

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**KATIANE SOUZA DE OLIVEIRA**

**INVESTIGANDO PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS  
COM O GEOGEBRA E O GNU OCTAVE**

**CURITIBA**

**2023**

**KATIANE SOUZA DE OLIVEIRA**

**INVESTIGANDO PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS  
COM O GEOGEBRA E O GNU OCTAVE**

**Investigating arithmetic, algebraic, and geometric problems with GeoGebra and GNU  
Octave**

Dissertação apresentada como requisito para  
obtenção do título de Mestra no Programa  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

Coorientadora: Profa. Dra. Olga Harumi Saito

**CURITIBA**

**2023**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do  
trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o  
devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



**Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Curitiba**



KATIANE SOUZA DE OLIVEIRA

**INVESTIGANDO PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GEOGEBRA E O GNU OCTAVE**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 26 de Outubro de 2023

Dr. Rudimar Luiz Nos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Carmen Vieira Mathias, Doutorado - Universidade Federal de Santa Maria (Ufsm)

Dra. Mari Sano, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 26/10/2023.

*Dedico este trabalho à minha mãe, Marise de Souza Oliveira, e ao meu pai, Vilson de Oliveira (in memorian).*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família e aos meus amigos, que me apoiaram nesta árdua jornada; aos professores de todas as fases da minha vida educacional, que contribuíram à minha evolução profissional e como ser humano; ao meu orientador Prof. Dr. Rudimar Nós e à minha coorientadora Profa. Dra. Olga Harumi Saito, que com muita paciência compartilharam seus saberes e nortearam este projeto, acreditando em mim quando nem eu mesma me sentia capaz; a Deus, que me concedeu esperança, saúde e fé para me manter firme durante todo o processo.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Curitiba da UTFPR, pela concessão de uma bolsa de estudos durante seis meses.

*Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.*

Paulo Freire (1921 – 1997): educador e filósofo brasileiro.

## RESUMO

OLIVEIRA, Katiane Souza de. **Investigando problemas aritméticos, algébricos e geométricos com o GeoGebra e o GNU Octave**. 125 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2023.

Propomos neste trabalho atividades didáticas para o professor de matemática da Educação Básica empregar/adaptar ao abordar em sala de aula conteúdos como divisibilidade, funções, matrizes, áreas, volumes e seções cônicas. Na elaboração das atividades didáticas, utilizamos como recurso metodológico a resolução de problemas via tecnologias digitais, contemplando competências específicas e habilidades delineadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (RCEMP). Os problemas estruturados nas sequências didáticas são solucionados com o auxílio dos softwares GeoGebra e GNU Octave, ambos de acesso remoto e gratuito, e são extensões de problemas e contos presentes em duas das obras de Malba Tahan: “O homem que calculava” e “Matemática divertida e curiosa”. Concluimos que o emprego de tecnologias digitais na solução de problemas aritméticos, algébricos e geométricos possibilita particularizar/generalizar resultados assim como inter-relacionar conteúdos.

**Palavras-chave:** Malba Tahan; divisibilidade; realce de imagens; seções cônicas; resolução de problemas.

## ABSTRACT

OLIVEIRA, Katiane Souza de. **Investigating arithmetic, algebraic, and geometric problems with GeoGebra and GNU Octave**. 125 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2023.

In this work, we propose didactic activities for mathematics teachers in Basic Education to employ/adapt when addressing content such as divisibility, functions, matrices, areas, volumes, and conic sections in the classroom. In developing the didactic activities, we use problem-solving via digital technologies as a methodological resource, covering specific competencies and skills outlined in the National Common Curricular Base (BNCC) and the Curriculum Reference for High School in Paraná (RCEMP). We solve the problems structured in the didactic sequences with the help of GeoGebra and GNU Octave software, which are freely accessible remotely. These problems are extensions of propositions and stories in two of Malba Tahan's works: "The Man Who Counted" and "Amusing and Curious Mathematics". We conclude that using digital technologies to solve arithmetic, algebraic, and geometric problems makes it possible to particularize/generalize results and interrelate content.

**Keywords:** Malba Tahan; divisibility; image enhancement; conic sections; problem solving.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Contos escritos por Mello e Souza na revista ERRE . . . . .	17
Figura 1.2 – Conto escrito por Júlio Cesar de Mello e Souza sob o pseudônimo R. V. Slady	18
Figura 2.1 – Capa do livro <i>O homem que calculava</i> , edição de 1937 . . . . .	28
Figura 2.2 – Interpretação geométrica do Problema 2.1 no GeoGebra: as funções $f(x)$ (vermelho), $g(x)$ (azul), $h(x)$ (rosa), $r(x)$ (marron) e $s(x)$ (verde) . . . . .	35
Figura 2.3 – Script para solucionar o Problema 2.1: comandos iniciais . . . . .	37
Figura 2.4 – Script para solucionar o Problema 2.1: estrutura final . . . . .	37
Figura 2.5 – (a) Atribuição de valor para $b$ ; (b) valores calculados para $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ . . . . .	38
Figura 2.6 – Solução do Problema 2.1 para $b = 1$ . . . . .	38
Figura 3.1 – A evolução do quadrado mágico . . . . .	42
Figura 3.2 – Gravura Melancolia de Albrecht Dürer . . . . .	43
Figura 3.3 – Cena <i>O beijo de Judas</i> . . . . .	43
Figura 3.4 – Quadrado mágico puro de ordem 3 . . . . .	48
Figura 3.5 – Quadrado mágico imperfeito . . . . .	51
Figura 3.6 – (a) Quadrado hipermágico de ordem 3; (b) quadrado mágico obtido com o deslocamento da 1ª e 3ª colunas . . . . .	51
Figura 3.7 – Quadrado de Dürer . . . . .	52
Figura 3.8 – Quadrado mágico <i>pandiagonal</i> de ordem 8 . . . . .	53
Figura 3.9 – Script para calcular a transposta da matriz $A$ . . . . .	54
Figura 3.10–Matrizes $A$ e $A^t$ e seus determinantes . . . . .	55
Figura 3.11–Matrizes $A$ e $B$ e seus determinantes . . . . .	55
Figura 3.12–(a) Matrizes $C$ , $C^t$ e $D$ e seus determinantes; (b) matrizes $E$ , $E^t$ e $F$ e seus determinantes; (c) matrizes $G$ , $G^t$ e $H$ e seus determinantes . . . . .	56
Figura 3.13–(a) Script do espelhamento das matrizes $A$ e $A_h$ ; (b) matrizes $A$ , $A_h$ e $A_{h,v}$ . . . . .	57
Figura 3.14–(a) Script do espelhamento das matrizes $B$ e $B_h$ ; (b) matrizes $B$ , $B_h$ , $B_{h,v}$ . . . . .	57
Figura 3.15–Script para o cálculo do determinante da matriz $L$ . . . . .	58
Figura 3.16–Determinante da matriz $L$ . . . . .	58
Figura 3.17–Script para o cálculo dos cofatores: (a) $L_{11}$ ; (b) $L_{12}$ ; (c) $L_{13}$ ; (d) $L_{14}$ . . . . .	59
Figura 3.18–Cálculo dos cofatores: (a) $L_{11}$ e $L_{12}$ ; (b) $L_{13}$ e $L_{14}$ . . . . .	59
Figura 3.19–(a) Script para calcular $DL_{11}$ , $DL_{12}$ , $DL_{13}$ e $DL_{14}$ ; (b) cálculo do determinante da matriz $L$ . . . . .	60
Figura 3.20–Determinante da matriz $L$ : (a) script com o comando round; (b) valor calculado com o comando round . . . . .	60
Figura 3.21–(a) Script para calcular os cofatores $M_{11}$ , $M_{12}$ , $M_{13}$ e $M_{14}$ ; (b) cálculo dos cofatores $M_{11}$ , $M_{12}$ , $M_{13}$ e $M_{14}$ . . . . .	61

Figura 3.22–Determinante da matriz $M$ : (a) script com o comando round; (b) valor calculado com o comando round . . . . .	61
Figura 3.23–Determinante da matriz $L$ (3.18) no GNU Octave: (a) format (padrão), format long e format short; (b) format short $g$ , format short $e$ e format bank . . . . .	63
Figura 4.1 – O cone de revolução de eixo $e$ , vértice $V$ e abertura $2\theta$ . . . . .	68
Figura 4.2 – Elipse: (a) perfil lateral do plano $\alpha$ secante a uma folha do cone; (b) interseção do plano $\alpha$ com a superfície do cone . . . . .	69
Figura 4.3 – Parábola: (a) perfil lateral do plano $\alpha$ secante a uma folha do cone e paralelo a uma geratriz; (b) interseção do plano $\alpha$ com a superfície do cone . . . . .	70
Figura 4.4 – Hipérbole: (a) perfil lateral do plano $\alpha$ secante às duas folhas do cone; (b) interseção do plano $\alpha$ com a superfície do cone . . . . .	70
Figura 4.5 – Hipérbole $\mathcal{H}$ e seus elementos . . . . .	71
Figura 4.6 – Relação entre as medidas $a$ , $b$ e $c$ na hipérbole $\mathcal{H}$ . . . . .	72
Figura 4.7 – Esboço: (a) do altar de Apolo; (b) do altar de Apolo duplicado . . . . .	73
Figura 4.8 – Parábola $\mathcal{P}$ e seus elementos . . . . .	75
Figura 4.9 – Parábolas: (a) $\mathcal{P} : y^2 = 4px$ ; (b) $\mathcal{P} : y^2 = -4px$ ; (c) $\mathcal{P} : x^2 = 4py$ ; (d) $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ . . . . .	77
Figura 4.10–Parábolas $x^2 = ky$ (azul) e $y^2 = 2kx$ (laranja), com $k = 3$ . . . . .	78
Figura 4.11– <i>Latus rectum</i> $\overline{LL'}$ da parábola . . . . .	78
Figura 4.12– <i>Latus rectum</i> $\overline{LL'}$ e $\overline{L_1L'_1}$ das parábolas $x^2 = ky$ e $y^2 = 2kx$ , respectivamente, com $k = 2$ . . . . .	79
Figura 4.13–Parábolas $x^2 = ky$ (azul) e $y^2 = 2kx$ (laranja), a reta $x = \sqrt[3]{2}k$ (verde) e os segmentos $\overline{V_pD}$ e $\overline{V_pE}$ , de comprimentos $k$ e $x$ , respectivamente, com $k = 2$ . . . . .	80
Figura 4.14–Cubos de arestas $k$ e $\sqrt[3]{2}k$ , com $k = 4$ . . . . .	81
Figura 4.15–Interseção $H$ da parábola $x^2 = ky$ com a hipérbole $xy = 2k^2$ (laranja), onde $k = 3$ . . . . .	81
Figura 4.16–Assíntotas da hipérbole $xy = 2k^2$ , com $k = 2$ . . . . .	82
Figura 4.17–Bissetrizes (verde) em relação aos eixos $Ox$ e $Oy$ . . . . .	83
Figura 4.18–Retângulo base da hipérbole $xy = 2k^2$ e quadrado inscrito . . . . .	83
Figura 4.19–Cônicas $x^2 = ky$ e $xy = 2k^2$ , com $k = 2$ , e as arestas $\overline{V_pB}$ e $\overline{V_pE}$ . . . . .	84
Figura 4.20–Volume dos cubos de arestas $k$ e $\sqrt[3]{2}k$ , com $k = 20$ . . . . .	85
Figura 5.1 – Amigos confraternizando . . . . .	87
Figura 5.2 – Script no GNU Octave para solucionar o Problema 5.1 . . . . .	88
Figura 5.3 – Janela de Comandos no GNU Octave para inserção dos valores das variáveis: (a) $a$ ; (b) $b$ ; (c) $c$ . . . . .	89
Figura 5.4 – Solução do Problema 5.1 via GNU Octave . . . . .	89
Figura 5.5 – (a) Fotografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza; (b) recorte ampliado da fotografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza . . . . .	90
Figura 5.6 – Representação de uma imagem digital bidimensional . . . . .	91

Figura 5.7 – Exemplos de histograma com manipulação de contraste e o brilho . . . . .	92
Figura 5.8 – Histograma da função de transferência . . . . .	93
Figura 5.9 – Histograma da função linear . . . . .	94
Figura 5.10–Professor Júlio Cesar de Mello e Souza . . . . .	96
Figura 5.11–Script no GNU Octave: carregando o pacote de imagem e criando uma variável	96
Figura 5.12–Script no GNU Octave: visualizando a imagem da Figura 5.10 . . . . .	97
Figura 5.13–Visualizando informações da Figura 5.10 no GNU Octave . . . . .	97
Figura 5.14–Histograma da imagem na Figura 5.10 . . . . .	98
Figura 5.15–Script no GNU Octave para realce da imagem na Figura 5.10 . . . . .	99
Figura 5.16–Dados retornados pelo GNU Octave segundo o script para realce da imagem na Figura 5.10 . . . . .	99
Figura 5.17–Realce linear sem saturação no GNU Octave: (a) script completo; (b)–(c) janela de comandos para inserção dos valores de $Y_{max}$ e $Y_{min}$ . . . . .	100
Figura 5.18–Imagem do professor Júlio Cesar de Mello e Souza: (a) realçada no GNU Octave; (b) histograma do realce . . . . .	101
Figura 5.19–Imagem do professor Júlio Cesar de Mello e Souza: (a) imagem inicial sem realce; (b) imagem após realce linear sem saturação . . . . .	101
Figura 5.20–Kit com três cubos de pelúcia . . . . .	103
Figura 5.21–Script referente às variáveis atreladas a: (a) $c_1$ ; (b) $c_2$ ; (c) $c_3$ e totais . . . . .	105
Figura 5.22–Dados de entrada após a execução do script . . . . .	105
Figura 5.23–Dados calculados atribuindo-se $a_1 = 20\text{ cm}$ . . . . .	106
Figura 5.24–Estimativas para $v_{max}$ : (a) $a_1 = 41\text{ cm}$ ; (b) $a_1 = 42\text{ cm}$ . . . . .	106
Figura 5.25–Script contendo as restrições para o tamanho das arestas dos cubos do kit . .	107
Figura 5.26–Mensagens retornadas pelo GNU Octave para valores de $a_1$ que violem as restrições: (a) $a_1 < 5\text{ cm}$ ; (b) $a_1 > 41\text{ cm}$ . . . . .	107
Figura 5.27–Execução do script para: (a) $a_1 = 5\text{ cm}$ ; (b) $a_1 = 41\text{ cm}$ ; (c) $a_1 = 25\text{ cm}$ . .	108
Figura 5.28–Pôr do Sol em Morretes–PR . . . . .	109
Figura 5.29–Releitura do “Pôr do Sol em Morretes” . . . . .	111
Figura 5.30–Museu Oscar Niemeyer . . . . .	112
Figura 5.31–MON e o arquiteto Oscar Niemeyer . . . . .	112
Figura 5.32–Parábolas e hipérbolas parametrizadas . . . . .	114
Figura 5.33–Prismóide que imita o “Olho” . . . . .	114
Figura 5.34–Paralelepípedo reto-retângulo que imita a base do “Olho” . . . . .	115
Figura 5.35–Planos e espelho d’água . . . . .	115
Figura 5.36–Uma releitura do MON . . . . .	116
Figura 5.37–(a) MON; (b) releitura do MON . . . . .	116
Figura 5.38–Torre Eiffel . . . . .	117

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CREP	Currículo da Rede Estadual Paranaense
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
MON	Museu Oscar Niemeyer
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RCEMP	Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SPRING	Sistema de Processamento de Informações Georeferenciadas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Letra grega minúscula alfa
$\theta$	Letra grega minúscula teta
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\in$	Pertence a
$\cup$	União
$\leq$	Menor ou igual do que
$\geq$	Maior ou igual do que
$\neq$	Diferente de
$a \equiv b \pmod{m}$	$a$ e $b$ são congruentes módulo $m$
$A \setminus \{b\}$	Conjunto $A$ acrescido do elemento $b$
$a b$	$a$ divide $b$
$a \nmid b$	$a$ não divide $b$
$d(P, B)$	Distância do ponto $P$ ao ponto $B$
$\det(A)$	Determinante da matriz $A$
mmc	Mínimo múltiplo comum
sinh	Seno hiperbólico
cosh	Cosseno hiperbólico

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	Biografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza	16
1.2	O GeoGebra e o GNU Octave	21
1.3	Justificativa para a escolha do tema	22
1.4	Revisão da bibliografia	24
1.5	Objetivos	26
1.5.1	Objetivo geral	26
1.5.2	Objetivos específicos	26
1.6	Procedimentos metodológicos	26
1.7	Estrutura do trabalho	26
<b>2</b>	<b>O PROBLEMA DOS 35 CAMELOS</b>	<b>28</b>
2.1	Desvendando o problema	30
2.2	Usando congruências	32
2.2.1	Interpretação geométrica com o GeoGebra	34
2.2.2	Interpretação algébrica com o GNU Octave	36
<b>3</b>	<b>O PROBLEMA DOS QUADRADOS MÁGICOS</b>	<b>39</b>
3.1	Retratando o quadrado mágico	42
3.2	Definindo o quadrado mágico	44
3.3	Quadrado mágico puro de ordem $n$	48
3.4	Classificação dos quadrados mágicos	50
3.5	Cálculo do determinante de um quadrado mágico de ordem 3 e 4 usando o GNU Octave	54
3.6	Algarismos significativos no GNU Octave	62
<b>4</b>	<b>O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO</b>	<b>64</b>
4.1	A hipérbole como figura de linguagem	65
4.2	A hipérbole como seção cônica	67
4.3	A duplicação do cubo	72
4.4	Duplicando o cubo com o GeoGebra	77
4.4.1	Usando duas parábolas	77
4.4.2	Usando uma parábola e uma hipérbole	81
<b>5</b>	<b>ATIVIDADES DIDÁTICAS COM O GEOGEBRA E O GNU OCTAVE</b>	<b>86</b>
5.1	Atividade 1: lanche com amigos	86
5.2	Atividade 2: realçando imagens	90

5.3	Atividade 3: duplicando e triplicando cubos . . . . .	102
5.4	Atividade 4: releitura de imagens . . . . .	109
5.4.1	Releitura do pôr do sol em Morretes–PR . . . . .	109
5.4.2	Releitura do Museu Oscar Niemeyer (MON) . . . . .	111
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>118</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>119</b>
	<b>Índice . . . . .</b>	<b>124</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A resolução de problemas pode ser considerada um tema quase tão antigo quanto a contagem (Nós; Almeida, 2023). Além da arte de contar, os primeiros registros de atividades matemáticas datam de 4000 anos atrás. Tais registros são oriundos dos deltas férteis do Nilo (Egito) e das planícies entre os rios Tigre e Eufrates (Mesopotâmia, hoje Iraque) (Rooney, 2012).

Há algum tempo vem-se discutindo questões acerca da abordagem e da aplicabilidade da resolução de problemas nas escolas.

Desde o início da história escrita, os povos se interessam em aplicar a matemática a situações descritas verbalmente. No século XX também, com um hiato de vinte anos nas décadas de 60 e 70, uma das metas importantes da matemática escolar tem sido a solução de aplicações e de problemas. Recentemente, os educadores em matemática passaram a dar muita atenção a essa meta, em especial depois do aparecimento da *Agenda for Action* (1980), do NCTM, segundo a qual a resolução de problemas deveria ser o foco do ensino da matemática (Coxford; Shulte, 1994, p. 135-136).

Assim, considera-se de suma importância que os estudantes aprendam/desenvolvam métodos para solucionar problemas. Segundo Coxford e Shulte (1994, p. 141), as estratégias que devem ser enfatizadas no processo de ensino-aprendizagem são: “Usar tabelas, diagramas, fórmulas e gráficos; identificar o que se procura e o que é dado; traduzir frases em nossa língua e símbolos algébricos; testar as respostas com as condições do problema”.

O conceituado professor Júlio Cesar de Mello e Souza (2017), também conhecido sob o pseudônimo Malba Tahan, faz em seus contos uma abordagem criativa, instigante, divertida e contextualizada da solução de problemas. Como forma de homenagear esse ilustre professor, a Lei no. 12.835 (Brasil, 2013), de 26 de junho de 2013, institui em seu Artigo 1º: “o Dia Nacional da Matemática, a ser comemorado anualmente em todo o território nacional no dia 6 de maio, data de nascimento do matemático, educador e escritor MALBA TAHAN”.

## 1.1 BIOGRAFIA DO PROFESSOR JÚLIO CESAR DE MELLO E SOUZA

Nascido no Rio de Janeiro em 06 de maio de 1895, Júlio Cesar de Mello e Souza é filho de João de Deus de Mello e Souza (1863 – 1911) e da professora Carolina Carlos de Toledo (1866 – 1925), conhecida como Dona Sinhá. Sua infância transcorreu no município paulista de Queluz. Teve oito irmãos, dos quais quatro eram mais velhos – Maria Antonieta, Laura, João Batista e Julieta – e quatro mais novos – Nelson, Rubens, José Carlos e Olga. Júlio Cesar e mais seis de seus irmãos seguiram a carreira docente influenciados pela vocação da mãe, tornando-se excelentes professores. Casou-se em 26 de março de 1925 com Nair (Marques da Costa) de Mello e Souza (1905 – 1986), com quem teve três filhos: Rubens Sergio de Mello e Souza,

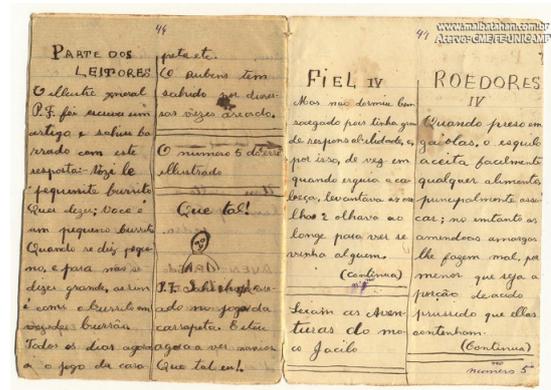
Sônia Maria de (Mello e Souza) Faria Pereira e Ivan Gil de Mello e Souza. Júlio faleceu em Recife, no dia 18 de Junho de 1974, aos 79 anos (Pereira; Salles; Pereira, 2017).

Desde menino, Júlio demonstrava grande potencial como escritor. Aos 12 anos criou sua primeira obra literária: a revista ERRE, onde exercia as funções de diretor, redator e ilustrador. Nessa época, criou seu primeiro pseudônimo: “ERRE Redactor Salomão IV”. A revista ERRE foi publicada de janeiro de 1907 a novembro de 1908 (Pereira; Salles; Pereira, 2017).

Segundo Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p), a revista ERRE era “um engenhoso caderninho, com folhas dobradas, costuradas à mão, escrito com caneta tinteiro e ilustrado pelo próprio autor com desenhos a mão livre, coloridos com lápis de cor ou guache”.

Os contos eram dispostos na revista em forma de capítulos. Os temas variavam sobre histórias de suspense, guerra, a ciência dos animais e do corpo humano. Geralmente, seus irmãos Rubens e Nelson eram citados como protagonistas das histórias. Alguns títulos que contemplavam a revista são: “O medo”, “O esqueleto”, “As aventuras de Jasiló”, “Fiel”, “Assobrável”, “O assalto”, “Roedores” e “O phantasma” (Pereira; Salles; Pereira, 2017). A Figura 1.1 ilustra os títulos “Fiel” e “Roedores”.

Figura 1.1 – Contos escritos por Mello e Souza na revista ERRE



Fonte: Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p).

Júlio Cesar cursou o Ensino Fundamental e o Ensino Médio nos Colégios Militar e Pedro II no Rio de Janeiro, respectivamente. Como aluno interno do Colégio Pedro II, relata lembranças referentes às aulas do professor de língua portuguesa José Júlio da Silva Ramos – membro da Academia Brasileira de Letras. Esse professor solicitava redações para os seus alunos, usando como castigo para os que não executassem esta tarefa a proibição de voltar para casa no final de semana. O astuto Júlio Cesar aproveitou seu dom para escrever e criou uma fonte de renda: vende-se redações! O dinheiro arrecadado com as vendas lhe proporcionou mais conforto, como ir de ônibus para casa, pagar a passagem dos colegas e até comprar o seu chocolate preferido, o Bering. Além disso, todas essas criações contribuíram para direcionar o caminho que ele deveria seguir (Pereira; Salles; Pereira, 2017).

Em outubro de 1912, Júlio Cesar foi nomeado Auxiliar da Biblioteca Nacional pelo Ministro de Estado da Justiça e Negócios Interiores. Em 1913, iniciava sua trajetória como graduando no curso de Engenharia na antiga Escola Politécnica da Universidade do Brasil, conciliando com a formação docente na Escola Normal no período noturno e o trabalho na Biblioteca Nacional. Além disso, lecionava no Colégio São Paulo fundado por sua mãe em Copacabana no ano de 1911 (Pereira; Salles; Pereira, 2017).

Em meados de 1921, após sua formação como professor, Júlio obteve o cargo de Professor Substituto do professor Euclides Roxo na Escola Normal (posteriormente chamado Instituto de Educação). No ano de 1913, ingressou por concurso público na Escola Normal, onde permaneceu por 40 anos, tornando-se Professor Catedrático. As disciplinas lecionadas por Júlio eram Matemática, Geografia, Literatura Infantil, Folclore e a Arte de Ler e Contar Histórias. Mello e Souza também ministrou aulas no Colégio Mello e Souza, fundado por suas irmãs Julieta e Olga, no Colégio Pedro II e na Universidade Federal do Rio de Janeiro (Pereira; Salles; Pereira, 2017).

Trabalhando no Jornal O Imparcial, Júlio teve a ideia de criar o pseudônimo R. V. Slady, ou R. S. Slady, nome de um famoso autor americano, para assinar seus contos com o intuito de chamar a atenção do editor do jornal, já que os contos assinados como Júlio Cesar de Mello e Souza eram esquecidos na mesa do editor.

Agindo com persistência e criatividade, Mello e Souza resgatou seus contos abandonados sob um peso de papel, assinou-os com o pseudônimo R. V. Slady e os remeteu novamente ao editor. E a ideia deu certo! A Figura 1.2 ilustra o conto “A história de oito pães”, assinado por R. V. Slady.

Em 1918, Júlio Cesar deu vida ao pseudônimo Malba Tahan quando ainda trabalhava no Jornal O Imparcial.

Na verdade, Malba Tahan não foi apenas um pseudônimo de Júlio Cesar de Mello e Souza. O escritor e professor carioca inventou um personagem que parecesse real, uma pessoa que houvesse existido de fato, uma mistificação literária. Ele estudou a cultura e a língua árabes, para que a biografia e as obras do Malba Tahan fossem convincentes em estilo, linguagem e ambientação (Pereira; Salles; Pereira, 2017, n.p).

De acordo com Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p), “Júlio Cesar teria procurado o jornalista Irineu Marinho, diretor de periódico A Noite, para lhe propor uma ideia: surpreender o Brasil com a mistificação literária de um escritor árabe, chamado Malba Tahan, para publicar contos orientais e educativos”.

Irineu Marinho teria lido dois ou três contos do professor Mello e Souza e, aprovando a ideia, recomendou que fossem publicados na primeira página de seu jornal, precedidos de uma biografia do famoso escritor Malba Tahan, ou melhor, de Ali Yezid Izz-edin Ibn-Salin Malba Tahan. O jornal divulgava que os “contos do original escriptor anglo-árabe Hank Malba Tahan” eram especialmente traduzidos e adaptados por “um de nossos colaboradores”. Mello

Figura 1.2 – Conto escrito por Júlio Cesar de Mello e Souza sob o pseudônimo R. V. Slady



Fonte: Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p).

e Souza e Irineu Marinho jamais revelaram a pessoa alguma o segredo da mistificação da qual foram aliados e co-responsáveis (Pereira; Salles; Pereira, 2017, n.p).

Para dar credibilidade ao pseudônimo, Mello e Souza inventou uma biografia para Malba Tahan.

Ali Yezid Izz-Edin Ibn-Salin Malba Tahan, famoso escritor árabe, descendente de uma tradicional família muçulmana, nasceu no dia 6 de maio de 1885, em uma aldeia chamada Muzalit, próxima da antiga cidade de Meca. Fez seus primeiros estudos no Cairo e, mais tarde, mudou-se para Constantinopla onde concluiu oficialmente seu curso de Ciências Sociais.

Datam dessa época a publicação de seus primeiros trabalhos literários, no idioma turco, em diversos jornais e revistas. A convite de seu amigo, o Emir Abd El-Azziz Ben Ibrahim, exerceu Malba Tahan, durante vários anos, o cargo de “quaimaquam” na cidade de El-Medina, tendo desempenhado suas funções administrativas com rara inteligência e habilidade. Conseguiu, mais uma vez, evitar graves acidentes entre os peregrinos e as autoridades locais, procurando sempre dispensar valiosa e desinteressada proteção aos estrangeiros ilustres que visitavam os lugares sagrados do Islam. Com a morte de seu pai, em 1912, recebeu Malba Tahan uma grande herança; abandonou, então, o cargo que exercia em El-Medina e iniciou uma longa viagem através de várias partes do mundo.

Atravessou a China, o Japão, a Rússia, grande parte da Índia e da Europa, observando os costumes dos diferentes povos. Entre suas obras mais notáveis citam-se as seguintes: *Roba el-Khali*, *Al-Saneir*, *Sama-Ullah*, *Maktub*, *Lendas do Deserto* e muitas outras. Faleceu em combate, em julho de 1921, nas proximidades de El-Riad, quando lutava pela liberdade de uma pequena tribo na Arábia Central (Pereira; Salles; Pereira, 2017, n.p).

O primeiro conto de Malba Tahan, intitulado “O Juiz”, foi publicado no Jornal A Noite em meados de 1924. Já o primeiro livro, intitulado “Contos de Malba Tahan”, foi publicado no ano seguinte. Contudo, foi somente na segunda edição dessa mesma obra que o professor Júlio incluiu a “Biographia de Malba Tahan”, que contava inclusive com uma ilustração de um árabe tradicional, com direito a barbas longas e turbante. Para todos os efeitos, Tahan escrevia em árabe. Logo, fez-se necessário a criação de um tradutor para as suas obras. Com a finalidade de dar maior veracidade ao autor árabe, Mello e Souza criou o personagem *Breno Alencar Bianco*, que a partir da edição do livro “O homem que calculava”, começou a estar presente em suas obras (Pereira; Salles; Pereira, 2017).

Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p) observam que: “A mistificação literária criada pelo professor carioca tornou-se uma realidade na imaginação de milhares de brasileiros”.

Malba Tahan colocava-se frontalmente em oposição ao tradicional e cáustico “algebrismo” dos professores de Matemática de sua época. Ele denominava “algebrista” o professor de Matemática que procurava dificultar o ensino da matéria, com problemas fora da realidade, complicados e muito trabalhosos. Em seu livro *Didática da Matemática*, Malba Tahan define o professor algebrista como aquele que impõe aos alunos problemas enfadonhos, irreais, sem finalidade prática ou teórica, com a única preocupação de tornar a matemática muito

difícil. Era a “pedagogia” da tortura com a qual acreditavam que iriam incentivar os alunos a estudar. Dizia ele: – “Isso é obra de um inimigo pernicioso, de um inimigo que é para a Matemática como a broca é para o café, a lagarta para o algodão e a saúva para todo o Brasil”. Por essa razão, Malba Tahan publicou livros de divulgação científica, que pudessem tornar a matemática acessível a todos, tais como: Matemática Divertida e Pitoresca, Matemática Divertida e Diferente, Matemática Divertida e Curiosa, Matemática Divertida e Delirante, O Homem que Calculava, entre outros (Pereira; Salles; Pereira, 2017, n.p).

Devido ao grande sucesso, com mais de cem obras publicadas no Brasil e em diversos países, Mello e Souza fez com que muita gente acreditasse que Malba Tahan havia existido de fato. Dentre suas inúmeras obras, destacamos as que consideramos mais importantes na área do ensino de matemática.

- Contos de Malba Tahan – 1ª edição: 1925.
- Matemática divertida e curiosa – 1ª edição: 1934.
- O Homem que calculava – 1ª edição: 1937.
- As grandes fantasias da matemática – 1ª edição: 1945.
- A equação da cruz – 1ª edição: 1959.
- Antologia da matemática I – 1ª edição: 1960.
- Antologia da matemática II – 1ª edição: 1961.
- Matemática divertida e delirante – 1ª edição: 1962.
- Matemática recreativa, volume I – 1ª edição: 1965.
- Matemática recreativa, volume II – 1ª edição: 1965.
- Os números governam o mundo – 1ª edição: 1965.
- O problema das definições em matemática – 1ª edição: 1965.
- Numerologia – 1ª edição: 1969.

No ano de 2010, o acervo Malba Tahan passou a ser gerido pelo Centro de Memória da Educação da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Este acervo contém inúmeros exemplares de livros e documentos pessoais, tais como fotografias, diplomas, recortes de jornal, cadernos de viagem e obras manuscritas do escritor (Pereira; Salles; Pereira, 2017).

Devido à genialidade dos contos de Malba Tahan, inspiramo-nos em problemas presentes nos mesmos para propor atividades que o professor de matemática da Educação Básica pode utilizar em sala de aula.

## 1.2 O GEOGEBRA E O GNU OCTAVE

Podemos considerar/empregar softwares matemáticos no processo de solução de um problema.

Os softwares educativos, quando adequadamente utilizados, podem contribuir para o ensino de vários conteúdos matemáticos. Cabe ao professor escolhê-los, tendo em vista o planejamento previsto, seja pelo conteúdo a ser abordado, pelo tempo reservado para a atividade, pelo domínio (da ferramenta ou conteúdo) da turma ou por qualquer outro fator que possa interferir direta ou indiretamente na condução da proposta. Com isso, não basta apenas o professor disponibilizar de ferramentas se a aplicação delas não for pensada e estudada previamente (Pertile; Pierozan; Lieban, 2012, p. 476).

Considerando a importância dos aplicativos matemáticos na resolução de problemas desafiadores, optamos por utilizar os softwares GeoGebra e GNU Octave com o intuito de dinamizar estratégias que possibilitem ao estudante melhor compreensão dos problemas propostos/abordados.

O GeoGebra é um aplicativo gratuito que pode ser acessado por uma plataforma online através de navegadores, ou ainda, por meio de download. Trata-se de um software dinâmico de matemática, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e possibilita explorar conteúdos geométricos, algébricos, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos, tudo em uma única plataforma. Além disso, a plataforma online oferece mais de um milhão de recursos gratuitos criados pela comunidade do GeoGebra em vários idiomas (GeoGebra, 2022b).

O download do aplicativo GeoGebra pode ser feito no link

<https://www.geogebra.org/download?lang=pt>.

Também é possível acessar o GeoGebra de forma online através do link

<https://www.geogebra.org/>.

O GNU Octave é um software desenvolvido por John W. Eaton (2017) e muitos outros. Por se tratar de uma linguagem de alto nível, o GNU Octave é destinado principalmente para cálculos numéricos. Como é de acesso livre, qualquer pessoa é incentivada a torná-lo mais útil, contribuindo com funções adicionais e identificando/relatando problemas que surgem durante o seu uso. Segundo Eaton (2023, n.p), o GNU Octave:

[...] fornece uma interface de linha de comando conveniente para resolver numericamente problemas lineares e não lineares e para realizar outros experimentos numéricos usando uma linguagem que é principalmente compatível com Matlab. Também pode ser usado como uma linguagem orientada a objetos.

Como linguagem de programação, o GNU Octave tem aplicações em sala de aula e insere os estudantes no universo da lógica, estimulando o interesse e a curiosidade (Neto, 2019).

É possível acessar o GNU Octave online através do link

[<https://octave-online.net/>](https://octave-online.net/).

Também podemos fazer o download do GNU Octave a partir do link

[<https://octave.org/download>](https://octave.org/download).

Considerando que os softwares GeoGebra e GNU Octave são ferramentas gratuitas que possibilitam a interpretação e visualização, em uma perspectiva dinâmica, da solução de problemas aritméticos, algébricos e/ou geométricos, empregamos esses aplicativos para construir atividades didáticas que o professor de matemática da Educação Básica pode adaptar/empregar em sala de aula.

### 1.3 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

Entre o final do século XVI e o início do século XIX, houve grande colaboração do ensino da Matemática em duas frentes: na formação de profissionais que atuavam em diversos tipos de construções - portos, canais, pontes, minas, entre outros - e na preparação de jovens para situações de guerra (Valente, 1999 apud Paraná, 2008).

Com a Revolução Industrial, evidenciaram-se diferenças entre classes sociais e a necessidade de educação para essas classes, de modo a formar tanto trabalhadores quanto dirigentes do processo produtivo. Como a Matemática escolar era uma importante disciplina para atender tal demanda, demarcava os programas de ensino da época, uma vez que era a ciência que daria a base de conhecimento para solucionar os problemas de ordem prática (Valente, 1999 apud Paraná, 2008, p. 40-41).

A resolução de problemas é um dos desafios no ensino de matemática; é uma metodologia através da qual é oportunizado ao estudante a aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos em situações novas, de modo a resolver as questões propostas (Dante, 2003 apud Paraná, 2008).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) para o ensino de matemática preconiza que o estudante utilize os conteúdos matemáticos - conceitos, procedimentos, resultados - na interpretação e resolução de problemas.

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (Brasil, 2018, p. 265).

Ainda, em sua quinta competência geral, a BNCC salienta o emprego de tecnologias digitais na resolução de problemas.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p. 9).

Considerando o Ensino Fundamental, a BNCC assinala em sua quinta competência específica na área de matemática: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (Brasil, 2018, p. 267). Para o Ensino Fundamental – Anos Finais, a BNCC enfatiza que se tem “como expectativa que os estudantes sejam capazes de resolver problemas com números naturais, inteiros e racionais, utilizando as operações fundamentais, com seus diversos significados, fazendo uso de estratégias diversificadas, compreendendo os processos neles envolvidos” (Brasil, 2018, p. 269).

O Currículo da Rede Estadual Paranaense – CREP (Paraná, 2021a) adiciona, ao anteriormente adotado Referencial Curricular do Paraná, princípios, direitos e orientações, trazendo os conteúdos para cada componente curricular em todos os anos do Ensino Fundamental, alinhando-se desta forma ao que estabelece a BNCC. No CREP, a quinta competência específica de matemática da BNCC é a quinta competência específica da área de matemática para o Ensino Fundamental – Anos Finais (Paraná, 2021a, p. 8-9).

De acordo com o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná – RCEMP (Paraná, 2021b, p. 504), a matemática no Ensino Médio propõe “a retomada, a ampliação, o aprofundamento e a consolidação das aprendizagens essenciais desenvolvidas na Educação Infantil e no Ensino Fundamental, visando, dessa forma, contribuir para a formação integral dos estudantes”.

A necessidade de uma relação dialógica mais próxima entre o homem e os recursos tecnológicos tem se tornado imprescindível. Se havia dúvidas quanto à utilização das tecnologias nos espaços escolares e nas salas de aulas de Matemática, o momento atual mostrou que sem elas não seria possível o diálogo entre estudante e a escola em todas as áreas de conhecimento e etapas de ensino (Paraná, 2021b, p. 506).

Salientamos ainda a grande importância da resolução de problemas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) (Brasil, 2022). O ENEM foi instituído em 1998, objetivando avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao fim da Educação Básica. No ano de 2009, o exame aperfeiçoou sua metodologia passando a ser usado como instrumento de acesso ao Ensino Superior. Desde 2020, é ofertada ao participante a escolha entre fazer o exame de forma impressa ou pelo ENEM Digital, utilizando, neste último formato, provas aplicadas por meio de computadores.

Nos dois modelos, os locais de prova são definidos previamente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (Brasil, 2022).

De acordo com as referências do novo ENEM, há cinco eixos cognitivos comuns a todas as áreas de conhecimento.

**I. Dominar linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

**II. Compreender fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos históricogeográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

**III. Enfrentar situações-problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

**IV. Construir argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

**V. Elaborar propostas (EP):** recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural (Brasil, 2022, p. 1).

Assim, a resolução de problemas também é importante no Ensino Médio, mais especificamente na preparação dos estudantes que almejam participar do ENEM.

Resumindo, é notável a relevância da resolução de problemas, bem como o uso de recursos computacionais, no ensino de matemática. O emprego de ambos é devidamente amparado por documentos oficiais, tanto no âmbito estadual quanto nacional.

## 1.4 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Ao realizar a pesquisa, em outubro de 2022, no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT (SBM, 2022) com o nome “Malba Tahan”, obtivemos apenas um (01) resultado: o trabalho de Mário Filho (2013).

A abordagem de Mário Filho (2013) consiste em enaltecer a biografia do Professor Júlio Cesar Mello e Souza. Além disso, direciona o trabalho à investigação de alguns problemas da obra *O homem que calculava*. Dentre os problemas trabalhados, está o famoso *Problema dos 35 camelos*, que também consta no nosso trabalho, porém com análises diferenciadas. Enquanto Mário Filho (2013) explora a solução por meio da aritmética, interpretamos o problema geometricamente e algebricamente com o uso dos softwares GeoGebra e GNU Octave, respectivamente. Mário Filho menciona a importância dos recursos tecnológicos no ensino de matemática, mas não aprofunda essa ideia.

Realizando uma nova pesquisa no banco de dissertações do PROFMAT (SBM, 2022) com as palavras “resolução de problemas”, obtivemos 162 registros. Dos trabalhos elencados, o

que possui maior relação com o que realizamos é o de Schneider (2022). O trabalho consiste em um estudo sobre o uso das teorias de George Pólya sobre o ensino de resolução de problemas, apresentando o método de resolução de problemas presente no livro *A Arte de Resolver Problemas* (Polya, 1995), e aplicando o método no contexto da sala de aula no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Schneider (2022) desmembrou seu trabalho nos seguintes capítulos: introdução; o uso da resolução de problemas no ensino de matemática; Polya e a resolução de problemas; conceitos matemáticos; aplicação; construindo um material didático e conclusão. O capítulo que melhor se relaciona com nosso trabalho é o uso da resolução de problemas no ensino de matemática, no qual Schneider estabelece uma ligação entre a resolução de problemas e a BNCC e também com o ENEM. Além disso, discorre sobre a origem e a evolução da teoria de resolução de problemas.

Em uma nova pesquisa realizada no banco de dissertações do PROFMAT (SBM, 2022) com a palavra “GeoGebra”, obtivemos 394 registros. Dentre estes, o trabalho que possui maior similaridade com o que realizamos é o de Galvão (2021).

Nos agradecimentos, Galvão (2021) faz menção ao ilustre Professor Júlio Cesar de Mello e Souza. Em seu trabalho, o autor propõe formas de utilizar programas de computadores no ensino e aprendizagem de matemática para desenvolver o pensamento computacional. Dentre esses programas, destaca o software GeoGebra. O trabalho está dividido em: o uso do computador na Educação Básica; geometria e construcionismo de Papert; algoritmos e programação; lógica e álgebra de Boole; sequências e soluções computacionais iterativas; recorrências e soluções computacionais recursivas; divisibilidade e números primos; sistemas de numeração e considerações finais. A parte que mais se alinha ao nosso trabalho refere-se às informações sobre o uso do computador na Educação Básica, em que Galvão (2021) explana acerca do laboratório de matemática, algoritmos e programação, as principais barreiras e como mitigá-las, e, por fim, sobre o software GeoGebra.

Ao realizar a pesquisa no banco de dissertações do PROFMAT (SBM, 2022) com o termo “Octave”, obtivemos apenas um (01) resultado: a dissertação de João Neto (2019). O trabalho consiste na aplicação do software GNU Octave com enfoque em operações com matrizes. O autor divide seu trabalho em seis partes: ideias iniciais sobre matrizes e operações; sobre o Octave; matrizes e figuras bidimensionais; utilizando o Octave em sala de aula; relato da experiência de ensino e considerações finais. A parte que mais se alinha ao nosso trabalho refere-se às informações sobre o GNU Octave, onde João Neto mostrou, de forma muito didática, os comandos e exemplos de atividades, bem como o link da página inicial para download.

De todos os trabalhos analisados nesta revisão, nenhum se assemelha na íntegra com o presente trabalho, uma vez que apresentamos uma compilação de ideias com o diferencial de conduzir a uma interpretação dinâmica de um grupo seletivo de problemas associados aos contos de Malba Tahan.

## 1.5 OBJETIVOS

### 1.5.1 OBJETIVO GERAL

Construir experiências dinâmicas com o GeoGebra e o GNU Octave para explorar problemas aritméticos, algébricos e geométricos desafiadores, estruturados a partir de problemas presentes nos contos de Malba Tahan.

### 1.5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Elencar informações relevantes sobre a manipulação e funcionamento dos softwares GeoGebra e GNU Octave.
2. Ressaltar a importância da resolução de problemas como metodologia de ensino, ou como elemento motivador (ou de aplicação) do processo de ensino e aprendizagem em matemática.
3. Organizar atividades didáticas sobre a resolução de problemas, baseadas nas competências gerais e específicas da BNCC e do RCEMP.

## 1.6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia usada neste trabalho é quantitativa, bibliográfica e descritiva. Neste sentido, adotamos os seguintes procedimentos metodológicos:

1. seleção bibliográfica de problemas aritméticos, algébricos e geométricos nas obras de Malba Tahan;
2. emprego do software GeoGebra (GeoGebra, 2022a) e GNU Octave (Eaton, 2023) na interpretação e resolução dos problemas selecionados;
3. organização de atividades didáticas fundamentadas na BNCC e no RCEMP.

## 1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos:

- no primeiro capítulo, apresentamos uma breve biografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza, a justificativa, a revisão bibliográfica, os objetivos, os procedimentos metodológicos e a estrutura do trabalho;
- no segundo capítulo, analisamos geometricamente e algebricamente o famoso problema dos 35 camelos;

- no terceiro capítulo, introduzimos o problema dos quadrados mágicos para calcular determinantes com o GNU Octave;
- no quarto capítulo, analisamos, a partir do conto *A hipérbole de um poeta*, o famoso problema da duplicação do cubo;
- no quinto capítulo, organizamos atividades didáticas baseadas nas competências gerais e específicas da BNCC e do RCEMP;
- no sexto capítulo, mencionamos as conclusões do trabalho.

## 2 O PROBLEMA DOS 35 CAMELOS

Uma das obras de Malba Tahan que obteve grande sucesso, inclusive com alcance internacional, é o livro *O homem que calculava* (Tahan, 2008b), cuja capa referente à primeira edição, ocorrida em 1937, conforme ilustra a Figura 2.1. Esta obra narra as aventuras do calculista persa Beremiz Samir. A trama transcorre durante uma longa viagem, na qual Beremiz resolve diversos problemas usando, com maestria e inteligência, a ciência que mais conhecia: a matemática.

Entre os problemas solucionados por Beremiz está o *o problema dos 35 camelos*, que contextualiza a divisão de 35 camelos deixados como herança a três irmãos nas seguintes razões:  $\frac{1}{2}$  para o mais velho,  $\frac{1}{3}$  para o irmão do meio e  $\frac{1}{9}$  para o mais novo.

O impasse ocorre quando os irmãos tentam fazer a partilha e os valores resultam em números decimais: 35 não é divisível por 2, 3 e 9, o que inviabiliza a divisão obedecendo as regras proporcionais impostas pelo pai dos herdeiros. Analisamos neste Capítulo como o perspicaz Beremiz solucionou o Problema 2.1, transcrito de Tahan (2008b, p. 21-23).

**Problema 2.1.** *Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.*

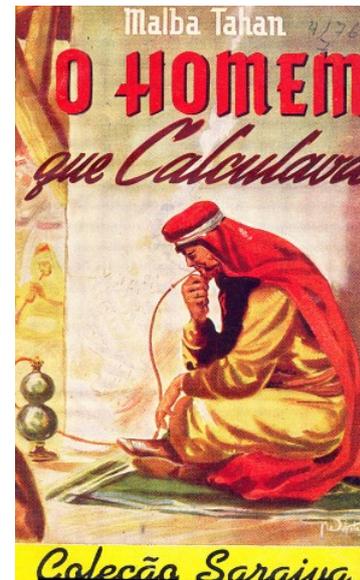
*Encontramos, perto de um antigo caravançará (refúgio construído pelo governo ou por pessoas piedosas à beira do caminho, para servir de abrigo aos peregrinos; espécie de rancho de grandes dimensões em que se acolhiam as caravanas) meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.*

*Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:*

- Não pode ser!
- Isto é um roubo!
- Não aceito!

*O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.*

Figura 2.1 – Capa do livro *O homem que calculava*, edição de 1937



Fonte: Pereira, Salles e Pereira (2017).

- *Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?*
- *É muito simples – atalhou o Homem que Calculava. – Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!*

*Neste ponto, procurei intervir na questão:*

- *Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o camelo?*
- *Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! – replicou-me em voz baixa Beremiz. – Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.*

*Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal (uma das muitas denominações que os árabes dão ao camelo), que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.*

- *Vou, meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos –, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36.*

*E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:*

- *Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saístes lucrando com esta divisão!*

*E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:*

- *E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saístes com visível lucro na transação.*

*E disse, por fim, ao mais moço:*

- *E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!*

*E concluiu com a maior segurança e serenidade:*

- *Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos – partilha em que todos três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado  $18 + 12 + 4 = 34$  camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!*
- *Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos três irmãos. Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!*

*E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:*

- *Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!*

*E continuamos nossa jornada para Bagdá.*

## 2.1 DESVENDANDO O PROBLEMA

Para interpretar o problema é necessário revermos a fundamentação teórica referente à divisibilidade.

Em relação à divisibilidade por 2, temos a Proposição 2.1 (Hefez, 2009, p.28).

**Proposição 2.1.** *Um número  $n \in \mathbb{Z}$  é múltiplo de 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.*

Desta forma, podemos considerar duas classes para os números inteiros: a dos **números pares**, que são os números da forma  $n = 2q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ; a dos **números ímpares**, que são os números da forma  $n = 2q + 1$ ,  $q \in \mathbb{N}$  (Hefez, 2006, p. 48). Logo, podemos afirmar que: todo número par é divisível por 2, isto é, o resto da divisão por 2 é zero; o resto da divisão de todo número ímpar por 2 é um.

Quanto à divisibilidade por 3 e por 9, temos a Proposição 2.2 (Hefez, 2006, p.47).

**Proposição 2.2.** *Seja  $a = r_n \dots r_1 r_0$  um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que  $a$  seja divisível por 3 ou por 9 é que  $r_n + \dots + r_1 + r_0$  seja divisível por 3 ou por 9, respectivamente.*

Relembrados os critérios de divisibilidade por 2, 3 e 9, analisemos a solução do Problema 2.1.

O número 35 não é divisível por 2, nem por 3 ou por 9, que são os denominadores de cada razão considerada na partilha:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{9}$ . Assim, a divisão de 35 por 2, 3 e 9 resulta, respectivamente, em aproximadamente 17, 5; 11, 7 e 3, 9; o que inviabiliza a partilha.

Por outro lado, 36 é múltiplo de 2, 3 e 9, o que torna possível a divisão dos camelos entre os irmãos quando Beremiz acrescenta um camelo à partilha. A divisão de 36 por 2, 3 e 9 resulta, respectivamente, em 18, 12 e 4. Tais valores representam a quantidade de camelos cabível a cada herdeiro, que em comparação à divisão realizada usando os 35 camelos mostra-se mais vantajosa. Da soma  $18 + 12 + 4$  obtemos 34, isto é, um camelo a menos do que a quantidade inicial da herança. Deste modo, Beremiz ganha um camelo, devolve o camelo ao companheiro viajante e resolve o impasse entre os três irmãos, que ficam gratos com o lucro obtido.

Propomos a seguir duas questões que evidenciam o raciocínio usado por Beremiz na resolução do Problema 2.1.

**Questão 2.1.** *Conseguiríamos efetuar a partilha dos 35 camelos para qualquer quantidade de camelos adicionada?*

Acrescentando uma quantidade  $p = 1, 2, 3, \dots$  de camelos à quantidade inicial constante no Problema 2.1, temos que:

- ◇  $35 + 1 = 36$ , que é divisível por 2, 3 e 9;
- ◇  $35 + 2 = 37$ , que não é divisível por 2, 3 e 9;
- ◇  $35 + 3 = 38$ , que 38 é divisível por 2, mas não é divisível por 3 e 9;
- ◇  $35 + 4 = 39$ , que não é divisível por 2 e 9, mas é divisível por 3;
- ◇  $35 + 5 = 40$ , que é divisível por 2, mas não é divisível por 3 e 9;
- ◇  $35 + 6 = 41$ , que não é divisível por 2, 3 e 9;
- ◇  $35 + 7 = 42$ , que é divisível por 2 e 3, mas não é divisível por 9;
- ◇  $35 + 8 = 43$ , que não é divisível por 2, 3 e 9;
- ◇  $35 + 9 = 44$ , que é divisível por 2, mas não é divisível por 3 e 9;
- ◇  $35 + 10 = 45$ , que não é divisível por 2, mas é divisível por 3 e 9;
- ◇  $\vdots$
- ◇  $35 + 19 = 54$ , que é divisível por 2, 3 e 9;
- ◇  $\vdots$
- ◇  $35 + 37 = 72$ , que é divisível por 2, 3 e 9;
- ◇  $\vdots$

Analisando as somas elencadas anteriormente, concluímos que a partilha é possível se o número de camelos for um múltiplo de 18, que é o menor múltiplo comum de 2, 3 e 9, ou seja,  $\text{mmc}(2, 3, 9) = 18$ . Portanto, para efetuar a partilha devemos considerar os múltiplos de 18 maiores ou iguais do que 36:  $\{36, 54, 72, 108, \dots\}$ .

**Questão 2.2.** *Se o número de camelos for um múltiplo de 18 maior do que 36, a partilha pode ser mais vantajosa para o calculista do que o resultado do Problema 2.1?*

Responderemos a Questão 2.2 observando o Exemplo 2.1.

**Exemplo 2.1.** *Realizando a partilha de  $35 + 19 = 54$  camelos segundo as razões  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{9}$ , obtemos: 27 camelos para o irmão mais velho, 18 camelos para o irmão do meio e 6 camelos para o irmão mais novo, totalizando 51 camelos. Neste caso, haveria uma sobra de 3 camelos. Porém, o calculista teria que devolver os 19 camelos “emprestados”, o que acarretaria um prejuízo de 16 camelos.*

Analogamente ao Exemplo 2.1, constataríamos prejuízo para o calculista empregando múltiplos de 18 maiores do que 54. Portanto, Beremiz foi astuto ao empregar o número 36, uma vez que este é o único múltiplo de 18 que lhe proporciona lucro, assim como para os três herdeiros.

## 2.2 USANDO CONGRUÊNCIAS

De acordo com Hefez (2006, p. 40): “como a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é possível, expressa-se essa possibilidade através da relação de divisibilidade”. Deste modo, usamos a congruência como uma outra forma de resolver o Problema 2.1.

Dados dois números  $a$  e  $b$ , com  $a, b \in \mathbb{N}$ , temos que se  $a|b$  ( $a$  divide  $b$ ), então existe  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $b = ac$ , isto é,  $b$  é divisível por  $a$  ou  $b$  é um múltiplo de  $a$ . Os conceitos de múltiplo e divisor, assim como os critérios de divisibilidade, estão associados ao conceito de congruência, este estabelecido pela Definição 2.1 (Hefez, 2006, p. 110).

**Definição 2.1.** *Seja  $m$  um número natural diferente de zero. Diremos que dois números  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $m$  se os restos de sua divisão euclidiana por  $m$  são iguais. Quando os inteiros  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $m$ , escreve-se*

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Da Definição 2.1 decorre que a congruência é uma relação de equivalência. Essa relação é explicitada pela Proposição 2.3 (Hefez, 2006, p. 110).

**Proposição 2.3.** *Seja  $m \in \mathbb{N}$ , com  $m > 1$ . Para todos  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , tem-se que:*

- (i)  $a \equiv a \pmod{m}$ ;
- (ii) se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$ ;
- (iii) se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$ , então  $a \equiv c \pmod{m}$ .

Para comprovar se dois números naturais  $a$  e  $b$ , com  $b \geq a$ , são congruentes módulo  $m$ , não precisamos dividir ambos por  $m$  para depois comparar os restos. Basta verificar se  $m$  divide  $b - a$ . Esse resultado é estabelecido pela Proposição 2.4 (Hefez, 2006, p.111).

**Proposição 2.4.** *Suponha que  $a, b, m \in \mathbb{N}$ , com  $m > 1$ , são tais que  $b \geq a$ . Tem-se que  $a \equiv b \pmod{m}$  se, e somente se,  $m|(b - a)$ .*

Empregando a Proposição 2.4 e a prova por contradição, mostraremos que 35 não é divisível por 2, 3 e 9.

- Os números 35 e 0 não são congruentes módulo 2  
Suponhamos que  $35 \equiv 0 \pmod{2}$ . Logo,  $2|(35 - 0)$ , o que implica  $2|35$  e que existe  $f \in \mathbb{N}$  tal que  $35 = 2f$ . Disto resulta que  $f = \frac{35}{2}$ . Mas como  $f \in \mathbb{N}$ , temos uma contradição. Portanto,  $2 \nmid 35$  (2 não divide 35).
- Os números 35 e 0 não são congruentes módulo 3  
Admitamos que  $35 \equiv 0 \pmod{3}$ . Assim,  $3|(35 - 0)$ , o que resulta  $3|35$ . Logo, existe  $g \in \mathbb{N}$  tal que  $35 = 3g$ , o que implica em  $g = \frac{35}{3}$ . Contudo,  $g \in \mathbb{N}$ , o que é uma contradição. Portanto,  $3 \nmid 35$ .
- Os números 35 e 0 não são congruentes módulo 9  
Consideremos que  $35 \equiv 0 \pmod{9}$ , ou seja,  $9|(35 - 0)$ . Desta forma,  $9|35$  e existe  $h \in \mathbb{N}$  tal que  $35 = 9h$ , donde resulta que  $h = \frac{35}{9}$ . Entretanto,  $h \in \mathbb{N}$ , o que é uma contradição. Portanto,  $9 \nmid 35$  (3 não divide 35).

Analogamente, podemos mostrar de forma direta usando congruências que  $2|36$ ,  $3|36$  e  $9|36$ , isto é,  $36 \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $36 \equiv 0 \pmod{3}$  e  $36 \equiv 0 \pmod{9}$ . A partir destas suposições, devem existir constantes  $c, d, e \in \mathbb{N}$  tais que  $36 = 2c$ ,  $36 = 3d$  e  $36 = 9e$ , o que resulta em  $c = 18$ ,  $d = 12$  e  $e = 4$ . Portanto,  $c, d, e \in \mathbb{N}$  e  $2|36$ ,  $3|36$  e  $9|36$ .

Construímos no GeoGebra uma atividade para testar congruências módulo 3, ou seja,

$$n \equiv b \pmod{3}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq n \leq 72, b = 0, 1, 2.$$

Disponibilizamos essa atividade no link

<https://www.geogebra.org/classic/ekx4m6xz>.

Para executar a atividade, devemos mover o controle deslizante à esquerda (que representa os valores de  $n$ ), obtendo como resultado o número  $b$ , este sendo apontado pelo vetor no círculo.

### 2.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA COM O GEOGEBRA

Nesta seção, interpretamos geometricamente o Problema 2.1 no GeoGebra. Para tanto, iniciemos recordando os conceitos de função afim e de função constante – Definições 2.2, 2.3 e Definição 2.4 (Lima, 2014).

**Definição 2.2.** *Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$ , uma função  $f : X \rightarrow Y$  (lê-se "uma função de  $X$  em  $Y$ ") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um elemento  $y = f(x) \in Y$  (leia-se "y igual a f de x").*

**Definição 2.3.** *Denomina-se função afim a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da forma  $f(x) = ax + b$ , com  $x, a, b \in \mathbb{R}$  e  $a, b \neq 0$ . Quando  $b = 0$ , a função  $f(x) = ax$  é denominada função linear.*

**Definição 2.4.** *Denomina-se função constante a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da forma  $f(x) = b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .*

Para a interpretação geométrica do Problema 2.1, construímos no GeoGebra as seguintes funções constantes:

- $g(x) = 35$ , que representa a quantidade de camelos deixada como herança aos três filhos;
- $f(x) = 35 + b$ , que representa a quantidade de camelos deixada como herança aos três filhos com o acréscimo de  $b$  camelos.

Além das duas funções, também determinamos os pontos que representam a quantia de camelos atribuída a cada um dos três irmãos em função da quantidade de camelos considerada na partilha.

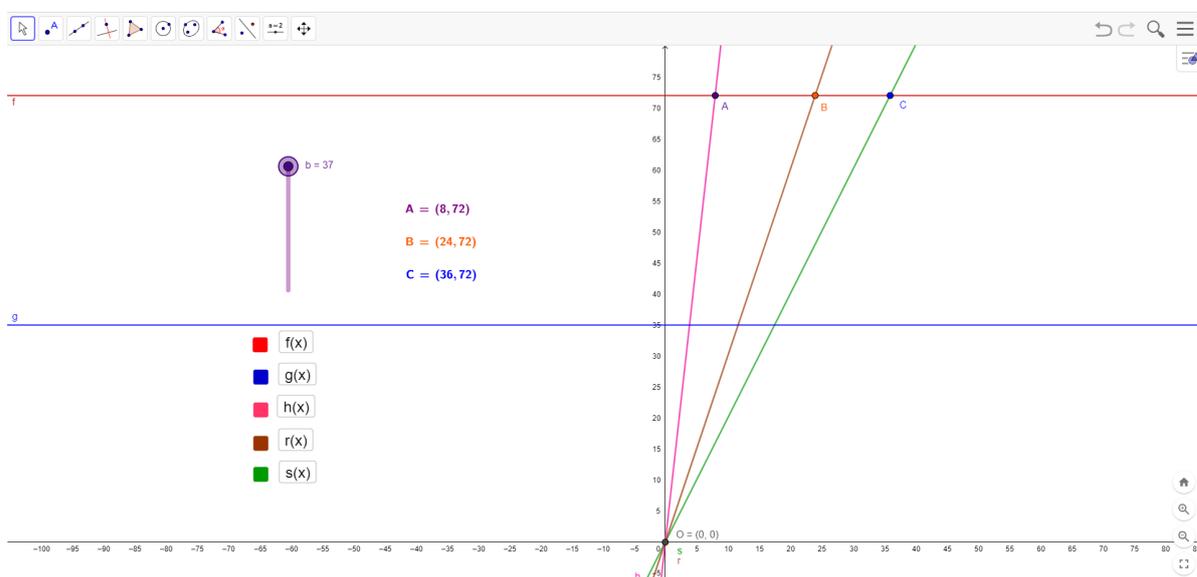
- ◇ O ponto  $A = (x_A, y_A)$  refere-se à parte da herança que compete ao irmão mais novo:  $x_A$  representa a quantidade de camelos que cabe a esse irmão e  $y_A$  representa o total de camelos que está sendo considerado na partilha.
- ◇ O ponto  $B = (x_B, y_B)$  refere-se à parte da herança que compete ao irmão do meio:  $x_B$  representa a quantidade de camelos que cabe a esse irmão e  $y_B$  representa o total de camelos que está sendo considerado na partilha.
- ◇ O ponto  $C = (x_C, y_C)$  refere-se à parte da herança que compete ao irmão mais velho:  $x_C$  representa a quantidade de camelos que cabe a esse irmão e  $y_C$  representa o total de camelos que está sendo considerado na partilha.

No GeoGebra, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  aparecem, respectivamente, na interseção da reta que representa a função  $f(x)$  com as retas que representam as seguintes funções lineares:

- $h(x)$ , que passa pelos pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $O(0, 0)$ ;
- $r(x)$ , que passa pelos pontos  $B(x_B, y_B)$  e  $O(0, 0)$ ;
- $s(x)$ , que passa pelos pontos  $C(x_C, y_C)$  e  $O(0, 0)$ .

A Figura 2.2 ilustra a construção das funções no GeoGebra. Quando  $b = 0$ , temos que as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são coincidentes.

Figura 2.2 – Interpretação geométrica do Problema 2.1 no GeoGebra: as funções  $f(x)$  (vermelho),  $g(x)$  (azul),  $h(x)$  (rosa),  $r(x)$  (marrom) e  $s(x)$  (verde)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

No GeoGebra, podemos manipular o controle deslizante  $b$ , com  $0 \leq b \leq 37$ , de maneira que a função  $f(x) = y = 35 + b$ , que representa a quantidade de camelos deixada como herança aos filhos com o acréscimo de  $b$  camelos, e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (parte superior esquerda da Figura 2.2) sejam visualizados de forma dinâmica. A construção pode ser acessada através do link

<https://www.geogebra.org/classic/dnfhuv3f>.

Ao mover o controle deslizante  $b$  no GeoGebra, é importante observarmos as soluções naturais, assim como a melhor solução para o Problema 2.1. Exemplificando:

- ★ para  $b = 1$ , temos que  $A = (4, 36)$ ,  $B = (12, 36)$  e  $C = (18, 36)$ ;
- ★ para  $b = 19$ , temos que  $A = (6, 54)$ ,  $B = (18, 54)$  e  $C = (27, 54)$ ;
- ★ para  $b = 37$ , temos que  $A = (8, 72)$ ,  $B = (24, 72)$  e  $C = (36, 72)$ .

## 2.2.2 INTERPRETAÇÃO ALGÉBRICA COM O GNU OCTAVE

Outra forma de interpretar o Problema 2.1 é por intermédio da solução de sistemas de equações lineares. Para tanto, utilizamos a ferramenta computacional GNU Octave. É importante ressaltar que o GNU Octave necessita de dados em linguagem de programação própria para que consigamos manipulá-lo.

Consideremos os seguintes sistemas de equações lineares do primeiro grau, representativos do Problema 2.1.

$$\begin{cases} y = 35 + b \\ x_1 = \frac{y}{2} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} y = 35 + b \\ x_2 = \frac{y}{3} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} y = 35 + b \\ x_3 = \frac{y}{9} \end{cases} \quad (2.3)$$

Nos sistemas (2.1)-(2.3), temos que:

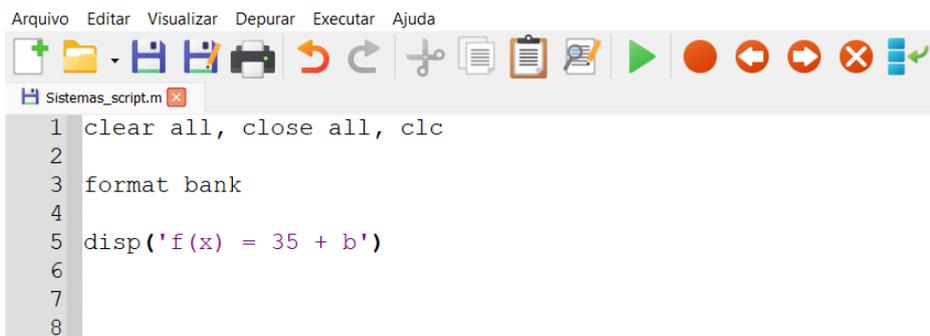
- $y = 35 + b$  representa a quantidade de camelos deixada como herança aos três filhos com o acréscimo de  $b$  camelos;
- $x_1 = \frac{y}{2}$  representa a equação da quantidade de camelos deixada como herança para o filho mais velho;
- $x_2 = \frac{y}{3}$  representa a equação da quantidade de camelos deixada como herança para o filho do meio;
- $x_3 = \frac{y}{9}$  representa a equação da quantidade de camelos deixada como herança para o filho mais moço;
- $b$  é a variável independente, onde  $b \geq 0$ .

Acessando o GNU Octave, criamos um script para resolver os sistemas (2.1), (2.2) e (2.3). De acordo com Silva (2023, p. 17): “Um script é um arquivo com comandos interpretáveis pelo Matlab cujo nome termina com a extensão *.m*”. Essa definição também vale para o GNU Octave.

No GNU Octave, aconselha-se a iniciar um script usando os comandos **clear all**, **close all** e **clc**, cuja finalidade é, respectivamente, limpar as variáveis, fechar as imagens excedentes e limpar a janela de comandos, facilitando desse modo a visualização de todo processo de criação de um script (Statella, 2022a).

Ainda, usamos o comando **disp** para escrever frases curtas. Segundo Silva (2023, p. 7): “Este comando recebe como parâmetro, entre parênteses e aspas simples, o texto que deve ser impresso na tela”. Já o comando **format bank** formata os dados numéricos de saída com duas casas decimais. A Figura 2.3 ilustra a parte inicial do script empregando esses comandos.

Figura 2.3 – Script para solucionar o Problema 2.1: comandos iniciais



```

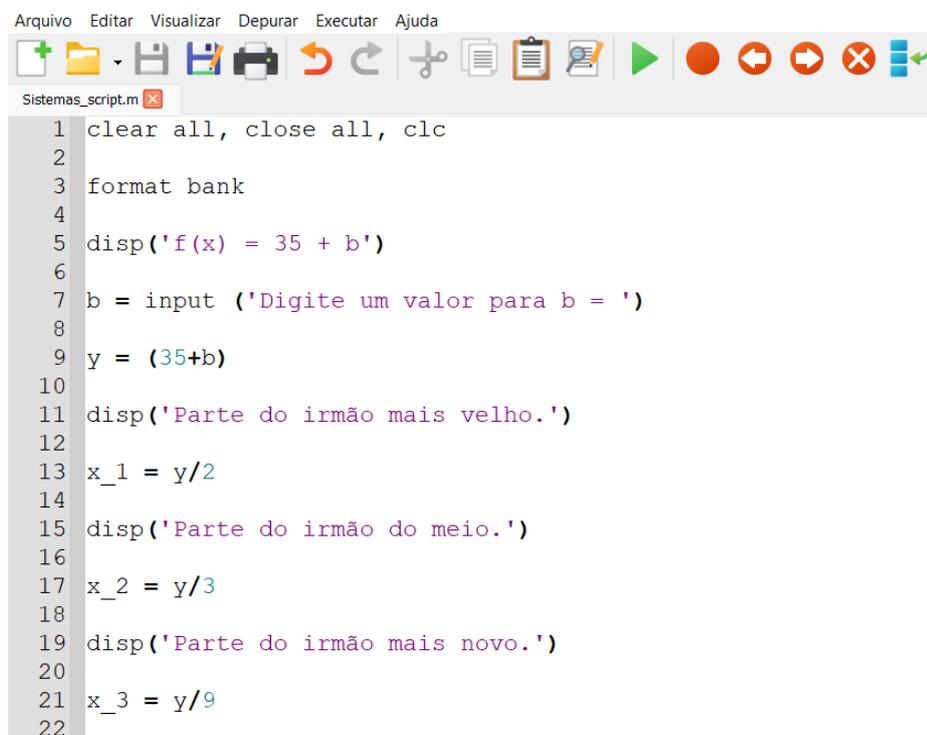
Arquivo Editar Visualizar Depurar Executar Ajuda
Sistemas_script.m
1 clear all, close all, clc
2
3 format bank
4
5 disp('f(x) = 35 + b')
6
7
8

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Em seguida, usando o comando **input**, que serve para a leitura dos valores digitados na janela de comandos (Silva, 2023), criamos uma entrada de dados para a variável independente  $b$ . E finalmente atribuímos os valores para  $y = 35 + b$ ,  $x_1 = \frac{y}{2}$ ,  $x_2 = \frac{y}{3}$  e  $x_3 = \frac{y}{9}$ . A estrutura final do scrip está ilustrada na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Script para solucionar o Problema 2.1: estrutura final



```

Arquivo Editar Visualizar Depurar Executar Ajuda
Sistemas_script.m
1 clear all, close all, clc
2
3 format bank
4
5 disp('f(x) = 35 + b')
6
7 b = input ('Digite um valor para b = ')
8
9 y = (35+b)
10
11 disp('Parte do irmão mais velho.')
12
13 x_1 = y/2
14
15 disp('Parte do irmão do meio.')
16
17 x_2 = y/3
18
19 disp('Parte do irmão mais novo.')
20
21 x_3 = y/9
22

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Executando o script com o botão verde em forma de seta na parte superior da Figura 2.4, obtemos os resultados na janela de comandos – Figura 2.5.

Figura 2.5 – (a) Atribuição de valor para  $b$ ; (b) valores calculados para  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$

<pre>Janela de Comandos f(x) = 35 + b Digite um valor para b =  </pre>	<pre>Janela de Comandos f(x) = 35 + b Digite um valor para b = 8 b = 8.00 y = 43.00 Parte do irmão mais velho. x_1 = 21.50 Parte do irmão do meio. x_2 = 14.33 Parte do irmão mais novo. x_3 = 4.78 &gt;&gt;</pre>
--	--

(a)

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Atribuindo  $b = 1$ , obtemos o resultado mais favorável à Beremiz e aos três irmãos segundo a solução proposta pelo calculista no Problema 2.1. A Figura 2.6 ilustra essa solução.

Figura 2.6 – Solução do Problema 2.1 para  $b = 1$

```
Janela de Comandos
f(x) = 35 + b
Digite um valor para b = 1
b = 1.00
y = 36.00
Parte do irmão mais velho.
x_1 = 18.00
Parte do irmão do meio.
x_2 = 12.00
Parte do irmão mais novo.
x_3 = 4.00
>>
```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

**Observação 2.1.** *O professor de matemática da Educação Básica pode adaptar o script da Figura 2.4 para generalizar a solução do Problema 2.1, ou seja, para quaisquer quantidades de camelos na partilha. Para tanto, basta definir a função como  $f(x) = x + b$ , com  $x$  como dado de entrada, assim como foi feito para  $b$ . Ainda, o script pode ser aperfeiçoado impondo-se uma limitação para  $b$ , uma vez que  $b \in \mathbb{N}$ . Desta forma, o programa pode devolver uma mensagem do tipo “O valor de  $b$  dever ser um número natural”, quando se digita para  $b$  um valor decimal e/ou negativo.*

### 3 O PROBLEMA DOS QUADRADOS MÁGICOS

No Problema 3.1, que é um conto do livro *O Homem que calculava* (Tahan, 2008b, p. 109-113), um quadrado mágico e um tabuleiro são resgatados por Nuredim em sua busca pelo calígrafo que o rei queria interrogar com o objetivo de saber mais sobre os números amigos – Definição 3.1.

**Definição 3.1.** *Dois números naturais são denominados amigos se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro. Os divisores próprios de um número  $n \in \mathbb{N}$  são todos os divisores de  $n$ , exceto o próprio  $n$ .*

O Exemplo 3.1 destaca dois números amigos.

**Exemplo 3.1.** *Os divisores próprios de 220 são  $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$ , cuja soma é 284, enquanto que os divisores próprios de 284 são  $\{1, 2, 4, 71, 142\}$ , cuja soma é 220. Logo, os números 220 e 284 são amigos segundo a Definição 3.1.*

Beremiz é questionado sobre o tabuleiro com números e o calculista explica os quadrados mágicos para o sultão. O rei também pergunta sobre a lenda do xadrez, sendo este outro conto relatado em Tahan (2008b).

**Problema 3.1.** *Nuredim não fora favorecido pela sorte ao dar desempenho à sua missão. O calígrafo que o rei queria, com tanto empenho, interrogar sobre o caso dos “números amigos” não se encontrava mais entre os muros de Bagdá.*

*Ao relatar as providências que tomara a fim de dar cumprimento à ordem do califa, assim falou o nobre muçulmano:*

— *Deste palácio parti, acompanhado de três guardas, para a mesquita de Otmã (Alá que a nobilite cada vez mais!). Informou-me um velho imã que zela pela conservação desse templo que o homem procurado residira, realmente, durante vários meses, em uma casa próxima. Poucos dias antes, porém, seguira para Báçora em uma caravana de vendedores de tapetes e velas. Soube ainda que o calígrafo (cujo nome o imã ignorava) vivia só, e raras vezes deixava o pequeno e modesto aposento em que morava. Achei que devia examinar a antiga habitação do calígrafo, pois era bem provável que fosse lá encontrar alguma aplicação que me facilitasse as pesquisas.*

*O aposento achava-se abandonado desde o dia em que fora deixado pelo seu antigo morador. Tudo ali demonstrava lamentável pobreza! Um leito grosseiro, atirado ao canto, era todo o mobiliário. Havia, entretanto, sobre uma caixa tosca de madeira, um tabuleiro de xadrez, acompanhado de algumas peças desse nobilitante jogo e, na parede, um quadro cheio de números.*

*Achei estranho que um homem paupérrimo, que arrastava uma vida tão cheia de privações, cultivasse o jogo de xadrez e adornasse a parede de sua casa com figuras feitas de expressões matemáticas. Resolvi trazer comigo o tabuleiro e o tal quadrado numérico, para que os nossos dignos ulemás pudessem observar essas relíquias deixadas pelo velho calígrafo.*

*O sultão, tomado, entretanto, de viva curiosidade pelo caso, mandou que Beremiz examinasse com a devida atenção o tabuleiro e a figura, que mais parecia trabalho de um discípulo de Al-Kharismi do que enfeite para quarto de pobre.*

*Depois de ter observado com meticuloso cuidado o tabuleiro e o quadro, disse o Homem que Calculava:*

- *Esta interessante figura numérica, encontrada no quarto abandonado pelo calígrafo, constitui o que chamamos um “quadrado mágico”.*
- *Tomemos um quadrado e dividamo-lo em 4, 9 ou 16 quadrados iguais, a que chamaremos casas.*
- *Em cada uma dessas casas coloquemos um número inteiro. A figura obtida será um quadrado mágico quando a soma dos números que figuram em uma coluna, em uma linha ou em qualquer das diagonais for sempre a mesma. Esse resultado invariável é denominado constante do quadrado e o número de casas de uma linha é o módulo do quadrado.*
- *Os números que ocupam as diferentes casas do quadrado mágico devem ser todos diferentes e tomados na ordem natural.*
- *É obscura a origem dos quadrados mágicos. Acredita-se que a construção dessas figuras constituía, já em época remota, um passatempo que prendia a atenção de grande número de curiosos.*
- *Como os antigos atribuíaam a certos números propriedades cabalísticas, era muito natural que vissem virtudes mágicas nos arranjos especiais desses números.*
- *Os matemáticos chineses que viveram 45 séculos antes de Maomé já conheciam os quadrados mágicos.*
- *O quadrado mágico com 4 casas não pode ser construído.*
- *Na Índia muitos reis usavam o quadrado mágico como amuleto; um sábio do Iêmen afirmava que os quadrados mágicos eram preservativos de certas moléstias. Um quadrado mágico de prata, preso ao pescoço, evitava, segundo a crença de certas tribos, o contágio da peste.*
- *Quando um quadrado mágico apresenta certa propriedade, como, por exemplo, a de ser decomponível em vários quadrados mágicos, leva o nome de hiperquadrado mágico.*

- *Entre os quadrados hipermágicos podemos citar os diabólicos. Assim se denominam os quadrados que continuam mágicos quando transportamos uma coluna que se acha à direita para a esquerda, ou quando passamos uma linha que está embaixo para cima.*

*As indicações dadas por Beremiz sobre os quadrados mágicos foram ouvidas com a maior atenção pelo rei e pelos nobres muçulmanos.*

*Um velho ulemá, de olhos claros e nariz achatado, mas muito risonho e simpático, depois de dirigir palavras elogiosas ao “eminente Beremiz Samir, do país do Irã”, declarou que desejava fazer uma consulta ao sábio calculista.*

*A consulta do ulemá risonho e simpático era a seguinte:*

- *Seria possível, a um geômetra, calcular a relação exata entre uma circunferência e o seu diâmetro? Em outras palavras: “Quantas vezes uma circunferência contém o seu diâmetro?”*

*A resposta a essa pergunta formulou-a o calculista nos seguintes termos:*

- *Não é possível obter a medida exata de uma circunferência mesmo quando conhecemos o seu diâmetro. Dessa medida deveria resultar um número, mas o verdadeiro valor desse número os geômetras ignoram. Acreditavam os antigos astrólogos que a circunferência fosse três vezes o seu diâmetro. Mas isso não é certo. O grego Arquimedes achou que, medindo 22 côvados a circunferência, o seu diâmetro deveria medir, aproximadamente, 7 côvados. O tal número resultaria, assim, da divisão de 22 por 7. Os calculistas hindus não concordam com essa conta, e o grande Al-Kharismi afirmou que a regra de Arquimedes, na vida prática, está muito longe de ser verdadeira.*

*E Beremiz concluiu, dirigindo-se ao ulemá do nariz achatado:*

- *Esse número parece envolver alto mistério, por ser dotado de atributos que só Alá poderá revelar.*

*A seguir, o brilhante calculista tomou do tabuleiro de xadrez e disse, voltando-se para o rei:*

- *Este velho tabuleiro, dividido em 64 casas pretas e brancas, é empregado, como sabeis, no interessante jogo que um hindu chamado Lahur Sessa, inventou, há muitos séculos, para recrear um rei da Índia. A descoberta do jogo de xadrez acha-se ligada a uma lenda que envolve cálculos, números, e notáveis ensinamentos.*
- *Deve ser interessante ouvi-la! –atalhou o califa.*
- *Quero conhecê-la!*

— *Escuto e obedeço* — respondeu Beremiz.

A famosa lenda sobre a origem do jogo de xadrez é narrada no conto que sucede o conto do quadrado mágico em Tahan (2008b).

### 3.1 RETRATANDO O QUADRADO MÁGICO

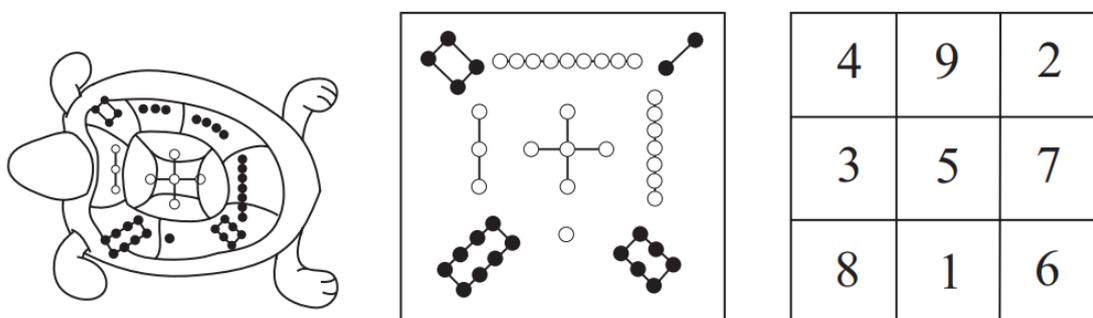
Ao explicar sobre o quadrado mágico no Problema 3.1, Beremiz menciona:

É obscura a origem dos quadrados mágicos. Acredita-se que a construção dessas figuras constituía, já em época remota, um passatempo que prendia a atenção de grande número de curiosos.

[...] Como os antigos atribuíam a certos números propriedades cabalísticas, era muito natural que vissem virtudes mágicas nos arranjos especiais desses números. Os matemáticos chineses, que viveram 45 séculos antes de Maomé, já conheciam os quadrados mágicos (Tahan, 2008b, p. 148).

Considera-se o *Lo-shu* - primeira imagem na Figura 3.1, o mais antigo quadrado mágico  $3 \times 3$ . Esse quadrado foi observado pelo imperador chinês Yu por volta de 2200 a.C. Segundo a lenda, o artefato decorava a carapaça de uma tartaruga divina que margeava o rio Amarelo (Melo; Machado, 2018). A Figura 3.1 ilustra a evolução do quadrado mágico.

Figura 3.1 – A evolução do quadrado mágico



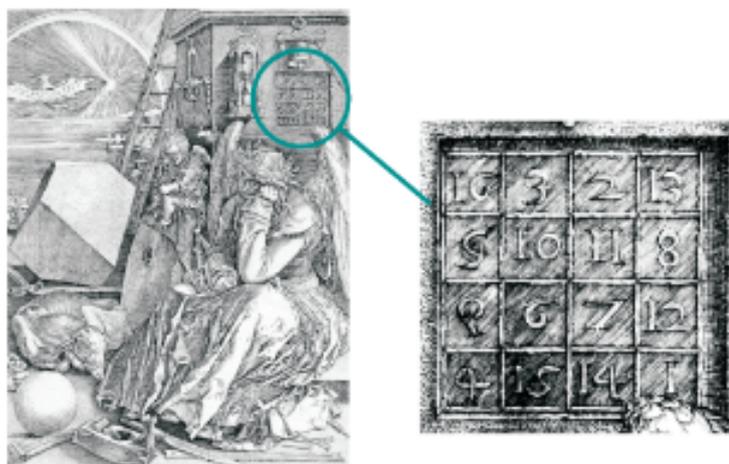
Fonte: Bezzerra, Gimenez e Burin (2009, n.p).

Foi somente no século IX d.C. que os quadrados mágicos foram divulgados no Japão e Oriente Médio; na Índia, no século XI. Quadrados mágicos gravados em placas de prata eram usados como amuleto contra a peste na Europa medieval (Bezzerra; Gimenez; Burin, 2009). Tahan (2008b, p. 148) acrescenta:

Os matemáticos chineses, que viveram 45 séculos antes de Maomé, já conheciam os quadrados mágicos. Na Índia muitos reis usavam o quadrado mágico como amuleto; um sábio do Iêmen afirmava que os quadrados mágicos eram preservativos de certas moléstias. Um quadrado mágico de prata, preso ao pescoço, evitava, segundo a crença de certas tribos, o contágio da peste.

A gravura *Melancolia* – Figura 3.2, do artista renascentista alemão Albrecht Dürer (1471 – 1528), ilustra um quadrado mágico de ordem 4 no canto superior direito. Essa imagem que data de 1514 é considerada o primeiro vislumbre do quadrado mágico no Ocidente (Melo; Machado, 2018). Nesse quadrado mágico, a soma dos números dispostos nas linhas, colunas e diagonais é igual a 34 (Bezerra; Gimenez; Burin, 2009).

Figura 3.2 – Gravura Melancolia de Albrecht Dürer



Fonte: Bezerra, Gimenez e Burin (2009, n.p).

O artista e arquiteto catalão Antoni Gaudí (1852 – 1926) empregou um quadrado mágico na sua obra *Sagrada Família*, mais especificamente na cena *O Beijo de Judas* (Melo; Machado, 2018), ilustrada na Figura 3.3. Nesta figura podemos observar um quadrado mágico de ordem 4 no canto inferior esquerdo, cuja soma nas linhas, colunas e diagonais é sempre 33. No quadrado, os números 10 e 14 aparecem repetidos, enquanto que os números 12 e 16 estão ausentes.

Figura 3.3 – Cena *O beijo de Judas*



Fonte: Wikipedia (2022a, n.p).

Em 1996, o matemático suíço Jacques Sesiano (1944) traduziu a obra de um autor

árabe de identidade desconhecida, datada de meados do século XI, que entitulou de “*Un traité médiéval sur les carrés magiques*” (Um tratado medieval sobre quadrados mágicos). O livro aborda métodos de construção de quadrados mágicos, independentemente da dimensão (Alegría, 2019).

## 3.2 DEFININDO O QUADRADO MÁGICO

No Problema 3.1, Beremiz define o quadrado mágico.

Esta interessante figura numérica, encontrada no quarto abandonado pelo calígrafo, constitui o que chamamos um “quadrado mágico”. — Tomemos um quadrado e dividamo-lo em 4, 9 ou 16 quadrados iguais, a que chamaremos casas. Em cada uma dessas casas coloquemos um número inteiro. A figura obtida será um quadrado mágico quando a soma dos números que figuram em uma coluna, em uma linha ou em qualquer das diagonais for sempre a mesma. Esse resultado invariável é denominado constante do quadrado e o número de casas de uma linha é o módulo do quadrado (Tahan, 2008b, p. 148).

Sesiano (2019) define quadrado mágico – Definição 3.2, na coleção *Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*.

**Definição 3.2.** *Um quadrado mágico é um quadrado dividido em um número quadrado de células em que os números naturais, todos diferentes, são arranjados de tal forma que a mesma soma é encontrada em cada linha horizontal, cada linha vertical e cada uma das duas diagonais principais<sup>1</sup>.*

Melo e Machado (2018) definem o quadrado mágico na linguagem de matrizes – Definição 3.3.

**Definição 3.3.** *Uma matriz real  $n \times n$  denomina-se quadrado mágico de ordem  $n$  quando a soma dos elementos  $a_{ij}$  de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária são iguais. Em um quadrado mágico de ordem  $n$ , a soma é a constante mágica e o número de somas é igual a  $2n + 2$ .*

As Proposições 3.1, 3.2 e 3.3 estabelecem, a partir da Definição 3.3, a existência dos quadrados mágicos de ordens 1, 2 e 3 (Melo; Machado, 2018).

**Proposição 3.1.** *Uma matriz  $1 \times 1$  é um quadrado mágico.*

*Demonstração.* Por definição, uma matriz  $[a_{11}]$  é um quadrado mágico cuja constante mágica é o elemento  $a_{11}$ .

□

<sup>1</sup> A magic square is a square divided into a square number of cells in which natural numbers, all different, are arranged in such a way that the same sum is found in each horizontal row, each vertical row, and each of the two main diagonals.

**Proposição 3.2.** *Uma matriz  $2 \times 2$  é um quadrado mágico se, e somente se, todos os seus elementos são iguais.*

Antes de apresentarmos a demonstração da Proposição 3.2, resgatemos um trecho da fala de Beremiz no Problema 3.1: “Os números que ocupam as diferentes casas do quadrado mágico devem ser todos diferentes e tomados na ordem natural.[...] O quadrado mágico com 4 casas não pode ser construído” (Tahan, 2008b, p. 111). De fato, a Proposição 3.2 estabelece que podemos construir um quadrado mágico com 4 casas, desde que todas as casas sejam iguais.

*Demonstração.* Sejam  $a, b, c, d$  tais que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é um quadrado mágico, com constante mágica  $k$ . Assim, temos que:

$$\begin{cases} a + b = k \\ a + c = k \\ a + d = k \\ b + c = k \\ b + d = k \\ c + d = k \end{cases} \quad (3.1)$$

Manipulando as equações do sistema (3.1), obtemos que:

$$\begin{cases} a = c = d = k - b \\ a = b = d = k - c \end{cases} \quad (3.2)$$

Operando com as equações do sistema (3.2), concluímos que:

1. como  $a = c$  e  $a = k - c$ , então  $c = \frac{k}{2}$ ;
2. como  $a = c$  e  $c = d$ , então por transitividade  $a = d = \frac{k}{2}$ ;
3. como  $b = a$  e  $a = d$ , então por transitividade  $b = d = \frac{k}{2}$ .

Portanto,  $a = b = c = d = \frac{k}{2}$ .

Reciprocamente, seja  $a = b = c = d = \frac{k}{2}$ . Assim, temos que

$$a + b = a + c = a + d = b + c = b + d = c + d = k,$$

isto é, a soma  $k$  dos elementos de cada uma das linhas, colunas, diagonal principal e diagonal secundária da matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é constante, implicando que a matriz de ordem 2 é um quadrado mágico.

Na outra direção, se todos os elementos de uma matriz  $2 \times 2$  são iguais então o quadrado é mágico.

□

A constante  $k$  é uma variável livre, isto é, pode assumir qualquer valor real. Logo, podemos escrever um quadrado mágico  $2 \times 2$  na forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposição 3.3.** *Um quadrado mágico de ordem 3 é da forma*

$$\begin{pmatrix} a & b & k - a - b \\ \frac{4}{3}k - 2a - b & \frac{k}{3} & 2a + b - \frac{2}{3}k \\ a + b - \frac{k}{3} & \frac{2}{3}k - b & \frac{2}{3}k - a \end{pmatrix},$$

onde  $a, b, k \in \mathbb{R}$  e  $k$  é a constante mágica.

*Demonstração.* Sejam  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  tais que

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

é um quadrado mágico de constante mágica  $k$ .

Segue da Definição 3.3 que a soma dos elementos de duas linhas quaisquer é igual à soma dos elementos das duas diagonais. Em particular, usando os elementos da primeira e terceira linhas, temos que:

$$\begin{aligned} (a + b + c) + (g + h + i) &= (a + e + i) + (c + e + g); \\ b + h &= 2e. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Somando os elementos da segunda coluna e empregando (3.3), obtemos que:

$$\begin{aligned} (b + e + h) &= (b + h) + e = 2e + e = 3e = k; \\ e &= \frac{k}{3}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando (3.4) e a soma  $k$ , concluímos que:

1. Primeira linha

$$c = k - a - b; \quad (3.5)$$

2. Segunda coluna

$$\begin{aligned} h &= k - b - e = k - b - \frac{k}{3}; \\ h &= \frac{2}{3}k - b; \end{aligned}$$

3. Diagonal secundária

$$\begin{aligned} g &= k - c - e \stackrel{(3.5)}{=} k - (k - a - b) - e; \\ g &= a + b - \frac{k}{3}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. Primeira coluna

$$\begin{aligned} d &= k - a - g \stackrel{(3.6)}{=} k - a - \left(a + b - \frac{k}{3}\right); \\ d &= \frac{4}{3}k - 2a - b; \end{aligned} \quad (3.7)$$

5. Segunda linha

$$\begin{aligned} f &= k - d - e \stackrel{(3.7)}{=} k - \left(\frac{4}{3}k - 2a - b\right) - \frac{k}{3}; \\ f &= 2a + b - \frac{2}{3}k; \end{aligned}$$

6. Diagonal principal

$$\begin{aligned} i &= k - a - e = k - a - \frac{k}{3}; \\ i &= \frac{2}{3}k - a. \end{aligned}$$

Portanto, a forma geral de um quadrado mágico de ordem 3 é dada por

$$\begin{pmatrix} a & b & k - a - b \\ \frac{4}{3}k - 2a - b & \frac{k}{3} & 2a + b - \frac{2}{3}k \\ a + b - \frac{k}{3} & \frac{2}{3}k - b & \frac{2}{3}k - a \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

onde  $a, b, k \in \mathbb{R}$  e  $k$  é a constante mágica.

□

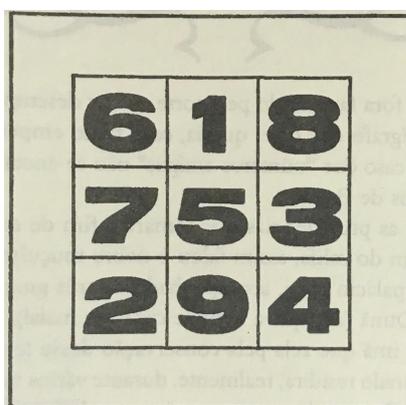
### 3.3 QUADRADO MÁGICO PURO DE ORDEM N

A Definição 3.4 estabelece o conceito de quadrado mágico puro e o Exemplo 3.2 ilustra essa definição. O quadrado mágico do Exemplo 3.2 tem a forma (3.8), com  $a = 6$ ,  $b = 1$  e  $k = 15$ .

**Definição 3.4.** Um quadrado mágico puro de ordem  $n$  é aquele construído com os primeiros  $n^2$  números naturais consecutivos, sem repetição, isto é,  $1, 2, \dots, n^2$ .

**Exemplo 3.2.** O quadrado mágico de ordem 3 ilustrado na Figura 3.4 é puro, pois foi construído com os nove primeiros números naturais consecutivos, ou seja, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Figura 3.4 – Quadrado mágico puro de ordem 3



6	1	8
7	5	3
2	9	4

Fonte: Tahan (2008b, p. 110).

Em um quadrado mágico puro, a constante mágica será a menor possível para um quadrado mágico  $n \times n$  (Sesiano, 2019). As Proposições 3.4 e 3.5 estabelecem, respectivamente, a soma dos elementos de um quadrado mágico puro e o valor da constante mágica.

**Proposição 3.4.** A soma  $S_n$  dos elementos de um quadrado mágico puro de ordem  $n$  é igual a

$$S_n = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}.$$

*Demonstração.* A soma dos elementos de um quadrado mágico puro de ordem  $n$  é dada por:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n^2. \quad (3.9)$$

Invertendo a ordem das parcelas na soma (3.9), temos que:

$$S_n = n^2 + (n^2 - 1) + (n^2 - 2) + \dots + 1. \quad (3.10)$$

Somando as igualdades (3.9) e (3.10), obtemos que:

$$2S_n = (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + 1). \quad (3.11)$$

Como o quadrado mágico puro de ordem  $n$  tem  $n^2$  elementos, concluímos de (3.11) que:

$$\begin{aligned} 2S_n &= n^2(n^2 + 1); \\ S_n &= \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

□

**Proposição 3.5.** *A constante mágica  $M_n$  de um quadrado mágico puro de ordem  $n$  é igual a*

$$M_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

*Demonstração.* Em um quadrado mágico puro de ordem  $n$ , a constante mágica  $M_n$  é a soma dos elementos de cada uma das linhas, colunas e diagonais. Como existem  $n$  linhas em um quadrado mágico de ordem  $n$ ,  $nM_n$  representa a soma de todos os elementos do quadrado mágico puro. Assim:

$$nM_n = S_n. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.12) em (3.13), concluímos que:

$$\begin{aligned} n.M_n &= \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}; \\ M_n &= \frac{n(n^2 + 1)}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

□

Ao construirmos um quadrado mágico puro de ordem 3, a relação (3.14) determina que a constante mágica desse quadrado é 15. A Figura 3.4 ilustra uma possibilidade de construção desse quadrado.

**Questão 3.1.** *Quantos são os quadrados mágicos puros de ordem 3?*

A resposta à Questão 3.1 é oito (Silva, 2020). Nesses quadrados, listados a seguir, o número 5 sempre ocupa o centro do quadrado, ou seja, é o elemento  $a_{22}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Também podemos afirmar que, a menos de simetrias de rotação e reflexão, existe um único quadrado mágico puro de ordem 3 (Silva, 2020). Concebemos no GeoGebra uma atividade, inspirada em uma construção de Marques (2023), para completar o quadrado mágico puro de ordem 3. Essa atividade está disponível no link:

<https://www.geogebra.org/m/vg4syz9q>.

**Questão 3.2.** *Quantos são os quadrados mágicos puros de ordem 4, 5 e 6?*

Existem 880 quadrados mágicos puros de ordem 4, a menos de simetrias de rotação e reflexão. Nesses quadrados, também chamados de quadrados mágicos de Dürer, a constante mágica é 34. Para  $n = 5$ , existem 275.305.224 quadrados mágicos puros com constante mágica 65 e, para  $n = 6$ , existem mais de  $10^{19}$  quadrados mágicos puros com constante mágica 111, a menos de simetrias de rotação e reflexão (Viana, 2023).

### 3.4 CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRADOS MÁGICOS

No Problema 3.1, Beremiz classifica os quadrados mágicos.

Quando um quadrado mágico apresenta certa propriedade, como, por exemplo, a de ser decomponível em vários quadrados mágicos, leva o nome de hipermágico. Entre os quadrados hipermágicos podemos citar os diabólicos. Assim se denominam os quadrados que continuam mágicos quando transportamos uma coluna que se acha à direita para a esquerda, ou quando passamos uma linha que está embaixo para cima (Tahan, 2008b, p. 150).

Desta forma, há outras categorias de quadrados mágicos: os imperfeitos (ou defeituosos), os hipermágicos e os diabólicos (Wikipedia, 2023).

- **Imperfeito ou defeituoso:** é um quadrado que não possui todas as propriedades de um quadrado mágico. Por exemplo, a soma das diagonais – principal e secundária – diverge da soma correspondente às demais linhas e colunas, que são iguais entre si.
- **Hipermágico:** é um quadrado que origina outro quadrado mágico quando se transporta uma coluna da direita para a esquerda (ou vice-versa) ou uma linha de cima para baixo (ou vice-versa).
- **Diabólico:** é um quadrado hipermágico com muitas propriedades ou com propriedades complexas. A denominação desse quadrado deve-se provavelmente às dificuldades na distribuição dos elementos para torná-lo mágico.

A Figura 3.5 ilustra um quadrado mágico imperfeito. Nesse quadrado: a soma dos elementos de cada uma das linhas é 15; a soma dos elementos de cada uma das colunas, da

esquerda para a direita, é 15, 13 e 17, respectivamente; a soma dos elementos de cada uma das diagonais é 13.

Figura 3.5 – Quadrado mágico imperfeito

2	9	4
7	3	5
6	1	8

Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Já a Figura 3.6(a) ilustra um quadrado hipermágico de ordem 3. Ao permutarmos a primeira e terceira colunas, obtemos outro quadrado mágico – Figura 3.6(b). Este quadrado também é hipermágico, uma vez que a permuta da primeira e terceira linhas gera outro quadrado mágico. Os quadrados da Figura 3.6 representam duas das oito distribuições possíveis para um quadrado mágico puro de ordem 3.

Figura 3.6 – (a) Quadrado hipermágico de ordem 3; (b) quadrado mágico obtido com o deslocamento da 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> colunas

2	9	4
7	5	3
6	1	8

(a)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

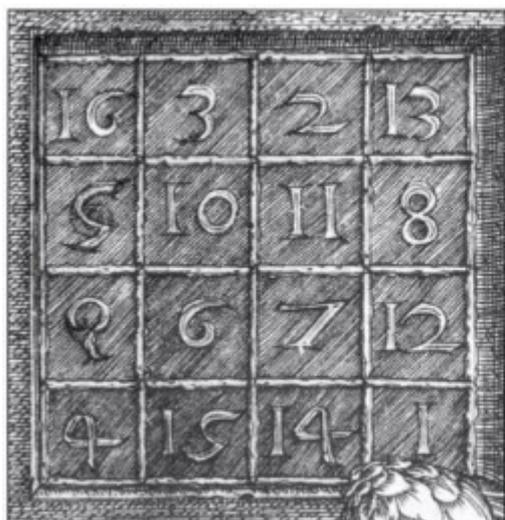
(b)

Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Um exemplo de quadrado hipermágico diabólico é o “Quadrado de Dürer”, um quadrado mágico puro de ordem 4, ilustrado na Figura 3.7. Este quadrado aparece na gravura *Melancholia* – Figura 3.2, de Albrecht Dürer, e tem várias propriedades, destacadas a seguir, que o caracterizam como diabólico.

Propriedades do quadrado hipermágico diabólico de Dürer:

Figura 3.7 – Quadrado de Dürer



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Fonte: Wikipedia (2023, n.p).

1. na quarta linha, nas duas casas centrais, podemos visualizar os números 15 e 14, que coincidentemente determinam o ano (1514) da confecção da obra;
2. ainda na quarta linha, observamos que os extremos esquerdo e direito são, respectivamente, 4 e 1, cuja posição no alfabeto corresponde às letras *D* e *A*, que são, coincidentemente, as iniciais do nome do artista Albrecht Dürer;
3. a soma dos elementos das linhas, colunas e diagonais é 34, a constante mágica do quadrado;
4. a soma dos quatro extremos do quadrado (16, 13, 1, 4) também resulta em 34;
5. a soma dos elementos 3 (primeira linha), 8 (segunda linha), 9 (terceira linha) e 14 (quarta linha) resulta em 34;
6. a soma dos elementos 2 (primeira linha), 5 (segunda linha), 12 (terceira linha) e 15 (quarta linha) resulta em 34;
7. a soma do segundo e terceiro elementos da segunda e terceira linhas (10, 11, 6, 7), os quatro elementos centrais do quadrado, é igual a 34;
8. a soma do segundo e terceiro elementos da primeira e quarta linhas (3, 2, 15, 14) resulta em 34;
9. a soma dos elementos centrais da primeira e quarta colunas (5, 9, 8, 12) é igual a 34;
10. a soma dos dois primeiros elementos da primeira linha com os dois últimos elementos da quarta linha (16, 3, 14, 1) resulta em 34;

11. a soma dos dois últimos elementos da primeira linha com os dois primeiros elementos da quarta linha (2, 13, 4, 15) é igual a 34;
12. a soma dos quatro elementos: 3 (primeira linha), 5 (segunda linha), 12 (terceira linha) e 14 (quarta linha), resulta em 34;
13. a soma dos quatro elementos: 2 (primeira linha), 8 (segunda linha), 9 (terceira linha) e 15 (quarta linha), é igual a 34.

Sesiano (2019) emprega o termo *pandiagonal* para classificar os quadrados mágicos: “Existem quadrados mágicos comuns nos quais a soma mágica também é encontrada nas diagonais quebradas – portanto, pares de linhas diagonais, em ambos os lados e paralelas a uma diagonal principal, compreendendo  $n$  células ao todo. Tais quadrados são chamados *pandiagonais*<sup>2</sup>”.

Um quadrado mágico *pandiagonal* pode ter ordem ímpar, desde que a partir de 5, e ordem par, desde que múltipla de 4. A Figura 3.8 ilustra um quadrado mágico *pandiagonal* de ordem 8, com constante mágica igual a 260. Este quadrado é também um quadrado mágico puro.

Figura 3.8 – Quadrado mágico *pandiagonal* de ordem 8

11	22	47	50	9	24	45	52
38	59	2	31	40	57	4	29
18	15	54	43	20	13	56	41
63	34	27	6	61	36	25	8
3	30	39	58	1	32	37	60
46	51	10	23	48	49	12	21
26	7	62	35	28	5	64	33
55	42	19	14	53	44	17	16

Fonte: Sesiano (2019, n.p).

Na Figura 3.8, consideremos a sexta diagonal quebrada superior esquerda, paralela à diagonal secundária, que contém os números 22 e 38, e a segunda diagonal quebrada à direita, paralela à diagonal secundária, que contém os números 19, 35, 48, 32, 25 e 41. Somando os elementos dessas duas diagonais quebradas, obtemos o mesmo valor da constante mágica, isto é, 260. Esta propriedade caracteriza o quadrado mágico como *pandiagonal*.

<sup>2</sup> There are ordinary magic squares in which the magic sum is also found in the broken diagonals —thus pairs of diagonal rows, on either side of and parallel to a main diagonal, comprising  $n$  cells altogether. Such squares are called *pandiagonal*.

### 3.5 CÁLCULO DO DETERMINANTE DE UM QUADRADO MÁGICO DE ORDEM 3 E 4 USANDO O GNU OCTAVE

O determinante é um número associado a uma matriz quadrada. Este número indica se uma matriz quadrada é invertível. Podemos provar que o determinante de uma matriz  $A$  e o de sua matriz transposta  $A^t$  são iguais, isto é,  $\det(A) = \det(A^t)$  (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017). As diagonais principais de  $A$  e  $A^t$  também são iguais.

A matriz transposta de uma matriz  $A$  é a matriz  $A^t$  cuja  $i$ -ésima coluna é a  $i$ -ésima linha da matriz  $A$ , ou seja,  $a'_{ij} = a_{ji}$ , onde  $a'_{ij}$  representa os elementos da matriz transposta. Assim, se

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}, \text{ então } A^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

A matriz transposta de um quadrado mágico puro de ordem  $n$  também é um quadrado mágico puro de ordem  $n$ , como ilustra a Exemplo 3.3.

**Exemplo 3.3.** Matrizes determinadas pelos oito quadrados mágicos puros de ordem 3 possíveis. É fácil constatar que:  $B = A^t$ ,  $D = C^t$ ,  $F = E^t$  e  $H = G^t$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos determinar a matriz transposta  $A^t$  da matriz  $A$  usando o GNU Octave. Para tanto, criamos um script – Figura 3.9.

Figura 3.9 – Script para calcular a transposta da matriz  $A$

```

1 %Matriz transposta de A
2
3 A=[2,9,4;7,5,3;6,1,8]
4
5 A'
6
7 det(A)
8
9 det(A')
```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A execução do script ilustrado na Figura 3.9 gera a matriz transposta  $A^t$ , assim como  $\det(A) = \det(A^t) = -360$  – Figura 3.10.

Figura 3.10 – Matrizes  $A$  e  $A^t$  e seus determinantes

```

Janela de Comandos
>> Transposta_A

A =

     2     7     6
     9     5     1
     4     3     8

ans =

     2     9     4
     7     5     3
     6     1     8

ans = -360
ans = -360
>>
^^

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

No Exemplo 3.3, a matriz  $B$  corresponde à matriz transposta  $A^t$  de  $A$ . Desse modo, os determinantes das matrizes  $A$  e  $B$  têm o mesmo valor, ou seja,  $\det(A) = \det(A^t) = \det(B) = -360$  – Figura 3.11.

Figura 3.11 – Matrizes  $A$  e  $B$  e seus determinantes

```

Janela de Comandos
>> Det_A_B

A =

     2     7     6
     9     5     1
     4     3     8

ans = -360
B =

     2     9     4
     7     5     3
     6     1     8

ans = -360
>> |

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Analogamente, temos que  $C^t = D$ ,  $E^t = F$  e  $G^t = H$ , como ilustra a Figura 3.12 .

Figura 3.12 – (a) Matrizes  $C$ ,  $C^t$  e  $D$  e seus determinantes; (b) matrizes  $E$ ,  $E^t$  e  $F$  e seus determinantes; (c) matrizes  $G$ ,  $G^t$  e  $H$  e seus determinantes

<pre style="background-color: #f0f0f0; padding: 5px;"> Janela de Comandos &gt;&gt; Transposta_C  C =       6     1     8      7     5     3      2     9     4  ans =       6     7     2      1     5     9      8     3     4  D =       6     7     2      1     5     9      8     3     4  ans = 360 ans = 360 ans = 360 &gt;&gt;  </pre>	<pre style="background-color: #f0f0f0; padding: 5px;"> Janela de Comandos &gt;&gt; Transposta_E  E =       4     3     8      9     5     1      2     7     6  ans =       4     9     2      3     5     7      8     1     6  F =       4     9     2      3     5     7      8     1     6  ans = 360 ans = 360 ans = 360 &gt;&gt;  </pre>	<pre style="background-color: #f0f0f0; padding: 5px;"> Janela de Comandos &gt;&gt; Transposta_G  G =       8     1     6      3     5     7      4     9     2  ans =       8     3     4      1     5     9      6     7     2  H =       8     3     4      1     5     9      6     7     2  ans = -360 ans = -360 ans = -360 &gt;&gt;</pre>
(a)	(b)	(c)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Assim, nos pares de matrizes  $C$  e  $D$ ,  $E$  e  $F$ , e  $G$  e  $H$ , temos que:

$$\det(C) = \det(C^t) = \det(D) = 360; \quad (3.15)$$

$$\det(E) = \det(E^t) = \det(F) = 360; \quad (3.16)$$

$$\det(G) = \det(G^t) = \det(H) = -360. \quad (3.17)$$

Comparando os determinantes (3.15) a (3.17), podemos elencar dois casos:

(I)  $\det(A) = \det(B) = \det(G) = \det(H) = -360;$

(II)  $\det(C) = \det(D) = \det(E) = \det(F) = 360.$

Em ambos os casos, as igualdades ocorrem devido ao espelhamento vertical e horizontal aplicado sequencialmente às matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

No caso (I), denotemos por  $A_h$  a matriz resultante do espelhamento horizontal da matriz  $A$  e por  $A_{h,v}$ , a matriz resultante do espelhamento vertical da matriz  $A_h$ . Observamos na Figura 3.13 que a matriz  $A_{h,v}$  é igual à matriz  $H$ . Logo, temos que  $\det(A_{h,v}) = \det(H)$ . Como  $\det(A) = \det(H) = -360$ , segue que  $\det(A_{h,v}) = \det(H) = \det(A) = -360$ .

Figura 3.13 – (a) Script do espelhamento das matrizes  $A$  e  $A_h$ ; (b) matrizes  $A$ ,  $A_h$  e  $A_{h,v}$

<pre> 1 %espelhamento_horizontal_vertical 2 3 A=[2,7,6;9,5,1;4,3,8] 4 5 A_h= fliplr(A) 6 7 A_hv = flipud(fliplr(A)) 8 </pre>	<pre> Janela de Comandos &gt;&gt; espelham_horiz_vert_A  A =      2     7     6      9     5     1      4     3     8  A_h =      6     7     2      1     5     9      8     3     4  A_hv =      8     3     4      1     5     9      6     7     2 </pre>
--	---

(a)

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Analogamente, denotemos por  $B_h$  a matriz resultante do espelhamento horizontal da matriz  $B$  e por  $B_{h,v}$ , a matriz resultante do espelhamento vertical da matriz  $B_h$ . Segue que a matriz  $B_{h,v}$  é igual à matriz  $G$  – Figura 3.14. Logo,  $\det(B_{h,v}) = \det(G)$  e como  $\det(B) = \det(G) = -360$ , temos que  $\det(B_{h,v}) = \det(G) = \det(B) = -360$ .

Figura 3.14 – (a) Script do espelhamento das matrizes  $B$  e  $B_h$ ; (b) matrizes  $B$ ,  $B_h$ ,  $B_{h,v}$

<pre> 1 %espelhamento_horizontal_vertical 2 3 B=[2,9,4;7,5,3;6,1,8] 4 5 B_h = fliplr(B) 6 7 B_hv = flipud(fliplr(B)) 8 </pre>	<pre> &gt;&gt; espelham_horiz_vert_B  B =      2     9     4      7     5     3      6     1     8  B_h =      4     9     2      3     5     7      8     1     6  B_hv =      8     1     6      3     5     7      4     9     2 </pre>
---	--

(a)

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A análise do caso (II) é análoga a do caso (I).

Consideremos agora a matriz  $L$  representativa do “Quadrado de Dürer”, um quadrado mágico puro de ordem 4, e sua matriz transposta  $M$ .

$$L = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$M = L^t = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 13 & 8 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular o determinante da matriz  $L$  no GNU Octave, criamos o script ilustrado na Figura 3.15. O determinante da matriz  $L$  aparece na janela de comandos do aplicativo – Figura 3.16.

Figura 3.15 – Script para o cálculo do determinante da matriz  $L$

```

1 %Determinante matriz 4x4 Quadrado de Dürer
2
3 L = [16,3,2,13;5,10,11,8;9,6,7,12;4,15,14,1]
4
5 det(L)
6
7
8

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Figura 3.16 – Determinante da matriz  $L$

```

Janela de Comandos
>> Det_L_Durer

L =

    16     3     2    13
     5    10    11     8
     9     6     7    12
     4    15    14     1

ans = 1.0871e-12
>>

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

O GNU Octave fornece  $\det(L) \approx 0$ . Contudo,  $\det(L) \in \mathbb{Z}$ , uma vez que  $\ell_{ij} \in \mathbb{N}$ , para todo  $i, j = 1, \dots, 4$ .

**Questão 3.3.** Com quantos algarismos significativos o GNU Octave calculou  $\det(L)$ ?

Para responder à Questão 3.3, investigamos o cálculo do determinante da matriz  $L$  empregando o teorema de Laplace, o qual depende do conceito de cofator (Kozakevich; Bean, 2008).

**Definição 3.5.** O cofator  $A_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  de uma matriz  $A$  quadrada de ordem  $n$  é igual ao produto do determinante da matriz  $D_{ij}$  por  $(-1)^{i+j}$ , isto é,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(D_{ij}), \text{ para } i, j = 1, \dots, n,$$

onde  $D_{ij}$  é a matriz resultante da eliminação da linha  $i$  e da coluna  $j$  da matriz  $A$ .

**Teorema 3.1** (de Laplace). *O determinante de uma matriz quadrada de ordem  $n$  é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.*

Construímos no GNU Octave uma sequência para o cálculo do determinante da matriz  $L = (L_{ij})$  usando o Teorema 3.1.

I – Criar um script para calcular os cofatores  $L_{ij}$ , para  $i = 1$  e  $j = 1, \dots, 4$  – Figura 3.17.

Figura 3.17 – Scrip para o cálculo dos cofatores: (a)  $L_{11}$ ; (b)  $L_{12}$ ; (c)  $L_{13}$ ; (d)  $L_{14}$

```
1 %Cofator L11 matriz 4x4 - Laplace
2
3 D11=[10,11,8;6,7,12;15,14,1]
4
5 det(D11)
6
7 L11 = [(-1)^2]*det(D11)
```

(a)

```
1 %Cofator L12 matriz 4x4 - Laplace
2
3 D12=[5,11,8;9,7,12;4,14,1]
4
5 det(D12)
6
7 L12 = [(-1)^3]*det(D12)
```

(b)

```
1 %Cofator L13 matriz 4x4 - Laplace
2
3 D13=[5,10,8;9,6,12;4,15,1]
4
5 det(D13)
6
7 L13 = [(-1)^4]*det(D13)
```

(c)

```
1 %Cofator L14 matriz 4x4 - Laplace
2
3 D14=[5,10,11;9,6,7;4,15,14]
4
5 det(D14)
6
7 L14 = [(-1)^5]*det(D14)
```

(d)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

II – Executar os scripts para obter os cofatores  $L_{11} = 136$ ,  $L_{12} = -408$ ,  $L_{13} = 408$  e  $L_{14} = -136$  – Figura 3.18.

Figura 3.18 – Cálculo dos cofatores: (a)  $L_{11}$  e  $L_{12}$ ; (b)  $L_{13}$  e  $L_{14}$

```
Janela de Comandos
>> Cofator_L11

D11 =

    10    11     8
     6     7    12
    15    14     1

ans = 136.00
L11 = 136.00
>> Cofator_L12

D12 =

     5    11     8
     9     7    12
     4    14     1

ans = 408.00
L12 = -408.00
>>
```

(a)

```
Janela de Comandos
>> Cofator_L13

D13 =

     5    10     8
     9     6    12
     4    15     1

ans = 408.00
L13 = 408.00
>> Cofator_L14

D14 =

     5    10    11
     9     6     7
     4    15    14

ans = 136
L14 = -136
>>
```

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

III – Criar e executar um scrip para calcular a soma dos produtos dos elementos  $\ell_{1j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$  pelos seus respectivos cofatores  $L_{1j}$ . No GNU Octave, denotamos cada produto por  $DL_{1j}$  – Figura 3.19.

Figura 3.19 – (a) Script para calcular  $DL_{11}$ ,  $DL_{12}$ ,  $DL_{13}$  e  $DL_{14}$ ; (b) cálculo do determinante da matriz  $L$

<pre> 1 %Determinante matriz L 4x4 - Laplace 2 3 L = [16,3,2,13;5,10,11,8;9,6,7,12;4,15,14,1] 4 5 %l_ij . L_ij 6 7 DL_11 = L(1,1)*L11 8 9 DL_12 = L(1,2)*L12 10 11 DL_13 = L(1,3)*L13 12 13 DL_14 = L(1,4)*L14 14 15 16 Det_L = DL_11 + DL_12 + DL_13 + DL_14 17 </pre>	<pre> Janela de Comandos &gt;&gt; Determinante_L_ L =     16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  DL_11 = 2176.0 DL_12 = -1224.0 DL_13 = 816.00 DL_14 = -1768 Det_L = 4.0927e-12 &gt;&gt; </pre>
---	---

(a) (b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Novamente, o GNU Octave fornece  $\det(L) \approx 0$ . Contudo, se usarmos o comando **round**, que retorna o valor inteiro mais próximo da soma, o resultado atribuído ao determinante da matriz  $L$  será zero – Figura 3.20. Isto evidencia a importância da ordem em que as operações são efetuadas em aritmética de ponto flutuante (Humes et al., 1984).

Figura 3.20 – Determinante da matriz  $L$ : (a) script com o comando round; (b) valor calculado com o comando round

<pre> 1 %Determinante matriz L 4x4 - Laplace 2 3 L = [16,3,2,13;5,10,11,8;9,6,7,12;4,15,14,1] 4 5 %l_ij . L_ij 6 7 DL_11 = L(1,1)*L11 8 9 DL_12 = L(1,2)*L12 10 11 DL_13 = L(1,3)*L13 12 13 DL_14 = L(1,4)*L14 14 15 Det_L = round(Det_L = DL_11 + DL_12 + DL_13 + DL_14) </pre>	<pre> Janela de Comandos &gt;&gt; Determinante_L_ L =     16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  DL_11 = 2176.0 DL_12 = -1224.0 DL_13 = 816.00 DL_14 = -1768 Det_L = 0 &gt;&gt; </pre>
--	--

(a) (b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

**Sugestão 3.1.** Calcular o determinante da matriz  $L$  pelo Teorema 3.1 usando outra linha, que não a primeira, ou uma coluna.

Para calcular o determinante da matriz  $M = L^t$ , procedemos de forma análoga ao cálculo do determinante da matriz  $L$ . A Figura 3.21 ilustra o cálculo dos cofatores, enquanto que a Figura 3.22 ilustra o cálculo do determinante da matriz  $M$  utilizando o comando **round**.

Figura 3.21 – (a) Script para calcular os cofatores  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  e  $M_{14}$ ; (b) cálculo dos cofatores  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  e  $M_{14}$

<pre> 1 %Cofator L11,12, 13 e 14 matriz 4x4 - Laplace 2 3 M = [16,5,9,4;3,10,6,15;2,11,7,14;13,8,12,1] 4 5 E11=[10,6,15;11,7,14;8,12,1] 6 7 det(E11) 8 9 M11 = [(-1)^2]*det(E11) 10 11 E12=[3,6,15;2,7,14;13,12,1] 12 13 det(E12) 14 15 M12 = [(-1)^3]*det(E12) 16 17 E13=[3,10,15;2,11,14;13,8,1] 18 19 det(E13) 20 21 M13 = [(-1)^4]*det(E13) 22 23 E14=[3,10,6;2,11,7;13,8,12] 24 25 det(E14) 26 27 M14 = [(-1)^5]*det(E14) 28 </pre>	<pre> Janela de Comandos &gt;&gt; Cofator_M_11_12_13_14  M =     16     5     9     4      3    10     6    15      2    11     7    14     13     8    12     1  E11 =     10     6    15     11     7    14      8    12     1  ans = 136.00 M11 = 136.00 E12 =      3     6    15      2     7    14     13    12     1  ans = -408.00 M12 = 408.00 E13 =      3    10    15      2    11    14     13     8     1  ans = -408.00 M13 = -408.00 E14 =      3    10     6      2    11     7     13     8    12  ans = 136.00 M14 = -136.00 &gt;&gt;   </pre>
--	---

(a)

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Figura 3.22 – Determinante da matriz  $M$ : (a) script com o comando **round**; (b) valor calculado com o comando **round**

<pre> 1 %Determinante matriz M 4x4 - Laplace 2 3 M = [16,5,9,4;3,10,6,15;2,11,7,14;13,8,12,1] 4 5 %m_ij . M_ij 6 7 EM_11 = M(1,1)*M11 8 9 EM_12 = M(1,2)*M12 10 11 EM_13 = M(1,3)*M13 12 13 EM_14 = M(1,4)*M14 14 15 Det_M = round(EM_11 + EM_12 + EM_13 + EM_14) 16 </pre>	<pre> Janela de Comandos &gt;&gt; Determinante_M_  M =     16     5     9     4      3    10     6    15      2    11     7    14     13     8    12     1  EM_11 = 2176.0 EM_12 = 2040.0 EM_13 = -3672.0 EM_14 = -544.00 Det_M = 0 &gt;&gt; </pre>
---	---

(a)

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

### 3.6 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NO GNU OCTAVE

De acordo com Tabacniks (2018, p. 5):

Algarismos significativos são todos os algarismos que compõem o valor de uma grandeza, excluindo zeros à esquerda usados para acerto de unidades. [...] Zeros à direita são dígitos significativos. [...] Ao expressar uma grandeza, o algarismo significativo mais à direita é denominado duvidoso, pois é o algarismo cujo valor pode variar ligeiramente, dependendo do processo de medição.

Quanto ao número de algarismos significativos no GNU Octave, Long (2023, n.p) afirma que:

Embora o Octave exiba números com apenas algumas casas decimais (geralmente cinco) (o MATLAB normalmente exibe com 4 ou 5 casas decimais), ele os armazena internamente, e em variáveis, com uma precisão muito maior, então a resposta dada é a mais precisa. (Octave armazena todos os números no formato de ponto flutuante IEEE com precisão dupla (64 bits)<sup>3</sup>.

Ainda, segundo Long (2023, n.p):

Em todos os cálculos numéricos, uma análise dos erros de arredondamento é essencial, e é fundamental que não sejam introduzidos mais erros além dos já existentes! Esta é outra razão importante para armazenar números em variáveis, em vez de digitá-los todas as vezes<sup>4</sup>.

Ao calcularmos o determinante da matriz  $L$  (3.18) no GNU Octave, obtivemos como resultado  $1,0871e - 12$ . Este resultado foi fornecido no formato padrão do GNU Octave, com retorno de 5 dígitos significativos. Cabe ressaltar que o GNU Octave memoriza o último formato utilizado. Logo, para retornar ao formato padrão é necessário usar o comando **format**.

Testamos o cálculo do determinante da matriz  $L$  (3.18) usando os seguintes formatos:

1. **format long**: exibe um formato de ponto fixo com 16 dígitos significativos;
2. **format short**: padrão do GNU Octave, exibe um formato de ponto fixo com 5 dígitos significativos;
3. **format bank**: exibe um formato de ponto fixo com dois dígitos à direita da vírgula decimal.

A Figura 3.23 mostra o valor do determinante da matriz  $L$  (3.18) quando se emprega esses formatos no GNU Octave.

O único formato dentre os testados no qual o GNU Octave calcula  $\det(L) = 0$  é o **format bank**.

<sup>3</sup> Although Octave displays numbers to only a few decimal places (usually five) (MATLAB normally displays to 4 or 5 decimal places), it stores them internally, and in variables, to a much higher precision, so the answer given is the more accurate one. (Octave stores all numbers in IEEE floating point format to double (64-bit) precision.

<sup>4</sup> In all numerical calculations, an appreciation of the rounding errors is very important, and it is essential that you do not introduce any more errors than there already are! This is another important reason for storing numbers in variables rather than typing them in each time.

Figura 3.23 – Determinante da matriz  $L$  (3.18) no GNU Octave: (a) format (padrão), format long e format short; (b) format short g, format short e e format bank

<pre>Janela de Comandos ans = Format L =      16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  det_L = 1.0871e-12 &gt;&gt; Format_long  ans = format long L =      16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  det_L = 1.087130385712954e-12 &gt;&gt; Format_short  ans = format short L =      16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  det_L = 1.0871e-12 &gt;&gt;</pre>	<pre>Janela de Comandos ans = format short g L =      16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  det_L = 1.0871e-12 &gt;&gt; Format_short_e  ans = format short e L =      16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  det_L = 1.0871e-12 &gt;&gt; Format_bank  ans = format bank L =      16     3     2    13      5    10    11     8      9     6     7    12      4    15    14     1  det_L = 0.00 &gt;&gt;  </pre>
---	--

(a)

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

**Observação 3.1.** *O professor de matemática da Educação Básica pode empregar o GNU Octave para calcular determinantes de matrizes de ordens maiores e testar, desta forma, as limitações do software.*

## 4 O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO

Segundo Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p):

Malba Tahan revolucionou a maneira como os professores ensinavam, criando formas inteiramente novas e cativantes de transmitir a disciplina. O “método dos jograis”, criado por ele, é um bom exemplo de suas invenções didáticas. Conforme relata o professor Sergio Lorenzato, “há mais de 50 anos, no livro Didática da Matemática, o professor Mello e Souza já recomendava o jogo como situação de aprendizagem, a montagem do Laboratório de Ensino da Matemática, fornecendo mais de 70 sugestões de materiais didáticos, a utilização de paradoxos, falácias e recreações em sala de aula, com apresentação de problemas interessantes, a narração de histórias e a integração da língua materna com a linguagem matemática. Malba Tahan foi aurato e precursor de uma nova forma de ensinar matemática, cujas concepções passaram a integrar, muitos anos depois, os Parâmetros Curriculares Nacionais definidos pelo Ministério da Educação”.

Muitas são as contribuições do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza para a Educação Matemática. Dentre elas podemos destacar a obra *Matemática divertida e curiosa* (Tahan, 2008a), que foi estreada no Diário “A Noite” em meados de 1955, considerada talvez a primeira coluna do gênero no mundo (Pereira; Salles; Pereira, 2017). Desta obra, destacamos o conto denominado *A hipérbole de um poeta*.

Guilherme de Almeida, um dos nossos mais brilhantes poetas, tem no seu livro Encantamento (p. 57) uma linda poesia na qual incluiu os seguintes versos:

*E como uma cobra,  
corre mole e desdobra  
então,  
em hipérbolas lentas  
sete cores violentas  
no chão.*

A linda e original imagem sugerida pelo talentoso acadêmico não pode ser, infelizmente, admitida em Geometria. Uma hipérbole é uma curva do 2º grau, constituída de dois ramos, logo uma cobra, a não ser partida em quatro pedaços, jamais poderá formar hipérbolas lentas no chão. Em Carta a minha noiva, encontramos uma interessante expressão geométrica empregada também pelo laureado vate: é no centro desse círculo que há de ficar como um ponto; ponto final do longo e aborrecido conto. Para que alguma coisa possa ficar no centro de um círculo, deve ser, previamente, é claro, reduzida a um ponto, pois, segundo afirmam os matemáticos, o centro de um círculo é um ponto... E, nesse “ponto”, Guilherme de Almeida tem razão (Tahan, 2008a, p. 21-22).

Guilherme de Almeida nasceu em 24 de julho de 1890 na cidade de Campinas. Foi advogado, jornalista, poeta, ensaísta e tradutor brasileiro. Em 1916, deu-se sua estreia literária com as peças de teatro *Mon Coeur Balance* (Meu coração balança) e *Leur Âme* (Sua alma), escritas em francês conjuntamente com o poeta e novelista Oswald de Andrade (1890 – 1954).

Em 1917, publicou *Nós*, seu primeiro livro de poemas. Foi considerado por duas décadas o mais popular poeta paulista. Almeida possui um acervo de mais de 70 publicações, entre poesia, prosa, ensaio e tradução, além de um extenso trabalho jornalístico. Faleceu em 11 de julho de 1969 na “Casa da Colina” em São Paulo, onde residia desde 1946. A casa de Almeida foi adquirida pelo Governo do Estado de São Paulo na década de 1970 e em 1979 foi transformada no museu biográfico e literário *Casa Guilherme de Almeida*, que hoje abriga um Centro de Estudos de Tradução Literária (Cultural; Almeida; Paulo, 2023).

A íntegra do poema *A hipérbole de um poeta* pode ser lida no link

[<https://peregrinacultural.wordpress.com/2008/08/14/bailado-russo-poema-infantil-de-guilherme-de-almeida/>](https://peregrinacultural.wordpress.com/2008/08/14/bailado-russo-poema-infantil-de-guilherme-de-almeida/).

Além do poema de Guilherme de Almeida, a palavra *hipérbole* também aparece em outros poemas. Nestes, geralmente, a palavra tem conotação de exagero.

Segundo o dicionário Priberam (2021), a palavra *hipérbole* é originária do latim *hyperbole*, *-es*, e do grego *hyperbolé*, *-és*, e significa lançamento para baixo, excesso, proeminência, exagero. É um substantivo feminino com duas definições:

- I. [Retórica] Figura de retórica que corresponde ao exagero, com efeitos enfáticos, no significado das palavras ou das frases (ex.: em rebentar de tanto rir há uma hipérbole). = AUXESE, EXAGERAÇÃO;
- II. [Geometria] Curva na qual é constante a diferença das distâncias de todos os seus pontos a dois pontos fixos chamados focos.

#### 4.1 A HIPÉRBOLE COMO FIGURA DE LINGUAGEM

De acordo com Santana (2023, n.p):

A hipérbole é também denominada de figura de pensamento por representar de forma escrita o sentido figurado de algo que reside apenas na ideia do pensamento. Explora o aspecto semântico da língua, enfatizando e exagerando o sentido de uma determinada palavra.

Trata-se de uma figura de linguagem muito utilizada na linguagem cotidiana, recorrente na propaganda, presente na literatura e bastante usada na música.

Os Exemplos 4.1 e 4.2 ilustram o emprego da hipérbole no cotidiano.

**Exemplo 4.1.** *Estou morrendo de sono.*

*A expressão morrendo de sono enfatiza o exagero, pois as pessoas não morrem de sono. Assim, evidencia-se o fato de o sujeito estar com muito sono.*

**Exemplo 4.2.** *Meu Deus! Essa caixa pesa uma tonelada, não consigo carregá-la sozinha!*

*A expressão pesa uma tonelada ressalta que a caixa é demasiado pesada.*

Na literatura, a hipérbole é uma figura de linguagem comumente empregada para enfatizar emoções. O poema *A alvorada do amor*, que consta na obra *Antologia Poética* do autor Olavo Bilac (1865 – 1918), exemplifica o uso da hipérbole na literatura.

*Rosas te brotarão da boca, se cantares!  
Rios te correrão dos olhos, se chorares!  
E se, em torno ao teu corpo encantador e nu,  
Tudo morrer, que importa? A Natureza és tu.*

Segundo Santana (2023, n.p), “Rosas te brotarão da boca é uma forma de enfatizar voz e palavras bonitas. O emprego da hipérbole Rios te correrão dos olhos destaca que haverá um choro tão volumoso quanto as águas dos rios”.

Outro poema que menciona a palavra hipérbole é *Eu sou uma hipérbole* (Dias, 2006, n.p):

Trespasso a invenção,  
Fervilho nas palavras nascidas em ti  
E de mansinho te toco,  
Num fugaz momento  
De loucura!  
Faço-me surda  
Ao bater das asas da fantasia,  
E inspiro o real  
Em soluços tremendos espelhando névoas...  
Deslizo a alma,  
Afundo o íntimo  
E estremeço no abraço acariciando o sonho!  
Esfumo-me em aromas  
E sabores derramados na tua pele.  
Toco-te as sílabas da negação  
E rasgo os parágrafos escritos no meu corpo...  
Ávida de sonho,  
Ávida de vida,  
Escrevo na essência do que não sei,  
Corto as hipérboles  
Baloíço nos eufemismos!  
Mas...  
Eu sou uma hipérbole!  
Deslizo a alma  
Afundo o íntimo...

## 4.2 A HIPÉRBOLE COMO SEÇÃO CÔNICA

Não há consenso acerca da origem das cônicas na história da matemática. Acredita-se que o estudo das mesmas e de suas propriedades geométricas teve início na Grécia com o famoso problema da duplicação do cubo.

Mas na versão mais difundida, a de Eratóstenes (c. Séc. III aC), a origem estaria na tentativa de Menaecmo (Séc. IV aC) de resolver o problema da duplicação do cubo: ou seja, o problema consistindo em construir um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um outro cubo dado, de lado  $a$ . Menaecmo era discípulo de Eudoxo mas também foi membro da Academia de Platão (427 – 347 aC) onde este problema foi estudado (Domingues, 1998, p. 43).

Uma das três linhas de desenvolvimento da matemática grega é “[...] a da geometria superior, ou geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera. É bastante curioso que essa geometria superior tenha se originado nas tentativas seguidas de resolver os três agora famosos problemas de construção” (Eves, 2011, p. 133):

1. *Duplicação do cubo* ou Problema Deliano ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;
2. *Trissecção do ângulo* ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais;
3. *Quadratura do círculo* ou o problema de construir um quadrado com área igual a de um círculo dado.

A impossibilidade de se resolver as três construções, usando a teoria de Galois (1811–1832), com apenas régua e compasso foi estabelecida somente no século XIX, mais de 2000 anos após a concepção dos problemas. Entretanto, a busca pela solução desses problemas influenciou a geometria grega e fomentou diversas descobertas, tais como as seções cônicas, as curvas cúbicas e quárticas e diversas curvas transcendentais (Eves, 2011).

Para Torres e León (2020, p. 62):

As cônicas surgiram na Grécia antiga como seções de um cone quando ele é cortado por um plano e, dependendo da inclinação, aparecerá a elipse, a hipérbole ou a parábola, embora também possam ser encontradas outras cônicas chamadas degeneradas, como um ponto ou duas linhas secantes. O interesse despertado pelas cônicas foi mantido posteriormente por muitos matemáticos que buscavam formas de utilizá-las em outros processos, como na resolução de equações de diferentes graus <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Las cónicas surgen en la antigua Grecia como secciones de un cono cuando se corta por un plano y, dependiendo de la inclinación, aparecerán la elipse, la hipérbola o la parábola, aunque también se pueden encontrar otras cónicas denominadas degeneradas, como un punto o dos rectas secantes. El interés despertado por las cónicas se mantuvo en épocas posteriores para muchos matemáticos que buscaban la forma de utilizarlas en otros procesos, como la resolución de ecuaciones de distintos grados.

As cônicas também são definidas como lugares geométricos. O conceito de lugar geométrico é estabelecido pela Definição 4.1 (Neto, 2013).

**Definição 4.1.** Dada uma propriedade  $\mathcal{P}$  relativa a pontos do espaço, o lugar geométrico da propriedade  $\mathcal{P}$  é o conjunto  $\mathcal{L}$  de pontos do espaço que satisfazem as seguintes condições:

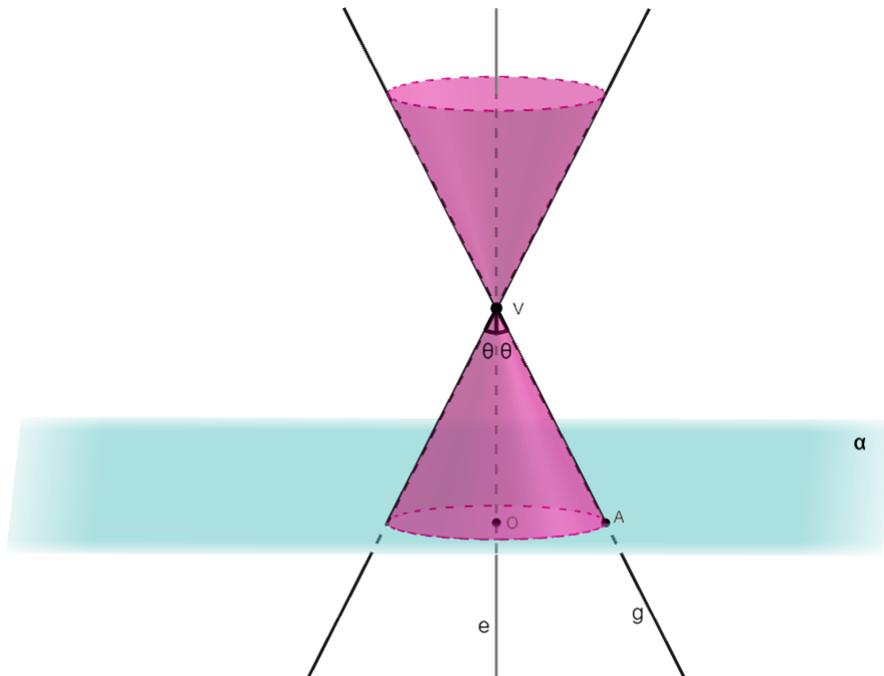
- (a) Todo ponto de  $\mathcal{L}$  possui a propriedade  $\mathcal{P}$ ;
- (b) Todo ponto do espaço que possui a propriedade  $\mathcal{P}$  pertence a  $\mathcal{L}$ .

O cone, do qual derivam a elipse, a hipérbole e a parábola, é caracterizado como um lugar geométrico segundo a Definição 4.2 (Neto, 2013).

**Definição 4.2.** Dados um ângulo agudo  $\theta$ , uma reta  $e$  e um ponto  $V \in e$ , o **cone** (de revolução)  $\mathcal{C}(e; V; \theta)$ , de **eixo**  $e$ , **vértice**  $V$  e **abertura**  $2\theta$ , é o conjunto dos pontos  $A$  do espaço tais que  $\overleftrightarrow{AV}$  forma um ângulo  $\theta$  com a reta  $e$ .

A Figura 4.1 ilustra o cone de revolução segundo a Definição 4.2.

Figura 4.1 – O cone de revolução de eixo  $e$ , vértice  $V$  e abertura  $2\theta$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Na Figura 4.1, a reta  $g = \overleftrightarrow{AV}$  é a **geratriz** do cone  $\mathcal{C}$ . Todo plano que passa pelo vértice  $V$  e é perpendicular ao eixo  $e$  divide  $\mathcal{C} \setminus \{V\}$  em duas partes, denominadas **folhas** do cone  $\mathcal{C}$ .

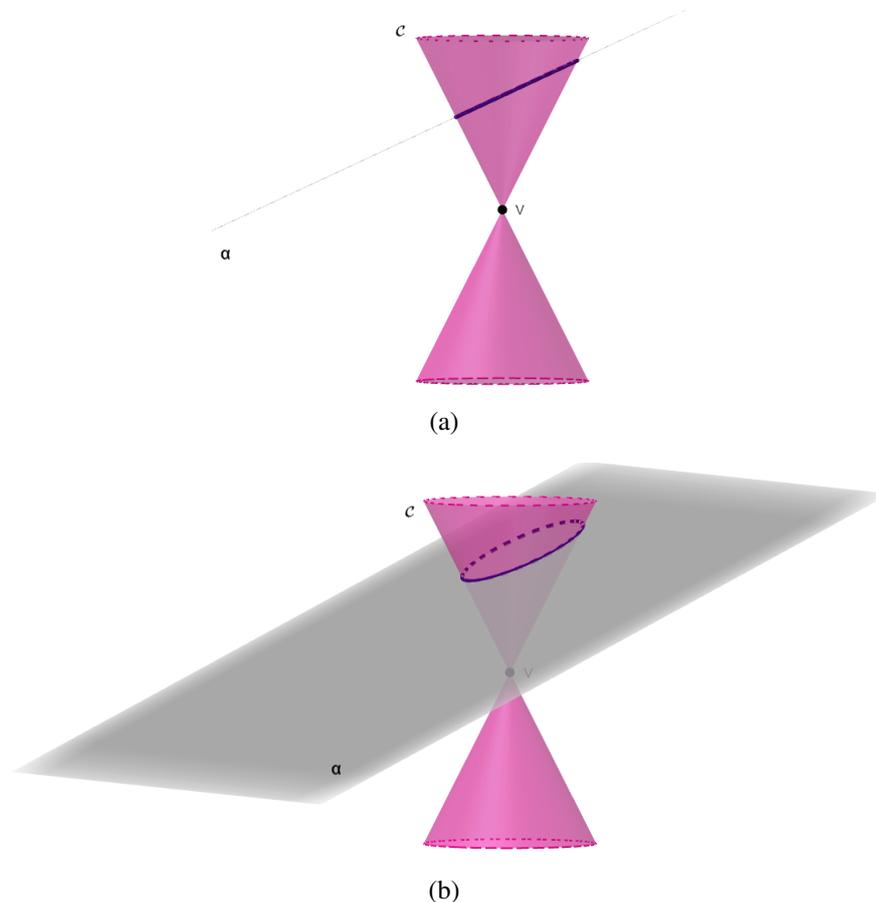
As cônicas, ou seções cônicas, são determinadas pela intersecção de um plano com a superfície do cone  $\mathcal{C}$ . O Teorema 4.1 (Neto, 2013) estabelece três seções cônicas não degeneradas.

**Teorema 4.1.** Se  $\mathcal{C}$  é um cone e  $\alpha$  é um plano que secciona  $\mathcal{C}$ , então a seção correspondente é:

- (a) uma **elipse**, caso  $\alpha$  só intersecte uma folha de  $\mathcal{C}$  e não seja paralelo a uma geratriz;  
 (b) uma **parábola**, caso  $\alpha$  só intersecte uma folha de  $\mathcal{C}$  e seja paralelo a uma geratriz;  
 (c) uma **hipérbole**, caso  $\alpha$  intersecte ambas as folhas de  $\mathcal{C}$  mas não passe por seu vértice.

Quando o plano  $\alpha$  não é paralelo a uma geratriz, porém é paralelo ao plano que passa pelo vértice  $V$  e é perpendicular ao eixo  $e$ , a seção determinada por  $\alpha$  na superfície do cone é uma circunferência, um tipo especial de elipse. As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 ilustram, respectivamente, a seção no cone de revolução que determina a elipse, a parábola e a hipérbole.

Figura 4.2 – Elipse: (a) perfil lateral do plano  $\alpha$  secante a uma folha do cone; (b) interseção do plano  $\alpha$  com a superfície do cone



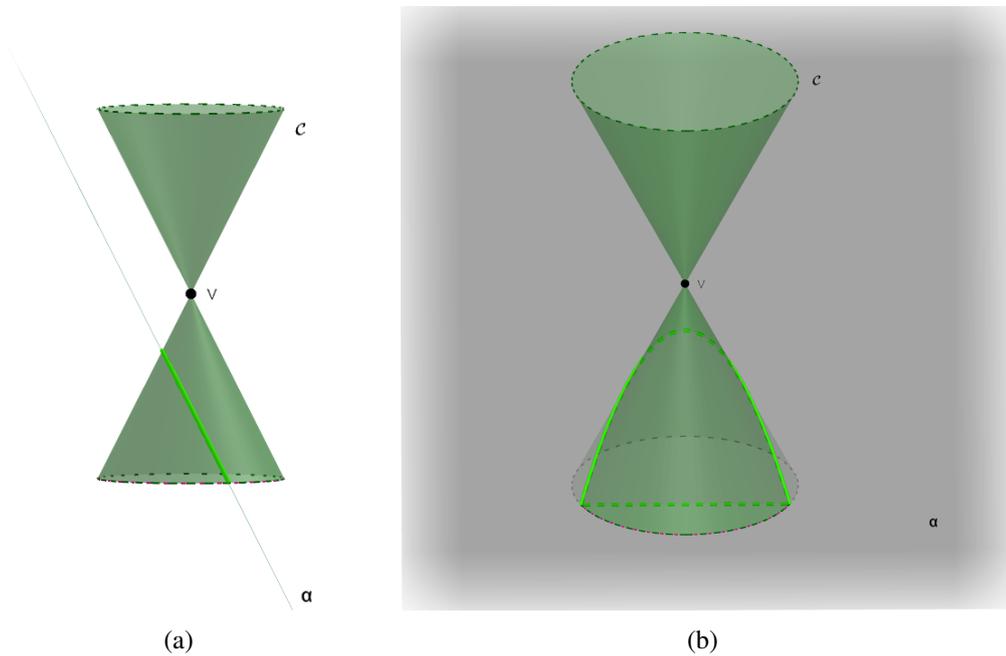
Fonte: A autora com o Geogebra (2022a).

As três seções cônicas não degeneradas determinadas pelo Teorema 4.1 podem ser definidas como lugares geométricos. A Definição 4.3 estabelece a hipérbole como lugar geométrico (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017).

**Definição 4.3.** Uma **hipérbole**  $\mathcal{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$ , ou seja,

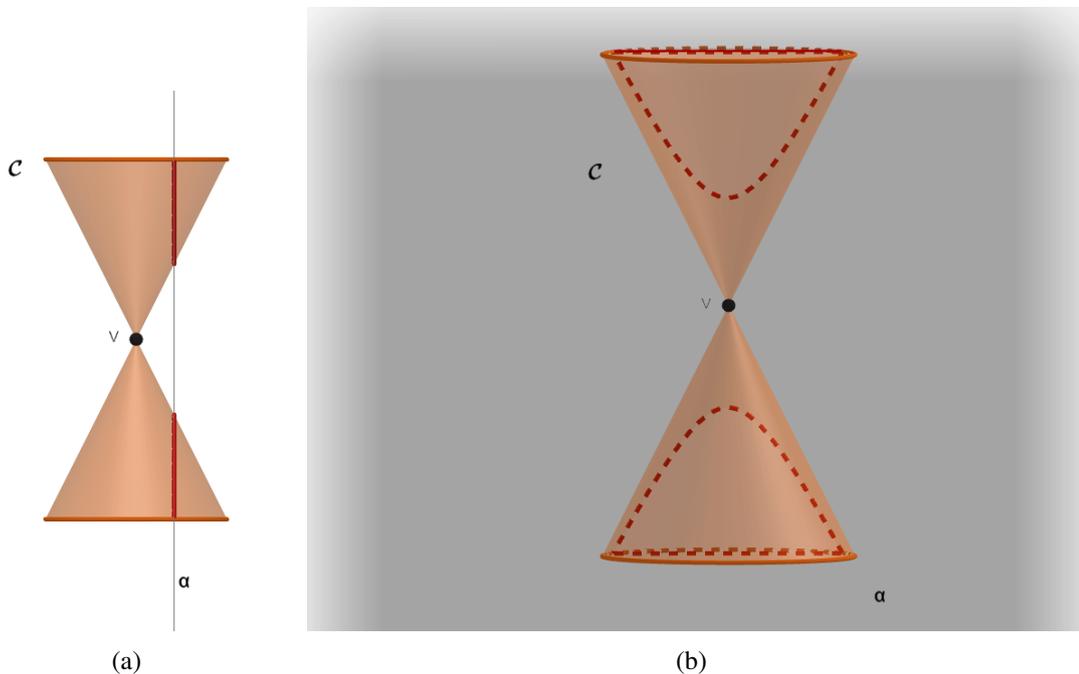
$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, \text{ com } 0 < a < c \text{ e } d(F_1, F_2) = 2c.$$

Figura 4.3 – Parábola: (a) perfil lateral do plano  $\alpha$  secante a uma folha do cone e paralelo a uma geratriz; (b) interseção do plano  $\alpha$  com a superfície do cone



Fonte: A autora com o Geogebra (2022a).

Figura 4.4 – Hipérbole: (a) perfil lateral do plano  $\alpha$  secante às duas folhas do cone; (b) interseção do plano  $\alpha$  com a superfície do cone



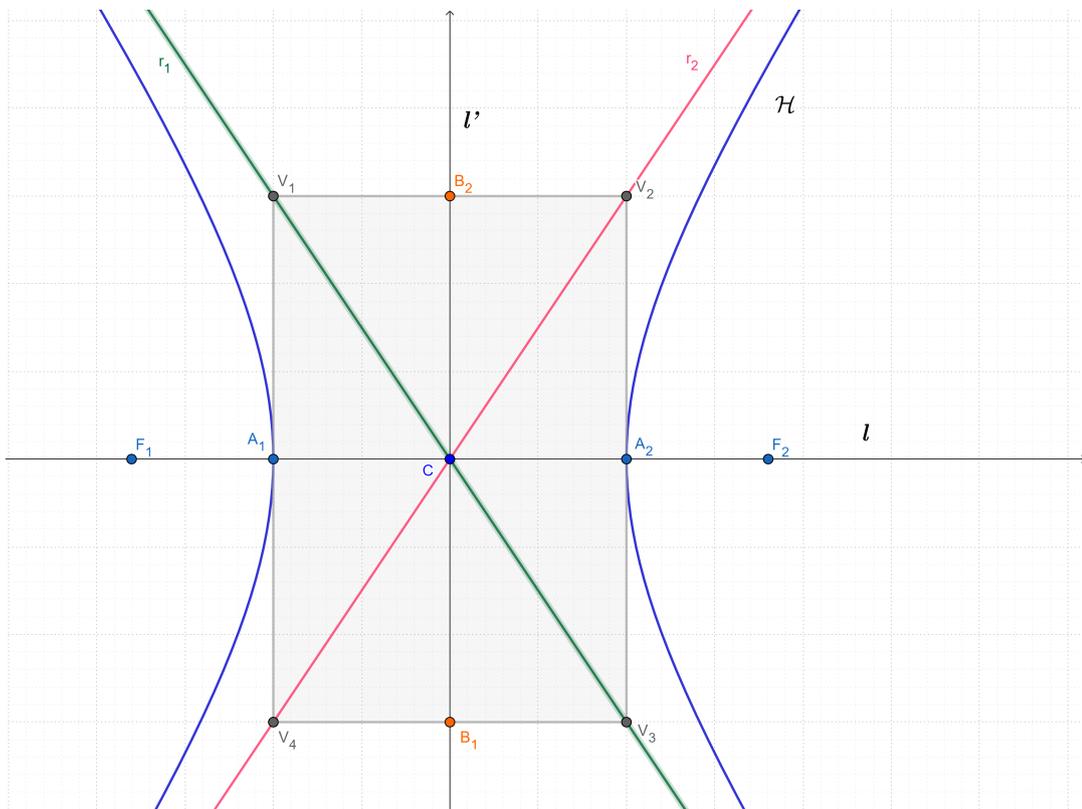
Fonte: A autora com o Geogebra (2022a).

A Figura 4.5 ilustra a hipérbole  $\mathcal{H}$  segundo a Definição 4.3, destacando seus elementos:

★  $F_1, F_2$ : **focos**, onde  $d(F_1, F_2) = 2c$ ;

- ★  $A_1, A_2$ : **vértices reais**;
- ★  $B_1, B_2$ : **vértices imaginários**;
- ★  $l = \overleftrightarrow{F_1F_2} = \overleftrightarrow{A_1A_2}$ : **eixo focal** ou reta focal ou eixo real, onde  $d(A_1, A_2) = 2a$ ;
- ★  $l' = \overleftrightarrow{B_1B_2}$ : **eixo não focal** ou reta não focal ou eixo imaginário, onde  $d(B_1, B_2) = 2b$ ;
- ★  $C$ : centro;
- ★  $V_1, V_2, V_3, V_4$ : vértices do **retângulo base**, onde  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  são os pontos médios dos lados desse retângulo;
- ★  $r_1, r_2$ : **assíntotas**, diagonais do retângulo base.

Figura 4.5 – Hipérbole  $\mathcal{H}$  e seus elementos



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Quando  $a = b$ , a hipérbole é denominada equilátera. Nesta hipérbole, o retângulo base é um quadrado e as assíntotas são perpendiculares (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017).

O centro  $C$  da hipérbole  $\mathcal{H}$  é o ponto médio dos segmentos  $\overline{A_1A_2}$  e  $\overline{F_1F_2}$ . Assim:

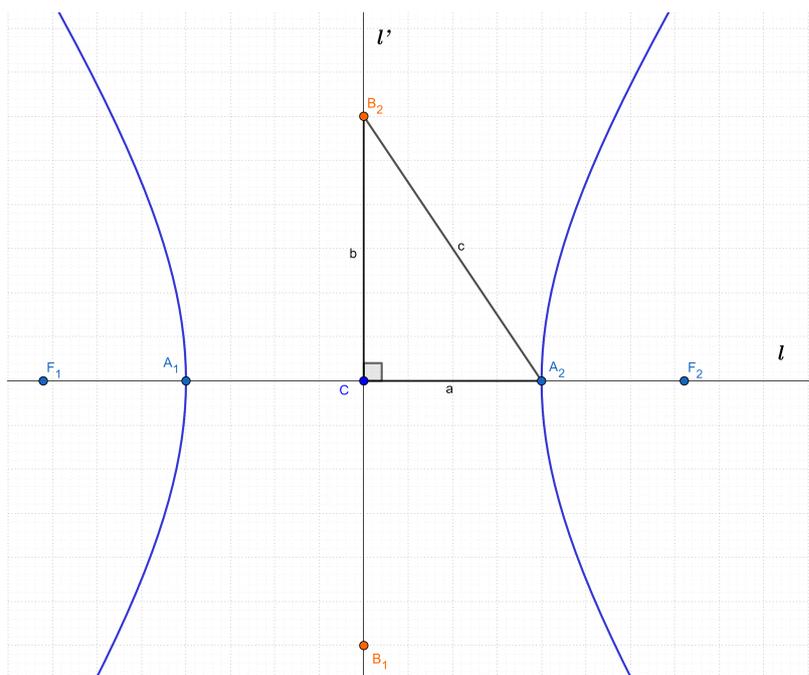
$$C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

Ainda, como  $d(F_1, F_2) = 2c$  e  $d(A_1, A_2) = 2a$ , com  $c > a$ , temos que  $d(F_1, A_1) = d(F_2, A_2) = c - a$ .

Podemos relacionar as medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  usando o teorema de Pitágoras (Silva; Nós; Sano, 2023), uma vez que  $\overline{A_2C} \perp \overline{B_2C}$  – Figura 4.6. Desta forma, temos que:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Figura 4.6 – Relação entre as medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  na hipérbole  $\mathcal{H}$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

### 4.3 A DUPLICAÇÃO DO CUBO

Para Eves (2011, p. 135) “há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco”.

Diante desse fato, o rei Minos ordenou que o túmulo do seu filho Glauco fosse duplicado. Para tanto, por influência do poeta, o rei acreditou que bastaria duplicar as dimensões do túmulo, isto é, comprimento, largura e altura.

Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma. Nenhum progresso parece ter havido quanto à solução até que, algum tempo mais tarde, Hipócrates descobriu sua famosa redução [...] (Eves, 2011, p. 135).

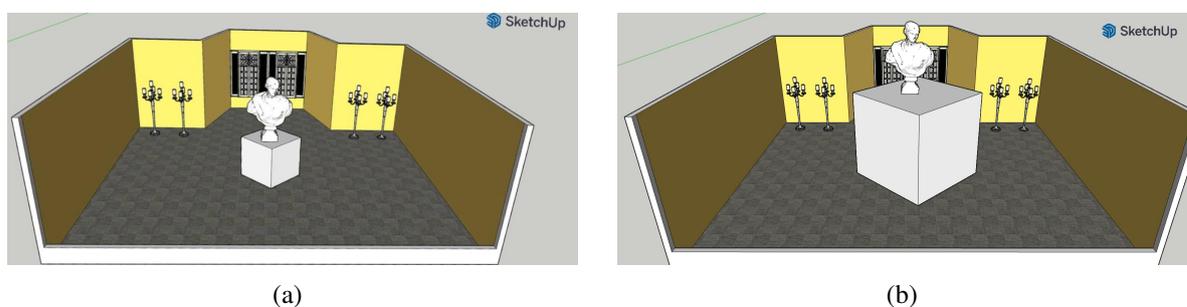
Após o dilema do rei Minos, a duplicação do cubo voltaria à tona com a construção do altar para o deus grego Apolo, considerado patrono da música e da arte, com poderes sobre a

morte. Em seu templo, construído na ilha grega Delos, Apolo (ou deus do Sol) era venerado por aqueles(as) que desejavam suas previsões. A duplicação do altar de Apolo é relatada no Problema 4.1 segundo Contador (2012).

**Problema 4.1.** *Quando uma peste assolou Atenas, dizimando cerca de um quarto de sua população, inclusive fazendo Péricles uma de suas vítimas, os habitantes, desesperados, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo havia um altar em forma de cubo e, em troca do fim da peste, a divindade fez um pedido: erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará.*

A Figura 4.7 mostra um esboço do altar de Apolo e a duplicação proposta no Problema 4.1.

Figura 4.7 – Esboço: (a) do altar de Apolo; (b) do altar de Apolo duplicado



Fonte: Parodi com SketchUp (2022, n.p).

Segundo Domingues (1998), Hipócrates de Quio (c. 440 a.C.) reduziu o problema da duplicação do cubo às médias proporcionais  $x$  e  $y$  aos segmentos de comprimento  $k$  e  $2k$ , ou seja:

$$\frac{k}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2k}. \quad (4.1)$$

Da proporção (4.1), segue que:

$$x^2 = ky \Rightarrow y = \frac{x^2}{k}; \quad (4.2)$$

$$y^2 = 2kx; \quad (4.3)$$

$$xy = 2k^2. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.2) em (4.4), obtemos que:

$$\begin{aligned} x^3 &= 2k^3; \\ x &= \sqrt[3]{2} k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Na relação (4.5),  $x$  é a medida da aresta do cubo duplicado enquanto que  $k$  é a medida da aresta do cubo original.

Após Hipócrates, outros matemáticos também tentaram solucionar o problema da duplicação do cubo.

Dessas, uma das mais antigas, e certamente uma das mais notáveis, na forma de uma solução por geometria superior, foi dada por Arquitas (c. 400 a.C.). Sua solução consiste em achar um ponto de intersecção de um cilindro circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cone circular reto! Essa solução lança alguma luz sobre a extensão pouco comum que a geometria deve ter atingido naqueles tempos remotos. A solução de Eudoxo (c. 370 a.C.) se perdeu. Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as secções cônicas para esse propósito. Atribui-se a Eratóstenes (c. 230 a.C.) uma solução posterior usando dispositivos mecânicos e outra, por volta da mesma época, a Nicomedes. Uma solução ainda posterior foi oferecida por Apolônio (c. 225 a.C.). Dioclés (c. 180 a.C.) inventou uma curva chamada cissoide com o mesmo objetivo. E, obviamente, descobriram-se modernamente muitas soluções mediante curvas planas superiores (Eves, 2011, p. 135).

O matemático Menaecmo (c. 350 a.C.), discípulo de Eudoxo, amigo de Platão (427 – 347 a.C.) e membro da Academia de Platão, “[...] fez a descoberta dessas curvas ( $x^2 = ky$ ,  $y^2 = 2kx$  e  $xy = 2k^2$ ) por volta de 360 a.C. e mostrou que a intersecção delas daria as médias requeridas no problema, ainda que não construídas com régua e compasso” (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017, p. 146). De acordo com Eves (2011), são duas as contribuições de Menaecmo à solução do problema da duplicação do cubo.

- 1<sup>a</sup> Emprega-se duas parábolas, com vértices comuns e eixos perpendiculares, tais que o *latus rectum* (lado reto)<sup>2</sup> de uma é o dobro do *latus rectum* da outra. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (4.2) e (4.3), ou seja,  $x^2 = ky$  e  $y^2 = 2kx$ , derivadas da proporção (4.1) de Hipócrates.
- 2<sup>a</sup> Considera-se a intersecção entre uma parábola e uma hipérbole equilátera que tem como assíntotas o eixo da parábola e a tangente a esta que passa pelo vértice. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (4.2) e (4.4), ou seja,  $x^2 = ky$  e  $xy = 2k^2$ , derivadas da proporção (4.1) de Hipócrates.

Para duplicarmos o cubo empregando as duas estratégias propostas por Menaecmo, faz-se necessário definir a parábola e destacar seus elementos, assim como fizemos com a hipérbole. A Definição 4.4 estabelece a parábola como lugar geométrico (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017).

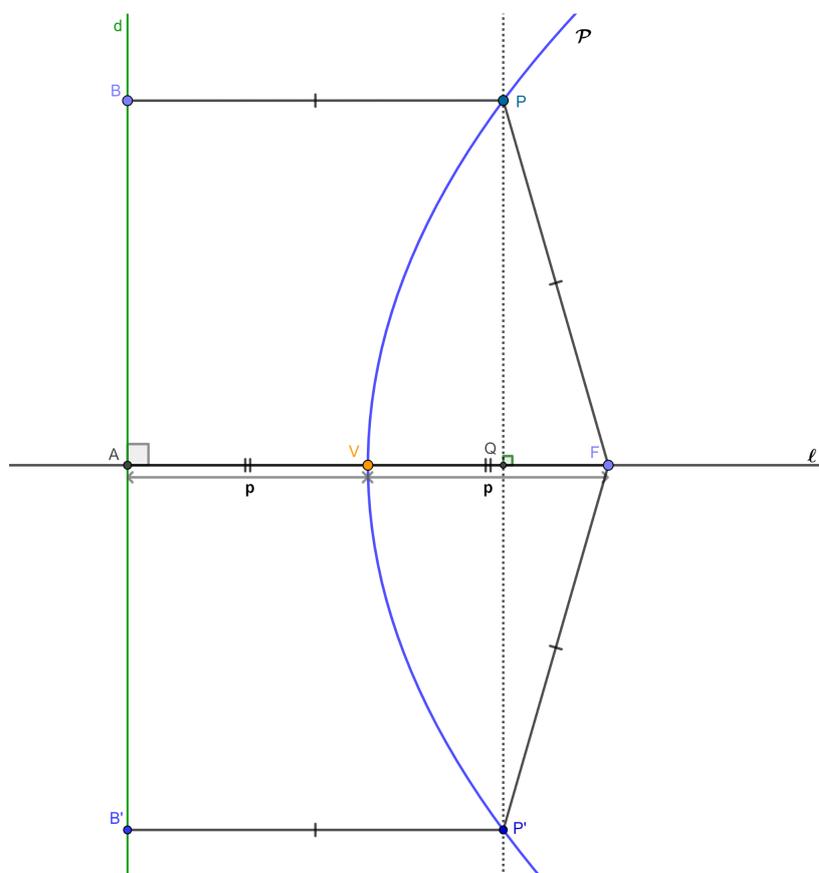
**Definição 4.4.** *Seja  $d$  uma reta e  $F$  um ponto do plano não pertencente a  $d$ . A **parábola**  $\mathcal{P}$  de foco  $F$  e diretriz  $d$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano cuja distância a  $F$  é igual à distância a  $d$ , ou seja,*

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P, F) = d(P, d)\}.$$

<sup>2</sup> O *latus rectum* de uma cônica é definido como sendo a corda focal, ou segmento de reta que passa por um dos focos da cônica e tem extremidades pertencentes à mesma, cujo comprimento é mínimo. Pode-se demonstrar que, em coordenadas cartesianas, o comprimento do *latus rectum* é dado por  $\frac{2b^2}{a}$ .

A Figura 4.8 ilustra uma parábola segundo a Definição 4.4.

Figura 4.8 – Parábola  $\mathcal{P}$  e seus elementos



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Na Figura 4.8, destacam-se os elementos de uma parábola :

- ◇  $F$ : **foco**;
- ◇  $d$ : **diretriz**;
- ◇  $\ell$ : **reta focal** ou eixo de simetria; reta que contém o foco  $F$  e é perpendicular à diretriz  $d$ ;
- ◇  $V$ : **vértice**, pertencente à reta focal. Se  $A$  é o ponto onde  $d$  intersecta  $\ell$ , então  $V$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AF}$ ;
- ◇  $2p = d(F, d)$ : **parâmetro**, onde  $d(V, F) = d(V, d) = p$ .

As formas canônicas da parábola são estabelecidas em relação a um sistema de coordenadas  $xOy$ . Desta forma, tem-se: dois casos quando a parábola tiver o vértice na origem e a reta focal coincidente com o eixo  $Ox$ ; dois casos quando a parábola tiver o vértice na origem e a reta focal coincidente com o eixo  $Oy$ .

Caso I. **O foco está à direita da diretriz.** Como o vértice da parábola  $\mathcal{P}$  é a origem  $V = (0, 0)$ , temos que o ponto  $F = (p, 0)$  é o foco e a reta  $d : x = -p$  é a diretriz, onde  $2p = d(F, d)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(P, F) = d(P, d) \\
 &\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \\
 &\iff (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\
 &\iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\
 &\iff -2px + y^2 = 2px \\
 &\iff y^2 = 4px.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Caso II. **O foco está à esquerda da diretriz.** Neste caso,  $F = (-p, 0)$  e  $d : x = p$ , onde  $2p = d(F, d)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(P, F) = d(P, d) \\
 &\iff \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x-p| \\
 &\iff (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 \\
 &\iff x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 \\
 &\iff 2px + y^2 = -2px \\
 &\iff y^2 = -4px.
 \end{aligned}$$

Caso III. **O foco está acima da diretriz.** Neste caso,  $F = (0, p)$  e  $d : y = -p$ , onde  $2p = d(F, d)$ . Assim,

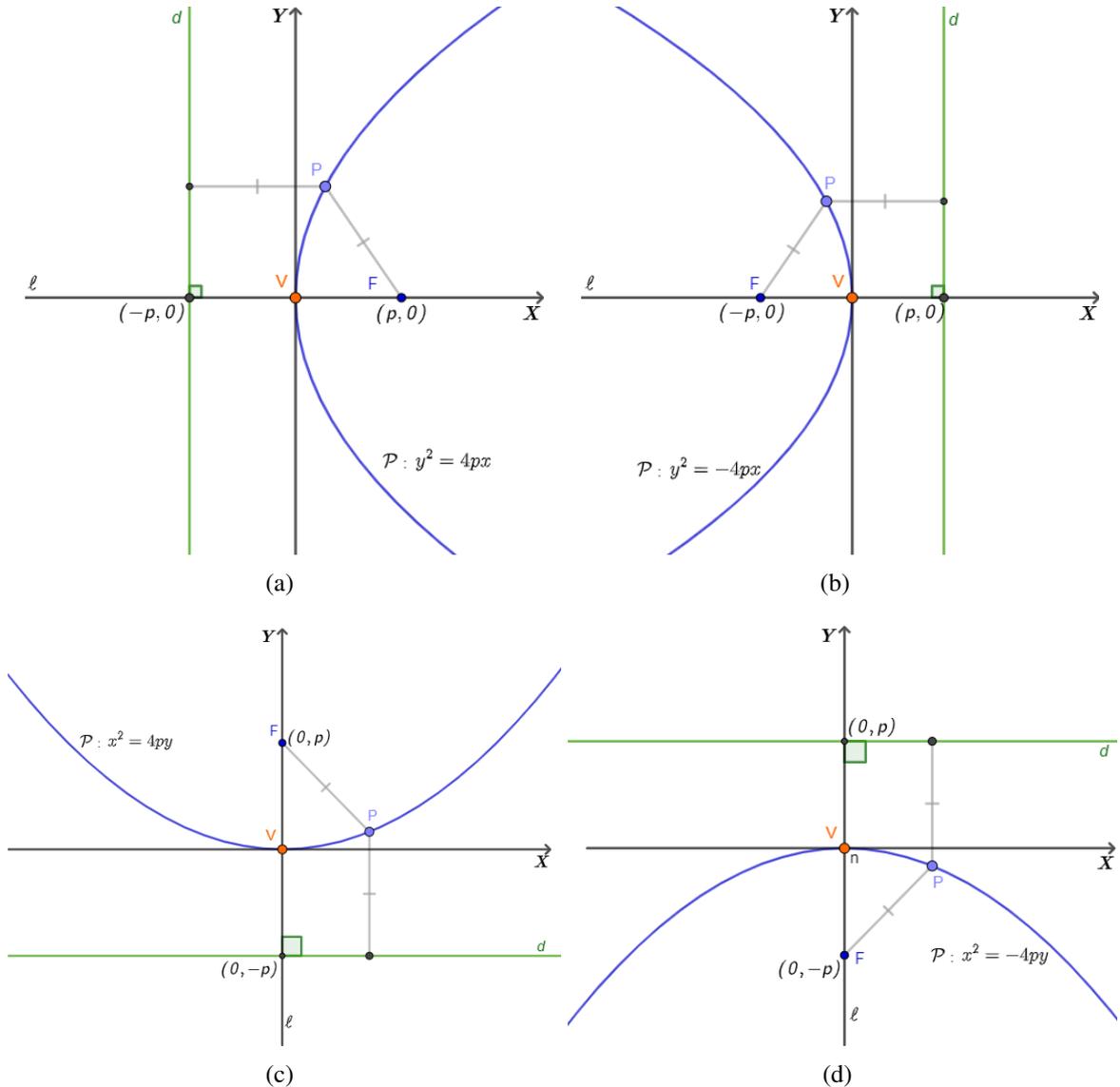
$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(P, F) = d(P, d) \\
 &\iff \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \\
 &\iff x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \\
 &\iff x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\
 &\iff -2py + x^2 = 2py \\
 &\iff x^2 = 4py.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Caso IV. **O foco está abaixo da diretriz.** Neste caso,  $F = (0, -p)$  e  $d : y = p$ , onde  $2p = d(F, d)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(P, F) = d(P, d) \\
 &\iff \sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |y-p| \\
 &\iff x^2 + (y+p)^2 = (y-p)^2 \\
 &\iff x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2 \\
 &\iff 2py + x^2 = -2py \\
 &\iff x^2 = -4py.
 \end{aligned}$$

A Figura 4.9 ilustra as quatro formas canônicas da parábola.

Figura 4.9 – Parábolas: (a)  $\mathcal{P} : y^2 = 4px$ ; (b)  $\mathcal{P} : y^2 = -4px$ ; (c)  $\mathcal{P} : x^2 = 4py$ ; (d)  $\mathcal{P} : x^2 = -4py$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

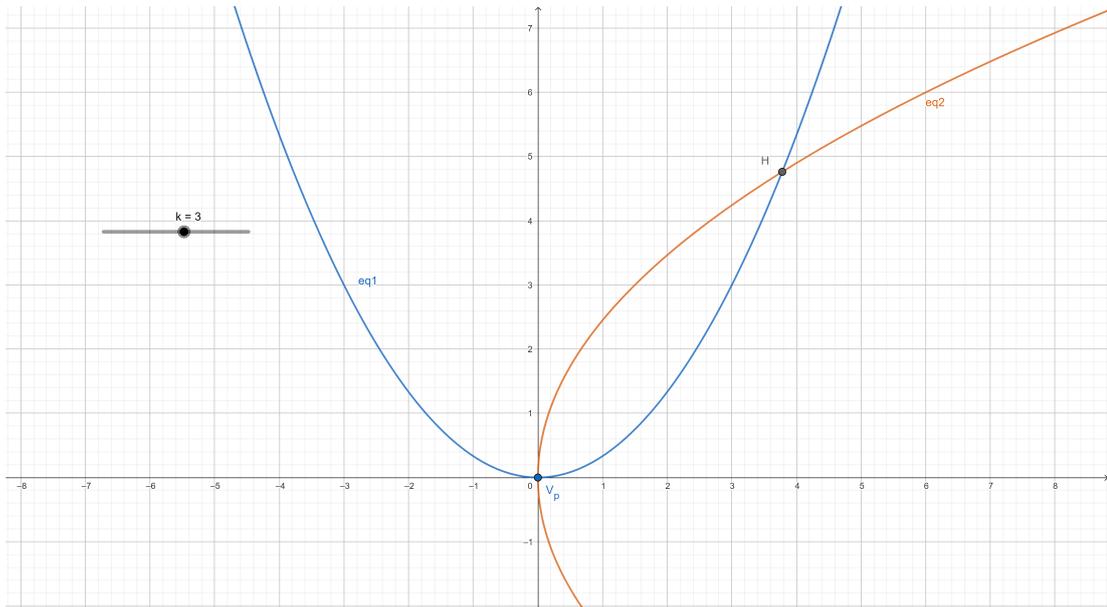
## 4.4 DUPLICANDO O CUBO COM O GEOGEBRA

Nesta seção, utilizamos as duas estratégias de Menaecmo para interpretar geometricamente a duplicação do cubo com o GeoGebra (2022a).

### 4.4.1 USANDO DUAS PARÁBOLAS

Iniciamos inserindo as equações (4.2) ( $x^2 = ky$ ) e (4.3) ( $y^2 = 2kx$ ) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra. A Figura 4.10 ilustra as duas parábolas correspondentes a essas equações.

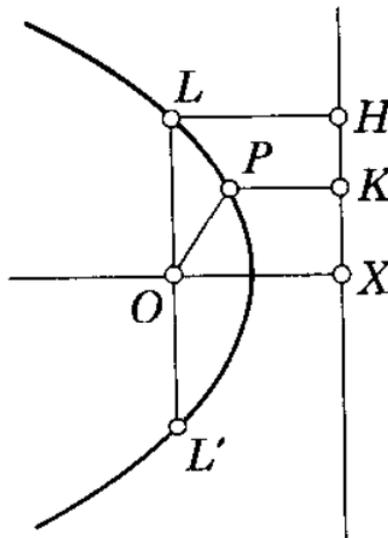
Figura 4.10 – Parábolas  $x^2 = ky$  (azul) e  $y^2 = 2kx$  (laranja), com  $k = 3$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Na primeira estratégia para a duplicação do cubo, Menaecmo refere-se a duas parábolas com vértices comuns e eixos perpendiculares, tais que o *latus rectum* de uma é o dobro do *latus rectum* da outra. Segundo Coxeter (1969, p. 116): “A corda  $\overline{LL'}$  passando pelo foco, paralela à diretriz, é chamada *latus rectum*; seu comprimento é denotado por  $2l$ , de modo que  $l = \overline{OL} = e\overline{LH}$ ”<sup>3</sup>, onde  $e = 1$  é a excentricidade<sup>4</sup> da parábola – Figura 4.11.

Figura 4.11 – *Latus rectum*  $\overline{LL'}$  da parábola



Fonte: Coxeter (1969, p. 115).

Como toda parábola é simétrica em relação à reta focal, podemos concluir na

<sup>3</sup> The chord  $LL'$  through the focus, parallel to the directrix, is called the *latus rectum*; its length is denoted by  $2l$ , so that  $l = OL = eLH$ .

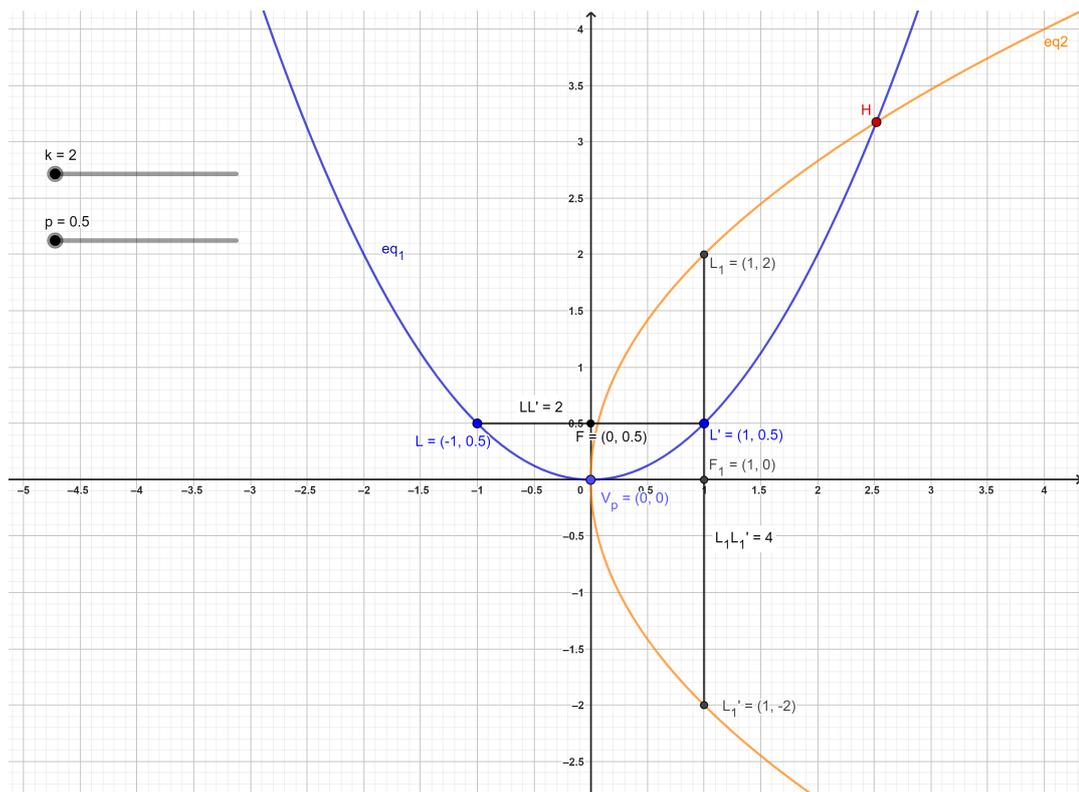
<sup>4</sup> Razão entre a distância do centro ao foco e a distância de um ponto na cônica da diretriz.

Figura 4.11 que:  $\overline{LO} = \overline{OL'} = l$ ; o foco  $O$  é o ponto médio do segmento  $\overline{LL'}$ ;  $d(L, H) = d(O, X)$  e que  $l = 2p$ , onde  $p$  é o parâmetro da parábola. De fato, temos que  $\overline{OX} = 2p$ , e como  $l = \overline{OL} = \overline{LH} = \overline{OX}$ , segue que  $l = 2p$ . Consequentemente,  $2l = 4p = s$ .

Nesta primeira estratégia, usamos as parábolas  $x^2 = ky$  e  $y^2 = 2kx$ , onde  $k = 2$ , com vértices na origem. A parábola  $x^2 = ky$  possui reta focal coincidente com o eixo  $Oy$ , isto é, a forma canônica (4.7) com  $p = \frac{1}{2}$ , onde  $F = (0, p)$ ,  $d : y = -p$  e  $2p = d(F, d)$ . Já a parábola  $y^2 = 2kx$  possui reta focal coincidente com o eixo  $Ox$ , ou seja, a forma canônica (4.6) com  $p' = 2p$ , onde  $F_1 = (p', 0)$ ,  $d : x = -p'$  e  $2p' = d(F, d)$ .

Assim, o *latus rectum*  $\overline{LL'}$  terá como extremos os pontos  $L = (-2p, p)$  e  $L' = (2p, p)$  para  $x^2 = ky$  e o *latus rectum*  $\overline{L_1L'_1}$  terá como extremos os pontos  $L_1 = (p', 2p')$  e  $L'_1 = (p', -2p')$  para  $y^2 = 2kx$  — Figura 4.12, cumprindo deste modo as condições de Menaecmo.

Figura 4.12 – *Latus rectum*  $\overline{LL'}$  e  $\overline{L_1L'_1}$  das parábolas  $x^2 = ky$  e  $y^2 = 2kx$ , respectivamente, com  $k = 2$

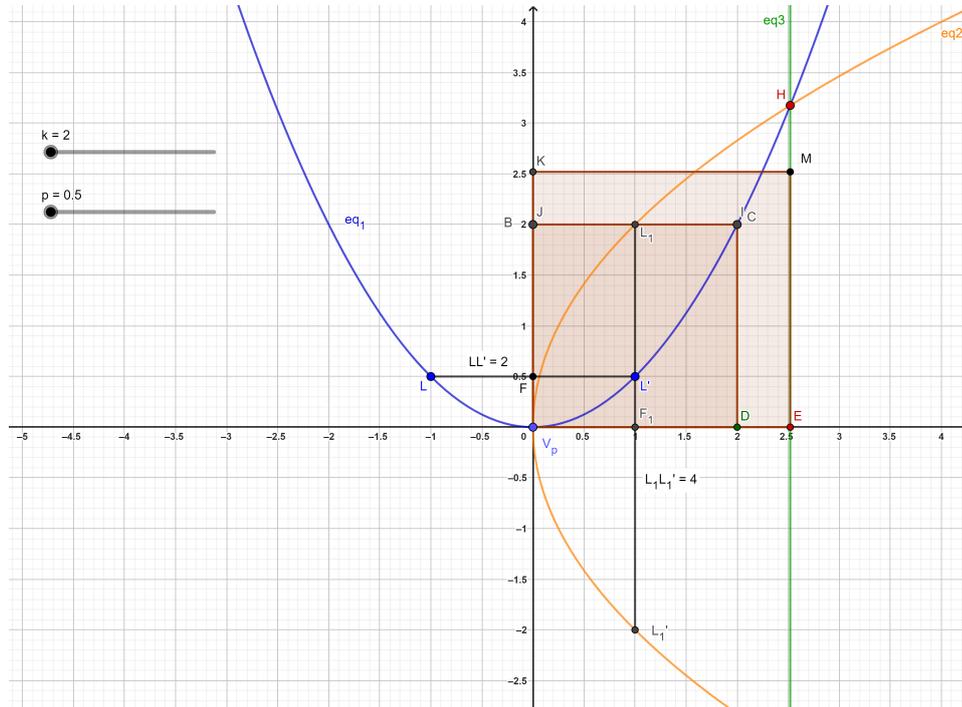


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Na Figura 4.12,  $H = (\sqrt[3]{2}k, \sqrt[3]{4}k)$  é o ponto de interseção das duas parábolas. As coordenadas deste ponto podem ser determinadas empregando-se o método da substituição para solucionar o sistema composto pelas equações (4.2) e (4.3).

Inserindo a equação (4.5) ( $x = \sqrt[3]{2}k$ ) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra, visualizamos uma reta perpendicular ao eixo  $x$  e paralela ao eixo  $y$ , que passa pelo ponto  $H$  — Figura 4.13.

Figura 4.13 – Parábolas  $x^2 = ky$  (azul) e  $y^2 = 2kx$  (laranja), a reta  $x = \sqrt[3]{2}k$  (verde) e os segmentos  $\overline{V_pD}$  e  $\overline{V_pE}$ , de comprimentos  $k$  e  $x$ , respectivamente, com  $k = 2$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

As medidas dos segmentos  $\overline{V_pD}$  e  $\overline{V_pE}$  na Figura 4.13, onde  $D = (k, 0)$  e  $E = (\sqrt[3]{2}k, 0)$ , representam, respectivamente, o comprimento  $k$  da aresta do cubo e o comprimento  $x = \sqrt[3]{2}k$  da aresta do cubo de volume duplicado. Desta forma, os quadrados  $V_pDCB$  e  $V_pEMK$  representam as faces do cubo e do cubo de volume duplicado, respectivamente. Construímos no GeoGebra uma atividade dinâmica que permite, através de um controle deslizante, alterar o valor da medida  $k$  e observar o que ocorre com as parábolas e os segmentos  $\overline{V_pD}$  e  $\overline{V_pE}$ . Disponibilizamos essa atividade no link:

<https://www.geogebra.org/calculator/uqpvcbmz>.

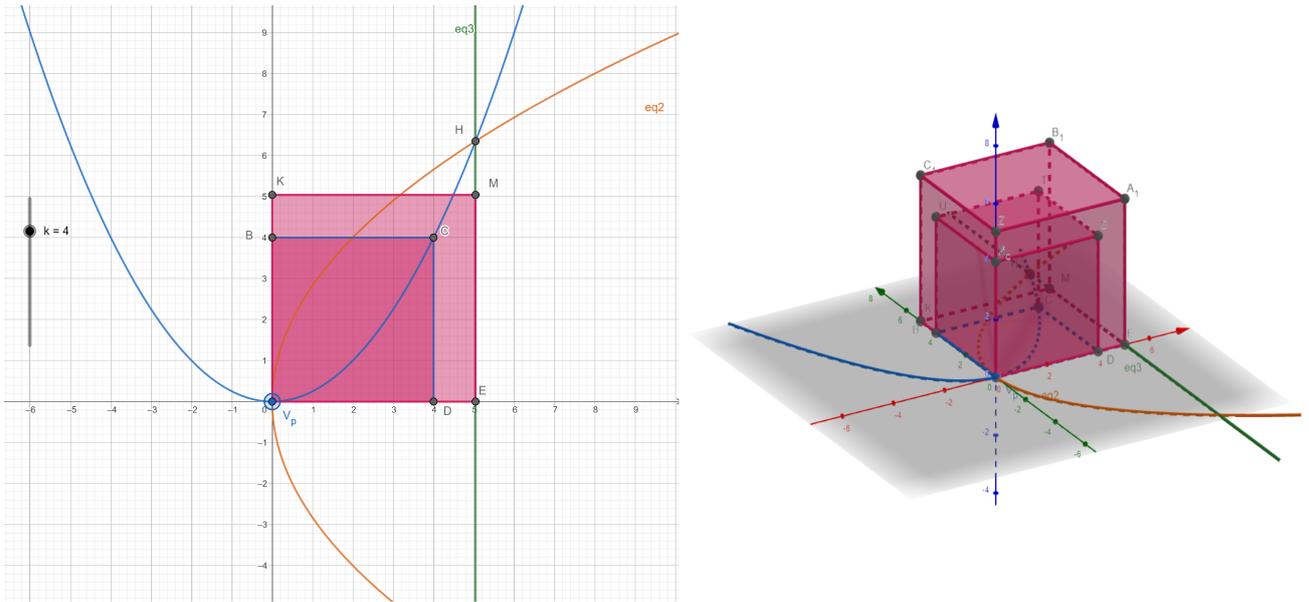
Usando o GeoGebra na opção de janela 3D, criamos um cubo de aresta  $k$  e outro cubo de aresta  $\sqrt[3]{2}k$  a partir dos quadrados  $V_pBCD$  e  $V_pKME$ , respectivamente – Figura 4.14. Assim, dados um cubo  $\mathcal{C}$  de aresta  $k$  e um cubo  $\mathcal{D}$  de aresta  $\sqrt[3]{2}k$ , temos que o volume  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{C}$  é  $\mathcal{V}(\mathcal{C}) = k^3$  e o volume  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{D}$  é  $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2k^3$ . Portanto:  $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2\mathcal{V}(\mathcal{C})$ .

No link

<https://www.geogebra.org/classic/gmsk8jgv>,

disponibilizamos uma atividade construída no GeoGebra que permite observar a duplicação do cubo alterando-se o valor de  $k$  no controle deslizante.

Figura 4.14 – Cubos de arestas  $k$  e  $\sqrt[3]{2}k$ , com  $k = 4$

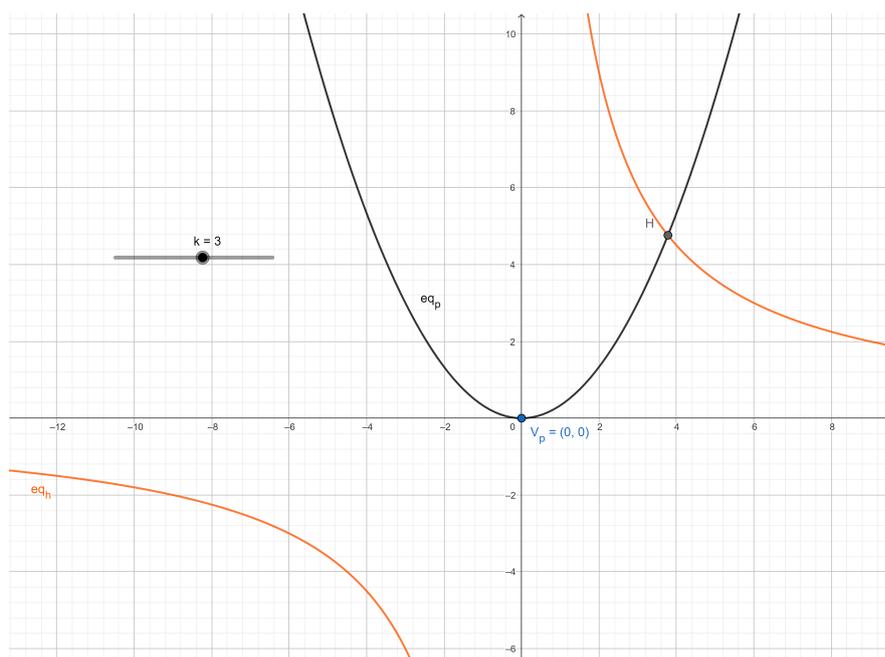


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

#### 4.4.2 USANDO UMA PARÁBOLA E UMA HIPÉRBOLE

Inserindo as equações (4.2) ( $x^2 = ky$ ) e (4.4) ( $xy = 2k^2$ ) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra, obtemos a Figura 4.15. Nesta, destacamos o ponto  $H$ , que representa a interseção da parábola com a hipérbole. O ponto  $V_p = A = (0, 0)$  é o vértice da parábola (4.2).

Figura 4.15 – Interseção  $H$  da parábola  $x^2 = ky$  com a hipérbole  $xy = 2k^2$  (laranja), onde  $k = 3$

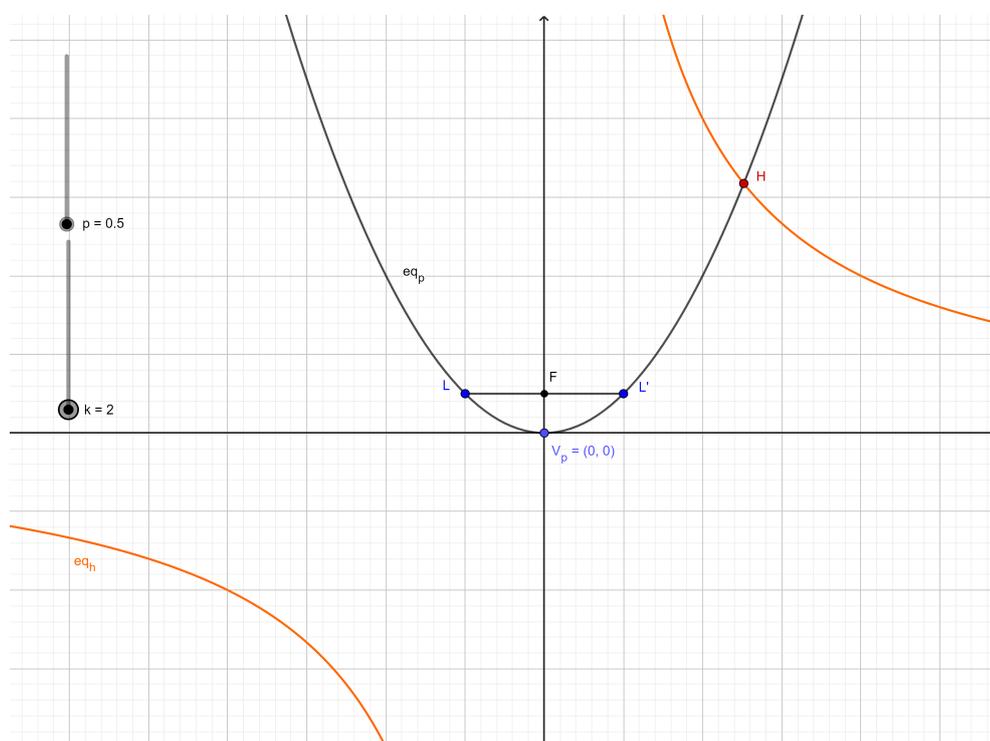


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Estabelecida a parábola, precisamos verificar se a hipérbole  $xy = 2k^2$  se enquadra nas normas de Menaecmo, isto é, se é uma hipérbole equilátera cuja distância entre os vértices reais é igual a  $4s$ , uma vez que  $2l = 4p = s$ , e as assíntotas são o eixo focal da parábola e a tangente a esta que passa pelo vértice.

Construindo o gráfico da hipérbole  $xy = 2k^2$ , com  $k = 2$ , no GeoGebra – Figura 4.16, temos que o eixo focal da parábola  $x^2 = ky$  é coincidente ao eixo  $Oy$ . Logo, este eixo é uma das assíntotas uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \frac{2k^2}{x} = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \frac{2k^2}{x} = +\infty$ . A outra assíntota corresponde ao eixo  $Ox$ , isto porque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{2k^2}{x} = 0$ . E o eixo  $Ox$  é tangente à parábola  $x^2 = 2y$  e passa pelo vértice  $V_p$ . Como os eixos  $Ox$  e  $Oy$  são perpendiculares, temos que a hipérbole  $xy = 2k^2$  é equilátera.

Figura 4.16 – Assíntotas da hipérbole  $xy = 2k^2$ , com  $k = 2$

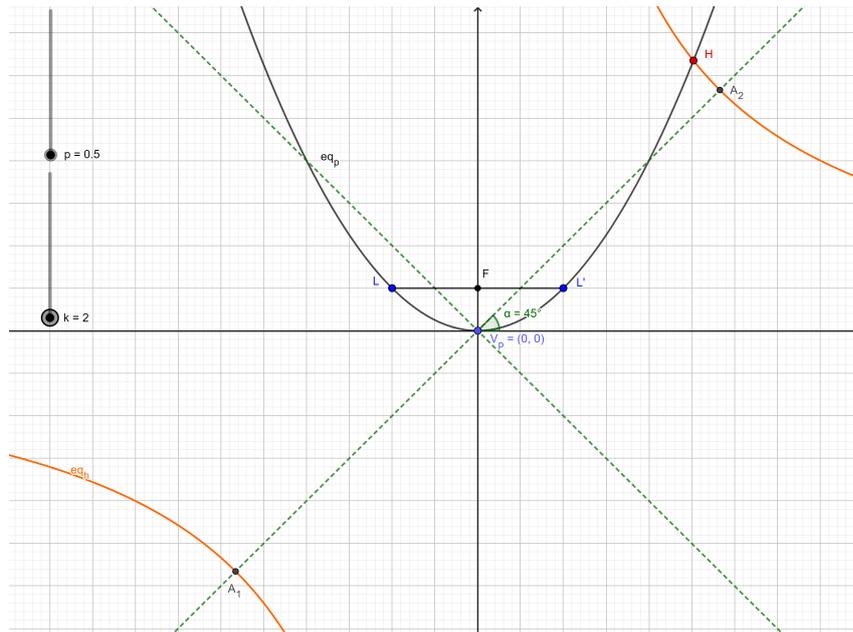


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Contudo, a hipérbole  $xy = 2k^2$  está rotacionada. Para que essa hipérbole satisfaça os critérios de construção de Menaecmo, a rotação dos eixos devem ser de 45 graus, por se tratar de uma hipérbole equilátera. Para tanto, precisamos traçar as bissetrizes em relação aos eixos  $Ox$  e  $Oy$  – Figura 4.17.

Sabemos que na hipérbole equilátera  $a = b$ , ou seja, o retângulo base é um quadrado, e que a distância entre os vértices reais  $A_1$  e  $A_2$  é  $d(A_1, A_2) = 2a$ . Assim, devemos ter  $d(A_1, A_2) = 2a = 4s$ . Como  $LL' = 2l = 4p = s$ , segue que  $d(A_1, A_2) = 4s = 16p$ . Logo, empregando os valores em função de  $p$ , podemos afirmar que a hipérbole  $xy = 2k^2$  se encaixa nos padrões de construção de Menaecmo.

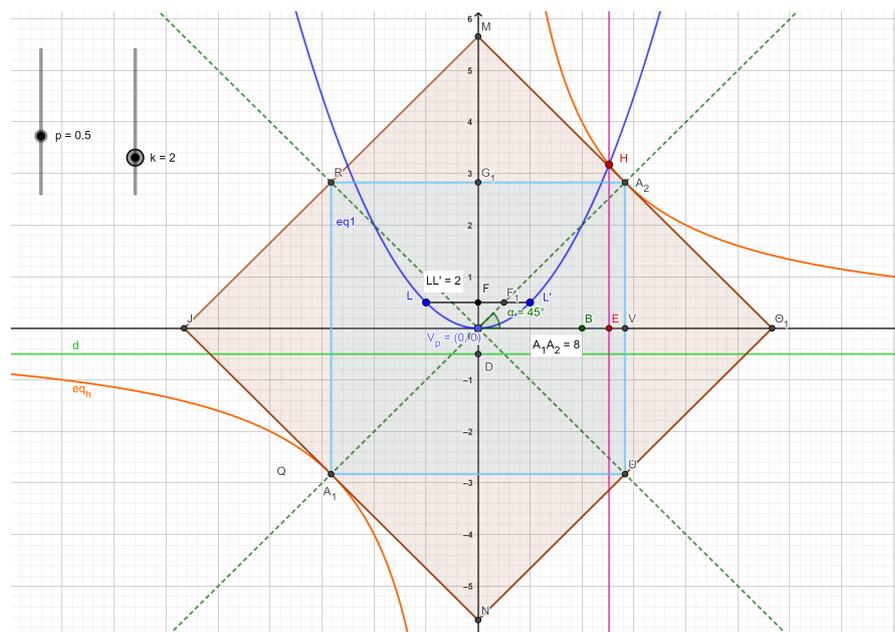
Figura 4.17 – Bissetrizes (verde) em relação aos eixos  $Ox$  e  $Oy$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

De fato, a distância  $d(A_1, A_2) = 4s = 16p$  corresponde à diagonal (coincidente com uma das bissetrizes) do quadrado inscrito no retângulo base da hipérbole. Os vértices do quadrado inscrito correspondem aos pontos médios dos lados do retângulo base, isto é,  $A_1$  e  $A_2$  são vértices opostos desse quadrado. Além disso, como  $4s = 16p = 2a$  e  $2l = 4p = s$ , temos que  $2a = 4s = 8l$ , de onde podemos concluir que a distância entre os vértices  $A_1$  e  $A_2$  é igual ao quádruplo do *latus rectum* da parábola  $x^2 = ky$ , ou seja,  $d(A_1, A_2) = 8l$  - Figura 4.18.

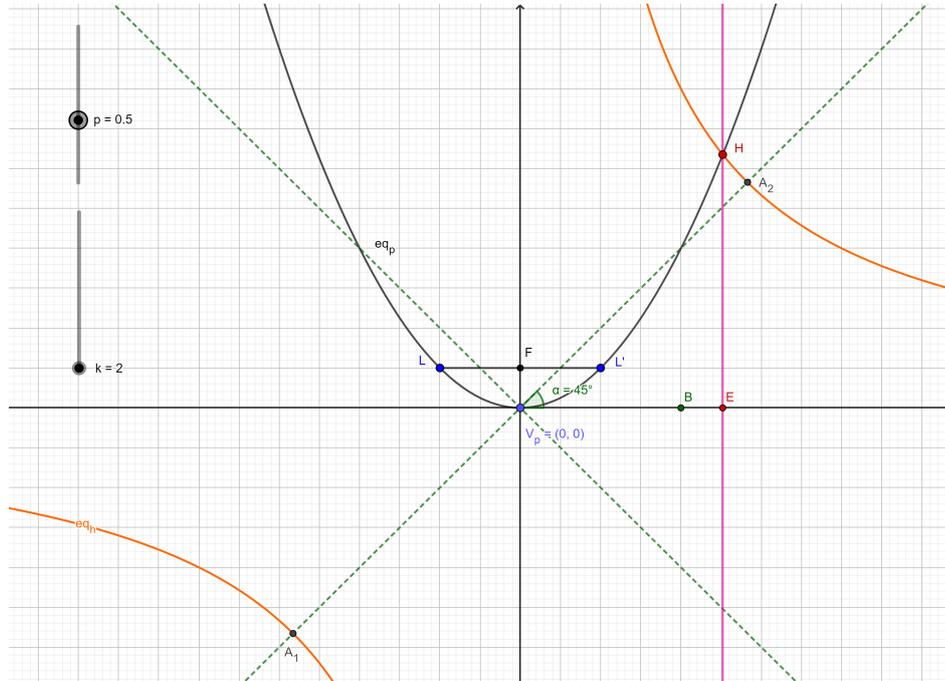
Figura 4.18 – Retângulo base da hipérbole  $xy = 2k^2$  e quadrado inscrito



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Utilizando o método da substituição para solucionar o sistema de equações  $x^2 = ky$  e  $xy = 2k^2$ , obtemos como solução o ponto  $H = (\sqrt[3]{2}k, \sqrt[3]{4}k)$ , interseção da parábola com a hipérbole. Baixando uma perpendicular ao eixo  $Ox$  passando por  $H$ , determinamos o ponto  $E$  em  $Ox$ . Este ponto tem a mesma abscissa do ponto  $H$ . Logo,  $E = (\sqrt[3]{2}k, 0)$  – Figura 4.19.

Figura 4.19 – Cônicas  $x^2 = ky$  e  $xy = 2k^2$ , com  $k = 2$ , e as arestas  $\overline{V_pB}$  e  $\overline{V_pE}$



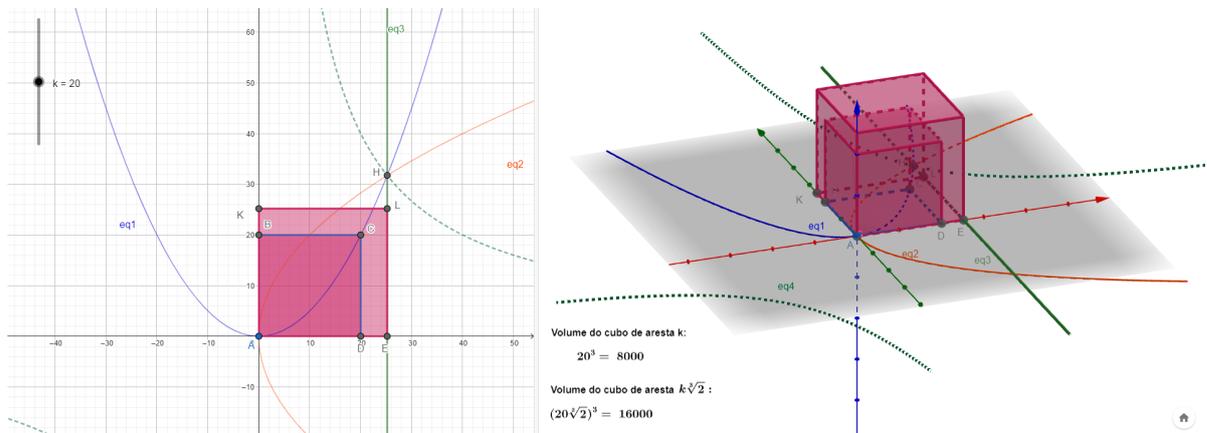
Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Na Figura 4.19, as distâncias  $d(A, B)$ , onde  $B = (k, 0)$ , e  $d(A, E)$  representam, respectivamente, o comprimento da aresta  $k$  do cubo e o comprimento da aresta  $x = \sqrt[3]{2}k$  do cubo de volume duplicado. Ao manejamos os controles deslizantes, que correspondem a valores atribuídos às medidas  $k$  e  $p$ , podemos observar o que ocorre com as medidas dos segmentos  $\overline{V_pB}$  e  $\overline{V_pE}$ , onde  $V_p = A = (0, 0)$  é o vértice da parábola. Construímos uma atividade no GeoGebra que permite observar o que ocorre quando se altera o valor de  $p$  e/ou  $k$ . Esta atividade está disponível no link:

<https://www.geogebra.org/classic/q5vb2qht>.

Deste modo, a solução do Problema 4.1 usando as contribuições de Menaecmo consiste em se determinar a interseção entre as parábolas (4.2) e (4.3) ou entre uma destas e a hipérbole (4.4). Em qualquer das escolhas, baixando uma perpendicular ao eixo  $Ox$  passando pelo ponto de interseção  $H$ , determinamos em  $Ox$  o ponto  $E$ . Assim, o comprimento do segmento  $\overline{V_pE} = \overline{AE}$  é a medida da aresta do cubo duplicado. Podemos visualizar as duas contribuições de Menaecmo à duplicação do cubo na Figura 4.20.

Figura 4.20 – Volume dos cubos de arestas  $k$  e  $\sqrt[3]{2}k$ , com  $k = 20$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Organizamos no GeoGebra uma atividade para determinar o volume do cubo original e do cubo duplicado a partir do valor do parâmetro  $k$ , que pode ser modificado pelo controle deslizante. Disponibilizamos a atividade no link:

<https://www.geogebra.org/classic/htadhqhx>.

## 5 ATIVIDADES DIDÁTICAS COM O GEOGEBRA E O GNU OCTAVE

Apresentamos neste capítulo atividades envolvendo problemas cuja solução está associada aos problemas abordados nos Capítulos 2, 3 e 4. Para cada atividade, descrevemos brevemente uma sequência didática que poderá nortear a ação do professor de matemática da Educação Básica. Essas sequências abordam problemas de aplicação de conteúdos que já tenham sido trabalhados em sala de aula.

Definimos uma sequência didática como um encadeamento sequencial, metodológico e articulado que orienta a execução de diferentes atividades no decorrer de uma unidade didática, com a finalidade de atingir determinados objetivos educacionais (Zabala, 1998).

### 5.1 ATIVIDADE 1: LANCHE COM AMIGOS

1.1 Nível: Ensino Fundamental II.

1.2 Ano: 7º.

1.3 Número de aulas: 5 (50 minutos cada).

1.4 Competências específicas BNCC:

- ◇ Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- ◇ Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

1.5 Habilidades específicas BNCC:

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora;

(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor;

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

1.6 Conteúdos abordados: critérios de divisibilidade; valor numérico.

### 1.7 Objetivos:

- ◇ Calcular quocientes e restos;
- ◇ Aplicar o critério de divisibilidade por 3;
- ◇ Identificar as variáveis do problema, atribuindo valores numéricos às mesmas;
- ◇ Criar um script no GNU Octave para resolver o Problema 5.1;
- ◇ Generalizar o Problema 5.1, explorando outros critérios de divisibilidade.

1.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

1.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; generalização do Problema 5.1.

Figura 5.1 – Amigos confraternizando



Fonte: Shutterstock (2023, n.p).

O Problema 5.1, que aborda divisibilidade assim como o Problema 2.1, e as Questões 5.1 a 5.2 regem a Atividade 1.

**Problema 5.1.** *Mabel, Marise e Junior são amigos e combinaram de se encontrar na Confeitaria Aroma e Sabor para tomar um café no domingo à tarde – Figura 5.1. Após muita conversa e nostalgia, pediram a conta. O valor total da despesa foi igual a R\$ 136,00. Marise propôs o seguinte: dividir a conta em três partes iguais, considerando válido apenas o quociente natural; caso não fosse possível, somar ao total da conta o menor valor possível até obter uma divisão exata. Além disso, sugeriu que o valor extra fosse doado para a “caixinha” (recipiente onde estão as gorjetas; é repartida entre os atendentes do dia após o expediente).*

**Questão 5.1.** *Qual é o valor que cada amigo deverá pagar segundo a proposta de Marise ?*

**Questão 5.2.** *Qual será o valor extra direcionado à “caixinha”?*

**Solução** (Problema 5.1). *Temos que o valor total da despesa dos três amigos foi de R\$ 136,00. Assim, usando congruências, podemos escrever  $136 \equiv 1 \pmod{3}$ , ou seja, o resto da divisão de 136 por 3 resulta em 1.*

*Para que a divisão resulte em um quociente natural, o total da despesa deve ser um número divisível por 3. Como o resto da divisão de 136 por 3 é igual a 1, basta somarmos 2 ao resto 1, uma vez que devemos considerar o menor valor possível a ser somado. Logo, o total da conta passa a ser R\$ 138,00, e cada um dos três amigos deve pagar R\$ 46,00. O valor destinado à “caixinha” será de R\$ 2,00, exatamente o valor adicionado para tornar a divisão por 3 exata.*

*Para configurar o script no GNU Octave, devemos considerar as seguintes variáveis:*

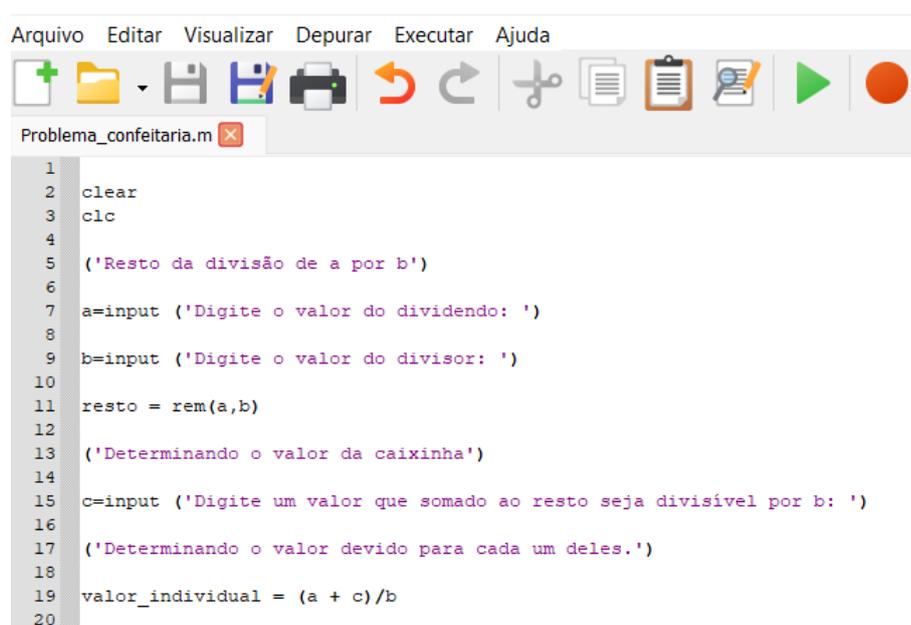
- ◇ *a*: corresponde ao valor total da despesa, ou seja, o dividendo;
- ◇ *b*: refere-se ao número de amigos que repartiram a despesa na confeitaria, isto é, o divisor;
- ◇ *c*: o valor da “caixinha”, isto é, o valor a ser somado ao total da despesa para que o quociente seja um número natural;
- ◇ *resto*: refere-se ao resto da divisão de *a* por *b*;
- ◇ *valor individual*: o valor a ser pago por cada integrante do grupo de amigos.

As variáveis *a*, *b* e *c* são dados de entrada, isto é, fornecidos pelo usuário; as variáveis *resto* e *valor individual* são dados de saída, ou seja, calculados pelo GNU Octave. Ao elaborar um script no GNU Octave, é importante:

1. incluir textos curtos que direcionem o raciocínio. Os textos podem ser escritos entre parênteses e aspas simples, como, por exemplo, ('Resto da divisão de 136 por 3');
2. usar os comandos “clear” e “clc” no início do script – Figura 5.2. Estes comandos realizam a limpeza dos dados do ambiente de trabalho e da janela de comandos, respectivamente.

Uma das funções pré-definidas no GNU Octave é **rem(a,b)**. Esta função permite determinar o resto da divisão de *a* por *b*. A Figura 5.2 ilustra um script que pode ser usado na solução do Problema 5.1.

Figura 5.2 – Script no GNU Octave para solucionar o Problema 5.1



```

1
2 clear
3 clc
4
5 ('Resto da divisão de a por b')
6
7 a=input ('Digite o valor do dividendo: ')
8
9 b=input ('Digite o valor do divisor: ')
10
11 resto = rem(a,b)
12
13 ('Determinando o valor da caixinha')
14
15 c=input ('Digite um valor que somado ao resto seja divisível por b: ')
16
17 ('Determinando o valor devido para cada um deles.')
18
19 valor_individual = (a + c)/b
20

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

*Clicando em executar, temos que fornecer na Janela de Comandos os valores de a, b e c – Figura 5.3.*

Figura 5.3 – Janela de Comandos no GNU Octave para inserção dos valores das variáveis: (a) a; (b) b; (c) c

(a)

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: |
```

(b)

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: 136
a = 136.00
Digite o valor do divisor:
```

(c)

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: 136
a = 136.00
Digite o valor do divisor: 3
b = 3.00
resto = 1.00
ans = Determinando o valor da caixinha
Digite um valor que somado ao resto seja divisível por b:
```

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

*A Figura 5.4 ilustra a solução do Problema 5.1, destacando o valor da “caixinha” c e o valor individual a ser pago por cada um dos três amigos.*

Figura 5.4 – Solução do Problema 5.1 via GNU Octave

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: 136
a = 136.00
Digite o valor do divisor: 3
b = 3.00
resto = 1.00
ans = Determinando o valor da caixinha
Digite um valor que somado ao resto seja divisível por b: 2
c = 2.00
ans = Determinando o valor devido para cada um deles.
valor_individual = 46.00
>>
```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

**Observação 5.1.** *O script ilustrado na Figura 5.2 permite generalizar o Problema 5.1. Desta maneira, o professor de matemática pode empregá-lo na Educação Básica para explorar outros critérios de divisibilidade.*

## 5.2 ATIVIDADE 2: REALÇANDO IMAGENS

De acordo com Gonzalez e Woods (2000, p. 4): “O termo *imagem monocromática* refere-se à função bidimensional de intensidade da luz  $f(x, y)$ , onde  $x$  e  $y$  denotam as coordenadas espaciais e o valor de  $f$  em qualquer ponto  $(x, y)$  é proporcional ao brilho (ou *níveis de cinza*) da imagem naquele ponto”.

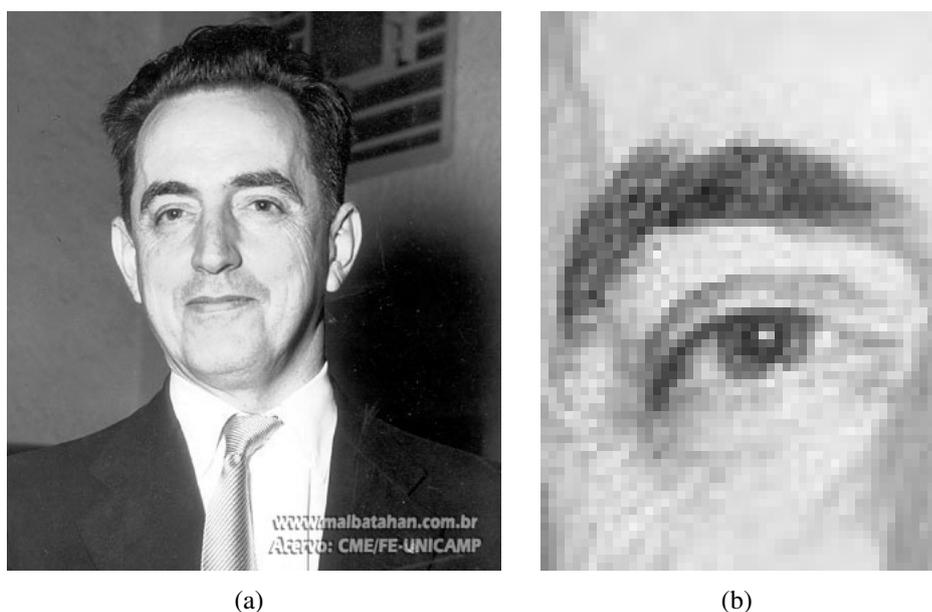
Ainda, segundo os mesmos autores:

[...] Uma imagem *digital* é uma imagem  $f(x, y)$  discretizada tanto em coordenadas espaciais quanto em brilho. Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices de linhas e de colunas identificam um ponto na imagem, e o correspondente valor do elemento da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto. Os elementos dessa matriz digital são chamados de *elementos da imagem*, *elementos da figura*, “*pixels*” ou “*pels*”, estes dois últimos, abreviações de “*picture elements*” (elementos de figura) (Gonzalez; Woods, 2000, p. 4-5).

O termo “pixel” originou-se da união de duas palavras da língua inglesa: *picture* e *element*, isto é, imagem e elemento. Desse modo, podemos dizer que os pixels são os elementos que compõem uma imagem digital (Wolffenbüttel, 2006).

Segundo Wolffenbüttel (2006, n.p): “ Um pixel é a menor unidade que consegue conter uma informação individual de cor. Portanto, quanto mais pixels tiver uma imagem, melhor definição ela terá”. Podemos observar os pixels que compõem uma imagem quando a ampliamos. Na ampliação, a imagem perde nitidez e os pixels aparecem no formato de pequenos quadrados, como ilustra a Figura 5.5.

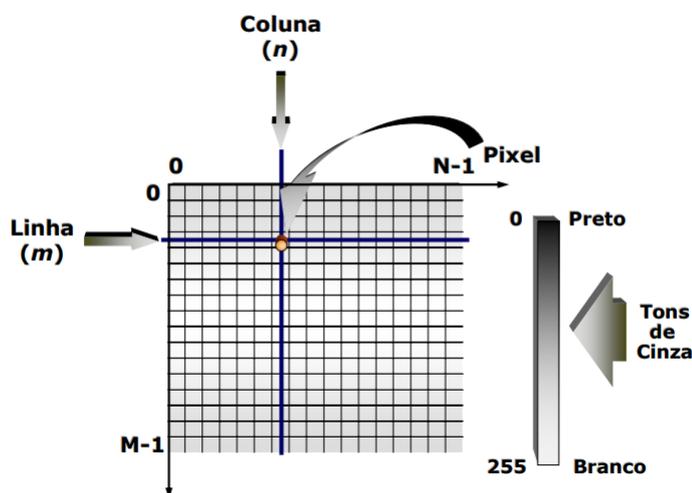
Figura 5.5 – (a) Fotografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza; (b) recorte ampliado da fotografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza



Fonte: Pereira, Salles, Pereira (2017, n.p).

Queiroz e Gomes (2001, p. 8) mencionam que: “Cada ponto na grade bidimensional que representa a imagem digital é denominado elemento de imagem ou pixel”. A Figura 5.6 ilustra a notação matricial de uma imagem bidimensional, usada na localização de um pixel no arranjo de pixels.

Figura 5.6 – Representação de uma imagem digital bidimensional



Fonte: Queiroz e Gomes (2001, p. 8).

Na Figura 5.6, o índice  $m$  denota a posição da linha na qual o pixel se encontra, enquanto o índice  $n$  denota a posição da coluna. Se a imagem digital contiver  $M$  linhas e  $N$  colunas, então  $m = 0, \dots, M - 1$  e  $n = 0, \dots, N - 1$ . O sentido de leitura (varredura) é da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Segundo Queiroz e Gomes (2001, p. 15): “O realce de contraste visa o melhoramento da qualidade das imagens sob o ponto de vista subjetivo do olho humano, sendo usualmente empregada como uma etapa de pré-processamento em aplicações de reconhecimento de padrões”. Ainda quanto ao realce de contraste:

O contraste entre dois alvos de uma cena pode ser definido como a razão entre os seus níveis de cinza médios. Fundamentada neste conceito, a manipulação do contraste dos objetos presentes em uma imagem digital consiste em um remapeamento radiométrico de cada pixel da imagem, a fim de aumentar a discriminação visual entre eles. Embora a escolha do mapeamento adequado seja, em princípio, essencialmente empírica, uma análise prévia do histograma da imagem se afigura, em muitos casos, bastante útil (Queiroz; Gomes, 2001, p. 15).

O objetivo da técnica “realce de contraste” é aumentar a qualidade das imagens, ou seja, deixá-las mais nítidas sob os critérios subjetivos do olho humano.

A escolha do mapeamento direto adequado é, em geral, essencialmente empírica. Entretanto, um exame prévio do histograma da imagem pode ser útil. O histograma de uma imagem descreve a distribuição estatística dos níveis de cinza em termos do número de amostras (“pixels”) com cada nível. A distribuição pode também ser dada em termos da porcentagem do número total de “pixels” na imagem. Pode ser estabelecida uma analogia entre o histograma de

uma imagem e a função densidade de probabilidade, que é um modelo matemático da distribuição de tons de cinza de uma classe de imagens (SPRING/INPE, 2006, n.p).

Catarina (2023) define *histograma de uma imagem* como sendo um gráfico que representa visualmente a distribuição das intensidades ou cores dos pixels de uma imagem. Mais especificamente, conforme definem Queiroz e Gomes (2001), o histograma de uma imagem traduz a distribuição estatística dos seus níveis de cinza.

O eixo horizontal começa com uma cor preta pura no lado esquerdo do histograma, passa por sombreados, tons médios e realces, até chegar ao branco mais brilhoso no lado direito. O eixo vertical representa a frequência ou a intensidade de cada tom, com picos de alta frequência e vales nos níveis inferiores (Tryforos, 2023, n.p).

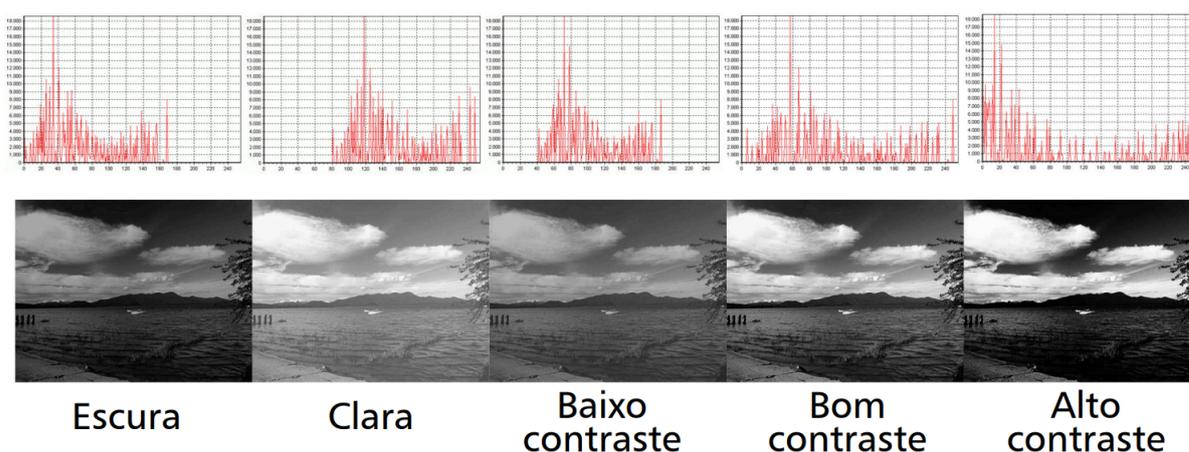
Deste modo, considere uma imagem digital  $f(x, y)$  composta por  $M$  linhas e  $N$  colunas. O histograma  $H_f(C)$  da imagem é definido pela igualdade:

$$H_f(C) = \frac{n_C}{MN},$$

onde  $n_C$  corresponde ao número de vezes em que o nível de cinza  $C$  aparece na imagem (Queiroz; Gomes, 2001).

Ao observar o histograma, podemos estimar o nível médio de contraste e o brilho (imagem clara ou escura) de uma imagem. Na Figura 5.7 temos exemplos de histogramas com manipulação de contraste e o brilho.

Figura 5.7 – Exemplos de histograma com manipulação de contraste e o brilho



Fonte: Catarina (2023, n.p).

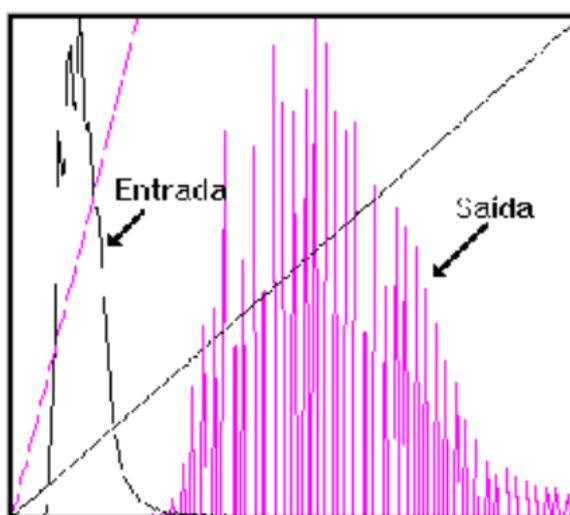
Podemos analisar a nitidez de uma imagem através da comparação desta com seu histograma. Assim, considerando no histograma o eixo horizontal (tons de cinza) variando de 0 (preto) a 255 (branco), e o eixo vertical (frequência) variando de 0 a 18000, temos os casos ilustrados na Figura 5.7.

1. **Imagem escura:** reflete no histograma uma maior incidência de tons escuros próximos de zero (preto) com incidência de cinza nas proximidades de 170, e maior frequência de picos  $f$  no intervalo  $20 \leq f \leq 40$ , aproximadamente.
2. **Imagem clara:** reflete no histograma uma maior incidência de tons claros próximos de 255 (branco) com incidência de cinza nas proximidades de 80, e maior frequência de picos  $f$  no intervalo  $90 \leq f \leq 140$ , aproximadamente.
3. **Imagem baixo contraste:** reflete no histograma os níveis de cinza  $C$  e maior frequência  $f$  nos intervalos aproximados  $40 \leq C \leq 190$  e  $60 \leq f \leq 90$ , respectivamente.
4. **Imagem bom contraste:** neste caso, há maior distribuição dos níveis de cinza em praticamente todo o intervalo  $0 \leq C \leq 255$ . Já a frequência de picos  $f$  varia com maior intensidade no intervalo  $50 \leq f \leq 70$ .
5. **Imagem alto contraste:** neste caso, também há distribuição dos níveis de cinza em praticamente todo o intervalo  $0 \leq C \leq 255$ . Porém, a frequência de picos  $f$  varia com maior intensidade mais próximo de zero, trazendo um escurecimento da imagem.

Menezes e Almeida (2012, p. 107) ressaltam que: “há duas classes de algoritmos de expansão de histograma que são as mais empregadas: lineares e não lineares”. Segundo o Sistema de Processamento de Informações Georeferenciadas (SPRING) (2006, n.p):

O aumento de contraste por uma transformação linear é a forma mais simples das opções. A função de transferência é uma reta e apenas dois parâmetros são controlados: a inclinação da reta e o ponto de interseção com o eixo  $X$  (Figura 5.8). A inclinação controla a quantidade de aumento de contraste e o ponto de interseção com o eixo  $X$  controla a intensidade média da imagem final.

Figura 5.8 – Histograma da função de transferência



Fonte: SPRING/INPE (2006, n.p).

A função de mapeamento linear é dada por:

$$Y = AX + B,$$

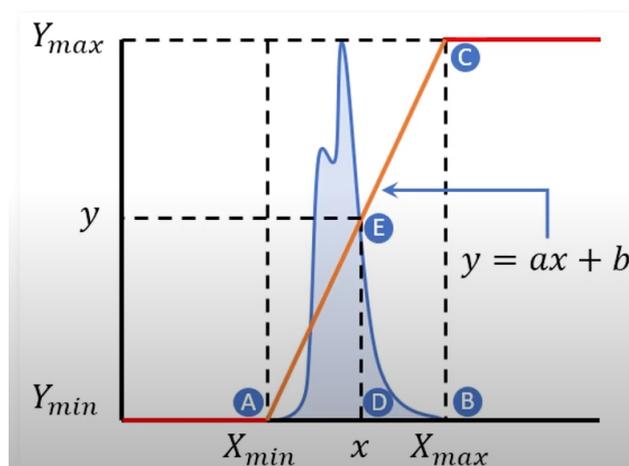
onde Y representa o novo valor de nível de cinza, X refere-se ao valor original de nível de cinza, A corresponde à inclinação da reta e B é o fator de incremento, definido pelos limites mínimo e máximo fornecidos pelo usuário (SPRING/INPE, 2006).

No histograma da função linear representado na Figura 5.9, os triângulos retângulos  $ABC$  e  $ADE$  são semelhantes pelo caso  $AA$  (ângulo-ângulo). Aplicando as razões de semelhança aos dois triângulos, obtemos a função de realce linear sem saturação:

$$\frac{Y_{max} - Y_{min}}{X_{max} - X_{min}} = \frac{y - Y_{min}}{x - X_{min}};$$

$$y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{X_{max} - X_{min}}(x - X_{min}) + Y_{min}. \quad (5.1)$$

Figura 5.9 – Histograma da função linear



Fonte: Statella (2022b, n.p).

Após este breve embasamento teórico, propomos uma atividade sobre o realce de imagem. O Problema 5.2, que aborda matrizes assim como o Problema 3.1, e a Questão 5.3 direcionam a Atividade 2.

2.1 Nível: Ensino Médio.

2.2 Série: 1<sup>a</sup>.

2.3 Número de aulas: 6 (50 minutos cada).

2.4 Competências específicas RCEMP:

- ◇ Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral;

- ◇ Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

## 2.5 Habilidades específicas RCEMP:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais;

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão);

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática;

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa/box-plot, de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

2.6 Conteúdos abordados: processamento de imagens digitais; matrizes; função afim.

## 2.7 Objetivos:

- ◇ Identificar os coeficientes angular e linear da função afim na função de mapeamento linear do contraste de imagem;
- ◇ Usar o GNU Octave para solucionar o Problema 5.2.

2.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

2.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; aplicação da técnica para realçar outras imagens.

**Problema 5.2.** *Uma colunista da Revista Alpha foi designada para realizar uma breve homenagem ao ilustre professor Júlio Cesar de Mello e Souza. A foto selecionada pela família do professor corresponde à Figura 5.10, que deverá ser usada na matéria. A colunista pretende realçar a imagem em pontos específicos, como por exemplo, na parte mais clara aplicar uma quantidade menor de realce e na parte mais escura usar uma intensidade maior.*

**Questão 5.3.** *Como realçar o contraste da Figura 5.10 com o auxílio do GNU Octave?*

**Solução** (Problema 5.2). *Primeiramente, verificamos se o pacote “image” está carregado no GNU Octave usando o comando `pkg list`. Em caso negativo, devemos acessar o link*

Figura 5.10 – Professor Júlio Cesar de Mello e Souza



Fonte: Pereira, Salles, Pereira (2017, n.p).

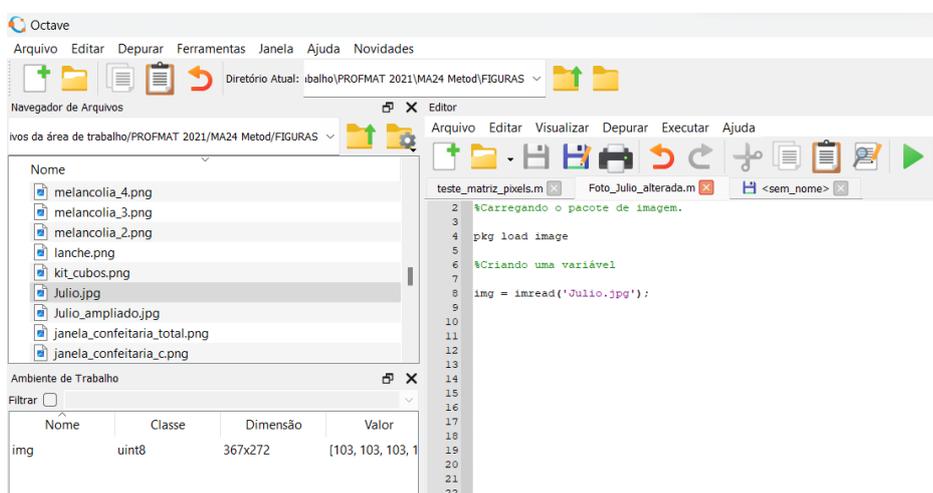
<https://gnu-octave.github.io/packages/>,

baixar o pacote “**image**”, digitar o comando **pkg install (nome do arquivo)**, teclar enter e aguardar.

Agora estamos aptos a criar um script no GNU Octave para alterar a cor da Figura 5.10. Aconselhamos a começar o script usando os comandos **clear all**, **close all** e **clc** para, respectivamente, limpar as variáveis, fechar as imagens excedentes e limpar a janela de comandos, facilitando assim a visualização de todo o processo de criação do script (Statella, 2022a).

Na área de script, digitamos o comando **pkg load image** para informar ao GNU Octave que usaremos o pacote de imagem. Em seguida, criamos uma variável chamada **img** usando a função **imread**, e digitamos **img = imread('Julio.jpg');**, considerando que “Julio.jpg” é o nome do arquivo referente à Figura 5.10. Após, salvamos e executamos para que o GNU Octave reconheça a variável – Figura 5.11 (Statella, 2022a).

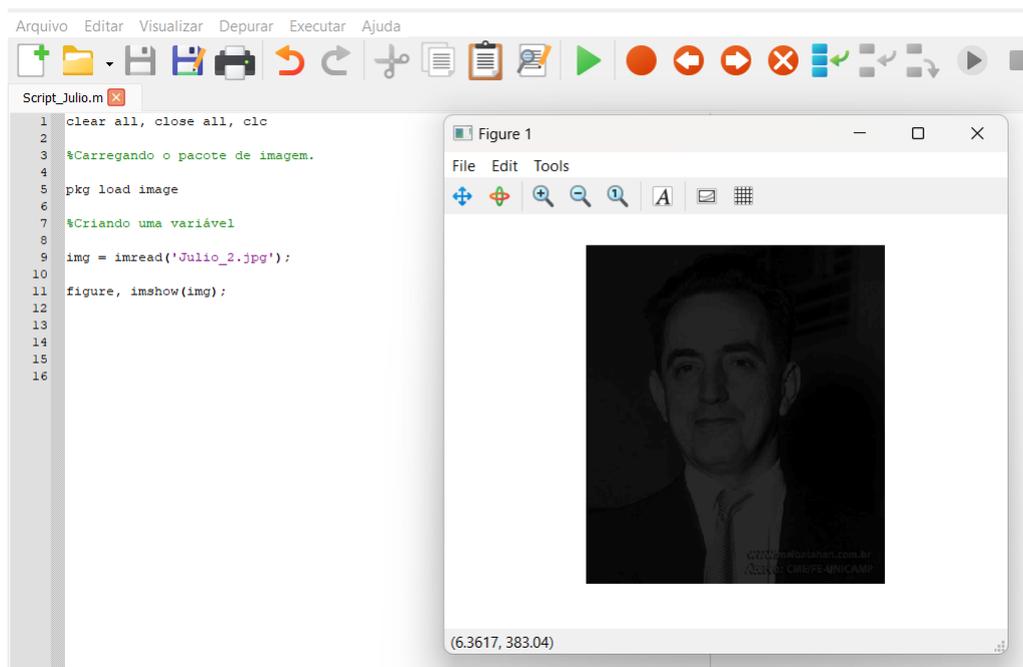
Figura 5.11 – Script no GNU Octave: carregando o pacote de imagem e criando uma variável



Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A Figura 5.11 ilustra, no canto inferior esquerdo, que o GNU Octave criou a variável *img*. Usamos o símbolo de porcentagem “%” antes das menções que não queremos que sejam lidas pelo GNU Octave. Para visualizar a Figura 5.11, utilizamos os comandos **figure** e **imshow**. É importante ressaltar que o GNU Octave permite que digitemos vários comandos em uma mesma linha, bastando que os separemos por vírgula (Statella, 2022a). A Figura 5.12 ilustra a visualização da Figura 5.10 no GNU Octave.

Figura 5.12 – Script no GNU Octave: visualizando a imagem da Figura 5.10



Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Digitando o comando **whos img** na janela de comandos do GNU Octave, obtemos informações sobre a imagem atrelada à variável “*img*” (Statella, 2022a) – Figura 5.13.

Figura 5.13 – Visualizando informações da Figura 5.10 no GNU Octave

```

Janela de Comandos
>> whos img
Variables visible from the current scope:

variables in scope: top scope

  Attr   Name      Size      Bytes  Class
  =====
          img      420x368    154560  uint8

Total is 154560 elements using 154560 bytes

```

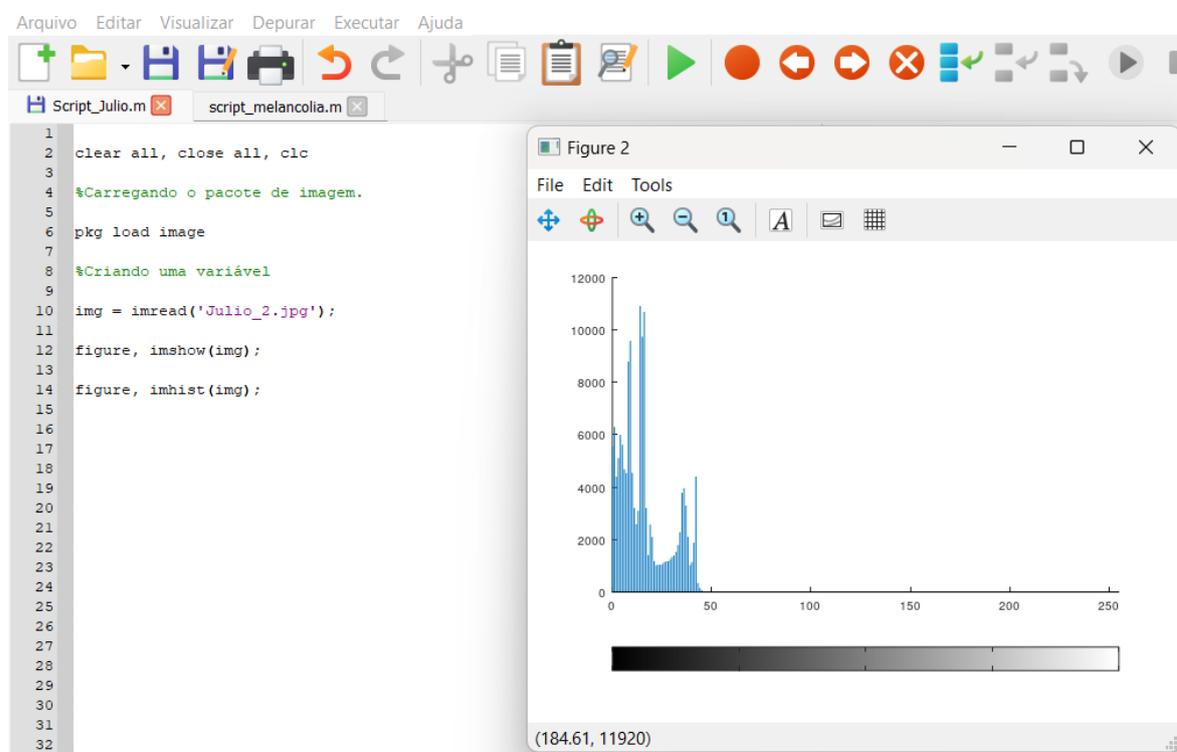
Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A Figura 5.13 ilustra informações da imagem presente na Figura 5.10, tais como nome da variável, tamanho, bytes e classe. A imagem da Figura 5.10 é representada por uma matriz  $420 \times 368$ , isto é, uma matriz de 420 linhas e 368 colunas.

A memória de um computador é uma sequência de bytes, sendo que cada byte é uma sequência de 8 bits (dígitos binários). Desta forma, “toda sequência de  $s$  bytes — ou seja,  $8s$  bits — representa um número natural no intervalo fechado  $[0, \dots, 2^{8s} - 1]$ . Se  $s = 1$ , por exemplo, o intervalo vai de 0 a  $(2^8 - 1)$ , isto é, de 0 a 255” (Feofiloff, 2019, n.p). Na Figura 5.13, a classe da imagem na Figura 5.10 é **uint8**. Isto significa que a matriz que representa a imagem é composta por números inteiros positivos de 8 bits, ou seja, os tons de cinza variam de 0 a 255, onde 0 ( $Y_{min}$ ) representa a cor preta e 255 ( $Y_{max}$ ) a cor branca (Statella, 2022a).

Além das informações que caracterizam a imagem da Figura 5.10, podemos gerar no GNU Octave o histograma da imagem. Para tanto, digitamos no script os comandos **figure** e **imhist(img)** – Figura 5.14.

Figura 5.14 – Histograma da imagem na Figura 5.10



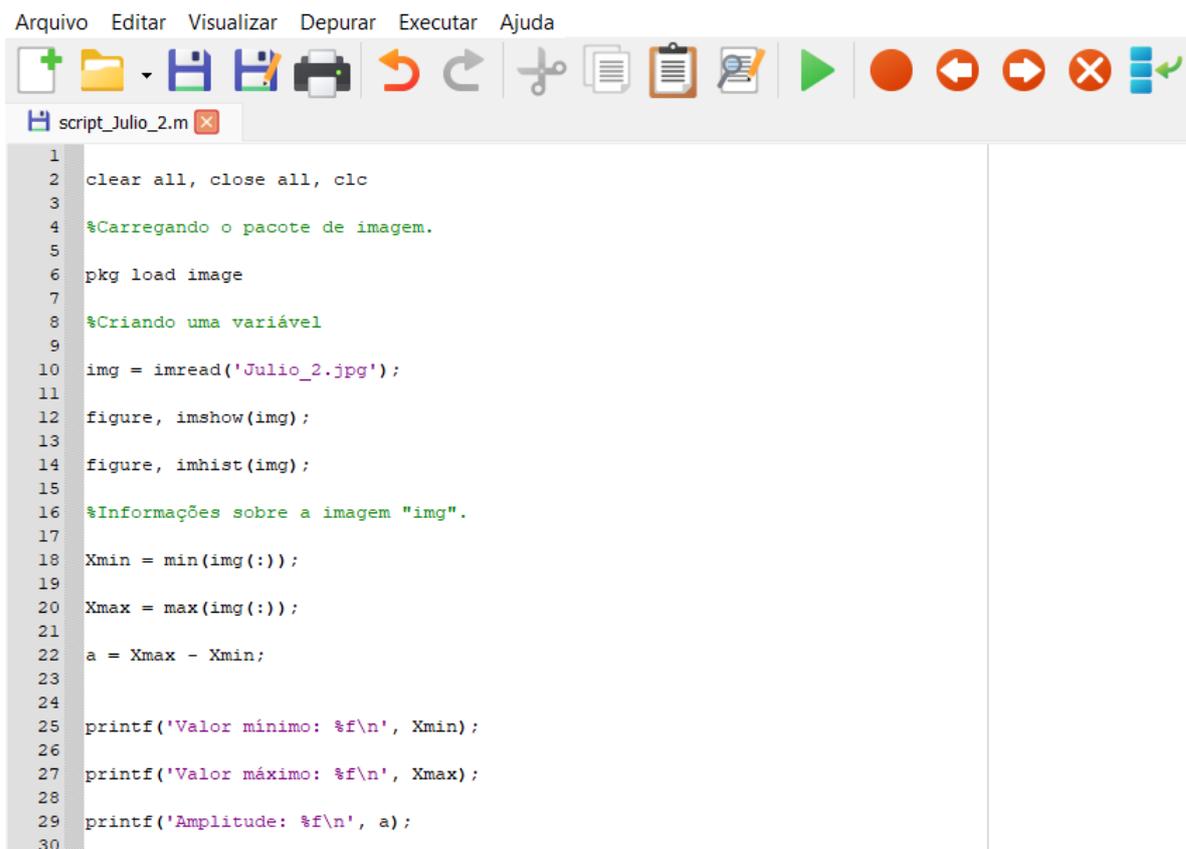
Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

No histograma presente na Figura 5.14, os picos de frequência estão concentrados à esquerda, indicando que há maior frequência de tons escuros na imagem da Figura 5.10. Para realçar esta imagem, precisamos determinar a função de realce linear sem saturação (5.1). As funções do GNU Octave descritas a seguir calculam os valores para estabelecer (5.1).

- ◇ **min(variável(l,c))**: retorna o valor mínimo  $X_{min}$  da imagem em uma escala de 0 a 255.
- ◇ **max(variável(l,c))**: retorna o valor máximo  $X_{max}$  da imagem em uma escala de 0 a 255.
- ◇ **amplitude**: retorna a diferença entre os valores máximo e mínimo.

Para visualizar os valores retornados pelas funções descritas anteriormente, usamos a instrução **printf** (*template, variável*) e `%f` para retornar o valor real das variáveis com precisão simples. Além disso, é válido acrescentar após `%f` o comando “\n” para forçar uma mudança de linha (Octave, 2013). A Figura 5.15 ilustra o script atualizado com as funções e instruções de visualização de dados, enquanto a Figura 5.16 mostra a janela de comandos exibindo os dados retornados pelo GNU Octave.

Figura 5.15 – Script no GNU Octave para realce da imagem na Figura 5.10



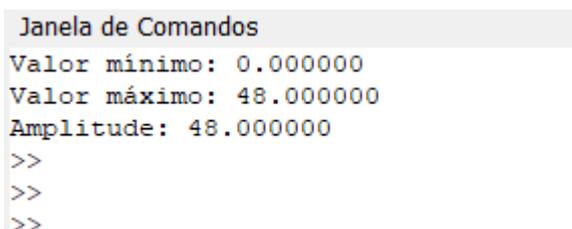
```

Arquivo  Editar  Visualizar  Depurar  Executar  Ajuda
[+] [Folder] [Save] [Run] [Print] [Undo] [Redo] [Cut] [Copy] [Paste] [Find] [Help] [Play] [Stop] [Back] [Forward] [Close] [Refresh]
script_Julio_2.m
1
2 clear all, close all, clc
3
4 %Carregando o pacote de imagem.
5
6 pkg load image
7
8 %Criando uma variável
9
10 img = imread('Julio_2.jpg');
11
12 figure, imshow(img);
13
14 figure, imhist(img);
15
16 %Informações sobre a imagem "img".
17
18 Xmin = min(img(:));
19
20 Xmax = max(img(:));
21
22 a = Xmax - Xmin;
23
24
25 printf('Valor mínimo: %f\n', Xmin);
26
27 printf('Valor máximo: %f\n', Xmax);
28
29 printf('Amplitude: %f\n', a);
30

```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Figura 5.16 – Dados retornados pelo GNU Octave segundo o script para realce da imagem na Figura 5.10



```

Janela de Comandos
Valor mínimo: 0.000000
Valor máximo: 48.000000
Amplitude: 48.000000
>>
>>
>>

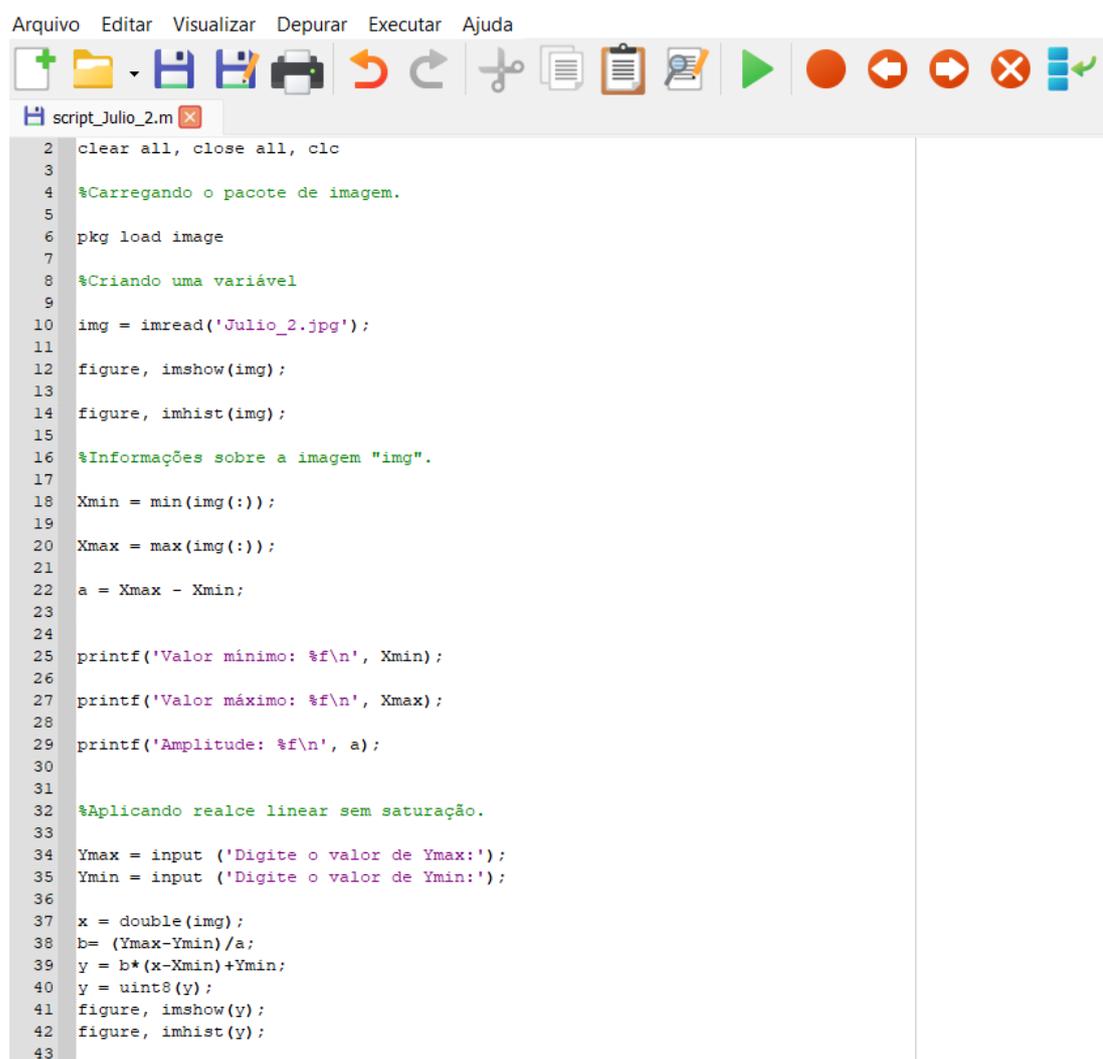
```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Ainda, é interessante criarmos dados de entrada para  $Y_{min}$  e  $Y_{max}$ , estes variando de 0 a 255, que representarão os novos valores de contraste da imagem. Assim, com os valores retornados pelo GNU Octave, podemos utilizar a função (5.1) no script para aplicar o realce

linear sem saturação à imagem. Porém, devemos antes transformar a variável “img” de uint8 para double, criando a variável  $y$ . Em seguida, convertemos  $y$  de double para uint8. Incluindo estes novos comandos, temos o script completo para o realce linear sem saturação – Figura 5.17.

Figura 5.17 – Realce linear sem saturação no GNU Octave: (a) script completo; (b)–(c) janela de comandos para inserção dos valores de  $Y_{max}$  e  $Y_{min}$



```

Arquivo  Editar  Visualizar  Depurar  Executar  Ajuda
script_Julio_2.m
2  clear all, close all, clc
3
4  %Carregando o pacote de imagem.
5
6  pkg load image
7
8  %Criando uma variável
9
10 img = imread('Julio_2.jpg');
11
12 figure, imshow(img);
13
14 figure, imhist(img);
15
16 %Informações sobre a imagem "img".
17
18 Xmin = min(img(:));
19
20 Xmax = max(img(:));
21
22 a = Xmax - Xmin;
23
24
25 printf('Valor mínimo: %f\n', Xmin);
26
27 printf('Valor máximo: %f\n', Xmax);
28
29 printf('Amplitude: %f\n', a);
30
31
32 %Aplicando realce linear sem saturação.
33
34 Ymax = input ('Digite o valor de Ymax:');
35 Ymin = input ('Digite o valor de Ymin:');
36
37 x = double(img);
38 b= (Ymax-Ymin)/a;
39 y = b*(x-Xmin)+Ymin;
40 y = uint8(y);
41 figure, imshow(y);
42 figure, imhist(y);
43

```

(a)

```

Janela de Comandos
Valor mínimo: 0.000000
Valor máximo: 48.000000
Amplitude: 48.000000
Digite o valor de Ymax:

```

(b)

```

Janela de Comandos
Valor mínimo: 0.000000
Valor máximo: 48.000000
Amplitude: 48.000000
Digite o valor de Ymax:235
Digite o valor de Ymin:10
>>

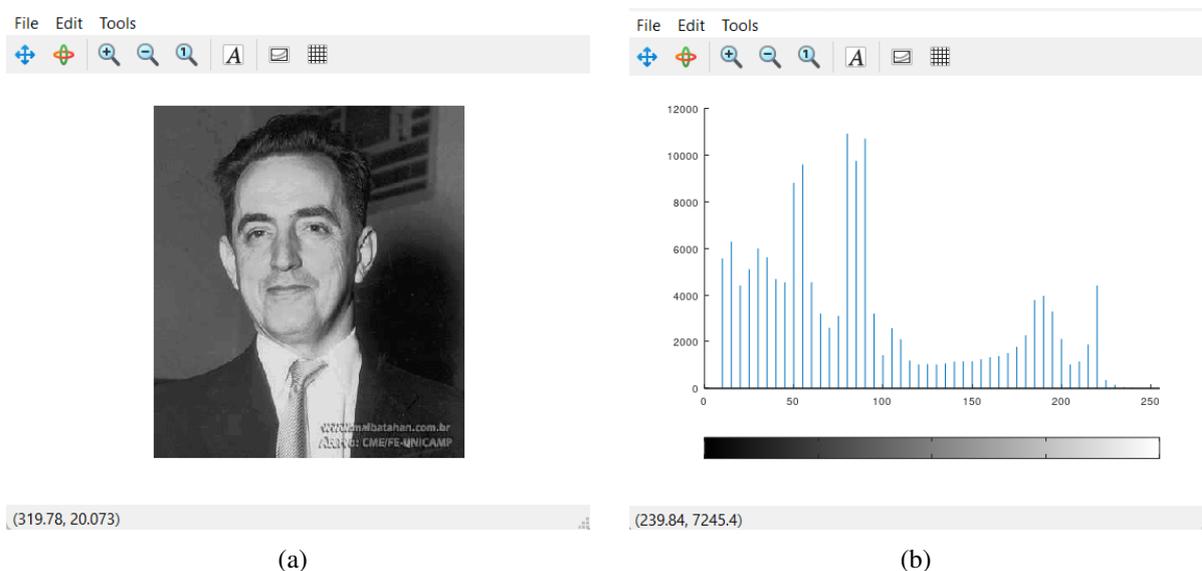
```

(c)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A Figura 5.17(c) mostra que adotamos  $Y_{max} = 235$  e  $Y_{min} = 10$ . Incluindo estes valores no script, obtemos a imagem realçada e seu respectivo histograma – Figura 5.18.

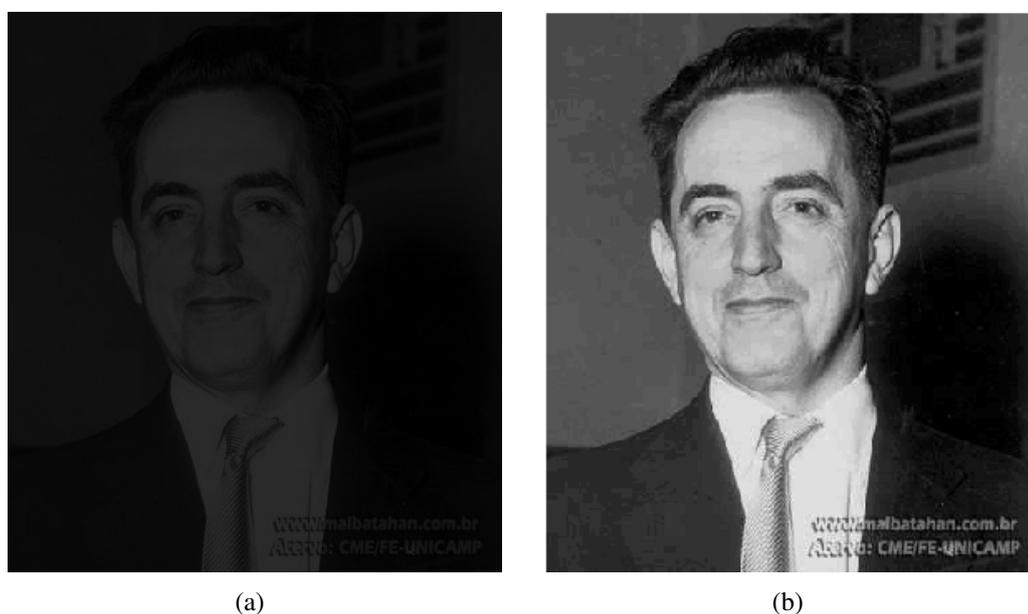
Figura 5.18 – Imagem do professor Júlio Cesar de Mello e Souza: (a) realçada no GNU Octave; (b) histograma do realce



Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

*Finalmente, podemos comparar as imagens original e realçada – Figura 5.19.*

Figura 5.19 – Imagem do professor Júlio Cesar de Mello e Souza: (a) imagem inicial sem realce; (b) imagem após realce linear sem saturação



Fonte: (a) Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p); (b) a autora com o GNU Octave (2023).

**Observação 5.2.** *O script ilustrado na Figura 5.17 permite realçar outras figuras. O professor de matemática da Educação Básica também pode adaptá-lo para explorar outras estratégias de realce de imagens.*

### 5.3 ATIVIDADE 3: DUPLICANDO E TRIPLICANDO CUBOS

3.1 Nível: Ensino Médio.

3.2 Série: 1<sup>a</sup>.

3.3 Número de aulas: 3 (50 minutos cada).

3.4 Competência específica RCEMP: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

3.5 Habilidade específica RCEMP:

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais;

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

3.6 Conteúdos abordados: área total e volume do cubo.

3.7 Objetivos:

- ◇ Calcular a área total e o volume de um cubo;
- ◇ Calcular a medida da aresta do cubo em função da medida do volume;
- ◇ Comparar desigualdades, estimar mínimos e máximos e impor restrições;
- ◇ Programar um script no GNU Octave para solucionar o Problema 5.3.

3.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

3.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; estabelecer outra relação entre os volumes dos cubos.

O Problema 5.3, que aborda a duplicação do cubo assim como o Problema 4.1, e as Questões 5.4 e 5.5 guiam a Atividade 3.

**Problema 5.3.** *Maria Luísa gerencia uma pequena fábrica de cubos de pelúcia, que são vendidos em kits. A Figura 5.20 ilustra um kit com três cubos.*

*Cada kit contém três cubos de tamanhos diferentes: o cubo menor tem volume  $V$ , o cubo médio tem volume  $2V$  (é o dobro do menor) e o cubo maior tem volume  $3V$  (é o triplo do menor).*

*A fábrica de Maria Luísa confecciona cubos de pelúcia com diversas medidas para a aresta,*

Figura 5.20 – Kit com três cubos de pelúcia



Fonte: Adaptado de AliExpress (2022, n.p).

desde que o comprimento mínimo seja de 5 cm e o máximo de 60 cm. A medida da aresta do cubo menor deve ser um número natural.

Considerando que Maria Luísa não possui espaço físico para grandes estoques, apenas para o material de giro, ela depende de uma estimativa da demanda para comprar somente o material necessário à confecção dos cubos de pelúcia. Como está no início das atividades, não tem capital suficiente para investir em tecnologia.

A amiga Luciana, professora de Matemática, prontificou-se a ajudá-la criando no GNU Octave, um software gratuito, um programa que estima quantos metros quadrados de pelúcia e quantos quilogramas de enchimento são necessários para a confecção de um kit de cubos.

**Questão 5.4.** Quantos metros quadrados de pelúcia e quantos quilogramas de enchimento são necessários para a confecção de um kit de cubos definida a aresta do cubo menor? Para o enchimento, consideremos que 1 kg de fibra siliconada tem volume aproximado de  $42.875 \text{ cm}^3$ .

**Questão 5.5.** Qual é o valor máximo  $v_{max}$  para a medida da aresta do cubo menor de tal maneira que a aresta do cubo maior não exceda 60 cm?

**Solução** (Problema 5.3). Sabemos que volume  $V$  e área total  $At$  do cubo são dados, respectivamente, por  $V = a^3$  e  $At = 6.Af$ , onde  $Af = a^2$  é a área da face e  $a$  é a medida da aresta do cubo. Para criar o script no GNU Octave, consideramos as notações a seguir.

- ◇  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  representam, respectivamente, o cubo menor, o cubo médio e o cubo maior.
- ◇  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são as medidas, em centímetros, das arestas de  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , respectivamente.
- ◇  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  representam, respectivamente, o volume de  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , em centímetros cúbicos.
- ◇  $kg_1$ ,  $kg_2$  e  $kg_3$  representam a quantidade de enchimento, em quilogramas, de  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , respectivamente.
- ◇  $At_{c_1}$ ,  $At_{c_2}$  e  $At_{c_3}$  representam, respectivamente, a área total das faces de  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , em metros quadrados.
- ◇  $T_{kg}$  é a quantidade de enchimento do kit, em quilogramas.

◇  $T_A$  é quantidade de pelúcia do kit, em metros quadrados.

O volume do cubo menor é igual a  $V_1 = a_1^3$ , sendo  $a_1 \geq 5$  cm um dado de entrada. Do enunciado do Problema 5.3, temos que  $V_2 = 2V_1$  e  $V_3 = 3V_1$ . Assim, podemos calcular  $a_2$  e  $a_3$  a partir de  $V_2$  e  $V_3$ , respectivamente, ou seja:

$$a_2 = \sqrt[3]{V_2};$$

$$a_3 = \sqrt[3]{V_3} \leq 60 \text{ cm.}$$

Com o valor de  $a_1$  podemos determinar  $V_1$  e  $At_{c_1}$ . Para calcular  $kg_1$ , consideramos que 1 kg de enchimento de fibra siliconada possui volume aproximado de  $42.875 \text{ cm}^3$ . Logo,

$$kg_1 = \frac{V_1}{42845}.$$

Os valores das variáveis atreladas à  $c_2$  e  $c_3$  são calculados de forma análoga. Os totais referentes às quantidades de enchimento e de pelúcia são dados, respectivamente, pelas somas:

$$T_{kg} = kg_1 + kg_2 + kg_3;$$

$$T_A = At_{c_1} + At_{c_2} + At_{c_3}.$$

No GNU Octave, é comum usarmos os comandos **clear** e **clc** no início do script. Estes comandos realizam a limpeza dos dados do ambiente de trabalho e da janela de comandos, respectivamente, e não devem ser utilizados caso criemos scripts distintos para  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e somas totais. Empregamos ainda os seguintes comandos:

- **format bank**: exibe um formato de ponto fixo com dois dígitos à direita da vírgula decimal;
- **input**: cria a entrada para o valor de  $a_1$ ;
- **round**: retorna o número inteiro mais próximo de  $a_1$ , cumprindo a restrição imposta no Problema 5.3.

Podemos organizar as variáveis no script incluindo textos entre parênteses e aspas simples, como por exemplo, ( 'Cubo menor =  $c_1$ ' ). A Figura 5.21 ilustra o script no GNU Octave para determinar as quantidades de pelúcia e de enchimento necessárias à confecção de um kit de cubos.

Clicando no botão **executar**, o GNU Octave solicita o valor de  $a_1$ , único dado de entrada – Figura 5.22. Uma vez fornecido esse dado, todos os outros valores são calculados. A Figura 5.23 ilustra a solução do Problema 5.3 para  $a_1 = 20$  cm.

O valor máximo  $v_{max}$  para a aresta do cubo menor, de modo que a aresta do cubo maior não exceda 60 cm, pode ser estimado por tentativas, uma vez que o script da Figura 5.21 possibilita calcular as arestas dos cubos de volumes  $2V$  e  $3V$  a partir da aresta do cubo menor. Deste modo, constatamos que  $v_{max} = 41$  cm – Figura 5.24.

Figura 5.21 – Script referente às variáveis atreladas a: (a)  $c_1$ ; (b)  $c_2$ ; (c)  $c_3$  e totais

```

2 clear
3 clc
4 format bank
5 ('Cubo menor = c_1')
6
7 ('Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)')
8
9 a_1=input ('Digite a aresta do cubo: ')
10 round(a_1)
11
12 ('Volume de c_1' )
13
14 V_1 = (a_1^3)
15
16 ('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1')
17
18 kg_1 = V_1/(42875)
19
20 ('Área total de c_1 em metros quadrados')
21
22 At_c_1 = 6*[(a_1)^2]/10000

```

(a)

```

25
26
27 ('Cubo médio = c_2')
28
29 ('Volume de c_2' )
30
31 V_2 = 2*V_1
32
33 ('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2')
34
35 kg_2 = V_2/(42875)
36
37 ('Aresta de c_2')
38
39 a_2 = cbrt(V_2)
40
41 ('Área total de c_2 em metros quadrados')
42
43 At_c_2 = 6*[(a_2)^2]/10000
44
45

```

(b)

```

47
48 ('Cubo maior = c_3')
49
50 ('Volume de c_3' )
51
52 V_3 = 3*V_1
53
54 ('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3')
55
56 kg_3 = V_3/(42875)
57
58 ('Aresta de c_3')
59
60 a_3 = cbrt(V_3)
61
62 ('Área total de c_3 em metros quadrados')
63
64 At_c_3 = 6*[(a_3)^2]/10000
65
66
67 ('TOTAL do Kit')
68
69 T_kg = kg_1 + kg_2 + kg_3
70
71 T_A = At_c_1 + At_c_2 + At_c_3
72

```

(c)

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

Figura 5.22 – Dado de entrada após a execução do script

```

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: |

```

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

A partir da estimativa  $a_1 = v_{max} = 41$  cm, podemos impor restrições usando os comandos **if** (se), **elseif** (senão), **else** (outro) e **endif** (fim). Com a incorporação das restrições, organizamos um novo scrip, ilustrado na Figura 5.25. Atribuindo para  $a_1$  valores abaixo ou acima daqueles estabelecidos nas restrições, o programa devolve, respectivamente, as mensagens “Este valor está abaixo do permitido” e “Este valor está acima do permitido” – Figura 5.26.

Figura 5.23 – Dados calculados atribuindo-se  $a_1 = 20\text{ cm}$ 

```

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 20
a_1 = 20.00
ans = 20.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 8000.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 0.19
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 0.24
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 16000.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 0.37
ans = Aresta de c_2
a_2 = 25.20
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 0.38
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 24000.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 0.56
ans = Aresta de c_3
a_3 = 28.84
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 0.50
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 1.12
T_A = 1.12
>> |

```

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

Figura 5.24 – Estimativas para  $v_{max}$ : (a)  $a_1 = 41\text{ cm}$ ; (b)  $a_1 = 42\text{ cm}$ 

<pre> Janela de Comandos ans = Cubo menor = c_1 ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm) Digite a aresta do cubo: 41 a_1 = 41.00 ans = 41.00 ans = Volume de c_1 V_1 = 68921.00 ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1 kg_1 = 1.61 ans = Área total de c_1 em metros quadrados At_c_1 = 1.01 ans = Cubo médio = c_2 ans = Volume de c_2 V_2 = 137842.00 ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2 kg_2 = 3.21 ans = Aresta de c_2 a_2 = 51.66 ans = Área total de c_2 em metros quadrados At_c_2 = 1.60 ans = Cubo maior = c_3 ans = Volume de c_3 V_3 = 206763.00 ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3 kg_3 = 4.82 ans = Aresta de c_3 a_3 = 59.13 ans = Área total de c_3 em metros quadrados At_c_3 = 2.10 ans = TOTAL do Kit T_kg = 9.64 T_A = 4.71 &gt;&gt; </pre>	<pre> Janela de Comandos ans = Cubo menor = c_1 ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm) Digite a aresta do cubo: 42 a_1 = 42.00 ans = 42.00 ans = Volume de c_1 V_1 = 74088.00 ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1 kg_1 = 1.73 ans = Área total de c_1 em metros quadrados At_c_1 = 1.06 ans = Cubo médio = c_2 ans = Volume de c_2 V_2 = 148176.00 ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2 kg_2 = 3.46 ans = Aresta de c_2 a_2 = 52.92 ans = Área total de c_2 em metros quadrados At_c_2 = 1.68 ans = Cubo maior = c_3 ans = Volume de c_3 V_3 = 222264.00 ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3 kg_3 = 5.18 ans = Aresta de c_3 a_3 = 60.57 ans = Área total de c_3 em metros quadrados At_c_3 = 2.20 ans = TOTAL do Kit T_kg = 10.37 T_A = 4.94 &gt;&gt; </pre>
---	--

(a)

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Figura 5.25 – Script contendo as restrições para o tamanho das arestas dos cubos do kit

```

1 clear
2 clc
3 format bank
4 ('Cubo menor = c_1')
5 ('Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)')
6 a_1=input ("Digite a aresta do cubo: ")
7 if (a_1 < 5)
8     disp("Este valor está abaixo do permitido.");
9 elseif (a_1 > 41 )
10    disp("Este valor está acima do permitido. ");
11 else
12    round(a_1)
13    ('Volume de c_1' )
14    V_1 = (a_1^3)
15    ('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1')
16    kg_1 = V_1/(42875)
17    ('Área total de c_1 em metros quadrados')
18    At_c_1 = 6*[(a_1)^2]/10000
19    ('Cubo médio = c_2')
20    ('Volume de c_2' )
21    V_2 = 2*V_1
22    ('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2')
23    kg_2 = V_2/(42875)
24    ('Aresta de c_2')
25    a_2 = cbirt(V_2)
26    ('Área total de c_2 em metros quadrados')
27    At_c_2 = 6*[(a_2)^2]/10000
28    ('Cubo maior = c_3')
29    ('Volume de c_3' )
30    V_3 = 3*V_1
31    ('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3')
32    kg_3 = V_3/(42875)
33    ('Aresta de c_3')
34    a_3 = cbirt(V_3)
35    ('Área total de c_3 em metros quadrados')
36    At_c_3 = 6*[(a_3)^2]/10000
37    ('TOTAL do Kit')
38    T_kg = kg_1 + kg_2 + kg_3
39    T_A = At_c_1 + At_c_2 + At_c_3
40    endif

```

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

Figura 5.26 – Mensagens retornadas pelo GNU Octave para valores de  $a_1$  que violem as restrições: (a)  $a_1 < 5\text{ cm}$ ; (b)  $a_1 > 41\text{ cm}$

```

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 1.5
Este valor está abaixo do permitido.
>>

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: -1
Este valor está abaixo do permitido.
>>

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 4.6
Este valor está abaixo do permitido.

```

(a)

```

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 41.4
Este valor está acima do permitido.
>>

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 41.5
Este valor está acima do permitido.
>>

Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 60
Este valor está acima do permitido.
>>

```

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Incorporadas as restrições, a Figura 5.27 ilustra a execução do script para alguns valores de  $a_1$ .

Figura 5.27 – Execução do script para: (a)  $a_1 = 5$  cm; (b)  $a_1 = 41$  cm; (c)  $a_1 = 25$  cm

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 5
a_1 = 5.00
ans = 5.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 125.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 0.00
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 0.01
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 250.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 0.01
ans = Aresta de c_2
a_2 = 6.30
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 0.02
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 375.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 0.01
ans = Aresta de c_3
a_3 = 7.21
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 0.03
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 0.02
T_A = 0.07
>>
```

(a)

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 41
a_1 = 41.00
ans = 41.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 68921.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 1.61
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 1.01
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 137842.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 3.21
ans = Aresta de c_2
a_2 = 51.66
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 1.60
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 206763.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 4.82
ans = Aresta de c_3
a_3 = 59.13
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 2.10
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 9.64
T_A = 4.71
>>
```

(b)

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 25
a_1 = 25.00
ans = 25.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 15625.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 0.36
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 0.38
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 31250.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 0.73
ans = Aresta de c_2
a_2 = 31.50
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 0.60
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 46875.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 1.09
ans = Aresta de c_3
a_3 = 36.06
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 0.78
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 2.19
T_A = 1.75
>>
```

(c)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Por fim, o modelo de script organizado para solucionar o Problema 5.3 possibilita que Maria Luísa estime, com rapidez e precisão, a quantidade dos materiais necessários à confecção dos kits de cubos, melhorando desta maneira a logística de sua empresa.

**Observação 5.3.** *O professor de matemática da Educação Básica pode adaptar o script da Figura 5.25 para explorar outras relações entre os volumes dos cubos.*

## 5.4 ATIVIDADE 4: RELEITURA DE IMAGENS

Uma releitura é a ação de interpretar novamente, acrescentando algo novo e original. A releitura de uma obra é a criação de uma nova obra, ressignificando a obra anterior. Na ressignificação, o autor da nova obra confere um toque pessoal à obra anterior.

De acordo com Daniel (2021, p. 16): “Fazer uma releitura de uma obra é expor a sua interpretação, sem fugir da ideia original. É recriar com novos elementos, mas que seja possível identificar que a obra original foi utilizada como inspiração”.

Além disso, a releitura pode ser usada como um *feedback* ao autor da obra, uma forma de elogio ou crítica através da reinterpretação da obra original (Daniel, 2021).

### 5.4.1 RELEITURA DO PÔR DO SOL EM MORRETES–PR

A releitura do “Pôr do Sol em Morretes” foi recriada no GeoGebra a partir de uma fotografia – Figura 5.28 – feita pela autora nos fundos da casa onde reside em Morretes–PR.

Figura 5.28 – Pôr do Sol em Morretes–PR



Fonte: A autora.

Destacamos a seguir o protocolo utilizado para construir a releitura da obra no GeoGebra.

1. Enquadrados a arte em um retângulo, para simular uma moldura, e definimos essa área com fundo neutro em tom azul claro.
2. Usamos a parábola

$$0,8y^2 + 10x - 12y = 200,$$

com reta focal paralela ao eixo  $Ox$  e diretriz à direita do foco, para desenhar o arco presente no céu da Figura 5.28.

### 3. Empregamos as parábolas

$$(x + 70)^2 = -4(y - 25), \quad (5.2)$$

$$(x + 62)^2 = -\frac{1}{4}(y - 20), \quad (5.3)$$

$$(x + 56)^2 = -2(y - 15), \quad (5.4)$$

$$(x + 48)^2 = -8(y - 5), \quad (5.5)$$

com retas focais paralelas ao eixo  $Oy$  e diretrizes acima do foco, para desenhar os picos ou morros da Figura 5.28.

4. Delimitamos as parábolas (5.2) a (5.5) com a função  $SE$  do GeoGebra, para que as mesmas simulem as deformações dos picos (usamos as interseções para termos ideia dos pontos de delimitação). Para tanto, reescrevemos as equações (5.2) a (5.5) como funções, ou seja,

$$g(x) = -\frac{(x + 70)^2}{4} + 25,$$

$$h(x) = -4(x + 62)^2 + 20,$$

$$q(x) = -\frac{(x + 56)^2}{2} + 15,$$

$$s(x) = -\frac{(x + 48)^2}{8} + 5.$$

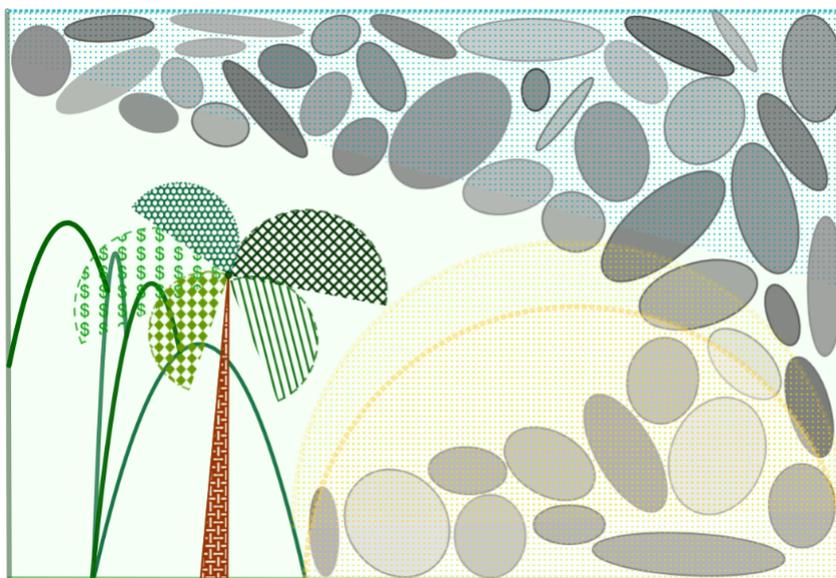
5. Utilizamos elipses de tamanhos variados em tom cinza para representar as nuvens da Figura 5.28.
6. Acrescentamos um trapézio na parte superior do retângulo moldura e preenchê-lo com efeito pontilhado em tom de azul, para simular o céu da Figura 5.28.
7. Empregamos um triângulo em cor marrom e efeito tecelado para representar o tronco do coqueiro da Figura 5.28.
8. Usamos cinco semicírculos com efeitos variados em tons de verde para simbolizar as folhas do coqueiro da Figura 5.28.
9. Posicionamos dois semicírculos, com efeito pontilhado em tons de amarelo, na parte inferior direita da moldura com o intuito de iluminar a arte, imitando os raios de sol da Figura 5.28.

A Figura 5.29, também presente no link

<https://www.geogebra.org/m/pktmm78t>,

ilustra a releitura do “Pôr do Sol em Morretes”, construída segundo as etapas descritas anteriormente.

Figura 5.29 – Releitura do “Pôr do Sol em Morretes”



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

#### 5.4.2 RELEITURA DO MUSEU OSCAR NIEMEYER (MON)

O prédio que hoje abriga em Curitiba–PR o Museu Oscar Niemeyer (MON) – Figura 5.30 – foi projetado em 1967, era inicialmente chamado *Presidente Humberto Castelo Branco* e sediava em 1970 algumas secretarias do Estado do Paraná (Paraná, 2023).

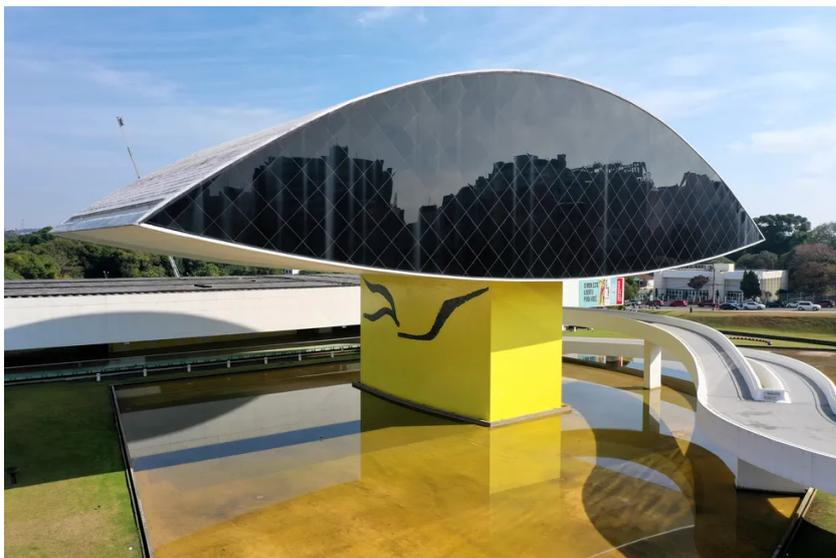
Ainda, segundo Paraná (2023, n.p):

No ano 2000, começaram as negociações para a transformação do espaço num museu de arte, na gestão do então governador Jaime Lerner. Em 2001, 23 anos depois de sua inauguração, as autoridades do Estado decidiram transformar a generosa área em museu e, em 22 de novembro de 2002, o edifício deixou de ser sede de secretarias de Estado para se transformar no, inicialmente batizado, Novo Museu.

Com a construção de um anexo – Figura 5.31, popularmente chamado de “Olho” devido ao seu formato, e de outras adaptações, o Novo Museu deu lugar ao MON. A autoria das adaptações e do anexo é do reconhecido arquiteto Oscar Niemeyer.

Oscar Niemeyer, um dos maiores nomes da arquitetura moderna internacional, nasceu no Rio de Janeiro, em 15 de dezembro de 1907 e morreu em 5 de dezembro de 2012, aos 104 anos. Tem ao redor do mundo mais de 600 projetos arquitetônicos e é um dos representantes mais reconhecidos da arquitetura moderna. Foi o arquiteto designado para dar vida ao anexo do Olho e tornar o MON uma obra de arte por si só (Paraná, 2023, n.p).

Figura 5.30 – Museu Oscar Niemeyer



Fonte: Globo (2023, n.p).

Figura 5.31 – MON e o arquiteto Oscar Niemeyer



Fonte: Paraná (2023, n.p).

O MON é considerado atualmente o maior museu da América Latina, com aproximadamente 35 mil metros quadrados de área construída e cerca de 17 mil metros quadrados de área expositiva (Paraná, 2023).

Depois desta breve explanação, propomos uma atividade sobre a releitura do MON. O Problema 5.4, que aborda a construção de parábolas e hipérbolas assim como o Problema 4.1, e a Questão 5.6 conduzem a Atividade 4.

4.1 Nível: Ensino Médio.

4.2 Série: 3<sup>a</sup>.

4.3 Número de aulas: 10 (50 minutos cada).

- 4.4 Competência específica RCEMP: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
- 4.5 Habilidade específica RCEMP:  
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas, provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
- 4.6 Conteúdos abordados: prismas; seções cônicas.
- 4.7 Objetivos: construir parábolas, hipérbolas, prismas e prismóides no GeoGebra.
- 4.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.
- 4.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; releitura de outras obras.

**Problema 5.4.** *Em uma aula de artes, o professor propõe aos estudantes que façam uma releitura de obras criadas por brasileiros eminentes. Mariana, que é apaixonada por arquitetura, decide fazer uma releitura do MON para homenagear Oscar Niemeyer.*

**Questão 5.6.** *Como fazer uma releitura do MON, ilustrado na Figura 5.30, usando o GeoGebra?*

**Solução.** *Descrevemos a seguir as etapas que Mariana deve seguir para fazer a releitura do MON no GeoGebra. Disponibilizamos a releitura no link*

*<<https://www.geogebra.org/classic/yjpched>>.*

1. *No sistema  $xOy$  (2D), construir a parábola e a hipérbole de equações, respectivamente, iguais a:*

$$\begin{aligned}x^2 + 4y &= 12; \\ 13,09x^2 - 50,91y^2 &= -41,64,\end{aligned}$$

*de forma que um ramo da hipérbole intersecte a parábola criando o formato do “Olho”.*

2. *No sistema  $xOyOz$  (3D), construir as parábolas parametrizadas<sup>1</sup>*

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : X &= (0, 3, 3) + (-2t, -t^2, 0), \\ \mathcal{R} : X &= (0, 3, 6) + (-2t, -t^2, 0),\end{aligned}$$

<sup>1</sup> Ao criarmos as parábolas  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{R}$  e as hipérbolas  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{S}$ , com projeção dos focos e vértices paralelos ao eixo  $Ox$ , o GeoGebra retornou as equações de forma parametrizada.

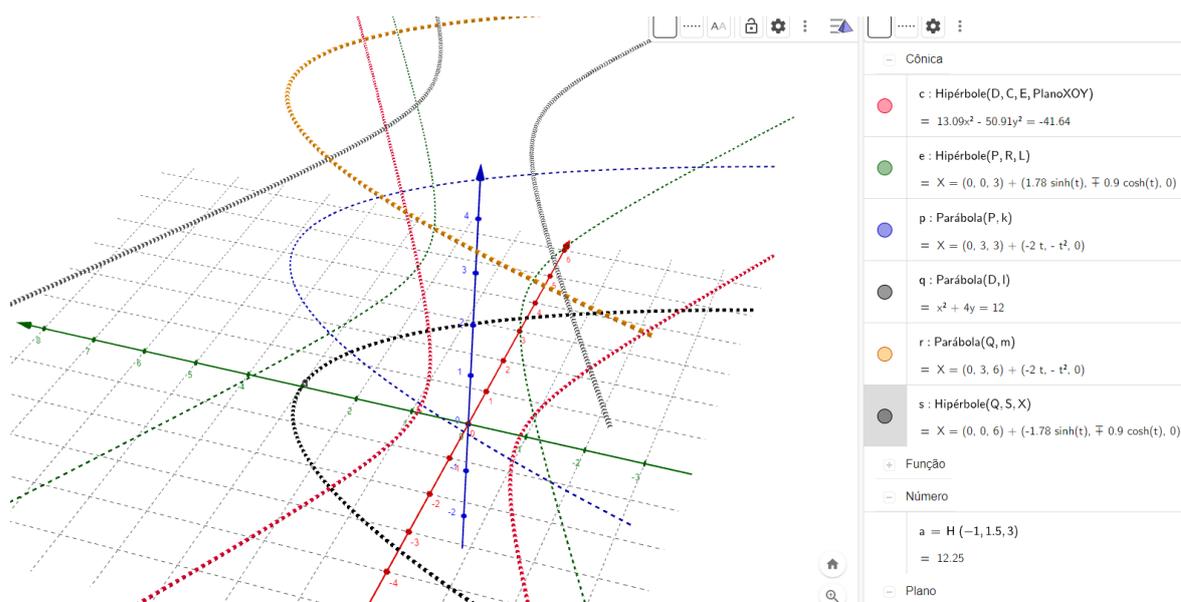
e as hipérboles parametrizadas

$$\mathcal{E} : X = (0, 0, 3) + (1, 78\sinh(t), \mp 0, 9\cosh(t), 0),$$

$$\mathcal{S} : X = (0, 0, 6) + (-1, 78\sinh(t), \mp 0, 9\cosh(t), 0).$$

A Figura 5.32 ilustra a construção das parábolas e hipérboles parametrizadas.

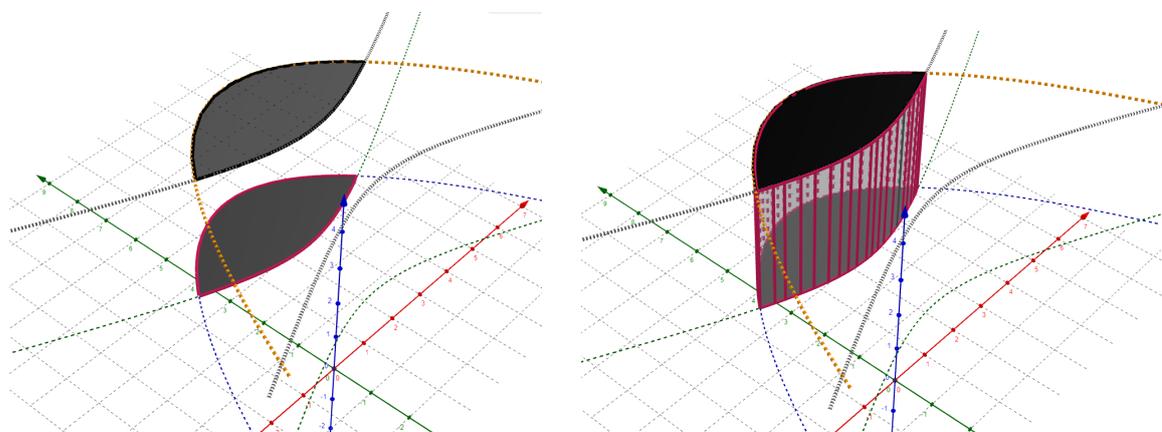
Figura 5.32 – Parábolas e hipérboles parametrizadas



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

3. Destacar e colorir duas regiões: a superfície definida pelas interseções de  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{P}$  e a superfície definida pelas interseções de  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{R}$ . Com essas duas superfícies, paralelas e equivalentes, criar um prismóide que imita o “Olho”, como ilustra a Figura 5.33.

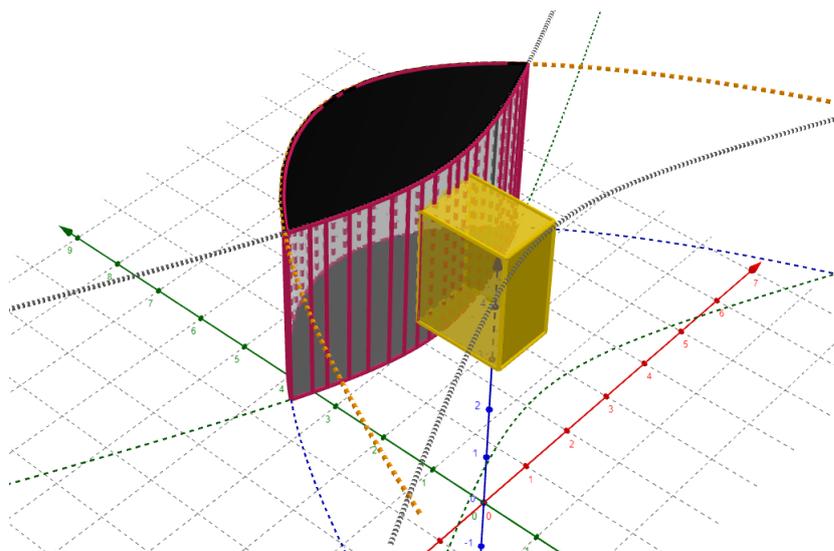
Figura 5.33 – Prismóide que imita o “Olho”



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

4. Construir o paralelepípedo reto-retângulo que representa a base do “Olho” – Figura 5.34.

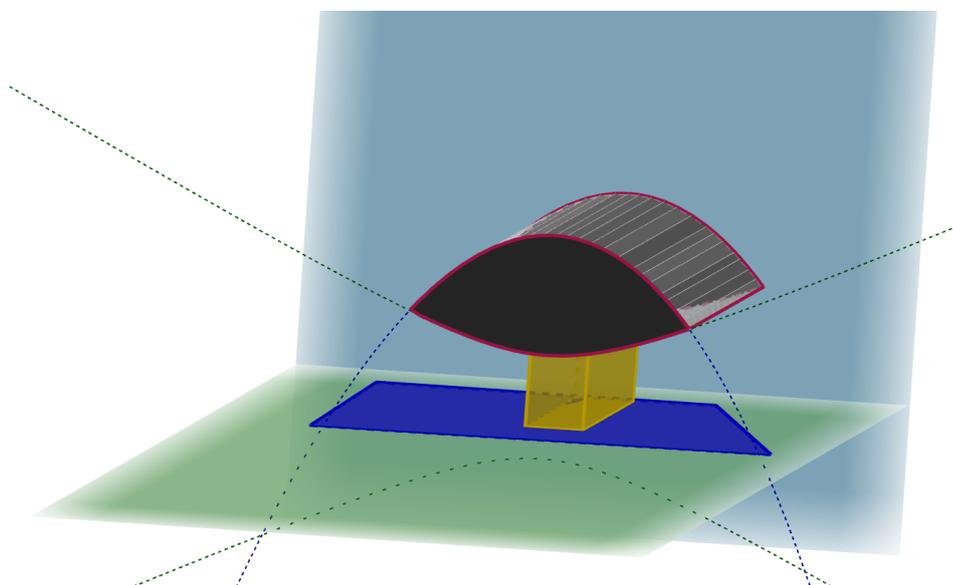
Figura 5.34 – Paralelepípedo reto-retângulo que imita a base do “Olho”



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

5. Alterar a posição dos eixos  $Oy$  e  $Oz$ .
6. Destacar um plano para representar o chão e outro para representar o plano de fundo, assim como uma região poligonal azulada com aplicação de extrusão para simular o espelho d'água – Figura 5.35.

Figura 5.35 – Planos e espelho d'água



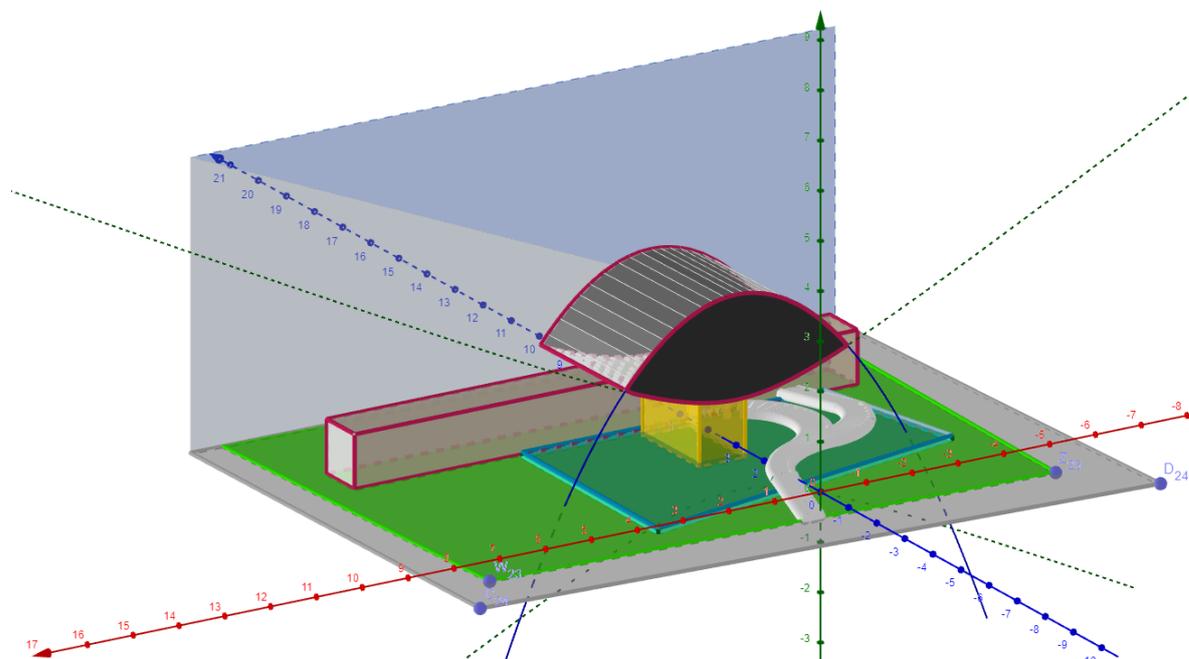
Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

7. Construir um paralelepípedo reto-retângulo para representar o prédio mais antigo, que fica atrás do anexo do “Olho”.
8. Empregar segmentos de reta, arcos circulares e novos planos para originar a passarela bifurcada acima do espelho d'água, que permite acessar tanto o anexo do “Olho” quanto

o prédio mais antigo.

9. Construir uma região poligonal esverdeada e outra azulada que representam, respectivamente, o gramado e o céu. A Figura 5.36 ilustra o resultado final da releitura.

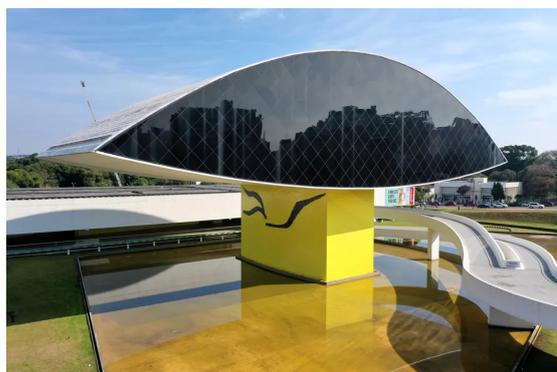
Figura 5.36 – Uma releitura do MON



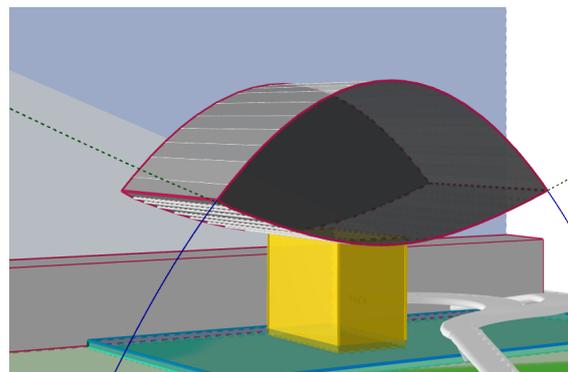
Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Finalizada a releitura, podemos compará-la com a Figura 5.30. A Figura 5.37 ilustra a comparação.

Figura 5.37 – (a) MON; (b) releitura do MON



(a)



(b)

Fonte: (a) Paraná (2023, n.p); (b) a autora com o GeoGebra (2022a).

**Observação 5.4.** O professor de matemática da Educação Básica pode iniciar com releituras 2D, empregando polígonos e círculos. Para releituras mais complexas, como a do MON, sugerimos a Torre Eiffel – Figura 5.38. Para essa releitura, indicamos a leitura do material de Martínez (2023) e de Ganfornina (2023).

Figura 5.38 – Torre Eiffel



Fonte: GetYourGuide (2023, n.p).

## 6 CONCLUSÃO

A partir dos problemas presentes nos contos de duas obras de Malba Tahan, selecionamos neste trabalho três problemas norteadores: “O problema dos 35 camelos”, “O problema dos quadrados mágicos” e “O problema da duplicação do cubo”. Cada um destes problemas foi interpretado com o auxílio dos softwares GeoGebra e/ou GNU Octave, os quais possibilitaram visualizar e manipular dados de forma dinâmica. Ainda, estruturamos quatro problemas a partir dos problemas norteadores, e organizamos sequências didáticas para o professor de matemática da Educação Básica explorá-los em sala de aula.

Com relação às dificuldades encontradas durante a elaboração deste trabalho, destacamos duas: a primeira diz respeito à escassez de referências consistentes sobre os tipos de quadrados mágicos; a segunda refere-se ao manuseio do GNU Octave, que algumas vezes apresentou erros no carregamento dos pacotes que estendem a funcionalidade do software. Ressaltamos que a versão online do GNU Octave não permite alteração dos scripts, assim como a importância do professor de matemática da Educação Básica dominar conceitos de aritmética de ponto flutuante para usar softwares matemáticos e interpretar adequadamente os resultados obtidos com o emprego dos mesmos.

A escolha das obras de Malba Tahan se deve à forma divertida e envolvente com que o ensino da matemática é retratado em seus contos. É notável a contribuição deste trabalho na vida desta autora: “ – posso dizer que houve grande contribuição à minha vida profissional; há uma professora antes e outra depois deste trabalho, sendo a segunda mais experiente e destemida, que agora tem noção da sua capacidade e que, apesar das dificuldades, tais como aprender a manipular o GeoGebra 3D e o GNU Octave, manteve-se firme nos seus objetivos e concluiu o trabalho de pesquisa”.

O presente trabalho pode ser aperfeiçoado, principalmente na estruturação dos Problemas 5.2 e 5.4. Nestes, o professor de matemática da Educação Básica pode explorar outras estratégias de realce de imagens e propor releituras mais complexas no GeoGebra, como por exemplo, a releitura de um reator de usina nuclear utilizando um hiperbolóide de uma folha.

Esperamos que este trabalho seja proveitoso aos professores de matemática da Educação Básica, por utilizar os softwares matemáticos GeoGebra e GNU Octave, e aos estudantes e professores dos cursos de Licenciatura em Matemática e do PROFMAT, por introduzir uma interpretação dinâmica dos problemas selecionados/construídos.

## REFERÊNCIAS

- ALEGRÍA, P. La magia de los cuadrados mágicos. **Sigma**, n. 34, p. 2–3, 2019. 44
- ALIEXPRESS. **Cubo pelúcia**. S.l.: AliExpress, 2022. Disponível em: <[https://pt.aliexpress.com/item/1005005319589379.html?spm=a2g0o.productlist.main.1.6e19380fQ6qg7u&algo\\_pvid=663e16a8-d366-4127-acba-20a7ffe3fa98&aem\\_p4p\\_detail=20230730035242378037895459120014022588&algo\\_exp\\_id=663e16a8-d366-4127-acba-20a7ffe3fa98-0&pdp\\_npi=3%40dis%21BRL%21102.10%2151.05%21%21%2120.50%21%21%402101d68d16907143625006157e8abc%2112000032614831116%21sea%21BR%210&curPageLogUid=oTBGQNjlrSOA&search\\_p4p\\_id=20230730035242378037895459120014022588\\_1](https://pt.aliexpress.com/item/1005005319589379.html?spm=a2g0o.productlist.main.1.6e19380fQ6qg7u&algo_pvid=663e16a8-d366-4127-acba-20a7ffe3fa98&aem_p4p_detail=20230730035242378037895459120014022588&algo_exp_id=663e16a8-d366-4127-acba-20a7ffe3fa98-0&pdp_npi=3%40dis%21BRL%21102.10%2151.05%21%21%2120.50%21%21%402101d68d16907143625006157e8abc%2112000032614831116%21sea%21BR%210&curPageLogUid=oTBGQNjlrSOA&search_p4p_id=20230730035242378037895459120014022588_1)>. Acesso em: 29 jul. 2023. 103
- BEZERRA, L. H.; GIMENEZ, C. S. C.; BURIN, N. E. **Problemas de sistematização e representação**. Florianópolis: UFSC/ EAD/ CED/CFM, 2009. 42, 43
- BRASIL. **Lei no. 12.835, de 26 de junho de 2013**. Brasília: Casa Civil da Presidência da República, 2013. Disponível em: <[https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2011-2014/2013/lei/l12835.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2013/lei/l12835.htm)>. Acesso em: 19 jul. 2023. 16
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 19 nov. 2022. 22, 23
- BRASIL. **ENEM**. Brasília: INEP/ MEC, 2022. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>>. Acesso em: 11 dez. 2022. 23, 24
- CATARINA, A. S. **Processamento de imagens digitais: histogramas e suas transformações**. Cascavel: Unioeste, 2023. Disponível em: <<https://www.inf.unioeste.br/~adair/PID/Notas%20Aula/Processamento%20de%20Imagens%20Digitais%20-%20Histogramas.pdf>>. Acesso em: 26 ago. 2023. 92
- CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. São Paulo: Livraria da Física, 2012. v. 1. 541 p. 73
- COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. Toronto: John Wiley e Sons, 1969. 470 p. 78
- COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994. 285 p. 16
- CULTURAL, P. G.; ALMEIDA, C. G. de; PAULO, G. do Estado de S. **Guilherme: vida e obra**. São Paulo: Governo do Estado de São Paulo, 2023. Disponível em: <<https://www.casaguilhermedealmeida.org.br/casa-guilherme-de-almeida/>>. Acesso em: 25 ago. 2023. 65
- DANIEL, B. **Aprendendo geometria por meio de releituras de obras de arte**. 35 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, SC, 2021. 109
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017. 380 p. 54, 69, 71, 74

DIAS, G. **Poemas - amor: eu sou uma hipérbole**. S.l.: Luso Poemas, 2006. Disponível em: <<https://www.luso-poemas.net/modules/news/article.php?storyid=6805>>. Acesso em: 27 maio 2023. 66

DOMINGUES, H. H. Seções cônicas: história e ensino. **Revista de Educação Matemática**, v. 6, n. 4, p. 43–49, 1998. 67, 73

EATON, J. W. **GNU Octave: sobre, história**. S.l.: Oitava GNU, 2023. Disponível em: <[https://octave-org.translate.google/about?\\_x\\_tr\\_sl=en&\\_x\\_tr\\_tl=pt&\\_x\\_tr\\_hl=pt-BR&\\_x\\_tr\\_pto=sc](https://octave-org.translate.google/about?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR&_x_tr_pto=sc)>. Acesso em: 12 ago. 2023. 21, 26, 37, 38, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 88, 89, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 105, 106, 107, 108

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. 843 p. 67, 72, 74

FEOFILOFF, P. **Bytes, números e caracteres**. São Paulo: IME/USP, 2019. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/bytes.html>>. Acesso em: 26 ago. 2023. 98

FILHO, M. R. **Júlio César de Mello e Souza - o Malba Tahan: o homem que calculava, a vida e o legado**. 71 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, Minas Gerais, 2013. 24

GALVÃO, M. C. C. **Ensino e aprendizagem da matemática na Educação Básica utilizando tecnologias e desenvolvendo pensamento computacional: abordagem com Scratch, Portugal, Python e GeoGebra**. 164 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2021. 25

GANFORNINA, R. M. F. **Modelado 3D con GeoGebra**. S.l.: GeoGebra, 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/kMNREEg4>>. Acesso em: 11 nov. 2023. 116

GEOGEBRA. **Baixar aplicativos GeoGebra**. S.l.: GeoGebra, 2022a. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/download?lang=pt>>. Acesso em: 04 nov. 2022. 26, 35, 51, 68, 69, 70, 71, 72, 75, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 111, 114, 115, 116

GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra?** S.l.: GeoGebra, 2022b. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 04 nov. 2022. 21

GETYOURGUIDE. **Paris: ingresso para a Torre Eiffel e passeio de barco no Sena**. Zurique e Berlim: GetYourGuide, 2023. Disponível em: <<https://www.getyourguide.com.br/paris-116/paris-acesso-a-torre-eiffel-e-cruzeiro-no-rio-sena-t45877/>>. Acesso em: 19 ago. 2023. 117

GLOBO. **Museu Oscar Niemeyer abrirá nos feriados de abril; veja programação**. S.l.: G1 Globo, 2023. Disponível em: <<https://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2022/04/15/museu-oscar-niemeyer-abrira-nos-feriados-de-abril-veja-programacao.ghtml>>. Acesso em: 19 ago. 2023. 112, 116

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Processamento de imagens digitais**. Brasil: Edgard Blücher, 2000. 501 p. 90

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. 2a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 171 p. 30, 32, 33

HEFEZ, A. **Iniciação à aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 127 p. 30

HUMES, A. F. P. de C. et al. **Noções de cálculo numérico**. São Paulo: McGraw-Hill, 1984. 201 p. 60

- INC., T. **Experimente o SketchUp**. S.l.: SketchUp, 2022. Disponível em: <<https://www.sketchup.com/pt-BR/try-sketchup>>. Acesso em: 09 jul. 2023. 73
- KOZAKEVICH, D. N.; BEAN, S. E. P. C. **Álgebra linear I**. Florianópolis: UFSC/EAD/-CED/CFM, 2008. Disponível em: <[http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/7105/Mtm\\_AlgebLinearI.pdf](http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/7105/Mtm_AlgebLinearI.pdf)>. Acesso em: 11 nov. 2023. 58
- LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 297 p. 34
- LONG, P. J. G. **Introduction to Octave**. Cambridge - EUA: Cambridge University, 2023. Disponível em: <<http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/programs/octave/tutorial/>>. Acesso em: 10 set. 2023. 62
- MARQUES, I. M. W. **Quadrado mágico**. S.l.: GeoGebra, 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/p7rn5tnf>>. Acesso em: 10 abr. 2023. 50
- MARTÍNEZ, A. **Taller: Cómo utilizar GeoGebra para realizar un paseo matemático**. Andalucía - Espanha: Instituto GeoGebra de Andalucía - SAEM THALES, 2023. Disponível em: <<https://thales.cica.es/geogebra/sites/thales.cica.es/geogebra/files/t6.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2023. 116
- MELO, M. F. de; MACHADO, J. S. Quadrados mágicos: um passeio pela história e pela álgebra linear. **Ciência e Natura**, v. 40, n. 54, p. 17, 2018. 42, 43, 44
- MENESES, P. R.; ALMEIDA, T. de. **Introdução ao processamento de imagens de sensoriamento remoto**. 2012. Disponível em: <[https://www.academia.edu/40388021/INTRODU%C3%87%C3%83O\\_AO\\_PROCESSAMENTO\\_DE\\_IMAGENS\\_DE\\_SENSORIAMENTO\\_REMOTO](https://www.academia.edu/40388021/INTRODU%C3%87%C3%83O_AO_PROCESSAMENTO_DE_IMAGENS_DE_SENSORIAMENTO_REMOTO)>. Acesso em: 26 ago. 2023. 93
- NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 442 p. 68
- NETO, J. R. D. S. **A utilização do software Octave na interpretação geométrica das operações com matrizes no Ensino Médio**. 75 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Moçoró, RN, 2019. 21, 25
- NÓS, R. L.; ALMEIDA, F. J. de. The employment of digital technologies during the retrospective phase in the solution of geometric problems. **International Journal of Human Sciences Research**, v. 3, n. 7, p. 1–12, 2023. 16
- OCTAVE. **Ler e apresentar dados**. Octave, 2013. Disponível em: <[http://octave.di.uminho.pt/index.php/Ler\\_e\\_apresentar\\_dados](http://octave.di.uminho.pt/index.php/Ler_e_apresentar_dados)>. Acesso em: 27 ago. 2023. 99
- PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Curitiba: SEED, 2008. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce\\_mat.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf)>. Acesso em: 19 nov. 2022. 22
- PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba: SEED, 2021a. Disponível em: <<https://professor.escoladigital.pr.gov.br/crep>>. Acesso em: 19 nov. 2022. 23
- PARANÁ. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: SEED, 2021b. Disponível em: <[https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos\\_restritos/files\\_documento/2021-08/referencial\\_curricular\\_novoem\\_11082021.pdf](https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files_documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf)>. Acesso em: 10 set. 2023. 23

- PARANÁ, G. do. **História do museu Oscar Niemeyer**. Curitiba: Museu Oscar Niemeyer - Governo do Paraná, 2023. Disponível em: <<https://www.museuoscarniemeyer.org.br/sobre/historia>>. Acesso em: 10 ago. 2023. 111, 112
- PEREIRA, A. de F.; SALLES, P. P.; PEREIRA, R. de F. **Biografia Julio Cesar de Mello e Souza**. S.l.: Ideiatrip Comunicação e Design, 2017. Disponível em: <<https://malbatahan.com.br/>>. Acesso em: 04 nov. 2022. 16, 17, 18, 19, 20, 28, 64, 90, 96, 101
- PERTILE, D.; PIEROZAN, A. L.; LIEBAN, D. E. Resolvendo problemas geométricos com o software GeoGebra, valorizando a interatividade no processo de ensino-aprendizagem. **Actas de la Conferência Latinoamericana de GeoGebra Uruguay**, p. 476–484, 2012. 21
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p. 25
- PORTUGUESA, D. P. da L. **Hipérbole**. S.l.: Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, 2021. Disponível em: <<https://dicionario.priberam.org/hip%C3%A9rbole>>. Acesso em: 27 maio 2023. 65
- QUEIROZ, J. E. R. de; GOMES, H. M. Introdução ao processamento digital de imagens. **RITA**, VIII, n. 1, p. 31, 2001. 91, 92
- ROONEY, A. **A história da matemática**. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012. 216 p. 16
- SANTANA, B. **Hipérbole**. S.l.: Norma Culta, 2023. Disponível em: <<https://www.normaculta.com.br/hiperbole/>>. Acesso em: 27 maio 2023. 65, 66
- SBM. **Dissertações do PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2022. Disponível em: <<https://profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=Malba+Tahan&polo=>>>. Acesso em: 08 dez. 2022. 24, 25
- SCHNEIDER, A. **Polya e a teoria da resolução de problemas aplicados à educação matemática nos Ensinos Fundamental e Médio**. 137 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2022. 25
- SESIANO, J. **Magic squares: sources and studies in the history of mathematics**. Switzerland: Springer, 2019. 325 p. 44, 48, 53
- SHUTTERSTOCK. **Animated convince parents to get dog**. S.l.: rostore.clearance2023.com, 2023. Disponível em: <<https://www.shutterstock.com/pt/video/clip-1099701103-animated-convince-parents-get-dog-child-wanting>>. Acesso em: 11 nov. 2023. 87
- SILVA, N. G. da. **Apostila de Matlab**. Alto Paraopeba: Universidade Federal de São João Del Rei - UFSJ, 2023. Disponível em: <[https://ufsj.edu.br/portal-repositorio/File/prof\\_ngoulart/apostila/Apostila\\_Matlab.pdf](https://ufsj.edu.br/portal-repositorio/File/prof_ngoulart/apostila/Apostila_Matlab.pdf)>. Acesso em: 29 ago. 2023. 36, 37
- SILVA, V. M. R. da; NÓS, R. L.; SANO, M. Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 12, n. 1, p. 062–077, 2023. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/59199>>. Acesso em: 31 ago. 2023. 72
- SILVA, Z. F. D. da. **Grupos, simetrias e quadrados mágicos**. 80 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2020. 49, 50

SPRING/INPE. **Spring: processamento de imagens**. Brasil: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006. Disponível em: <[https://www.dpi.inpe.br/spring/portugues/tutorial/introducao\\_pro.html](https://www.dpi.inpe.br/spring/portugues/tutorial/introducao_pro.html)>. Acesso em: 27 ago. 2023. 92, 93, 94

STATELLA, T. **Processamento digital de imagens com GNU Octave (2/13)**. S.l.: YouTube, 2022a. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=LC6tkjwd9sI&list=PL55-j0gEZ-BR4NQstl2\\_HKbQQ7o7TPdpK&index=2](https://www.youtube.com/watch?v=LC6tkjwd9sI&list=PL55-j0gEZ-BR4NQstl2_HKbQQ7o7TPdpK&index=2)>. Acesso em: 20 ago. 2023. 36, 96, 97, 98

STATELLA, T. **Processamento digital de imagens com GNU Octave (3/13)**. S.l.: YouTube, 2022b. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=ww8uHm-rKAs&list=PL55-j0gEZ-BR4NQstl2\\_HKbQQ7o7TPdpK&index=3](https://www.youtube.com/watch?v=ww8uHm-rKAs&list=PL55-j0gEZ-BR4NQstl2_HKbQQ7o7TPdpK&index=3)>. Acesso em: 20 ago. 2023. 94

TABACNIKS, M. H. **Conceitos básicos da teoria de erros**. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo - Instituto de Física, 2018. Disponível em: <[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4215750/mod\\_resource/content/1/Apostila%20Teoria%20de%20Erros%20vers%C3%A3o%202017-parte1.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4215750/mod_resource/content/1/Apostila%20Teoria%20de%20Erros%20vers%C3%A3o%202017-parte1.pdf)>. Acesso em: 10 set. 2023. 62

TAHAN, J. C. de Mello e Souza e M. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Record, 2008a. 158 p. 64

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro - São Paulo: Record, 2008b. 300 p. 28, 39, 42, 44, 45, 48, 50

TORRES, A. C. de A.; LEÓN, M. de. **Cónicas: historia de su independencia del cono**. Madrid: Los Libros de La Catarata, 2020. 180 p. 67

TRYFOROS, T. **Refine suas fotos e consiga as exposições certas usando a ferramenta de histograma**. S.l.: Adobe, 2023. Disponível em: <<https://www.adobe.com/br/creativecloud/photography/discover/how-to-read-a-histogram.html#:~:text=Histograma%20%C3%A9%20um%20gr%C3%A1fico%20que,mais%20brilhoso%20no%20lado%20direito.>> Acesso em: 27 ago. 2023. 92

VIANA, M. **Folha: Viana fala sobre a magia dos quadrados mágicos**. Rio de Janeiro, RJ: Impa, 2023. Disponível em: <<https://impa.br/noticias/folha-viana-fala-sobre-a-magia-dos-quadrados-magicos/#:~:text=J%C3%A1%20o%20quadrado%20m%C3%A1gico%20de,1%20seguido%20de%2019%20zeros.>> Acesso em: 28 ago. 2023. 50

WIKIPEDIA. **John W. Eaton**. S.l.: Wikipedia, 2017. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/John\\_W.\\_Eaton](https://pt.wikipedia.org/wiki/John_W._Eaton)>. Acesso em: 19 nov. 2022. 21

WIKIPEDIA. **Templo expiatório da sagrada família**. S.l.: Wikipedia, 2022a. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Templo\\_Expiat%C3%B3rio\\_da\\_Sagrada\\_Fam%C3%ADlia](https://pt.wikipedia.org/wiki/Templo_Expiat%C3%B3rio_da_Sagrada_Fam%C3%ADlia)>. Acesso em: 13 abr. 2023. 43

WIKIPEDIA. **Quadrado mágico**. S.l.: Wikipedia, 2023. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrado\\_m%C3%A1gico](https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrado_m%C3%A1gico)>. Acesso em: 23 abr. 2023. 50, 52

WOLFFENBÜTTEL, A. O que é pixel? **Ipea - Desafios do desenvolvimento**, n. 28, 2006. 90

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: ArtMed, 1998. 224 p. 86

## ÍNDICE

- Atividade didática
  - divisibilidade, 86
  - duplicação do cubo, 102
  - realce de imagem, 94
  - releitura do MON, 112
- Atividades com o GeoGebra
  - congruências, 33
  - duplicação do cubo, 80, 85
  - releitura do MON, 113
- Atividades com o GNU Octave
  - determinantes, 55
  - divisibilidade, 88
  - duplicação do cubo, 103
  - matriz transposta, 54
  - realce de imagem, 96
- Cone de revolução
  - folhas, 68
  - geratriz, 68
  - lugar geométrico, 68
  - seções cônicas, 68
    - latus rectum*, 74
- Congruências, 32
- Critérios de divisibilidade
  - por 2, 30
  - por 3, 30
  - por 9, 30
- Duplicação do cubo, 72
- Elipse
  - seção cônica, 69
- Funções
  - afim, 34, 94
  - constante, 34
  - linear, 34
- Físicos
  - Hipócrates, 73
- GeoGebra, 21
- GNU Octave, 21
  - algarismos significativos, 62
  - comandos, 36, 60, 62, 96, 104, 105
- Hipérbole
  - elementos, 70
  - equilátera, 71
  - figura de linguagem, 65
  - lugar geométrico, 69
  - parametrizada, 114
  - seção cônica, 69
- Lugar geométrico, 68
- Malba Tahan, 16, 28, 64
- Matemáticos
  - Galois, 67
  - Menaecmo, 74
- Matriz
  - cofator, 58
  - determinante, 54
    - teorema de Laplace, 59
  - transposta, 54
- Mínimo múltiplo comum, 32
- Número  $\pi$ , 41
- Números amigos, 39
- Parábola
  - latus rectum*, 78
  - elementos, 75
  - excentricidade, 78
  - formas canônicas, 75
  - lugar geométrico, 74
  - parametrizada, 113
  - seção cônica, 69

**Quadrado mágico**

definição, 44

diabólico, 41, 50

hipermágico, 40, 50

imperfeito ou defeituoso, 50

origem, 42

pandiagonal, 53

puro, 48

**Realce de imagem, 90****Releitura de uma obra, 109**

Museu Oscar Niemeyer, 111

**Sequência didática, 86**