UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Uma proposta de intervenção pedagógica para o ensino de geometria baseada na questão da abstração em Platão

Vinicius Barbosa Calixto

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Vinicius Barbosa Calixto

Uma proposta de intervenção pedagógica para o ensino de geometria baseada na questão da abstração em Platão

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Hamilton Piva Domínguez

USP – São Carlos
Novembro de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C154p

Calixto, Vinicius Barbosa
Uma proposta de intervenção pedagógica para o ensino de geometria baseada na questão da abstração segundo Platão / Vinicius Barbosa Calixto; orientador Hamilton Piva Dominguez. -- São Carlos, 2022.
138 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Abstração. 2. Ensino de Matemática. 3. Geometria. 4. Platão. 5. Ensino-aprendizagem. I. Dominguez, Hamilton Piva, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Vinicius Barbosa Calixto

A pedagogical intervention proposal for teaching geometry based on the abstraction issue in Plato

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Hamilton Piva Domínguez

USP – São Carlos
November 2022

À Deus, verdadeira Sabedoria e Amor de nossas almas.

Aos meus familiares: Veridiana, Lucas, Gabriela, Giovana e Gustavo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas, pela acolhida gentil, atenção e receptividade para comigo na EACH-USP.

Ao Prof. Dr. Hamilton Piva Dominguez, por todas as conversas e orientações, preconizando sempre a busca pela excelência acadêmica; por todos os aconselhamentos, que, como um amigo, identificou minhas maiores dificuldades nesta trajetória, e soube me guiar para superá-las. Sem sua orientação, nada disso seria possível.

À minha família, por toda paciência e encorajamento, por todo incentivo que dedicaram a mim durante todo o período de desenvolvimento deste trabalho.

"Quem não é geômetra
não entre!"
(Suposta inscrição no Portal da
Academia de Platão)

RESUMO

CALIXTO, V. B. **Uma proposta de intervenção pedagógica para o ensino de geometria baseada na questão da abstração em Platão**. 2022. 138 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Este trabalho propõe uma intervenção pedagógica que consiste em uma sequência didática cujo objetivo principal é fomentar o desenvolvimento do raciocínio abstrato em aulas de geometria, percorrendo os seis níveis de abstração estabelecidos por Carson e Rowlands, em um currículo de ensino de matemática especificamente projetado para tal fim. O modelo construído por esses autores alicerça-se no papel fulcral desempenhado pela abstração matemática no processo ascético da alma concebido por Platão. Em tal processo, o filósofo apresenta uma estrutura hierárquica em termos epistemológicos e ontológicos, segundo a qual estabelecem-se diferentes graus de pensamento e distintos objetos sobre os quais a mente humana se debruça. Dentre estes, encontra-se o pensamento matemático. Assim, para compreender no que consistem a abstração e o lugar de destaque ocupado pela matemática na teoria platônica, faz-se uma discussão sobre a natureza tanto dos entes matemáticos quanto dos objetos dos quais o matemático se utiliza em seus raciocínios. Para tanto, apresentam-se, também, as características essenciais da cultura grega, em particular suas concepções de educação (*paideía*), a partir das quais Platão constrói sua argumentação a respeito da matemática, em seus diálogos (em especial, em *A República*).

Palavras-chave: Abstração, Ensino de Matemática, Geometria, Platão, Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

CALIXTO, V. B. **A pedagogical intervention proposal for teaching geometry based on the abstraction issue in Plato**. 2022. 138 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This paper proposes a pedagogical intervention consisting of a didactic sequence whose main objective is to foster the development of abstract reasoning in geometry classes, through the six levels of abstraction established by Carson and Rowlands, in a mathematics teaching curriculum specifically designed for this purpose. The model constructed by these authors is based on the central role played by mathematical abstraction in the ascetic process of the soul conceived by Plato. In this process, the philosopher presents a hierarchical structure in epistemological and ontological terms, according to which different degrees of thinking are established and different objects on which the human mind focuses. Among these is mathematical thinking. Thus, in order to understand what abstraction and the prominent place mathematics occupy in Platonic theory consist of, a discussion is held about the nature of both mathematical beings and objects that the mathematician uses in his reasoning. For this purpose, the essential characteristics of Greek culture are also presented, in particular its conceptions of education (*paideía*), from which Plato builds his argumentation about mathematics in his dialogues (especially in *The Republic*).

Keywords: Abstraction, Teaching of Mathematics, Geometry, Plato, Teaching-Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Muitos estudantes da Educação Básica (sobretudo do Ensino Médio e dos anos finais do Ensino Fundamental) questionam, com frequência, as razões pelas quais precisam aprender determinados conteúdos matemáticos. Algumas teorias didáticas voltadas especificamente ao ensino de matemática, pautadas no pressuposto de que "é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para uma criança" (VERGNAUD, 2000, p. 156), preconizam a atribuição de significado a tais conteúdos por meio da contextualização destes, em situações culturalmente familiares ao aluno e/ou com um apelo à utilidade prática dos saberes nelas mobilizados (CONNE, 2000). Não faltam exemplos em livros didáticos nos quais a abordagem inicial de tópicos matemáticos, bem como a motivação para o engajamento do aluno em seu estudo, apoia-se no caráter utilitário destes — mais comumente, na utilização da matemática como ferramenta para soluções práticas de problemas enfrentados nas ciências aplicadas. Dentre os inúmeros casos deste tipo, em que se associa diretamente o conteúdo à sua utilidade prática, podemos citar: relações trigonométricas e a estimativa de alturas de edifícios, pontes, monumentos etc.; função quadrática e problemas de otimização (maximização de lucros, minimização de gastos e de desperdício de matérias-primas na indústria etc.); funções exponenciais e logarítmicas e o cálculo de taxas de crescimento ou decrescimento (no estudo de: proliferação de populações de bactérias; juros compostos em empréstimos bancários; decaimento de temperatura em processos de resfriamento de corpos; desintegração radioativa de átomos para a produção de medicamentos e armas nucleares; propagação de vírus em pandemias etc.).

Entretanto, na condição de professor de matemática na Educação Básica, minha percepção sempre foi a de que as aplicações práticas, por si só, não foram/são suficientes a meus alunos para conferir um sentido claro e/ou para oferecer uma justificativa robusta para o estudo da matemática. Isto é mais nítido ainda entre os estudantes que possuem maior interesse em alguma área do conhecimento externa aos domínios das ciências exatas, e, sobretudo, entre aqueles que já projetam/projetavam prosseguir suas vidas acadêmicas e profissionais nessas áreas. Aliado a isto, tenho constatado em minha realidade docente que muitos desses alunos aplicam-se ao estudo da matemática, prioritariamente na segunda metade do Ensino Médio, somente com o propósito de preparem-se para os exames de ingresso ao Ensino Superior. Essa percepção e essa constatação geraram uma inquietação que me levaram a buscar compreender com mais clareza esse quadro, o que me remeteu a vários estudos, dos quais, por sua vez, surgiram algumas outras questões que, por fim, me conduziram à questão que esta investigação pretende responder. A seguir, exponho brevemente esse percurso (que se reflete, aliás, na própria estrutura deste trabalho), com a delimitação do problema desta pesquisa.

Ao refletir mais cuidadosamente sobre este quadro, realizei, inicialmente, algumas leituras buscando compreender a influência das provas vestibulares sobre a visão que os alunos formam a respeito dos conhecimentos e dos conteúdos atinentes às disciplinas escolares. Entendi que isso era, em parte, causado ou agravado por uma possível falta de identidade do Ensino Médio no processo de escolarização que se observa, geralmente, em nosso país, o que pode contribuir para que professores e estudantes o encarem como um curso com função propedêutica, no que se refere meramente ao preparo para as provas de acesso ao Ensino Superior (ZAMBON; TERRAZAN, 2017). Meus estudos iniciais confirmaram somente o que eu já supunha, isto é, que os conteúdos cobrados nessas provas vestibulares condicionam a abordagem dos assuntos tratados nas disciplinas escolares, e limitam as práticas pedagógicas, na medida em que muitos professores passam a assumir que seu papel fundamental é o de treinar os estudantes na resolução de questões típicas de vestibular (ZAMBON; TERRAZAN, 2017). A interrogação imediata que surge disso é: se os exames vestibulares deixarem de cobrar um determinado conteúdo, ele não terá importância em termos de seu ensino e aprendizagem? Volta-se, assim, à questão inicial: o que confere sentido ao estudo desses conteúdos, para além de suas aplicações práticas?

Essa primeira fase exploratória serviu, porém, para que eu me desse conta de que, para esclarecer esse liame entre fins educacionais e sentido do ensino de matemática de caráter não utilitário, deveria pesquisar a relação entre educação e cultura. Mais especificamente, o modo com que os fins educacionais são estabelecidos a partir das concepções de educação assumidas pela sociedade na qual se inserem. Quanto a isto, Peters (1979) afirma que a essência da educação não está em seus "fins extrínsecos" — tais como: preparo do estudante para o mercado de trabalho; desenvolvimento cognitivo da criança, isoladamente de valores e princípios éticos, políticos, culturais etc.; fomento de processos de socialização —, mas, sim, em um processo de iniciação "em atividades, modos de conduta e pensamento, que possuem regras intrínsecas, referentes ao que é possível para a ação, para o pensamento e para o sentimento, nos vários graus de competência, relevância e gosto" (p. 125). Logo, a educação entendida como "iniciação" exige a discussão sobre o que é valioso em uma determinada cultura, e que justifique tal esforço. Esbarra-se, pois, com o difícil problema da justificação, "que os filósofos morais, desde Sócrates, vêm constantemente debatendo" (p. 126).

A relação estreita entre educação e cultura, bem como a justificação dos fins educacionais, possui suas raízes na Antiguidade, mais precisamente na *paideía* grega, que era concebida tanto como os processos técnicos pelos quais a educação insere o ser humano na tradição cultural, quanto como os próprios princípios, valores e as mais diversas formas de manifestações culturais, chegando, até mesmo, a ser tomada como sinônimo de "civilização" (MARROU, 1990; JAEGER, 2013; ELSNER, 2013). Nesse sentido, a educação, por um lado, revela-se a síntese da cultura que uma sociedade deseja perpetuar, e, por outro lado, explicita os fundamentos filosóficos da cultura de um período, um retrato das ideias predominantes de uma determinada comunidade (TYMIENIECKA, 2000).

No estudo da *paideía* grega, deparei-me com o modelo educacional proposto por Platão, e no qual encontrei elementos que dizem respeito às questões que me impus em minha busca inicial. Além da reflexão fundamentada em conceitos filosoficamente estabelecidos, tais elementos permitiram que eu adquirisse maior clareza e refinamento quanto à própria formulação de minhas perguntas, e conduziram-me ao aspecto para o qual meus interesses de pesquisa passaram a confluir: a abstração.

A preocupação com questões educacionais podem ser encontradas nas obras de Platão desde seus primeiros diálogos, que abordam o tema da virtude e seu ensino, até *A República*, livro em que o filósofo apresenta o que julga indispensável à formação dos governantes. Para Platão, a educação consiste em um processo ascético da alma, do mundo sensível para o mundo inteligível. O mundo sensível é constituído pelas realidades que captamos por meio dos sentidos; já o mundo inteligível diz respeito ao que apreendemos pela razão, isto é, ao que é abstrato — o que não possui existência espaciotemporal (LINNEBO, 2018). Platão estabelece uma relação hierárquica entre esses mundos, na qual o mundo inteligível situa-se acima do mundo sensível (JAEGER, 2013; MARROU, 1990; MATTÉI, 2010).

Nesse processo, a educação visa à expansão do espírito, sua elevação, em que a formação ocorre não somente em termos do desenvolvimento cognitivo, mas abrangendo múltiplas dimensões: epistemológica, ética, política, estética, ontológica e metafísica. No que se refere ao amadurecimento intelectual, as formas de pensamento evoluem do senso comum ao que é mais abstrato, estágio em que o ser humano, segundo Platão, adquire o pleno conhecimento das coisas, ascendendo à essência destas, sua realidade pura e verdadeira — ao que Platão denomina Forma (*eidos*). Para chegar a tal nível, a matemática ocupa posição chave, na passagem do mundo sensível para o inteligível, isto é, do estado em que a mente só é capaz de racionar em termos sensoriais (formulando apenas opiniões que são suscetíveis ao engano e não resistentes à persuasão), ao estado em que se alcança o conhecimento pleno, a verdade.

Na condição de intermediária entre esses dois mundos, a matemática se utiliza de recursos ainda visíveis (por exemplo, desenhos de triângulo, circunferência, quadrado, diagonal do quadrado etc.), mas que se referem a objetos puramente abstratos, e lidam com a essência destes (respectivamente, as *Formas* de triangularidade, da circunferência em si etc.). Ao discorrer sobre essa trajetória ascética da alma, Platão descreve as funções que a educação deve cumprir em cada etapa, e estabelece uma estrutura ontológica hierárquica entre diferentes níveis de realidade dos objetos sobre os quais a razão se debruça. Dentre tais objetos, encontram-se os entes matemáticos.

Por um lado, na filosofia matemática de Platão, não basta dominar os procedimentos matemáticos, saber calcular, valer-se de símbolos e representações visuais, com aplicações práticas... É preciso compreender o processo de abstração que se está a realizar, apreender racionalmente a essência dos entes matemáticos... Para Platão, "por mais que uma pessoa conheça matemática ou geometria, se ela não entender o estado ontológico das entidades em questão", acabará por "'confundir aparências com realidade', ela não terá um entendimento real. Assim, os pontos de partida não são simplesmente definições matemáticas, mas incluem também afirmações existenciais e caracterizações ontológicas" (MORAVCSIK, 2006, p. 52-53). Por outro lado, a abstração encontra-se entre as principais problemáticas relativas à educação abordadas nos diálogos platônicos. De acordo com Tymieniecka (2000), Platão enxerga os problemas educacionais de modo holístico, orgânico, diferentemente da maioria dos filósofos da educação ocidentais contemporâneos, os quais, exageradamente preocupados com minúcias conceituais, negligenciam o tratamento das grandes questões educacionais, deixando de refletir profundamente sobre o sentido da educação, os fins educacionais e seu papel para a sociedade. Por isso, essa autora propõe o retorno ao pensamento platônico.

Segundo Carson e Rowlands (2007), esse processo de abstração encontrado na teoria platônica, que na Antiguidade era considerado essencial para a formação dos governantes, é hoje essencial também para a formação do homem na contemporaneidade, de tal modo que a educação matemática deve ter como um de seus fins últimos o ensino de abstração. Esses autores elencam inúmeras razões para isso; dentre estas, sublinham que a abstração faz parte da cultura intelectual e do pensamento ocidental dos últimos 25 séculos. Carson e Rowlands (2007) defendem que o ensino de matemática para alunos que não são entusiastas, nem pelo seu uso prático nem vocacionalmente, pode propiciar o desenvolvimento da abstração — crucial para o avanço do pensamento científico, dando origem a novos conhecimentos, tecnologias e aprimoramentos humanos no decorrer da história da humanidade. Além disso, a matemática "fez do uso da razão abstrata um dos mais poderosos conjuntos de ferramentas culturais já desenvolvidos por e para a mente humana" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935). Nesse sentido, os estudos em matemática ao longo da Educação Básica devem levar o aluno a pensar formalmente, isto é, abstratamente. É por meio da abstração que o estudante se torna capaz de reconhecer uma teoria na ciência, interpretar uma obra de arte ou texto literário (CARSON; ROWLANDS, 2007). Em vista disso, esses autores elaboraram uma matriz curricular especificamente pensada para o ensino de geometria, a partir de narrativas da história da ciência. O modelo construído por Carson e Rowlands (2007) alicerça-se no papel fulcral desempenhado pela abstração matemática no processo ascético da alma concebido por Platão. Utilizei amplamente esse modelo nas reflexões e proposições que elaborei ao longo deste trabalho de pesquisa.

Nesse estágio de minha investigação, passei a me interrogar: Qual a natureza dos entes matemáticos? O que o matemático tem em mente quando lida com números e formas geométricas? O que confere veracidade às definições e às proposições matemáticas? Qual a relação disso tudo com o sentido que o aluno atribui, ou não, à matemática em sua formação? O caráter essencialmente abstrato dos conteúdos, procedimentos e objetos matemáticos dificultam tal atribuição de sentido? Como desenvolver a consciência dos estudantes a respeito do papel da abstração na construção do conhecimento matemático? Como fomentar o desenvolvimento do raciocínio abstrato em aulas de matemática (em especial, geometria)?

Dessas questões, emergiu, finalmente, o objetivo deste trabalho: propor uma intervenção pedagógica, que consiste em uma sequência didática, cuja finalidade principal é fomentar o desenvolvimento do raciocínio abstrato em aulas de geometria, percorrendo os seis níveis de abstração estabelecidos por Carson e Rowlands, em um currículo de ensino de matemática especificamente projetado para tal fim.

Para tanto, busco esclarecer no que consistem a abstração e o lugar de destaque ocupado pela matemática na teoria platônica, refletindo sobre a natureza tanto dos entes matemáticos quanto dos objetos dos quais o matemático se utiliza em seus raciocínios. E faço isto por meio da apresentação das características essenciais da cultura grega, em particular suas concepções de educação (*paideía*), a partir das quais Platão constrói sua argumentação a respeito da matemática, em seus diálogos (em especial, em *A República*).

O presente trabalho está estruturado em 3 capítulos. No primeiro, apresento o modelo educacional proposto por Platão e sua teoria ascética da alma (na qual discute-se a questão da abstração, a natureza dos entes matemáticos e o papel da matemática na formação da mente), partindo da descrição das características essenciais da cultura e da educação na Grécia clássica. No segundo, apresento a matriz curricular, centrada na abstração, construída por Carson e Rowlands, com vistas ao ensino de matemática. Esse capítulo subdivide-se em duas partes: na primeira, descrevem-se os 17 módulos que compõem o modelo de Carson e Rowlands; na segunda, explana-se sobre a utilização da narrativa histórica como estratégia pedagógica, tal como defendida por Carson. No terceiro, apresento a intervenção pedagógica elaborada para fomentar o desenvolvimento do raciocínio abstrato em aulas de geometria, com base nas reflexões sobre a questão da abstração em Platão e no modelo curricular de Carson e Rowlands.

CAPÍTULO

2

ABSTRAÇÃO E ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO PLATÔNICA

A compreensão adequada do modelo educacional proposto por Platão, bem como o lugar de destaque nele ocupado pela matemática e a centralidade da abstração na ascese do espírito, exige a abordagem, ainda que sucinta, dos principais aspectos da cultura grega, em especial de suas concepções e processos em educação, a chamada *paideía*. Isto é necessário para que se entenda como Platão, argumentando sobre elementos presentes no pensamento grego de sua época, desenvolve sua teoria de formação do espírito e os papéis nela atribuídos à matemática. Para tanto, neste capítulo, apresentam-se as características essenciais da *paideía* e o processo dialético platônico, no qual localizam-se e detalham-se as discussões que Platão desenvolve sobre o papel da matemática, a natureza de seus objetos e a abstração.

2.1 A *paideía* (παιδεία) grega: aspectos gerais

A Educação, segundo Jaeger (2013), é o meio pelo qual uma comunidade conserva sua cultura, transmitindo aos jovens todo o conhecimento que possui, bem como suas tradições, crenças e hábitos. Uma comunidade com tal propósito pode, por meio de um sistema educativo, desenvolver-se (em suas múltiplas dimensões) ao mesmo tempo em que se esforça em manter sua identidade, seus valores ou, de modo mais amplo, sua cultura. Sendo assim, é a própria cultura (concebida em termos ideais, e que se objetiva perpetuar através da Educação) que estabelece as balizas para o desenvolvimento do processo educacional. Dessa maneira, os alicerces da cultura também sustentam e moldam as concepções de tal sociedade a respeito do papel a ser desempenhado pela Educação. E isto não se restringe simplesmente ao estabelecimento de um quadro de preceitos a serem seguidos. É necessário que haja forças mobilizadoras capazes de propagar a particular "forma de existência social e espiritual" dessa comunidade, isto é, "[...]

a vontade consciente e a razão" (JAEGER, 2013, p. 1). Portanto, trata-se de algo pensado e desejado, e para o qual efetivamente as ações humanas devem se dirigir.

Os gregos, na Antiguidade, foram os primeiros a adotar o ideal de cultura como princípio fundamental do sistema educativo — estabelece-se, "[...] pela primeira vez, de modo consciente, um ideal de cultura como princípio formativo" (JAEGER, 2013, p. 6). Este ideal de cultura engendrava o ideal grego de formação humana, que, por sua vez, preconizava o conhecimento que o espírito é capaz de atingir — tanto do mundo exterior quanto de si mesmo, isto é, da interioridade do homem — como o meio por excelência através do qual é possível criar e alcançar formas de existência humana cada vez mais aprimoradas (JAEGER, 2013). Essa possibilidade de aprimoramento ultrapassa, pois, a concepção de cultura simplesmente em termos de manutenção e manifestações identitárias de um povo, chamando a atenção para o que em seu cerne tem o poder de promover a ascensão de uma forma de existência a outra, a saber: um ideal de Homem que abarca os valores fundantes e norteadores dessa cultura. Jaeger enfatiza este aspecto, ao afirmar que a palavra "cultura", para os gregos, tem o sentido "[...] de um ideal próprio da humanidade herdeira da Grécia; [...] [que] significa um alto conceito de valor, um ideal consciente", e não na acepção — meramente descritiva em termos antropológicos —, "[...] bem mais comum [na atualidade, entendida como] totalidade das manifestações e formas de vida que caracterizam um povo" (JAEGER, 2013, p. 5-6, interpolações nossas). Esse filósofo sublinha a necessidade de reconhecimento desse valor, um ideal consciente. Comentando essa afirmação de Jaeger, Cerda (2020, p. 86, tradução nossa) acrescenta que a cultura consiste em um "[...] conjunto de procedimentos instituídos pelos quais o ser humano, no decorrer de sua fabricação social como indivíduo, é levado a aplicar os valores criados por aquela sociedade, não inventados ou descobertos."[1] A partir disto, e apoiado no pensamento de Cornelius Castoriadis, Cerda conclui que a própria sociedade é inconcebível sem os valores nucleares da cultura. Eis a importância e a força da cultura grega entendida nestes termos: fonte e modelo da civilização ocidental (em particular, da civilização europeia, "um ideal próprio da humanidade herdeira da Grécia").

Grosso modo, essa "cultura" grega — cujos ideais são enaltecidos por Jaeger (2013) —, com tudo o que ela engloba e implica (e nisto inclui-se a Educação), consiste, em termos gerais, na *paideía* grega. Em razão da intrincada e indissociável relação entre os ideais gregos de cultura, formação humana e Educação, Anderson (2009) destaca a grande dificuldade de se traduzir a palavra παιδεία (*paideía*); observa-se, nas "[...] traduções, [que] a palavra significa tanto a cultura ou civilização de seu tempo (com uma gama técnica muito ampla, desde a literatura até a arte, o atletismo, a mitologia e a perícia religiosa), e significa o processo de educação pelo qual foi adquirido um domínio da cultura e de sua tradição[2] (ELSNER, 2013, p. 137, tradução e

[1] "Es el conjunto de procedimientos instituidos por los qué al ser humano en el curso de su fabricación social como individuo, se le conduce a investir los valores creados por esa sociedad, no inventados o descubiertos" (CERDA, 2020, p. 86).

[2] "In part this difficulty is revealed by translations: the word means both the culture or civilization of its time (with a very wide technical range from literature to art, athletics, mythology and religious

interpolação nossas). Dessa maneira, a palavra παιδεία tem sido empregada como sinônimo ora de cultura, ora de educação, ora de civilização, ora de formação.

Marrou (1990), em seu grandioso estudo sobre a Educação na Antiguidade, ao discorrer sobre a polissemia e as derivações da palavra παιδεία, destaca que o ideal grego de formação humana consiste tanto na razão de ser da cultura quanto no fim último da Educação, bem como no resultado que se espera alcançar com o processo educacional — não somente ao final do período de escolarização, mas ao longo de toda a vida. Esse ideal, que é projetado e que se deve perseguir, é o que confere sentido à existência humana; e mais, não se trata apenas de um possível objetivo de vida, mas constitui aquilo em nome do que se deve viver (MARROU, 1990). A efetividade plena desse ideal se dá através de um processo gradual e constante de construção do ser humano, no qual o sujeito deve "fazer-se a si mesmo", "tornando-se verdadeiramente homem". Marrou, ao explicar o que isto significa, apresenta o que ele entende ser o papel e o peso da Educação para os gregos, no período helenístico.[3]

> Fazer-se a si mesmo: extrair, da criança que antes se foi, do ser mal delineado que se arriscaria permanecer, o homem plenamente homem cuja imagem ideal se entrevê — tal é a obra de toda a vida, a única obra a que essa vida possa ser nobremente consagrada. Mas que é isso, senão levar a limite, consagrando-a como um absoluto, a noção mesma de educação: esta (a παιδεία) não é mais a técnica própria para a criança (παῖς) que a equipa e a prepara desde cedo para tornar-se um homem; por uma ampliação notável (αὔξησις) a mesma palavra, em grego helenístico, serve para designar o resultado desse esforço educativo, continuado para além dos anos escolares durante toda a vida a fim de realizar mais perfeitamente o ideal humano: παιδεία (ou παίδευσις) vem a significar a cultura, entendida não no sentido ativo, preparatório, de educação, mas no sentido perfectivo que a palavra tem hoje entre nós: o estado de um espírito plenamente desenvolvido, tendo desabrochado todas as suas virtualidades, o do homem tornado verdadeiramente homem; é notável constatar que, quando Varrão e Cícero tiverem de traduzir παιδεία, preferirão dizer em latim *humanitas* (MARROU, 1990, p. 158-159).

expertise) and it means the process of education by which a command of the culture and its tradition were acquired" (ANDERSON, 2009 apud ELSNER, 2013, p. 137).

[3] O "Período Helenístico" consiste em um período específico da Antiguidade, em que a presença política grega é muito ampla, especialmente na Ásia, após as conquistas de Alexandre, o Grande, e também em razão de novas ondas de colonização grega. "Costuma-se estabelecer o início do Período Helenístico em 323 a.C., com a morte de Alexandre, e seu fim, em 31 a.C., com a conquista do último reino Helênico por Roma, o reino Lágido do Egito. Para a parte asiática, poder-se-ia prolongá-lo até 10 a.C., quando o último reino Indo-Grego foi conquistado por Indo-Sakas. [...] [Neste período, situam-se] Aristóteles, o pai das ciências modernas, Menandro, o autor das grandes comédias, Epicuro, o moralista, Eratóstenes, e também Euclides, Arquimedes e Políbio [...]" (WORLD HISTORY ENCYCLOPEDIA, 2020).

Para Marrou (1990), a importância da Educação nesse período "é tão grande que devemos considerá-la como o verdadeiro centro de todo quadro sincero dessa civilização"[4] (MARROU, 1990, p. 156). E isso se deve ao ideal de "finalidade essencial do homem e os meios de atingi-la" (p. 159), em torno do qual a unidade do povo grego passa a se estabelecer — isto é, "o fato de comungar [esse] mesmo ideal" (p. 159, interpolação nossa) —, mais do que por meio de laços sanguíneos ou políticos, ou hábitos sociais, agregando, inclusive, os diferentes povos anexados pelo processo de colonização e aculturação promovido pela Grécia na Antiguidade (MARROU, 1990).

> Ora, o que os gregos possuem em comum é, precisamente, um tal ideal de vida pessoal; não é necessariamente tal forma de vida social, a cidade, por exemplo. [...] Não, o que une todos os gregos sem exceção, gregos da própria Grécia, emigrantes aglomerados desde o deserto da Líbia até às estepes da Ásia central, bárbaros, enfim, recentemente helenizados, é o fato de buscarem eles adaptar-se a um mesmo tipo ideal de humanidade, o fato de terem recebido a mesma formação orientada para esse fim comum — a mesma educação (MARROU, 1990, p. 159).

Marrou (1990) conclui sua explanação sobre παιδεία com a associação desse termo ao vocábulo latino *humanitas* — tal como Varrão e Cícero traduziram a palavra grega —, que, abarcando os valores veiculados por "esta Forma clássica da educação antiga" (p. 341), consistirá na base do humanismo clássico, que viria a ser adotado, posteriormente, pela civilização romana, com repercussões que chegam até aos nossos dias. Pode-se, então, "definir o ideal da educação helenística como um humanismo" (p. 341). Nesse sentido, afirma esse teórico que "a educação helenística não é apenas uma forma transitória, um momento qualquer de uma evolução contínua: ela é a Forma, estabilizada em sua maturidade, segundo a qual se desenvolveu a tradição pedagógica da Antiguidade", e que "esse ideal jamais deixou de estar presente em nós: ainda que ora apareça como o modelo prestigioso, ora apareça como o erro a ser evitado, ele existe, ao menos para o homem culto que chegou a redescobri-lo ou a conhecê-lo, como uma Ideia em relação à qual se propõe ou se contrapõe o pensamento dos modernos [...]" (MARROU, 1990, p. 340). Justifica-se, assim, a importância de seu estudo.

Para os propósitos do presente trabalho, cabe, então, destacar algumas das características essenciais desse humanismo — identificáveis nos excertos anteriores —, no âmbito educacional, à luz do ideal de formação humana preconizado pela *paideía*.

[4] O poder agregador e norteador da *paideía* é tão forte que Marrou (1990, p. 163) a equipara à religião: "[...] a παιδεία revestia-se de uma espécie de luz sagrada que lhe conferia uma eminente dignidade, de ordem propriamente religiosa. Da desordem profunda nascida do brusco desmoronamento das antigas crenças, ela permanecia como o único valor inabalado, autêntico, ao qual o espírito do homem podia apegar-se: erigida à altura dum absoluto, a cultura helenística acaba por tornar-se bem o equivalente de verdadeira religião."

2.1.1 Algumas características essenciais da paideía

Jaeger (2013) e Marrou (1990)[5] apresentam uma série de traços marcantes da *paideía*. O primeiro destes que destaca-se é a visão de que a infância é uma fase a ser superada, na busca do ideal de ser humano — o Homem — a ser atingido. A criança é vista como um ser ainda “mal delineado”, a ser moldado pela Educação. Há aqui, por conseguinte, “um total desinteresse pela psicologia da criança como tal” (MARROU, 1990, p. 341), em que a Educação se incumbe não somente de proporcionar à criança as técnicas e o treinamento necessários à vida adulta, mas de torná-la, pela cultura, um Homem (MARROU, 1990).

A busca desse ideal de Homem vislumbrado na Educação clássica implica o desenvolvimento integral do homem, em todas as suas potencialidades, “corpo e alma, sensibilidade e razão, caráter e espírito”[6] (MARROU, 1990, p. 342). Esse modelo é descrito por Jaeger (2013, p. 335) como “[...] o conjunto de todas as exigências ideais, físicas e espirituais, que formam a *kalokagathía*, no sentido de uma formação espiritual consciente.” A *kalokagathía*, que os gregos identificavam com a beleza e a bondade (virtude), constituiu um ideal cavaleiresco da aristocracia, e tornou-se, a partir do século V a. C., a expressão do modelo de ser humano universal que a educação grega procurou formar (JAEGER, 2013).

Depreende-se daí que as dimensões física e espiritual não são tratadas de maneira estanque, mas consideradas como sendo intrinsecamente ligadas, interdependentes, conferindo unidade ao ser humano. E isto se deve ao fato de os gregos julgarem que as leis que regem o mundo material, o universo como um todo, serem as mesmas que incidem sobre o homem, em seu corpo e em seu espírito. Por isso, entendem que seja imprescindível ao homem, para conhecer a si mesmo e situar-se no mundo, conhecer tais leis. Essa visão holística a respeito do universo encontra-se arraigada no pensamento grego, muito antes do ideal de formação humana da *paideía* ter sido formulado, como explica Jaeger (2013, p. 8-9, interpolação nossa):

---

5 A apresentação das principais características da *paideía* que aqui são feitas baseiam-se, prioritariamente, em duas obras, uma do alemão Werner Jaeger, e outra do francês Henri-Irénée Marrou. Elsner (2013) sublinha a importância e grandiosidade desses dois estudos sobre a Educação clássica: “A maioria das discussões — e particularmente as escritas depois da década de 1980 — tem se concentrado no processo educacional, no currículo e em suas instituições; mas duas se destacam como fundamentais tanto pela profundidade de sua atenção ao conteúdo da *paideía* quanto pela amplitude de sua influência. Estas são as grandes obras de Werner Jaeger (1888-1961) — cuja série de três volumes se intitulava *Paideia*, e constituía sua suprema realização acadêmica — e de Henri-Irénée Marrou (1904-1977), cuja *História da Educação na Antiguidade* continua sendo o marco de seu estudo nessa área” (p. 137, tradução nossa).

6 Na condição de ideal, este desenvolvimento integral é sempre buscado, mas não plenamente realizado. Isto, de modo algum, o enfraquece, em que pese a frustração de não o alcançar por completo, porque “a fecundidade de um ideal não se mede pela porcentagem, mais ou menos elevada, de suas consequências práticas: a nostalgia, a insatisfação, a frustração que deixa, no âmago do coração, a Forma vislumbrada, embora imperfeitamente realizada, constituem, também, um modo de presença. Se o homem helenístico jamais se converteu, efetivamente, nesse homem integral, pleno, nem por isso deixou de lembrar-se, sempre, de que aspirava a nele converter-se e nunca renunciou, voluntariamente, a essa conversão” (MARROU, 1990, p. 345).

> [...] eles [os gregos] já consideravam as coisas do mundo numa perspectiva tal que nenhuma delas lhes aparecia como parte isolada do resto, mas sempre como um todo ordenado em conexão viva, na e pela qual tudo ganhava posição e sentido. Chamamos orgânica a essa concepção, porque nela todas as partes são consideradas membros de um todo. A tendência do espírito grego para a clara apreensão das leis do real, tendência patente em todas as esferas da vida — pensamento, linguagem, ação e todas as formas de arte —, radica-se nessa concepção do ser como estrutura natural amadurecida, originária e orgânica.

Coerentemente com essa concepção orgânica, o sistema educacional grego busca promover e aprofundar os conhecimentos relativos tanto à natureza, quanto ao mundo construído pelas mãos humanas, assim como à dimensão espiritual do ser humano. Isto porque, "no que se refere ao problema da educação, a consciência clara dos princípios naturais da vida humana e das leis imanentes que regem as suas forças corporais e espirituais tinha de adquirir a mais alta importância" (JAEGER, 2013, p. 11).

Buscando levar a cabo a formação integral do homem, e guiado por este princípio orgânico, o sistema educacional grego tinha como base, no que diz respeito à formação do espírito, um currículo constituído por um conjunto de sete disciplinas — conhecidas como "as sete artes liberais"[7] —, resultante do *trivium* (gramática, dialética e retórica) e do *quadrivium* (aritmética, geometria, música e cosmologia/astronomia) clássicos — cujos aspectos relevantes para esta investigação serão detalhados em seção posterior. Ainda nesta perspectiva orgânica, em que corpo e alma integram-se harmoniosamente, a música tinha por objetivo "formar uma alma rítmica e harmônica por meio de uma impressão do ritmo e da harmonia musical" (JAEGER, 2013, p. 366), ao passo que a formação do corpo — isto é, o desenvolvimento pleno das capacidades físicas — competia à ginástica.

Uma das principais características das artes liberais é o fato de buscarem o conhecimento sem fins utilitaristas, isto é, não se voltavam a aplicações exteriores, para a confecção de um objeto ou a consecução de bens, por exemplo; os seus estudos voltavam-se ao desenvolvimento e à liberdade do espírito: "estas artes lógicas e matemáticas, chamadas liberais, são buscadas não em nome de si mesmas, mas do conhecimento teórico a que conduzem; daí os nomes *trivium* e *quadrivium*. São propedêuticas, relacionadas como meios para um fim intelectual posterior"[8] (MULLANEY, 1956, p. 482, tradução nossa). Nessa perspectiva, e objetivando sempre moldar a

[7] Algumas das características principais das artes liberais na Antiguidade serão tratadas adiante. Entretanto, antecipa-se que, *grosso modo*, a educação nas artes liberais, tal como concebida no período em questão, "explora os primeiros princípios [metafísicos, do mundo natural e das relações sociais, éticas] [...] conforme a lógica ancestral da harmonia" (TUBBS, 2014, p. viii). Alguns autores (COWLEY, 1978; MULLANEY, 1956) apontam a contradição existente na expressão "artes liberais", em razão dos significados atribuídos a cada uma dessas palavras — abordadas adiante —, e, que, na Antiguidade, ainda não eram conhecidas como "setes artes liberais" —; isto só viria a acontecer na Idade Média.

[8] "[...] these logical and mathematical arts, called liberal, are sought for the sake, not of themselves, but of the theoretical knowledge to which they lead; hence the names trivium and quadrivium. They are propaedeutic, related as means to a further intellectual end" (MULLANEY, 1956, p. 482).

criança/o adolescente a um ideal de Homem, “a pedagogia clássica interessa-se pelo homem em si, não pelo técnico apto a desenvolver uma tarefa particular. [...] O pensamento antigo desdenha (trata-se de uma recusa, mais que de ignorância) a orientação técnica” (MARROU, 1990, p. 347). Como decorrência disso, considerava-se que o treinamento em geral, como o aprendizado de um ofício, não poderia ser reconhecido como uma formação (no que diz respeito a um tipo de educação que leve em consideração o relacionamento de todas as coisas, sejam elas as leis naturais ou humanas), como a Filosofia, a Matemática e a Física, dentre outros, promovendo e identificando a conexão entre todos estes campos de conhecimento na cultura[9] (JAEGER, 2013).

O caráter propedêutico dessas artes liberais e o desdém pelo treinamento técnico não implicam, porém, que a Educação clássica não forneça ao homem subsídios para lidar com questões que não sejam puramente intelectuais. Ao fim e ao cabo, essa formação não se encerra em si mesma — nas atividades exclusivamente do espírito —, na medida em que consistem em base sólida para a vida social e/ou economicamente produtiva. Emerge daí uma dupla caracterização: a cultura e a educação são gerais e comuns.

> É dos antigos que nos vem a noção tradicional de cultura geral (um dos sentidos da ambígua expressão ἐγκύκλιος παιδεία [...]): a educação clássica gaba-se proporcionar uma formação-modelo, ao mesmo tempo geral e comum. Busca desenvolver, sem atrofiar nenhuma, todas as virtualidades do ser humano, tornando-o assim capaz de bem desempenhar o papel que a vida, as imposições sociais ou sua livre vocação venham exigir-lhe mais tarde. O produto ideal de uma tal educação é, de certo modo, um complexo humano indiferenciado, mas de excelente qualidade intrínseca, apto a obedecer a todas as injunções do espírito ou da conjuntura (καιρός) (MARROU, 1990, p. 348).

É justamente esse aspecto, de formação comum, que faz da cultura grega o poderoso elemento agregador e de identidade para os gregos, como já explicado. Decorre ainda que, apesar dessa formação visar a um tipo ideal de ser humano, geral — “a educação do Homem de acordo com a verdadeira forma humana, com o seu autêntico ser” (JAEGER, 2013, p. 12) —,

9 Jaeger (2013) afirma que esse conceito de formação do homem não é apenas uma característica da educação do período clássico, mas que esse tipo de educação fora retomado ao longo da história, e, nessa retomada, deve ser reconhecida como uma herança dos gregos: “Em todo lugar onde essa ideia reaparece mais tarde na História, ela é uma herança dos gregos, e aparece sempre que o espírito humano abandona a ideia de um adestramento em função de fins exteriores e reflete na essência própria da educação” (JAEGER, 2013, p. 11). Entretanto, alguns autores salientam o caráter ideológico na abordagem de Jaeger, como também de Marrou. Horn (2018, p. 682, tradução nossa) afirma: “*Paideia* era muito mais do que um livro acadêmico detalhado sobre pedagogia no mundo antigo. Foi uma tentativa para interpretar a história do pensamento antigo — de épicos homéricos a áticos, a tragédia e a filosofia platônica — enraizada na intenção de educar (ou melhor, ‘formar’) seres humanos. E foi a tentativa de contribuir para um movimento alemão contemporâneo chamado ‘Terceiro Humanismo’.” Para Elsner (2013), “ambos [os estudos, de Jaeger e Marrou,] são extremamente ideológicos e suas ideologias (elas próprias longe de serem simples ou simplistas) estão enraizadas no complexo tempo e contexto de sua produção” (p. 137-138, tradução e interpolação nossas).

isto não significa que a *paideía* busque promover o desenvolvimento do homem de um modo individualizante, mas, ao contrário e sobretudo, para a vida em sociedade. Vida esta que se encontra balizada pela própria comunidade. Nestes termos, "a essência da educação consiste na modelagem dos indivíduos pela norma da comunidade" (JAEGER, 2013, p. 12-13). Nisto consiste o primado da moral que Marrou (1990) afirma ser também uma das características marcantes do humanismo que a *paideía* grega funda.

2.1.2 Dois pilares da paideía: Isócrates e Platão

As descrições de Marrou (1990) e de Jaeger (2013) sobre a *paideía* grega e o humanismo[10] por ela fundado põem em relevo um ideal de ser humano que se constitui como fim último da Educação e fundamento da cultura; nas palavras já citadas de Jaeger (2013, p. 12, interpolação nossa), "a educação do Homem [deve estar] de acordo com a verdadeira forma humana". Este ideal ou esta "verdadeira forma humana" que caracteriza um modo superior de existência, confere, pois, uma elevação da dignidade humana. Entretanto, Snell (2012) sinaliza a contradição desta concepção em relação tanto ao uso das palavras "homem" e "humanidade" pelos gregos dos primeiros séculos da era clássica — os quais, quando dizem "'homem', o oposto que se lhes apresenta é a Divindade: o homem é mortal (βροτός, θυητός) em contraposição aos imortais (ἀθάνατοι), é um ser transitório, a sombra de um sonho" (p. 257) —, quanto ao "ideal de homem", ao qual se costuma chamar de "platonizado" — "esse modo de exprimir-se é absolutamente antigrego e antiplatônico; jamais um grego falou a sério da ideia de homem." (p. 258) Nestes termos, este autor afirma, citando Platão, que, nesta primeira perspectiva, "a norma e o valor ainda estão [...] inteiramente no campo do divino, não do humano." (p. 258) Por outro lado, segundo uma outra óptica, defendida por Isócrates (orador e retórico ateniense contemporâneo de Platão), o homem não é contrastado com o divino, mas com os animais, sendo o elemento distintivo daquele em relação a estes "o poder da palavra e da persuasão que fizeram surgir as cidades, as leis, as artes e os ofícios, em suma, a civilização" (SNELL, 2012, p. 258).

Para além de possíveis sutilezas filológicas e de controvérsias sobre a adoção, ou não, por parte dos gregos, de um claro "ideal de homem" a ser alcançado, em meio a essas divergências entre as visões de Snell, Jaeger e Marrou, encontram-se pontos particularmente seminais para este estudo, e com os quais esses três teóricos concordam, a saber: (1) o reconhecimento de Isócrates e Platão como os dois grandes pilares da *paideía* e da *humanitas*;[11] (2) a centralidade da cultura

[10] Para evitar anacronismos, é importante sinalizar que a palavra "humanismo" é aqui empregada no sentido de uma cultura que tem como centro o ser humano. Ressalte-se, porém, como aponta Snell (2012), que esta "[...] palavra é recente, cunhada apenas em 1808 por um professor ginasial bávaro. Mas a palavra 'humanista' e os conceitos de *studia humanitatis* e *res humaniores* são mais antigos." (p. 257)

[11] Além de Platão e Isócrates, existem outros pensadores importantes do período Clássico, conhecidos como "socráticos menores": "Fédon de Elis, Euclides de Mégara, Aristipo de Cirene, Ésquines e Antístenes, estes últimos atenienses" (MARROU, 1990, p. 104), que fundaram suas próprias escolas nas cidades assinaladas em seus próprios nomes. "De maneira geral, ocupam eles uma posição

— destacada tanto pelo orador quanto pelo filósofo atenienses[12] — como elemento formativo, identitário e motivo de altivez para os gregos; (3) o conceito de homem concebido a partir do contraste deste com os animais; (4) o conceito de homem que emerge da contraposição deste com o divino; (5) o papel fundamental da linguagem, da dialética, na formação humana; (6) a importância, para Platão, do pensamento e da razão nessa formação; (7) a intrínseca relação entre linguagem e pensamento, palavra e razão, no processo de formação do homem, em suas múltiplas dimensões — metafísica, estética, epistemológica (incluindo, aqui, explicações cosmológicas), psicológica, ética e política.

Todos esses pontos estão intimamente relacionados, de tal modo que poder-se-ia dizer que um tratamento minimamente claro de qualquer um deles implicaria, certamente, a abordagem, em algum nível, de todos os demais. Tome-se, então, o último deles, isto é, a intrínseca relação entre a linguagem e o pensamento — a qual já se pode evidenciar no fato de uma mesma palavra grega, *lógos* (λόγος), ser empregada, dentre seus inúmeros significados[13], como sinônimo tanto de "palavra" quanto de "razão".

De um lado, tem-se Isócrates, preocupado primordialmente com questões cotidianas, enaltecendo a linguagem como fundamento da civilização; de outro lado, tem-se Platão, dedicado, sobretudo, a questões teóricas, abstratas, na busca pelo conhecimento da verdade, nas quais o pensamento ocupa lugar de maior destaque.

Marrou (1990, p. 143-144) afirma que "[...] esta linguagem (λόγος) é, como o sabe-se, o Verbo, que faz do homem um Homem, do grego um civilizado, digno de impor-se, como de fato se imporá, através da gesta de Alexandre, ao mundo bárbaro, subjugado e conquistado por sua

intermediária entre aquelas em que situaremos Isócrates e Platão" (p. 104), isto é, entre o "socratismo platônico" e o sofismo.

[12] Marrou (1990) sublinha que Isócrates e Platão são os representantes do período clássico da Grécia, e em suas obras encontram-se o que entendem por παιδεία, tanto no âmbito da cultura quanto no da educação.

[13] A grande polissemia do termo λόγος, como expressão da intrínseca relação entre linguagem e pensamento, bem como suas aplicações nos mais variados âmbitos, podem ser verificadas nos significados apontados no dicionário Liddell e Scott (1940), em que se lê: "λόγος, substantivo verbal de λέγω ['eu digo'], com sentidos correspondentes a λέγω [...] — comum em todos os períodos [da Grécia clássica], tanto na Prosa quanto em Verso, exceto na Épica [...]" —, dos quais cita-se apenas alguns: "cálculo [...]; estima, consideração, valor posto sobre uma pessoa ou coisa; [...] explicação, alegação, pretexto, fundamento, [...]; argumento, discurso e reflexão sobre a realidade; [...] direito, regra de conduta; [...] tese, hipótese; [...] razão, fundamento; [...] termo que exprime razão, definição essencial; [...] razão, lei; [...] debate interno da alma; pensamento; raciocínio mentalmente concebido, em oposição ao que é sensivelmente percebido; [...] conhecimento científico; [...] processo correto de pensamento como teoria; raciocínio abstrato com experiência exterior, com ênfase depreciativa no primeiro; [...] em Lógica, diz respeito ao raciocínio discursivo, em oposição à intuição; [...] visão mística; [...] em Lógica, proposição, seja como premissa ou conclusão; [...] discurso, proferido em tribunal, assembleia; [...] expressão ou enunciado verbal, discurso comum, relatório, tradição; [...] discussão, debate, deliberação; [...] diálogo, como forma de debate filosófico; [...] um enunciado particular, ditado [...]." (interpolações e tradução nossas)

superioridade". Assim, o homem se distingue dos animais e dos bárbaros na medida em que é educado.

O argumento de Isócrates — de que os homens se distinguem dos animais pela linguagem — é retomado por Cícero, compondo os elementos fundantes da *humanitas*[14]: "a humanidade, a eloquência e a cultura" (SNELL, 2012, p. 259). Tais elementos, transmitidos por Cícero a Petrarca, foram retirados diretamente de Isócrates (SNELL, 2012). E essa influência não se deu somente sobre Cícero. Ultrapassando este último, os métodos educacionais da Antiguidade também influenciaram fortemente a Renascença (MARROU, 1990), chegando até aos nossos dias. Tanto para Isócrates quanto para Petrarca, o sentimento de ser "homem" vem acompanhado de um orgulho nacional, pois "[...] ambos sentem-se pertencer ao povo mais culto, isto é, ao mais eloquente" (SNELL, 2012, p. 259). Portanto, o humanismo a partir de Isócrates, passando por Cícero, possui em seu cerne a cultura e a formação dos homens lastreadas na linguagem. Desse modo, a παιδεία preconizada por Isócrates tem como fim último a geração de homens cultos, uma vez ser este o principal fator de diferenciação do homem grego em relação aos animais e aos bárbaros — de modo análogo, Cícero busca essa diferenciação em sua *humanitas*.

Além disso, "Isócrates jamais consente em deixar o [âmbito] da vida quotidiana e da eficácia prática" (MARROU, 1990, p. 145, interpolação nossa). Seu programa de estudo visa ensinar aos alunos a técnica da oratória, a prática da vida política, e a formação de opiniões razoáveis sobre assuntos e/ou coisas úteis, em oposição a estudos puramente teóricos (MARROU, 1990). A crítica de Isócrates é de que, em problemas concretos, a ciência teórica não é capaz de indicar qual atitude deve ser tomada (MARROU, 1990).

> Situamo-nos diante de um problema concreto: trata-se de saber o que fazer e o que dizer. Jamais haverá uma ciência teórica bastante exata para ditar-nos a conduta a seguir. O homem "verdadeiramente culto" (πεπαιδευμένος) é, segundo professa Isócrates, o que tem o dom de "atinar" com a boa solução (ἐπιτυγχάνειν) ou, então, com a menos má, com a mais adequada à conjuntura (καιρός), e isto pelo fato de ter uma "opinião" (δόξα). Esta palavra, depreciada por Platão, define, ao contrário, para o modesto Isócrates, o horizonte efetivamente acessível, a única ambição que o homem possa realizar (MARROU, 1990, p. 146).

Nota-se que a intenção de Isócrates é de que a educação possa produzir homens práticos e prontos para a ação, em que se desenvolvam "[...] o espírito de resolução, o sentido da intuição complexa, a percepção destes imponderáveis que dirigem a 'opinião' e a tornam justa" (MARROU, 1990, p. 146-147). Ao contrário, Platão valoriza em seu programa educacional — instituído ao longo de muitos anos de instrução — as formas mais abstratas de conhecimento, que, muitas vezes, não possuem aplicações concretas, tal como a "duplicação do cubo" (MARROU, 1990, p. 146).

[14] Snell (2012), Marrou (1990) e Jaeger (2013) consideram Isócrates "o pai do humanismo".

Observe-se, entretanto, que a formação do homem, segundo a *paideía* grega, abarca, em linhas gerais, ambas as dimensões: prática e teórica. Não se trata, portanto, de uma escolha entre uma ou outra perspectiva, uma vez que

> o homem grego quer ser, ao mesmo tempo, artista e sábio, o letrado de discernimento jovial e requintado, e o pensador que conhece o enigma do mundo e do homem, que sabe explicá-lo com rigor geométrico e dele extrair uma regra de vida: pois tudo isto é o Homem, e escolher, para ele, é mutilar-se (MARROU, 1990, p. 344).

Trata-se, porém, de uma questão de ênfase e finalidade. Se, por um lado, a παιδεία de Isócrates está assentada na linguagem — pois, como fora dito, o homem se distingue dos animais pela fala —, a παιδεία de Platão, por outro lado, está alicerçada no pensamento (SNELL, 2012). Isto não significa, entretanto, que a linguagem tenha pouca relevância na teoria ou no modelo educacional platônicos. Pelo contrário, a palavra é essencial no processo dialético que Platão empreende na busca pelo conhecimento da verdade, assim como na formação do sujeito. E é nesse processo, como aborda-se nas seções seguintes, que a abstração e as formas matemáticas protagonizam a passagem do conhecimento das coisas sensíveis (aquelas imediatamente acessíveis a nós pelo nosso aparelho sensorial, com destaque para o sentido da visão) ao conhecimento das formas inteligíveis.

2.2 O processo dialético em Platão

Uma vez explicitada a importância da linguagem e do pensamento na *paideía* grega, bem como a intrínseca relação que estes mantêm entre si, veja-se agora como isto ocorre segundo a concepção platônica.

Diferentemente de Isócrates, Platão confere lugar muito mais elevado à teoria — e, por conseguinte, à contemplação[15] — do que às questões práticas e àquelas relativas ao agir humano. A própria biografia de Platão revela que seu desejo de viver para a teoria consistia, de fato, em uma vida construída em torno da atividade do pensamento.[16] Com isso, ele se afastou da vida política em Atenas.[17]

[15] Uma vez que “[...] teoria significa, exatamente, olhar [...]” (SNELL, 2012, p. 313).

[16] Platão funda a sua Academia “[...] para poder viver, juntamente com seus discípulos, só para a teoria [...]” (SNELL, 2012, p. 315).

[17] Ressalte-se que a dedicação à vida contemplativa não é propriamente a causa, mas, sim, a consequência desse afastamento. A entrada de Platão na filosofia se deveu à decepção que ele teve para com a política, ocasionada pelo julgamento realizado pelo tribunal de Heliada que condenou injustamente à morte seu mestre, Sócrates, a quem “Platão chamava de ‘o homem melhor e, além disso, o mais sábio e o mais justo dos homens’ (*Fédon*, 118a)” (MATTÉI, 2010, p. 21). Snell (2012), por outro lado, afirma que foi o fato de Platão ter vivido, em sua juventude, a guerra de Peloponeso que o levou a abdicar das questões práticas da vida política, e optar por uma vida dedicada ao pensamento e à teoria.

Apesar do desgosto para com a vida prática — ou sua preferência pela vida teórica e/ou do pensamento —, Platão, ao fim e ao cabo, em seu modelo educacional, confere ao filósofo o mais alto posto na vida pública — "[...] em seu Estado ideal, onde a intenção é mostrar como deveriam andar propriamente as coisas, os filósofos são reis: a suma teoria deve unir-se, assim, à prática suprema" (SNELL, 2012, p. 316). É neste espírito que a Academia de Platão formava seus discípulos, tornando-se, assim, "[...] uma fonte de conselheiros e legisladores à disposição dos soberanos ou das repúblicas" (MARROU, 1990, p. 108). Nesse contexto, Platão afirma que a busca pela verdade e pelo conhecimento é o que efetivamente qualifica o governante ou o conselheiro do soberano (MARROU, 1990). E isso não se restringe aos que detêm o poder político, uma vez que "esta 'ciência real' [o conhecimento alcançado pela busca da verdade] qualificará, também, aquele que, ao invés de uma cidade, tem apenas sua família e sua casa para reger" (MARROU, 1990, p. 110, interpolação nossa). Consequentemente, "o tipo de educação que Platão concebe com vistas à formação do dirigente político é um tipo de educação dotado de valor e alcance universais" (MARROU, 1990, p. 110-111). Assim sendo, a educação platônica não é exclusividade da elite aristocrática da época. A profunda fecundidade desse modelo educacional é salientada por Snell (2012, p. 315): "[...] dela [da Academia de Platão] derivam todas as instituições que serão pouco a pouco criadas, no mundo ocidental, com o escopo de promover a pesquisa pura e o pensamento honesto."

Nessa busca pela verdade e pelo conhecimento, tal como concebida por Platão, o filósofo segue um método: a dialética[18] (531c-533d)[19]. E o processo formativo que essa busca engendra consiste em uma jornada ascética, de libertação (como explicado adiante), em que a dialética também é identificada com a própria "caminhada" (532b) e/ou com a própria filosofia (CROSS; WOOZLEY, 1971) e/ou com o próprio método e/ou com o próprio saber filosófico

[18] Note-se que a noção de dialética adotada por Platão, em *A República*, "[...] não deve ser confundida com a 'dialética' hegeliana ou marxista posterior. Nem [...] deve ser identificada com o método de dialética tal como aparece em alguns dos diálogos de Platão posteriores a *A República*" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 257, tradução nossa).

[19] Neste trabalho utiliza-se o sistema de numeração de H. Stephanus para referenciar os textos de Platão. Nesse sistema, "as figuras e letras usadas quase universalmente para citar Platão referem-se a uma edição renascentista de suas obras, publicada em Genebra, em 1578, por um famoso tipógrafo e humanista da época chamado Henri Estienne (1528-1598), também conhecido pela versão latinizada de seu nome: Stephanus. Esta edição completa das obras de Platão estava em três volumes, cujas páginas eram numeradas, continuamente, do início ao fim de cada volume. Cada página desta edição é dividida em duas colunas: uma, interna, fornece o texto grego; e a externa, uma tradução latina (feita por Jean de Serres). Entre as duas colunas, são impressas letras de *a* a *e*, dividindo a coluna em cinco seções [...]. Com base nisso, uma citação de Platão apresenta o nome do diálogo (mais o número do livro, no caso das obras *A República* e *Leis*), o número da página na edição Stephanus seguido da letra da seção, incluindo a primeira palavra da citação. Nenhum número de volume precisa ser fornecido porque nenhum diálogo se divide em dois volumes, e, portanto, o nome do diálogo é suficiente para tornar a referência inequívoca" (BERNARD, 2001, tradução nossa). A obra de Platão utilizada neste estudo é *A República*, em sua edição portuguesa, da Fundação Calouste Gulbenkian, cujas referências no sistema de Stephanus iniciam-se em 327a e terminam em 621d. Os livros VI e VII da referida obra, nos quais prioritariamente este trabalho concentra-se, estão compreendidos entre 484a e 541b.

(NETTLESHIP, 1964[20] apud PEREIRA, 2014) e/ou, até mesmo, com uma faculdade da alma através da qual é possível alcançar tal saber (NETTLESHIP, 1961). O entrelaçamento de todas essas dimensões do termo "dialética" é explicitado por Nettleship (1961, p. 115, tradução nossa):

> A força ou faculdade em virtude da qual a mente tenta perpetuamente [...] sair da região das "hipóteses" e ver a verdade como um todo de partes, é chamada por Platão de faculdade "dialética", e a ciência ideal que o exercício pleno dessa faculdade poderia ser concebida para criar é a "ciência da dialética", a única forma de ciência ou conhecimento que lhe pareceu merecer estritamente o nome.

No que se refere a método, a dialética platônica consiste, propriamente, no método filosófico, que, como tratado em seções posteriores, distingue-se, na teoria de Platão, do método matemático.

Ainda que a *paideía* grega, como explicado anteriormente, visasse à formação integral do homem — isto é, a unidade do corpo e da alma —, o fim último da ascese dialética é o aprimoramento da alma, balizada pela busca da verdade. Isto porque a identificação de cada homem, em sua singularidade, é feita com a sua alma, "[...] e não com o seu corpo ou com o composto de ambos, pois 'o homem nada é senão sua alma', *he psukhé estin anthropos* (130c). Se se admitir essa primazia da alma, decorre daí que é dela que se deve cuidar constantemente" (MATTÉI, 2010, p. 45). E a busca da saúde da alma é realizada por meio do discurso e do pensamento. Mais uma vez, observa-se aí o forte vínculo entre o diálogo e a filosofia, a palavra e o pensamento. "É por 'encantamentos', compostos de belos discursos e belos pensamentos, que se faz nascer na alma essa sabedoria que assegura a saúde do homem inteiro" (MATTÉI, 2010, p. 45). Note-se que não se trata, aqui, de mera retórica sedutora, uma vez que, "se a verdade é sua própria origem, o diálogo entre os homens não é um procedimento perdido na tagarelice, mas uma arte dialética *hè tekhnè dialektikè* (*Fedro*, 276e) ou um método dialético, *hè dialektikè methodos* (*A República*, VII, 533c), orientado pelo ser" (MATTÉI, 2010, p. 46). A palavra "dialética" que

> [...] significa, originalmente, nada mais do que o processo de discussão oral por pergunta e resposta, [...] consagrada a Platão[21] pelo exemplo de seu mestre Sócrates, foi adotada por ele para descrever o processo pelo qual a mente se esforça para chegar a concepções verdadeiras, seja através de discussões verbais concretas ou através do "diálogo interior consigo mesma". E como Platão concebeu que a verdade existe em uma certa forma ou ordem, e que a mente humana ao aprender e apreendê-la deve estar de acordo com essa ordem, ele naturalmente usou a "dialética" para aquele modo particular de manipular a linguagem e o pensamento

[20] NETTLSHIP, R. L. **Lectures on the *Republic* of Plato**. London: MacMillan, 1964.

[21] Schäfer (2012, p. 93) corrobora a originalidade de Platão no emprego do termo e do método, no que concerne a registros históricos: "o adjetivo *dialektikos*, que está na base do nome *dialektikê*, não é atestado antes de Platão. Com o auxílio do prefixo de pertencimento '-*ikos*' ele é formado do substantivo verbal *dialektos* (linguagem, modo de falar), que por sua vez deriva do verbo *dialegesthai*, 'conversar'."

> que lhe parecia mais condizente com a verdade, e mais adequado para levar à descoberta desta[22] (NETTLESHIP, 1961, p. 115, tradução nossa).

A arte e o método dialéticos se revelam vividamente na forma com que Platão constrói seus *Diálogos*, com seu estilo ímpar, em que se estabelecem diálogos entre almas.

> Como observava Francis Jacques (1990)[23], o diálogo platônico não é um gênero literário entre outros. Ele instaura uma "metalogia" específica que é preciso apreender nas discussões efetivas para ver a conversa sobressair em uma arte superior que a submete à norma da essência. O diálogo estabelece assim tripla fidelidade: a da alma do respondente, a da alma do dialético [a do personagem Sócrates] e a da verdade do ser. Seu fio condutor vincula-se ao que Sócrates chama o "cuidado" ou "a preocupação com a alma", *épiméleia tes psuchès*. O Cármine indica que é na alma, e não no corpo, que os males e os bens têm sua origem [...]. Para que a alma possa se conhecer, ela deve fitar uma alma [...] e, depois, nessa alma, olhar o que ela tem de mais excelente, a sabedoria (MATTÉI, 2010, p. 44-45).

Schäfer (2012) ajuda a compreender um pouco melhor essa "metalogia", bem como o porquê da escolha do diálogo como caminho para a busca da verdade, a construção do conhecimento e a consequente elaboração de juízos sobre a realidade.

> É característico desta conversa socrática "o empenho intransigente na justificação ou fundamentação (*logon didonai*) de posições alheias e próprias, como no exame com vista à coerência (*elenchus*). Como significantemente o destinatário, e não o defensor de uma tese, deve decidir o que necessita de fundamentação, o diálogo é para Sócrates a forma natural para argumentação e não, por exemplo, o longo discurso monológico [...], que, pelo silêncio, se priva de justificação (p. 93).

Portanto, "[...] a dialética, em vez de [consistir apenas em] uma lógica de descoberta e definição, torna-se a expressão viva da própria verdade, a lógica encarnada da realidade"[24] (NETTLESHIP, 1961, p. 116, tradução e interpolação nossas) que emerge do diálogo do sujeito com seus interlocutores, bem como do diálogo interior consigo mesmo, com a instauração de

22 "[...] means originally nothing more than the process of oral discussion by question and answer, [...] specially consecrated to Plato by the example of his master Socrates, it was adopted by him to describe the process by which the mind endeavours to arrive at true conceptions, whether by actual verbal discussion or by inward 'dialogue with itself'. And as Plato conceived that the truth exists in a certain form or order, and that the human mind in learning and apprehending it must conform to that order, he naturally used 'dialectic' for that particular mode of manipulating language and thought which seemed to him most consonant with truth, and most fitted to lead to its discovery" (NETTLESHIP, 1961, p. 115).

23 JACQUES, Francis. Dialogue et dialogique chez Platon. *In*: MATTÉI, J.-F. (org.) **La naissance de la Raison en Gréce**. Paris: PUF, 1990.

24 "[...] dialectic, instead of a logic of discovery and definition, becomes the living expression of the truth itself, the embodied logic of reality" (NETTLESHIP, 1961, p. 116).

um processo de autoconhecimento. Processo este que, por um lado, é necessário para alcançar a saúde da alma — uma vez que é preciso "estabelecer a perenidade de um diálogo apoiado na verdade assegurando a proteção de uma alma que, deixada a si mesma, se perderia na vacuidade dos discursos" (MATTÉI, 2010, p. 47) —, e, por outro lado, necessário, também, para que o sujeito possa formular e expressar, consistentemente, seus julgamentos. Quanto a isto, Mattéi (2010, p. 59, itálicos do autor) observa que:

> Esse discurso interior, que é em si mesmo um *desvio*, e mesmo *longo desvio*, é identificado por Platão com uma série de operações mais ou menos rápidas, sob a forma de perguntas e respostas, de afirmações e de negações que conduzem finalmente a alma a *estatuir*, ou seja, a pronunciar seus julgamentos. Esse é o movimento permanente do conhecimento que faz a alma pensar sempre.

Isso tudo explicita alguns traços marcantes das estratégias pedagógicas de Platão, o qual, nas palavras de Marrou (1990, p. 112) é "[...] um partidário dos métodos ativos: seu método dialético é bem o contrário de uma doutrinação passiva", uma vez que, "[...] longe de inculcar a seus discípulos o resultado, já elaborado, de seu próprio esforço, ao Sócrates pintado por Platão apraz, ao contrário, fazê-los descobrir por si mesmos, de início, a dificuldade, e depois, à custa de aprofundamento progressivo, o meio de superá-la."

2.2.1 O contraste opinião–conhecimento e a Educação em Platão

A compreensão adequada da dialética exige que se debruce sobre o modo com que Platão concebe a preparação do filósofo para o governo da cidade, ou seja, sobre o seu modelo educacional, segundo o qual deve-se realizar o processo ascético, na busca do conhecimento e da verdade. A doutrina platônica, em suas várias dimensões — educacional, metafísica, epistemológica, política, ética, psicológica e estética —, é apresentada, em *A República*, nos Livros VI e VII, por meio de três símiles[25] que se inter-relacionam, a saber: o da Linha, o da Caverna e o do Sol. Nesses três símiles, Platão descreve o percurso de ascensão da mente humana em direção à verdade.

Por meio da alegoria da Caverna, Platão se propõe a tratar "[...] da nossa natureza [humana], relativamente à educação ou à sua falta, de acordo com a seguinte experiência" (514a, interpolação nossa): homens habitantes de uma caverna, acorrentados desde a infância, sobre os quais se especula a respeito de suas possíveis posturas frente à relação que, porventura, possam vir a manter com o mundo exterior à caverna. O cenário desta alegoria e a dinâmica que envolve seus personagens são descritos, resumidamente, por Pereira (2014, p. XXX):

[25] Pereira (2014) destaca que os estudiosos de Platão tradicionalmente utilizam o termo "símile" para referirem-se aos episódios em questão, mas que, para o caso da Caverna, também se usa "alegoria". Entretanto, a autora faz notar que "[...] Platão chama *eikon* (imagem) à alegoria da Caverna (VII, 517a,d)" (p. XXVII, n. 72).

> Homens algemados de pernas e pescoços desde a infância, numa caverna, e voltados contra a abertura da mesma, por onde entra a luz de uma fogueira acesa no exterior, não conhecem da realidade senão as sombras das figuras que passam, projectadas na parede, e os ecos das suas vozes. Se um dia soltassem um desses prisioneiros e o obrigarem a voltar-se e olhar para a luz, esses movimentos ser-lhe-iam penosos, e não saberia reconhecer os objectos. Mas se o fizessem vir para fora, subir a ladeira e olhar para as coisas até vencer o deslumbramento, acabaria por conhecer tudo perfeitamente e por desprezar o saber que se possuía na caverna. Se voltasse para junto dos antigos companheiros, seria por eles troçado como um visionário; e quem tentasse tirá-los daquela escravidão arriscar-se-ia mesmo que o matassem.

Faz-se necessário, então, compreender a que corresponde, na simbologia platônica, cada um dos elementos presentes nessa passagem — luz, sombra, reflexos, figuras etc. —, bem como os movimentos e/ou condições dos personagens — sair, subir, voltar-se, olhar, libertação, escravidão, deslumbramento etc. Tradicionalmente, comentadores renomados das obras de Platão (NETTLESHIP, 1961; MURPHY, 1967; RAVEN, 1965; FERGUSON, 1921; FERGUSON, 1922) explicam a alegoria da Caverna em termos da epistemologia e metafísica platônicas aí imbricadas. Porém, os autores aqui citados divergem em vários pontos em suas respectivas interpretações dessa alegoria (PEREIRA, 2014).[26] Reeve (2006), na tentativa de evitar controvérsias teóricas, assume uma linha interpretativa diferente; não inicia suas análises a partir de aspectos metafísicos e epistemológicos, mas, sim, das considerações de Platão sobre a alma, para, com base nelas, chegar à visão do filósofo grego sobre o conhecimento e a realidade, explicitando, gradativamente, a teoria educacional platônica. Por essa razão, e por oferecer um percurso argumentativo (da dimensão psicológica em direção à epistemológica e metafísica) que parece favorecer uma iniciação um pouco menos abstrata em questões tão complexas, este trabalho inicia-se com as explicações de Reeve (2006) sobre a alegoria da Caverna e a relação desta com o símile da Linha. O Quadro 1 (p. 44), extraído de Reeve (2006), apresenta um paralelo entre os elementos da símile da Linha (primeira e segunda colunas do quadro) e os da alegoria da Caverna (da terceira à sexta coluna), que apoiará a exposição a seguir.

Em sua abordagem, Reeve (2006) descreve, primeiramente, a categorização que Platão faz dos desejos da alma que regem/dominam os homens (exibidos na quinta coluna do Quadro 1). A depender do tipo de desejo dominante, os seres humanos estabelecem modos de pensamento distintos (primeira coluna do Quadro 1), voltados a objetos do conhecimento também distintos (terceira coluna do Quadro 1), em que o nível de abstração aumenta na medida em que se avança do pensamento perceptual ao pensamento dialético (primeira coluna do Quadro 1, percorrida de baixo para cima). Platão considera, nessa ordem de "subida", o pensamento dialético (*noésis*)

[26] Por exemplo, a autora, citando Cross e Woozley (1971), afirma: "sintomático da dificuldade de chegar a uma conclusão segura é, como esses professores de filosofia reconheceram, ser essa a única parte [Livro VII] do livro [*A República*] em que os dois autores [Raven e Murphy] não estão de acordo" (PEREIRA, 2014, p. XXVII, n. 72, interpolações nossas).

o mais elevado e desejável a que o homem pode chegar, e o pensamento perceptual (*eukasia*), o mais baixo. Paralelamente, o grau de conhecimento (que pode ser entendido tanto como potência epistêmica quanto o produto desta; sexta coluna do Quadro 1) a que o homem pode ascender segue a mesma hierarquização. Para que ocorra a passagem de um estágio a outro imediatamente superior, requer-se do sujeito uma mudança (que pode ser entendida, também, como uma superação/libertação) de um tipo de desejo prevalente na alma por outro. Essa ascensão requer um "treinamento", cujo processo de desenvolvimento, com seus objetivos e princípios norteadores, consiste, fundamentalmente, na Educação tal como Platão a concebe. Nesse processo educacional, objetiva-se a transformação gradual da relação que o sujeito mantém com o mundo e consigo mesmo, ascendendo a outros estados psíquicos — apresentados pelos diferentes personagens da alegoria da Caverna (quarta coluna do Quadro 1).

Os três tipos psicológicos, encontrados em *A República*, a partir dos quais o processo ascético platônico é descrito por Reeve (2006), são, em ordem crescente de valor: (a) os amantes do dinheiro, (b) os amantes da honra ou amantes da vitória, (c) os amantes da sabedoria. Esses tipos diferem quanto à natureza do desejo que rege cada um deles. E cada tipo de desejo, por sua vez, é orientado a um objeto específico. Por fim, os objetos de desejo determinarão uma segunda tipificação, sendo cada um deles classificados como necessário ou desnecessário. Os desejos necessários são aqueles que todos são obrigados, por natureza, a satisfazê-los (por exemplo, comer o suficiente para a manutenção de nossa vida biológica), e os desnecessários são aqueles que podem ser evitados, por meio de treinamento (por exemplo, a gula). Tem-se, então, cinco tipos de desejos: (a) apetites necessários e desnecessários; (b) desejos espirituais necessários e desnecessários; (c) desejos racionais (necessários). Note-se que não há, segundo Platão, desejos racionais desnecessários.[27]

Cada tipo de desejo rege as ações do homem em busca de seus respectivos objetos de desejo. Os amantes da sabedoria (os homens filósofos) são governados pelas demandas da razão, uma vez que o que mais valorizam é o prazer de aprender e conhecer a verdade sobre as coisas. Os amantes da honra são governados pela aspiração ao poder, à vitória e à alta reputação. Os amantes do dinheiro, por último, são governados pela busca dos prazeres que os bens materiais podem proporcionar, em especial aqueles que advêm da bebida, da comida e do sexo. Os filósofos, movidos pelo prazer do conhecimento, consideram os desejos ligados ao dinheiro e à honra apenas na medida em que estes são necessários à vida (REEVE, 2006).

Guiados por desejos e objetos de prazer distintos, "cada um dos três tipos psicológicos acredita que sua própria vida, e seu próprio prazer distintivo, é o mais aprazível"[28] (REEVE, 2006,

[27] Na verdade, por meio de mais uma subdivisão (dos apetites necessários e desnecessários), Platão descreve, ao todo, no Livro IX de *A República*, sete tipos psicológicos distintos. Entretanto, para os propósitos do presente estudo, nos detemos no segundo nível dessa classificação, com cinco tipos psicológicos.

[28] "Each of the three psychological types believes that his own life, and his own distinctive pleasure, is the most pleasant" (REEVE, 2006, p. 46).

Quadro 1 – Relação entre os Símiles da Linha e da Caverna

		LINHA		CAVERNA			
		Potência Plena	Propriedade em que se assenta	Análogo na Caverna	Personagem da Caverna (Tipo Psicológico)	Preso por (Regido por)	Potência Epistêmica
B–*E*	INTELIGÍVEL	Pensamento Dialético (*Noésis*) (4)	Formas	O Sol	Habitantes da Luz do Dia Libertos (Amantes da Sabedoria)	Desejos Racionais	Conhecimento
E–*C*	INTELIGÍVEL	Pensamento Científico (*Dianóia*) (2)	Figuras	As Coisas em Si	Habitantes da Luz do Dia Amarrados (Amantes da Honra)	Desejos do Espírito	Opinião Verdadeira
C–*D*	VISÍVEL	Pensamento Popular (*Pístis*) (2)	Modos	Modelos das Coisas em Si	Habitantes da Caverna Libertos (Amantes do Dinheiro)	Apetites Necessários	Opinião
D–*A*	VISÍVEL	Pensamento Perceptual (*Eukasia*) (1)	Qualidades	Imagens dos Modelos das Coisas em Si	Habitantes da Caverna Amarrados (Amantes do Sexo, da Bebida e da Comida)	Apetites Desnecessários	Opinião

Fonte: Traduzido e adaptado de Reeve (2006, frontispício).

p. 46, tradução nossa). Nesse sentido, cada um desses três tipos psicológicos tem concepções diferentes sobre o que é o bem, isto é, o objeto de desejo que perseguem — como ilustrado no Quadro 3 e no Quadro 4, e detalhado adiante. Posto desta maneira, a elevação da alma de um nível a outro não é, propriamente, uma questão de inteligência, mas, como já assinalado, de superação de um determinado desejo que rege as ações do sujeito. Assim, o grau de inteligência pode ser grande em qualquer um dos tipos psicológicos, de modo que nenhum deles pode ser dito mais inteligente do que os demais: “Um amante do dinheiro pode ser tão inteligente na busca de objetivos apetitivos quanto um filósofo é na busca de objetivos racionais”[29] (REEVE, 2006, p. 50, tradução nossa).

Consequentemente, a ascensão de um tipo psicológico a outro não implica um ganho em termos de inteligência, como afirma Reeve (2006, p. 49, tradução nossa): “A ascensão em tipo psicológico, de amantes do dinheiro para amantes da honra, e destes para amantes da sabedoria, ou filósofos, não é de modo algum, obviamente, uma ascensão em inteligência. A inteligência (*phronesis* ou *nous*) pode ser a mesma em cada um deles.”[30] Isso significa que cada tipo psicológico possui inteligência e capacidade suficientes para encontrar soluções que levem à satisfação de seus desejos. Quanto a isto, Reeve (2006) apresenta um exemplo retirado de *A República*:

> Quanto ao espírito da razão e ao da coragem, julgo eu, senta-os no chão ao lado daquele rei, de um lado e de outro, como escravos, sem os deixar calcular nem observar outra coisa que não seja a maneira de transformar poucos haveres em muitos, nem admirar e pagar nada que não seja a riqueza e os ricos, e a não ambicionar outra coisa além da posse de bens e tudo o que a ela conduza (553d).

O rei retratado por Platão é um amante do dinheiro que fez sua fortuna trabalhando e economizando. Esse amante do dinheiro faz uso da inteligência para aumentar sua fortuna; usa a razão para encontrar meios de ganhar mais dinheiro, e o ímpeto, ou aspiração, para se vangloriar dos bens que possui.

Os amantes da honra, por outro lado, utilizam sua inteligência com o intuito de serem honrados pelas pessoas e de obterem mais vitórias e prestígio (REEVE, 2006), cuja avidez extrema é salientada por Platão no seguinte trecho:

> E então os que gostam de honrarias, vês, julgo eu, que, se não podem ser os chefes supremos, comandam um terço da tribo[31], e, ainda quando não

[29] “A money-lover may be just as intelligent in pursuing appetitive goals as a philosopher is in pursuing rational ones” (REEVE, 2006, p. 50).

[30] “The ascent in psychological type from money-lovers to honour-lovers to wisdom-lovers, or philosophers, is not in any obvious wayan ascent in intelligence. Intelligence (phronesis or nous) may be the same in each of them”(REEVE, 2006, p. 49).

[31] Nesta passagem, Platão alude à hierarquia política de sua época, dentro da estrutura de divisão do território grego em sub-regiões: “abaixo dos chefes supremos, ou ‘estrategos’, ainda havia os ‘taxiarcas’,

> recebem honras das pessoas mais elevadas e mais veneráveis, contentam-se com a deferência das mais modestas e insignificantes, como seres avaros de considerações que são de toda a maneira (475a-b).

Por fim, Reeve (2006) afirma que os amantes da sabedoria utilizam sua inteligência na busca da verdade; o autor sustenta seu argumento com a seguinte passagem: "Mas, quanto à parte pela qual aprendemos, é evidente para toda a gente que toda ela tende sempre para o conhecimento da verdade, e que é de todas aquela a que menos importa a riqueza e a fama" (581b).

Conforme ilustrado no Quadro 1, encontra-se, para cada uma dessas situações estabelecidas pelos tipos de desejo, um personagem correspondente na alegoria da Caverna, bem como os efeitos da educação sobre cada um deles. Tais personagens são divididos, primeiramente, em dois grupos, segundo o local em que se encontram, ou seja, dentro ou fora da caverna; há os habitantes da caverna, e há os habitantes da luz (os que estão fora da caverna). Tem-se, ainda, uma segunda divisão para cada um desses grupos, de acordo com: o desejo que os guia; o objeto de desejo que perseguem; e o que conseguem "enxergar". Nas metáforas empregadas por Platão nos três símiles, a "visão" representa a inteligência, a capacidade de conhecer; "ver" significa inteligir; os "objetos da vista" são os objetos do conhecimento; a "Luz" corresponde à verdade (CROSS; WOOZLEY, 1971; MATTÉI, 2010). Logo, considerando essas divisões e os elementos metafóricos citados, os personagens também diferem entre si conforme o nível de conhecimento e o grau de clareza sobre a realidade que podem atingir.

Os que se encontram presos na caverna, "[...] com acesso apenas a sombras ou imagens lançadas sobre uma tela na sua frente (514a1-515c3), estão presos por laços de apetites desnecessários, porque não receberam nenhum tipo de educação ou treinamento"[32] (REEVE, 2006, p. 51, tradução nossa). Estes, atados pelo pescoço e pelas pernas, não conseguem olhar para qualquer lado, a não ser para a parede em direção à qual suas cabeças estão dirigidas (514a-b). Por isso, não enxergam nada mais do que as sombras projetadas no anteparo para o qual estão voltados, permanecendo na ignorância, incapazes de distinguir as coisas em si de suas projeções.

que estavam à frente das dez companhias de hoplitas [soldados de infantaria], e, em terceiro lugar na escala hierárquica, os 'tritiarcas' do texto, que chefiavam os hoplitas de cada 'trittys'" (PEREIRA, 2014, p. 253, n. 22, interpolação nossa). O "terço das tribos" ou "'trittys' ('terços') eram divisões tanto das quatro antigas como das dez novas tribos em Atenas. [...] Cada 'trittys' consistia em um ou mais 'demos' [de onde se origina a palavra 'democracia' (governo dos demos)], normalmente, mas não invariavelmente, um bloco de 'demos' vizinhos. As 'trittys' não se tornaram corporações ativas na mesma medida que as tribos e os 'demos', mas desempenharam algum papel na organização da marinha, e possivelmente do exército, e na nomeação para alguns dos conselhos maiores" (GOMME; CADOUX; RHODES, 2016, interpolação e tradução nossas).

[32] "[...] with access only to shadows or images cast upon a screen in front of them (514al-515c3), are tethered by bonds of unnecessary appetite, for they have not received any of the kind of education or training" (REEVE, 2006, p. 51).

Entretanto, esta condição pode mudar, se, "[...] através do treinamento em um ofício[33], ou através do treinamento em música e ginástica[34], um prisioneiro é purgado de seus apetites desnecessários, ele é libertado de seus laços e 'virado' para ver os objetos semelhantes a marionetes, que são os originais das sombras e imagens que ele tinha visto anteriormente"[35] (REEVE, 2006, p. 51, tradução nossa). Uma vez libertos das amarras dos apetites desnecessários, podem virar-se para outro lado, ascendendo, então, às silhuetas das coisas cujas imagens são projetadas para dentro da caverna pela luz da fogueira. Não enxergam ainda as coisas em si, mas, sim, os modelos destas. O conhecimento da realidade ainda é limitado (a estes Reeve chama de Habitantes da Caverna Libertos). Contudo, nem todos aqueles que são submetidos ao treinamento de um ofício conseguem desvencilhar-se das correntes dos apetites desnecessários.

Elevados a um novo nível, os Habitantes da Caverna Libertos, se continuarem o "treino sistemático em música e ginástica", e acrescentarem a este o treino nas "ciências matemáticas (522c1-531e3)", podem quebrar também "os laços dos apetites necessários", saindo da escuridão da caverna para a luz solar do mundo exterior (REEVE, 2006, p. 51). "Ali, tendo-se habituado ao seu novo reino, veem os originais das coisas de que antes só viam modelos: 'Eles veem primeiro as sombras mais facilmente, depois os reflexos dos homens e outras coisas na água, depois as próprias coisas [*auta*]' (516a6-8)"[36] (REEVE, 2006, p. 51, tradução nossa). Ao saírem da caverna, passam a ser regidos por desejos do espírito (ou desejos impetuosos ou de aspiração),

[33] Platão acredita que o exercício de um ofício obriga o sujeito a estabelecer uma relação equilibrada com o dinheiro, se quiser ter êxito no que faz (REEVE, 2006). A um bom artesão o dinheiro é necessário para que possa adquirir os instrumentos e bens que seu trabalho requer. Porém, nem a riqueza, nem a pobreza lhe convém (REEVE, 2006). A pobreza o impediria de prover as ferramentas de que necessita, e a riqueza possivelmente o faria relapso e ocioso (421d-422a). Em ambos os casos, seria corrompido pelo mau uso do dinheiro. Desse modo, entende-se que o treinamento em um ofício faria com que o sujeito dominado pelo apetite desnecessário (amante da comida, da bebida e do sexo) passasse a ser regido pelo apetite necessário (REEVE, 2006).

[34] Na *paideía* platônica, a formação dos governantes é dividida em duas fases: a primeira consiste na formação gímnica-musical; a segunda, na formação filosófica (JAEGER, 2013). O objetivo da formação gímnica-musical "é produzir a euritmia e a harmonia da alma, e não descobrir a razão em virtude da qual é bom esse tipo de ritmo e de harmonia" (JAEGER, 2013, p. 872). Esta primeira fase é a base necessária para a formação posterior (a filosófica). A ginástica propicia o domínio do corpo, e a música sensibiliza e educa a alma, antes mesmo da faculdade da razão estar preparada para o desenvolvimento do pensamento; ela cria uma harmonia e ritmo interiores, segundo os quais os gregos acreditavam estar relacionados com a conexão do homem com o universo (JAEGER, 2013). É preciso, portanto, essa conexão antes de encontrar os fundamentos filosóficos, necessários para a compreensão do bem em si (explicado quando aborda-se a símile do Sol). Platão acredita que, antes da formação filosófica, é preciso fazer adquirir as virtudes, para que, posteriormente, possa se desenvolver a reflexão (JAEGER, 2013).

[35] "[...] through training in a craft, or through training in music and gymnastics, a prisoner is purged of his unnecessary appetites, he is freed from his bonds and 'turned around' to look at the puppet-like objects which are the originals of the shadows and images he had previously been seein" (REEVE, 2006, p. 51).

[36] "There, having grown accustomed to their new realm, they see the originals of the things of which they previously saw only models: 'They first see shadows most easily, then the reflections of men and other things in water, then the things themselves [*auta*]' (516a68)" (REEVE, 2006, p. 51).

tornando-se, então, Habitantes da Luz do Dia Amarrados. Por fim, estes últimos laços também podem ser quebrados

> [...] através da educação na dialética e gestão prática da polis (532a1-540c2; [desse modo o homem] pode escapar até mesmo dos laços da aspiração, buscando a honra apenas na medida em que esta é necessária para sustentar a vida, e não como um benefício genuíno (581e2-4), vendo finalmente a causa de todas estas sombras, modelos, bem como as coisas que lhes deram origem[37] (REEVE, 2006, p. 51, tradução e interpolação nossas).

A estes, Reeve (2006) denomina Habitantes da Luz do Dia Libertos, guiados somente pelos desejos racionais, atingindo o patamar mais alto no aprimoramento da alma a que um ser humano pode chegar em sua vida.

Pode-se notar, ao longo dessa trajetória de ascensão da alma, que a educação na visão de Platão não se resume meramente à aquisição ou ampliação de conhecimentos, habilidades ou técnicas, visto que, como sublinhado anteriormente, a inteligência não distingue os tipos psicológicos. A educação platônica está, antes de tudo, focada na "[...] remoção ou moderação de tantos desejos desnecessário de uma pessoa quanto sua natureza permitir"[38] (REEVE, 2006, p 50, tradução nossa).

Uma vez explanados os objetivos para os quais a inteligência se dirige, determinados pelo tipo de desejo que governa o homem, bem como os efeitos da educação para o aprimoramento da alma, veja-se quais são os recursos cognitivos que são disponibilizados à inteligência (fundamentais para a compreensão da abstração no modelo educacional platônico) na busca por tais objetivos, a saber: qualidades, modos, figuras e formas. Para entender no que consistem esses recursos, precisa-se abordar a relação entre os elementos do símile da Linha com os da alegoria da Caverna (os quais são colocados, lado a lado, no Quadro 1). Reeve (2006) defende que a natureza dos objetos vistos na alegoria da Caverna pode ser compreendida por intermédio do símile da Linha, e que cada personagem que aparece na alegoria da Caverna corresponde a um tipo de natureza, conforme sua condição relativa à caverna, isto é, dentro ou fora dela.

O símile da Linha é descrito por Platão no seguinte trecho de *A República*:

> Imagina então [...] que, conforme dissemos, eles são dois e que reinam, um na espécie e no mundo inteligível, o outro no visível. Não digo "no céu", não vás tu julgar que estou fazendo etimologias com o nome. Compreendeste, pois, estas duas espécies, o visível e o inteligível? [...] Supõe

[37] "[...] through education in dialectic and practical polis management (532al-540c2), can escape even the bonds of aspiration, seeking honour only insofar as it is necessary to sustain life and not as a genuine benefit (581e2-4), at last sees the cause of all these shadows, models, and originals" (REEVE, 2006, p. 51).

[38] "[...] removal or moderation of as many of a person's unnecessary desires as his nature permits" (REEVE, 2006, p 50).

> então uma linha cortada em duas partes desiguais; corta novamente cada um dos segmentos segundo a mesma proporção, o da espécie visível e o da inteligível; e obterás, no mundo visível, segundo a sua claridade ou obscuridade relativa, uma secção, a das imagens. Chamo imagens, em primeiro lugar, às sombras; seguidamente, aos reflexos nas águas, e àqueles que se formam em todos os corpos compactos, lisos e brilhantes, e a tudo o mais que for do mesmo gênero, se estás a entender-me. [...] Supõe agora a outra secção, da qual esta era imagem, a que nos abrange a nós, seres vivos, e a todas as plantas e toda a espécie de artefactos. [...] Acaso consentirias em aceitar que o visível se divide no que é verdadeiro e no que não o é, e que, tal como a opinião está para o saber, assim está a imagem para o modelo? [...] Examina agora de que maneira se deve cortar a secção do inteligível. [...] Na parte anterior, a alma, servindo-se, como se fossem imagens, dos objectos que então eram imitados, é forçada a investigar a partir de hipóteses, sem poder caminhar para o princípio, mas para a conclusão; ao passo que, na outra parte, a que conduz ao princípio absoluto, parte da hipótese, e, dispensando as imagens que havia no outro, faz caminho só com o auxílio das ideias (509d-510b).

No símile da Linha, Platão propõe que um segmento seja dividido em partes desiguais. Para a explicação, estabelece-se pontos sobre esse segmento, nomeados conforme a linha azul, na lateral esquerda do Quadro 1, e a linha azul do Quadro 2, dimensionadas de acordo com as proporções assinaladas por Platão na passagem acima. Ao fazer a divisão de $\overline{AB}$, obtém-se $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, de forma que $\overline{AC}$ seja o menor deles. Como proposto por Platão, $\overline{AC}$ está associado aos conhecimentos de natureza sensível; e $\overline{CB}$, aos de natureza inteligível. A proporção entre os comprimentos desses segmentos, e sua localização, decorre da relação de ordem que Platão estabelece entre o sensível e o inteligível. Assim, este último é representado pela parte maior e superior de $\overline{AB}$, dada sua elevada importância.

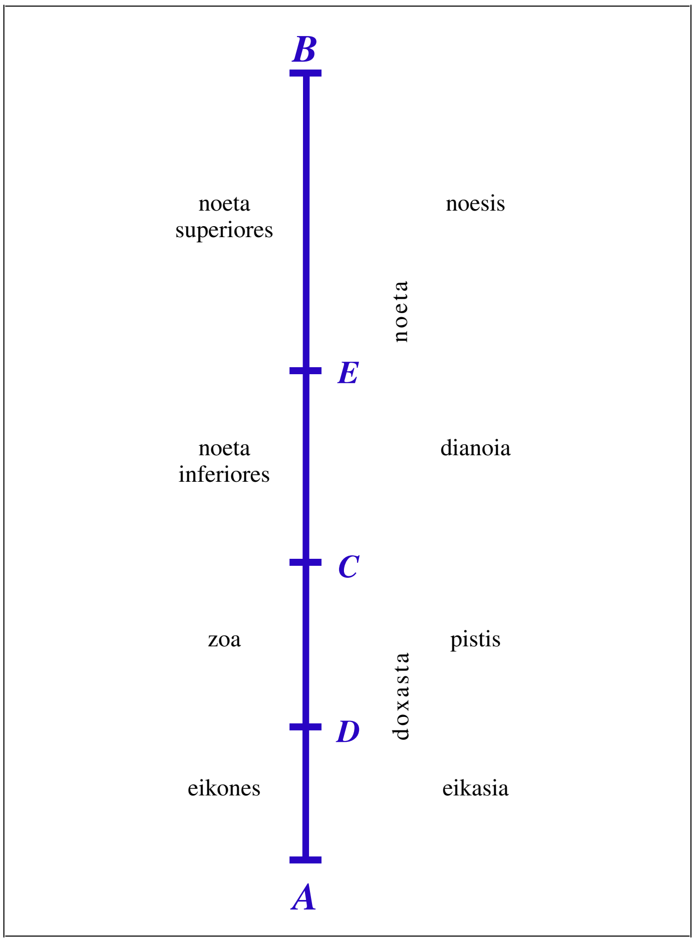
Com o auxílio dessas figuras pode-se ver que $\overline{AC}$ é menor que $\overline{CB}$; com isso Platão evidencia como a parte inteligível é a mais importante para ele. Há ainda uma segunda divisão, em que cada um dos segmentos oriundos da primeira secção é dividido também em duas partes. Obtêm-se, então, quatro segmentos: $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$, na parte associada aos conhecimentos de natureza sensível, e $\overline{CE}$ e $\overline{EB}$, na parte que representa os conhecimentos inteligíveis. Esta segunda etapa de secções é feita obedecendo às mesmas proporções entre os segmentos gerados pela divisão principal ($\overline{AC}$ e $\overline{CB}$), isto é,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{CE}{EB} = \frac{AC}{CB} \ .$$

Apesar dessa descrição matematizada, Platão não estabelece uma métrica exata. Entretanto, ele se vale de magnitudes geométricas para indicar que o inteligível, bem como os conhecimentos a este associados, é mais importante que o sensível, na formação da alma.

Por meio dessas divisões, Platão contrasta, primeiramente, o mundo sensível, ou visível (*horata* ou *doxasta*) — isto é, o mundo a cujos objetos são acessados por meio do aparelho sensorial — e o mundo inteligível (*noeta*) — isto é, o mundo cujos objetos não podem ser captados imediatamente pelos cinco sentidos, mas apenas apreendidos pela nossa mente. Uma das

Quadro 2 – Representação da Linha Dividida



Fonte: Adaptado de Pereira (2014, p. XXIX).

características mais marcantes nesta divisão de "dois mundos" está no fato de que o primeiro deles comporta tudo o que é mutável, em constante transformação, com múltiplos aspectos, ao passo que o segundo diz respeito ao que é imutável, permanente, único. Outros contrastes importantes encontram-se aí imbricados: o contraste entre os tipos de conhecimentos produzidos nesses dois mundos; o contraste entre os diferentes objetos de conhecimento sobre os quais a mente se debruça (qualidades, modos, figuras, formas); o contraste entre as potências epistêmicas — erro (*agnoia*), opinião (*doxa*), conhecimento (*episteme*) — e os tipos de relatos sobre a realidade que elas produzem (ver Quadro 1) (PEREIRA, 2014; REEVE, 2006; CROSS; WOOZLEY, 1971; MATTÉI, 2010). A cada uma dessas subseções corresponde um estado específico da alma/mente, a saber (ordenados da parte inferior para a superior): *Eukasia* (ευκασια), *Pístis* (πίστις), *Dianóia* (διανόια), *Noésis* (νοεσις) (CROSS; WOOZLEY, 1971). Ou na terminologia utilizada por Reeve (2006), respectivamente: Pensamento Perceptual, Pensamento Popular, Pensamento Científico, Pensamento Dialético (ver Quadro 1).

Na subseção inferior do mundo visível ($\overline{AD}$), o pensamento se desenvolve apenas sobre os *eikones* ("imagens"), que correspondem aos reflexos nas águas que os Habitantes da Caverna Amarrados enxergam — "[...] em primeiro lugar, as sombras, depois as aparições refletidas nas águas e nas superfícies opacas, lisas e brilhantes e tudo o mais que seja assim" (510a) —, isto é, as imagens dos modelos das coisas em si. A este tipo de pensamento, Reeve (2006) denomina Pensamento Perceptual (*Eukasia*)[39] (ver Quadro 1), capaz apenas de formar uma crença sobre algo ou sobre uma determinada propriedade *F* de um objeto, pouco confiável em termos dos relatos que produz sobre o que é *F*. Quanto a isto, observe-se que, para Reeve (2006, p. 59, tradução nossa), cada potência psicológica

> [...] deve permitir que uma alma faça dois tipos distintos de trabalho. Primeiro, deve permitir à alma identificar *F*, ou seja, produzir um relato, por mais rudimentar que seja, que diga o que é *F*. Segundo, deve permitir ao psiquismo determinar quando uma determinada propriedade em algo se encaixa nesse relato, ou é uma ocorrência de *F* — quando, mais simplesmente, a coisa particular é em si mesma uma instância ou ocorrência de *F*. [...] Destas duas tarefas, é a primeira que preocupa Platão. Pois ele defende que o conhecimento do que é *F* deve preceder todos os outros conhecimentos sobre *F*, incluindo o conhecimento de quais coisas são *F* (354c1-3, 402b5-c8). Por isso, parece razoável supor que a clareza ou confiabilidade cognitiva dos poderes psicológicos completos é uma questão de quão bem eles realizam a tarefa de dizer o que é *F*, e que os diferentes tipos de propriedades sobre as quais eles são definidos — a qualidade de *F*, o modo de *F*, a figura de *F*, e a forma de *F* — são de alguma forma os resultados de suas diferentes tentativas de realizá-lo[40] (REEVE, 2006, p. 59, tradução nossa).

A propriedade sobre a qual o pensamento perceptual se assenta, e que é ao mesmo tempo o resultado da potência psicológica que o produz, é chamada por Reeve (2006) de *Qualidade* de *F* (para distingui-la em relação às demais propriedades — modos, figuras e formas —, explicadas adiante), que corresponde às imagens (em movimento, mutáveis etc.) dos modelos das coisas em si, às quais os Homens da Caverna Amarrados têm acesso (ou que elaboram).

[39] O termo grego "Eukasia" (εἰκασία), também transliterado como "Eikasia", pode ser traduzido como "suposição" (PEREIRA, 2014), "ilusão" (CROSS; WOOZLEY, 1971), "simulação" (MATTÉI, 2010), dentre outros. Reeve (2006) considera que traduções como essas, costumeiramente empregadas por comentadores renomados de Platão, podem induzir a interpretações equivocadas. Ao classificar as potências da alma mobilizadas no símile da Linha segundo tipos de pensamento, o autor julga propiciar maior clareza para o leitor na explanação da equiparação entre os elementos da alegoria da Caverna e do símile da Linha.

[40] "[...] must enable a psyche to do two distinct kinds of work. First, it must enable the psyche to identify F, that is, to produce an account, however inchoate, which says what F is. Second, it must enable the psyche to determine when a particular property in something fits that account, or is an occurrence of F-when, more simply, the particular thing is itself an instance or occurrence of F. [...] Of these two tasks it is the first that preoccupies Plato. For he holds that knowledge of what F is must precede all other knowledge about F, including knowledge of what things are F (354cl-3, 402b5-c8). Because of this, it seems reasonable to suppose that the clarity or cognitive reliability of the complete psychological powers is a matter of how well they carry out the task ofsaying what F is, and that the different types of properties over which they are set-the quality of F, the mode of F, the figure of F, and the form of F-are somehow the results of their different attempts to carry it out" (REEVE, 2006, p. 59).

No nível seguinte, a subseção superior do mundo visível ($\overline{DC}$), encontram-se "[...] todos os seres vivos (*zoa*) e objetos do mundo, conhecidos através da *pístis* ('fé')[41]" (PEREIRA, 2014, p. XXX). O pensamento, agora, desenvolve-se com base nos modelos das coisas em si, que correspondem às imagens que os Homens da Caverna Libertos (os que conseguiram se desvencilhar dos apetites desnecessários, por meio de treinamento em algum ofício ou em música e ginástica) —, imagens estas visionadas ao longo do "[...] muro [oposto à parede da caverna onde as sombras destas são projetadas], [de] homens que transportam toda espécie de objectos, que o ultrapassam: estatuetas de homens e de animais, de pedra e de madeira, de toda espécie de lavor" (514b-515a, interpolações nossas). A estas imagens Reeve (2006) denomina *Modos* de *F*, que consiste na propriedade sobre a qual o Pensamento Popular (*pístis*) se assenta. Aqui, os homens julgam ter um conhecimento claro das coisas, quando, em verdade, não as conhecem em si mesmas — "[...] Em primeiro lugar, pensas que, nestas condições, eles tenham visto, de si mesmo e dos outros, algo mais que as sombras projectadas pelo fogo na parede oposta da caverna" (515a).

Qualidades e modos são, portanto, propriedades visíveis, com as quais lida a percepção sensorial. Nestas duas primeiras subseções de $\overline{AB}$, Platão sublinha a "[...] constatação [...] [dos] limites epistemológicos [da percepção sensorial]; como ela não pode conhecer o ser (*ousia*) de seus objetos, ela não tem nenhum acesso à verdade, e, por isso, nenhuma definição apropriada do saber pode ser oferecida por ela" (SCHÄFER, 2012, p. 246, interpolações nossas).

A constatação da limitação epistemológica dos pensamentos Perceptual e Popular, evidenciada nas crenças que formam (insuficientes para conhecer a essência das coisas), é contraposta por Platão aos dois tipos de pensamento que se desenvolvem na parte superior da Linha, isto é, no mundo inteligível ($\overline{CB}$). Surge, então, o contraste que Platão estabelece entre o conhecimento (próprio do mundo inteligível) e as crenças produzidas pelos pensamentos perceptual e popular (próprias do mundo sensível).

Antes de prosseguir para as duas partes superiores da Linha, é necessário abordar a distinção que Platão faz entre opinião e conhecimento/entendimento, fundamental para compreender a hierarquia constituinte do processo dialético platônico, bem como os tipos de pensamento abstrato do mundo inteligível.

Platão, em *A República*, realiza essa distinção por meio de um diálogo de Sócrates com Glauco, no qual este é indagado se todos os que se dedicam a aprender são filósofos. Glauco responde de forma negativa, argumentando que existem pessoas que buscam aprender apenas o que lhes agrada (475d). O personagem Sócrates inicia o diálogo com uma pergunta sobre a característica essencial de um verdadeiro filósofo, como descrito a seguir.

[41] A palavra *pístis* (πίστις), traduzida como "fé" por Pereira (2014) ou como "crença" por alguns comentadores (MATTÉI, 2010; CROSS; WOOZLEY, 1971), é chamada de "Pensamento Popular" por Reeve (2006), justamente para evitar equívocos de interpretação, como assinalado em nota anterior.

> — Mas àquele que deseja provar prontamente de todas as ciências e se atira ao estudo com prazer e sem se saciar, a esse chamaremos com justiça filósofo? Ou não?
> E Glauco respondeu: — Então vais ter muitos filósofos desses, e bem estranhos. Realmente, parece-me que todos os amadores de espetáculos, uma vez que têm prazer em aprender, são desse número; e há os amadores de audições, que são os mais difíceis de agrupar entre os filósofos, que não quereriam, de boa vontade, vir ouvir uma discussão e uma conversa como esta, mas que andam por toda a parte, como se tivessem alugado os ouvidos para escutar todos os coros das Dionísias, sem deixar de ir, quer às Urbanas, quer às Rurais[42]. A todos estes, portanto, e a outros que se dedicam a aprender tais coisas e artes de pouca monta, havemos de chamar-lhes filósofos?
> — De modo algum — respondi eu —, mas aparências de filósofos (475c-e).

A disposição a aprender é uma condição necessária, mas não suficiente, para conferir a uma pessoa o *status* de filósofo. No diálogo, o próprio interlocutor de Sócrates deixa isso claro, ao se referir àqueles que possuem o gosto de aprender apenas o que lhes agrada em termos sensoriais. Falta-lhes o gosto pela contemplação da verdade. Platão encerra esta primeira parte do diálogo, aclarando o que faz de alguém um filósofo (475e, interpolação nossa): "[são os] que gostam de contemplar a verdade." Esta marca do filósofo, o gosto pela contemplação da verdade, aponta para o objeto abstrato específico do qual este se ocupa, o qual, por sua vez, tipificará o pensamento que se desenvolverá (ou seja, o pensamento dialético). O objeto específico do pensamento constituirá um dos elementos distintivos utilizados para contrastar opinião e entendimento/conhecimento.

Seguindo a cena apresentada por Glauco, de que existem pessoas que gostam de espetáculos e audições, Platão utiliza a ideia de beleza para poder diferenciar tais pessoas dos filósofos, e, com base nisso, chegar à distinção entre entendimento/conhecimento e opinião. Quanto a isto, afirma que os amantes das audições e dos espetáculos ligam-se ao belo das cores, formas e vozes, mas não conseguem ver a natureza do belo em si (476b5-b9). E, portanto, não avançam para além das aparências das coisas; detêm-se no espetáculo e no deleite sensorial. Os filósofos, por outro lado, compreendem que o próprio belo existe, e conseguem ver a partir disso as coisas que participam do belo (476c12-d5). Platão conclui que os amantes de audições e espetáculos, por não conseguirem alcançar a essência do belo em si, não veem o belo por completo, apenas parcialmente. Diferentemente, os filósofos podem contemplar o belo de forma integral, por conseguirem conhecer as coisas em si. Com isso, Platão concluirá, na continuidade desse diálogo, que os amantes de espetáculos e audições são amantes da opinião, ao passo que os filósofos são amantes do conhecimento. (480a)

42 Pereira (2014, p. 254, n. 23) explica que "[...] as festas em honra de Dionísios, as Dionísias Urbanas, eram celebradas anualmente em Atenas [...]. Nelas participavam inúmeros coros: três de tragédia, cinco de comédia e vinte de ditirambo. Em outras localidades [...], realizavam-se as Dionísias Rurais [...]. Embora mais antigas (e com carácter mais primitivo) do que as outras, eram menos importantes.

Para chegar a essa conclusão, Platão se vale de uma longa sequência de perguntas e respostas, iniciada com duas indagações: "Quem conhece, conhece alguma coisa ou nada?" (476e); "Como é que havia de conhecer-se alguma coisa que não existe?" (477a) E seu interlocutor, Glauco, a estas questões, responde: quem conhece, conhece algo; e não é possível conhecer o que não existe. Conclui-se então que: "O que existe absolutamente [o que existe de maneira plena] é absolutamente cognoscível, e o que não existe de modo algum é totalmente incognoscível" (477a, interpolação nossa). Platão, em seguida, utiliza estas primeiras conclusões como premissas para a afirmação de que deve existir um meio-termo entre o que é e o que não é, para poder classificar as coisas que participam simultaneamente do ser e do não ser (477a). Diante disso, estabelece que o conhecimento pertence ao ser, e a ignorância pertence ao não ser, e que se deve considerar, ainda, algo localizado entre a ignorância e o conhecimento (477b). Este meio-termo consiste na opinião.

Por fim, com base nas conclusões obtidas até esse ponto do diálogo, Platão apresenta a distinção entre os objetivos e objetos do conhecimento (ou ciência ou entendimento) e os da opinião: a ciência procura investigar a essência do Ser, e, por isso, seu objeto é o Ser, ou a Beleza em si mesma.[43] (478a); a opinião cria crenças, e "seus objetos são as muitas coisas particulares"[44] (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 166, tradução nossa). Dado que a opinião não possui o Ser como objeto, Sócrates inquere seu interlocutor se a opinião não possuiria o não ser como objeto. Isto se demonstra impossível, tendo em vista que o não ser é identificado com o nada, e que quem possui opinião a possui sobre algo (478b-c). A intenção de Platão é conferir um lugar intermediário à opinião, entre o conhecimento e a ignorância.[45]

Disso decorrem outras características diferenciadoras entre crença/opinião e conhecimento, como apontado por Cross e Woozley (1971): (i) "[...] o conhecimento é infalível,

---

[43] Até aqui, emprega-se, algumas vezes, a expressão "as coisas em si mesmas", ou, neste caso, "a Beleza em si mesma". A esta altura, já dispõe-se de algumas informações iniciais sobre a epistemologia e a metafísica platônicas que nos permitem introduzir uma explicação quanto à expressão "em si mesmo": "Quando o próprio Platão quer se referir à Beleza em oposição às muitas coisas belas particulares, ou à Justiça em oposição aos muitos atos particulares, ele o faz com muita frequência através do uso da palavra grega para 'si mesmo' [*auto to*]. Assim, Beleza é *auto to kalon* (literalmente, 'a beleza em si mesma'), Justiça é *auto to dikaion* (literalmente, 'o justo em si mesmo'), e assim por diante. Ele também usa as duas palavras gregas εἶδος (*eidos*) e ἰδέα (*ideia*) nesta conexão, aparentemente de forma completamente intercambiável. Assim, em vez de falar 'a Beleza em si mesma' etc., ele falará 'o *eidos* da Beleza' ou 'a *ideia* de Beleza'" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 178, tradução nossa).

[44] "[...] belief and its objects are the many particular things [...]" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 166).

[45] Como já se pode notar, a metafísica e a epistemologia platônicas estão intrinsecamente associadas. Ressalte-se que, para destacar o papel da abstração no processo dialético, nosso interesse neste trabalho recai, fundamentalmente, na teoria do conhecimento de Platão. Entretanto, como não se pode isolá-la da metafísica, se é obrigado a lidar com conceitos bastante complexos sobre a teoria platônica do Ser, de modo a alcançar um entendimento satisfatório a esse respeito para a compreensão do que apresenta-se na sequência. Foge ao escopo desta investigação, portanto, um estudo minucioso dos aspectos metafísicos, mas, reitera-se, alguns destes não podem ser evitados. Aliás, alguns destes não devem ser evitados, como é o caso da natureza do objeto do pensamento matemático, tratado na próxima seção.

inequívoco, enquanto a crença é falível, pode cometer erros."[46] (p. 180); (ii) na crença, o objeto em que se acredita tem algum grau de realidade, porque, senão, seria uma crença em algo irreal, isto é, nada (note-se que isto não impede uma crença seja baseada em algo que efetivamente não existe); (iii) na distinção entre acreditar/crer e conhecer/saber, "o que Platão parece querer dizer é que, a menos que você entenda por que uma afirmação *p* é verdadeira, então você não conhece *p*, apenas tem uma crença verdadeira"[47] (p. 169); (iv) "a crença é passível de erro, o conhecimento não"[48] (p. 170); (v) "a crença pode ser produzida e alterada pela persuasão, o conhecimento não"[49] (p. 170); (vi) "no caso da crença, não entendemos porque uma proposta é verdadeira, enquanto que no conhecimento entendemos"[50] (p. 170); (vii) "Platão procura mostrar que os objetos de crença são as muitas coisas particulares que ocupam uma posição intermediária entre o completamente real, que é o objeto do conhecimento, e o completamente irreal"[51] (p. 173).

Como já sublinhado, o conhecimento e as crenças são referenciados por Platão ora como capacidades epistêmicas, ora como estados da mente, ora como capacidades psicológicas. Nesse contexto, o conhecimento, a opinião e o erro são capacidades cognitivas distintas, e os dois tipos de potência produzem alguma forma de crença sobre as coisas, como afirmado por Reeve (2006). As crenças são produzidas a partir da capacidade de formular opinião sobre as coisas. E as quatro potências psicológicas plenas

> [...] permitem que uma alma faça todo o trabalho que as almas normalmente fazem, e como o conhecimento [*episteme*], a opinião [*dóxa*] e o erro [*agnoia*] são precisamente potências epistêmicas, ambos os tipos de potências [psicológicas e epistêmicas] devem capacitar a alma a formar crenças sobre as coisas[52] (REEVE, 2006, p. 59, tradução e interpolações nossas).

Portanto, conhecimento, opinião e erro sobre algo são potências cognitivas que fazem com que a psique produza relatos sobre algo, ou sobre a propriedade de alguma coisa, que Reeve (2006) denomina, genericamente, por "F", como citado anteriormente. A distinção entre essas potências se dá na qualidade do relato, não por ser um relato complexo, mas por conseguir

[46] "[...] knowledge is infallible, unerring, whereas belief is not so, can make mistakes [...]" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 172).
[47] "What Plato seems to mean is that unless you understand why a statement *p* is true, then you do not know that *p*, but have only a true belief" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 169).
[48] "belief is liable to error, knowledge not" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 170).
[49] "belief can be produced and changed by persuasion, knowledge not" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 170).
[50] "in the case of belief we do not understand why a proposition is true, whereas in knowledge we do" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 170).
[51] "Plato seeks to show that the objects of belief are the many particular things which occupy a half-way position between the completely real, which is the object of knowledge, and the completely unreal" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 173).
[52] "[...] enable a psyche to do all the work that psyches typically do, and because knowledge, opinion, and error are precisely cognitive powers, both types of powers must enable the psyche to form beliefs about things" (REEVE, 2006, p. 59).

apresentar as características ou propriedades que pertencem, e que não pertencem, ao que se deseja relatar, isto é, as propriedades de F. Assim sendo, os pensamentos perceptual e popular formam crenças/opiniões, diferentemente do que ocorre com os outros dois tipos de pensamento apresentados por Reeve (2006), próprios da seção $\overline{CB}$ da linha (ver Quadro 2), que corresponde ao mundo inteligível.

Se a qualidade do relato evidencia se alguém alcança o conhecimento de F, então devemos levar em consideração a capacidade que tal pessoa possui para realizar esse relato. No símile da Linha, já sinalizamos que existem quatro tipos de capacidades que estão associadas às suas quatro secções, "e que os diferentes tipos de propriedades sobre as quais são definidas — a qualidade de F, o modo de F, a figura de F, e a forma de F — são de alguma maneira os resultados de suas diferentes tentativas de realizá-lo" (REEVE, 2006, p. 59, tradução nossa).[53] Isso significa que tipos psicológicos distintos produzirão relatos distintos sobre o que é F, ou sobre as propriedades de F, a partir de capacidade distintas, e vice-versa. Nesse sentido, no âmbito da alegoria da Caverna, os habitantes da caverna desenvolverão relatos diversos daqueles que já caminham sob a luz do Sol. Em termos educacionais, cada um desses personagens passou por uma formação específica, que lhes permite fazer um relato específico do que é F, com maior ou menor grau de clareza e confiabilidade, na medida em que se avança na escala apresentada por Platão.

As pessoas de pensamento perceptual conseguem produzir um relato sem erros, tendo em vista que o erro seria um relato no qual nenhuma propriedade seria de F. Isso significa que, apesar de se identificar alguma propriedade de F, há, no relato produzido, descrições que não dizem respeito ao que, em essência, é F. Consequentemente, esse relato não é confiável, e as pessoas, nesta situação, formam crenças sobre F, ora falsas, ora verdadeiras (REEVE, 2006).

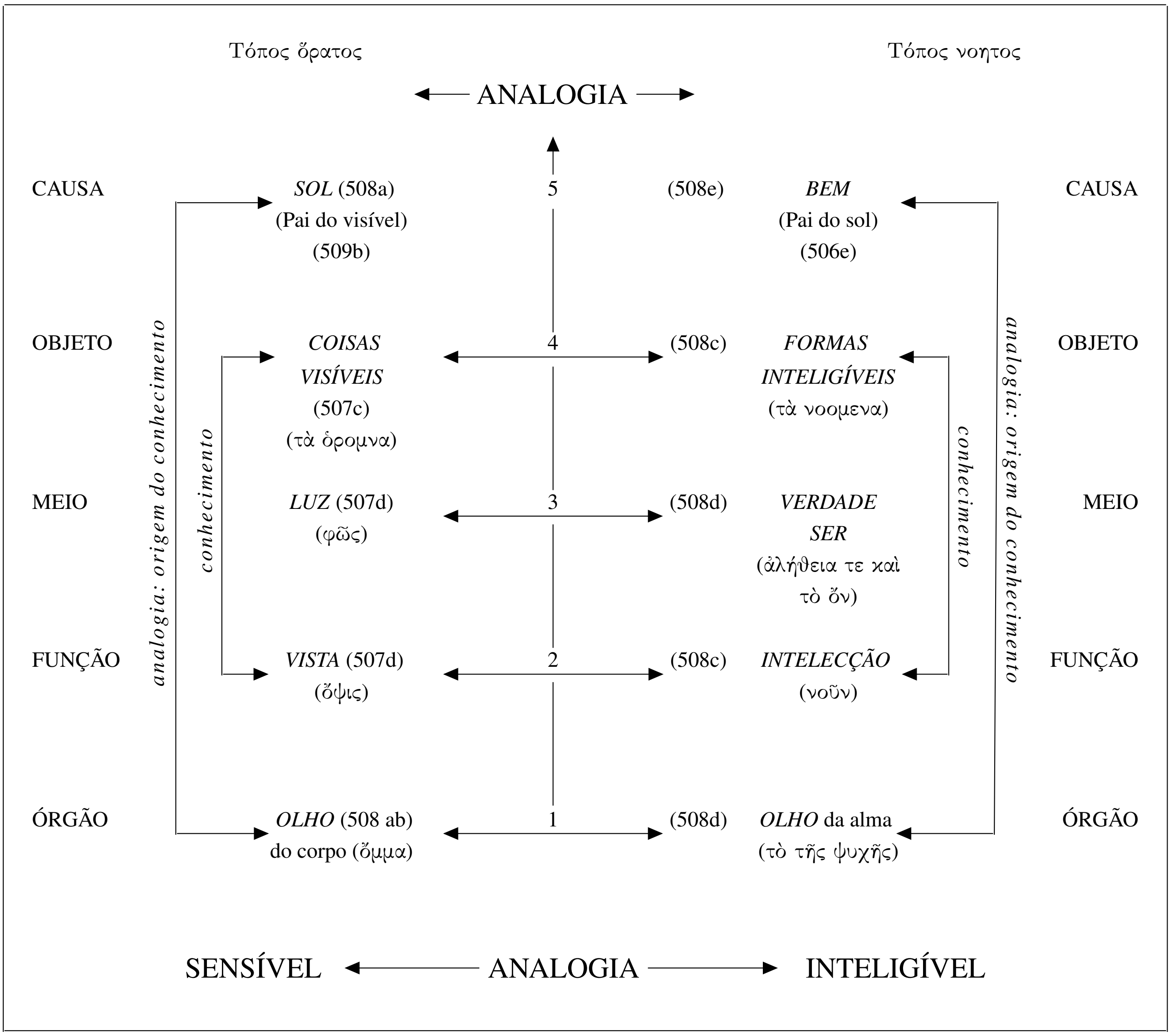
Para poder tratar dos graus mais elevados de clareza e confiabilidade dos relatos, em direção ao conhecimento das coisas em si, Platão, ao se valer da metáfora da visão e da luz, na alegoria da Caverna e no símile da Linha, estabelecerá um paralelo entre os mundos visível ($\overline{AC}$) e inteligível ($\overline{CB}$). Primeiramente, refere-se à visão física, própria do mundo visível, descrevendo a razão e as três condições para que ela ocorra:

> [...] para que a "vista" possa apreender as "coisas visíveis", é preciso introduzir uma terceira realidade, a "luz". [...] Uma segunda divisão destaca a origem da visão e a origem das coisas visíveis, ou seja, o sol, e na outra ponta dessa corrente de ouro, o olho, que lhe é aparentado. Cinco fatores ordenam por conseguinte a gênese da visão: o olho, a vista, a luz, as coisas visíveis e o sol (MARROU, 1990, p. 61-62).

[53] "and that the different types of properties over which they are set-the quality of F, the mode of F, the figure of F, and the form of F-are somehow the results of their different attempts to carry it out" (REEVE, 2006, p. 59).

A cada um desses cinco fatores corresponde um papel distinto a ser desempenhado no processo de visão física. O olho é o órgão físico responsável pela visão, o qual tem a função de ver (a vista), que, por sua vez, só é possível graças à luz, isto é, o meio pelo qual as coisas "visíveis" (os objetos da visão) são passíveis de serem vistas. E tudo isso, por fim, graças ao Sol que produz a luz (cf. Quadro 3).

Quadro 3 – Analogia Sensível/Inteligível



Fonte: Mattéi (2010, p. 63, reprodução nossa).

De modo análogo, os relatos de quem tem acesso às crenças não são confiáveis, pois, assim como o pensamento perceptual, as pessoas que possuem as crenças, ao formar um relato sobre F, poderão fazer constar de seu relato propriedades que pertencem a F, bem como propriedades que não pertencem a F. Porém, os que têm a capacidade de formular opiniões verdadeiras produzem relatos mais claros e mais confiáveis do que aqueles que possuem o pensamento perceptual (REEVE, 2006).

Entretanto, tal qual os amantes dos espetáculos e das audições, que têm "[...] a *doxa* como o seu estado epistêmico básico [...], [não quer dizer] que toda vez que temos uma *doxa* encontramo-nos num estado de sonho, mas apenas que, quando estamos num estado de sonho e consideramos as visões e os sons como os elementos básicos da realidade, então o máximo de que somos capazes é a *doxa*" (MORAVCSIK, 2006, p. 47-48, interpolação nossa). "A *doxa* que se refere a aparências refere-se a elementos sensíveis ou a noções e definições convencionais. Pode haver *doxa* correta e *doxa* incorreta. A *doxa* típica dos amantes das vistas e dos sons é falsa *doxa*, pois confunde aparências com realidade" (MORAVCSIK, 2006, p. 49). Consequentemente, "os amantes das vistas e dos sons não têm um entendimento adequado da realidade, [pois] eles não podem orientar sua vida para os objetos e metas apropriados. Isso se reflete em suas atividades e em sua postura cognitiva" (MORAVCSIK, 2006, p. 49, interpolação nossa). Portanto, "quanto às entidades sensíveis, só é possível ter *doxa*, a qual pode ser correta ou incorreta, mas, de qualquer modo, está sujeita à persuasão e não pode ser firmemente vinculada a uma justificação racional" (MORAVCSIK, 2006, p. 48).

2.2.2 O mundo inteligível e a Matemática

Na continuidade da descrição do contraste opinião-conhecimento/entendimento, Platão afirma que somente aqueles que chegam a desenvolver o pensamento dialético produzem relatos que sempre são verdadeiros sobre as propriedades de F e sobre a própria essência de F. Seu relato é o mais claro entre todos possíveis e o mais confiável (REEVE, 2006).

> Se esta reconstrução está no caminho certo, a discussão com os turistas e amantes do artesanato é uma tentativa engenhosa e filosoficamente penetrante de mostrar que somente poderes de formação de crenças confiáveis, com acesso a propriedades únicas, inteligíveis e imutáveis, que satisfaçam a lei da não contradição, podem produzir conhecimento. Se é possível saber o que é F, ou saber que x é F, deve haver uma coisa como a forma de F. Pois formas, ao contrário das qualidades e modos, são propriedades exatamente do tipo requerido (REEVE, 2006, p. 71, tradução nossa).[54]

Logo, o entendimento/conhecimento pleno depende da capacidade que alguém tem de produzir esse relato de maneira plenamente confiável. Isso só é possível por meio da capacidade de compreender e apreender as propriedades únicas, inteligíveis e imutáveis que o objeto do conhecimento/entendimento (*doxa-epistémé*) possui. Tais propriedades são encontradas apenas no que Platão denomina por Forma (*eidos*) ou Ideia (*idea*)[55]. Assim sendo, o conhecimento de

[54] "If this reconstruction is on the right track, the argument with the is an ingenious and philosophically penetrating attempt to show that only reliable belief-forming powers, with access to unique, intelligible, immutable properties, which satisfy the law of noncontradiction, can produce knowledge. If it is possible to know what F is, or to know that x is F, there must be such a thing as the form ofF. For forms, unlike qualities and modes, are properties of precisely the sort required" (REEVE, 2006, p. 71).

[55] Doravante, quando nos referirmos ao *eidos* platônico, utilizaremos o termo *Forma*, em vez de *Ideia*, para evitarmos possíveis confusões com o significado que esta última apresenta na nossa linguagem

F, com tais propriedades únicas, exige a compreensão da Forma de F. Veja-se, então, no que consistem o mundo inteligível e as Formas, indispensáveis para esclarecer o lugar conferido à matemática por Platão, no processo ascético da alma.

No contraste *doxa-epistémé*, Platão estabelece um paralelo entre as dimensões ontológica (com diferentes graus de realidade) e epistemológica (abrangendo os tipos de pensamento, níveis de entendimento e de confiabilidade dos relatos sobre a realidade), com seus respectivos objetos (ver Quadro 4).

Este paralelo é importante, pois não há como compreender o papel da matemática na ascensão da alma e na educação platônica sem essa intrínseca relação entre epistemologia e ontologia. Na visão de Burnyeat (2012, 2022), a dificuldade para uma interpretação adequada sobre as funções, os objetivos e, sobretudo, os objetos da matemática, apontados no símile da Linha, não reside nos aspectos cognitivos e/ou procedimentais aí abordados, mas, sim, em seus aspectos ontológicos. Para este autor, essa dificuldade se deve, prioritariamente, ao fato de que a descrição apresentada pelo personagem Sócrates

> [...] envolve uma forma de pensar o bem que é estranha à filosofia moderna: a ideia de que os seres podem ser classificados, em relação ao bem, em uma escala cósmica ou absoluta, [...] [que] apela [...] para uma dimensão de valor que não está relacionada ao ponto de vista de nenhuma espécie, e que culmina na bondade do próprio universo hierárquico[56] (BURNYEAT, 2012, p. 145, tradução nossa).

O Bem, como já citado anteriormente, é o fim último e mais elevado do processo de aprimoramento da alma, a cuja consecução todos os esforços devem ser dirigidos, e a partir do qual, uma vez alcançado, tudo o que se encontra abaixo dele deve ser ordenado e orientado. Esse fim último e "princípio de tudo", bem como a dinâmica de subida e descida que ele estabelece, é destacado na sequência do diálogo sobre o símile da Linha (510a-511e), na qual Platão descreve as secções referentes ao inteligível, $\overline{CE}$ e $\overline{EB}$.

> Aprende então o que quero dizer com o outro segmento do inteligível [$\overline{EB}$], daquele que o raciocínio [a própria razão — *autos ho logos*] atinge pelo poder da dialéctica, fazendo das hipóteses [das ciências matemáticas] não princípios, mas hipóteses de facto, uma espécie de degraus e de pontos de apoio, para ir até àquilo que não admite hipóteses,

cotidiana — como observa Schäfer (2012, p. 154): nos diálogos platônicos, "ideias não são *noêmata*, 'coisas do pensamento', mas *noêta*, o cognoscível em pensamento. [...]. Elas existem como o animal selvagem na floresta, é preciso apenas caçá-las [...]." Entretanto, cabe ressaltar que o termo *ideia* será mantido nas transcrições (literais) que fazemos de fontes bibliográficas que empregam tal termo para traduzir a palavra grega *eidos* para a língua portuguesa.

56 "[...] involves a way of thinking about goodness which is alien to modern philosophy: the idea that beings can be ranked, in respect of goodness, on a cosmic or absolute scale, [...] he appeals [...] to a dimension of value which is not related to the standpoint of any species and which culminates in the goodness of the hierarchical universe itself" (BURNYEAT, 2012, p. 145).

> que é o princípio de tudo, atingindo o qual desce, fixando-se em todas as consequências que daí decorrem, até chegar à conclusão, sem servir em nada de qualquer dado sensível [qualidades ou modos], mas passando das ideias umas às outras, e terminando em ideias (511b2-c2, interpolações de Reeve (2006, p. 57)).

Além de ser o fim último e princípio ordenador, o Bem é a condição necessária tanto para que o conhecimento seja possível, fazendo com que o mundo possa ser apreendido pela mente humana, quanto para a própria existência de todo o universo, como afirmado por Raven (1965, p. 130[57] apud PEREIRA, 2014, p. XXVII):

> O Bem, para Platão, é, em primeiro lugar, e com mais evidência, a finalidade ou alvo da vida, o objeto supremo de todo o desígnio e toda a aspiração. Em segundo lugar, e mais surpreendentemente, é a condição do conhecimento, o que torna o mundo inteligível e o espírito inteligente. E em terceiro, último e mais importante lugar, é a causa criadora que sustenta todo o mundo e tudo o que ele contém, aquilo que dá a tudo o mais a sua própria existência.

Pode-se, agora, constatar a articulação entre todos os elementos constantes dos Quadros 1, 2, 3 e 4. No que se refere aos modos de conhecimentos e potências epistêmicas, tem-se, na analogia entre os mundos visível e inteligível, na parte inferior da linha, o par pensamento perceptual (*eikasia*) e pensamento popular (*pistis*), que produzem a *doxa* (opinião); a este par inferior corresponde um outro, na parte superior da linha, composto pelo pensamento científico (*dianoia*) e pensamento dialético (*noésis*), os quais geram a *epistémé* (ciência/entendimento/conhecimento). No que se refere aos graus do ser, estes dois pares correspondem aos quatro estados da alma e às propriedades sobre as quais os quatro tipos de pensamento se assentam. Na parte inferior da linha (a dos seres visíveis – *eikones* e *zoa*), existem dois graus do ser: os *eikones* (imagens dos modelos das coisas em si/simulacros) e as realidades vivas/sensíveis (modelos das coisas em si). Tais graus do ser (e tipos de pensamento correspondentes) se assentam, respectivamente, nas qualidades e modos. A este par corresponde, na parte superior da linha (a dos seres inteligíveis – *noeta* inferiores e *noeta* superiores), a outros dois graus do ser, relativos às coisas em si: as hipóteses matemáticas e as formas (*eidos*). Por sua vez, esses graus do ser (e tipos de pensamento correspondentes) se assentam, respectivamente, nas figuras e formas.

Completando a articulação entre a alegoria da Caverna e o símile da Linha, Mattéi (2010) descreve o que ocorre com os Habitantes da Luz do Dia, que antes estavam presos à caverna: “Ao sair da caverna, o homem ganha o conhecimento dos objetos reais, com seus contornos esculpidos pela luz, correspondendo às figuras geométricas e às hipóteses da analogia da linha que dão oportunidade para a discussão (*dianoia*). ” (p. 67) Entretanto, o homem ainda não tem pleno conhecimento do princípio responsável pelas realidades mais elevadas cujas imagens passou

[57] RAVEN, J. E. **Plato’s thought in the making**. London: Cambridge University Press, 1965.

a ver. Finalmente, "nesse olhar erguido para o céu inteligível, o prisioneiro liberta totalmente a dialética, que atinge os *noéta* superiores graças à intuição intelectual da *noèsis*, as próprias Ideias que ordenam o conjunto do procedimento" (MATTÉI, 2010, p. 67). Na passagem de um estado a outro, o homem deixa, na terminologia empregada por Reeve (2006), sua condição de Habitante da Luz Amarrado (como amante da honra), tornando-se um Habitante da Luz Liberto (amante da sabedoria) (ver Quadro 1). "A alma chega, então, à contemplação suprema, *theoria*, iluminada pelo princípio não hipotético do Bem, que dá às realidades invisíveis o 'ser' (τὸ εἶναι) e a 'essência' (τὴν οὐσίαν)" (MATTÉI, 2010, p. 67).

Isto posto, compreende-se, em linhas gerais e em sua totalidade, os fins da educação platônica. Platão assim os descreve, recorrendo à metáfora da visão:

> Se é verdade o que dissemos: a educação não é o que alguns apregoam que ela é. Dizem eles que introduzem a ciência numa alma em que ela não existe, como se introduzissem a vista em olhos cegos. [...] A presente discussão indica a existência dessa faculdade na alma e de um órgão pelo qual aprende; como um olho que não fosse possível voltar das trevas para a luz, senão juntamente com todo o corpo, do mesmo modo esse órgão deve ser desviado, juntamente com a alma toda, das coisas que se alteram, até ser capaz de suportar a contemplação do Ser. A isto chamamos o bem (518b-d).

Nesse sentido, a Educação não consiste meramente em um processo de transmissão de conhecimentos, mas, sim, em um processo segundo o qual o aluno é colocado, em sua integralidade ("o olho juntamente com a alma toda"), na via do conhecimento do Bem (fim último da ascese da alma, e princípio de todas as coisas). Consiste em desviar o olho da alma para aquilo que os sentidos não buscam naturalmente; consiste em contemplar (*theoria*, em grego) a verdade. Quanto a isto, Barrow (2007, p. 118, tradução nossa) comenta: "Teoria, abstrata e às vezes divorciada do mundo real, como pode parecer, é a mais prática e útil ferramenta que a humanidade possui."[58] Com a obtenção desse conhecimento que advém da contemplação adquire-se o justo discernimento das coisas, capaz de conferir orientação e sentido à existência humana; discernimento sobre "[...] orientações certas e erradas que os seres humanos podem adotar ao planejar seus ideais e objetivos de vida. [...] A pessoa com o entendimento certo perseguirá os objetivos certos e agirá de modo justificável, e a pessoa com o estado epistêmico errado perseguirá objetivos errados e agirá sem uma justificativa adequada" (MORAVCSIK, 2006, p. 47). Por outro lado, o sentido de orientação conferido pela Educação platônica é acompanhado e alcançado, como se vê, pelo processo de discernimento e de libertação dos desejos da alma. Tais aspectos, na condição de pressupostos, estão na base da teoria educacional de Platão, como sublinha Barrow (2007, p. 120, tradução e interpolação nossas):

[58] "Theory, abstract and sometimes divorced from the real world as it may seem, is the most practical and useful tool humankind has" (BARROW, 2007, p. 118).

Quadro 4 – Conhecimento e Formas em Platão

		ANΩ		
CIÊNCIA: ΤΟ ΓΝΩΣΤΟΝ (510a)	*PRINCÍPIO VERDADE* (ἐπὶ τὴν τοῦ παντὸς ἀρχὴν) (511b)	5	*IDEIA DE BEM* (ἐπέκεῖνα τῆς οὐσίας) (509b)	*INTELIGÍVEL* (τὸ τοῦ νοουμένου, 509d)
	CONTEMPLAÇÃO (θεωρούμενον, 511c)	4	*FORMAS DE SI* (αὐτῖς εἴδεσι, 510b)	
	DISCURSÃO (διάνοια, 511e)	3	*HIPÓTESES MATEMÁTICAS* (ἐξ ὑποθέσεων ἐπὶ τελευτήν, 510b)	
OPINIÃO: ΤΟ ΔΟΞΑΣΤΟΝ (510a)	*CRENÇA* (πίστις, 511e)	2	*REALIDADES SENSÍVEIS* (τὰ ζῷα κτλ, 510a)	*VISÍVEL* (τὸ τοῦ ὁρωμένου γένους, 509d)
	SIMULAÇÃO (εἰκασία, 511e)	1	*SIMULACROS* (εἰκόνες, 509e)	
	MODOS DO CONHECIMENTO (παθήματα ἐν τῇ ψυχῇ, 511 d)	KATΩ	*GRAUS DO SER* (τμήματα, 509b)	

Fonte: Mattéi (2010, p. 66, reprodução nossa).

> [...] a base de sua [de Platão] teoria da educação é a crença de que a capacidade para um certo tipo de entendimento é única para os seres humanos, e que no desenvolvimento dessa capacidade, que é fundamental para a educação, tem-se que levar em conta os possíveis conflitos na alma. A premissa final desta teoria é que a capacidade de compreensão do homem inclui a capacidade de compreender o bem e de ser virtuoso. Pode-se dizer, portanto, que o objetivo da educação é o de desenvolver a compreensão e a virtude no indivíduo.[59]

2.2.2.1 Por que e para que tanta Matemática?

Viu-se até aqui como a epistemologia e a educação platônicas são determinadas, ordenadas e construídas em torno de um valor ético e metafísico supremo (o Bem), com implicações políticas (no que se refere à formação dos cidadãos e governantes da cidade idealizada por Platão, a Kallipolis[60]) e existenciais (quanto aos ideais, objetivos e sentidos atribuíveis à vida).

Na busca pelo conhecimento desse bem supremo, a matemática ocupa uma posição-chave no processo ascético da mente, na transição do mundo sensível para o mundo inteligível, na passagem do pensamento popular para o pensamento científico (Quadro 1). Em 511b2-c2, o personagem Sócrates afirma que a razão faz das "[...] hipóteses [das ciências matemáticas] não princípios, mas hipóteses de facto, *uma espécie de degraus e de pontos de apoio*, para ir até àquilo que não admite hipóteses" (interpolações de Reeve (2006, p. 57), itálicos nossos). Nesse trecho de *A República*, a matemática é apontada claramente como um meio, uma espécie de escada sobre a qual a razão humana se apoia, para chegar ao conhecimento da verdade (Quadro 4). Diante disso, convém indagar: Quais são essas ciências matemáticas a que o personagem Sócrates se refere nesse excerto? Qual o *status* da matemática nessa época? Quais seus métodos? Como é pensada a formação nessas ciências matemáticas no modelo educacional platônico? Quais as finalidades do ensino de matemática? Como se dá essa função da matemática como "escada" no processo de ascensão da alma?

Embora a questão da originalidade das contribuições de Platão como matemático seja controversa (CATTANEI, 2005), seus estudos e ênfase nessa área do conhecimento desempenharam um papel fulcral em sua Academia — "uma escola que era tanto lugar de formação ético-política, herdeira do espírito socrático, como centro de atividades científicas de alto nível em todos os campos" (CATTANEI, 2005, p. 30) —, da qual participaram célebres matemáticos/

---

[59] "[...] the basis of his theory of education is the belief that the capacity for a certain kind of understanding is unique to humans, and that in developing that capacity, which is fundamental to education, we have to take account of the possible conflicts in the soul. The final premise of this theory is that man's capacity for understanding includes the capacity to understand the good and to be virtuous. The aim of education may therefore be said to be to develop understanding and virtue in the individual" (BARROW, 2007, p. 120).

[60] A palavra grega *kallipolis* significa "bela cidade" ou "cidade nobre".

filósofos da época (séculos V e IV a.C.), com trabalhos seminais de extrema relevância para o desenvolvimento da Matemática.[61]

Esses estudos matemáticos concentravam-se em quatro subáreas, fundamentais na filosofia platônica, em todas as suas dimensões (epistemológica, metafísica, lógica, estética, moral e política). Por essa razão, "Platão leva a sério as ciências matemáticas de seu tempo. Não se confronta somente com a aritmética e a geometria, que distingue em geometria plana e estereometria[62], mas também com a astronomia e a harmonia" (CATTANEI, 2005, p. 247-248). O conhecimento matemático nessa época consistia, *grosso modo*, nos legados deixados por Tales de Mileto (c.624–547 a.C.), na geometria, e por Pitágoras de Samos (572–497 a.C.) e seus seguidores, na chamada teoria pitagórica dos números e no que se poderia dizer "a primeira filosofia 'da matemática'" (BELL, 1999, p. 10, tradução nossa). Essas quatro ciências compunham uma estrutura concebida pelos pitagóricos segundo a qual a matemática era compreendida, na época de Platão, em termos "de um esquema bifurcado de oposições" (BELL, 1999, p. 10), com os pares opostos: discreto–contínuo, em um primeiro nível, e absoluto–relativo e estático–dinâmico, em segundo nível. Cada uma dessas ciências consiste em uma área da matemática que tem um objeto de estudo específico, determinado pela combinação intrínseca de dois desses aspectos (um de cada nível). Desse modo, temos que: a aritmética debruça-se sobre o que é discreto e absoluto; a música, sobre o discreto e relativo; a geometria, sobre o contínuo e estático; a astronomia, sobre o contínuo e dinâmico (Quadro 5).

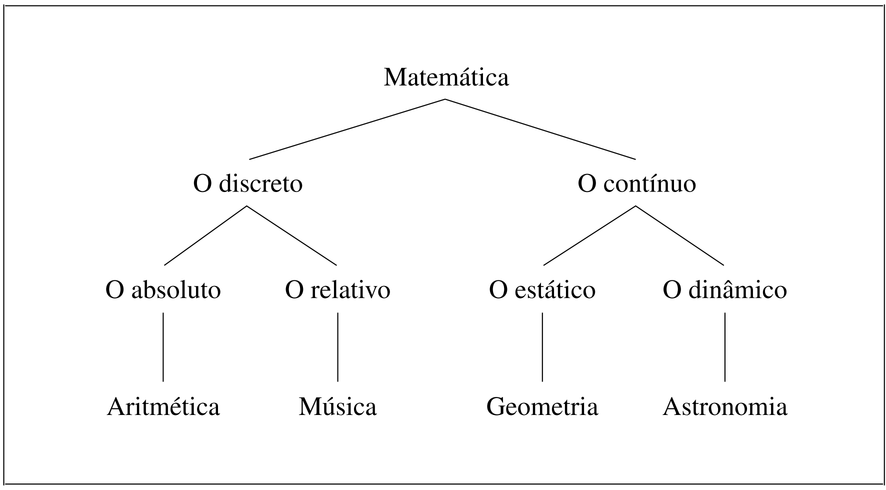
Talvez o exemplo mais claro das ciências matemáticas como "escada" da razão — isto é, meio privilegiado de transição do sensível ao inteligível — seja o da harmonia, que dizia respeito a estudos que abrangiam não somente a música (com destaque para as relações numéricas e geométricas da teoria musical formulada pelos pitagóricos), como também as justas proporções que se julgavam conferir equilíbrio e beleza ao universo e à alma humana. A música destinava-se, ao fim e ao cabo, à elevação da alma (como frisado anteriormente, quanto ao papel da euritmia na *paideía* platônica), na passagem do que é captado pelo aparelho sensorial ao que é apreendido pela mente. Desse modo,

> [...] mesmo perante o imprescindível meio matematizado de tal estudo, a finalidade última deste não poderia deter-se na matemática. [...] Libertar-

[61] Dentre estes, Cattanei (2005, p. 30) destaca: "Leodamante de Taso e Teeteto ateniense, a quem se atribui a descoberta dos cinco sólidos geométricos regulares, [que] 'acrescentaram o número dos teoremas e lhes deram um ordenamento mais científico'; Neóclides e seu disípulo Leão [que] 'acrescentaram muitas coisas novas às de seus predecessores, tanto que Leão compôs *Elementos* muito mais acurados pelo número e pelo valor das demonstrações'; Eudoxo de Cnido, que [...] articulou seu próprio sistema astrônimo e, sobretudo, uma teoria das proporções genial; Amiclas de Heracléia, Menecmo, seu irmão Dinostrato, [que] 'aperfeiçoaram ainda mais a geometria em seu conjunto'; Teudio de Magnésia, [que] 'compôs *Elementos* de maneira excelente, e tornou mais gerais muitas questões particulares'; Ateneu de Cízico, [que] 'tornou-se célebre em todas as ciências matemáticas' — 'todos estes, juntos, conviviam na Academia e conduziam em comum as pesquisas."

[62] Diz respeito aos estudos sobre sólidos e geometria espacial, que, nessa época, eram aplicados à astronomia e à cosmologia.

Quadro 5 – Estrutura pitagórica da Matemática



Fonte: Bell (1999, p. 10, tradução e reprodução nossas).

> se do sensível, realizando a transposição das imagens para os paradigmas, é o passo inicial que leva da empiria para o estudo matemático, também passa a ser imprescindível um passo que transponha a inexorabilidade destes meios para aquela que seria a finalidade inerente a eles [...]. Esta outra transposição é, nos termos [...] de Platão, a de uma autotransfiguração pela qual a finalidade última destes estudos preparatórios, por um salto de excelência, passa, subitamente, a habitar na própria alma humana (RIZEK, 1998, p. 259-260).

Vê-se, mais uma vez, que os propósitos da matemática não se voltam, prioritariamente, a suas aplicações práticas. Entretanto, isso não significa que Platão não reconheça a utilidade da matemática em assuntos concretos. Todas as ciências matemáticas "[...] têm um aspecto prático-aplicativo, unido a uma inegável utilidade concreta, que não é porém índice de cientificidade" (CATTANEI, 2005, p. 248). A questão central aqui é que as matemáticas necessárias à elevação da mente ao nível mais alto — nos domínios da dialética (Quadro 6) — devem ser "[...] cultivadas com espírito de filósofos, não de comerciantes, são 'puras'; não são praticadas 'para vantagem dos negócios', mas para fins cognoscitivos." (p. 248) Assim sendo, a chamada matemática "pura" ou "verdadeira", quanto à sua essência e aos seus objetos, é situada, fundamentalmente, no mundo inteligível, apartada do mundo sensível.[63] Em sentido amplo, "ele [Platão] está combatendo a visão de que todas as ciências são mero conhecimento prático e a visão de que elas tratam

[63] Através do diálogo entre os personagens Glauco e Sócrates, Platão evidencia sua opinião a respeito da dificuldade que a maioria das pessoas possivelmente tenha para compreender e/ou aceitar o papel da matemática na formação da alma, em termos contemplativos, não aplicada imediatamente a assuntos materiais. Isso é patente na passagem 527d-e, na qual se aborda a questão da utilidade dos estudos de matemática (mais especificamente, astronomia/estereometria): "Divertes-me, por pareceres receoso da maioria, não vá afigurar-se-lhes que estás a prescrever estudos inúteis. Mas eles não são de âmbito modesto, embora seja difícil de acreditar que nestas ciências se purifica e reaviva um órgão da alma de cada um que fora corrupto e cego pelas restantes ocupações, e cuja salvação imposta mais do que a de mil órgãos da visão, porquanto só através dele se avista a verdade. Aqueles que entendem de

apenas de fenômenos sensivelmente acessíveis" (MORAVCSIK, 2006, p. 272). Nesse âmbito, Cattanei (2005, p. 248) afirma que "não há dúvidas de que [as formas matemáticas] são formas de verdadeiro conhecimento intelectual. E não há dúvida de que 'nenhuma das coisas sensíveis possui os requisitos que as ciências matemáticas exigem [...]'." Em vista disso,

> Platão recomendava praticar [pesquisas em aritmética, estereometria, astronomia e harmonia] com fins apenas contemplativos, e conforme um método teorizado por ele e exemplificado com lucidez, principalmente no caso da geometria: extrair de pressupostos válidos consequências necessárias, tendo consciência do rigor existente, embora relativo, desse procedimento (CATTANEI, 2005, p. 31-32).

Portanto, para além de sua finalidade última de elevação da mente, as ciências matemáticas não somente consistem em meio para tal ascensão, mas se destacam também pelo método e rigor que lhes são próprios, desempenhando outras funções importantes nas teorias platônicas. Para Reeve (2004, p. xvi, tradução nossa),

> a importância dessas ciências no pensamento de Platão é dupla. Primeiro, elas fornecem um exemplo convincente de um rico corpo de conhecimento preciso organizado em um sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas - um modelo do que a própria filosofia poderia ser. Segundo, o brilhante tratamento matemático da harmonia (beleza musical) desenvolvido por Pitágoras de Samos e seus seguidores (Aristóteles, *Metafísica*, 987a29-8a17) sugeriu um papel para a matemática dentro da própria filosofia. Abriu a possibilidade de dar definições precisas em termos totalmente matemáticos de todas as características, incluindo as aparentemente vagas e valorativas como beleza e fealdade, justiça e injustiça, bem e mal, e as outras coisas das quais Sócrates procurou definições (*A República*, 530d-533e).[64]

Platão busca retratar a realidade das coisas a partir de argumentos matemáticos. Para tanto, vale-se do rigor e do método matemáticos, em suas explanações, para convencer sua audiência. Burnyeat (2022) chama a atenção para o fato de a realidade objetiva para os gregos dessa época ser indissociável de valores, de modo que discorrer sobre o mundo exigia tomar como certo um conjunto de valores éticos e metafísicos — "Platão, como Aristóteles e os

mesmo modo não terão dificuldade em declarar que pensas bem, mas aqueles que não têm qualquer compreensão do assunto é natural que julguem que não vale nada o que dizes."

64 "The importance of these sciences in Plato's thought is twofold. First, they provided a compelling example of a rich body of precise knowledge organized into a deductive system of axioms, definitions, and theorems — a model of what philosophy itself might be. Second, the brilliant mathematical treatment of harmony (musical beauty) developed by Pythagoras of Samos and his followers (Aristotle, *Metaphysics* 987a29–8a17) suggested a role for mathematics within philosophy itself. It opened up the possibility of giving precise definitions in wholly mathematical terms of all characteristics, including such apparently vague and evaluative ones as beauty and ugliness, justice and injustice, good and evil, and the other things of which Socrates sought definitions (Republic 530d–533e)." (REEVE, 2004, p. xvi).

estoicos depois dele, realmente acreditava que há valor no mundo como este é, objetivamente falando."[65] (p. 11, tradução nossa). Isto possibilita compreender com mais clareza o porquê de a epistemologia platônica atrelar-se intrinsecamente ao supremo Bem. Em segundo lugar, este autor assinala que, "para Platão, [...] a ciência mais favorecida — no seu caso, a matemática — é precisamente a que nos permite compreender o bem. As ciências matemáticas são as que nos dizem como as coisas são objetivamente falando, e elas mesmas são ciências de valor"[66] (BURNYEAT, 2022, p. 11, tradução nossa).

Para aclarar a força argumentativa que a matemática exerce nas explanações sobre a realidade que encontram-se nos diálogos platônicos, Burnyeat (2022) frisa o fato de que Platão não dispunha do poder explicativo e de persuasão da ciência tal como entendida hoje. Platão não contava com "nenhum sistema de pensamento ou explicação [que] tinha tal autoridade", nem com a lógica moderna como "um recurso adicional que [...] pudesse tomar como certo." Além disso, não havia "o contraste entre o mundo como os humanos o experimentam e o mundo como a ciência o explica", como ocorre na atualidade. O mundo de Platão não era descrito pela ciência tal como na modernidade, na qual, sobretudo, através da "física matemática, [...] nessa descrição, não há espaço para valores" (BURNYEAT, 2022, p. 11, tradução nossa). Para além do uso retórico do rigor das formulações que as ciências matemáticas ofereciam, "Platão foi o primeiro filósofo que reconheceu claramente o *status* especial das proposições matemáticas como proposições necessárias"[67], e "que existe uma certeza sobre as proposições matemáticas que está bastante ausente das proposições em que simplesmente acreditamos (ou seja, o tipo de proposições cotidianas que os amantes dos espetáculos ou das audições consideram)"[68] (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 191, tradução nossa). E essa certeza das proposições matemáticas, na descrição da realidade, se deve à natureza dos entes matemáticos (abordado na próxima seção), de modo que "Platão considerou a matemática não como uma idealização de aspectos do mundo empírico, mas *como uma descrição direta da realidade*"[69] (BELL, 1999, p. 192, tradução nossa, itálicos do autor).

O estudo das ciências matemáticas, portanto, é necessário para o conhecimento pleno das coisas, da realidade, da verdade... Como intermediário entre as crenças (próprias dos pensamentos perceptual e popular / *eukasía* e *pístis*) e o conhecimento pleno (próprio do pensamento dialético

[65] "Plato, like Aristotle and the Stoics after him, really did believe there is value in the world as it is objectively speaking" (BURNYEAT, 2022, p. 11).

[66] "For Plato, [...] the most favoured science – in his case, mathematics – is precisely what enables us to understand goodness. The mathematical sciences are the ones that tell us how things are objectively speaking, and they are themselves sciences of value" (BURNYEAT, 2022, p. 11).

[67] "Plato was the first philosopher who clearly recognised the special status of mathematical propositions as necessary propositions" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 171).

[68] "[...] that there is a certainty about mathematical propositions that is quite absent from the propositions which we merely believe (i.e the sort of everyday propositions that the lover of sights and sounds [...] entertains)" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 171).

[69] "Plato considered mathematics not as an idealization of aspects of the empirical world, but rather *as a direct description of reality*" (BELL, 1999, p. 192).

/ *noésis*), o estado matemático (o pensamento científico / *dianóia* — Quadro 1) não basta, mas é imprescindível, para que tal conhecimento pleno seja alcançado; a matemática introduz, pois, a mente ao pensamento dialético (CROSS; WOOZLEY, 1971).

Ressalte-se que, nessa posição intermediária entre o sensível e o nível mais alto do inteligível, a matemática também não tem como finalidade principal o treinamento da mente para o desenvolvimento do pensamento abstrato, ainda que ela seja fundamental para tal finalidade. "Ele [Platão] sabe por experiência como o estudo da matemática acelera a mente e obriga a prática do pensamento abstrato, e não lhe parece haver razão para que toda a ciência humana não deva ser pressionada para o mesmo serviço elevado, a educação da raça humana"[70] (NETTLESHIP, 1961, p. 129-130, tradução nossa).

Portanto, ainda que ocupem lugar de destaque, não são as aplicações concretas, nem o rigor das formulações, nem a eventual força retórica de suas proposições, nem o treinamento mental, que justificam o estudo tão longo das ciências matemáticas prescrito por Platão, como afirma Nettleship (1961, p. 130, tradução e interpolações nossas):

> Os dez anos entre os vinte e trinta anos de idade, durante os quais ele [aquele que está sendo preparado para o estudo da dialética] continuaria esse estudo [das ciências matemáticas], seriam um tempo muito longo a passar na mera prática do pensamento lógico. Mas o estudo tem para ele um significado tanto real quanto formal. Ele serve não apenas como uma ginástica mental, ajudando a alma a alcançar o lugar onde a verdade deve ser encontrada, mas também como uma introdução real à verdade que ele está procurando.[71]

Apesar de ser considerada "como uma descrição direta da realidade" e como elemento crucial para a ascensão máxima da mente (ao pensamento dialético e ao conhecimento pleno da verdade), Platão sublinha a inadequação do conhecimento e do método de investigação matemáticos; ambos assentam-se sobre princípios, pontos de partida, denominados "hipotéticos".

> Esse conhecimento [...] é "hipotético", ou seja, repousa sobre princípios não comprovados, porque ainda não foram apreendidos em todas as suas relações com outros princípios. Ao exigir, portanto, que o estudo das ciências seja constantemente direcionado para a percepção de suas relações mútuas, Platão pretende claramente remediar este defeito característico, apontando o caminho da região "hipotética" para a de um sistema de

[70] "He knows by experience how the study of mathematics quickens the mind and compels the practice of abstract thinking, and there seems to him to be no reason why the whole of human science should not be pressed into the same high service, the education of the human race" (NETTLESHIP, 1961, p. 129-130).

[71] "The ten years between twenty and thirty, over which he would continue that study, would be a very long time to spend in the mere practice of logical thinking. But the study has to him a real as well as a formal significance. It serves not only as a mental gymnastic, helping the soul to reach the place where the truth is to be found, but also as an actual introduction to the truth for which it is looking" (NETTLESHIP, 1961, p. 130).

> conhecimento autodemonstrado. A tal sistema Platão [...] deu o nome de "dialética"[72] (NETTLESHIP, 1961, p. 131-132, tradução nossa).

A inadequação ou imperfeição do conhecimento e do método matemáticos devem-se, pois, a tais princípios e pontos de partida do pensamento matemático, os quais, por sua vez, referem-se a objetos cuja natureza é o que, afinal de contas, interessa a Platão. Assim, "o interesse de Platão pela matemática centra-se na natureza dos objetos com que essa disciplina lida. Isso está de acordo com a abordagem geral de Platão quanto as disciplinas genuínas, que as define em termos de seus objetos" (MORAVCSIK, 2006, p. 275). Cabe, então, abordar a natureza dos objetos do pensamento matemático.

2.2.2.2 A natureza dos entes matemáticos: O que o matemático tem em mente?

Para fazer a "ponte" entre o mundo sensível e a parte superior do mundo inteligível ($\overline{EB}$, na representação do símile da Linha; ver Quadro 2), a matemática, ou melhor, os matemáticos partem e se utilizam de elementos sensíveis, isto é, de imagens/representações visíveis de coisas concretas, os objetos originais que pretendem estudar. "´ No símile da Linha, estas imagens sensíveis, ou seja, os diagramas ou modelos (um triângulo de madeira, quadrado etc.), que o matemático utiliza, pertencem eles mesmos à secção $\overline{DC}$ da Linha: ou seja, são objetos visíveis, que podem ter reflexos ou sombras de si mesmos, que pertenceriam à secção $\overline{AD}$, a mais baixa da Linha"[73] (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 233, tradução nossa). Aqui, a crítica de Platão ao método matemático se apoia em dois pontos: "primeiro, o matemático usa imagens sensíveis, e segundo, ele é obrigado a empregar suposições que permanecem não comprovadas"[74] (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 232, tradução nossa). A primeira objeção refere-se ao fato de que, na epistemologia de Platão, como viu-se anteriormente, os que se voltam às coisas sensíveis — aquelas que se encontram entre o ser e o não ser — não são capazes de formular relatos plenamente confiáveis sobre a realidade; possuem apenas opiniões (*doxa*) — que estão sujeitas a erro, e não resistem à persuasão —, e não o conhecimento pleno das coisas, pois não ascendem à essência destas (por exemplo, "o quadrado em si"[75]). Por isso, Cross e Woozley (1971) sublinha

[72] "That knowledge [...] is 'hypothetical', that is, it rests upon principles which are unproven, because they have not yet been apprehended in all their relations to other principles. In requiring, then, that the study of the sciences should be constantly directed to the perception of their mutual relationships, Plato is clearly intending to remedy this characteristic defect by pointing the way from the region of the 'hypothetical' to that of a self-demonstrated system of knowledge. To such a system Plato [...] gave the name of 'dialectic'" (NETTLESHIP, 1961, p. 131-132).

[73] "[...] in the scheme of the Line these sensible images, i.e. the diagrams or models (a wooden triangle, square etc.), which the mathematician uses, themselves belong to section *DC* of the Line: i.e. they are visible objects, which may in tum have reflections or shadows of themselves, which would belong to the lowest section *AD* of the Line" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 233).

[74] "First, the mathematician uses sensible images, and second, he is compelled to employ assumptions which remain unproven assumptions" (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 232).

[75] Entre os estudiosos das teorias platônicas em matemática, discute-se se "o quadrado em si" refere-se ou não à Forma (*eidos*) do quadrado. Essa questão é abordada nas próximas páginas.

que, “ao mesmo tempo, Platão é claro que, embora o matemático utilize estas ajudas sensíveis na matemática, ele não está pensando nelas, mas naqueles objetos dos quais estas são cópias, ou seja, ‘o quadrado em si e a própria diagonal’”[76] (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 233, tradução nossa). Com isso, nota-se que o interesse de Platão, como já assinalado, recai sobre a natureza dos objetos da matemática. A crítica, portanto, não diz tanto respeito ao desenvolvimento do método em si, mas aos seus pressupostos, seus pontos de partida, suas “suposições não comprovadas” sobre os entes matemáticos, que fazem com que os matemáticos argumentem condicionalmente a partir de “princípios hipotéticos”. Desse modo, o problema não reside nos passos de desenvolvimento dos métodos matemáticos, que, como afirmado pelo personagem Sócrates, são coerentes.

> Aqueles que se ocupam da geometria, da aritmética e das ciências desse gênero, admitem o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos [...]. Estas coisas dão-nas por sabidas, e, quando as usam como hipóteses, não acham que ainda seja necessário prestar contas disto a si mesmos nem aos outros, uma vez que são evidentes para todos. E, partindo daí e analisando todas as fases, e tirando as consequências, atingem o ponto a cuja investigação se tinham abalançado (510c-d).

Sobre esta passagem, Cattanei (2005, p. 252) comenta:

> Glauco sabe bem que as “hipóteses” escolhidas pelos matemáticos, por exemplo a do ângulo reto, ou a do par e do ímpar, não são discutidas por eles e justificadas. Até mesmo, no *Crátilo*, reconhece-se que há “diagramas” matemáticos, isto é, demonstrações geométricas perfeitamente coerentes, embora fundadas em hipóteses falsas: talvez na hipótese não-euclidiana, do ângulo agudo ou do ângulo obtuso, relativa à soma dos ângulos do triângulo. Glauco sabe que as ciências não fundamentam a si mesmas.

A questão central, então, são esses pontos de partida (o ímpar, o par, as figuras, o ângulo reto etc., bem como relações de igualdade, de semelhança etc.) ou, mais especificamente, os fundamentos desses pontos que não se encontram na própria matemática (uma vez que “as ciências não fundamentam a si mesmas”). Logo, o cerne do problema é a natureza de tais pontos, que fundamentam, alicerçam, as ciências matemáticas. De acordo com Moravcsik (2006, p. 52),

> parece, portanto, que os pontos de partida não são proposições, mas a compreensão adequada dos elementos básicos dos domínios da matemática. Platão não poderia estar reclamando pelo fato de a matemática, como qualquer outra disciplina, conter algumas noções básicas indefiníveis. E ele não está meramente pedindo definições, já que algumas delas estavam disponíveis na ocasião (MORAVCSIK, 2006, p. 52).

[76] “At the same time Plato is clear that, though the mathematician uses these sensible aids in doing mathematics, he is not thinking about them, but about those objects of which these are copies, namely ‘the square itself and the diagonal itself’” (CROSS; WOOZLEY, 1971, p. 233).

Quanto a isto, Moravcsik (2006) chama a atenção para o fato de que Platão conhecia bem os procedimentos empregados pelos matemáticos e as definições matemáticas de sua época, e até utilizava tais procedimentos e definições para sustentar alguns de seus argumentos. Nas análises de Moravcsik (2006), identifica-se uma questão particularmente relevante para a justificativa e atualidade de pesquisas sobre as bases filosóficas da matemática (inclusive, para o presente trabalho): a suposição de que a compreensão clara dos resultados e dos porquês da atividade matemática, bem como das definições matemáticas, exige, tal como apregoado por Platão, o conhecimento (em *stricto sensu*) dos fundamentos dos entes matemáticos, em sua integralidade, isto é, considerando os aspectos do seu ser relativos à sua existência, à sua essência e ao sentido de tal existência. Para explicar essa questão, este autor recorre ao contraste das concepções atuais sobre o entendimento matemático com as de Platão.

> Hoje distinguimos entre matemática propriamente dita e questões fundacionais. De acordo com essa visão, duas pessoas podem compreender matemática igualmente bem, mesmo que discordem quanto a questões fundacionais e se oponham uma a outra como, por exemplo, um realista e um nominalista se oporiam.[77] Platão não faz essa distinção. Para ele, por mais que uma pessoa conheça matemática ou geometria, se ela não entender o estado ontológico das entidades em questão e, como um nominalista, por exemplo, "confundir aparências com realidade", ela não terá um entendimento real. Assim, os pontos de partida não são simplesmente definições matemáticas, mas incluem também afirmações existenciais e caracterizações ontológicas (MORAVCSIK, 2006, p. 52-53).

Dentre os exemplos fornecidos por Platão, em *A República*, sobre a necessidade do estudo da matemática com fins contemplativos, pode citar-se a prescrição de Sócrates para o ensino do cálculo, em que se constata, nitidamente, que o fim último desse ensino é o conhecimento da essência de número.

> Seria, portanto, conveniente, ó Gláucon, que se determinasse por lei esse aprendizado e que se convencessem os cidadãos, que hão-de participar dos postos governativos, a dedicaram-se ao cálculo e a aplicarem-se a ele, não superficialmente, mas até chegarem à contemplação da natureza dos números unicamente pelo pensamento, não cuidando deles por amor à compra e venda, como os comerciantes ou retalhistas, mas [...] para facilitar a passagem da alma da mutabilidade à verdade e à essência (525c).

[77] No realismo, assume-se que os objetos matemáticos conjugam a existência e a abstratividade, mas não a independência. Desse modo, os realistas defendem a existência dos objetos matemáticos abstratos, em oposição aos nominalistas, que, na filosofia contemporânea, são aqueles que assumem "a visão de que não há objetos abstratos" (LINNEBO, 2018, tradução nossa). Existência, abstratividade e independência são características essenciais dos objetos matemáticos, no platonismo matemático (explicadas logo adiante).

Em meio à mutabilidade do que é sensível depara-se com a multiplicidade de objetos particulares: os diferentes números, nesse exemplo de Platão. O que estes têm em comum, que permanece e é único, é a essência de número, ou seja, o que faz com que um ente matemático seja um número e não outra coisa. Nesse trecho de *A República*, "Platão não quer que nos limitemos a saber quais são os diferentes números, mas que entendamos o que constitui esses números" (MORAVCSIK, 2006, p. 57). Por outro lado, também se verifica nesse excerto que é possível operar com números e aplicá-los a problemas concretos, sem que se saiba, contudo, exatamente o que "constitui esses números". Nisto se baseia a suposição de Moravcsik (2006) de que "a maioria de nós sabe somar, subtrair, e assim por diante, mas, de acordo com Platão, apenas uns poucos entre nós realmente entendem do que se trata a matemática" (p. 55).

Diante disso, é fundamental que responda-se às seguintes perguntas:

(P1): Qual a natureza dos entes matemáticos?

(P2): O que o matemático tem em mente quando lida com números e formas geométricas?

(P3): O que confere veracidade às definições e às proposições matemáticas?

No símile da Linha, a matemática está situada, como viu-se, na parte relativa ao mundo inteligível. Entretanto, como também assinalado, os procedimentos matemáticos se utilizam ainda de auxílios visíveis. Além disso, a parte superior da Linha diz respeito ao que é apreendido pela mente, ao que é permanente, estável, não visível, ao passo que a parte inferior trata de objetos visíveis, captados pelo aparelho sensorial humano. Então, afinal de contas, qual o conteúdo da matemática? Na condição intermediária que ocupa na ascese da alma, "as matemáticas são conhecimento 'só com a mente' de alguma coisa de permanente, idêntica a si mesma, 'per se', e plenamente existente? São puro conhecimento intelectual da Ideia [(*eidos*)]?" (CATTANEI, 2005, p. 247, interpolação nossa). Assim, responder à pergunta P1 consiste, fundamentalmente, em responder se as entidades matemáticas são Formas (*eidos*) platônicas. E, intrinsecamente atrelada a esta questão, emerge a pergunta P2, que, em suma, significa indagar se, em suas atividades matemáticas, o matemático contempla as Formas (*eidos*) platônicas, ou, em vez destas, apreende objetos intelectuais de outra natureza. Entre os estudiosos da filosofia platônica e da filosofia da matemática, não há consenso a esse respeito.Por exemplo: baseado simplesmente no fato de a matemática situar-se no mundo inteligível, Reeve (2006, p. 54, tradução nossa) é taxativo ao afirmar que "não há dúvida de que seu conteúdo são formas."[78]; Cattanei (2005), por outro lado, defende que não é possível afirmar categoricamente que os matemáticos contemplam Formas platônicas (explicado adiante). Segundo Schäfer (2012), dentro da tradição da matemática pitagórico-platônica, não há como afirmar, no que se refere à natureza dos números e à aritmética, por exemplo, o preciso *status* dos objetos matemáticos: "Se Platão, de fato, atribui aos objetos matemáticos uma posição intermediária [entre as Formas e os dados sensíveis] é algo controverso." (p. 214, interpolação nossa)

[78] "There is no doubt that its contents are forms" (REEVE, 2006, p. 54).

As questões que dizem respeito à matemática são citadas por Platão na abordagem de diversos temas. Compreender a concepção de matemática de Platão passa, pois, por identificar, nesses temas, as noções e argumentos que ele utiliza em sua abordagem. "A concepção de matemática de Platão inclui vários temas. Estes são logicamente distintos", mas "Platão os reúne numa explicação harmoniosa" (MORAVCSIK, 2006, p. 276). Apesar das divergências mencionadas acima, é possível elencar traços essenciais das entidades matemáticas e das atividades dos matemáticos, que caracterizam a concepção de matemática de Platão.

> **(T1):** Entidades platônicas são preexistentes. [...]
> **(T2):** Os teoremas matemáticos são descobertas de um certo tipo, não invenções ou construções. [...]
> **(T3):** As entidades matemáticas precisam ser abstratas [...].
> **(T4):** Atividades matemáticas, como calcular e provar, são mais bem estudadas sob idealização. [...]
> **(T5):** A matemática trata dos elementos genuínos, ou mais fundamentais, da realidade. [...]
> **(T6):** Entidades matemáticas, juntamente com outras Formas, estão no nível mais elevado das hierarquias explicativas ontológicas que constituem a realidade (MORAVCSIK, 2006, p. 276-277).

No platonismo, os objetos apresentam três características essenciais: existência, abstratividade, independência.[79] (LINNEBO, 2018). Consequentemente, no platonismo matemático, as entidades matemáticas são concebidas, também, segundo essas três características essenciais, intrinsecamente associadas. Na matemática, "a existência pode ser formalizada como $\exists Mx$, em que 'Mx' abrevia o predicado 'x é um objeto matemático', que é verdadeiro para todos os objetos estudados pela matemática pura, tais como números, conjuntos e funções. A abstratividade estabelece que todo objeto matemático é abstrato, sendo que um objeto é dito abstrato apenas no caso de ser não espaciotemporal [...]" (LINNEBO, 2018, tradução nossa). Por fim, a independência estabelece que "os objetos matemáticos são independentes de agentes inteligentes, bem como da linguagem, pensamento e prática destes" (LINNEBO, 2018, tradução nossa). Em linhas gerais, os itens elencados, de T1 a T6, assentam-se sobre essas características essenciais.

A tese T1 conjuga existência e independência, ou seja, os objetos matemáticos existem mesmo que não haja um ser cognoscente que os conceba racionalmente, e, mesmo que o faça, esses objetos independerão do modo como são pensados ou expressados através de qualquer linguagem. "De acordo com essa concepção, a matemática seria verdadeira e estaria relacionada ao funcionamento das entidades no espaço e no tempo mesmo que não houvesse nenhum sujeito cognoscente" (MORAVCSIK, 2006, p. 276).

Em razão da preexistência das entidades platônicas, tem-se que os teoremas matemáticos não podem produzir novas entidades ou provas matemáticas; são apenas expressão dessas

[79] De modo recíproco, denomina-se "platonismo" à visão filosófica que concebe os objetos da realidade segundo tais característica essenciais

entidades preexistentes. Por isso, os teoremas e provas consistem em descobertas, e não invenções (tese T2). Entretanto, entenda-se que “tais descobertas não são como avistar subitamente um pico de montanha ou uma ilha remota que ninguém jamais percebeu antes. [...] Não é como um ato comum de travar um conhecimento direto” (MORAVCSIK, 2006, p. 276). Coerentemente com o que se descreveu, até aqui, sobre a contemplação do “olho da alma” da essência dos objetos do mundo inteligível, que leva ao conhecimento pleno destes, essa descoberta “é mais como o discernimento da natureza de uma substância que não é diretamente acessível à experiência dos sentidos, mas sobre a qual ganhamos muitas informações, com respeito tanto à sua relação com o empírico como à sua relação com outras coisas reais que estão além da superfície da observação” (MORAVCSIK, 2006, p. 276). Logo, nesse processo de descoberta, “[...] tomamos consciência de objetos que antes não sabíamos existir; por outro lado, tal descoberta só é possível depois de muito treinamento” (MORAVCSIK, 2006, p. 276).

Nesses termos, os teoremas referem-se, obrigatoriamente, a entidades matemáticas abstratas (tese T3), uma vez que os objetos dos teoremas dizem respeito a realidades não sensíveis, não espaciotemporais. “Teoremas geométricos referem-se a linhas sem largura e a pontos sem extensão; teoremas matemáticos referem-se a entidades como 2 ou 15, e não se podem encontrar tais entidades no espaço e no tempo” (MORAVCSIK, 2006, p. 276).

Em razão da natureza abstrata das entidades matemáticas, não mutáveis, que levam ao pensamento dialético (e, por conseguinte, ao conhecimento do ser, isto é, daquilo que é), apartado do erro e da opinião que não resiste à persuasão, recomenda-se o estudo da matemática sob idealização (tese T4). “O argumento para estudar atividades matemáticas dessa maneira apoia-se no fato de as atividades efetivas serem infestadas de erros e de limitações humanas como as da memória, que são irrelevantes para a caracterização dos aspectos importantes da atividade” (MORAVCSIK, 2006, p. 277).

Finalmente, os conteúdos das teses T5 e T6 são discutidos adiante, na exposição que se faz de algumas considerações de Schäfer sobre a matemática platônica.

Mas, afinal, como interroga Cattanei (2005, p. 248, interpolação nossa), “os objetos que as ciências matemáticas ‘exigem’ são então Ideias [*eidos*]?” A própria autora dá a resposta. Quando refere-se às entidades abstratas que constituem a essência desses objetos, está se referindo à Forma (*eidos*).

> Claramente, fundamento único de todas as permanentes igualdades ou relações inteligíveis estabelecidas pelos matemáticos é a Ideia [*eidos*], por exemplo a Ideia de igual, ou a de comensurável. E o fundamento único, por exemplo, de todos os dois, o de todos os triângulos, é a Ideia de dois, a dualidade, e a de triângulo, a triangularidade (CATTANEI, 2005, p. 248-249, interpolação nossa).

Diante do exposto, tem-se a resposta à pergunta P1: as entidades matemáticas, assim compreendidas, são Formas (*eidos*) platônicas. Daí decorre, a resposta à pergunta P3; tal como afirmado por Bell (1999), são as Formas que conferem veracidade às definições e às proposições matemáticas. Nas palavras desse autor:

> Platão incluiu entidades matemáticas — números e objetos de geometria pura como pontos, linhas e círculos — entre os objetos eternos bem definidos e independentes que ele chamou de *Formas*. É o fato de as declarações matemáticas se referirem a essas Formas definidas que permite que tais declarações sejam verdadeiras (ou falsas). As afirmações matemáticas sobre o mundo empírico são verdadeiras na medida em que os objetos sensíveis se assemelham ou manifestam as Formas correspondentes. Platão considerou a matemática não como uma idealização de aspectos do mundo empírico, mas *como uma descrição direta da realidade*, ou seja, o mundo das Formas como apreendido pela razão[80] (BELL, 1999, p. 192, tradução nossa, itálicos do autor).

Resta, agora, buscar uma resposta à pergunta P2. Esta se revela a mais controversa e difícil de ser obtida precisamente com base exclusivamente nos escritos de Platão. Essa dificuldade surge ao se questionar se os objetos matemáticos com os quais os matemáticos desenvolvem seu pensamento, teoremas e provas, são Formas por eles contempladas? Cattanei (2005, p. 249) então questiona:

> Os matemáticos contemplam o igual em si ou o comensurável em si, ou será que estabelecem com base neles múltiplas relações, mesmo que sejam intelectuais e permanentes? E os múltiplos "um em si" que compõem o número matemático, ou os múltiplos ângulos e triângulos que o geômetra "contempla" em suas demonstrações, são a Ideia de um e de ângulo ou de triângulo? Será que as matemáticas mesmo se exigem como objeto uma realidade inteligível permanente, porque são saber intelectual, "exigem" um objeto inteligível permanente diverso das Ideias, embora dependente delas, porque são o tipo de saber intelectual que são?

Essa suspeita se deve à posição intermediária que as ciências matemáticas ocupam no símile da Linha. Por um lado, o pensamento científico (a *dianóia* matemática; ver Quadro 1 e Quadro 4), que pertence ao mundo inteligível, difere dos pensamentos perceptual (*eukasía*) e popular (*pístis*), e, por outro lado, encontra-se abaixo do pensamento dialético (*noésis*), na contemplação das Formas (*eidos*). Desse modo, "é lícito considerar o conhecimento matemático uma espécie de 'faculdade cognoscitiva', de tipo intelectual, mas [...] com um objeto inteligível diferente das Ideias?" (CATTANEI, 2005, p. 250). Das falas do personagem Sócrates que

[80] "Plato included mathematical entities—numbers and the objects of pure geometry such as points, lines, and circles—among the well-defined, independently existing eternal objects he called *Forms*. It is the fact that mathematical statements refer to these definite Forms that enables such statements to be true (or false). Mathematical statements about the empirical world are true to the extent that sensible objects resemble or manifest the corresponding Forms. Plato considered mathematics not as an idealization of aspects of the empirical world, but rather *as a direct description of reality*, that is, the world of Forms as apprehended by reason" (BELL, 1999, p. 192).

abordam as ciências matemáticas, em *A República*, extrai-se apenas que as realidades relativas à matemática são inteligíveis, "indagadas com base em 'hipóteses' não-fundadas", mas "das quais se parte para chegar a um princípio não-hipotético, a um fundamento último" (CATTANEI, 2005, p. 253). Para além de *A República*, "Platão, em todos os seus escritos, deixa de dizer explicitamente se existe ou não uma realidade inteligível 'intermediária', que seja objeto da *dianoia* matemática" (CATTANEI, 2005, p. 255).

Para obter essa resposta, filósofos e historiadores da matemática apoiam-se, então, nos comentários de Aristóteles sobre a filosofia matemática de Platão.

> Aristóteles toca, geralmente com espírito crítico, em muitas das opiniões sobre matemática que se encontram nos diálogos e, portanto, é frequentemente possível basear a interpretação da visão de Platão em um estudo comparativo das próprias declarações de Platão e do relato crítico de Aristóteles sobre o que este considera ser a posição de Platão[81] (WEDBERG, 1955, p. 10, tradução nossa).

Este autor formula uma pergunta similar àquela proposta por Cattanei: "As Ideias matemáticas, na opinião de Platão, esgotam o domínio estudado pela matemática pura, ou este domínio contém outras entidades eternas além das Ideias?"[82] (WEDBERG, 1955, p. 11, tradução nossa). A diferença entre as duas perguntas parece um tanto sutil, mas crucial. Cattanei indaga sobre uma realidade ontológica da matemática distinta das Formas (*eidos*), mas não, aparentemente, coexistente a estas no pensamento matemático (considerando a suspeição da autora sobre a efetiva "contemplação" das Formas (*eidos*) por parte dos matemáticos); Wedberg, por outro lado, cogita a possibilidade dessa coexistência, ao interrogar se, "além das Ideias", há outras "entidades eternas" no domínio da matemática pura. Este autor afirma que esta é a posição de Aristóteles, encontrada na *Metafísica*.

> Se o relato de Aristóteles estiver correto, Platão postulou dois tipos de números, "Os Números Ideais" que são Ideias e os "Números Matemáticos", que não são Ideias, mas que, no entanto, compartilham o modo de existência característico das Ideias. Da mesma forma, diz Aristóteles, Platão apresentou dois tipos de entidades geométricas eternas, as Ideias geométricas e certas figuras geométricas ideais, que não são Ideias, mas, como as Ideias, pertencem ao reino dos seres eternos. Os Números Matemáticos e as figuras geométricas ideais são reunidos por Aristóteles sob o nome de "Intermediários", ou "Objetos da Matemática" (*mathematika*). As características essenciais dos Intermediários, na exposição de Aristóteles, são que eles são instâncias perfeitas ideais das Ideias

[81] "Aristotle touches, usually in a critical spirit, upon of many of the views on mathematics wich are found in the dialogues, and, hence, its frequently possible to base the interpretation of Platro's view on a comparative study of Plato's own statements and Aristotle's critical account of what he considers to be Plato's position" (WEDBERG, 1955, p. 10).

[82] "Do the mathematical Ideas, in Plato's opinion, exhaust the domain studied by pure mathematics, or does this domain contain other eternal entities besides the Ideas?" (WEDBERG, 1955, p. 11).

> Matemáticas, e que eles são as únicas instâncias perfeitas, sendo que nenhuma instância perfeita de tais Ideias é encontrada no mundo sensível[83] (WEDBERG, 1955, p. 11, tradução nossa).

Neste ponto, cabe ressaltar que existem muitas controvérsias em torno da interpretação aristotélica da ontologia da matemática platônica. A começar pela terminologia que Aristóteles utiliza, da qual não há nenhum registro nos diálogos de Platão; principalmente no que se refere ao termo "intermediários" e à teoria a este associada. Para Cattanei (2005, p. 253), "Aristóteles leva 'socorro' ao discurso de Platão: um socorro, porém, que foi considerado, sobretudo, um mal-entendido, ou uma livre — livre demais — interpretação do discurso de Platão." Wedberg (1955), em seus estudos sobre os comentários de Aristóteles a respeito da matemática em Platão, também assinala a existência de inconsistências entre as proposições destes dois filósofos, mas salienta que, em uma boa parte delas, essas proposições coincidem, e, em outra grande parte, observam-se comentários de Aristóteles muito plausíveis sobre a teoria platônica. Diante desse quadro, Wedberg (1955) entende que, apesar das controvérsias, o trabalho de Aristóteles deve ser, obrigatoriamente, considerado para o estudo da filosofia platônica da matemática, a qual é obscura, confusa e paradoxal, bem como permeada de lacunas nos escritos de Platão. Para Wedberg (1955), "os níveis de obscuridade e confusão associados a Platão devem-se à própria maneira de Platão expressar suas crenças" (p. 19, tradução nossa). Isto posto, poder-se-ia considerar, então, uma ontologia da matemática de Platão, segundo Aristóteles, estruturada hierarquicamente, como esquematizado no Quadro 6.

Como é possível constatar no Quadro 6, nos domínios da matemática pura encontram-se tanto as Formas (*eidos*) quanto o que é denominado por "Objetos matemáticos". De acordo com esta concepção ontológica da matemática, uma resposta à pergunta P2 é: quando lida com números e formas geométricas, o matemático tem em mente as Formas (*eidos*) e os Objetos Matemáticos.

Mas no que consistem, precisamente, esses "Objetos Matemáticos" (Números Matemáticos e figuras geométricas ideais)? Que papel desempenham no pensamento e nas atividades matemáticas? Schäfer (2012) esclarece o lugar que tais objetos ocupam, ontologicamente falando, e seu papel operacional na matemática, em sua explanação sobre os "Números Matemáticos".

[83] "If Aristotle's account is correct, Plato posited two kinds of number, 'The Ideal Numbers' which are Ideas and the 'Mathematical Numbers' which are not Ideas but which nevertheless share the mode of existence caracteristic of Ideas. Similarly, Aristotle says, Plato countenanced two types of eternal geometric entities, the geometrical Ideas and certain ideal geometrical figures which are not Ideas but like the Ideas belong to the realm of eternal being. The Mathematical Numbers and the ideal geometrical figures are by Aristotle brought together under the name of 'Intermediates', or 'Objects of Mathematics' (*mathematika*). The essential characteristics of the Intermediates, in Aristotle's exposition, are that they are ideal perfect instances of the Mathematical Ideas and that they are the only perfect instances, no perfect instances of such Ideas being found in the sensible world" (WEDBERG, 1955, p. 11).

Quadro 6 – Ontologia da Matemática de Platão, na interpretação de Aristóteles

Domínio da dialética e da matemática pura	Formas Matemáticas	Formas Aritméticas (*) Formas Geométricas
Domínio específico da matemática pura	Objetos matemáticos	Números Matemáticos Figuras geométricas ideais
Fora do domínio específico da matemática	Particulares sensíveis	

Fonte: Wedberg (1955, p. 11-12, tradução e adaptação nossas).

Nota: (*) Na *Metafísica* de Aristóteles, em lugar de “Formas Aritméticas”, tem-se “Números Ideais”. Essa substituição foi feita de modo a ajustar o quadro à estrutura aceita pela maioria dos acadêmicos.

> O verdadeiro objeto da matemática como aritmética é o número matemático abstrato, chamado de *arithmos matêmatikos*, desde Aristóteles. Números matemáticos podem ser reunidos em novas unidades ou ser separados uns dos outros por meio de operações matemáticas como adição, subtração, multiplicação e divisão. Sem os exemplares de cada *arithmos matêmatikos*, exemplares que são tantos quanto quisermos, uma operação em que um número aparece várias vezes (por exemplo, $3+3$) seria impossível (SCHÄFER, 2012, p. 215).

A distinção quanto à natureza desses Objetos Matemáticos em relação às Formas (*eidos*) Matemáticas, dá-se, aqui, em termos de operabilidade e representação. A Forma (*eidos*) da tríade é única, preexistente, abstrata e independente de qualquer agente cognoscente, é inoperável, e não possui/nos apresenta uma “imagem”, ao passo que o Número Matemático pode ser expresso, escrito, operado.

> Segundo Platão, há Ideias de números, como as há das demais coisas. Essas ideias dos números individuais, por exemplo, a dualidade, a tríade etc., são singulares, isto é, elas existem (como as ideias ou universais em geral) cada uma apenas uma vez, enquanto muitas coisas individuais participam delas (SCHÄFER, 2012, p. 215).

Essa diferenciação já era marcada no início da Academia, em que, ao lado da teoria do número matemático, desenvolveu-se a doutrina do “número eidético ou ideal não combinável, isto é, inoperável, que Aristóteles chama de *arithmos eidêtikos* (*Metafísica*, 1090b)” (SCHÄFER, 2012, p. 215). Schäfer (2012, p. 215) conclui alertando que

> as ideias dos números [...] devem ser distinguidas dos números-ideia, entendidos nos estudos modernos como como aqueles números eidéticos que, como explica Aristóteles (*Metafísica*, 1081a), poderia corresponder às ideias individuais, de modo que todas as ideias — portanto, não só a dos números — deveriam ser vistas como numéricas.[84]

Entretanto, de acordo com Wedberg (1955), não há como afirmar, com base nas referências de Platão às realidades matemáticas encontradas em *A República*, que, indiscutivelmente, "a matemática, devidamente compreendida, é um estudo de Ideias", ou que o seu "o domínio específico [...] consiste em objetos matemáticos intermediários."[85] (p. 109, tradução nossa).

Como se pode verificar, esta questão é controversa entre os estudiosos, e as distintas interpretações a seu respeito têm implicações significativas para o modo como concebe-se o processo educacional segundo Platão, bem como as funções e objetos de estudo que são conferidos à matemática na ascese da alma.

2.2.2.3 Algumas considerações adicionais sobre abstração e geometria em Platão

Cabe ressaltar que, ao contrário da opinião de grande parte dos comentadores de Platão, há os que defendem que o processo de desenvolvimento do pensamento abstrato não diz respeito, obrigatoriamente, a princípios metafísicos. Dentre estes estudiosos, encontra-se Shorey (1968). Para este autor, há, na literatura especializada em Platão, uma interpretação equivocada sobre o caráter essencialmente metafísico da matemática e da dialética platônicas, que é amplamente difundida e aceita. Tal equívoco é apresentado na seguinte passagem:

> a ciência encarna e contempla as idéias em imagens sensoriais. Ela usa coisas "reais" (blocos geométricos ou diagramas) como cópias das idéias que estuda, assim como as próprias coisas "reais" são copiadas por imagens e reflexos em espelhos e água. A dialética, por outro lado, lida com as idéias puras não distorcidas por imagens sensoriais imperfeitas; e se suas suposições ou hipóteses são questionadas está sempre pronta para empurrar a investigação para além das hipóteses, para os primeiros princípios[86] (SHOREY, 1968, p. 233, tradução nossa).

Para Shorey (1968), o problema não está no fato de se desenvolverem interpretações sobre possíveis implicações metafísicas na teoria platônica, mas, sim, na falta de rigor e cautela

[84] "Embora Aristóteles vincule a suposição dos números-ideia a Platão [...], é controverso dizer se havia essa matematização geral das ideias em Platão [...] e se ou como ela corresponde às próprias intenções dele" (SCHÄFER, 2012, p. 215).

[85] "[...] mathematics, properly understood, is a study of Ideas [...] the specific domain of mathematics consists in intermediate mathematical objects" (WEDBERG, 1955, p. 109).

[86] "Science embodies and contemplates the ideas in sensuous images. It uses "real" things (geometrical blocks or diagrams) as copies of the ideas which it studies, just as "real" things themselves are copied by images and reflections in mirrors and water. Dialectic, on the other hand, deals with the pure ideas undistorted by imperfect sensuous imagery; and if its assumptions or hypotheses are questioned is always ready to push the inquiry back beyond hypothesis to first principles" (SHOREY, 1968, p. 233).

para fazê-las, muitas vezes guiadas pela ânsia de encontrá-las em meio às palavras de Platão. "É permitido desenvolver estas implicações metafísicas em uma exposição sistemática do que supomos ser a 'filosofia' de Platão. Mas devemos ser tão escrupulosos quanto o próprio Platão em ter o cuidado de distinguir a aplicação prática de seus princípios na educação, ética e política, da metafísica que ele sugere, mas nunca afirma"[87] (p. 233, tradução nossa) Shorey não está negando o fato de que existam diferenças entre pensar por meio de imagens sensoriais e pensar por meio de abstrações puras.

> O hábito científico de raciocinar a partir de suposições inquestionáveis difere da prontidão filosófica e da capacidade de estender indefinidamente a análise dos pressupostos, quer da ciência quer do senso comum. O valor prático da distinção permanece apesar de afirmarmos que todo pensamento depende, em última instância, de imagens sensoriais, e apesar de negarmos que a análise dialética possa chegar a um metafísico "absoluto". E seu significado para o propósito e o tempo de Platão seria pouco prejudicado se decidíssemos que na vida intelectual de hoje o que Platão chama de o tipo inferior de pensamento é o mais valioso[88] (SHOREY, 1968, p. 233, tradução nossa).

De acordo com Shorey (1968), a preocupação central de Platão é distinguir claramente esses tipos de pensamento "e afirmar que os governantes do estado ideal devem estar preparados para o que ele considera o tipo de pensamento superior por uma disciplina prolongada e severa no inferior." (p. 233, tradução nossa). Esse autor entende que, com base nos escritos de Platão, só se pode afirmar seguramente que "ele está insistindo na diferença entre mentes que podem e mentes que não podem raciocinar rapidamente, de forma clara, distinta e sutilmente, em termos abstratos e gerais, não apenas na terminologia técnica de uma determinada ciência, mas em todos os assuntos de interesse humano geral"[89] (p. 233, tradução nossa).

Entende-se que esse dissenso a respeito da relação entre metafísica, ontologia e epistemologia nos diálogos platônicos, é particularmente proveitoso a quem nelas se inspira para estabelecer critérios balizadores para a prática pedagógica. Parece que isto ganha mais importância, quando, ao se discutir a viabilidade da aplicação do modelo educacional de Platão (ou sua

[87] It is permissible to develop these metaphysical implications in a systematic exposition of what we suppose to be Plato's "philosophy." But we should be as scrupulous as Plato himself is careful to distinguish the practical application of his principles in education, ethics, and politics from the metaphysics which he suggests but never affirms.

[88] "The scientific habit of reasoning from unquestioned assumptions does differ from the philosophical readiness and ability to extend indefinitely the analysis of the presuppositions either of science or of common sense. The practical value of the distinction remains even though we affirm that all thought is ultimately dependent on sensuous imagery, and even though we deny that dialectical analysis can ever reach a metaphysical "absolute" or avviroOtTov. And its significance for Plato's purpose and Plato's time would be little impaired if we should decide that in the intellectual life of today what Plato calls the lower type of thought is the more valuable" (SHOREY, 1968, p. 233).

[89] "He is insisting on the difference between minds that can and minds that cannot reason swiftly, clearly, distinctly, subtly, in abstract and general terms, not merely in the technical terminology of a particular science but on all matters of general human concern" (SHOREY, 1968, p. 233).

adaptação) na atualidade, muitos estudiosos consideram o pensamento platônico extemporâneo para o tratamento de questões educacionais, em razão, principalmente, de sua carga metafísica.

Para finalizar este capítulo, é importante ressaltar a diferença existente entre o modo como Platão concebe a abstração e o modo como seu mais famoso discípulo, Aristóteles, o faz. Por duas razões: (1) como explicado na seção anterior, muito do que hoje entende-se como a “filosofia matemática” de Platão são comentários de Aristóteles sobre os escritos de seu mestre, e não o que efetivamente encontra-se nos diálogos platônicos; (2) é possível que, no pensamento científico de nossos dias, observe-se tanto a concepção platônica de abstração quanto a aristotélica (a clareza sobre esta distinção é fundamental para estudos como o nosso).

Diferentemente da interpretação de Wedberg (1955) (com a qual encerrou-se a subseção anterior), Bell (1999, p. 192), como já citado, afirma categoricamente que “Platão considerou a matemática não como uma idealização de aspectos do mundo empírico, mas *como uma descrição direta da realidade*, ou seja, o mundo das Formas como apreendido pela razão.” Por outro lado, Aristóteles

> [...] rejeitou a noção de que as Formas são separadas dos objetos empíricos, e manteve, em seu lugar, que *as Formas constituem partes de objetos*. As formas são capturadas pela mente através de um processo de *abstração* de objetos sensíveis, mas não atingem assim uma existência autônoma separada destes últimos. A matemática surge deste processo de abstração; seu objeto é o corpo de idealizações geradas por este processo de abstração; e o rigor matemático surge diretamente da simplicidade das propriedades destas idealizações. Aristóteles rejeitou o conceito de *infinito atual* (ou completo), admitindo apenas o *infinito potencial*, a saber, o de uma totalidade que, embora finita em qualquer em determinado tempo, cresce além de qualquer limite pré-atribuído, por exemplo, a sequência de números naturais ou o processo de divisão contínua de uma linha[90] (BELL, 1999, p. 192, tradução nossa, itálicos do autor).

[90] “[...] rejected the notion of Forms being separate from empirical objects, and maintained instead that *the Forms constitute parts of objects*. Forms are grasped by the mind through a process of *abstraction* from sensible objects, but they do not thereby attain an autonomous existence detached from these latter. Mathematics arises from this process of abstraction; its subject matter is the body of idealizations engendered by this process; and mathematical rigour arises directly from the simplicity of the properties of these idealizations. Aristotle rejected the concept of *actual* (or completed) *infinity*, admitting only *potential infinity*, to wit, that of a totality which, while finite at any given time, grows beyond any preassigned bound, e.g. the sequence of natural numbers or the process of continually dividing a line” (BELL, 1999, p. 192).

CAPÍTULO

3

UM CURRÍCULO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA COM FOCO NA ABSTRAÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se o currículo de matemática proposto por Carson e Rowlands (2007), que foca no ensino de abstração, e no qual a intervenção didática que propôe-se no próximo capítulo se baseia. Tal currículo é constituído de 17 módulos, cuja ordem reflete, em grande medida, a evolução histórica da matemática na Grécia clássica. Na proposta desses autores, a narrativa sobre episódios históricos específicos é empregada como uma poderosa ferramenta pedagógica para despertar a consciência dos alunos a respeito do caráter abstrato dos objetos, dos procedimentos e do pensamento matemáticos. Na primeira seção deste capítulo, descreve-se as etapas constitutivas desse currículo, e, na segunda, a função pedagógica da narrativa.

3.1 Desenvolvendo abstração

Carson e Rowlands (2007) propõem, no artigo intitulado *Teaching the Conceptual Revolutions in Geometry* (*Ensinando as Revoluções Conceituais em Geometria*), um currículo para ensino de matemática, composto de uma sequência temática cujo objetivo principal é fazer com que o estudante reflita sobre o papel central que a abstração desempenha na elaboração de raciocínios e na construção do conhecimento matemático. E, com isso, intenciona-se que o aluno adquira consciência do avanço cognitivo que obtém por meio do processo educacional no qual está inserido.

Em sua explanação, os autores partem do argumento de que "o registro histórico em vários domínios da aprendizagem revela um padrão de crescimento gradual, eventos de descoberta, inovação ou epifania em que todo o assunto se reconfigura no entendimento"[1] (CARSON;

[1] "The historical record in various domains of learning reveals a pattern of step-wise growth, events of discovery, innovation, or epiphany in which the entire subject matter becomes reconfigured in understanding" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 922).

ROWLANDS, 2007, p. 922, tradução nossa). Dessa forma, entendem que a história de um determinado assunto que se deseja ensinar pode contribuir com a aprendizagem do próprio assunto, uma vez que se entende que o aluno necessita "[...] alcançar para si mesmo essas novas formas de compreensão [...]" (p. 922) que foram delineadas e registradas historicamente.

No processo histórico de evolução gradual e de transformações do entendimento de uma determinada área ou assunto, Carson e Rowlands (2007, p. 922, tradução nossa) apontam que na antiguidade "[...] os gregos transformaram a geometria de um ofício essencialmente concreto e empírico em uma ciência essencialmente cognitiva e abstrata da razão."[2] E isso não é distinto do que ocorre em nossos dias: no processo de aprendizagem, "cada aluno é encarregado de fazer essa transformação"[3] (p. 922), isto é, de realizar a passagem de uma visão meramente empírica da geometria para o que se constitui essencialmente abstrato. Porém, como os professores atuam ou contribuem para essa passagem, de modo que o aluno caminhe em direção a essa abstração da geometria, seja quanto à essência desta, seja quanto aos raciocínios e procedimentos intrinsecamente associados a ela?

Carson e Rowlands (2007, p. 922, tradução nossa) afirmam que essas transformações podem ser observadas pelo processo histórico, e por meio dele é possível "[...] compreender as inovações ou descobertas históricas que transformaram um sujeito, tais como a geometria"[4] (p. 922). Portanto, a própria perspectiva histórica é capaz de ajudar a compreender tanto as descobertas e inovações quanto as motivações destas. Note-se que não se trata de utilizar a história da matemática como um substituto da própria matemática. Nesse sentido, "qualquer uso da perspectiva histórica deve ter propósitos claros e bem definidos"[5] (p. 922).

Em um primeiro nível, a utilização da perspectiva histórica pode contribuir significativamente na fase de construção do currículo para o ensino de matemática, na medida em que, através dela, pode-se ter *insights* sobre como "[...] essas novas e poderosas tecnologias do pensamento e da práxis foram introduzidas"[6] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 923, tradução nossa). Além de identificar as fontes, as razões e os momentos em que tais mudanças de pensamento foram introduzidas, a perspectiva histórica ajuda a compreender a evolução da consciência humana que essas transformações provocaram: "a evolução de qualquer domínio do conhecimento acontece através de uma série de numerosos pequenos desenvolvimentos e das transformações dramáticas

[2] "[...] the Greeks transformed geometry from an essentially concrete and empirical craft into an essentially cognitive and abstract science of reason" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 922).
[3] "Every learner is tasked to make that transformation" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 922).
[4] "[...] to grasp those historical innovations or discoveries that transformed a subject, such as geometry" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 922).
[5] "Any use of historical perspective must have clear and well-defined purposes" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 922).
[6] "[...] those powerful new technologies of thought and praxis were introduced" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 923).

ocasionais da consciência humana, nas quais o próprio sujeito é visto de forma diferente"[7] (p. 923, tradução nossa).

Baseados nessas premissas, Carson e Rowlands (2007) propõem um currículo "[...] no qual a evolução da complexidade, abstração e formalismo da geometria são caracterizados através de uma série de dezessete eventos de desenvolvimento fundamentais, cada um dos quais serviria como organizador conceitual para sua respectiva unidade de estudo"[8] (p. 923). Esses dezessete eventos devem ajudar a deixar claro qual é "transformação no pensamento" que se deseja desenvolver. Para exemplificar, "[...] os estudantes devem aprender a pensar em abstração, redefinindo o que eles entendem pelos termos ponto, linha, ângulo, triângulo, círculo, e assim por diante"[9] (p. 923). Carson e Rowlands (2007) enfatizam que, em outros currículos, apenas é esperado que o aluno obtenha a compreensão desses conceitos por si mesmo não tendo propostas de atividades que o levem a refletir sobre o quão abstratos esses conceitos são. Com isso, espera-se, de modo geral, que a capacidade de abstração seja alcançada e desenvolvida no aluno, mas sem que ela que seja explicitamente considerada como uma meta a ser alcançada por meio de atividades especificamente programadas para sua consecução. Assim, nesses currículos, apesar de muitas vezes ser apontada como importante e desejável, a capacidade de abstração surge como uma espécie de subproduto das atividades pedagógicas, e não como fim. Carson e Rowlands (2007), ao contrário, propõem a criação de exercícios "[...] que explicitem o significado da abstração e que ajudem a entender como essa capacidade cognitiva deve ser adquirida, como sua aquisição transformou historicamente a cultura intelectual humana e o papel que ela veio a desempenhar na geometria formal"[10] (p. 923).

Em meio aos 17 módulos do currículo proposto por Carson e Rowlands (2007), encontram-se práticas matemáticas que já eram utilizadas pelos gregos na Antiguidade e que foram empregadas pelos oito séculos seguintes. Quanto a isto, observa-se que "os gregos deixaram um registro bastante útil dos eventos primordiais de desenvolvimento que conduziram a geometria à sua forma euclidiana, e os novos territórios da mente que se abriram para eles com cada uma dessas novas descobertas e inovações"[11] (p. 924). Os autores partem do pressuposto de que "[...] esses eventos podem ser usados para introduzir o tema da geometria, bem como infundir seus

[7] "The evolution of any domain of knowledge comes about through a series of numerous small developments and the occasional dramatic transformations of human consciousness in which the subject matter itself is seen differently" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 923).

[8] "[...] in which the evolving complexity, abstraction, and formalism of geometry are characterized through a series of seventeen primary developmental events, each of which would serve as the conceptual organizer for its respective unit of study" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 923).

[9] "[...] students must learn to think in abstraction, redefining what they understand by the terms point, line, angle, triangle, circle, and so forth" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 923).

[10] "[...] that makes the meaning of abstraction explicit and that helps them understand how this cognitive ability is to be acquired, how its acquisition historically transformed human intellectual culture, and the role it came to play in formal geometry" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 923).

[11] "The Greeks left behind a fairly serviceable record of the primary developmental events that transformed geometry into its Euclidean form, and the new territories of mind that opened up for them with each of these new discoveries and innovations" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 924).

mais difíceis desafios, com interesse suficiente para ajudar os alunos a escalar o gradiente"[12] (p. 924). Nestes termos, a narrativa histórica a partir dos registros deixados pelos gregos torna-se, ao longo dos 17 módulos, uma ferramenta didática.

Os 17 módulos propostos por Carson e Rowlands (2007) organizam-se, *grosso modo*, segundo o desenvolvimento histórico do pensamento matemático, os quais são abordados individualmente nas próximas seções, a saber: (1) introdução dos símbolos matemáticos; (2) medição da terra; (3) curiosidades matemáticas; (4) antecipação de provas; (5) seis níveis de abstração; (6) linhas, raios, segmentos, ângulos e triângulos; (7) compasso: distância e círculo; (8) construções; (9) o formalismo; (10) o conceito pitagórico de número; (11) tempo, espaço e tonalidade; (12) encadeamento de provas; (13) abstração e racionalidade em matemática e noutros domínios; (14) figuras tridimensionais e secções cônicas; (15) o conceito de infinito; (16) interpretando as ações físicas matematicamente e vice-versa; (17) relação entre conceitos algébricos e geométricos.

3.1.1 Introdução dos símbolos matemáticos

O primeiro passo na proposta do currículo é trabalhar a simbologia matemática. De partida, considera-se o fato de que "a matemática começa como atividade empírica, estética e intuitiva"[13] (p. 930). Assim, é na observação que algumas ideias matemáticas vão se formando, como é o caso da noção de número, que "[...] começa com instâncias isoladas de reconhecimento, por exemplo, de três pássaros, três crianças, três pedras, e, abstraindo de tais coincidências, emerge o conceito de três"[14] (p. 930). O aluno, observando tais coincidências, nota que os conjuntos de pássaros, crianças e pedras possuem a mesma quantidade, uma vez que, associando os conjuntos, percebe que existe uma relação biunívoca entre eles, e, que, por conseguinte, possuem a mesma quantidade de elementos. E esta quantidade — que nesse exemplo se chama "três" e está representada abstratamente no pensamento do estudante — precisa de um símbolo para representá-la, expressá-la visualmente, e a ela poder referir-se. A necessidade do símbolo se deve ao fato de "o conceito ser efêmero, até que seja fixado num artefato tangível que o represente, ou seja, o símbolo"[15] (p. 930). Assim sendo, o símbolo possui uma dupla função: "[...] servir como substituto do conceito no pensamento e na comunicação, e de dar ao conceito uma certa estabilidade e permanência"[16] (p. 930).

---

[12] "[...] those events may be used to introduce the subject of geometry and to infuse its most difficult challenges with interest sufficient to help learners scale the gradiente" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 924).

[13] "Mathematics begins as empirical, aesthetic, and intuitive activity" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 930).

[14] "The sense of number, similarly, begins with isolated instances of recognizing, for example, three birds, three children, three stones, and abstracting from such coincidences the concept of three" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 930).

[15] "The concept is ephemeral until it is secured to a tangible artifact that represents it, namely the symbol" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 930).

[16] "[...] serves as proxy for the concept in thought and in communication, and gives the concept a certain stability and permanence" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 930).

3.1.2 Medição da terra

Na antiguidade, o uso da geometria ocorria inicialmente de forma empírica, tendo em vista o desenvolvimento da sociedade, principalmente no que se referia à agricultura. Os egípcios, por exemplo, amadureceram seus métodos matemáticos em decorrência da inundação anual do rio Nilo: "tornou-se necessário aperfeiçoá-los na prática e depois codificar os conhecimentos matemáticos a eles associados"[17] (p. 931). Essa necessidade fez com que surgissem e se desenvolvessem instrumentos e estratégias matemáticas auxiliares, tais como "[...] cordas, com nós, para marcar comprimentos, o triângulo 3-4-5 para construir ângulos retos, o uso de mapas e registos escritos"[18] (p. 931-932) e procedimentos de içamento de cargas. Tendo isto em mente, poder-se-ia assumir que

> um curso introdutório de geometria poderia começar com o estiramento de cordas reais em meio a estacas espetadas em uma parte do terreno da escola, uma demonstração concreta de várias curiosidades matemáticas que surgem em associação com a localização, comprimento, ângulo, superfície plana, círculo, triângulo, e assim por diante[19] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 932, tradução nossa).

Com isso, deseja-se que o aluno tenha uma aproximação inicial ao conteúdo da geometria de uma forma mais empírica e concreta, que permitirá abordagem dos aspectos mais abstratos nas próximas etapas do currículo.

3.1.3 Curiosidades matemáticas

Depois de abordar a utilização prática da geometria pelos egípcios, por meio de atividades de medição, expõem-se relatos históricos que ressaltam como o compartilhamento de conhecimentos matemáticos entre os gregos fez com que estes "[...] começassem a descobrir curiosidades matemáticas, úteis e não úteis, que despertaram interesse e geraram trocas de ideias teóricas"[20] (p. 932). Algumas dessas ideias podem ser consideradas evidentes, tais como algumas das proposições de Tales, "por exemplo, que um círculo é bissectado pelo seu diâmetro"[21] (p. 932). O propósito disto consiste em esclarecer que "uma coisa é alcançar uma apreensão empírica, intuitiva ou estética da simetria matemática ou lógica; outra coisa é começar o processo

[17] "[...] made it necessary to perfect it in practice and then codify the associated mathematical knowledge" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 931).
[18] "Knotted ropes to mark of lengths, the 3-4-5 triangle to construct right angles, the use of written maps and records" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 931-932).
[19] "An introductory course in geometry could begin with the stretching of actual ropes amid stakes pounded into a portion of the school grounds, a concrete demonstration of various mathematical curiosities that arise in association with location, length, angle, plane surface, circle, triangle, and so forth" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 932).
[20] "[...] began to discover mathematical curiosities, useful and otherwise, that excited interest and spawned a theoretical conversation" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 932).
[21] "e.g. that a circle is bisected by its diameter" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 932).

de análise, dissecção e definição que se seguiu"[22] (p. 932). Por mais que se tenha a convicção de que algo é verdade, isso não basta por si só; é preciso prová-lo. Algumas perguntas que, provavelmente, instigaram matematicamente Tales, espera-se que também surjam quando os alunos se depararem com essas curiosidades. Ele, talvez, tenha se interrogado: "Mesmo sabendo que isso é verdade, como eu poderia provar isso? Que tipo de demonstração é possível?"[23] (p. 932). Nessa etapa, os alunos poderão experimentar uma "sensação de maravilhamento" (p. 932) pelas descobertas, e serem instigados a buscar suas respectivas provas. Ressalte-se que, aqui, o "[...] objetivo é aprender a como pensar, viabilizado pelo contato direto com a estrutura lógica desses padrões e relações geométricas visíveis"[24] (p. 933). Em resumo, busca-se passar de uma descoberta intuitiva e empírica a uma descoberta formal e demonstrável.

3.1.4 Antecipação de provas

Algumas proposições, consideradas intuitivamente óbvias, às vezes não suscitam imediatamente a necessidade de provas. "Por exemplo, quando duas retas se cruzam, os ângulos opostos que elas formam são iguais. Esta proposição dificilmente requer prova, pois é intuitivamente óbvia, mas é precisamente aqui que Tales começa a levar a conversa para uma direção completamente diferente"[25] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 933, tradução nossa). Não há consenso entre os historiadores da matemática se Tales teria ou não apresentado uma prova para essa proposição, cuja demonstração, aliás, consta dos *Elementos* de Euclides (CARSON; ROWLANDS, 2007). Contudo, o fato é que Tales apresentou provas para teoremas: "a mais elegante das propostas atribuídas a Tales aparece em Euclides como a Proposta III,31: 'O ângulo subtendido pelo diâmetro de um círculo em qualquer ponto da circunferência é um ângulo reto'"[26] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934, tradução nossa). Portanto, Tales foi um dos primeiros a apresentar as ideias geométricas formalmente, expondo toda a lógica que as envolve (CARSON; ROWLANDS, 2007). Poder-se-ia, então, indagar: "Mesmo sabendo que algo é verdadeiro, o que significa 'prová-lo'? Esta pergunta abre um espaço conceitual completamente diferente, e assim começa o primeiro passo no desenvolvimento de uma matemática formal

[22] "It is one thing to achieve an empirical, intuitive, or aesthetic apprehension of mathematical symmetry or logic; it is another thing altogether to begin the process of analysis, dissection, and definition that followed" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 932).

[23] "Even knowing this is true, how could I prove it? What kind of demonstration is possible?" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 932).

[24] "[...] goal is to learn how to think, as enabled in direct contact with the logical structure of these visible, geometrical patterns and relationships" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 933).

[25] "For example, When two straight lines intersect, opposite angles are equal. This proposition hardly requires proof, since it is intuitively obvious, but this is precisely where Thales begins to take the conversation in an entirely different direction" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 933).

[26] "The most elegant of the propositions attributed to Thales appears in Euclid as Proposition III,31: 'The angle subtended by the diameter of a circle at any point in the circumference is a right angle'" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934).

que se tornou a marca cultural da Grécia clássica”[27] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934, tradução nossa). Assim, provar uma proposição é o que sustenta a revolução conceitual na construção da matemática formal.

O objetivo deste módulo não é simplesmente o de provar teoremas, mas despertar a atenção do aluno para as provas, “[...] começando a focar na natureza da prova e no que significa descobrir formalmente e revelar a estrutura da lógica subjacente em uma proposição matemática. Esta mudança na conversa tem de ser enfatizada, a fim de fixar a atenção do aluno nela”[28] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934, tradução nossa). Nesse sentido, julga-se que

> entender a geometria formal como uma espécie de esporte mental exótico ajuda a esclarecer por que os gregos, que a desenvolveram voluntária e propositadamente, se agarraram a certas convenções aparentemente desnecessárias e, às vezes, inconvenientes, tais como o uso de régua e compasso e a exclusão de qualquer dispositivo para medir comprimento ou ângulo[29] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934, tradução nossa).

Carson e Rowlands (2007) propõem que as provas dos teoremas devem ser tratadas como desafios, de modo que os alunos sejam instigados a desenvolver estratégias que conduzam à demonstração desses teoremas. Por exemplo, apresentando aos alunos (reunidos em pequenos grupos) o teorema que afirma que duas retas concorrentes produzem ângulos opostos congruentes, espera-se que seja criada “[...] uma gama de demonstrações muito criativas, mas principalmente concretas. Recortar modelos; usar plástico transparente para copiar o diagrama e, depois, girá-lo sobre o original etc.”[30] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934, tradução nossa). Os autores acreditam que esses esforços se assemelham aos de Tales e outros que iniciaram o processo de provas na matemática. Depois, uma vez legitimados esses esforços dos estudantes, deve-se apresentar o raciocínio lógico e formal que são aceitos como provas (CARSON; ROWLANDS, 2007).

---

27 “Even knowing something is true, what does it mean to ‘prove’ it? This question opens up an entirely different conceptual space, and thus begins the first step in the development of a formal mathematics that became the cultural hallmark of classical Greece” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934).

28 “[...] we begin to focus on the nature of proof, and what it means to formally uncover and reveal the structure of the underlying logic in a mathematical proposition. This shift in the conversation has to be emphasized in order to hook the student’s attention into it” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934).

29 “Understanding formal geometry as a kind of exotic mental sport helps to clarify why the Greeks, who developed it voluntarily and purposefully, held themselves to certain seemingly unnecessary and at times inconvenient conventions, such as the use of straightedge and compass and the exclusion of any device to measure length or angle” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934).

30 “[...] a range of very creative, but mainly concrete demonstrations. Cut out templates; use transparent plastic to copy the diagram and then rotate it over the original etc.” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 934).

3.1.5 Seis níveis de abstração

Neste módulo, a fim de que o aluno possa alcançar um nível alto de abstração, convém estabelecer uma escala em termos dos graus de abstração a que o pensamento pode aceder. No topo dessa escala, situa-se o nível de abstração mais alto, que está "mais afastado da experiência individual e mais perto dos absolutos universais [ou do *eidos* platônico]"[31] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935, tradução e interpolação nossas). Nessa escala, afirma-se, pois, que o processo de abstração se dá quando é possível fazer reflexões a respeito de objetos, desprezando particularidades concretas destes. De acordo com Carson e Rowlands (2007)

> Identificamos, talvez, sete níveis diferentes de abstração, abrangendo desde as renderizações físicas até as formas platônicas. Estes são: (1) O Atual; (2) Um Modelo; (3) Um Desenho Literal; (4) Um Desenho Abstrato; (5) Um Conceito Pessoal; (6) O Conceito Autorizado; e (7) O Ideal Platônico[32] (p. 935).

Percorrendo esses níveis[33] de abstração, na ordem supramencionada, poder-se-ia tomar um exemplo geométrico, partindo de um determinado terreno com dimensões retangulares, passando, em seguida, a uma maquete deste terreno; depois, a um desenho de um retângulo; e, finalmente, às ideias e propriedades métricas inerentes ao retângulo em si. A abstração, aqui, aumenta na medida em que se distancia da situação concreta (o terreno retangular), para uma mais ampla e geral (o conceito de retângulo). Ao encontrar propriedades do retângulo, elas todas se aplicam ao terreno de formato retangular. Eis a "vantagem" do pensamento abstrato, pela qual pode-se encontrar validações universais que extrapolam o âmbito concreto. Note-se, porém, que a geometria não é a única disciplina a trabalhar a abstração, pois,

> a abstração e a imaginação são ricamente prenunciadas ao longo da pré-história, como evidenciado pela mitologia, bestas híbridas, superstição, poesia, arte, e outras atividades culturais. Porém, na geometria clássica, torna-se um tema formalizado de discussão, posto sob o governo de regras bem definidas; torna-se, portanto, uma atividade autoconsciente e deliberada[34] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935, tradução nossa).

---

[31] "Further from individual experience and closer to universal absolutes" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935).

[32] "We identify perhaps seven different levels of abstraction ranging from the physical renderings to platonic ideas. These are (1) The Actual; (2) A Model; (3) A Literal Drawing; (4) An Abstract Drawing; (5) A Personal Concept; (6) The Authorized Concept; and (7) The Platonic Ideal" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935).

[33] O sétimo nível, das formas platônicas, não se trata de um níel a ser alcançado. Deseja-se, apenas, promover uma reflexão sobre ele.

[34] "Abstraction and imagination are richly foreshadowed throughout prehistory, as evidenced by mythology, hybrid beasts, superstition, poetry, art, and other cultural activities. But in classical geometry it becomes a formalized topic of conversation, is brought under the governance of well-defined rules, and becomes therefore a self-conscious and deliberate activity" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935).

Assim, justifica-se a ênfase na escolha da geometria; sua própria evolução histórica na Grécia Clássica representa uma ascensão em nível de abstração, tendo em vista a lógica e a formalização com que os problemas são resolvidos, como os teoremas são provados, e, por fim, como a disciplina foi desenvolvida.

Uma limitação que algum crítico dessa abordagem poderia apontar seria a de que a matemática nem sempre desperta o interesse ou atenção de todos os alunos. Porém,

> se a matemática tem um propósito cultural generalizado para os estudantes não interessados nos seus usos práticos e vocacionais, é esta: uma oportunidade, durante os anos de formação, para empreender a jornada disciplinar que historicamente transformou a cultura humana e a consciência humana, e fez do uso da razão abstrata um dos mais poderosos conjuntos de ferramentas culturais jamais desenvolvidos pela e para a mente humana[35] (p. 935).

Assim, quando o aluno, ou qualquer crítico, lançar a pergunta do porquê do estudo de geometria, pode-se embasar a resposta nesse fim educacional, de que deseja-se com a geometria desenvolver no aluno a capacidade de abstração de modo similar ao desenvolvimento formal que dela se observa ao longo da história, *pari passu*, com o aprimoramento da própria geometria. Como fazer isso? Uma possibilidade metodológica é descrita por Carson e Rowlands (2007, p. 935, tradução nossa):

> Ensinaríamos esta transcendência através de níveis sucessivos de abstração crescente, começando com as cordas e estacas dos esticadores de corda egípcios, fora de um campo; mostraríamos, em seguida, uma configuração semelhante feita em um pedaço de madeira, com cavilhas e fio; depois, os alunos tentariam fazer um "desenho literal"; na sequência, esboçariam um desenho no qual a corda é substituída por uma linha reta, e as estacas, por pontos.[36]

Por meio da execução desses passos, espera-se que os alunos avancem, gradualmente, nos níveis de abstração. Para isso, fazer-se-ia orientações e perguntas entre as sucessivas etapas, com o intuito de fomentar a reflexão sobre o que foi abstraído em cada uma delas (CARSON; ROWLANDS, 2007). A última etapa deste processo consiste em explicar "[...] a noção de Platão

[35] "If mathematics has a generalized cultural purpose for students not interested in its practical and vocational uses, this is it: an opportunity during the formative years to undertake the disciplinary journey that historically transformed human culture and human consciousness and made the use of abstract reason one of the most powerful cultural tool sets ever developed by and for the human mind" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935).

[36] "We would teach this transcendence through successive levels of increasing abstraction by starting with the ropes and stakes of the Egyptian rope-stretchers, out in a field, then showing a similar configuration rendered on a piece of wood with pegs and twine, then have students attempt a 'literal drawing', next a drawing in which the sketch of the rope is replaced with a straight line, and the sketch of the stakes with dots" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935).

de que há uma forma perfeita de todas as coisas, como triângulos e círculos, e que o propósito da educação para Platão era buscar a comunhão com aquelas formas intelectualmente puras e imortais [...]"[37] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935, tradução nossa). Aqui, não se pretende transpor a metafísica platônica para nossos dias e aplicá-la em sala de aula, nem fazer uma defesa intransigente da Teoria das Formas de uma perspectiva metafísica. Apesar de, talvez, "metafisicamente indefensável hoje em dia, o Reino das Formas de Platão foi um heurístico marcadamente poderoso que serviu para fazer as ideias parecerem reais [...]"[38] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935-936, tradução nossa). A vantagem de se trabalhar com essa teoria é a de libertar-se da dependência em relação ao mundo físico para os estudos matemáticos, e tornar-se "[...] mais aptos a entrar numa discussão sobre os objetos matemáticos entendidos como formas puras"[39] (p. 936). Reitera-se, pois, que "o propósito de ensinar este nível mais alto de abstração não é assumir um retorno conservador ao idealismo platônico, mas reconhecer um heurístico historicamente crucial que fez a humanidade levar as ideias a sério"[40] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936, tradução nossa).

Acredita-se que essa abordagem seja adequada ao Ensino Fundamental, pois, nessa faixa de idade, "[...] os alunos estão à beira de se tornarem capazes de desenvolver um pensamento operacional formal [...]"[41] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936, tradução nossa). Além disso, neste segmento do ensino encontra-se "[...] um lugar no currículo em que o significado e o valor da abstração podem ser explorados"[42] (p. 936), principalmente pelo fato de, no Ensino Médio, a preocupação central, comumente, passar a ser para com o vestibular ou alguma preparação vocacional.[43] E ao explorar este conceito de abstração com os alunos, não somente o ensino de matemática se beneficia mas também

> [...] a instrução em todos os outros domínios da aprendizagem, pois sem um conceito de abstração os alunos têm dificuldade em compreender o que é uma teoria na ciência, ou o que várias escolas de arte buscam fazer quando abstraem, de forma seletiva, várias qualidades do mundo visual. A abstração é um conceito difícil, mas uma vez adquirido o seu

[37] "[...] Plato's notion that there is a perfect form of all things, such as triangles and circles, and that the purpose of education for Plato was to seek communion with those pure, immortal forms intellectually [...]" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935).

[38] "metaphysically indefensible nowadays, Plato's Realm of Forms was a strikingly powerful heuristic that served to make ideas seem real [...]" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 935-936).

[39] "[...] we are better able to move into a conversation about mathematical objects as pure ideas" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936).

[40] "The purpose in teaching this highest level of abstraction is not to affect a conservative return to Platonic Idealism, but to recognize a historically crucial heuristic that made humankind take ideas seriously" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936).

[41] "[...] students are just at the cusp of becoming capable of formal operational thinking [...]" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936).

[42] "[...] one place in the curriculum where the meaning and value of abstraction may be explored" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936).

[43] Mesmo que discordemos dessa tipificação do Ensino Médio, temos de reconhecer que ela existe, como afirmam Zambon e Terrazan (2017).

> significado, os alunos ficam mais bem equipados para compreender como a arte, a literatura, a poesia, a alegoria, a metáfora e os vários modos de tropo literário e de representação artística adquirem o seu poder peculiar[44] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936, tradução nossa).

Portanto, essa abordagem tem por objetivo não apenas apresentar conteúdos e desenvolver habilidades, mas, também, fornecer subsídios para que o aluno possa ultrapassar os limites da geometria e, a partir do entendimento do conceito de abstração, possa ter autonomia em nas mais diversas áreas do conhecimento. Especialmente em matemática,

> espera-se que os alunos olhem através de um diagrama no papel e "vejam" conceitos puros em sua imaginação como as coisas que estão sendo discutidas. Um triângulo no papel é sempre representativo do conceito de um triângulo, e quando o triângulo é discutido não é o desenho, ou o conceito potencialmente defeituoso do estudante que está em questão, mas algo além da construção individual do estudante, ou seja, o conceito autorizado como entendido pela comunidade de matemáticos[45] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936, tradução nossa).

Um dos principais ganhos de se trabalhar dessa forma em matemática é o de os alunos tomarem consciência da natureza dos objetos que estudam. Espera-se, com isso, que eles também consigam trabalhar de forma mais genérica no desenvolvimento de suas provas.

3.1.6 Linhas, raios, segmentos, ângulos e triângulos

O objetivo neste módulo é voltar "[...] a algumas das curiosidades com que trabalhamos anteriormente e comecemos a submetê-las a uma análise mais sistemática"[46] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937, tradução nossa). Assim, pode-se iniciar o ensino dos conceitos mais básicos que darão sustentação para todo o desenvolvimento da geometria clássica, pois "a geometria clássica adquire força à medida que cresce a base de conhecimento subjacente"[47]

[44] "[...] instruction in all other domains of learning, for without a concept of abstraction students have difficulty understanding what a theory is in science, or what various schools of art are attempting to do when they selectively abstract various qualities from the visual world. Abstraction is a difficult concept, but once they get its meaning students are better equipped to understand how art, literature, poetry, allegory, metaphor, and the various modes of literary trope and artistic representation acquire their peculiar power" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936).

[45] "students will be expected to look through a diagram on paper and 'see' pure concepts in their imagination as the things being discussed. A triangle on paper is always representative of the concept of a triangle, and when the triangle is discussed it is not the drawing, or the student's potentially flawed concept that is at issue, but something beyond the student's individual construction, namely the authorized concept as understood by the community of mathematicians" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 936).

[46] "[...] we double back into some of the curiosities we originally played with and begin subjecting them to a more systematic analysis" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937).

[47] "Classical geometry acquires momentum as the underlying base of knowledge grows" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937).

(CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937, tradução nossa). Isso se dá, pois cada proposição provada torna-se um novo ponto de onde se pode expandir o conhecimento. Assim, "cada proposição que provamos torna-se um novo marcador no jogo"[48] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937, tradução nossa).

3.1.7 Compasso: distância e círculo

Com certa facilidade e frequência associa-se os círculos e circunferências às suas formas estéticas, isto é, àquela forma geométrica com aspecto arredondado. Porém, a forma estética muitas vezes pode ser enganosa, e nem todas as figuras com partes arredondadas, necessariamente, são círculos. Imagine a seguinte cena: "Uma cabra, amarrada a uma estaca num campo, comerá a erva até ter criado um círculo. A definição de um círculo está implícita nessa cena. A cabra não precisa compreendê-la"[49] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937, tradução nossa). Nesta cena, não se depara simplesmente com uma questão estética, pois os elementos para a definição de um círculo estão presentes: a estaca indica o centro e a corda indica o raio. A área que a cabra se alimenta é um círculo e não apenas uma forma redonda. Todavia, pode-se considerar que

> uma circunferência entra na consciência humana como uma forma, um objeto estético. Em matemática, ele é redefinido como os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo. Cada raio de um determinado círculo é de igual comprimento. Esta é a definição com a qual se tem de trabalhar para se obter uma compreensão matematicamente útil na resolução de problemas. Isto e mudanças similares na consciência são críticas à medida que o aluno começa a explorar as relações matemáticas embutidas em entidades geométricas e nos espaços de problemas. A riqueza matemática do círculo deve ser para os jovens aprendizes uma ocasião para experimentar a beleza matemática e o fascínio de muitas descobertas geométricas que se entrelaçam para formar um rico mosaico de compreensão[50] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937, tradução nossa).

---

[48] "Each proposition we prove becomes a new marker in the game" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937).

[49] "A goat, tethered to a stake in a field, will eat the grass until it has created a circle. The definition of a circle is implicit in that scene. The goat does not have to understand it" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937).

[50] "A circle enters human consciousness as a shape, an aesthetic object. In mathematics it becomes redefined as the points on a plane equidistant from a fixed point. Every radius of a given circle is of equal length. This is the definition one has to work with in order to yield mathematically useful insights in problem solving. This, and similar shifts in consciousness, are critical as the learner begins to explore the mathematical relationships embedded in geometrical entities and problem spaces. The mathematical richness of the circle should be for young learners an occasion to experience mathematical beauty and the fascination of many geometrical discoveries that interlock to form a rich mosaic of understanding" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 937).

3.1.8 Construções geométricas

As construções geométricas representam um grande avanço no desenvolvimento histórico da matemática, considerando que

> [...] os humanos ganham maior autoridade sobre os mistérios da geometria à medida que passam do estudo relativamente passivo dos problemas que são "dados" pela experiência para o uso da imaginação e da inventividade na imposição das suas próprias ideias criativas para os espaços problemáticos que contemplam[51] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 938, tradução nossa).

As construções geométricas, logicamente fundamentadas, proporcionaram o avanço da geometria e o desenvolvimento de provas a partir da imaginação e criatividade. Deseja-se que esse processo também ocorra com o aluno. Nessa perspectiva, "[...] a importante transformação que ocorre no padrão de crescimento do aluno é a aquisição de iniciativa e liberdade experimental"[52] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 938, tradução nossa). Espera-se que o aluno, ao realizar suas próprias construções geométricas, ganhe autonomia quanto à descoberta de relações matemáticas e à demonstração de teoremas. Contudo, cabe ao professor incentivar essa prática, e avaliar a capacidade do aluno de explicar o próprio raciocínio (CARSON; ROWLANDS, 2007).

3.1.9 O formalismo

Como afirmado anteriormente, os gregos fizeram da geometria clássica um tipo de jogo intelectual; "[...] eles o fizeram por prazer, em prol do desenvolvimento intelectual, uma forma de entretenimento, e como uma forma sofisticada de competição"[53] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 939, tradução nossa). Apesar disso, a geometria "era um empreendimento sério, destinado a revelar mistérios do universo"[54] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 939, tradução nossa). Eles também "isolaram-na de propósitos utilitários, a fim de sustentá-la como uma busca puramente intelectual"[55] (p. 939). Neste contexto, "as provas evoluíram como rotinas cognitivas, estabelecendo uma disciplina do intelecto, um método de compreensão e uma expectativa de

51 "[...] humans gain greater authority over the mysteries of geometry as they move from the relatively passive study of problems that are 'given' by experience to the use of imagination and inventiveness in imposing their own creative ideas into the problem spaces they contemplate. " (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 938).

52 "[...] important transformation that occurs in the learner's pattern of growth is the acquisition of initiative and experimental freedom" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 938).

53 "[...] they did it for pleasure, for the sake of intellectual development, a form of entertainment, and as a sophisticated form of competition" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 939).

54 "It was a serious undertaking, intended to reveal mysteries of the universe" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 939).

55 "They isolated it from utilitarian purposes in order to sustain it as a purely intellectual pursuit" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 939).

estrutura lógica. Era tanto uma técnica como uma visão do mundo"[56] (p. 939). Esse avanço não ocorreu apenas na matemática, mas também em outros domínios do conhecimento.

O objetivo deste módulo é "[...] ajudar os alunos a compreender o contexto histórico e as consequências culturais do desenvolvimento da razão formal, e da geometria"[57] (p. 939). Além disso, este módulo permite dar uma resposta para a pergunta: "Por que devo aprender isso?"; considerando que "a nossa resposta deve ir além das referências fluidas ao poder aquisitivo e às possibilidades vocacionais. Deve ligar o enriquecimento cognitivo individual à história cultural do empoderamento humano que está escrito em grande escala no registo histórico"[58] (p. 940).

3.1.10 O conceito pitagórico de número

Na escola pitagórica, o conceito de número possuía uma característica mística. Mas, também lá, o conceito de número perdeu a característica mística, tornando-se o embrião do conceito de número moderno. Considerando que "o sentido moderno do número é pré-requisito para a matemática tal como a conhecemos"[59] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 940, tradução nossa), espera-se que os alunos tomem consciência da abstratividade associada aos números, com os quais operam desde os anos inciais de escolarização.

3.1.11 Tempo, espaço e tonalidade

Outra grande contribuição dos gregos foi a quantificação do mundo físico, isto é, o estabelecimento de um mapeamento conceitual do mundo físico. A partir daí, "o tempo e o espaço foram estabelecidos quantitativamente, e a prática de medir o tempo e o espaço avançou tanto conceitualmente como na prática"[60] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 940, tradução nossa). Entretanto, Carson e Rowlands (2007) não deixam claro qual foi o avanço conceitual e prático da medição que os gregos atingiram em relação a outras civilizações. Esses autores apontam ainda que,

> através da música e da estética, a noção de que o mundo é uma construção matemática foi reforçada, assim como a crença de que havia um padrão natural, determinado matematicamente, de beleza, ordem e razão. Os

[56] "Proofs evolved as cognitive routines, establishing a discipline of the intellect, a method of understanding, and an expectation of logical structure. It was both a technique and a world view" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 939).

[57] "[...] to help students understand the historical context and the cultural consequences of the development of formal reason, and geometry" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 939).

[58] "Our response should go beyond glib references to earning-power and vocational possibilities. It should connect individual cognitive enrichment to the cultural story of human empowerment that is writ large in the historical record" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 940).

[59] "The modern sense of number is prerequisite to mathematics as we know it" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 940).

[60] "Time and space were established quantitatively, and the practice of measuring time and space advanced both conceptually and practically" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 940).

> pitagóricos estudaram as leis matemáticas da harmonia na música e chegaram à conclusão de que toda a natureza deve ser uma expressão de leis e relações matemáticas[61] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 941, tradução nossa).

Sabe-se que os padrões de beleza sofreram alterações ao longo da história, e os novos padrões não foram, necessariamente, matematicamente enunciados. Similarmente, a crença pitagórica de que o universo, em sua integralidade, poderia ser descrito, misticamente, por meio de relações numéricas também foi transformada ao longo do tempo. Assim, os autores propõem que neste módulo

> [...] pode ser dada alguma importância à demonstração de como estas hipóteses aparecem repetidamente ao longo da história, e para mostrar [aos alunos] como a base das hipóteses sofre mutação, e ao mesmo tempo adquire diferentes ferramentas matemáticas[62] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 941, tradução e interpolação nossas).

Pretende-se que os alunos compreendam como as hipóteses sofrem alterações ao longo do tempo, e como o próprio progresso científico se desenrola através do teste contínuo de hipóteses e da revisão permanente de seus fundamentos, na medida em que novos dados são considerados e novos fatos descobertos, por processos de observação e medição.

3.1.12 Encadeamento de provas

O encadeamento das provas como se conhece hoje também é uma das grandes contribuições dos gregos para a humanidade. Esse encadeamento das provas, bem como o tratamento da geometria por meio de um sistema axiomático foi imortalizado nos *Elementos* de Euclides[63], no qual as proposições e suas provas encontram-se numeradas e sistematicamente organizadas. O sistema axiomático e o encadeamento das provas permitiram aos gregos transformarem e ampliarem seus conhecimentos. O encadeamento de provas poder ser assim descrito:

> uma vez provada uma proposição, ela serve para validar etapas equivalentes em todas as provas futuras. Essas declarações são, então, encadeadas

[61] "Through music, and aesthetics, the notion that the world is a mathematical construct was reinforced, as was the belief that there was a natural, mathematically determined, standard of beauty, order, and reason. The Pythagoreans studied the mathematical laws of harmony in music and arrived at the conclusion that all of nature must be an expression of mathematical laws and relationships" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 941).

[62] "[...] some play may be given to showing how this underlying assumption surfaces repeatedly throughout history, and to showing how the underlying base of assumptions undergoes mutation, and at the same time acquires different mathematical tools" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 941).

[63] Note-se, porém, "[...] que a ideia de um sistema axiomático foi bem estabelecida muito antes de Euclides" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942). Além dos *Elementos*, há outras obras que conferem um tratamento axiomático à geometria, como os trabalhos de Hipócrates de Chios (possivelmente, o primeiro a fazer um tratamento axiomático da geometria), e de Aristóteles (p. 942).

> em pacotes conceituais maiores como novas investigações e novas provas. Esta prática pode ser usada, pois, não só para resolver problemas mais complexos e avançados, mas também para investigar, criativamente, novos territórios e inventar novos espaços problemáticos[64] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 941, tradução nossa).

Um bom exemplo do encadeamento de provas encontra-se no estudo das relações métricas entre as cordas de uma circunferência. Para demonstrar essas relações é preciso, antes, ter demonstrado as relações entre ângulos inscritos em circunferências, bem como as razões na semelhança de triângulos. A importância do encadeamento de provas é sublinhada por Carson e Rowlands (2007, p. 941, tradução nossa):

> O advento da prova formal pelos pitagóricos dá um registro escrito para cada proposição que é assegurada em expressão formal, e a ligação lógica e o encadeamento dessas proposições criam estruturas conceituais que se estendem por domínios inteiros de experiência matemática. Euclides não inventou esse procedimento, mas ele o formaliza em seu estado contemporâneo, estabelecendo assim a expressão clássica dessa rede maciça de descobertas matemáticas interconectadas[65] (p. 941).

No exemplo da prova da relação métrica das cordas de uma circunferência, precisa recorrer às propriedades de semelhança de triângulos. Segundo o encadeamento de provas, uma vez construída a prova formal da semelhança de triângulos, ela poderá ser utilizada para produzir novas provas e novos resultados.[66] Essa "capacidade de construir argumentos complexos a partir de módulos de evidência e razão é um grande avanço para a mente humana"[67] (p. 942). Tal avanço pode ser notado na própria geometria, em que constata-se o crescimento gradual da

[64] "Once a proposition has been proven, it serves to validate equivalent steps in all future proofs. These statements are then chained into larger conceptual packages as new investigations and new proofs. This practice can be used, then, not only to solve more complex and advanced problems, but it can also be used creatively to investigate new territories and to invent new problem spaces" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 941).

[65] "The advent of formal proof by the Pythagoreans gives a written record for every proposition that is secured in formal expression and the logical linking and chaining of these propositions creates conceptual structures that range over whole domains of mathematical experience. Euclid does not invent this procedure, but he formalizes it in its contemporary state, thus establishing the classical expression of this massive network of interconnected mathematical discoveries" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 941).

[66] A validade de uma proposição em todo domínio de experiência matemática depende de que sejam assegurados os axiomas que sustentam uma determinada teoria. Ao alterarmos os axiomas, podemos produzir uma nova matemática (este é o caso das geometrias não-euclidianas em relação à geometria euclidiana). Ao fazermos isso, produzimos uma nova geometria, e todas as proposições que antes eram verdadeiras para a geometria clássica precisam ser verificadas novamente, à luz da alteração feita no axioma. A soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser tomada como exemplo: na geometria euclidiana, sabemos que essa soma é igual a $180°$, ao passo que, na geometria esférica, ela vale mais do que isso.

[67] "The capacity to build complex arguments from modules of evidence and reason is a major advance for the human mind" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942).

teoria, começando por proposições e provas simples, como a soma dos ângulos internos de um triângulo, e passando por outras mais complexas, como é o caso do Teorema de Tales.

O objetivo deste módulo, segundo Carson e Rowlands (2007), é fazer com que "[...] os alunos tomem consciência da realização da geometria euclidiana tomada como um todo organicamente coerente"[68] (p. 942), tendo em vista o fato de "[...] a geometria euclidiana ter sido outrora o modelo para um domínio de conhecimento consolidado sistematicamente."[69] (p. 942) Esses autores argumentam ainda que

> sua base axiomática [da geometria] encontrou equivalência em outros domínios do conhecimento, tais como os princípios basilares que sustentariam os sistemas jurídicos ou as premissas teóricas que sustentavam vários ramos da ciência. Embora estas derivações culturais não sejam essenciais para uma compreensão da geometria, o essencial é a expectativa de que várias linhas separadas de investigação (propriedades dos círculos, propriedades dos triângulos, seções cônicas, geometria projetiva) se cruzem e se liguem em conjunções por vezes surpreendentes, e a percepção de que, por mais longe que o sistema se estenda, não resultará em contradições. Esta visão macroscópica da geometria ajuda a esclarecer a natureza da geometria como um domínio de investigação sistemática. Também ajuda os estudantes a compreender que todas estas proposições individuais se encaixam, e que aprendê-las permite navegar através de todo um sistema de fatos interligados[70] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942, tradução e interpolação nossas).

3.1.13 Abstração e racionalidade em matemática e noutros domínios

Para compreender como a abstração em matemática interfere em outros domínios do conhecimento, precisa ter em mente que "um dos temas mais proeminentes e ubíquos da civilização grega clássica (que abrangeu pelo menos trezentos anos, c. 600-300 a.C.) reside na divisão entre um mundo de coisas [um mundo visível] e um mundo de ideias [um mundo

[68] "[...] students to become aware of the achievement of Euclidean geometry taken as an organically coherent whole"(CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942).

[69] "[...] Euclidean geometry once stood as the model for a knowledge domain bound together systematically." (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942)

[70] "Its axiomatic foundation found equivalence in other domains of knowledge, such as the underlying principles that would undergird legal systems or the theoretical premises that supported various branches of science. While these cultural spin-offs are not essential to an understanding of geometry, what is essential is the expectation that various separate lines of investigation (properties of circles, properties of triangles, conic sections, projective geometry) will intersect and connect at sometimes surprising junctures, and the realization that no matter how far the system extends, it will not result in contradictions. This macroscopic view of geometry helps to clarify the nature of geometry as a domain of systematic inquiry. It also helps for students to understand that all of these individual propositions fit together, and that learning them allows one to navigate through an entire system of interlocking facts" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942).

inteligível]"[71] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942, tradução e interpolações nossas). Esse dualismo não foi iniciado por Platão, mas são nos escritos deste filósofo que se "[...] encontra sua expressão mais avançada no campo da filosofia [...]"[72] (p. 944). Esse dualismo também não foi exclusividade da cultura grega; há indícios de que todas as culturas tradicionais possuíam algum tipo de visão de dois mundos dicotômicos, em que se tinha "[...] o reino dos objetos concretos e da vida humana mortal em contraste com outro reino, etéreo, de imortalidade e permanência, onde habitavam os deuses e as almas dos humanos que haviam morrido"[73] (p. 942). Entretanto, há de se destacar que, em outras culturas, esse dualismo possuía caráter eminentemente religioso, ao passo que, "na Grécia clássica, essa divisão metafísica assume um aspecto secular[74], com foco em padrões racionais e matemáticos, ou Formas, que subjazem à face mutável da realidade"[75] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942-943, tradução nossa). Assim, a Grécia clássica se diferencia das outras culturas na medida em que concebe um mundo inteligível no qual as entidades/formas não se referem unicamente a divindades, mas, sim, à matemática e às virtudes, ainda que, de algum modo, pudessem ser tratadas com certa religiosidade e culto.

Carson e Rowlands (2007) apresentam Tales como o precursor desse pensamento, uma vez que "os próprios gregos atribuíram a Tales o mérito de lançar as bases para suas abordagens únicas à matemática, à filosofia e à ciência"[76] (p. 943). Os autores entendem que as longas viagens que o matemático fez no início de sua vida adulta tiveram relação com seu êxito no desenvolvimento da matemática. A justificativa apresentada por Carson e Rowlands (2007) se baseia no fato de que viagens "equipa-nos (e obriga-nos) a gerir a tensão entre quadros de referência múltiplos e incomensuráveis, sob a forma de diferentes sistemas culturais e visões de mundo"[77] (p. 943). Isso significa que, ao sair em viagem, depara-se com diversas situações (tensões), muitas que não se pode evitar, sobretudo de ordem cultural (diferenças relativas a idioma, religião, conhecimento científico etc.). Supõe-se que Tales tenha enfrentado diferenças

---

71 "One of the most prominent and ubiquitous themes of classical Greek civilization (which spanned at least three hundred years, c. 600-300 BCE) occurs in the division between a world of things and a world of ideas" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942).

72 "[...] finds its most advanced expression in the realm of philosophy [...]" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

73 "[...] the realm of concrete objects and mortal human life in relief against another, ethereal realm of immortality and permanence where dwelt the gods and the souls of humans who had died" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942).

74 Apesar dos autores indicarem que as Ideias são vistas de uma forma secular, sabemos que os pitagóricos formavam um grupo religioso com sua doutrina dos números. Em Platão, por sua vez, a Forma do Bem supremo possui certa aura de divindade.

75 "In classical Greece, this metaphysical division takes on a secular aspect, with the focus on the mathematical and rational patterns, or Forms, that underlie the changing face of reality" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 942-943).

76 "The Greeks themselves credited Thales with laying the foundations for their unique approaches to mathematics, philosophy, and science" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 943).

77 "It equips us (and compels us) to manage the tension between multiple, incommensurable frames of reference in the form of different cultural systems and world views" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 943).

bastante acentuadas em suas viagens, e, como era comerciante, precisava “[...] formar associações, amizades, aonde quer que fosse [...]”[78] (p. 943) para ser bem-sucedido em seus negócios (CARSON; ROWLANDS, 2007). Além disso, “[Tales] teria de administrar o conhecimento de que os deuses dos estrangeiros eram diferentes de seus deuses, os caminhos deles diferentes daqueles de sua própria cidade, Mileto, e a visão de mundo, língua e cultura deles, diferentes da sua própria”[79] (p. 943).

Agora que se evidencia os pontos de divergência entre as culturas, pode-se pensar nos pontos em comum. Carson e Rowlands (2007), ao abordarem as viagens comerciais exitosas de Tales, apresentam dois pontos em comum entre as culturas no que diz respeito à realidade de um comerciante: a linguagem matemática e o valor atribuído ao dinheiro.

> Para o comerciante, uma grande fonte de uniformidade entre culturas é a linguagem do número (e do dinheiro, que funciona como um meio de troca). A sensação de segurança e certeza, uma vez dada pela própria cultura nativa, pode ser restaurada ao entrar mais profundamente no domínio transcendente e universal da matemática. Esta dinâmica psicológica pode, portanto, aumentar a motivação para mergulhar mais na matemática, e na sua estrutura de hipóteses, do que um uso meramente utilitário exige[80] (p. 943).

Assim, “a linguagem do número” é aqui posta como importante ponto de convergência entre as diferentes culturas. Em que pese a diferença de nomes ou representações, o número, em termos quantitativos, permanece o mesmo. O número “1” é o mesmo em qualquer cultura ou país, idioma ou sistema de numeração, pois o número é um conceito abstraído de uma ideia específica de quantidade.

Se, por um lado, as divergências culturais e linguísticas podem provocar a insegurança na relação entre o viajante estrangeiro e o nativo, a matemática pode restaurar essa segurança, uma vez que a própria natureza da matemática é “transcendente e universal”, dado que a lógica com a qual se desenvolve é independente de fatores externos. Logo, mesmo diante de diferenças culturais, é possível ao estrangeiro conversar sobre matemática com o nativo, uma vez que os conceitos são universais. Ambos saberão o que é “1”, um objeto, uma moeda de ouro; a quantificação transcende qualquer divergência. O fato de a matemática consistir em

[78] “[...] he would have to form associations, friendships, wherever he went” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 943).

[79] “He would have to manage the knowledge that their gods were different from his gods, their ways different from those of his own city, Miletus, and their world view, language, and culture different from his own” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 943).

[80] “For the merchant, a major source of commonality across cultures is the language of number (and money, which functions as a means of exchange). The sense of security and certainty once given by one’s native culture may be restored by entering more deeply into the transcendent, universal domain of mathematics. This psychological dynamic may therefore increase the motivation to delve further into mathematics, and into its underlying structure, than a merely utilitarian usage demands” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 943).

uma linguagem transcendente e universal, tanto no que se refere a números quanto a formas geométricas, é apontado por esses autores como um elemento adicional para "aumentar a motivação para se mergulhar mais fundo na matemática". Ressaltam, ainda, que o estudo utilitário não é capaz de fazê-lo, tendo em vista que nem todos possuem interesse na utilidade da matemática em questões práticas.

Esse desenvolvimento da abstração e da racionalidade na Grécia é tão forte que ultrapassou os limites dos domínios da matemática.

> Um desenvolvimento equivalente ocorre na jurisprudência e governança nas mãos de Sólon, o Legislador. Este desenvolve o que ele acredita ser um conceito universal de Justiça e um processo de raciocínio essencialmente dedutivo para aplicar seus princípios a casos individuais perante a lei[81] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 943, tradução nossa).

Aqui é notória a semelhança com a matemática: tem-se um conceito universal para ser aplicado em casos individuais, por meio de um processo dedutivo. Essa aplicação que Sólon propõe para o direito é muito próxima do que Tales faz com a matemática. Tales e Sólon eram contemporâneos e o registro histórico sugere que eles se conheciam (CARSON; ROWLANDS, 2007).

O dualismo, por outro lado, ocorre mais tarde, com outro grego: Esopo. Suas fábulas, contendo "[...] histórias aparentemente simples sobre animais falantes, também acontecem para transmitir lições morais ou éticas transcendentes"[82] (p. 944).

Sobre esses exemplos, Carson e Rowlands (2007) assinalam que eles consistem em

> [...] três manifestações de abstração muito distintas, apresentadas como uma ponte dualista entre um reino ideacional de verdades permanentes e um reino material onde as coisas vêm à existência e depois se decompõem e passam. Este dualismo encontra sua expressão mais avançada no reino da filosofia, especialmente nos escritos de Platão[83] (p. 944).

Esse dualismo, aperfeiçoado na Teoria das Formas de Platão (apresentada no capítulo 2), influencia toda a civilização europeia. Essa tensão entre o mundo ideal (espiritual) e físico é reformulada por Santo Agostinho "[...] como cosmologia cristã em sua monumental obra,

[81] "An equivalent development occurs in jurisprudence and governance at the hands of Solon, the Lawgiver. He develops what he believes to be a universal concept of Justice and a process of essentially deductive reasoning for applying its principles to individual cases before the law" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 943).

[82] "[...] seemingly simple stories about talking animals also happen to convey transcendent moral or ethical lessons" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

[83] "[...] three very distinct manifestations of abstraction put forth as a dualistic bridge between an ideational realm of permanent truths and a material realm where things come into being and then decay and pass away. This dualism finds its most advanced expression in the realm of philosophy, especially in the writings of Plato" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

A Cidade de Deus”[84] (p. 944). Isso implica que “toda a cultura da Idade Média europeia é compreensível somente através da lente desta imagem de um reino espiritual interagindo com o reino físico através de várias formas de metáfora e alegoria”[85] (p. 944, tradução nossa). Portanto, compreender a Teoria das Formas de Platão ajuda a compreender também o desenvolvimento da abstração e da racionalidade desse período, bem como toda a cultura da Idade Média e a ciência moderna.

Para Carson e Rowlands (2007), a racionalidade — um traço marcante da geometria — estende-se a diversas áreas do conhecimento e distintos campos de atividade humana, passando a constituir elemento fundamental da ciência tal como entendida hoje.

> A racionalidade, a outra marca definidora da geometria, é um estilo de raciocínio que pode ser aplicado a muitos domínios de aprendizagem, da arte e arquitetura à filosofia e ciência, da jurisprudência e medicina ao comércio e ao setor bancário. A racionalidade é fundamental para as culturas científicas modernas, mas, há três mil anos, não existia para além de um nível de arte popular. Uma vez adquiridas, e auxiliadas pelos efeitos purificadores da abstração formal, estas práticas cognitivas servem para estabelecer uma visão distinta e científica do mundo. Elas também criam certas vantagens práticas para os que são espertos, sábios ou sensatos o suficiente para usá-las[86] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944, tradução nossa).

As repercussões dessas contribuições da geometria (mais especificamente, da racionalidade e da abstração), na medida em que propiciam uma “visão distinta e científica do mundo”, devem ser exploradas, segundo Carson e Rowlands (2007), no processo de ensino–aprendizagem, de modo a fornecer aos estudantes elementos que levem a uma atribuição de sentido mais profundo ao estudo da matemática.

> Ao ensinar sobre abstração e racionalidade, prova formal e os primórdios da lógica, filosofia e ciência, nós nos engajamos em um refinamento chave do meta-discurso com estudantes que liga a aprendizagem da ma-

[84] “[...] as Christian cosmology in his monumental work, The City of God” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).
[85] “And the entire culture of the European Middle Ages is understandable only through the lens of this image of a spiritual realm interacting with the physical realm through various forms of metaphor and allegory” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).
[86] “Rationality, the other defining mark of geometry, is a style of reasoning that can be applied to many domains of learning, from art and architecture to philosophy and science, from jurisprudence and medicine to commerce and banking. Rationality is fundamental to modern scientific cultures, yet three thousand years ago it did not exist beyond a level of folk craft. Once acquired, and aided by the purifying effects of formal abstraction, these cognitive practices serve to establish a distinct, scientific worldview. They also create certain practical advantages for those clever, wise, or sensible enough to use them” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

> temática ao tema maior das tendências histórico-culturais[87] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944, tradução nossa).

Uma vez mais, observa-se como a narrativa sobre acontecimentos históricos é utilizada como um meio para a tomada de consciência tanto da importância destes para o desenvolvimento humano quanto do desenrolar do próprio processo pedagógico e do avanço cognitivo por parte dos alunos. Procura-se realçar, nos registros históricos, aqueles que mais contribuíram para a evolução do pensamento formal, dentre os quais destaca-se a Teoria das Formas de Platão.

> Ao proporcionar uma modesta ponte para a evolução do empreendimento cultural que ocorreu na antiga Atenas, ao levar os alunos ao significado avançado do reino de formas de Platão, a Metáfora da Linha Dividida e a Alegoria da Caverna, surge a possibilidade de que possamos apoiar melhor este curso de estudo e estabelecer suas reivindicações históricas de relevância[88] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944, tradução nossa).

Portanto, os autores defendem que essa abordagem histórica, na qual se apresentam outros domínios do conhecimento que receberam, direta ou indiretamente, a influência da matemática, podem justificar o estudo da própria matemática. Rebatendo possíveis críticas quanto à abordagem da Teoria das Formas de Platão com estudantes de 11 a 14 anos, Carson e Rowlands (2007) comparam esse ensino com as fábulas de Esopo, afirmando que "[...] os alunos podem compreender estes trabalhos em um nível para começar, e só gradualmente ou mais tarde poderão alcançar uma apreciação plena. No entanto, eles ressurgirão quando chegar a hora certa"[89] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944, tradução nossa).

3.1.14 Figuras tridimensionais e secções cônicas

As secções cônicas consistem em outro tópico de estudo importante que tem suas origens na Grécia Clássica, com os trabalhos de Apolônio. Alguns exemplos famosos são as secções cônicas que podem ser obtidas por um plano interceptando um cone[90]. Se o plano que intercepta o cone é paralelo com o plano da base deste, a secção resultante é uma circunferência. Porém, se o plano for oblíquo em relação ao plano da base do cone, a secção gerada será uma elipse ou uma parábola. Por fim, quando o plano for perpendicular em relação ao plano da base do

[87] "In teaching about abstraction and rationality, formal proof, and the beginnings of logic, philosophy, and science, we engage in a key refinement of the meta-discourse with students that ties the learning of mathematics to the larger theme of cultural-historical trends" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

[88] "By providing some modest bridging to the evolving cultural enterprise that occurred in ancient Athens, by taking students into the advanced meaning of Plato's realm of forms, the Metaphor of the Divided Line, and the Allegory of the Cave, the possibility arises that we may better support this course of study and establish its historic claims to relevance" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

[89] [...] students may understand these works at one level to begin with, and only gradually or later be able to attain to a full appreciation. Nevertheless, they will resurface when the time is right" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

[90] Outros corpos redondos como o cilindro e esfera também geram seções cônicas.

cone, obtemos uma hipérbole. Outros sólidos geométricos, quando interceptados por planos, também podem gerar figuras planas. As secções de um cubo, por exemplo, podem resultar em quadrados, retângulos, losangos, triângulos, pentágonos e hexágonos, dependendo do ângulo do plano interceptante em relação ao plano da base do cubo e de quantas faces são interceptadas.

Como as diferentes figuras formadas dependem da posição do plano, é possível usar "a imaginação [...] [para] mover estas figuras umas em relação às outras, efetuando uma transformação dinâmica através de cada variedade de resultados, ligando-as umas às outras e revelando o seu parentesco"[91] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 945, tradução e interpolação nossas). Essa "transformação dinâmica", que a imaginação propicia, permite aos estudantes incorporar movimento à matemática, desenvolvendo o pensamento dinâmico e tridimensional (CARSON; ROWLANDS, 2007).

Neste tópico os autores acreditam que "[...] um uso generoso da arte e da física pode ajudar a enriquecer a compreensão intuitiva e a capacidade de 'ver' projeções com os olhos da mente"[92] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 945, tradução nossa). Além disso, os autores propõem que sejam utilizados softwares de geometria dinâmica para facilitar a visualização dessas figuras, mantendo a abordagem histórica para a apresentação do tópico (CARSON; ROWLANDS, 2007).

3.1.15 O conceito de infinito

Carson e Rowlands (2007) apontam que "algumas das primeiras reflexões matemáticas sérias sobre a noção de infinito surgem no estudo da geometria"[93] (p. 945). O infinitamente grande e o infinitamente pequeno foi objeto de estudo dos pensadores gregos clássicos (CARSON; ROWLANDS, 2007). Os paradoxos de Zenão[94] contribuíram para o desenvolvimento do conceito de infinito, ao "[...] apontar a incapacidade de um formalismo estático para lidar com conceitos

[91] "Imagination [...] [to] move these figures relative to one another, effecting a dynamic transformation through each varied range of results, connecting them to one another and revealing their kinship" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 945).

[92] "[...] a generous use of art and physics can help enrich the intuitive grasp and the ability to 'see' projections in the mind's eye" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 945).

[93] "Some of the first serious mathematical reflections on the notion of infinity arise in the study of geometry" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 945).

[94] Um dos paradoxos de Zenão é o caso do arqueiro que tenta acertar um alvo. Uma vez lançada, a flecha deverá passar pelo ponto médio da distância que a separa do alvo. Ao atingir esse ponto, a flecha deverá passar, então, pelo ponto médio da nova distância em relação ao alvo. Esses processo se repetirá indefinidamente, de modo que, por menor que seja a distância, haverá sempre um ponto médio a ser atingido. Dessa forma, o filósofo conclui que a flecha nunca atingirá o alvo. Outro paradoxo é o da corrida de Aquiles contra a tartaruga, no qual o herói grego permite que a tartaruga inicie a disputa com alguns centímetros de vantagem. O problema é que toda vez que Aquiles atinge a marca em que a tartaruga está, ela já se afastou, ainda que a distância seja ínfima. Com raciocínio análogo ao que foi utilizado no paradoxo da flecha, o herói grego nunca alcançará a tartaruga.

dinâmicos”[95] (p. 945). Por meio destes paradoxos, é possível fomentar a reflexão sobre o conceito de infinito (o indefinidamente pequeno) e a ideia intuitiva de limite. O postulado das retas paralelas que encontra-se nos *Elementos* de Euclides possui “[...] uma margem de incerteza quanto à incapacidade de prever o que acontece ao espaço (ou pelo menos às linhas retas) a uma distância infinita”[96] (p. 945). Apesar de seus esforços tímidos, os gregos iniciaram uma investigação do conceito de infinito e dos problemas deste derivados (CARSON; ROWLANDS, 2007). Há de se destacar, entretanto, os avanços para o desenvolvimento do pensamento abstrato que a questão do infinito desencadeou. Nesse contexto, os gregos

> [...] dão um primeiro passo a um modo de pensamento dimensional, grande e pequeno, que excede o que a nossa imaginação pode geralmente realizar com base no alcance limitado de nossa experiência pessoal. Este é um exercício de expansão da mente, assim como um meio de ver como um sistema cultural formalizado, tal como a matemática, pode começar a captar e apresentar conceitos que, de outra forma, poderiam não existir para nós[97] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946, tradução nossa).

Nestes termos, pensar formalmente sobre o indefinidamente grande ou o indefinidamente pequeno obriga a se distanciar do senso comum e do pensamento perceptual, superando as limitações que estes impõem. Tais questões podem aflorar, também, quando se discutem, em sala de aula, a determinação e o uso de escalas, bem como as geometrias não-euclidianas. Por isso, Carson e Rowlands (2007) afirmam que “em algum momento de nossa educação, devemos deixar para trás o andaime da experiência familiar, e aprender a pensar através de conceitos de natureza puramente teórica”[98] (p. 946). E a matemática revela-se a principal responsável por disparar e efetivar esse processo. Isso se dá de uma maneira natural, dado que “a matemática torna-se frequentemente o veículo através do qual isto acontece; por exemplo, quando começamos a lidar com temperaturas muito superiores às amplitudes do calor ou do frio que os humanos são capazes de experimentar e suportar”[99] (p. 946). Neste exemplo, quer-se frisar que, apesar da capacidade que se tem de inferir sobre a temperatura, confia-se nas escalas de medição e no significado que

---

[95] “[...] to point up the inability of a static formalism to manage dynamic concepts” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 945).

[96] “[...] a margin of uncertainty in the inability to predict what happens to space (or at least to straight lines) at an infinite distance” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 945).

[97] “[...] give an initial pass at a mode of dimensional thinking, large and small, that exceeds what our imagination can generally accomplish based on the limited range of our personal experience. This is an exercise in expanding the mind, as well as a means of seeing how a formalized cultural system like mathematics can begin to capture and present concepts that may otherwise not exist for us” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

[98] “At some point in our education we must leave behind the scaffolding of familiar experience and learn to think through the medium of concepts having a purely theoretical nature” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

[99] “Mathematics frequently becomes the vehicle through which this happens, for example when we begin to deal with temperatures that are greatly in excess of the ranges of heat or of cold that humans are able to experience and survive” (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

atribui-se a seus valores. Isso se torna mais evidente quando tratamos de temperaturas extremas, em que nossos sentidos são insuficientes para estabelecer critérios comprativos eficazes, como, por exemplo, na comparação entre o calor produzido por um forno de uma usina siderúrgica, o de um reator nuclear e, até mesmo, o do Sol (CARSON; ROWLANDS, 2007).

3.1.16 Interpretando as ações físicas matematicamente, e vice-versa

Arquimedes é mais um grego do período clássico cujas contribuições se estenderam até à modernidade. Seus estudos são "[...] retomados 15 séculos depois, quando a geometria e a álgebra são aplicadas, pela primeira vez, em máquinas simples e sistemas mecânicos"[100] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946, tradução nossa). O estudo dessas máquinas, por sua vez, pode ser abordado pelas suas propriedades matemáticas, constituindo uma oportunidade para o desenvolvimento do programa de geometria do Ensino Fundamental (CARSON; ROWLANDS, 2007); "começando com a alavanca, o parafuso, a polia e outras máquinas básicas, exploramos estes primeiros esforços na matemática relacionada a eventos físicos"[101] (p. 946, tradução nossa).

Neste módulo, os autores propõem a volta "[...] a alguns usos práticos da geometria, incluindo a perspectiva na arte e análise em física e na mecânica clássica"[102] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946, tradução nossa). Por outro lado, Carson e Rowlands (2007) acreditam também, com o ensino deste módulo, que seja possível: (1) "[...] apontar as limitações deste sistema, que descreve muito bem a forma, mas é um veículo desajeitado para o estudo da dinâmica"[103] (p. 946, tradução nossa); (2) "[...] fornecer alguma prefiguração do cálculo, um sistema matemático especificamente concebido para dar conta do nosso entendimento de mudança, processo e dinâmica"[104] (p. 946, tradução nossa).

3.1.17 Relação entre conceitos algébricos e geométricos

Apenas neste último módulo Carson e Rowlands (2007) informam que estes 17 módulos foram projetados para serem aplicados ao longo de 3 anos de estudos geométricos, com um destes anos dedicado também ao estudo da Álgebra. Eles não deixam claro, porém, qual a carga horária deste estudo nem os encadeamentos dos temas da geometria, nem os temas específicos que cada módulo abordaria. Contudo, destacam que, no ano final do estudo geométrico, seria

---

[100] "[...] be taken up 15 centuries later as geometry and algebra are first applied to simple machines and mechanical systems" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

[101] "Beginning with the lever, the screw, the pulley, and other basic machines, we explore these early efforts at the mathematization of physical events" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

[102] "[...] to some of the practical uses geometry served, including perspective in art and analysis in physics and classical mechanics" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

[103] "[...] to point up the limitations of this system, which describes form quite well but is a clumsy vehicle for studying dynamics" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

[104] "[...] to provide some foreshadowing of the calculus, a system of mathematics specifically designed to manage our understanding of change, process, and dynamics" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 946).

"[...] [fornecida] alguma experiência com álgebra e, em particular, exploraríamos o fato de que muitos problemas podem ser abordados através da álgebra ou da geometria"[105] (p. 947, tradução e interpolação nossas). A vantagem dessa dupla abordagem consiste em propiciar "[...] modos muito diferentes de pensamento e prática matemática"[106] (p. 947, tradução nossa), considerando que

> ver a representação geométrica de um problema algébrico, ou ver a solução algébrica para um problema geométrico, proporciona uma oportunidade para refletir sobre os modos distintos com que estes respectivos sistemas enquadram o pensamento. Isto, afinal, é uma parte importante do meta-discurso, para o qual esta abordagem foi concebida[107] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 947, tradução nossa).

Na visão desses autores, a alternância entre esses domínios favorece a reflexão sobre a própria matemática.

3.2 A narrativa como ferramenta pedagógica para o ensino da abstração

Com o objetivo de desenvolver a abstração ao longo das aulas de geometria, recorre-se a uma metodologia de ensino que se propõe, explicitamente, fomentar nos estudantes a reflexão sobre os avanços intelectuais que são alcançados em cada etapa do processo de abstração. Inspiramo-nos, então, em uma proposta curricular batizada de *Ourstory* (*Nossa História*), apresentada por Carson, em 2002, à comunidade científica de história e filosofia das ciências. Essa inciativa nasce como um tentativa, por parte deste autor, de "[...] superar o reducionismo, a fragmentação e a esterilidade estética e conceitual de um currículo escolar típico"[108] (CARSON, 2002, p. 231, tradução nossa). Em linhas gerais, a proposta preconiza, à semelhança do que Carson apresenta no seu currículo composto de 17 módulos (descrito na seção 3.1), o uso de registros históricos para o ensino de matemática. Entretanto, esta outra proposta diferencia-se da primeira em dois pontos basilares: (1) a integração da disciplina de matemática com os demais componentes curriculares; (2) o uso da narrativa como uma ferramenta pedagógica para

[105] "[...] some experience with algebra, and in particular would explore the fact that many problems can be approached through either algebra or geometry" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 947).

[106] "[...] very different modes of mathematical thought and practice" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 947).

[107] "Seeing the geometrical representation of an algebraic problem, or seeing the algebraic solution to a geometrical problem, provides an opportunity to reflect on the ways in which these respective systems frame thought differently. This, after all, is an important part of the meta-discourse this approach is designed to promote" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 947).

[108] "[...] overcomes the reductionism, the fragmentation, and the aesthetic and conceptual sterility of a typical school curriculum" (CARSON, 2002, p. 231).

promover a identificação do aluno com aspectos específicos de episódios históricos, bem como a atribuição de sentido ao estudo da matemática.

Carson (2002) defende que as disciplinas mantenham um estreito "diálogo" entre si, a fim de que, trabalhando integradamente, confiram maior clareza aos alunos sobre a evolução histórica do pensamento e dos conceitos científicos. Para gerar tal diálogo, entende-se que a ordem de apresentação dos conceitos obedeça à ordem cronológica de desenvolvimento de tais conceitos. Isto significa que todas as disciplinas deverão usar a perspectiva histórica para a apresentação dos conceitos, fatos e ideias que se consolidaram ao longo do tempo, bem como o modo com que essa evolução ocorreu.

Para justificar a importância dessa abordagem histórica integradora, Carson (2002) argumenta que "a ciência não se desenvolveu independentemente das outras disciplinas formais, nem o ensino da ciência deveria ser considerado independentemente do ensino das artes, literatura, história, e assim por diante"[109] (CARSON, 2002, p. 232, tradução nossa).

Carson (2002) sugere um exercício de imaginação para evidenciar a importância e a necessidade de integração curricular entre distintos domínios do conhecimento: suponha-se que um romance com mil páginas seja apresentado a uma pessoa que não o leu, a partir de alguns fragmentos do livro. Esses fragmentos (que contêm as ideias principais, descrições e eventos da história) devem ser embaralhados, e, em seguida, disponibilizados a tal pessoa, que, com base neles, deve reconstruir o romance. Por fim, Carson (2002) pede que se vislumbre o grau de dificuldade que essa pessoa terá nesta tarefa de reconstrução da história. Este autor traça, então, um paralelo entre o que ocorre neste exercício e o que comumente se observa com a aplicação dos currículos escolares, concluindo que exige-se dos alunos o entendimento de conceitos, fatos e ideias que lhes são apresentados em fragmentos e de forma desconectada da ciência como um todo.

Carson (2002) acredita que a conexão entre os registros históricos e a evolução dos conceitos, nas mais diversas áreas do conhecimento, melhora a experiência de aprendizagem e a esta confere sentido. Isto porque há, naturalmente, uma busca por padrões coincidentes em áreas distintas do saber, nos processos de aprendizagem. Na visão do autor, nossa "[...] mente é, entre outras coisas, uma caçadora de padrões e um mecanismo de criação de padrões"[110] (p. 232, tradução nossa). Nesse sentido, entende-se que um currículo com disciplinas integradas, partindo de um contexto comum, permita aos alunos a descoberta e a criação de padrões que promovem e aprimoram a aprendizagem.

[109] "Science did not develop independently of the other formal disciplines, nor should the teaching of science be considered independently from the teaching of the arts, literature, history, and so on" (CARSON, 2002, p. 232).

[110] "[...] mind is among other things a pattern-seeking and a pattern-making mechanism" (CARSON, 2002, p. 232).

Assim, Carson (2002) propõe um currículo que procura "[...] combinar o quadro temporal da história, o quadro espacial da geografia mundial e o quadro conceitual da filosofia para contar a história dos principais desenvolvimentos culturais do mundo"[111] (p. 233, tradução nossa). Nota-se que a disciplina de história possui papel central no desenvolvimento do currículo, uma vez que ela é que desempenhará a função de interligação entre as outras componentes da matriz curricular. Assim sendo, objetiva-se que os alunos aprendam novos conceitos a partir do contexto histórico no qual estes se originaram.

> Quando ensinamos ciência isoladamente dos contextos sociais, culturais, históricos e filosóficos mais amplos dentro dos quais seu crescimento tem sido hospedado e alimentado, ela se torna desnecessariamente enigmática. Perdemos de vista o porquê do conhecimento ser enquadrado da maneira como é, e o porquê de ser representado como é. Muitas vezes, há uma história por trás das convenções, que, de outra forma, pareceriam muito estranhas. Os estudantes têm dificuldade de vê-la como uma atividade humana. Portanto, têm dificuldade de ver a si mesmos como cientistas, ou de ser solidários com as formas pelas quais os cientistas investigam os fenômenos e cristalizam seus conhecimentos resultantes[112] (CARSON, 2002, p. 233, tradução nossa).

Uma conversa que surge com certa frequência nas aulas é do porquê deve-se racionalizar um denominador com um número irracional. Por não conseguir compreender a necessidade de o matemático em tempos passados, que não dispunha do auxílio de calculadoras, ter de fazê-lo, o aluno encara essa convenção como algo artificial e sem sentido. No entanto, o contexto histórico poderia ajudar a conectar o aluno à realidade daquele matemático, e perceber que é mais fácil e eficiente arredondar uma divisão envolvendo irracionais somente no numerador, pois assim aumenta-se a precisão do resultado, sem muitos cálculos adicionais. Este é um breve exemplo de como o conhecimento do contexto histórico pode ajudar a conferir significado a convenções, conceitos e inovações. Aqui, parte-se da premissa de que essas práticas emergem de necessidades historicamente identificadas e justificadas.

Além de conferir significado aos conteúdos estudados, o contexto histórico também desempenha a função de apresentar como determinada disciplina se organizou, se estruturou, se desenvolveu e se consolidou ao longo do tempo (CARSON, 2002). Desta forma, o autor acredita que, mesmo os alunos que não possuem facilidade e bom rendimento na disciplina, podem

[111] "[...] to combine the temporal frame of history, the spatial frame of world geography, and the conceptual frame of philosophy to tell the story of the world's major cultural developments" (CARSON, 2002, p. 233).

[112] "When we teach science in isolation from the larger social, cultural, historical and philosophical contexts within which its growth has been hosted and nourished, it becomes unnecessarily cryptic. We lose sight of why knowledge is framed the way it is, and why it gets represented as it does. Often, there is a story behind the conventions that seem otherwise so peculiar. Students have trouble seeing it as a human activity, thus they have trouble seeing themselves as scientists, or being sympathetic to the ways in which scientists investigate phenomena and crystalize their resultant knowledge" (CARSON, 2002, p. 233).

adquirir certa percepção sobre a natureza da disciplina. E isso ocorre quando o estudante compreende as bases axiomáticas sobre as quais a geometria se assenta, bem como o encadeamento das provas geométricas, cujo propósito é gerar novos conhecimentos (CARSON; ROWLANDS, 2007).

Baseado em sua experiência docente em *Middle School* (segmento de ensino correspondente aos anos finais do nosso Ensino Fundamental), nos Estados Unidos, Carson (2002) acredita que esse currículo deva ser aplicado com estudantes a partir de onze ou doze anos, estágio da vida em que as crianças "[...] tornam-se capazes de lidar com redes relativamente complexas de ideias e tópicos, momento em que estão apenas começando a ganhar competência em operações formais abstratas"[113] (CARSON, 2002, p. 234, tradução nossa). O autor enfatiza que a curiosidade e a vontade de conhecer as histórias e dramas da humanidade que alunos nessa faixa etária normalmente manifestam favorece a aplicação desse currículo. Além disso, as escolas de Ensino Fundamental costumam ser mais receptivas e reflexíveis a novas propostas curriculares do que as de Ensino Médio, tendo em vista que os gestores destas últimas costumam focar a formação no ingresso na universidade (CARSON; ROWLANDS, 2007).

Quanto à implementação prática de sua proposta, Carson (2002) entende que o professor de história ou de estudos sociais seja o responsável por ensinar a linha histórica e criar os pontos de articulação entre as disciplinas:

> O professor de estudos sociais poderia começar a retratar a vida de Tales, sua imigração para o Egito, as conversas que ele supostamente teve com geômetras lá. Ele pode até dar a primeira lição ou duas na sequência, à medida que a conversa matemática começa a permitir que se abordem os começos da geometria clássica, ou ele pode ministrar algumas dessas lições em conjunto com o professor de matemática. Quando o professor de matemática assume a parte matemática da história, o professor de estudos sociais voltaria à linha principal da história, que, por sua vez, começaria a produzir pistas adicionais para a literatura, para a arte e a arquitetura, para a ciência e assim por diant.[114] (CARSON, 2002, p. 235, tradução nossa).

Ao se articular os conceitos e conteúdos de diversas disciplinas com a linha histórica, espera-se que o aluno compreenda as razões que motivaram o surgimento e/ou transformação de uma ideia, teoria, prática científica etc. Carson (2002) se antecipa em defesa de sua proposta,

[113] "[...] become capable of addressing relatively complex networks of ideas and topics, but they are just beginning to gain competence at formal abstract operations" (CARSON, 2002, p. 234).

[114] "The social studies teacher might begin to portray the life of Thales, his immigration to Egypt, the conversations he supposedly had with geometers there. She might even provide the first lesson or two in the sequence as the mathematical conversation begins to yield the beginnings of classical geometry, or she may co-teach a few of these lessons with the mathematics teacher. When the mathematics teacher then takes over the mathematical part of the story, the social studies teacher would return to the main story line, which in turn would begin to produce additional leads out into literature, into art and architecture, into science, and so forth" (CARSON, 2002, p. 235).

ao conjecturar eventuais questionamentos sobre ela, quanto à possibilidade de não se abordar determinados conteúdos exigidos pelas matrizes curriculares oficiais: “todos estes professores, incluindo o professor de história/ciências sociais, ainda ensinariam o material habitual que é ensinado sem *Ourstory*”[115] (CARSON, 2002, p. 235, tradução nossa).

No que diz respeito ao material de aula a ser empregado, Carson (2002) recomenda que ao material regularmente trabalhado seja acrescentado um outro, destinado ao tratamento dos aspectos culturais e históricos. Este material pode ser obtido na internet, e disponibilizado aos estudantes por meio de uma lista de links de acesso (organizados segundo os momentos históricos). Para tanto, o autor apresenta uma tabela com a divisão cronológica dos acontecimentos históricos, estabelecendo os níveis em que cada conjunto de disciplinas deve atuar. Tem-se, assim, “[...] uma abordagem interdisciplinar, multicultural e multimídia do estudo [...] das disciplinas formais”[116] (CARSON, 2002, p. 236, tradução nossa), na medida em que as disciplinas tratam de conceitos que foram desenvolvidos/transformados/aplicados em um mesmo momento histórico.

O autor adverte que o desenvolvimento da ciência ainda está atrelado ao colonialismo europeu, de modo que essa temática não pode ser apresentada apenas como um assunto qualquer na escola. Nesse sentido, Carson (2002) afirma que “é nosso compromisso [como professores] contar esta história com a maior integridade e honestidade intelectual possível”[117] (CARSON, 2002, p. 236, tradução e interpolação nossas).

Apesar de chamar essa proposta de “Nossa história” (*Ourstory*), Carson (2002) tem dificuldade para responder à pergunta “Quem somos nós?”[118] (p. 236), dado existir uma pulverização dos discursos políticos e ideológicos na pós-modernidade. Uma consequência é que “Qualquer narrativa é política; qualquer currículo, uma doutrinação”[119] (p. 238, tradução nossa). Assim, tudo depende de quem está contanto a história. Uma crítica que o autor antecipa é se, nessa proposta curricular, a civilização ocidental será privilegiada. Quanto a isto afirma que isso é inevitável, apontando que as escolas já o fazem normalmente, porque “as escolas são ambientes artificiais desenvolvidos para fins específicos, e esses fins geralmente nos levam às contribuições culturais associadas à civilização ocidental”[120] (CARSON, 2002, p. 238, tradução nossa). Nesse cenário, destacam-se as contribuições dos gregos para a matemática e para a filosofia. Apesar da proposta se concentrar nos pontos de desenvolvimento da cultura científica moderna, Carson (2002) enfatiza que podem ser estudadas várias outras culturas. Entretanto, para assegurar uma educação emancipatória, é preciso que sejam abordados, obrigatoriamente,

[115] “All of these teachers, including the history/social sciences teacher, would still teach the usual material that is taught without Ourstory” (CARSON, 2002, p. 235).

[116] “[...] an interdisciplinary, multi-cultural, multimedia approach to the study of [...] formal disciplines” (CARSON, 2002, p. 236).

[117] “It is our commitment to tell this story with as much integrity and intellectual grace as possible” (CARSON, 2002, p. 236).

[118] “But who are ‘we’?” (CARSON, 2002, p. 236).

[119] “Any narrative is political, any curriculum an indoctrination” (CARSON, 2002, p. 238).

[120] “Schools are artificial environments developed for specific purposes, and those purposes generally take us into the cultural contributions associated with western civilization” (CARSON, 2002, p. 238).

alguns tópicos específicos, que são reconhecidos como base da cultura científica e tecnológica (CARSON, 2002).

Nesse contexto, o autor alerta que "a cultura científica é um conjunto de ferramentas conceituais, mas não é uma cultura espiritual"[121] (CARSON, 2002, p. 238, tradução nossa). Ela pode coexistir com outras culturas tradicionais, sem que estas tenham de renunciar à sua religiosidade ou a suas crenças. Cada cultura tradicional negocia essa coexistência entre o que é de ordem cultural e o que é de natureza científica. O autor chama nossa atenção para as consequências de concepções radicais e dicotômicas do par científico-religioso:

> aqueles que rejeitam as culturas tradicionais e atribuem sua lealdade somente a uma visão científica do mundo muitas vezes transformam a ciência em uma quase tradição, chamada de cientismo, e correm o risco de se tornarem tão dogmáticos quanto qualquer membro da tribo em relação a suas antigas formas de conhecimento[122] (CARSON, 2002, p. 238, tradução nossa).

Nestes termos, ensinar uma cultura científica não implica destruir uma cultura tradicional, mas complementá-la. Nesse âmbito, defende-se a coexistência de diversos sistemas que legitimam as culturas tradicionais, uma vez que "cada disciplina formal ensinada nas escolas é considerada, em *Ourstory*, como um sistema cultural"[123] (CARSON, 2002, p. 239, tradução nossa). Convém ressaltar que cada um desses sistemas culturais, por mais que interaja com outros, tende a se conservar distinto dos demais. Por exemplo, a literatura e a física, mesmo partindo do mesmo contexto histórico, tendem a apresentar perspectivas e conclusões/produtos diferentes, tendo em vista as diferenças conceituais entre si (CARSON, 2002). E isto porque "sistemas diferentes têm diferentes modos de investigação, diferentes assuntos, diferentes suposições subjacentes, diferentes padrões de validade, diferentes objetivos e propósitos"[124] (CARSON, 2002, p. 239, tradução nossa). Estudar distintos sistemas culturais propicia visões da realidade sob múltiplas perspectivas; e é dever da escola ensiná-los (CARSON, 2002).

Viu-se, até este ponto, que o eixo estruturante da abordagem de Carson (2002) é o enquadramento histórico do desenvolvimento da ciência, em torno do qual são trabalhados os conteúdos das disciplinas escolares. Porém, a efetivação e o bom êxito dessa proposta dependem, integralmente, da narrativa que se constrói com o intuito de articular as diferentes áreas do saber, bem como o de promover o engajamento voluntário do aluno em seu próprio processo formativo. A narrativa emerge, então, como uma ferramenta pedagógica poderosa, essencial para conferir

[121] "Scientific culture is a conceptual tool kit, but it is not a spiritual culture" (CARSON, 2002, p. 238).

[122] "Those who reject traditional cultures and attach their allegiance solely to a scientific worldview often make science over into a quasi- tradition, called scientism, and they risk becoming just as dogmatic as any tribal member toward his or her ancient ways of knowing" (CARSON, 2002, p. 238).

[123] "Each formal discipline taught in the schools is regarded in Ourstory as a cultural system" (CARSON, 2002, p. 239).

[124] "Different systems have different modes of investigation, different subject matters, different underlying assumptions, different standards of validity, different goals and purposes" (CARSON, 2002, p. 239).

ao aluno, de um lado, coesão e coerência aos saberes sobre os quais se debruça, e, de outro lado, sentido ao processo de aprendizagem a que está submetido. A narrativa revela-se fundamental, inclusive, para superação das dificuldades geralmente encontradas pelo estudante na passagem do sistema cultural em que ele se encontra para um novo, no qual há integração com o sistema cultural científico que a escola lhe apresenta.

Ressalte-se que o engajamento dos estudantes, que se espera alcançar por meio de uma narrativa, depende da identificação destes com outras narrativas: a dos personagens históricos que promoveram os avanços científicos que se quer estudar. A motivação inicial para o envolvimento com a aprendizagem (que, posteriormente, deseja-se que se transforme em sentido para a formação acadêmica) passa por uma espécie de "espelhamento narrativo", pela empatia entre os estudantes e os personagens históricos. Consequentemente, o grau de sucesso (ou fracasso) da proposta depende de como essa história é contada. Apesar de crucial e de possuir as potencialidades requeridas para esse processo, a narrativa só cumprirá seu papel se tal vínculo entre estudantes e personagens se estabelecer.

> Tentar criar acesso à cultura científica através de uma série de narrativas históricas pode não funcionar se os estudantes não puderem se identificar de alguma forma com as pessoas retratadas nessas histórias, ou nunca desenvolverem empatia pelos vários espaços problemáticos que aqueles indivíduos acharam tão fascinantes, ou simplesmente não se importarem[125] (CARSON, 2002, p. 240, tradução nossa).

Veja-se, então, como Carson (2002) descreve o modo e as etapas de construção dessa narrativa. Primeiramente, um ou mais professores devem envolver os alunos em uma narrativa central, que balizará, em linhas gerais, o percurso dos estudos. Essa narrativa pode ser feita na forma de uma contação de história, sem que, para isso, haja uma aula formal. O objetivo, aqui, é fornecer o contexto, o pano de fundo, sobre o qual diferentes disciplinas trabalharão. Nas disciplinas, os alunos se organizariam em grupos, para explorarem os materiais pré-selecionados e indicados pelos professores, com vistas ao aprofundamento sobre os conhecimentos vigentes no momento histórico retratado.

Carson (2002) fornece como exemplo a construção de uma narrativa sobre a vida de um personagem da história da matemática, Tales de Mileto. A partir dessa narrativa, os alunos são instigados a realizar experimentos matemáticos, nos quais, à semelhança do personagem histórico, utilizam cordas e pequenas estacas de madeira para representar elementos geométricos. Em seguida, os alunos são convidados, em um segundo nível de abstração, a confeccionar desenhos que representem (por meio de pontos, linhas e figuras geométricas) o experimento

[125] "Trying to create access to scientific culture by a series of historical narratives may not work if students cannot identify somehow with the people depicted in those stories, or never develop empathy for the various problem spaces those individuals found so fascinating, or simply do not care" (CARSON, 2002, p. 240).

realizado.[126] A narrativa da história da vida de Tales pode remeter a questões mais complexas e profundas dentro da própria matemática, tal como a natureza dos objetos matemáticos:

> entidades teóricas emergem destas atividades e começamos a enfrentar as mesmas questões ontológicas e epistêmicas que levaram Tales, Pitágoras e outros a desenvolver a geometria como uma ciência abstrata e levaram Platão a contemplar o *status* ontológico de ideias puras[127] (CARSON, 2002, p. 240, tradução nossa).

Carson (2002) declara que sua proposta curricular não pretende detalhar toda a história que aconteceu em um determinado período, mas, sim, destacar os principais eventos que levaram à evolução de conceitos, ideias, métodos etc. específicos, como exemplificado com Tales, Pitágoras e Platão. Então, para estabelecer o que deverá ser abordado ao longo dos anos na escola, é preciso fazer um bom mapeamento conceitual do que se pretende ensinar (CARSON, 2002). O autor não apresenta uma lista pré-definida com conceitos e conteúdos que devem ser ensinados, mas fornece quatro exemplos (em linguagens e literatura, em matemática, em artes e em ciência e tecnologia) para ressaltar sua premissa maior: os conceitos a serem estudados devem sempre possuir conexões temáticas com o pensamento da época histórica trabalhada, evidenciadas por meio de uma narrativa (CARSON, 2002).

Ao colocar a história no centro de sua proposta curricular, Carson (2002) julga ser possível dar respostas mais robustas e convincentes para perguntas que os estudantes fazem, com bastante frequência, sobre as razões pelas quais devem estudar certos assuntos (em especial, os mais abstratos e sem conexão óbvia com a realidade imediata do aluno). Carson (2002) justifica a pertinência e centralidade da história, na sua proposta, com base no próprio de objeto desta disciplina: a nossa humanidade. Não obstante, esse autor chama a atenção para o fato de que a história da humanidade, por conta de sua grandiosidade e riqueza, constitui-se em grande desafio para aqueles que buscam narrá-la. Desafios de uma construção narrativa da história que demandam tempo para quem se dispõe a retratar as soluções elaboradas na história do pensamento humano aos mais diversos desafios técnico-científicos. Pertinência, centralidade e essa dupla dimensão do desafio são assim agregados nas palavras desse autor:

> Esta é uma história humana. É sobre nós. Sobre todos nós. Ela nos conta sobre como os humanos responderam a vários desafios, e sobre as consequências de suas várias descobertas, inovações e decisões. O relato

[126] É importante destacar que essa atividade é apresentada, em detalhes, pelo autor, em trabalho posterior, de 2007, objeto de nossa atenção na seção 3.1 (Carson e Rowlands (2007)). Neste artigo de 2002, Carson formula a maioria das bases teóricas para o de 2007.

[127] "Theoretical entities thus emerge from these activities, and we begin to face the same ontological and epistemic questions that led Thales, Pythagoras and others to develop geometry as an abstract science, and led Plato to contemplate the ontological status of pure ideas" (CARSON, 2002, p. 240).

> completo desta história, mesmo na forma de esboço mais telegráfico, leva tempo para ser contado[128] (CARSON, 2002, p. 243, tradução nossa).

O estudo de determinados conteúdos e conceitos justificam-se na medida em que estes consistem em respostas aos desafios teóricos, técnicos e tecnológicos que a humanidade precisou enfrentar para poder avançar e produzir novos conhecimentos e tecnologias. Nessa perspectiva, em termos culturais, a história da humanidade é, portanto, a nossa história, tal como afirmado por Carson (2002); não qualquer história, mas a história da evolução cultural, científica e tecnológica que se pode contemplar hoje, e da qual se faz parte.

O grau de complexidade desses desafios torna-se mais evidente na medida em que verifica-se que as disciplinas formais racionalizam uma forma de pensar que molda o nosso próprio pensar. Compreender isto é também fundamental para atribuir sentido à história da cultura, bem como às disciplinas escolares e a seus conteúdos. Esta, sem dúvida, é uma tarefa difícil e demorada: "leva tempo para construir a explicação de que disciplinas intelectuais formalizadas, línguas e culturas, são as mesmas coisas de que a mente é feita. Elas são as matrizes nas quais se manifesta a cognição formal"[129] (CARSON, 2002, p. 243, tradução nossa). Se isto estiver nítido para o aluno, consolidam-se as razões para o estudo, como também aclaram-se os modos específicos com que cada disciplina sistematiza suas atividades. Por conseguinte, toma-se consciência, por um lado, de que, sem as disciplinas formais, "[...] nossa cognição reduz-se a uma consciência irrefletida"[130] (CARSON, 2002, p. 243, tradução nossa), e, por outro lado, por meio de tais disciplinas nosso modo de pensar e de ver o mundo são forjados.

Carson (2002) sustenta que, ao lado das narrativas históricas, esse tipo de discussão sobre o papel e as peculiaridades das disciplinas, bem como do surgimento e evolução histórica destas, deve ser incorporado ao currículo. Além de propiciar a reflexão sobre os objetos e os condicionamentos de nosso pensar, isso pode ter, também, um efeito motivacional para o estudante.

> Entender como uma disciplina começou, como ela evoluiu e como seus primeiros pioneiros vieram a estimá-la é parte da interface humana que ajuda a personalizar a entrada em uma dessas disciplinas culturais formalizadas. Se podemos reviver esses momentos, então também devemos ser

[128] "This is a human story. It is about us. All of us. It tells us about how humans have responded to various challenges, and about the consequences of their various discoveries, innovations, and decisions. The full account of this story, even in the most telegraphic outline form, takes time to tell" (CARSON, 2002, p. 243).

[129] "It takes time to construct the explanation that formalized intellectual disciplines, languages, and cultures, are the very stuff that mind is made of" (CARSON, 2002, p. 243).

[130] "[...] our cognition reverts to unreflective awareness" (CARSON, 2002, p. 243).

> capazes de adquirir a excitação e interesse que os atendia[131] (CARSON, 2002, p. 243, tradução nossa).

Carson (2002) reconhece esses desafios, sobretudo nas ocasiões em que o uso da história possa parecer superficial. É importante ter claro que o que esse autor propõe é que o objetivo do estudo não é a história de algum determinado assunto/conceito/teoria, mas o próprio assunto/conceito/teoria. Não se trata, pois, de uma substituição de objeto de ensino (CARSON, 2002).

[131] "Understanding how a discipline began, how it evolved, and how its early pioneers came to cherish it is part of the human interface that helps to personalize the entry into one of these formalized cultural disciplines. If we can relive those moments, then we should also be able to acquire the excitement and interest that attended them" (CARSON, 2002, p. 243).

CAPÍTULO

4

A PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Nossa proposta de atividade prática, que apresentamos neste capítulo, baseia-se nos trabalhos de Carson (2002) (que trata da importância da narrativa histórica para o ensino; ver seção 3.2) e de Carson e Rowlands (2007) (sobre o desenvolvimento da abstração no ensino de geometria; ver seção 3.1). Ressalte-se, porém, que não procuramos reproduzir fielmente o modelo de *Ourstory* (Carson (2002); ver seção 3.2), no que diz respeito à construção de uma narrativa amplamente integradora e central a partir da disciplina de história. Restringimo-nos, aqui, à narrativa como ferramenta pedagógica para inserir o estudante em um contexto histórico isolado e bem reduzido de ensino de geometria, com o intuito principal de fomentar a reflexão e despertar a consciência do aluno sobre o caráter essencialmente abstrato da geometria (no que se refere à natureza de seus objetos, de seus procedimentos, de seus recursos de representação, de seus raciocínios). O enfoque histórico destina-se a balizar a trajetória de estudo do aluno, e a motivá-lo ao engajamento nesse processo.

Para tanto, propõe-se uma sequência didática composta de seis aulas, cujo objetivo geral é fazer com que o aluno perceba a evolução de seu pensamento abstrato (e do que neste se encerra, e por este é engendrado), à medida que avança no estudo sobre as figuras geométricas.

Antes de iniciar a descrição da sequência didática e das aulas, algumas considerações preliminares precisam ser feitas a respeito dos tipos de conhecimento construídos e mobilizados nas atividades que se propõe. Viu-se que, para Carson (2002, 2007), a abstração é um tipo de conhecimento cuja construção o aluno precisa identificar com clareza. Entretanto, como já salientado também, a abstração no ensino de geometria diz respeito tanto aos conceitos e conteúdos quanto aos procedimentos geométricos. E considerando que a sequência didática proposta envolve todos esses aspectos, cabe apontar que se está a lidar, portanto, com conhecimentos de duas naturezas distintas. De acordo com Hiebert e Lefevre (2009), os conhecimentos podem ser distinguidos entre conceituais e procedimentais. Isso não significa, porém, que todo conhecimento poderá ser, exclusiva e inequivocamente, enquadrado em uma, ou em outra dessas categorias. Como os próprios autores afirmam: “o cerne de cada um deles [desses dois tipos de conhecimento] é fácil de descrever, mas as bordas externas são difíceis de precisar”[1] (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 3, interpolação e tradução nossas). Um conhecimento para ser classificado como conceitual necessita estar vinculado, em maior ou menor grau, a outros conceitos, para além daquele(s) que o define(m) essencialmente. Isto implica que se deve atentar, também, aos relacionamentos que são estabelecidos entre diferentes conceitos. A abstração na perspectiva platônica, e na perspectiva apresentada por Carson e Rowlands (2007), perpassa e atrela vários conceitos e tipos de conhecimento. Seguindo essa linha de raciocínio, para promover o pensamento abstrato e despertar a consciência do aluno sobre a existência deste, e classificando primeiramente a abstração como um conhecimento conceitual, precisa-se saber, então, o que fazer para promover a construção de um conhecimento desta categoria específica. Quanto a isto, Hiebert e Lefevre (2009, p. 4, tradução nossa) afirmam que “o desenvolvimento do conhecimento conceitual é alcançado através da construção de relações entre pedaços de informação”[2] (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 4, tradução nossa). Acrescentam, ainda, que essa construção pode ser entre dois conhecimentos que o aluno já possui, ou entre um que o aluno possui e outro que está aprendendo. Com base nisso, a sequência didática (exibida no Quadro 7)[3] foi projetada de modo a fazer com que aluno construa o conhecimento conceitual à medida que começa a erigir relações entre diferentes conceitos. A fim de que o aluno tenha clareza sobre os processos e conhecimentos envolvidos, a cada etapa das atividades elaboradas, instiga-se o estudante à elaboração de narrativas, orais ou escritas, com o intuito de tornar as explícitas as relações que está construindo, bem como sua percepção quanto a seu próprio avanço nos diferentes níveis de abstração (em consonância com o que consta da seção 3.1.5). As etapas que propõem-se são procedimentos em vista do desenvolvimento de um conhecimento conceitual. Entretanto, note-se que os próprios procedimentos ao mesmo em que se assentam sobre conhecimentos conceituais, trazem estes à luz na medida em que são executados. Nesse sentido, Hiebert e Lefevre (2009) escrevem que:

> embora seja possível considerar procedimentos sem conceitos, não é tão fácil imaginar um conhecimento conceitual que não esteja ligado a alguns procedimentos. Isto se deve, em parte, ao fato de que procedimentos traduzem conhecimento conceitual em algo observável. Sem procedimentos para acessar e agir sobre o conhecimento, nós não saberíamos que ele estava lá[4] (p. 9, tradução nossa).

1 “The core of each is easy to describe, but the outside edges are hard to pin down” (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 3).

2 “The development of conceptual knowledge is achieved by the construction of relationships between pieces of infonnation” (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 4).

3 Todas as tabelas deste capítulo, que tratam da sequência didática e dos planos de aula, seguem a estrutura e modelos propostos por Oliveira e Chadwick (2008).

4 “[...] although it is possible to consider procedures without concepts, it is not so easy to imagine conceptual knowledge that is not linked with some procedures. This is due, in part, to the fact that

Quadro 7 – Plano da Sequência Didática

Objetivos	(1) Propiciar ao aluno o pensar em abstração (na perspectiva platônica), no processo de aprendizagem de geometria, por meio de uma sequência de atividades; (2) Promover a reflexão sobre a essência das entidades geométricas; (3) Promover a reflexão sobre os objetos a que dizem respeito, efetivamente, os desenhos que os farão em suas representações geométricas. (4) Fomentar no aluno a metacognição quanto aos processos de abstração.
Pré-requisitos	Conhecer as figuras geométricas, suas propriedades básicas e os símbolos utilizados na geometria.
O que os alunos devem poder recordar	As figuras geométricas e suas propriedades básicas.
Atividades a serem desenvolvidas	Serão realizadas 6 aulas, que se iniciam com a observação do espaço físico da escola, passando, em seguida, por diferentes estágios e meios de representação do espaço observado (maquete; desenho literal; plantas baixas, simplificada e detalhada), culminando com uma discussão sobre a natureza dos entes matemáticos e sobre a Teoria das Formas de Platão.
Materiais	Lápis, régua, compasso, esquadro, transferidor, planta do edifício escolar.

Antes da primeira aula, o aluno deverá ser apresentado à história de Tales, para entender o contexto histórico, na Antiguidade, salientando os trabalhos realizados por este personagem com a utilização de figuras geométricas. Para isso, podem ser empregados vídeos ou textos disponíveis na internet, cujo acesso é viabilizado aos alunos por meio de uma lista de *links*. Uma sugestão de encaminhamento dessa atividade pode ser a mesma de Carson (2002) (já citada no capítulo anterior):

> A narrativa sobre Tales, por exemplo, poderia ser seguida de uma experiência com o uso de cordas e estacas de madeira, nas quais as formulações geométricas básicas sejam representadas. Os problemas apresentados na forma concreta, como os egípcios os conheciam originalmente, são problemas vistos com os olhos da mente. Eles são desenhados em papel, e então estas representações são consideradas representações não de cordas e estacas de madeira, mas de linhas e pontos. Assim, entidades teóricas emergem destas atividades e começamos a enfrentar as mesmas questões ontológicas e epistêmicas que levaram Tales, Pitágoras e outros

procedures translate conceptual knowledge into something observable. Without procedures to access and act on the knowledge, we would not know it was there" (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 9).

> a desenvolver a geometria como uma ciência abstrata e levaram Platão a contemplar o status ontológico de ideias puras[5] (p. 240, tradução nossa).

A principal ideia é preparar o aluno para realizar esse itinerário a partir de um problema empírico, e, a cada etapa, desconsiderar aspectos e detalhes não relevantes para a solução procurada, lidando com a matemática de maneira mais genérica, isto é, abstrata. Para isso, apresentam-se ao aluno os personagens que participaram dos principais momentos históricos de desenvolvimento da problemática retratada (CARSON, 2002). Nessa proposta de Carson (2002), a articulação entre o conhecimento procedimental e o conhecimento conceitual é nitidamente perceptível: a abordagem de problemas que utilizam cordas e estacas, com subsequente representação em papel de figuras, exige procedimentos que requerem, utilizam e, ao mesmo tempo, revelam conceitos geométricos. Inspirados nessa ideia, propõe-se como ponto de partida para o desenvolvimento das atividades o espaço da escola em que o aluno estuda. As etapas projetadas para compor esta proposta são: construção de uma maquete do espaço escolar em que o aluno se encontra; esboço de um "desenho literal" a partir da maquete; elaboração de uma planta baixa; a partir dessas representações, solicita-se ao aluno a execução de procedimentos empíricos (medições, observações, comparações, tomada de notas), que, espera-se, induzirão a construção de conhecimentos conceituais geométricos e a abstração. Espera-se que, o aluno, passando do modelo para o desenho literal, avance em grau de abstração pois não mais será necessário representar as paredes; passando do desenho literal para a planta baixa, o avanço em abstração encontra-se na remoção de detalhes, tais como o mobiliário; por fim, passando da planta baixa para a separação das figuras, espera-se que o aluno avance em grau de abstração para considerar as figuras geométricas independente do contexto que as reconheceu inicialmente. Ainda nas últimas aulas, pretende-se promover uma reflexão sobre os entes geométricos e, também, sobre a teoria das formas de Platão. Na sequência didática que se elabora, a primeira aula destina-se à construção da maquete, a partir de medições de determinado espaço da escola escolhido pelo estudante. O plano dessa aula é detalhado no Quadro 8.

A construção desta maquete poderá apresentar alguns desafios aos alunos, como, por exemplo, a colagem das paredes feitas em papelão, de modo a formarem ângulo reto com a base da maquete. Isso pode consistir em ocasião oportuna para uma discussão sobre ângulos. Além disso, pode-se perceber, aqui, como um procedimento pode gerar um conhecimento conceitual. Outra possível dificuldade poderá ser a utilização de cola quente, que demandará a supervisão

[5] "The narrative on Thales for example could be followed by an experience using ropes and wooden stakes in which basic geometrical formulations are represented. Problems presented in concrete form, as the Egyptians knew them originally, become problems seen with the mind's eye. They are drawn on paper, and then these representations are taken to be representations not of ropes and wooden stakes but of lines and points. Theoretical entities thus emerge from these activities, and we begin to face the same ontological and epistemic questions that led Thales, Pythagoras and others to develop geometry as an abstract science, and led Plato to contemplate the ontological status of pure ideas" (CARSON, 2002, p. 240).

Quadro 8 – Plano de Aula 1

Objetivos	(1) Medir os espaços do colégio escolhidos pelo estudante para a realização das atividades; (2) construir uma maquete que possa representar esse espaço.
Pré-requisitos	Conhecer os processos de medição.
O que os alunos devem poder recordar	Os alunos devem recordar processos de medição.
Motivação	Imagine que seja necessário indicar para um aluno recém-chegado à escola o local de sua sala de aula, ou da biblioteca, ou do refeitório. A construção de uma maquete pode ajudar as pessoas que não conhecem os espaços do colégio a neste se situarem e se locomoverem.
Atividades a serem desenvolvidas	Explorar a área do colégio e construir uma maquete.
Materiais	Trena, papelão, tesoura, lápis, régua e cola quente.
Avaliação	Análise da construção da maquete construída, verificando se o aluno conseguiu capturar as formas que as salas possuem, bem como representar todos os ambientes selecionados.

direta do professor, para evitar acidentes. Um resultado esperado para essa maquete seria algo semelhante ao que se vê na Figura 1.

A segunda aula é pensada de modo a fazer com que o aluno ascenda a um segundo nível de abstração. Para tanto, espera-se que, através de discussões promovidas em pequenos grupos de estudantes, sempre balizadas na história narrada sobre Tales, cada aluno perceba a necessidade de um meio de representação espacial mais adequado do que a maquete para pensar sobre o espaço. O modo com que se planeja que isso seja alcançado é descrito na Quadro 9. Um dos resultados desta aula será um desenho literal, algo similar ao que é exibido na Figura 2.

Passa-se, então, à terceira aula, cujo objetivo principal é a construção de uma planta baixa do espaço. Os detalhes de execução dessa aula constam do Quadro 10. Nesta etapa, um resultado esperado para as produções dos alunos é de que esse desenho (da planta baixa) seja feito à mão livre, sem auxílio de instrumentos, tais como régua e esquadro. A Figura 3 exibe um desenho possível, de uma escola genérica, como resultado desta atividade.

De alguma forma, o desenho exibido na Figura 3 tenta representar o espaço da escola, e as formas que os alunos veem. Com base nos desenhos elaborados a mão livre, discute-se a importância da utilização de instrumentos que poderiam conferir à planta baixa esboçada maior precisão. O primeiro desenho produzido pelo aluno é tratado, aqui, como um rascunho para a produção de uma planta a ser produzida com a utilização de régua e esquadro. Espera-se como

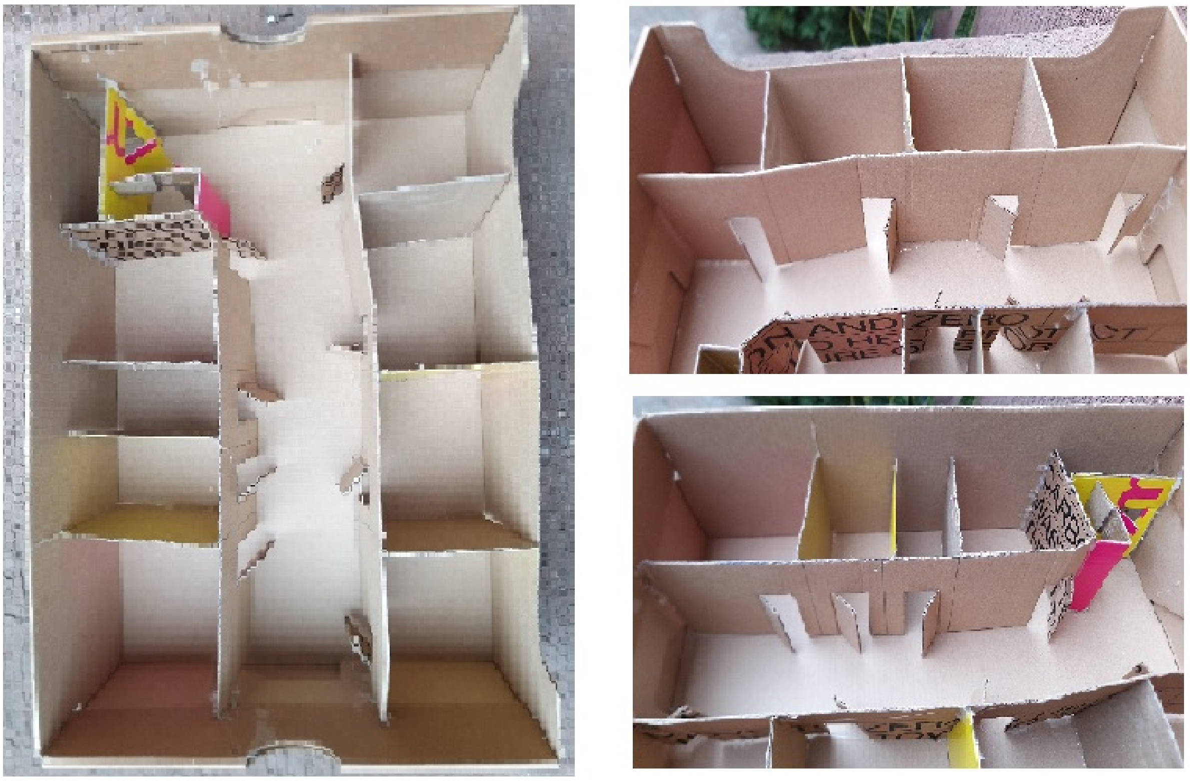


Figura 1 – Exemplo de maquete — 1ª etapa da atividade.

resultado algo similar ao que é exibido na Figura 4. Como se nota nessa segunda planta, alguns elementos de desenho foram incluídos, como título e legenda. É necessário que seja ensinado ao aluno como tais elementos devem ser inseridos, bem como o manuseio correto dos instrumentos; por exemplo, ensinar como construir ângulos retos, retas paralelas etc., com dois esquadros. A construção dessa planta pode auxiliar em outras sequências didáticas que abordem paralelismo e perpendicularismo, ou mesmo na instrução sobre medição de ângulos com transferidor.

As construções feitas durante a terceira aula serão relevantes para a quarta aula, momento em que se procura explicitar a conexão dos procedimentos de construção com os conhecimentos específicos sobre figuras geométricas. Isto se alicerça, reitera-se, no pressuposto de que "o desenvolvimento do conhecimento conceitual é alcançado através da construção de relações entre pedaços de informação" (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 4, tradução nossa). No nosso caso, entende-se que os procedimentos de construção de segmentos paralelos ou perpendiculares é fundamental para que o aluno compreenda conceitos e propriedades geométricas, como, por exemplo, o fato de que o retângulo é um quadrilátero que possui os quatro ângulos retos. Assim, o procedimento de construção de ângulo reto apoia a identificação de retângulos. Na quarta aula (detalhada no Quadro 11), espera-se que os alunos identifiquem, na segunda planta, que os seus elementos constitutivos são retângulos (assinalados com o número 4) e quadrados (assinalados com o número 3). O procedimento que apoia a identificação do quadrado é a medição dos segmentos com a régua. Após a quarta aula, é esperado que os alunos identifiquem as figuras

Quadro 9 – Plano de Aula 2

Objetivos	Construir um desenho que possa representar o colégio o mais fielmente possível.
Pré-requisitos	Ter realizado a maquete da aula anterior para usar de modelo para o desenho.
O que os alunos devem poder recordar	Os alunos podem recordar os detalhes do colégio que observaram durante o processo de construção da maquete.
Motivação	A maquete possui muitas informações como as paredes dos ambientes. Para facilitar as instruções a serem passadas aos novos colegas, recém-chegados, pode-se elaborar um mapa com informações dos locais. Aqui, a intenção é retirar alguns detalhes específicos que se observam na maquete, e avançar para um segundo nível de abstração.
Atividades a serem desenvolvidas	Elaboração de um desenho que represente o espaço com o máximo de detalhes.
Materiais	Lápis, régua, compasso, esquadro, transferidor.
Avaliação	Análise dos desenhos literais do espaço indicarão se os alunos fizeram uma boa observação e representação deste espaço a partir da maquete.

geométricas que apareceram na planta de nossa escola fictícia. Espera-se algo como o que se observa na Figura 5.

Nessa aula é importante pontuar que as figuras geométricas são definidas por um conceito, e não pela sua aparência. Assim, é possível identificar um hexágono na planta do colégio mesmo este não sendo uma figura convexa. Entretanto, ao seguir rigorosamente a definição de ser uma figura geométrica com seis lados, então precisa-se admitir que se trata de um hexágono. Essas construções e identificações vão permitir que, na terceira aula, seja possível mergulhar na teoria das figuras geométricas para entender sua natureza.

Na quinta aula (detalhada no Quadro 12), trabalha-se a noção de representação geométrica. O colégio está sendo representado por sua planta baixa, e, consequentemente, também os conceitos geométricos de triângulo, retângulo etc., por exemplo, serão representados no papel. Cada figura geométrica desenhada no papel é uma representação de uma figura geométrica ideal. Nessa aula, quer-se evidenciar a evolução em termos de abstração que o aluno alcançou, partindo de um esboço de algo (fisicamente) observável até ao conceito puro (inteligível) atrelado à figura geométrica desenhada no papel. Essas reflexões a serem fomentadas nas aulas são importantes para que os alunos se deem conta de que “algumas relações são construídas em um nível mais

Quadro 10 – Plano de Aula 3

Objetivos	Construir uma planta baixa que possa representar o colégio.
Pré-requisitos	Conhecer as figuras geométricas, suas propriedades básicas, os símbolos utilizados na geometria e os procedimentos de medição.
O que os alunos devem poder recordar	Processos de medição.
Motivação	O desenho literal possui menos informações que a maquete; porém, ainda é possível simplificar este mapa. Produza um desenho com o mínimo de detalhes, perceba que ele ficará próximo de uma planta baixa que os arquitetos costumam elaborar.
Atividades a serem desenvolvidas	Construir uma planta baixa.
Materiais	Lápis, papel, régua, compasso, esquadro, transferidor.
Avaliação	Os desenhos com a planta baixa do colégio indicarão se os alunos fizeram uma boa observação do espaço e se conseguiram registrar essas figuras.

Quadro 11 – Plano de Aula 4

Objetivos	Identificar as figuras geométricas que possam aparecer em uma planta de uma escola, e desenhá-las.
Pré-requisitos	Conhecer as figuras geométricas, suas propriedades básicas e os símbolos utilizados na geometria.
O que os alunos devem poder recordar	Recordar a aula anterior mostrando alguns dos mapas construídos pelos alunos.
Motivação	A partir da narrativa e, usando elementos da história da matemática, questionar “Quais figuras que Tales, Pitágoras ou Platão enxergariam nessa planta?”
Atividades a serem desenvolvidas	Desenhar as figuras geométricas.
Materiais	Lápis, régua, compasso, esquadro, transferidor, planta do colégio.
Avaliação	(1) Escrever um texto indicando a figura e sua localização; (2) Fornecer ao aluno uma lista de figuras que ele deverá identificar.

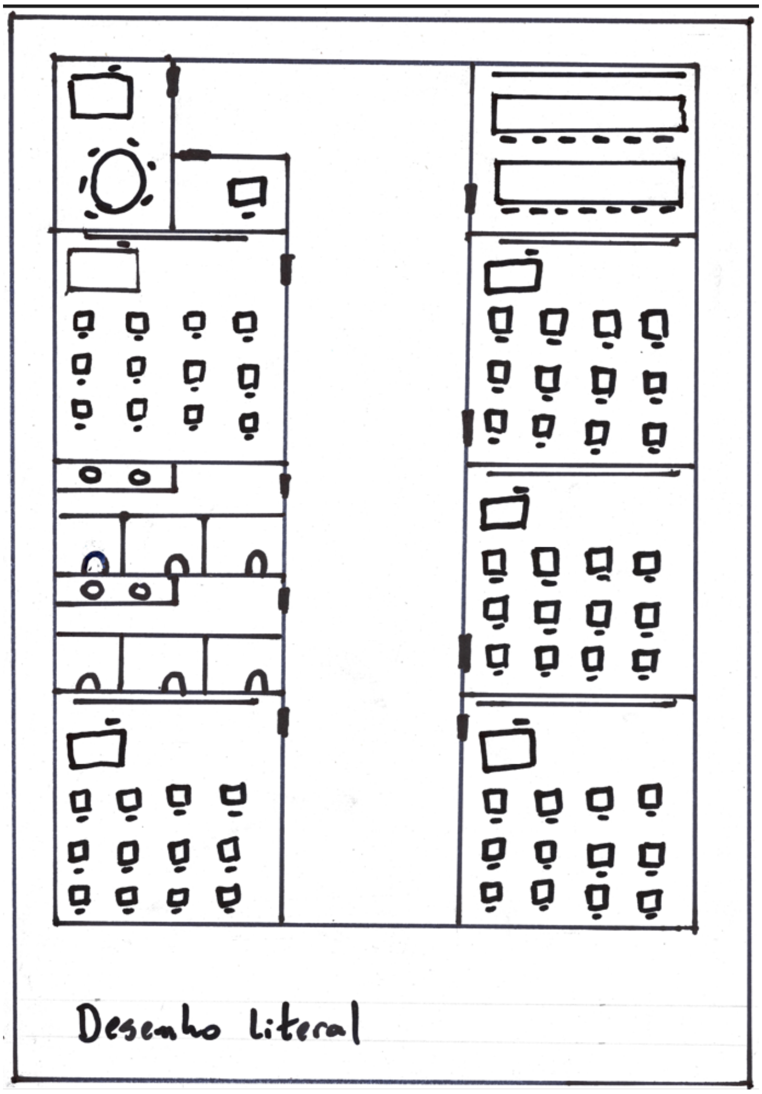


Figura 2 – Exemplo de desenho literal — 2ª etapa da atividade.

alto e abstrato do que os pedaços de informação que elas conectam”[6] (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 5, tradução nossa). Os autores chamam esse nível de reflexivo.

Na sexta aula (detalhada no Quadro 13), pretende-se apresentar a teoria das formas de Platão, evidenciando como ela diz respeito ao que foi discutido na aula anterior sobre os conceitos das figuras, e como essa teoria é um grande marco no pensamento filosófico. Esta aula não pretende esgotar o assunto, mas apenas introduzir o aluno nessa temática como propõe Carson e Rowlands (2007). O próprio autor adverte que “nada aprendido cedo pelas crianças deve ser tomado como certo para sempre, mas deve ser revisitado quando a apreciação se tornar possível para o aprendiz”[7] (CARSON, 2002, p. 241, tradução nossa). Além de introduzir os alunos à teoria das formas de Platão, essa aula tem o papel de “[...] apoiar melhor este curso de

6 “Some relationships are constructed at a higher, more abstract level than the pieces of information they connect” (HIEBERT; LEFEVRE, 2009, p. 5).

7 “Nothing learned early by children should be taken for granted forever, but should be revisited when appreciation becomes possible for the learner” (CARSON, 2002, p. 241).

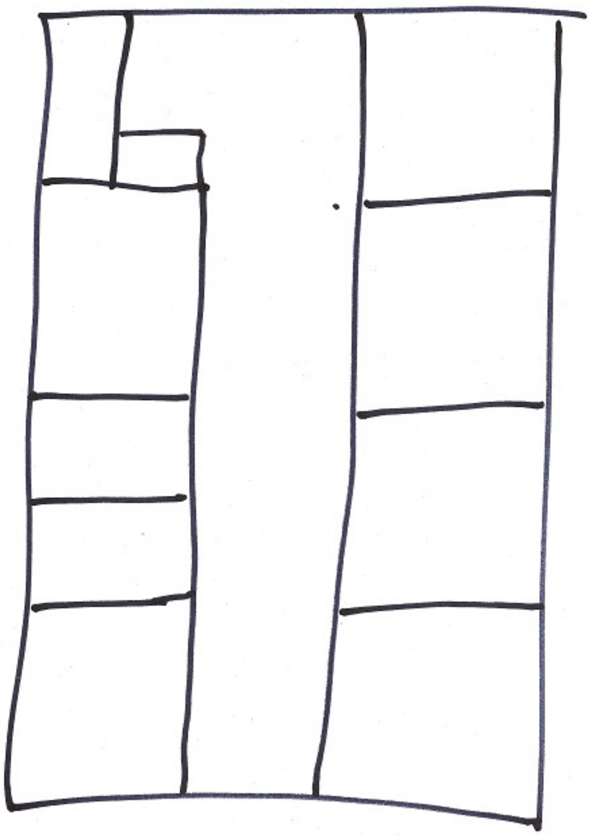


Figura 3 – Exemplo de esboço de planta baixa — 3ª etapa da atividade.

estudo e estabelecer suas reivindicações históricas de relevância"[8] (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944, tradução nossa). Isso significa que ela tem o papel de apresentar essa teoria que conecta o estudo ao contexto histórico de evolução conceitual, pano de fundo dessa abordagem.

[8] "[...] arises that we may better support this course of study and establish its historic claims to relevance" (CARSON; ROWLANDS, 2007, p. 944).

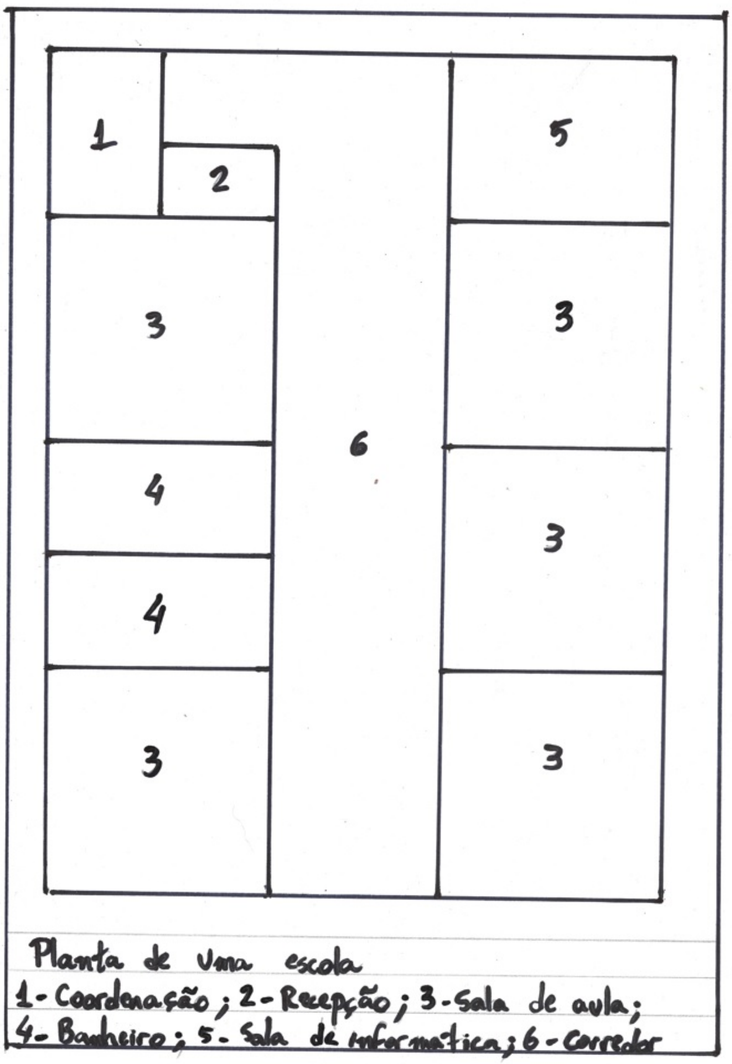


Figura 4 – Exemplo de planta baixa — 4ª etapa da atividade.

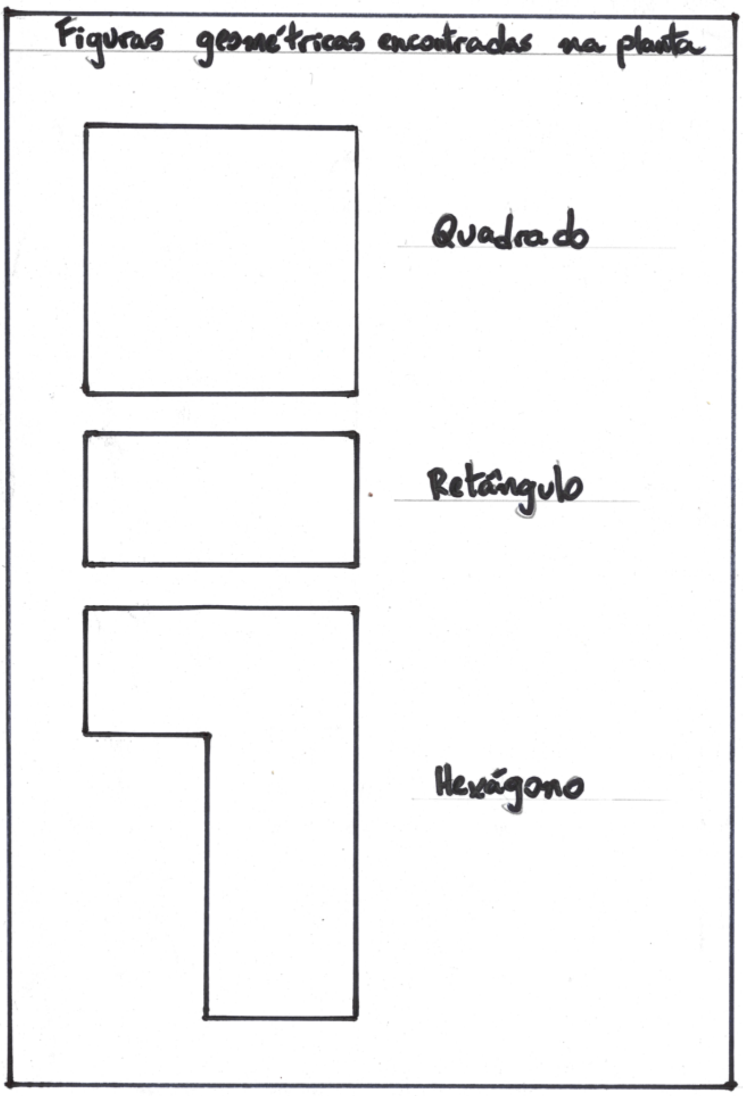


Figura 5 – Exemplo de identificação de figuras geométricas na planta baixa.

Quadro 12 – Plano de Aula 5

Objetivos	Compreender as figuras geométricas desenhadas como representação de conceitos mentais, que, por sua vez, são representações elaboradas a partir de formas (*eidos*, na teoria platônica) geométricas.
Pré-requisitos	Conhecer as figuras geométricas, suas propriedades básicas e os símbolos utilizados na geometria.
O que os alunos devem poder recordar	Recordar a aula anterior, mostrando algumas das figuras construídas pelos alunos.
Motivação	Sobre as figuras construídas: O que elas são? Que significado possuem? Como os gregos, tais como Tales e Platão, compreendiam os desenhos dessas figuras?
Atividades a serem desenvolvidas	Discussão sobre os objetos e entes matemáticos com os quais se constroem os raciocínios em geometria (figuras, formas e representações (visuais/físicas e mentais) geométricas.
Materiais	Desenhos produzidos nas aulas anteriores.
Avaliação	Escrever uma carta para Tales descrevendo as atividades realizadas, detalhando as discussões sobre representação e natureza dos objetos geométricos.

Quadro 13 – Plano de Aula 6

Objetivos	Iniciar o aluno no debate sobre a Teoria das Formas de Platão (no pensamento matemático/geométrico – o que vejo com meus olhos e o que "vejo com os olhos da alma").
Pré-requisitos	Conhecer as figuras geométricas, suas propriedades básicas e os símbolos utilizados na geometria.
O que os alunos devem poder recordar	Recordar a aula anterior apontando algumas das conclusões a que os alunos chegaram, no que se refere aos entes geométricos e às representações de conceitos.
Motivação	Apresentar para o aluno que essa discussão teve início na Antiguidade, e que impactou significativamente o desenvolvimento das ciências, em especial da matemática e da filosofia.
Atividades a serem desenvolvidas	Iniciar o aluno ao debate sobre a Teoria das Formas de Platão (no pensamento matemático/geométrico – o que vejo com meus olhos e o que "vejo com os olhos da alma").
Materiais	Leitura prévia de textos sobre Platão e o platonismo, adaptados, para transposição adequada à faixa etária do aluno.
Avaliação	Escrever uma carta para um amigo explicando como Platão compreende a matemática em sua Teoria das Formas.

CAPÍTULO

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de intervenção pedagógica para ensino de geometria que propusemos assenta-se, como estabelecido desde o início deste trabalho, nas questões relativas à abstração tratadas por Platão, em *A República*. O estudo de tais questões nos exigiram a discussão das ideias centrais de Platão sobre seu modelo educacional, no qual, como vimos, a matemática ocupa lugar de destaque. E, ao nos aprofundarmos nessas ideias, deparamo-nos com princípios metafísicos. Certamente, não há nada em nossa proposta pedagógica que possua qualquer traço metafísico que se assemelhe, minimamente, ao que encontramos nos diálogos platônicos. E assim o fizemos por não acreditarmos ser plausível a transposição do modelo educacional de Platão, em sua integralidade original, para os dias de hoje, isto é, um modelo carregado desses princípios e por eles estruturado. Já nas fases preliminares de nossa investigação, chegamos a nos questionar se a preponderância da metafísica na construção do conhecimento tornaria o pensamento platônico extemporâneo para a elaboração de uma abordagem didática na atualidade. Entretanto, o avanço e o aprofundamento nos estudos, à medida que foram se desenvolvendo, nos mostravam que não. Ao contrário. Primeiramente, porque constatamos que algumas interpretações consagradas da teoria platônica (com destaque para as análises feitas por Shorey) afirmam que o pensamento abstrato, nos moldes platônicos, não diz respeito, obrigatoriamente, a objetos ou princípios metafísicos. Em segundo lugar, porque as questões e reflexões de Platão, bem como sua concepção de aprimoramento do espírito humano, ainda se revelam extremamente pertinentes (e, portanto, atuais), para pensar educação e para balizar a prática pedagógica; Platão discute questões fundamentais da humanidade que são atemporais, e formula teorias sobre elas, de tal modo consistentes, que é difícil dizer, categoricamente, que as filosofias contemporâneas apresentem explicações muito melhores do que as dele. Em terceiro lugar, porque Platão aborda aspectos fundantes da matemática, fornecendo elementos e levantando questionamentos essenciais para se discutirem os processos, conteúdos e objetos envolvidos no pensamento matemático. Julgamos que a articulação de todos esses aspectos compõe um quadro teórico robusto para nos debruçarmos sobre as problemáticas do sentido da educação, do papel formativo da matemática para aluno da Educação Básica e da prática pedagógica do professor de matemática.

Consideramos que, para o aprimoramento de nossa proposta de intervenção pedagógica, seria importante a realização de uma pesquisa empírica, no futuro, para que, aplicando as atividades em condições concretas de ensino, pudéssemos investigar, por exemplo: (a) como efetivamente o aluno aprende, ou não, geometria com essas atividades; (b) se ocorre a atribuição de sentido ao estudo de matemática; (c) se há aceitação ou rejeição a uma estratégia de ensino de matemática organizada em torno de narrativas históricas; (d) se há viabilidade de implementação em escolas públicas de Educação Básica.

Por fim, não poderíamos concluir este trabalho sem uma última menção ao processo ascético da alma, espinha dorsal do modelo educacional platônico, sobre o qual nos debruçamos do início ao fim desta pesquisa. Na alegoria da Caverna, Platão sublinha a necessidade de elevação da mente em direção à luz do conhecimento, para alcançarmos a clareza das realidades superiores. Depois de tudo o que se expôs a esse respeito, encerramos, fazendo nossas as interrogações de Nettleship: "Até que ponto a mente humana realmente obedece a este princípio de progresso? Qual é o estado real e a opinião da humanidade no que diz respeito à sua 'educação', no sentido mais amplo em que agora passamos a usar essa palavra?"

REFERÊNCIAS

ANDERSON, G. **The second sophistic**: a greek cultural phenomenon in the Roman Empire. London: Routledge, 2009. Citado nas páginas 28 e 29.

BARROW, R. **Plato**. London: Bloomsbury Publishing, 2007. Citado nas páginas 61 e 63.

BELL, J. L. **The art of the intelligible**: an elementary survey of Mathematics in its conceptual development. Berlin: Springer, 1999. (The Western Ontario Series in Philosophy of Science, 63). Citado nas páginas 64, 65, 67, 75 e 81.

BERNARD, S. **Quoting Plato: Stephanus references**. 2001. Disponível em: https://www.plato-dialogues.org/faq/faq007.htm. Acesso em: 13 out. 2021. Citado na página 38.

BURNYEAT, M. F. Platonism and mathematics: a prelude to discussion. In: BURNYEAT, M. F. **Explorations in ancient and modern philosophy**. Cambride, UK: Cambridge University Press, 2012. v. II, p. 145–172. Citado na página 59.

BURNYEAT, M. F. Plato on why mathematics is good for the soul. In: BURNYEAT, M. F. **Explorations in ancient and modern philosophy**. Cambride, UK: Cambridge University Press, 2022. v. III, p. 5–72. Citado nas páginas 59, 66 e 67.

CARSON, R. N. The Epic Narrative of Intellectual Culture as a Framework for Curricular Coherence. **Science & Education**, v. 11, p. 231–246, 2002. Citado nas páginas 25, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 119, 121, 122 e 127.

CARSON, R. N.; ROWLANDS, S. Teaching the Conceptual Revolutions in Geometry. **Science & Education**, v. 16, n. 9–10, p. 921–954, 2007. Citado nas páginas 24, 25, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 111, 115, 119, 120, 127 e 128.

CATTANEI, E. **Entes matemáticos e metafísica**: Platão, a Academia e Aristóteles em confronto. Tradução de Fernando S. Moreira. Revisão técnica Marcelo Perine. São Paulo: Edições Loyola, 2005. Citado nas páginas 63, 64, 65, 66, 70, 72, 74, 75, 76 e 77.

CERDA, M. A. A. Paideia: entre lo político y la política de la institución imaginaria de la educación. **methaodos.revista de ciencias sociales**, v. 8, n. 1, mar. 2020. ISSN 2340-8413. Number: 1. Disponível em: https://www.methaodos.org/revista-methaodos/index.php/methaodos/article/view/339. Acesso em: 3 jul. 2021. Citado na página 28.

CONNE, F. Saber e conhecimento na perspectiva da transposição didáctica. In: BRUN, J. (dir.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 2000, (Horizontes Pedagógicos, 62). cap. 5, p. 219–267. Citado na página 21.

COWLEY, W. H. The Seven Liberal Arts Hoax. **Improving College and University Teaching**, v. 26, n. 1, p. 97–99, 1978. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/27565196. Acesso em: 7 out. 2021. Citado na página 32.

CROSS, R. C.; WOOZLEY, A. D. **Platos's *Republic***: a philosophical commentary. London: The MacMillan Press, 1971. Citado nas páginas 38, 42, 46, 50, 51, 52, 54, 55, 67, 68, 69 e 70.

ELSNER, J. Paideia: Ancient Concept and Modern Reception. **International Journal of the Classical Tradition**, v. 20, n. 4, p. 136–152, dez. 2013. ISSN 10730508. Publisher: Springer Nature. Disponível em: https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=aph&AN=92870078&lang=pt-br&site=ehost-live. Citado nas páginas 23, 28, 29 e 33.

FERGUSON, A. S. Plato's Simile of Light. Part I. The Similes of the Sun and the Line. **The Classical Quarterly**, v. 15, n. 3-4, 1921. Citado na página 42.

FERGUSON, A. S. Plato's Simile of Light. Part II. The Allegory of the Cave. **The Classical Quarterly**, v. 16, n. 1, 1922. Citado na página 42.

GOMME, A. W.; CADOUX, T. J.; RHODES, P. J. **trittyes**. 2016. Disponível em: https://oxfordre.com/classics/view/10.1093/acrefore/9780199381135.001.0001/acrefore-9780199381135-e-6573. Citado na página 46.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In: HIEBERT, J. (ed.). **Conceptual and procedural knowledge**: the case of Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2009. p. 1–27. Citado nas páginas 119, 120, 121, 124 e 127.

HORN, C. Werner Jaeger's Paideia and his "Third Humanism". **Educational Philosophy & Theory**, v. 50, n. 6/7, p. 682–691, jul. 2018. ISSN 00131857. Publisher: Routledge. Disponível em: https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=aph&AN=128289616&lang=pt-br&site=ehost-live. Citado na página 33.

JAEGER, W. **Paideia**: a formação do homem grego. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2013. Citado nas páginas 23, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 36 e 47.

LIDDELL, H. G.; SCOTT, R. **A greek-english lexicon**. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones, with the assistance of Roderick McKenzie. Oxford: Clarendon Press, 1940. Disponível em: https://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.04.0057%3Aentry%3Dlo%2Fgos. Citado na página 35.

LINNEBO, Platonism in the Philosophy of Mathematics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Spring 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018. Citado nas páginas 23, 71 e 73.

MARROU, H.-I. **História da educação na Antiguidade**. São Paulo: E.P.U., 1990. Citado nas páginas 23, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41 e 56.

MATTÉI, J.-F. **Platão**. Tradução Maria Leonor Loureiro. São Paulo: Editora Unesp, 2010. Citado nas páginas 23, 37, 39, 40, 41, 46, 50, 51, 52, 57, 60, 61 e 62.

MATTÉI, J.-F. (org.). **La naissance de la Raison en Gréce**. Paris: PUF, 1990. Citado na página 40.

MORAVCSIK, J. **Platão e platonismo**: aparência e realidade na ontologia, na epistemologia e na ética. Tradução de Cecília Camargo Bertalotti. São Paulo: Edições Loyola, 2006. Citado nas páginas 24, 58, 61, 66, 69, 70, 71, 72, 73 e 74.

MULLANEY, J. V. The Liberal Arts in the Aristotelian-Thomist Scheme of Knowledge. **The Thomist: A Speculative Quarterly Review**, v. 19, n. 4, p. 481–505, 1956. ISSN 2473-3725. Disponível em: https://muse.jhu.edu/article/642979. Citado na página 32.

MURPHY, N. R. **The interpretation of Plato's *Republic***. London: Oxford University Press, 1967. Citado na página 42.

NETTLESHIP, R. L. **The theory of education in Plato's *Republic***. London: Oxford University Press, 1961. Citado nas páginas 39, 40, 42, 68, 69 e 134.

OLIVEIRA, J. B. A.; CHADWICK, C. **Aprender e ensinar**. 9. ed. Belo Horizonte: Instituto Alfa e Beto, 2008. Citado na página 120.

PEREIRA, M. H. R. Introdução. In: PLATÃO. **A República**. 14. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2014. p. V–LIII. Citado nas páginas 39, 41, 42, 46, 50, 51, 52, 53 e 60.

PETERS, R. S. A Educação como iniciação. In: ARCHAMBAULT, R. D. (org.). **Educação e análise filosófica**. São Paulo: Saraiva, 1979. p. 101–130. Citado na página 22.

PLATÃO. **A República**. Introdução, tradução e notas de Maria Helena da Rocha Pereira. 14a. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2014. Citado nas páginas 45 e 77.

RAVEN, J. E. **Plato's thought in the Making**. London: Cambridge University Press, 1965. Citado na página 42.

REEVE, C. D. C. Introduction. In: PLATO. **Plato *Republic***. Indianapolis, USA: Hackett Publishing Company, 2004. p. ix–xxvii. Citado na página 66.

REEVE, C. D. C. **Philosopher-Kings**: the argument of Plato's Republic. Indianapolis, USA: Hackett Publishing Company, 2006. Citado nas páginas 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 63 e 72.

RIZEK, R. Teoria da harmonia em Platão. **Letras Clássicas**, n. 2, p. 251–299, 1998. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/letrasclassicas/article/view/73740. Acesso em: 18 out. 2022. Citado na página 65.

SCHÄFER, C. (org.). **Léxico de Platão**: conceitos fundamentais de Platão e da tradição platônica. Tradução de Milton Camargo Mota. São Paulo: Edições Loyola, 2012. Citado nas páginas 39, 40, 52, 59, 72, 74, 77, 78 e 79.

SHOREY, P. **What Plato said**. repr. Chicago: The University of Chicago Press, 1968. Citado nas páginas 79, 80 e 133.

SNELL, B. **A cultura grega e as origens do pensamento europeu**. São Paulo: Perspectiva, 2012. (Estudos, 168). Citado nas páginas 34, 36, 37 e 38.

TUBBS, N. **Philosophy and modern liberal arts education**: freedom is to learn. Hampshire, England: Palgrave and Macmillan, 2014. Citado na página 32.

TYMIENIECKA, A.-T. (ed.). **Paideia**: Philosophy/phenomenology of life inspiring education for our times. [S.l.]: SPRINGER-SCIENCE+BUSINESS MEDIA, 2000. Citado nas páginas 23 e 24.

VERGNAUD, G. A teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (dir.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 2000, (Horizontes Pedagógicos, 62). cap. 3, p. 155–191. Citado na página 21.

WEDBERG, A. **Plato's philosophy of Mathematics**. Stokholm: Almqvist & Wiksell, 1955. Citado nas páginas 76, 77, 78, 79 e 81.

WORLD HISTORY ENCYCLOPEDIA. **Hellenistic Period.** 2020. Disponível em: https://www.worldhistory.org/Hellenistic_Period/. Citado na página 29.

ZAMBON, L. B.; TERRAZAN, E. A. Identidade do ensino médio no contexto de implementação da reestruturação curricular da SEDUC/RS: mudança ou continuidade? **Holos**, v. 3, n. 1, p. 132–140, 2017. Citado nas páginas 22 e 92.