractais inicia-se com Henri Poincaré, que se torna um crítico incisivo dos métodos quantitativos e desenvolve a geometria das deformações – a Topologia. Poincaré obtém grandes avanços em seus estudos, chegando à conclusão de que alguns sistemas de equações diferenciais não possuem solução analítica. Infelizmente, Poincaré não logrou mais descobertas, visto a falta de ferramentas computacionais, bem como a concepção mecanicista impregnada no mundo científico da época. Anos mais tarde, biólogos começaram a perceber que a concepção mecanicista não se adequava às análises individuais realizadas em alguns organismos vivos. Driesch se torna pioneiro ao demonstrar que os seres vivos possuem uma capacidade da qual as máquinas não dispõem: a da regeneração. Desse modo, a concepção de mundo determinista e de um mundo funcionando como uma máquina a plenos vapores vai se rompendo paulatinamente. Na Ecologia, diversos estudos são realizados no que se refere às dinâmicas populacionais e evidencia-se o comportamento caótico do mapa logístico, bem como suas estruturas autossimilares e bifurcações. Anos mais tarde, Edward Lorenz, define equações que descrevem a temperatura atmosférica e acreditava que por meio delas seria capaz de prever com exatidão o clima. Porém, ao realizar uma pequena mudança nas condições iniciais do sistema, Lorenz se depara com uma sequência de valores completamente distinta da anterior. A essa propriedade, Lorenz denomina de sensibilidade às condições iniciais – conhecido também como efeito borboleta – que se tornou a marca registrada da Teoria do Caos. Anos mais tarde, Mandelbrot cunha a palavra fractal, do adjetivo em latim, *fractus*, com o intuito de caracterizar os entes irregulares predominantes nos fenômenos da vida e da natureza. No entanto, a princípio, não havia sido verificada nenhuma correlação entre o caos e os fractais, pois as duas áreas se desenvolveram de maneira independente. Ao estudar os trabalhos de Poincaré, Mandelbrot observa que os fractais também possuem aplicação em dinâmica. Mandelbrot constata a autossimilaridade (característica intrínseca dos fractais) presente na representação gráfica de alguns sistemas dinâmicos no espaço de fase e observa que seus atratores estranhos possuem estruturas fractais. Desse modo, esses atratores passam a ser entendidos como o elo entre a geometria fractal e a Teoria do Caos e podem ser chamados também de atratores fractais ou atratores caóticos.

5. Quais as características e particularidades dos fractais?

Os fractais possuem autossimilaridade em qualquer escala, isto é, fragmentos do fractal se assemelham ao fractal inteiro. Além disso, outras características intrínsecas dos fractais são a irregularidade e a sua dimensão – essa última, responsável por indicar o grau de fragmentação e de irregularidade do fractal considerado.

6. Quais as diferenças existentes entre a Geometria Fractal e a Geometria Euclidiana?

Uma das diferenças reside no fato de a Geometria Euclidiana não ser tão adequada quanto à Geometria Fractal para descrever nuvens, litorais, montanhas, árvores e demais elementos e fenômenos naturais. Além disso, outra distinção está presente no conceito de dimensão, pois a Geometria Fractal torna o conceito de dimensão mais amplo, possibilitando calcular o grau de irregularidade e fragmentação de um objeto.

7. O que é a dimensão fractal?

Conforme mencionado anteriormente, se caracteriza pelo grau de irregularidade, fragmentação e rugosidade de algum objeto. É representado através de um número racional decimal.

8. Como a dimensão de um fractal pode ser calculada?

A autora não menciona de que modo pode ser calculada a dimensão de um fractal. Ela apenas mostra alguns fractais e cita que sua dimensão fractal está situada entre dois números inteiros positivos.

9. Por que os fractais não estão presentes nos currículos da Educação Básica e qual a importância de introduzir os fractais no Ensino Básico?

Baier afirma que os currículos estão alinhados à concepção de mundo mecanicista (ciência moderna) e que, portanto, não são atualizados para contemplar conteúdos fundamentados na visão de mundo sistêmica. Ela defende que os conteúdos relacionados à ciência moderna devem ser mantidos, porém, deve haver espaço para que os conteúdos mais atuais se façam presentes nos currículos escolares, visto que sua inserção possibilitaria aproximar os conteúdos matemáticos da realidade de mundo dos alunos, bem como, desenvolver temáticas inerentes à ciência contemporânea – como os fractais e a Teoria do Caos. A autora defende que os currículos foram concebidos de modo a valorizar e a fortalecer a ideia de que tudo a nossa volta pode ser antevisto, calculado e mensurado e que ter noções sobre os fractais e a Teoria do Caos fariam os alunos perceberem que a matemática também reconhece os fenômenos imprevisíveis e incertos concernentes à existência humana e ao mundo que nos abarca.

10. O que é o caos do ponto de vista filosófico e matemático?

A autora não aborda o caos de um viés filosófico, porém, o caracteriza matematicamente. Segundo ela, o caos se caracteriza pela sensibilidade às condições iniciais que alguns sistemas dinâmicos apresentam, ou seja, ao considerar valores muito próximos como iniciais, os

resultados obtidos por meio deles são distintos, isto é, pequenas alterações podem acarretar grandes consequências e desse modo, causa e efeito são considerados não-lineares.

11. De que modo o caos se expressa e é estudado?

O caos se expressa devido a sensibilidade às condições iniciais de que dispõem alguns sistemas dinâmicos. Uma das maneiras de observá-lo é por meio do diagrama de *cobweb* – demonstrado pela autora ao abordar o mapa logístico e apresentar os diagramas para distintos valores da constante k . Outra maneira é observar o comportamento das trajetórias do sistema no espaço de fase.

12. O que são Sistemas Dinâmicos?

Segundo Baier, os sistemas dinâmicos se caracterizam como um campo da matemática que se preocupa com os padrões e qualidades. Além disso, Baier menciona Capra que diz que os sistemas dinâmicos são a primeira teoria matemática desenvolvida que possui a capacidade de lidar com a complexidade dos fenômenos não-lineares existentes. Além disso, Baier utiliza outra citação de Capra, na qual ele discorre que a teoria dos sistemas dinâmicos não é uma teoria para lidar com fenômenos físicos, mas sim, uma teoria desenvolvida para ser utilizada na análise de inúmeros fenômenos.

13. É possível obter fractais por meio do caos? De que maneira se dá essa construção?

A dissertação não menciona que é possível obter fractais por meio do caos, porém, Baier afirma que o comportamento caótico das trajetórias de um sistema dinâmico pode ser representado no espaço de fase e as representações visuais exibem camadas autossimilares em qualquer escala, ou seja, os fractais são a linguagem pela qual o caos se expressa e se desvela no espaço de fase – linguagem essa, denominada atrator estranho.

Citações da tese que respondem à interrogação norteadora e as perguntas subjacentes

1. O que são fractais?

Eu cunhei a palavra *fractal* do adjetivo latino *fractus*. O verbo latino correspondente *frangere* significa *quebrar*: criar fragmentos irregulares. Portanto, é considerável – e quão apropriado para as nossas necessidades! – que, além de significar *fragmentado* (como em *fração* ou *refração*), *fractus* pode também significar *irregular*, estando ambos os significados preservados em *fragmento* (grifos do autor). (MANDELBROT, 1977, p. 4).

a geometria fractal era uma geometria da natureza, que fazia um apelo constante ao caos estatístico. Mas, com a sua utilização, o seu papel alargou-se enormemente. É uma geometria da natureza e é uma geometria do caos, sob duas formas: estatística e determinista. (MANDELBROT, 1991, p. 208).

2. Como os fractais são concebidos na Matemática?

Não foram encontradas citações que respondam a essa pergunta.

3. Quais as aplicações dos fractais?

Não foram encontradas citações que respondam a essa pergunta.

4. De que modo se deu a construção do corpo de conhecimento dos fractais?

A teia da vida consiste em redes dentro de redes. Em cada escala, sob estreito e minucioso exame, os nodos da rede se revelam como redes menores [...]. Na natureza não há acima ou abaixo, e não há hierarquias. Há somente redes aninhadas dentro de outras redes [...]. Na segunda metade do século XX a concepção de rede foi a chave para os recentes avanços na compreensão científica não apenas dos ecossistemas, mas também da própria natureza da vida. (CAPRA, 1998, p. 45).

Ao longo da década de 1970, quando ambos estavam na infância, o caos e os fractais pareciam não ter qualquer relação entre si. Mas eram primos matemáticos. Ambos enfrentam a estrutura da irregularidade. Em ambos, a imaginação geométrica é senhora. Mas, enquanto no caos a geometria presta vassalagem à dinâmica, nos fractais ela reina absoluta. Os fractais oferecem uma nova linguagem para descrever a forma do caos. (STEWART, 1991, p. 233).

substituir os métodos quantitativos, precisos, mas limitados, por métodos qualitativos, que levam mais longe, mas fornecem uma imagem menos distinta. A posição histórica de Poincaré é ter sido um mestre dos primeiros e um inventor dos segundos. Ele será o mais incisivo crítico dos métodos quantitativos e o grande precursor dos métodos qualitativos (EKELAND, 1993, p. 48).

No entanto, as soluções são de um tipo muito diferente. O resultado não é uma fórmula, mas uma grande coleção de valores para as variáveis que satisfazem a equação, e o computador pode ser programado para desenhar a solução como uma curva, ou um conjunto de curvas, num gráfico. Essa técnica permitiu aos cientistas resolver as complexas equações não-lineares associadas aos fenômenos caóticos e descobrir ordem sob o caos aparente. Para revelar esses padrões ordenados, as variáveis de um sistema complexo são exibidas num espaço matemático abstrato denominado espaço de fase. (CAPRA, 1998, p. 111).

5. Quais as características e particularidades dos fractais?

Quando partes do objeto são exatamente semelhantes ao todo, diz-se que o objeto apresenta autossimilaridade linear. No entanto, os fractais mais importantes divergem da autossimilaridade linear. Alguns destes fractais são gerados por um processo randômico, enquanto outros são fractais que podem descrever sistemas caóticos, ou não-lineares[...]. (MANDELBROT, 1992, p. 125).

6. Quais as diferenças existentes entre a Geometria Fractal e a Geometria Euclidiana?

Por que a geometria é frequentemente descrita como fria e seca? Uma das razões está em sua incapacidade para descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de um litoral, ou de uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, cascas de árvore não são lisas, nem o relâmpago viaja em linha reta. (MANDELBROT, 1997, p. 1).

7. O que é a dimensão fractal?

Podemos entender intuitivamente essa ideia compreendendo que uma linha dentada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. Quanto mais dentada for a linha, mais perto de 2 estará a sua dimensão fractal. De maneira semelhante, um pedaço de papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos do que uma esfera. Desse modo, quanto mais amarrotado e apertado estiver o papel, mais perto de 3 estará a sua dimensão fractal (CAPRA, 1998, p. 119).

uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação [...]. É conveniente dizer, a respeito de certas curvas planas muito irregulares, que a sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, definir conjuntos de pontos sobre uma linha cuja dimensão fractal está entre 0 e 1. (MANDELBROT, 1991, p. 14)

8. Como a dimensão de um fractal pode ser calculada?

Não foram encontradas citações que respondam a essa pergunta.

9. Por que os fractais não estão presentes nos currículos da Educação Básica e qual a importância de introduzir os fractais no Ensino Básico?

ao se pensar o currículo como algo a ser planejado, é preciso ter em vista que educação é o resultado de estar-no-mundo com os outros e com as entidades e nesta situação não há possibilidade de realizar-se um planejamento para o aqui e agora. O próprio cotidiano de sala de aula não se restringe àquilo que o professor ensina ou pensa. Há na sala de aula, juntamente com o ensino do professor, operando no crescimento total dos alunos que aí estão, o mundo ao redor (MARTINS, 1992, p. 46).

A idéia de currículo abarca o entendimento de que é necessário abandonar a busca da causalidade das coisas e recuperar uma idéia de consciência subjetiva capaz de atribuir significados. Que significados? Os significados do mundo das crianças que estão sendo educadas (MARTINS, 1992, p. 80).

é possível trabalhar tempo/espaço/movimento à luz do movimento da construção da realidade e da do conhecimento. Desse modo, podemos trazer à discussão questões postas pela ciência contemporânea, como as concernentes ao caos, à organização do mundo (BICUDO, 2000, p. 66).

10. O que é o caos do ponto de vista filosófico e matemático?

um traço inerente às equações matemáticas em dinâmica. A capacidade das equações, mesmo simples, de gerar movimento tão complexo, tão sensível à mensuração que parece aleatório. Isto é chamado, com muita propriedade, de caos. (STEWART, 1991, p. 22).

Caos é entendido como sendo “comportamento estocástico que ocorre num sistema determinístico” (STEWART, 1991, p. 23).

11. De que modo o caos se expressa e é estudado?

Nos sistemas lineares, pequenas mudanças produzem pequenos efeitos, e grandes efeitos se devem a grandes mudanças ou a uma soma de muitas pequenas mudanças. Em sistemas não-lineares, ao contrário, pequenas mudanças podem ter efeitos dramáticos, pois podem ser amplificadas repetidamente por meio de realimentação de auto reforço. (CAPRA, 1998, p. 107).

exemplifica não só as ocorrências do caos, mas como ele pode ser criado [...]. O que o mapeamento logístico mostra é que mudanças drásticas não têm necessariamente causas drásticas [...] O mapeamento logístico é importante também porque foi nele que a teoria do caos teve seus contatos efetivos com experimentos. (STEWART, 1991, p. 169).

12. O que são Sistemas Dinâmicos?

a nova matemática da complexidade e, tecnicamente, como teoria dos sistemas dinâmicos, dinâmica dos sistemas, dinâmica complexa ou dinâmica não-linear [...]. Para evitar confusões, é útil ter sempre em mente o fato de que a teoria dos sistemas dinâmicos não é uma teoria dos fenômenos físicos, mas sim, uma teoria matemática cujos conceitos e técnicas são aplicados a uma ampla faixa de fenômenos. (CAPRA, 1998, p. 99, grifos do autor).

A impossibilidade de prever por qual ponto do espaço de fase a trajetória do atrator de Lorenz passará num certo instante, mesmo que o sistema seja governado por equações deterministas, é uma característica comum a todos os sistemas caóticos. No entanto, isto não significa que a teoria do caos não é capaz de quaisquer previsões. Ainda podemos fazer previsões muito precisas, mas elas se referem às características qualitativas do comportamento do sistema e não aos valores precisos de suas variáveis num determinado instante. Assim, a nova matemática representa uma mudança da quantidade para a qualidade, o que é característico do pensamento sistêmico em geral. Enquanto a matemática convencional lida com quantidades e com fórmulas, a teoria dos sistemas dinâmicos lida com qualidades e com padrões. (CAPRA, 1998, p. 116, grifos do autor).

13. É possível obter fractais por meio do caos? De que maneira se dá essa construção?

os atratores estranhos são exemplos extraordinários de fractais. Se partes da sua estrutura são ampliadas, elas revelam uma subestrutura em muitas camadas nas quais os mesmos padrões são repetidos muitas e muitas vezes. Por isso, tornou-se comum definir atratores estranhos como trajetórias no espaço de fase que exibem geometria fractal (CAPRA, 1998, p. 119).

Muitos livros de Mecânica se referem aos sistemas dinâmicos cujos atratores são pontos, aproximações de círculos ou outras formas de Euclides. Mas eles são raras exceções, e o comportamento da maioria dos sistemas dinâmicos é incomparavelmente mais complexo: seus atratores ou repulsores tendem a ser fractais”. (MANDELBROT, 1977, p. 195).

atratores estranhos encontrados em sistemas dinâmicos contínuos apresentam estrutura tipo-Cantor, autossimilaridade e dimensão fractal” (FIEDLER-FERRARA; PRADO,1994, p. 89).

Referências Bibliográficas Úteis

1. BARBOSA, R. M. Descobrimdo a geometria fractal: para a sala de aula. Editora Autêntica. Belo Horizonte, 2005.
2. FERRARI, P. C. Temas Contemporâneos na Formação Docente a Distância: Uma Introdução à Teoria do Caos. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.
3. MANDELBROT, B. B. Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Paris, Flammarion, 1975.
4. MANDELBROT, B. B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1977.
5. MOURA, E. O conceito fractal e sua presença pedagógica na educação básica. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.
6. SALLUM, E.M. Fractais no Ensino Médio. Revista do Professor de Matemática - RPM 57. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
7. STEWART, I. Será que Deus Joga Dados? A nova matemática do caos. 5. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de São Paulo



PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DISSERTAÇÃO E TESE nº 1838374/2023/PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

DIA - PPG - PROFMAT, 02 de outubro de 2023.

Aos nove dias do mês de outubro do ano de dois mil e três reuniu-se, através da Plataforma *Google Meet* às 09:00 horas, a Comissão Julgadora para a DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO solicitada por **LUCAS DE LIMA ERVOLINO**, aluno(a) do Programa de Pós-Graduação **Mestrado Profissional em Matemática Em Rede Nacional (PROFMAT)**, que apresentou dissertação sob o Título: **OS FRACTAIS ARTICULADOS À TEORIA DO CAOS: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**.

A referida Comissão esteve constituída pelos Professores Doutores:

Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - Universidade Federal de São Paulo;

Profa. Dra. Tânia Baier - Universidade Regional de Blumenau;

Prof. Dr. Theotonio Mendes Pauliquevis Junior - Universidade Federal de São Paulo.

O(A) Presidente Prof(a). Dr(a). **Verilda Speridião Kluth** inicia a sessão dando a palavra ao(a) candidato(a), que dispõe de um período de tempo entre trinta e cinquenta minutos, para expor sua tese. A seguir dá a palavra aos Professores para a arguição. Cada examinador dispõe de trinta minutos, no máximo, para arguição, bem como o(a) candidato(a) para as respostas. Tendo o(a) candidato(a) respondido todas as arguições em tempo hábil os membros da Banca Examinadora, emitiram seus pareceres:

Prof(a). Dr(a). Gleiciane da Silva Aragão	(X) APROVADO () REPROVADO
Prof(a). Dr(a). Tânia Baier	(X) APROVADO () REPROVADO
Prof(a). Dr(a). Theotonio Mendes Pauliquevis Junior	(X) APROVADO () REPROVADO

Em face dos referidos pareceres, a Comissão Julgadora considera o(a) Sr(a) **LUCAS DE LIMA ERVOLINO** (X)Habilitado / (**NÃO**)habilitado a receber o título de MESTRE pelo programa de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO.

E por estarem de acordo, assinam a presente ata.

Diadema, 09 de outubro de 2023.

Sugestões e Observações:



Documento assinado eletronicamente por **Verilda Speridiao Kluth, Docente**, em 16/10/2023, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gleiciane da Silva Aragao, Docente**, em 16/10/2023, às 17:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tânia Baier, Usuário Externo**, em 17/10/2023, às 18:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Theotonio Mendes Pauliquevis Junior, Docente**, em 18/10/2023, às 17:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida [clicando aqui](#), ou pelo endereço: "https://sei.unifesp.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0" informando o código verificador **1838374** e o código CRC **6E275998**.

Referência: Caso responda este Ofício, indicar expressamente o Processo nº 23089.030824/2023-81

SEI nº 1838374