UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO – UNEMAT
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GILBERTO MONTEIRO PROCÓPIO

ESTUDOS DE PRIMALIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: Elaboração de Sequência Didática com a utilização de Linha do Tempo

SINOP – MT
2023

GILBERTO MONTEIRO PROCÓPIO

ESTUDOS DE PRIMALIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: Elaboração de Sequência Didática com a utilização de Linha do Tempo

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade do Estado do Mato Grosso/UNEMAT-Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Sob a orientação da Dra. Chiara Maria Seidel Luciano Dias.

SINOP – MT

2023

Tereza Antonia Longo Job CRB CRB1/1252

P963e

PROCÓPIO, Gilberto Monteiro.
Estudos de Primalidade na Educação BásicaElaboração de Sequência Didática com a Utilização de Linha do Tempo / Gilberto Monteiro Procópio – Sinop, 2023.
101 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2023.
Orientador: Chiara Maria Seidel Luciano Dias

1. Primalidade. 2. Ensino de Matemática. 3. Sequência Didática. 4. Educação Básica. I. Gilberto Monteiro Procópio. II. Estudos de Primalidade na Educação Básica: Elaboração de Sequência Didática com a Utilização de Linha do Tempo.

CDU 510:372.47

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT
UNEMAT - SINOP

GILBERTO MONTEIRO PROCÓPIO

ESTUDOS DE PRIMALIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: ELABORAÇÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A UTILIZAÇÃO DE LINHA DO TEMPO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Chiara Maria Seidel Luciano Dias
Aprovado em 30/06/2023

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Chiara Maria Seidel Luciano Dias
UNEMAT – SINOP - MT

Profa. Dra. Luciana Mafalda Elias de Assis
UNEMAT – SINOP - MT

Prof. Dr. Eberson Paulo Trevisan
UFMT – SINOP - MT

Sinop/MT
2023

Aos meus amigos e familiares que contribuíram para que chegasse até aqui.

Dedico este trabalho a meus filhos Gabriel e Luís Flávio, razão do meu constante avanço e aperfeiçoamento. Que sirva de exemplo para continuem correndo atrás de seus sonhos e desenvolvam grandes dissertações em suas áreas de pesquisa.

Agradecimentos

Aos familiares e amigos, em especial minha esposa Flávia que sempre me auxiliou neste caminho.

Aos amigos de mestrado e aos professores do Programa de Mestrado Profissional (PROFMAT) da Universidade Estadual de Mato Grosso (UNEMAT), em especial a orientadora da dissertação Chiara Maria.

A CAPES pelo apoio financeiro.

“Mestre é quem sabe aprender.”

José Ângelo Gaiarsa Sobre Uma Escola Para O Novo Homem, 1985, pg. 55

RESUMO

A investigação acerca das propriedades dos números primos retrata elementos que foram motivos de dedicação e esforço de vários matemáticos, em diferentes partes do mundo e tempos. O estudo da Primalidade compõe fragmentos de estudos que implicam em diversas aplicações no campo do conhecimento matemático. E sendo assim, em se tratando de um conhecimento que foi construído gradativamente, apresenta uma dimensão espacial e temporal. A proposta que se traz aqui é a apresentação dos principais conceitos da Primalidade adaptados a Educação Básica com o recurso de uma linha do tempo, que retrata a trajetória conceitual e histórica dos números primos, desde Euclides (300 a. C), em sua obra “Os Elementos”, passando pelo Crivo de Eratóstenes (230 a. C.), equações e resultados apresentados por Fermat, Mersenne e Euler (Séc. XVII - XVIII) e possíveis padrões de frequência que avançaram o século XIX e XX. Neste sentido, apresentamos a elaboração de uma sequência didática, alicerçada nos pressupostos de Zabala (1998). Diante dessa cronologia, utilizamos os resultados aritméticos apresentados em cada fase, baseados em seus marcos históricos, além de apontar algumas possíveis adaptações para estudantes público-alvo da Educação Especial.

Palavras-Chave: Primalidade; Ensino de Matemática; Sequência Didática; Educação Básica.

ABSTRACT

The investigation about the properties of prime numbers portrays elements that were reasons for the dedication and effort of several mathematicians, in distinct parts of the world and times. The study of Primality composes fragments of studies that imply different applications in the field of mathematical knowledge. And so, as it is a knowledge that was built gradually, it has a spatial and temporal dimension. The proposal brought here is the presentation of the main concepts of Primality adapted to Basic Education with the resource of a timeline, which portrays the conceptual and historical trajectory of prime numbers, since Euclid (300 BC), in his work “The Elements”, passing through the Sieve of Eratosthenes (230 BC), equations and results presented by Fermat, Mersenne and Euler (17th - 18th centuries) and possible frequency patterns that advanced the 19th and 20th centuries. In this sense, we present the elaboration of a didactic sequence, based on the assumptions of Zabala (1998). Given this chronology, we used the arithmetic results presented in each phase, based on their historical milestones, in addition to pointing out some adaptations for students target audience of Special Education.

Keywords: Primality; Mathematics Teaching; Following teaching; Basic education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As sequências didáticas são recursos de ensino que auxiliam na construção de conceitos e suas possíveis formas de aprendizagem. Para Zabala (1998, p. 18), sequências didáticas representam um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos por alunos e professores.

Zabala (1998) afirma que os professores devem diagnosticar o ambiente de trabalho, tomar decisões, realizar ações e avaliar a pertinência das ações. Além disso, enfatiza o papel do professor em propor intervenções pedagógicas que visem práticas educativas reflexivas e coerentes, levando o aluno a ser o ator principal, pois a aprendizagem se dá como um processo cujo resultado é sempre único e individual. Neste sentido, o autor também menciona que os professores devem atuar como mediadores das atividades mentais dos alunos e torná-los autônomos.

Nessa perspectiva, elaborar uma sequência didática, utilizando-se de uma linha histórica do tempo, considerando números primos, desde “Os Elementos” de Euclides, passando por Eratóstenes e Riemann e criptografia, nos parece um caminho com potencial de dar significado para o aluno do que se aprende, como se aprende e de onde emergem os questionamentos para aquele conteúdo e suas devidas soluções.

A abordagem de conceitos inseridos em uma linha histórica do tempo, pode potencializar a capacidade de investigação e pesquisa entre os alunos. Entender o contexto histórico pode auxiliar no processo de aprendizagem, além de promover a interação entre alunos e fomentar a busca por novas formas de resolução e entendimento do conteúdo e dos desdobramentos matemáticos estudados.

Um dos conceitos com desdobramentos bem interessantes na Matemática, dentro do estudo da Aritmética é o conceito de Primalidade, ou seja, a identificação de um número primo e os resultados decorrentes desta investigação. Na Educação Básica são abordados muitos conceitos relacionados

aos números, sua simbologia e as operações possíveis em cada conjunto numérico.

Com isso, este trabalho tem a pretensão de desenvolver uma sequência didática envolvendo o estudo da Primalidade nos números inteiros, podendo ser utilizadas em diferentes níveis de escolaridade na educação básica, com a utilização de uma linha do tempo dos números primos. Estes conceitos quando postos enquanto conteúdo escolar, podem contribuir com problematizações que potencializam um conjunto de conhecimentos formativos para o estudante da educação básica, valorizando o pensamento aritmético e posteriormente ou paralelamente, o pensamento algébrico.

Quando articulados com metodologias e abordagens de ensino que valorizam aspectos históricos e estruturais, acreditamos que o desenvolvimento do pensamento aritmético pode se enriquecer, dando significado posteriormente à linguagem algébrica e deste modo traça relações entre o conhecimento escolar e a matemática organizada temporalmente.

A ideia é que posteriormente nossa dissertação sirva para construção de um produto educacional dedicado a professores e estudantes para o ensino e a aprendizagem de elementos que compõem a base dos estudos da Primalidade e possíveis aplicações no ensino da matemática.

Diante do contexto explicitado, problematiza-se que, de que modo é possível potencializar o ensino da Primalidade nos inteiros na Educação Básica a partir de elementos marcados por uma linha do tempo?

O conceito de número parte de um princípio abstrato da matemática, cuja finalidade é dar sentido de grafo (desenho) ao entendimento de contagem, quantidade, ordem ou medida?

Segundo Lima (2013, p. 20), número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade, se esta grandeza for discreta, essa comparação chama-se contagem e resulta em um número inteiro, se a grandeza é contínua, chama-se medição esta comparação e resulta em um número real.

No decorrer dos séculos tivemos avanços consideráveis na matemática e na tecnologia, engenharia e outras ciências. Com o advento da Aritmética, que é parte da teoria dos números, que se inicia aproximadamente 300 a.C., com a obra, “Os Elementos”, de Euclides e à posteriori com diversos avanços, até ser

reforçado por Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783), tornando a Aritmética base principal da Matemática.

O número é parte integrante da Álgebra e dentro dela encontramos os números primos, que além de sua particularidade, são parte da essência da tecnologia moderna e dos avanços tecnológicos atuais.

A Álgebra faz parte do conjunto de conhecimentos formativos práticas docentes que possibilitem a aproximação entre o conhecimento científico e os conhecimentos dos estudantes, provenientes do seu ambiente cultural e de suas vivências, geram a necessidade de uma um esforço por parte dos professores e exigem habilidades diversas para a transposição didática desses conhecimentos.

Tendo em vista o universo de abrangência dos objetos matemáticos e da própria natureza e pensamento da ciência matemática, ao nos situarmos entre as teorias matemáticas marcadas temporalmente, entendemos que, para uma adequada articulação destas dimensões, percebemos necessário um conjunto de finalidades e conhecimentos formativos necessários ao exercício da docência.

A Álgebra enquanto parte deste conjunto de conhecimentos formativos contribui à medida que contempla problematizações e reflexões específicas. A Álgebra pode apresentar várias concepções, desde entendida enquanto Aritmética generalizada, ou sendo o estudo de relações entre grandezas até o estudo das estruturas, entre outras. Para cada uma destas concepções, ao exercer o ensino de conceitos, conteúdos algébricos e de problemas reais modelados matematicamente por meio destes elementos, é necessário então desenvolver um conjunto de habilidades algébricas. O desenvolvimento do pensamento algébrico pode se enriquecer ao ser articulado com metodologias de ensino e abordagens históricas, dando significado à linguagem algébrica e deste modo traça relações entre o conhecimento escolar e a matemática organizada temporalmente.

Para esta finalidade, vamos abordar a trajetória conceitual e histórica dos números primos, pois estes números em particular também são base de assuntos atuais como a criptografia e a codificação de códigos de barras, por exemplo. Esperamos, a partir deste conceito matemático, elaborar sequências e

materiais que contribuam para o ensino de matemática. Para além dos conceitos, desejamos organizar e elaborar uma sequência didática que seja inclusivo, adequado e adaptado para a demanda de todos os estudantes.

Como nosso objetivo geral queremos elaborar uma sequência didática utilizando uma linha do tempo por meio de contextos históricos dos Números Primos, para contribuir com as habilidades do pensamento aritmético e algébrico na Educação Básica, sempre balizado pelos conhecimentos específicos que são, construir sequência didática que contemple aspectos conceituais e históricos para o ensino do tema Números Primos, Fatoração, Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum, Funções, Matemática Financeira, Conceitos de Criptografia e novas tecnologias; organizar atividades em um contexto que contemple a Educação Inclusiva para o ensino do tema proposto e construir uma linha do tempo de forma didática para que os estudantes compreendam diversos problemas da sua essência aos tempos atuais, perpassando pelo contexto histórico, relacionados à Primalidade dos números inteiros.

Dividida em cinco capítulos, a presente dissertação tem em seu capítulo 1 a Introdução e no capítulo 2 o referencial teórico que fundamentou os conceitos que direcionam nossa pesquisa. No capítulo 3 trazemos a nossa proposta de sequência didática, planejada em quatro encontros e para que a contribuição se fizesse mais inclusiva, no capítulo 4 apresentaremos possíveis orientações e adaptações ao público-alvo da Educação Especial. Por fim, o capítulo 5 apresenta nossas considerações finais.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Com o advento da Aritmética, que se inicia em aproximadamente 300 a.C., com “Os Elementos” de Euclides, a ciência Matemática foi se fundamentando a partir de uma base axiomática. Tendo em vista o universo de abrangência dos objetos matemáticos e da própria natureza e pensamento da ciência matemática, percebemos que o ensino deles se articula com um conjunto de finalidades e conhecimentos formativos na Educação Básica.

A Aritmética e a Álgebra enquanto parte deste conjunto de conhecimentos formativos contribuem à medida que contemplam problematizações e reflexões específicas. A Álgebra pode apresentar várias concepções, desde entendida enquanto Aritmética generalizada, ou sendo o estudo de relações entre grandezas até o estudo das estruturas, entre outras. Para cada uma destas concepções, ao exercer o ensino de conceitos, conteúdos algébricos e de problemas reais modelados matematicamente por meio destes elementos, é necessário então desenvolver um conjunto de habilidades algébricas.

O desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser enriquecido ao ser articulado com metodologias de ensino e abordagens históricas, dando significado à linguagem algébrica e deste modo traça relações entre o conhecimento escolar e a matemática organizada temporalmente.

Ao abordar a trajetória conceitual e histórica dos números primos, desejamos contribuir com o ensino de matemática. O Ensino de Matemática, na atualidade brasileira, visa desenvolver diversas competências e habilidades preconizadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017). Diante disso, contextualizaremos e localizaremos no espaço-tempo os conceitos a serem abordados por uma sequência didática e as habilidades relacionadas as atividades propostas.

2.1 Contextualização da área de atuação da Teoria dos Números

Axiomaticamente, ao considerar a estrutura do conjunto dos números naturais (N) é importante destacar que os Axiomas de Peano e suas consequências lógicas dão a esse conjunto definições formais que baseiam a

sua construção, com a noção fundamental de sucessor. Acrescentando o número zero ao conjunto N podemos assim estabelecer outro conjunto, em que podemos denotá-lo por conjunto dos inteiros não negativos.

A teoria dos números é um domínio do conhecimento matemático que se dedica ao estudo do conjunto dos números inteiros (Z). Diferentemente do conjunto dos números naturais (N), os números inteiros não surgiram a partir de problemas de contagem. Parte considerável da teoria dos números evoluiu para explicar situações em torno de números primos, tanto para compreender o comportamento destes números quanto para aprimorar estudos que verifiquem se dado número inteiro é primo ou não (propriedade da Primalidade). “Um número natural diferente de 0 e de 1 e que é apenas múltiplo de 1 e de si próprio é chamado de número primo. Um número que é diferente de 0 e 1 e não é primo é chamada de número composto.” (HEFEZ, 2015, p. 31):

> A partir dessa definição, estendemos a particularidade dos números primos ao Teorema Fundamental da Aritmética: “Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.” (HEFEZ, 2016, p. 123.).

Assim, a fatoração nos apresenta um resultado muito relevante no contexto da Teoria dos Números: todo número natural é escrito de modo único (a menos da ordem dos fatores) como potências de números primos. A não finitude do conjunto constituído de todos os números primos também foi um resultado importante para o este campo do conhecimento matemático.

Os problemas relacionados à Primalidade se apresentaram ao longo da história ora com o intuito de verificar a Primalidade de um número, ora para elaborar expressões que gerassem números primos ou até mesmo para compreender a distribuição destes números em determinados intervalos numéricos. As perguntas e as respostas às mais variadas questões envolvendo Primalidade foram evoluindo e desenhando uma trajetória no espaço-tempo que agregou aporte teórico à Matemática, contribuindo com outras áreas de domínio matemático. Essa evolução pode ser apresentada na forma de linha do tempo.

2.2 Linha Histórica dos Números Primos e o Ensino de Matemática

A ideia que iremos explorar é a organização de uma sequência didática, fundamentada em um conjunto de atividades de aprendizagem envolvendo números primos. Paralelamente, a linha do tempo apresentada na figura 1, aliada a materiais específicos como os do Programa de Iniciação Científica da OBMEP (Olimpíadas Brasileira de Matemática para as Escolas Públicas) será utilizada como referencial da sequência. Com as devidas adaptações, a sequência pode contemplar conceitos e conteúdo do 6º ano do Ensino Fundamental até o 2º ano do Ensino Médio.

Figura 1 - Linha do tempo – Trajetória dos números primos

Fonte: (LUCIANO, FIGUEIREDO, ARAUJO & NETO, 2017)

Para o desenvolvimento deste tipo de atividade faz-se necessário considerar a evolução gradativa dos conceitos no processo de aprendizagem

dos estudantes. A princípio é fundamental sublinharmos as habilidades a serem desenvolvidas por meio da utilização de uma sequência didática. As habilidades a serem consideradas estarão em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC – 2018)

Ao buscarmos entender a trajetória dos diversos estudos dedicados aos números primos que mobilizaram um número considerável de matemáticos na comunidade acadêmica em tempos diversos, percebemos que é interessante se apropriar desses conhecimentos para a elaboração de uma abordagem didática que posa contribuir com o ensino de matemática:

> Atualmente tem se ampliado os estudos sobre possíveis abordagens didáticas que podem ser propostas para o ensino da matemática com base na história desta disciplina. Uma dessas maneiras de fazer isso é revisitar da melhor forma os momentos históricos que envolvem os personagens que conceberam as noções matemáticas que se pretende ensinar, de modo a desafiar a capacidade dos alunos para exercitarem estudos, pesquisas e problematizações que estimulem suas estratégias de pensamento e, daí culminar na sua produção de conhecimento durante a atividade de estudar. (MENDES E CHAQUIAM, p.12).

O resgate histórico situado no espaço-tempo tende a trazer aos estudos a Matemática compreendida enquanto ciência tecida cultural e socialmente:

> É importante reconhecer, entretanto, que essa forma de propor a inserção da história nas explicações matemáticas na sala de aula é composta por outros aspectos que poderão mostram os diversos modos como um determinado tema relacionado à matemática se desenvolveu no tempo e no espaço, e como esse assunto foi se constituindo em teoria no campo acadêmico por meio de questionamentos, respostas, novos questionamentos e problematizações, que consequentemente fizeram emergir a necessidade de uma axiomatização de tal assunto (conceito, noção e teoria). (MENDES E CHAQUIAM, p.12).

Em particular, quando nos dedicamos a compreender os primeiros estudos que nos remetem as noções de Primalidade, uma das referências mais importantes é a obra “Os Elementos” no contexto da Grécia Antiga. Para compreendermos o que antecede esta obra, podemos considerar como contexto inicial Mileto na Ásia Menor que por volta de 494 a.C. foi tomada pela expansão

dos persas que posteriormente levaram suas ideias para as colônias gregas mais a oeste.

Surgiram escolas de diferentes pensamentos, entre as quais a escola pitagórica que deixou grande legado à Matemática. Em termos de Aritmética, já se evidenciavam os números figurados. Era possível obter, generalizações sobre sequências de números, porém sem regras para a obtenção de tais sequências.

Avançando um pouco mais no tempo, vamos identificar padrões emergentes a partir de Euclides de Alexandria, nascido durante o século III a. C.

2.3 Euclides e sua obra os elementos

A obra 'Os Elementos', de Euclides (300 a.C) é composta por 13 livros, sendo a obra mais clássica de matemática da Grécia antiga e uma das obras que mais influenciaram o desenvolvimento da matemática e das ciências. Das 13 obras, os livros VII, VIII e IX, possui 102 proposições dedicadas a teoria dos números (EVES, 2011, p. 173), o livro VII anuncia o algoritmo euclidiano, introduzindo a ideia de máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e dois inteiros são primos entre si.

No livro IX encontramos o Teorema Fundamental da Aritmética. Tal resultado demonstra que todo inteiro maior que 1 pode se expressar como produto de primos de uma e, salvo quanto a ordem dos fatores, de uma só maneira. Além disso nos apresenta uma dedução geométrica da fórmula da soma dos primeiros n termos de uma PG e estabelece fórmula para os números perfeitos[1].

Ainda segundo Eves (2011, p. 170), no livro IX Euclides em sua vigésima proposição, por *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo), prova que o conjunto dos números primos é infinito. A demonstração parte da afirmação de que um número finito de números primos denotados pôr a, b, ..., k. Faça P = (a)(b)...(k). Então P + 1 ou é primo ou é composto. Mas como a, b, ..., k são todos

[1] Um número natural é perfeito se é a soma de seus divisores, com exceção dele próprio (Benatti, 2019). Exemplo 6 é perfeito, pois 6 = 1 + 2 + 3 (D) 6 = {1, 2, 3, 6}.

primos, P + 1, que é maior que cada um desses números, não pode ser primo. Se P + 1 fosse composto deveria ser divisível por algum primo p. Mas p deve ser um dos elementos a, b, ...,k, pois estes são todos números primos. Logo p deve dividir P e, por consequência, não é divisor de P + 1 (pois p > 1), o que é um absurdo pela hipótese inicial, estabelecendo assim o teorema.

Para a sequência didática que elaboramos todas as proposições dos livros VII, VIII e IX deverão ser analisadas pelos alunos juntamente com o contexto histórico e comparadas com o que temos nos livros atuais e acessíveis do modo físico ou digital. Os Elementos são então, a primeira parte a ser considerada em nossa linha do tempo.

A partir dos conceitos e provas matemáticas apresentados nos livros que compõem Os Elementos, já se observava que importantes resultados haviam sido consolidados. Definições, teoremas, propriedades e a não finitude do conjunto dos números primos já havia sido estabelecidos. Nessa etapa da história, a resposta que agora se buscava era sobre a Primalidade ou não de um dado número e sendo assim, discorreremos sobre os testes de Primalidade.

2.4 Testes de Primalidade

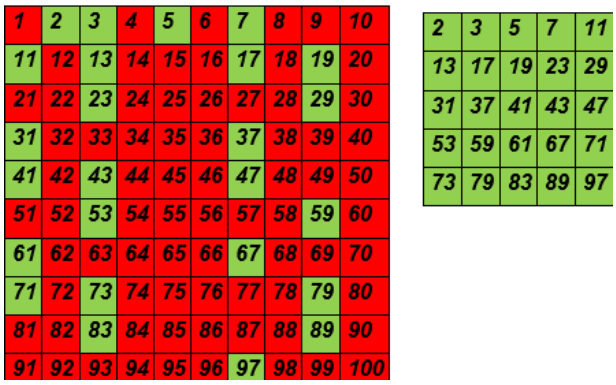
Segundo Peruzzo (2012) é difícil determinar os fatores primos de um número composto, porém é possível verificar se um número é primo ou composto sem fatorá-lo, com este intuito é que surge a Primalidade. Com o estudo da Primalidade no contexto da teoria dos números, podemos destacar testes clássicos como o Crivo de Eratóstenes[2], que averigua quais os números primos em um determinado intervalo, a partir da retirada dos múltiplos de cada primo no intervalo considerado.

A eficiência desse dispositivo prático, para Hefez (2015) se fundamenta na observação de que, se um número natural a > 1 é composto, então ele é

[2] O crivo de Eratóstenes é um método simples que determina todos os números primos compreendidos entre 1 e um certo número limite x dado (Peruzzo, 2012). Eratóstenes foi um matemático, geógrafo, astrônomo e bibliotecário da Grécia antiga, foi conhecido por calcular a circunferência da terra.

múltiplo de algum número primo p tal que $p^2 \leq a$ e é primo todo número a que não é múltiplo de nenhum número primo p tal que $p^2 < a$.

Figura 1 - Modelo do Crivo de Eratóstenes



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Os testes de Primalidade evoluíram e trouxeram contribuições muito relevantes para a teoria dos números e outras ciências que se fundamentam nas teorias matemáticas para avançarem. Em particular, ao discutirmos Primalidade, percebemos ao longo do tempo o surgimento de algoritmos mais robustos e complexos, baseados em teoremas, mas também em conjecturas, como exemplo a hipótese de Riemann, outros exemplos nas duas searas poderíamos citar o teste de Fermat, os Algoritmos de Lucas-Lehmer, os de Brilhar, Lehmer e Selfridge, de Solovay-Strassen, de Miller-Rabin e o Algoritmo AKS (Agrawal, Kayal e Saxena, autores indianos).

A eficiência destes testes de Primalidade nos levam a identificar números primos cada vez maiores. Estes números são utilizados atualmente em criptografia para codificar mensagens, e tornar cada vez mais segura proteção de dados em sistemas de informações.

Além dos testes de Primalidade, outro problema que muitos matemáticos se dedicaram a solucionar era estabelecer fórmulas geradoras de números primos.

Peruzzo (2012) aponta os números de Fermat[3] que estabeleceu a fórmula, $F_n = 2^{2^n} + 1$ considerando n = 0, 1, 2, 3, ..., em 1640. Inicialmente, tal fórmula levaria a comunidade matemática a estabelecer que a partir dela, os números resultantes seriam números primos. De fato, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65.537$ são primos. Em 1732, Leonhard Euler mostrou que $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ era, portanto, um número composto. Os números de Fermat primos são chamados de primos de Fermat.

Nessa época, já marcada historicamente pela Renascença (movimento ocorrido entre os séculos XIII e XV), outros protagonistas surgem para contribuir com a Teoria dos Números e como tal, podemos citar Marin Mersenne (1588 – 1648). Mersenne era um padre francês que se dedicou ao estudo das propriedades dos números perfeitos:

> Na época, era comum os matemáticos não mostrarem as demonstrações dos resultados que descobriam, lançando-os como desafios para outros. Os resultados de Fermat foram divulgados por meio de sua correspondência, principalmente com o padre Marin Mersenne (1588-1648), que desempenhava o papel de divulgador das Ciências com uma extensão correspondência com os maiores cientistas da época. (HEFEZ, 2014, p. 161).

Fermat também descobriu que todo número primo da forma 4n + 1, é a soma de dois quadrados como $5 = 2^2 + 1^1$, $13 = 2^2 + 3^2$, $41 = 4^2 + 5^2$. Assim, ficaram conhecidos dois grupos de números primos: os que se escrevem na forma 4n + 1, com $n \in \mathbb{Z}$, que podem sempre ser escritos na forma $x^2 + y^2$ e os que se escrevem na forma 4n + 1, com $n \in \mathbb{Z}$, que não são escritos na forma $x^2 + y^2$. Peruzzo (2012), menciona que todos os próximos números nessa série de Fermat são todos compostos. A figura 3 e a figura 4 trazem retratos de Pierre de Fermat e de Marin Mersenne, respectivamente.

Outros testes de Primalidade de Fermat já foram estabelecidos com o conceito e as propriedades da Congruência entre Inteiros. De acordo com o seu

[3] Pierre de Fermat (1601-1605). Após Euclides e Eratóstenes, Fermat pode ser considerado o primeiro matemático a contribuir para o desenvolvimento da Teoria dos Números do ponto de vista teórico. (HEFEZ, 2014, p. 161)

Teorema, se p é um número primo, então, para qualquer inteiro a tem-se que, $a^p \equiv$ a (mod p) outra versão, conforme cita Peruzzo (2012), se p é primo e a é coprimo[4] em relação a p, então, $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

Exemplo:

Tomando a = 2 e n = 3, para $a^{n-1} \equiv 1$ (mod n).

$2^{3-1} \equiv 1$(mod 3), pois 3|3, o que comprova que 3 é primo.

Figura 2 - Pierre de Fermat (séc. XVII)

Fonte: site https://impa.br/noticias/tunel-do-tempo-pequeno-teorema-de-fermat/, acesso em 03 de abril de 2023.

Outra fórmula que gera uma família interessante de primos é $M_p = 2^p - 1$, onde p é primo. Os números gerados por ela são denominados números de Mersenne e em particular, os números primos gerados por ela são chamados primos de Mersenne.

Figura 3 - Marin Mersenne (1588-1648)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Marin_Mersenne, acesso em 03 de abril de 2023.

[4] Dois números são coprimos ou primos entre si se seu máximo divisor comum (mdc) é 1, exemplo, 11 e 49 são coprimos porque 11 é primo e 49 não sofre divisão por 11. Dados dois números a e b, serão coprimos se a fração a/b é irredutível e o mínimo múltiplo comum (mmc) entre eles é o produto ab.

Peruzzo (2012) comenta que nem todo número de Mersenne é primo, pois temos, M_2 = 3, M_3 = 7, M_5= 31, M_7 = 127, porém outros são compostos como M_{11} = 23.89. Mersenne constatou também que os números M_p são também primos para n = 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257, no entanto ele estava errado quanto ao 67 e o 257 e não incluiu 61, 89 e 107, entre os primos inferiores a 257 que também produzem números primos de Mersenne.

Sobre os fatores dos números de Mersenne, Euler estabeleceu em 1750 com demonstração de Lagrange em 1775 que, se p é um número primo tal que p ≡ 3 (mod 4), então (2p + 1) | M_p ,se e somente se, 2p + 1 é um número primo. Por Peruzzo (2012) não se sabe se os números de Mersenne são finitos ou infinitos, mas que existem uma quantidade muito grande de números primos de Mersenne.

A título de curiosidade, os nove maiores números primos de Mersenne conhecidos são "p = 43.112.609, p = 42.643.801, p = 37.156.667, p = 32.582.657, p = 30.402.457, p = 25.964.951, p = 24.036. 583, p = 20.996.011, p = 13.466.917 (únicos números conhecidos com mais de 4.000.000 de algarismos)." (RIZEL, 2014, p.48-49):

> No intervalo $2 \leq p \leq 500$, os números de Mersenne que são primos, chamados de *primos de Mersenne,* correspondem aos seguintes valores de *p*: 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253 e 4423. (HEFEZ, 2014, p.166).

Quanto ao teste de Primalidade para números de Mersenne, segundo RIBEMBOIN (2012), temos que:

Sejam P = 2 e Q = - 2; consideram-se as sucessões de Lucas $(U_m)_{m\geq 0}$ e $(V_m)_{m\geq 0}$ tendo parâmetros 2 e – 2 e, consequentemente, discriminante D = 12. Então N = M_n é primo se e somente se N divide $(V)_{n+1}/2$. Para simplificar os cálculos, substituir a sucessão de Lucas $(V_m)_{m\geq 0}$ pela sucessão $(S_k)_{k\geq 0}$, que é definida, por recorrência, da seguinte maneira: S_0 = 4, $S_{k+1} = S_k^2 - 2$. Assim, a sucessão começa pelos números 4, 14, 194, ⋯. O teste pode ser formulado como se segue, M_n é primo se e somente se M_n divide S_{n-2}.

Demonstração:

S_0 = 4, $S_1 = V_2/2$. Supõe-se $S_{k+1} = V_{2^k} / 2^{2^{k-1}}$; então:

$S_k = S_{k-1}^2 - 2 = \frac{V_{2^k}^2}{2^{2^k}} - 2 = \frac{V_{2^k+1} + 2^{2^k+1}}{2^{2^k}} - 2 = \frac{V_{2^k+1}}{2^{2^k}}$.

De acordo com o teste, Mn é primo, se e somente se, M_n divide:

$V_{(M_n+1)/2} = V_{2^{n-1}} = 2^{2^{n-2}} S_{n-2}$

Isso é, M_n divide S_{n-2}.

Com esse teste, Lucas mostrou em 1876 que $M127$ é um número primo e $M67$ é composto. Um pouco mais tarde, Pervushin mostrou que $M61$ é primo. Em 1927, Lehmer mostrou que $M257$ é composto.[5]

Conforme Peruzzo (2012), pode existir uma quantidade muito grande de números primos de Mersenne, o problema é reconhecer entre os primos de Mersenne os que são primos e os que são compostos, até o presente momento não se sabe se os números de Mersenne são finitos ou infinitos.

Ainda por Peruzzo (2012), temos primos com uma característica entre eles que é a seguinte, quando a diferença entre dois números primos é 2, diz-se que são primos gêmeos, e são escritos da forma:

p, p + 2.

Como exemplo temos: 3 e 5, 5 e 7, 7 e 11...

Acredita-se que os primos gêmeos sejam infinito, porém ainda não foi provado. Os maiores primos gêmeos já encontrados até então são:
$37566801695685 \cdot 2^{666669} + 1$ e $37566801695685 \cdot 2^{666669} - 1$

Já indicando Leonhard Euler[6], em seu livro Tratado sobre a teoria dos números em XVI capítulos, traduzido por Fossa (2015), que diz que Euler fez várias contribuições a Teoria dos números.

---

[5] Retirado da monografia de Ary Camargo Rizel, 2014, p. 52-53.

[6] Euler nasceu na Basileia, Suíça, em 15 de abril de 1707, foi um importante matemático e cientista, considerado um dos maiores matemáticos de sua época, começa seus estudos e descobre seu talento para matemática com Johann Bernoulli, e graças a sua amizade com Nicolaus e Daniel Bernoulli, vira membro da academia de Ciências de San Petersburgo, convidado pela Imperatriz Catarina I.

Figura 4 - Leonhard Euler (1707-1783)

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler.jpg Acesso em 20 abril de 2023.

Tanto o Crivo de Eratóstenes para identificar números primos em um dado intervalo, quanto os outros testes de Primalidade e as fórmulas geradoras de números primos, responderam à algumas perguntas essenciais para o Teoria dos Números. No entanto, outra questão que passou a perseverar entre os matemáticos era como os números primos se distribuem dentro dos números naturais. Compreender a distância entre dois números primos consecutivos e possíveis padrões de frequência tornou-se uma indagação constante para a comunidade acadêmica.

Ainda não há nenhum padrão que descreva o quanto dois primos consecutivos estão distantes um do outro. Porém, em relação à frequência, podemos considerar uma definição em consonância que os conceitos de probabilidade: Denotemos por $\pi(x)$ a quantidade de números primos menores que ou iguais a x. Portanto, a probabilidade de que um elemento do conjunto $\{1, 2, \dots, x\}$ seja primo é dada por $\pi(x)/x$.

Obviamente, esse quociente é uma função muito complexa e então o ideal se tornava determinar uma função com comportamento conhecido que se aproximava desse quociente para números suficientemente grandes. Sobre a distribuição dos números primos, podemos avançar para as ideias matemáticas

trazidas por Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)[7], que aos 15 anos, em 1792, conjecturou que π (x) era assintoticamente igual a função integral logarítmica *Li (x)* = $\int_2^x \frac{dt}{log\, x}$. Sendo Li (x) ~ x / log x, pode-se escrever a conjectura como $\pi\ (\pi) \sim \frac{x}{\log x}$ .Com o tempo, essa conjectura revelou-se verdadeira e esse fato é hoje conhecido como o Teorema dos Números Primos.

A aproximação de $\pi(x)$ por $x/\log\ x$ não é das melhores; a aproximação pela integral logarítmica é bem melhor. Para Gauss, os números primos entram na sua conjectura, na tentativa de estabelecer uma lei, após observar que conforme a contagem aumentava, os primos se tornavam gradualmente menos frequentes, de acordo com o inverso do logaritmo da contagem, a lei não mostra exatamente quantos números primos existem em um intervalo, porém chega bem próximo do resultado, por exemplo prevê 72 primos entre 1.000.000 e 1.001.000, o resultado correto seriam 75, cerca de 4% apenas de erro.
Conforme Peruzzo (2012), Gauss inicia sua busco com uma tabela de números primos em mãos, observando que à medida que a contagem se elevava, notou o surgimento de um padrão, conforme tabela abaixo:

Figura 5 - Padrões no surgimento dos primos

x	$\pi\ (x)$	$\frac{x}{\pi\ (x)}$
10	4	2,5
100	25	4,0
1 000	168	6,0
10 000	1 229	8,1
100 000	9 592	10,4
1 000 000	78 498	12,7
10 000 000	664 579	15,0
100 000 000	5 761 455	17,4
1 000 000 000	50 847 534	19,7
10 000 000 000	455 052 511	22,0

Fonte: O Fascínio dos Números Primos, (PERUZZO, 2012, p. 50).

[7] Matemático do séc. (XVIII-XIX), astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, destacando-se a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésica, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica. Conhecido como "Príncipe dos Matemáticos", criou a geometria diferencial, o telégrafo, desenhou um heptadecágono e definiu o conceito de números complexos.

Ao analisar os dados, Gauss conjecturou que entre os números 1 e x, aproximadamente 1 a cada ln (x) será primo. Outro matemático a analisar os números primos foi George Riemann em 1859, o relatório de sua pesquisa apresentada a Academia de Ciências de Berlin, segundo Peruzzo (2012), tinha como título “sobre o número de números primos que não excedem uma grandeza dada”, conhecida hoje como hipótese de Riemann. Este foi o único trabalho sobre números primos de Riemann. Riemann tentava confirmar que a função de Gauss forneceria uma aproximação cada vez melhor do número primo.

Riemann teve a ideia de definir a função Zeta para todos os números complexos s, com a parte real superior a 1, conforme expõem RIBENBOIM (2012) abaixo:

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, para $Re(s) > 1$

Inicialmente definindo valores naturais;

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$

A função ζ de Riemann, conforme Peruzzo (2012) está diretamente relacionada à fórmula de Euler. Se s é real e s > 1, verifica-se a seguinte identidade:

$\zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1- p^{-s}}\right)$

Trabalhando a função ζ de Riemann, obtém-se:

$\zeta(s) = \frac{1}{1- 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

Com isso a hipótese de Riemann afirma que os zeros imaginários s = σ + it (com t ∈ $\mathbb{R}$) não- triviais da função ζ de Riemann pertencem todos a linha crítica com $\Re$ (s) = ½, onde $\Re$ (s) é a parte real de s: (por Peruzzo 2012)

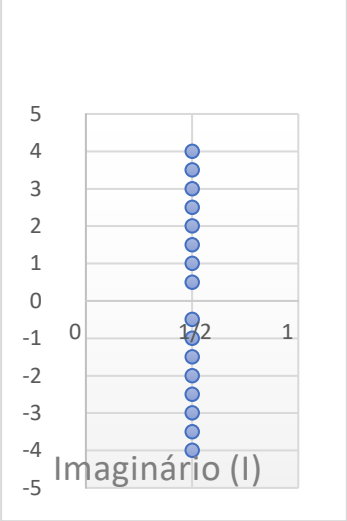
Figura 6 - Estimativa de Gauss e de Riemann para o número de primos

x	$\pi(x)$	G(x)	R(x)
10^2	25	5	1
10^3	168	10	0
10^4	1 229	17	-2
10^5	9 592	38	-5
10^6	78 498	130	29
10^7	664 579	239	88
10^8	5 761 455	754	97
10^9	50 847 534	1 704	-79
10^{10}	455 052 511	3 104	-1 828
10^{11}	4 118 054 813	11 588	-2 318
10^{12}	37 607 912 018	38 263	-1 476

Fonte: O Fascínio dos Números Primos, (PERUZZO, 2012, p. 59).

Riemann começa a localizar, segundo Peruzzo (2012), a posição dos zeros, onde $\zeta(s) = 0$, Riemann observou que estes valores não estavam espalhados e sim enfileirados linearmente com usa parte real valendo ½, conforme figura 8:

Figura 7 - Zeros sobre a linha crítica de Riemann



Fonte: O Fascínio dos Números Primos (PERUZZO, 2012, p. 60).

Segundo Peruzzo (2012), em seu artigo que contém a hipótese, Riemann diz ser capaz de prová-la, porém ele nunca apresentou esta prova.

2.5 Criptografia e Algoritmo RSA

De maneira geral criptografia é a forma de embaralhar uma mensagem de uma forma que ninguém que conheça a ideia envolvida consiga ler ela, para Jucimar Peruzzo (2012), criptografia é um conjunto de técnicas que permitem tornar incompreensível uma mensagem originalmente escrita com clareza, permitindo somente ao destinatário final a compreensão da mensagem.

Criptografia vem do grego que significa escrever de forma oculta, desde os primórdios o homem escrevia numa linguagem criptografada, de modo que pessoas intrusas não pudessem decifrar tal mensagem.

A partir do século XX, a criptografia tornou-se primordial, em decorrência de duas guerras mundiais, iniciando seu estudo pelos militares, governos e pesquisas secretas, inicialmente com a criptografia de chave simétrica que consiste em um indivíduo A envia uma mensagem secreta para indivíduo B:

Remetente A: Mensagem + Chave Simétrica = Mensagem Criptografada.
Receptor B: Mensagem Criptografada + Chave Simétrica = Mensagem.

Classificando assim a Criptografia de Chave Simétrica como um algoritmo de cifragem que criptografa e descriptografa a mensagem, porém este sistema era inseguro pois bastava alguém descobrir esta chave, então em 1976 é propostos pelos matemáticos Whitfield Diffie e Martin Hellmann, da Universidade de Stanford, na Califórnia a criptografia de chave pública e assim através de fórmulas matemáticas cada usuário teria um par de chaves de criptografia, sendo um pública e outra privada, ambas matematicamente relacionadas.

Indivíduos A e B trocam mensagens, o indivíduo A envia uma mensagem para o indivíduo B, temos

Mensagem + Chave Pública (B) = Mensagem Criptografada.

O indivíduo B leria a mensagem como

Mensagem Criptografada + Chave Privada (A) = Mensagem, e responderia para A da forma

Resposta + Chave Pública (A) = Resposta Criptografada.

Nos últimos 25 anos a internet tornou-se viável para os negócios e transações bancárias em todo mundo, na atualidade o algoritmo assimétrico mais utilizado mundialmente é o RSA. Atualmente é considerado o algoritmo mais seguro vigente e conforme descreve Peruzzo (2012), o algoritmo RSA é baseado no trabalho de Diffie e Hellmann e desenvolvido pelos matemáticos do MIT (Instituto de Tecnologia de Massachussetss), Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, que desenvolveram o código RSA (inicial de seus nomes) em 1978.

A maior parte das transações efetuadas na internet, utilizam a criptografia RSA, principalmente compras on-line e transações bancárias.

3 METODOLOGIA E APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Já citamos anteriormente que Sequências didáticas podem auxiliar ou favorecer o trabalho docente na compreensão e resolução de problemas, trazendo características próximas a 'metodologia de resolução de problemas'[8]. Mas o que seria uma sequência didática no sentido formal e teórico?

Zabala (1998) afirma que uma sequência didática (SD) é um conjunto de atividades organizadas para realização de objetivos educacionais, com princípio e fim conhecidos tanto pelos alunos como pelos professores. O autor considera dimensões ou variáveis fundamentais no desenvolvimento de uma sequência didática.

Dentre elas, o autor descreve que as sequências das atividades se revelam como maneiras de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática e que a organização dos conteúdos provém da própria estrutura formal das disciplinas e formas organizativas globais e integradoras.

A concepção de Zabala (1998) sobre sequência didática, deixa bem definido o conjunto de ações e responsabilidades de estudantes e professores, é determinada pela série ordenada e articulada de atividades e os diferentes conteúdos exigem esforços e ajudas específicas, pois nem tudo se aprende do mesmo modo, no mesmo tempo e com o mesmo tipo de situação, "[...] as aprendizagens dependem das características singulares de cada um dos aprendizes; [...]". (Zabala, 1998, p.34)

Para Zabala (1998) o professor pode utilizar-se de uma vasta diversidade de estratégias na estruturação de suas intenções educacionais, sendo o ator que desafia, dirige, propõe e compara, permeando as diversas particularidades individuais de aprendizagem e sempre permeando e agrupando os conteúdos no que ele chama de dimensões educativas: conceitual, procedimental e atitudinal que correspondem a seguintes perguntas "[...] "o que se deve saber?"

[8] é um conjunto de estratégias orientadas a encontrar soluções de problemas específicos com que lidamos diariamente, baseado nos seguintes métodos de resolução: Identificação da situação, distinção do problema, investigação, planejamento e execução.

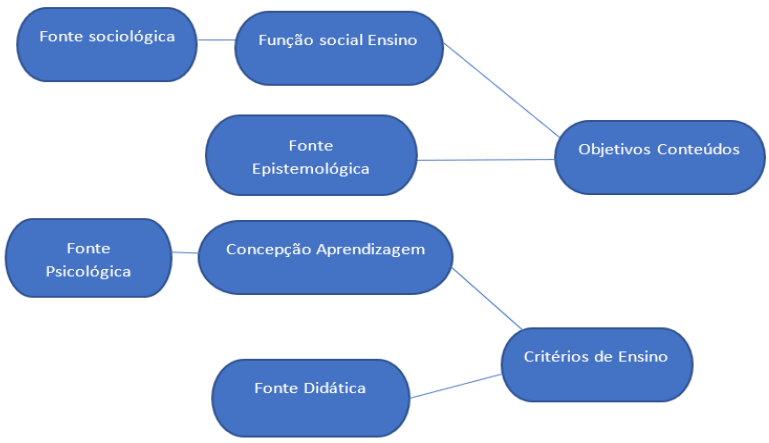
, “o que se deve saber fazer?”; “como se deve ser?”, com o fim de alcançar as capacidades propostas nas finalidades educacionais”. (Zabala, 1998, p.31)

Portanto planejar, estruturar, organizar uma sequência didática é parte fundamental para que seja caracterizada como tal, prevendo aonde chegar e o cronograma de atividades entrelaçadas, conectadas. Para Batista et al. (2016), a sequência didática serve para a reflexão sobre a prática docente, interação entre todos os envolvidos, através da observação do seu processo de desenvolvimento.

Zabala (1998) reconhece diferentes tipos de sequências didáticas, porém lança a seguinte pergunta que devemos nos fazer em primeiro lugar “[...] esta sequência é mais ou menos apropriada e, por conseguinte, quais são os argumentos que nos permitem fazer esta avaliação.”

Para além do que se descreve acima, o autor também nos aponta que o ato de ensinar deve ter uma função social, ou seja, deveremos colocar as intenções educacionais e o que pretendemos que nossos alunos consigam alcançar, além de estabelecer um agrupamento de capacidades cognitivas, motoras, autonomia pessoal afetiva, relação interpessoal, inserção e atuação social. A figura 9 nos apresenta esta ideia.

Figura 8 - Modelo teórico de prática educativa.



Fonte: adaptado de Zabala, 2018.

Os conteúdos devem também explicitar as intenções educativas (o que ensinar), relacionar tudo o que se tem que aprender para alcançar determinados

objetivos, e esses conteúdos deverão possuir natureza variada: dados, habilidades técnicas, atitudes, conceitos etc.

Zabala (1998) propõe também a classificação dos conteúdos em:

a) Conteúdos Factuais: Conhecimento de fatos, acontecimentos, situações, dados e fenômenos concretos e singulares; a idade de uma pessoa, a conquista de um território, a localização ou altura de uma montanha, os nomes, os códigos, um fato determinado num determinado momento etc.
b) Conceitos e de Princípios: englobam fatos, conceitos, princípios (“o que se deve saber?); conjunto de fatos, objetos ou símbolos que têm características comuns, e os princípios se referem às mudanças que produzem num fato, objeto ou situação em relação a outros fatos, objetos ou situações e que normalmente descrevem relações de causa-efeito ou de correlação.

A realização de nosso estudo e seu desenvolvimento apresentam etapas específicas. A base conceitual da pesquisa se centra em conceitos relativo à Teria dos Números aliados a investigações oriundas da História Matemática e vertentes epistemológicas. Sendo assim, inicialmente realizamos uma pesquisa para compreendermos os possíveis resultados que poderiam ser elementos de uma transposição didática, considerando os currículos existentes na disciplina de Matemática no Ensino Fundamental (anos finais) e no Ensino Médio, bem como, as habilidades relacionadas a cada conteúdo escolar.

Neste sentido, materiais como Programa de Iniciação a Pesquisa Junior – PIC OBMEP, que relacionam aspectos conceituais e de aprendizagem, foram sendo estudados e através de contextos históricos dos Números Primos, vários problemas foram surgindo e aprimoramos uma linha do tempo adequado a Educação Básica.

A linha do tempo dos números primos proposta, traz a evolução de um determinado conceito matemático – neste caso dos números primos - ao longo do tempo, observando os problemas que existiam e que trouxeram este conceito à tona para ser resolvido, como ele foi resolvido e que modificações este conceito sofreu ao longo do tempo.

Utilizamos como parâmetro a BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Neste documento de referência são estabelecidas as habilidades que deverão ser adquiridas pelo aluno em cada fase escolar, e na área de Matemática, que será utilizada por nós nesta sequência didática, temos no ensino fundamental as seguintes competências, conforme a BNCC:

Para o ensino fundamental de acordo com a BNCC, as competências são:

i. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
ii. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
iii. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
iv. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
v. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
vi. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o

aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

vii. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

viii. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Para o ensino médio de acordo com a BNCC, as competências são:

i. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

ii. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

iii. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver

problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

iv. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

v. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Assim ao final, esperamos utilizar algumas dessas competências explicitadas acima e desenvolver uma sequência didática que possa contribuir, com o ensino de números primos e da matemática, num sentido mais amplo, voltado para as políticas educacionais de Mato Grosso e do Brasil, visando uma cultura escolar mais fortalecida, acessível e inclusiva[9].

Encontro 1: A Primalidade na Grécia Antiga (a. C.)

Neste primeiro encontro, utilizaremos o primeiro tópico de nossa linha do tempo, que se refere a Euclides (305 a.C. – 275 a.C.) e sua obra “Os Elementos”. Os assuntos e materiais sugeridos para este encontro estão elencados no Quadro 1. É importante considerar que no decorrer dos encontros é provável que sejam identificadas dificuldades de aprendizagem em relação a operações matemáticas básicas. Nestas condições, é interessante que os conceitos sejam conduzidos e contextualizados nos problemas já propostos na sequência didática.

Quadro 1: Assuntos e materiais sugeridos para o Encontro 1

[9] Dentro destas competências temos as habilidades a serem desenvolvidas, no ensino fundamental e médio há 247 habilidades, isso geraria uma demanda de 247 sequências didáticas para área de matemática, como nossa sequência estabelece um espaço temporal, delimitado numa linha do tempo e com tema definido que é números primos, utilizaremos somente aquelas necessárias para o desenvolvimento e aprendizagem deste tema.

Assuntos	Materiais Relacionados	Vídeos Youtube (para o Professor Fundamentar sua aula)
Introdução ao contexto Histórico da linha do tempo	"Os Elementos" – Euclides (305 a.C. – 275 a.C.)	Euclides com pai da geometria https://www.youtube.com/watch?v=usHh89ld0cU Videos de 1 a 11 - picobmep Vídeo 2 – picobmep https://www.youtube.com/watch?v=epwoKNXjAUg&list=PLrVGp617x0hC8WkPHtM3IjoOiiyJs-hHh&index=2 Vídeo 11 – picobmep https://www.youtube.com/watch?v=fZzxb3rPCUY
Algoritmo de Euclides O Crivo de Eratóstenes	Texto – "O algoritmo de Euclides" Introdução a história da Matemática, páginas 196 a 198	Aritmética aula 8, 9 e 10 https://www.youtube.com/watch?v=TazceeLIF4k&list=PLrVGp617x0hC8WkPHtM3IjoOiiyJs-hHh Biografia Eratóstenes - https://www.youtube.com/watch?v=ef7eQi-4mXs Crivo de Eratóstenes - https://www.youtube.com/watch?v=9yMJeKGzN6I Crivo de Eratóstenes - https://www.youtube.com/watch?v=zYCTdahdvig Crivo de Eratóstenes – Ciências da Computação - https://www.youtube.com/watch?v=vJg3unB0J7A
Números primos – Teorema fundamental da Aritmética	Livro Iniciação à Aritmética	Capítulo 2 Representação dos naturais: Sistema Decimal, Critérios de Multiplicidade 2, 5 e 10, Critérios de Multiplicidade de 9 e 3, Números primos

Número de Aulas	20 horas aulas

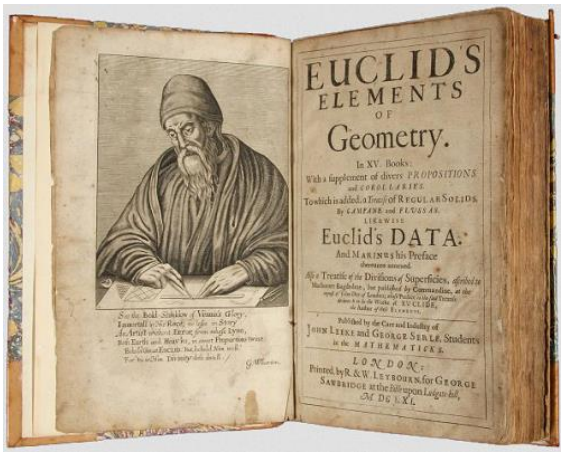
O Quadro 1 traz um roteiro sobre os conceitos a serem desenvolvidos. Este roteiro pode auxiliar no registro e descrição mais detalhada das atividades quando realizadas em sala de aula. Neste encontro inicial pode se tornar relevante a observação de que muitos documentos de época podem ser disponibilizados em arquivos públicos. Em relação às habilidades matemáticas, o Quadro 2 as sintetiza de acordo com o documento de referência.

Quadro 2: Habilidades a serem desenvolvidas com o Encontro 1

Habilidades desenvolvidas conforme a BNCC	EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples. (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

O estudo sobre Primalidade pode ser iniciado pelo conceito de divisibilidade nos números inteiros. Um dos mais célebres protagonistas na elaboração deste conceito foi Euclides (305 a.C. – 275 a.C.), que trouxe contribuições ímpares para o desenvolvimento do pensamento matemático. Considerado o pai da arte da prova, integrava o instituto de pesquisa estabelecido pelo líder grego Ptolomeu I em Alexandria por volta de 300 a.C. Lá, Euclides escreveu uma das obras mais influentes da História: Os Elementos.

Figura 9 - Livro "Os Elementos"



Fonte: https://sites.google.com/site/matematicainicio/home/os-elementos, acesso em 30 de maio de 2023.

O algoritmo da divisão euclidiana (ou simplesmente, algoritmo euclidiano), nos aponta que dados dois números inteiros, a e b, com b não nulo, existem outros dois números inteiros (únicos) q e r (com $0 \leq r < b$) de modo que a = bq +r. A partir da prova da existência e unicidade sobre q e r, algumas nomenclaturas são apresentadas. Assim, chamamos a de dividendo, b de divisor, q de quociente e r de resto da divisão euclidiana.

Quanto temos r = 0 dizemos que a é múltiplo de b, ou de modo equivalente, que b é um divisor de a e neste caso, dizemos também que a divisão é exata. Quanto aplicado sucessivas vezes (método das divisões sucessivas), o algoritmo euclidiano nos indica o Máximo Divisor Comum entre dois números inteiros a e b:

> O algoritmo euclidiano, processo para se achar o máximo divisor comum (M.D.C.) de dois números inteiros, tem esse nome porque se encontra no início do livro VII dos Elementos de Euclides, embora o processo em si sem dúvida fosse conhecido muito tempo antes. Esse algoritmo se encontra os fundamentos de vários progressos da matemática moderna. Enunciando em forma de regra, é o seguinte: Divida o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então faça a divisão do divisor pelo resto. Continue esse processo de dividir o último divisor pelo último resto, até que a divisão seja exata. O divisor final é o M.D.C. procurado. (EVES, 2011).

Segundo Eves (2011), a primeira tradução de Os Elementos para o inglês foi feita em 1570. A figura 11 apresenta a capa da referida obra.

Figura 10 - Primeira tradução para o inglês dos Elementos de Euclides, Billingsley (1570)

Fonte: Introdução à história da matemática (EVES HOWARD, 2011)

Com base no que expomos anteriormente, nesse Encontro 1 da sequência didática, temos como principal objetivo que os alunos façam por tentativa a aplicação do algoritmo euclidiano e posteriormente aplique ele na resolução de problemas. Inicialmente o professor pode fazer o acolhimento dos alunos e após esta primeira abordagem poderá instigá-los a relembrar os conhecimentos antes aprendidos em relação a múltiplos, divisores, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, números primos e compostos.

Após este momento de relembrar o conteúdo o professor poderá iniciar o exemplo abaixo:

1ª Etapa:

Daremos como exemplo primeiramente a divisão de 578 por 5:

$$\begin{array}{r|l} 578 & 5 \\ -575 & 115 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Ao dividirmos 578 por 5 obtemos um quociente igual a 115 e um resto igual a 3. Neste momento o aluno percebe que a divisão não é exata, e reconhece as denominações dos primeiros tópicos matemáticos estudados em divisão no primeiro e segundo ciclos de aprendizagem, que consiste em nomear os valores posicionais em dividendo, divisor, quociente e resto. Como a divisão não é exata, podemos prosseguir aplicando o algoritmo novamente, agora tomando como dividendo igual a 115 e divisor igual a 3, como segue:

$$\begin{array}{r|l} 115 & 3 \\ -114 & 38 \\ \hline 1 & \end{array}$$

E assim sucessivamente,

$$\begin{array}{r|l} 38 & 1 \\ -38 & 38 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Podemos dizer também que ao aplicar o algoritmo sucessivas vezes chegamos ao resto zero, sendo assim o último dividendo será o máximo divisor comum entre os números dados. Estes números trabalhados acima, são do nosso cotidiano e são conhecidos por números naturais, mas de onde eles vêm?

Conforme apresentado no livro de Abramo Hefez (2015), Introdução à Aritmética, os números naturais (números maiores que zero, que usamos naturalmente para contar, 0, 1, 2, ...) foram representados ao longo da história de várias formas, uma delas se refere a representação decimal posicional, sistema utilizado pelos babilônios há cerca de 1700 anos antes de Cristo, derivado do sistema sexagesimal (base 60), oriundo da China e na Índia, representado por uma sequência que nos é familiar formada pelos 10 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; conhecido pelo sistema decimal (10 algarismos).

2ª Etapa[10]:

Dando continuidade o professor distribuirá uma folha aos alunos com o seguinte exemplo:

1) André e Maria combinaram que durante o mês de outubro do ano de 2021, desenvolveriam algumas atividades juntos. Para lembrarem da programação, eles usaram um calendário:

Figura 11 – Calendário

OUTUBRO - 2021						
D	S	T	Q	Q	S	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Depois de André e Maria conversarem bastante, a divisão da programação ficou da seguinte forma:

- Os quatro primeiros dias múltiplos de 2 eles irão ao parque.
- Nos dias múltiplos de 9 irão visitar a prima Alice.
- Nos dias divisores de 3 irão na casa da bisavó.
- Nos 3 últimos dias primos do mês, irão jogar vídeo game juntos.

Após distribuir a folha para os alunos, o professor solicitará que acompanhem sua leitura. Ao término deverão resolver o exemplo, o professor analisa neste momento se os alunos lembram do conteúdo, deve também incentivar a interação entre eles. Para instigar os alunos faça as seguintes perguntas abaixo:

- Quais serão os dias em que André e Maria irão ao parque?

[10] Adaptado da obra Teoria dos números no Ensino Fundamental de Thalia Elias Calixto da Universidade Federal de Catalão – UFCAT, 2021.

R: {2,4,6,8}

- Quais dias André e Maria visitarão sua prima Alice?

  R: {9,18,27}
- Em quais dias irão na casa da bisavó deles?

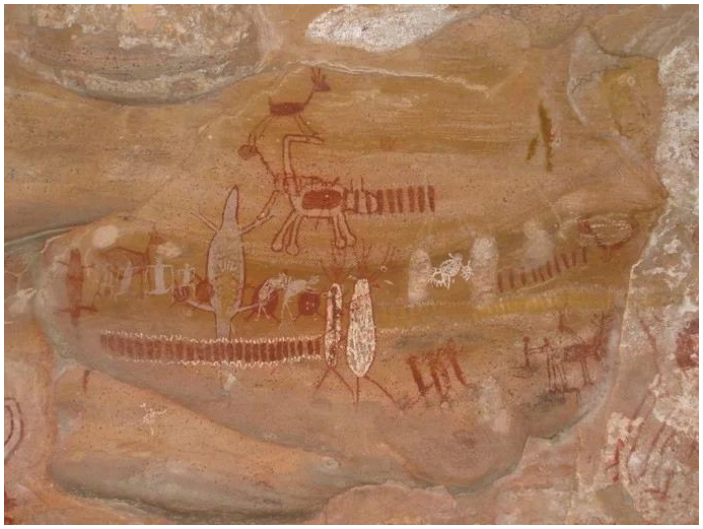
  R: {1,3}
- Quais dias eles irão jogar vídeo game juntos?

  R: {23,29,31}

Etapa 3:
Sistema posicional de números.

Após a acolhida dos alunos o professor pode apresentar a imagem Fig. 13 para mostrar aos alunos quão antiga é a ideia de número e iniciar um debate sobre a importância dos números e que eles estão em nosso cotidiano.

Figura 12 - Pintura da Serra da Capivara (PI), traços ao lado dos animais indicando quantidade.



Fonte: (BEZERRA, 2023, s.p.)

Após o debate e a identificação dos números em diversas situações e lugares, os alunos podem relembrar conforme exposto abaixo o valor posicional dos números.

Este sistema possui também valor posicional, sendo que o algarismo da extrema direita tem peso 10^0 = 1, o seguinte nesta sequência $10^1 = 10$, 10^2 = 100, ..., 10^n. Assim, o número 1458, no sistema decimal é representado:

$$1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^0.$$

Zeros a esquerda são irrelevantes conforme exemplo,

$$0231 = 0 \times 10^3 + 2\,x\,10^2 + 3\,x\,10^1 + 1 = 2\,x\,10^2 + 3\,x\,10^1 + 1 = 231.$$

Os algarismos possuem uma ordem contada da direita para esquerda onde o 8 é de primeira ordem, 5 é de segunda ordem, o 4 de terceira ordem e o 1 de quarta ordem. Cada três ordens constituem uma classe, estas são separadas por pontos.

Apresente a figura 14 para os alunos, eles devem estar familiarizados com o sentido de classe e ordem dos números.

Figura 13 - Tabela de ordens e classes.

Classe dos bilhões			Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
12ª ordem	11ª ordem	10ª ordem	9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centena de bilhão	Dezena de bilhão	Unidades de bilhão	Centena de milhão	Dezena de milhão	Unidade de milhão	Centena de milhar	Dezena de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

Fonte: (OLIVEIRA, 2023, s.p.)

Uma vez relembrado o conceito de números, podemos iniciar a ideia de múltiplo, conhecendo-se as operações básicas, soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (conceitos adquiridos no 1º e 2º ciclos do ensino fundamental), podemos fundamentar os múltiplos de 2, 3, 5, 9 e 10. Mas antes vamos solucionar algumas atividades sobre sistema posicional de numeração, presente nos livros, Encontros de Aritmética, Dutenhefner/Cadar (2017), pg. 11 a 17 e Introdução à Aritmética, Hefez (2015), veja o vídeo 11 antes.

1) (PIC, capítulo 1, problema 16) Retire 10 dígitos do número 123451234512345123451234512345 de modo que o número remanescente seja o maior possível. E para formar o menor número, como deveríamos proceder?

Solução: O maior número é 553451234512345 e o menor número é 111231234512345. Veja a solução no vídeo 2. Os vídeos de 1 a 5 contém várias

explicações sobre sistema decimal e as quatro operações, todos alunos devem assistir e formular dúvidas para serem sanadas em sala de aula.

Atenção Professor: Note que o aluno, adquire a noção de classe e ordem, e analisa que para adquirir o menor número é necessário que os números mais à esquerda deverão possuir o menor valor possível e para adquirir o maior possível o inverso, ou seja, o maior valor possível. Que ao iniciar os cortes, o ideal seja o 1 e que a eliminação dos algarismos deve ocorrer de forma sequencial, obedecendo a possível sequência de cortes, limitado a 10 cortes de algarismos, faça junto com os alunos, após a tentativa individual e comente as possibilidades, tire dúvidas quanto ao processo.

2) (PIC, capítulo 1, problema 22/Introdução à Aritmética, Hefez (2015) problema 2.2.)

Fixe três algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois algarismos distintos tomados entre os algarismos fixados. Mostre que a soma destes números é igual a 22 vezes a soma dos três algarismos fixados.

Solução: Comecemos com um exemplo. Por exemplo, com os algarismos 1, 2 e 3 podemos formar os números 12, 13, 21, 23, 31 e 32. A soma destes números é igual a 132, e a soma dos algarismos dados é igual a 1 + 2 + 3 = 6. Observe que o resultado enunciado no exercício é verdadeiro pois 22 x 6 = 132. Agora vamos para o caso geral. Suponhamos que os algarismos escolhidos são a, b e c. Com estes algarismos formamos os seguintes números de 2 algarismos:

$ab = 10a + b$
$ac = 10a + c$
$ba = 10b + a$
$bc = 10b + c$
$ca = 10c + a$
$cb = 10c + b$

Somando estes números, somando os lados esquerdos e os lados direitos destas igualdades, obtemos:

$ab + ac + ba + bc + ca + cb = 22a + 22b + 22c = 22 (a + b + c)$

Atenção Professor: Note que o aluno para perceber as possibilidades, mesmo sem querer trabalhou com permutações de a, b e c (algarismos), isso cria uma padronização (lei e/ou fórmula de construção), gerando todas as possibilidades e comprovando através de demonstração, porque o padrão apresentado ocorre. Independente dos algarismos diferentes de zero, escolhidos pelos alunos de forma individual, o padrão se repete, comente em sala e veja se os alunos constatam que é valido independente dos 3 algarismos escolhidos. Comente com os alunos o porquê de, ao se casar os 3 algarismos escolhidos 2 a 2, existem apenas 6 possibilidades diferentes de combinação.

3) (PIC, capítulo 1, problema 26/Introdução à Aritmética, Hefez (2015) problema 2.5.)

Quantos algarismos são usados para numerar um livro de 300 páginas?

Solução:

Das páginas de 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.

Das páginas de 10 até 99 existem 90 números com dois algarismos, totalizando aqui 2 x 90 = 180 algarismos.

Para numerar as páginas de 100 a 300 são necessários 201 números de três algarismos cada, totalizando 3 x 201 = 603 algarismos.

Portanto para numerar as 300 páginas do livro são necessários 9 + 180 + 603 = 792 algarismos.

Atenção Professor: Note que os alunos farão simulações com o próprio livro de matemática, utilizando a ideia de buscar pela observação e a prática o resultado da questão, provavelmente indo a página 300 e contando o número de algarismos utilizados. Note também que aparecerá dúvidas sobre qual a página inicial do livro. Apresente o método de resolução acima e discuta as possibilidades.

3.1 Múltiplos e Divisores

O professor após a acolhida dos alunos, conversar sobre os conceitos de múltiplos, o que eles sabem sobre o que é um múltiplo e logo após apresentar a situação abaixo.

Etapa 4: Relembrando sobre múltiplos

Voltando ao conceito de multiplicidade de 2, 3, 5, 9 e 10, temos que considerar como um conceito básico de multiplicação e divisão, considere a tabela abaixo feita com os múltiplos do número 2, conforme Hefez (2015):

2 x 0 = 0	2 x 5 = 10 = 10 + 0
2 x 1 = 2	2 x 6 = 12 = 10 + 2
2 x 2 = 4	2 x 7 = 14 = 10 + 4
2 x 3 = 6	2 x 8 = 16 = 10 + 6
2 x 4 = 8	2 x 9 = 18 = 10 + 8

Podemos notar que todo número acima é um múltiplo de 10 somando com um dos números: 0, 2, 4, 6 ou 8. Dando continuidade a esta ideia, considere um número natural n par qualquer, onde n = 2m, com m pertencente aos naturais e podendo escrever m na forma m'10 + m_0, onde m_0 é o algarismo das unidades de m, temos:

n = 2(m'10 + m_0) = 2m'10 + 2m_0

Logo n é múltiplo de 10 somado com um dos números 0, 2, 4, 6 ou 8.

Portanto o critério de multiplicidade de 2 segue o teorema:

"Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par." HEFEZ, Abramo, Iniciação a Aritmética, 2015, pg. 28.

Para o critério de multiplicidade para 5 e 10, temos a seguinte proposição apresentada por Abramo Hefez (2015):

“Um número é múltiplo de 5 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Um número é múltiplo de 10 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0.” HEFEZ, Abramo, Iniciação a Aritmética, 2015, pg. 28.

De fato, conforme Hefez (2015), se temos um número natural escrito na forma n = 10m + n_0 e n_0 é o algarismo das unidades de n, como 10m é múltiplo de 5 e de 10, temos que n é múltiplo de 5 ou de 10, se e só se, n_0 é múltiplo de 5 ou de 10 respectivamente, mas isso somente ocorrerá, se e só se, n_0 = 0 ou n_0 = 5, para múltiplo de 5 e n_0 = 0 para múltiplo de 10.

Para ser múltiplo de 3 e 9 para Hefez (2015) deveremos analisar os seguintes fatos:

10 – 1 = 9 = 1 x 9

10^2 – 1 = 100 – 1 = 99 = 11 x 9

10^3 – 1 = 1000 – 1 = 999 = 111 x 9

...

10^n – 1 = $\underbrace{111...1}_{\text{n vezes}}$ x 9

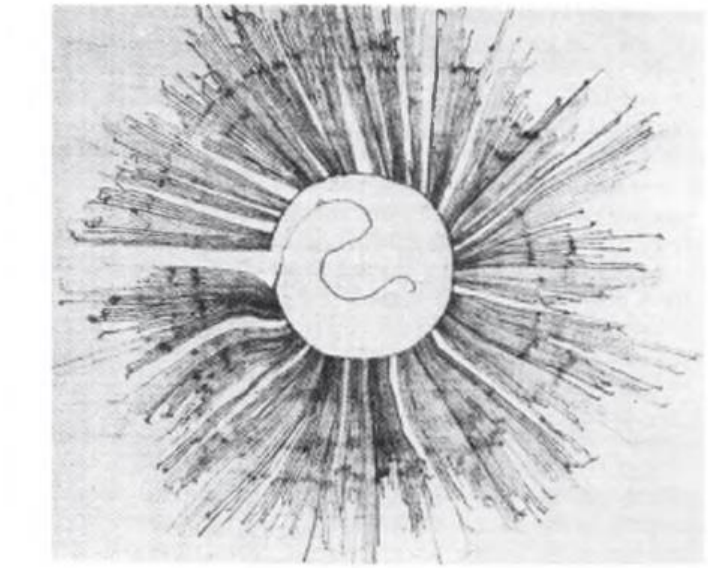
Como 9 é múltiplo de 3, todos os múltiplos de 9 também são de 3, então generalizando, todos os números na forma 10^n – 1 são múltiplos de 9 e 3.

Nos levando ao seguinte teorema:

“Um número n = $n_r \dots n_1 n_0$ são múltiplo de 9 ou de 3 se, e somente se, o número $n_r + \cdots + n_1 + n_0$ for múltiplo de 9 ou de 3, respectivamente.” HEFEZ, Abramo, Iniciação a Aritmética, 2015, pg. 30.

De fato, segundo Hefez (2015), dado um número 257 985 921, somando os seus algarismos obtemos 2 + 5 + 7 + 9 + 8 + 5 + 9 + 2 + 1 = 48, repetindo o procedimento temos 4 + 8 = 12, como 12 é um múltiplo de 3, mas não de 9, então 257 985 921 é múltiplo de 3, mas não de 9.

Figura 14 - Quipo, indígenas peruanos.



Um quipo de indígenas peruanos usado para recenseamento, mostrando números registrados por meio de nós em cordas. Nós maiores são múltiplos dos menores, e a cor da corda pode distinguir homens de mulheres (Coleção Musée de L'Homme, Paris)

Fonte: Introdução à história da matemática, Eves Howard, 2011

A ideia de múltiplo e divisor e de contagem já advêm de tempos, acima temos o Quipo Peruano, fig. 15, utilizando uma série de nós agrupados, por uma série de cordas finas, diversas coisas podiam ser contadas, cada tipo de nó, o tamanho do nó e a espessura da corda e a cor, significava coisas diferentes, e davam informações e registros de que o império dependia.[11]

Ainda sobre a ideia de múltiplos, utilizando Dutenhefner e Cadar (2017), e fazendo uma atividade básica com o número 3 multiplicando por qualquer número natural, obtemos seus múltiplos,

M(3) = {3,6,9,12,15,18,21, ...} ; (Múltiplos positivos de 3)

Com isso podemos generalizar, ou seja, dado um número natural a; o conjunto de seus múltiplos é,

M (a) = {a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, ...}

[11] Retirado de https://www.youtube.com/watch?v=_xV0-jqBbI0.

Podemos dizer com isso que dados dois números naturais a e b, dizemos que b é um múltiplo de a se existir um número natural n tal que b = an. De modo análogo, b é múltiplo de a quando o resto da divisão de b por a for igual a zero.

Neste momento conceituamos e reforçamos nos alunos o conceito de múltiplo e divisor, introduzindo a palavra fator, ou seja, como exemplo podemos dizer que 24 é múltiplo de 3 e 3 é um fator de 24, que 24 é múltiplo de 8 e 8 é um fator de 24, onde fator nada mais é que sinônimo da palavra divisor, aproveitando esta relação, na multiplicação 24 = 8 x 3, podemos dizer:

24 é divisível por 3; 24 é divisível por 8;
3 é divisor de 24; 8 é divisor de 24.

Agora peça aos alunos que assista a vídeo aula “múltiplos e divisores” sobre as definições abordadas, que busquem a ligação de Euclides com os múltiplos de divisores e sua contribuição sobre máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Consolide o conhecimento com as atividades propostas abaixo, retirada do livro Encontros de Aritmética, de Dutenhefner e Cadar (2017), pág. 47 a 50.

Etapa 5: Descobrindo múltiplos[12].

Após revisar o que são múltiplos vamos falar mais um pouco sobre:
Múltiplo de um número natural é o produto desse número por um número natural qualquer, ou seja, a tabuada dele. Veja a seguir:
M (2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}
2 . 0 = 0
2 . 1 = 2
2 . 2 = 4
2 . 3 = 6 ...

[12] Adaptado da obra Teoria dos números no Ensino Fundamental de Thalia Elias Calixto da Universidade Federal de Catalão – UFCAT, 2021.

Atenção professor: Resolva o próximo exemplo juntamente com os alunos, fazendo pergunta a todos e assim auxiliando na compreensão e fixação do conteúdo.

Quais são os múltiplos de 5?

M (5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, ...}

5.0 = 0

5.1 = 5

5.2 = 10

5.3 = 15

5.4 = 20

5.5 = 25

Atenção professor: Faça a seguinte observação com os alunos; O primeiro múltiplo de um número sempre será 0, e o segundo, ele mesmo.

E pergunte se:

Alguém sabe quando acaba os múltiplos de 5?

Qual o último número múltiplo de 5?

Lembrando que não é possível definir, pois os múltiplos de um número são infinitos.

Ao final aplique um questionário, para ser feito individualmente, com o objetivo de realizar um diagnóstico sobre a compreensão dos alunos sobre o tema abordado, faça um retrospecto na próxima aula, com as maiores dificuldades.

Etapa 6: Aplicando o que aprendemos: Após os alunos estarem familiarizados com múltiplos, vamos aumentar um pouco o nível das questões, utilizando o banco de questões do PIC.

1) (Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1)

Da igualdade 9174532 x 13 = 119268916 pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?

(a) 119268903 (b) 119268907 (c) 119268911 (d) 119268913 (e) 119268923

Solução: Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando – se ou subtraindo – se múltiplos de 13 ao número 119268916 – 13 = 119268903 é o único divisível por 13.

Quando perguntamos se um dado número b é divisível por um número a, podemos pensar que estamos perguntando se o resto da divisão de b por a é igual a zero. Utilizando as propriedades aritméticas do resto de uma divisão, discutidas anteriormente, podemos concluir algumas propriedades interessantes da divisibilidade. Por exemplo o número b = 7.13 + 9 é divisível por 7? Aqui este número b é a soma de um múltiplo de 7, 7.13, que deixa resto zero quando dividido por 7 com o número 9, que não é múltiplo de 7, pois deixa resto 2 quando dividido por 7. Daí o resto da divisão de b = 7.13 + 9 por 7 é igual a 2 e, portanto, o número b não é divisível por 7.

Considerando somente números inteiros positivos, um número da forma a.q + r é um múltiplo de a somente quando r é um múltiplo de a.

2) (PIC, capítulo 2, exercício 27) Considerando somente números inteiros positivos,

i. O número 7.38 + 5 é divisível por 7?
ii. O número 7.241 + 84 é um múltiplo de 7?
iii. O número 7.81 + 54 é divisível por 7 e por 9?
iv. Existe um número a que torna o número 7a + 6 um múltiplo de 7?
v. O número 7a + 100 pode ser divisível por 7?
vi. Para quais condições sobre b, o número 7a + b é um múltiplo de 7?
vii. Sabendo que o número 7a + b é divisível por 7, o que podemos afirmar sobre o número b?

3) (OBMEP 2011 – N2Q3 – 2ª fase) O múltiplo irado de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10, já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.
   (a) Qual é o múltiplo irado de 20?
   (b) Qual é o múltiplo irado de 9?

(c) Qual é o múltiplo irado de 45?

(d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 110?

4) Extrapolando o exercício anterior, tente resolver o seguinte desafio. Mostre que todo número natural possui um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos zero e um.

Atenção Professor: Para os alunos resolverem este desafio você vai precisar utilizar várias propriedades apresentadas neste encontro. Peça aos alunos que tentem resolver e comparem a sua solução com a que está apresentada no vídeo 36 (https://www.youtube.com/watch?v=HSD0IYDmTlg).

5) (Exercício 30, capítulo 2, Encontros de Aritmética) Sabendo-se que o número 12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 + 14 é divisível por 13, qual é o resto da divisão do número 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 por 169?

6) Se a e b são números naturais e 2a + b é divisível por 13, então qual dos seguintes números é um múltiplo de 13?

(a) 91a + b

(b) 92a + b

(c) 93a + b

(d) 94a + b

(e) 95a + b

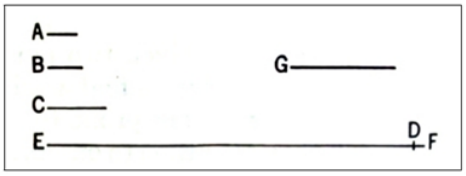
Na etapa 6 o professor acompanha os resultados e tem um diagnóstico da aprendizagem e das condições dos alunos de interpretação e construção de situações de resolução de problemas envolvendo múltiplos e divisores.

3.2 Critérios de Divisibilidade

Etapa 7: Nesta etapa, uma vez conhecendo divisibilidade, vamos discutir com os alunos os critérios que envolvem esta operação matemática. Após a acolhida dos alunos, vamos debater as informações abaixo sobre o tema divisibilidade.

Para iniciarmos a ideia de critérios de divisibilidade, deveremos nos lembrar do conceito de número primo e de fatoração. Segundo Peruzzo (2012), os números primos são conhecidos pela humanidade a muito tempo, constatado por um osso que data do ano 6500 a.C., nele estão inscritas três colunas com os números primos (11, 13, 17 e 19), há indícios também no antigo Egito e na civilização Grega. No livro Elementos, de Euclides, 300 a.C., há importantes teoremas sobre números primos, nos quais incluem-se a demonstração da infinitude dos números primos e o teorema fundamental da aritmética.

Figura 15 - Infinitude dos números primos (Proposição 20, Os Elementos)



Fonte: FILHO, 2020.

Os números primos são infinitos, (Euclides, 300 a.C., Elementos), em sua definição diz que um número natural é primo se possui exatamente dois divisores naturais distintos, caso contrário este número natural será composto, este número pode ser maior que 1 pois o número natural 1 não é primo e nem composto. Para demonstrar que os números primos são infinitos, Euclides utilizou em seu livro IX dos Elementos, uma demonstração por absurdo, onde ele considera que os números primos sejam finitos, conforme abaixo:

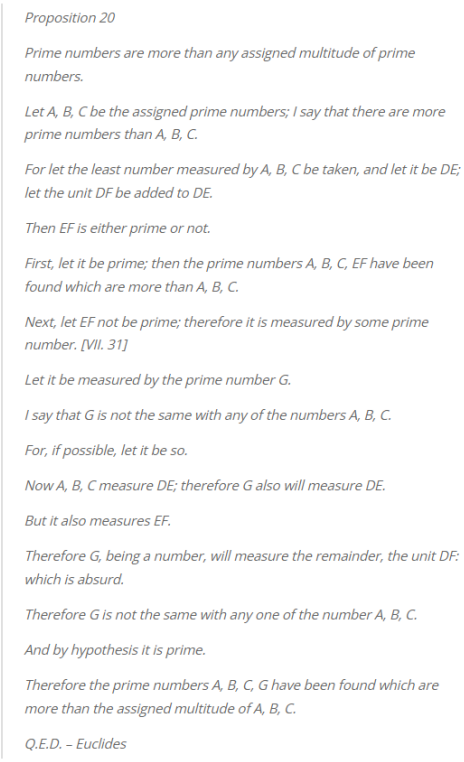
Seja P o maior número primo. Assim, temos que Primos = {2,3,5,7,11, ..., P}
Seja Q = 2 x 3 x 5 x 7 x ... x P + 1 > P.
Então temos que:

o 2 não divide Q = 2 x 3 x 5 x 7 x ... x P + 1, pois 2 divide {2 x 3 x 5 x 7 x ... x P};
o 3 não divide Q = 2 x 3 x 5 x 7 x ... x P + 1, pois 3 divide {2 x 3 x 5 x 7 x ... x P};
o 5 não divide Q = 2 x 3 x 5 x 7 x ... x P + 1, pois 5 divide {2 x 3 x 5 x 7 x ... x P};
o 7 não divide Q = 2 x 3 x 5 x 7 x ... x P + 1, pois 7 divide {2 x 3 x 5 x 7 x ... x P};

...
o P não divide Q = 2 x 3 x 5 x 7 x ... x P + 1, pois P divide {2 x 3 x 5 x 7 x ... x P};

Como P não divide Q, e 1 divide o Q e o Q divide a si mesmo, então Q é primo. (Absurdo!). Logo não podemos supor que o conjunto dos números primos é finito, portanto, ele é infinito. Mostre aos alunos o slide abaixo e tente interpretar a proposição 20 do livro os Elementos (Use o Google Tradutor para compreender melhor o texto)

Figura 16 - Demonstração Original de Euclides, Proposição 20 do Livro IX de "Os Elementos".



Proposition 20

Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.

Let A, B, C be the assigned prime numbers; I say that there are more prime numbers than A, B, C.

For let the least number measured by A, B, C be taken, and let it be DE; let the unit DF be added to DE.

Then EF is either prime or not.

First, let it be prime; then the prime numbers A, B, C, EF have been found which are more than A, B, C.

Next, let EF not be prime; therefore it is measured by some prime number. [VII. 31]

Let it be measured by the prime number G.

I say that G is not the same with any of the numbers A, B, C.

For, if possible, let it be so.

Now A, B, C measure DE; therefore G also will measure DE.

But it also measures EF.

Therefore G, being a number, will measure the remainder, the unit DF: which is absurd.

Therefore G is not the same with any one of the number A, B, C.

And by hypothesis it is prime.

Therefore the prime numbers A, B, C, G have been found which are more than the assigned multitude of A, B, C.

Q.E.D. – Euclides

Fonte: (FILHO, 2020).

Com isso, pela proposição 20 do livro IX dos Elementos de Euclides, podemos dizer que os números primos são infinitos, listando os primeiros números primos temos:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

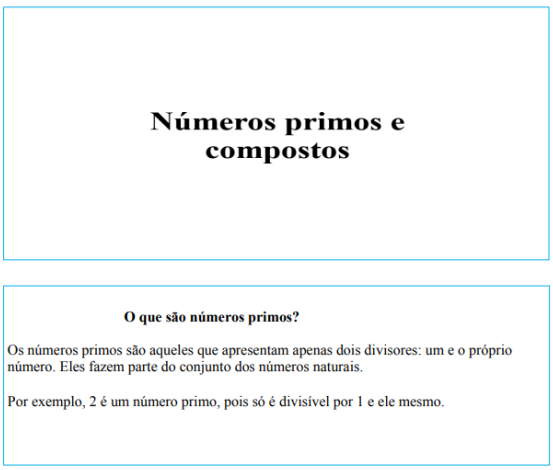
Pela própria definição apresentada podemos dizer que um número que não é primo, possui mais que dois divisores, portanto ele é composto, conforme

apresentado no livro Encontros de Aritmética, Dutenhefner e Cadar (2017), e exemplifica que o 12 não é primo, pois ele possui mais que 2 divisores, sendo eles D(12) = {1,2,3,4,6,12}, ou seja, um número composto é um produto de dois números diferentes de 1. Ainda conforme Dutenhefner e Cadar (2017), podemos ver que 6 = 2.3 e 12 = 2.6, então podemos escrever 12 = 2.2.3, ou seja, como um produto de números primos, que não poderá ser escrito como um produto de números menores. Então 12 = 2.2.3 está fatorado como um produto de números primos e isto pode ser generalizado para qualquer número natural, que nos leva a propriedade chamada de Teorema Fundamental da Aritmética: todo número natural maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos, Euclides (séc. III a.C.).

Vamos relembrar números primos e números compostos?

[13]O professor iniciará com a acolhida dos alunos e em seguida irá organizar cada aluno em seu respectivo lugar. Em sequência, apresentará os seguintes slides (figura 18), dando continuidade à aula passada, com o tema de números primos e compostos que será feita a leitura e explicação.

Figura 17 - Slide números primos e números compostos



Fonte: (GALDINO, FREITAS e MACEDO, 2021, pg. 50).

[13] Adaptado da obra Teoria dos números no Ensino Fundamental de Thalia Elias Calixto da Universidade Federal de Catalão – UFCAT, 2021, ver slides disponível na obra.

Quando um número apresenta mais de dois divisores eles são chamados de números compostos e podem ser escritos como um produto de números primos. Por exemplo, 6 não é um número primo, é um número composto, já que tem mais de dois divisores (1, 2 e 3) e é escrito como produto de dois números primos 2 x 3 = 6. Algumas considerações sobre os números primos:

O número 1 não é um número primo, pois só é divisível por ele mesmo;
O número 2 é o menor número primo e o único que é par;
O número 5 é o único número primo terminado em 5;
Os demais números primos são ímpares e terminam com os algarismos 1, 3, 7 e 9.

Atenção professor: Faça um retrospecto afirmando que o número primo possui somente dois divisores naturais: o 1 e ele mesmo. Já o número composto possui mais de dois divisores naturais, deixe isso claro com o exemplo a seguir:

D(4): {1,2,4} D(3): {1,3}
D(8): {1,2,4,8} D(7): {1,7}
D(12): {1,2,4,8,12} D(11): {1,11}

Veja que na primeira coluna há mais de dois divisores em todos, no entanto, 4, 8 e 12 são números compostos. Já na segunda coluna, temos como divisores somente 1 e ele mesmo, então, 3, 7 e 11 são números primos.

Como saber se um número é primo? Uma das maneiras de se localizar um número primo é utilizando o Crivo de Eratóstenes. Crivo de Eratóstenes é um método para determinar todos os números primos menores ou iguais a um certo número. A palavra "crivo" refere-se a um utensílio que serve para separar diferentes componentes de uma mistura, retendo as substâncias maiores e deixando passar as substâncias de dimensões mais reduzidas. Usando o Crivo de Eratóstenes iremos separar os números primos dos números não primos (ou seja, do número 1 e dos números compostos). (ATRACTOR, 2019).

Etapa 8: Professor neste momento levaremos os alunos a desenvolverem fatoração, identificar números primos e números compostos, conforme apresentado acima, consolidando a ideia do Teorema Fundamental da Aritmética e a familiaridade com os números primos. Resolvendo atividades

referentes ao livro Encontros de Aritmética, Dutenhefner e Cadar (2017), e Introdução a Aritmética, Hefez (2015).

(Exercício 32, Encontros de Aritmética, Dutenhefner e Cadar) Escreva o número 1820 como um produto de números primos.

Solução: Podemos fazer isto escrevendo o número 1820 ao lado de uma barra vertical. Do lado direito desta barra vamos escrevendo os divisores primos de 1820 e do lado esquerdo vamos escrevendo os resultados das divisões sucessivas por estes fatores primos, como está indicado a seguir:

1820	2
910	2
455	5
91	7
13	13
1	

Multiplicando os números do lado direito da barra vertical obtemos a fatoração de 1820 como um produto de números primos: $1820 = 2^2 . 5 . 7 . 13$

(Problema 2.12, Introdução a Aritmética, Hefez (2015), página 31) Diga quais dos seguintes números são primos e quais são compostos:

9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 21, 23, 47, 49.

Os números primos são infinitos? Euclides exibiu todos os números primos? Seria isto possível?

O matemático francês Pierre de Fermat (1601-1655) afirmava que o número 4.294.967.297 é primo, porém o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) afirmava que ele é composto. Qual deles estava com a razão? Pesquise e avalie a sua resposta.

(Exercício 33, Encontros de Aritmética, Dutenhefner e Cadar) Dê a fatoração em números primos de 378, 638 e 1800.

Peça aos alunos que assista o vídeo 10 do canal Picobmep do Youtube e aprenda mais sobre o conceito de número primo, Teorema Fundamental da Aritmética e Crivo de Eratóstenes (próximo encontro).

3.3 O Crivo de Eratóstenes

Etapa 9: Após assistir o vídeo 10 do canal Picobmep, tarefa da aula passada, o professor dará introdução a ideia do Crivo de Eratóstenes iniciando com o texto abaixo:

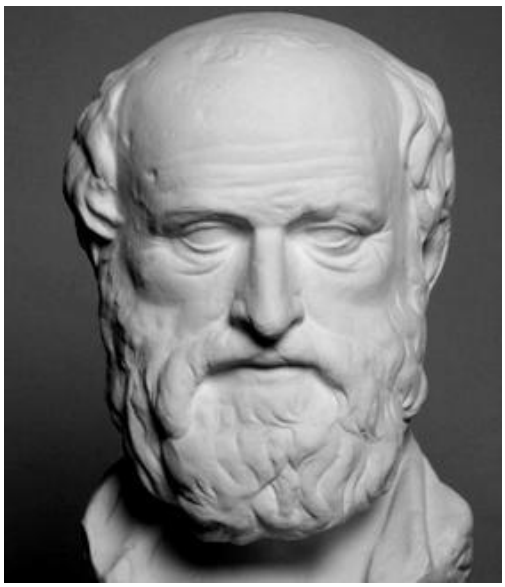
Para determinar se um número é primo ou não, procuramos se ele obedece ao critério de ter apenas 2 divisores (1 e o próprio número), porém em um intervalo de números, como saber quais são primos e quais são compostos? Existe um método sistemático para determinar quantos primos existem em um intervalo? Segundo Jucimar Peruzzo (2012), o método mais antigo para determinar se um número é primo ou não foi desenvolvido por Erastóstenes (276 a.C. à 194 a. C.), e foi chamado de crivo (peneira) de Eratóstenes. Eratóstenes, nasceu entre 276 e 273 a.C. em Cirene, Alexandria, foi matemático, poeta, atleta, geógrafo, astrônomo, gramático e Bibliotecário na Grécia Antiga, tornou-se bibliotecário aos 40 anos de idade, convidado por Ptolomeu III do Egito e tornou-se chefe da Universidade local. Conforme Howard Eves (2011) por Hygino H. Domingues, Eratóstenes era atleta campeão em 5 modalidades e por isso era conhecido na Universidade de Alexandria como Pentathlus (campeão em cinco esportes atléticos).

Eratóstenes tornou-se célebre em aritmética por seu crivo, segundo Howard Eves por Hygino H. Domingues (2011), usado para achar todos os números primos menores que um número n dado. A sistemática consiste em colocar os números menores que n em ordem, ainda segundo Howard Eves, por Hygino H. Domingues (2011), eliminam-se todos os números compostos da sequência riscando-se, múltiplos de 2, 3 (exclusive) e seus múltiplos, 5 (exclusive) e seus múltiplos, ao final todos os números não riscados juntamente com o 2, formam a lista dos primos menores que n. Utilizando uma ideia mais analítica, para Abramo Hefez (2015), segue o método a seguir:

“Se um número natural a > 1 é composto, então ele é múltiplo de algum número primo p tal que p^2 ≤ a. Equivalentemente, é primo todo número a que não é múltiplo de nenhum número primo p tal que p^2 < a.”

Então o método consiste, segundo Abramo Hefez (2015), em escrever os números de 2 até n em uma tabela e para obter os números primos desta ordem n, o primeiro número desta o sequência é o 2 que é primo e não é múltiplo de nenhum número anterior, risca-se todos os múltiplos de 2, após o 2 temos o 3 que também é primo, pois não é múltiplo de nenhum número anterior diferente de 1, risca-se todos os múltiplos de 3, assim procede-se com o 5, 7,..., primo, ..., n, ao término desse procedimento, os números não riscados são todos primos menores ou iguais a n.

Figura 18 - Eratóstenes de Cirene



Fonte: (RAMOS, 2020).

Professor, agora vamos apresentar o Crivo de Eratóstenes para os alunos:

Construção do Crivo de Eratóstenes:

- Crie uma tabela e escreva os números de um intervalo, por exemplo de 1 a 100.
- O número 1 pode ser eliminado, pois ele não é um número primo.
- Marque todos os números primos menores que 10 (2, 3, 5 e 7) com cores diferentes.
- Elimine os múltiplos desses números marcando-os com as respectivas cores.
- Os números restantes na tabela, que não foram marcados, são os números primos.

Figura 19 - Crivo de Eratóstenes de 1 a 100

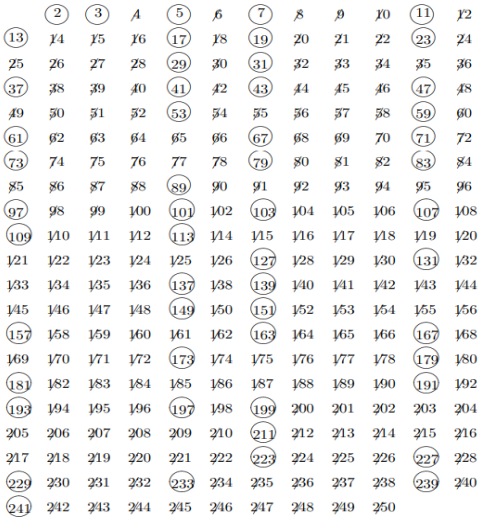
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Pela tabela podemos perceber que existem 25 números primos entre 1 e 100. São eles:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Fonte: (GALDINO, FREITAS e MACEDO, 2021)

Abaixo temos mais um exemplo de aplicação do crivo de Eratóstenes agora nos números em um intervalo até 250.

Figura 20 - O CRIVO DE ERATÓSTENES DE 1 a 250



	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168
169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204
205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216
217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228
229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250		

Fonte: Iniciação a Aritmética, Hefez, 2015, pg. 35.

Os números primos, como dito anteriormente, são infinitos e para Jucimar Peruzzo (2012) desafiam há muito tempo a imaginação do ser humano, por exemplo, no que diz respeito à sua distribuição, ao reconhecimento e a geração de primos. A sequência dos números primos não apresenta qualquer regularidade, apresentando-se algumas vezes mais próximos uns dos outros e em outras vezes mais afastados, podemos observar isso na tabela abaixo, com o conjunto dos números primos até 1000.

Figura 21 - Números primos de 1 até 1000.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,
59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109,
113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173,
179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233,
239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293,
307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367,
373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433,
439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499,
503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577,
587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643,
647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719,
727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797,
809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863,
877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947,
953, 967, 971, 977, 983, 991 e 997

Fonte: (PERUZZO, 2012, pg. 7).

Justamente por esta característica aparente de não possuir qualquer ordem na distribuição e sucessão, causa tormento e ao mesmo tempo fascínio nos matemáticos de todo mundo. Com isso fica a seguinte pergunta por Peruzzo (2012), se os primos são os blocos constituintes dos números inteiros e base de nossa compreensão do universo, por que não existe uma fórmula matemática?

Atenção Professor: Com esta pergunta intrigante, vamos levar os alunos a pesquisar outras particularidades e curiosidades sobre os números primos e resolver os seguintes exercícios abaixo, envolvendo crivo de Eratóstenes.

(Lista extra, O crivo de Eratóstenes, retirado de COLEGIO PEDRO II , acesso 10/03/2023, às 07:58) O crivo de Eratóstenes:
Instruções:

a) Risque o número 1 (1 não é primo e nem composto);
b) Circule o número 2 e risque todos os outros múltiplos de 2;
c) Circule o próximo número não riscado e risque todos os outros múltiplos deste número;
d) Repita o terceiro passo;
e) Quando circular um número maior do que 12 o processo terminou. Todos os números que não foram riscados são primos.
f)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130

a) Quantos são os números primos entre 1 e 130? Liste esses números abaixo:

b) Qual é o único número primo par?
c) Quantos números primos começam por 9?
d) Qual coluna possui a maior quantidade de números primos?
e) Quantas colunas possuem somente um número primo?
f) Quantos números primos começam por 8?
g) Quantas linhas possuem exatamente quatro números primos?
h) Quantas colunas possuem exatamente cinco números primos?
i) Qual linha possui menor quantidade de primos?
j) Dê dois exemplos de números menores do que 130 que sejam divisíveis por 2, 3 e 5 simultaneamente:
k) Dê dois exemplos de números menores do que 130 que sejam divisíveis por 5 e 10 simultaneamente:
l) Dê dois exemplos de números menores do que 130 que sejam divisíveis por 3, 5 e 9 simultaneamente:

Partindo desta premissa, vamos procurar primos gêmeos, mas o que são primos gêmeos?

Dois números primos são chamados de Números Primos Gêmeos, quando existe uma diferença de 2 unidades entre eles, (p, p + 2).

Exemplo: 3 e 5, ou seja, 3 é primo, 5 é primo e a diferença entre eles é de duas unidades, sabendo disso e conhecendo os primos de 1 a 100, encontre os primos gêmeos entre os 100 primeiros naturais.

Solução: Os alunos pelo Crivo de Eratóstenes, já conhecem os primos nos 100 primeiros naturais: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Então eles devem procurar por tentativa primos que tem a diferença entre eles de apenas 2 unidades; são eles:

3 e 5; 5 e 7; 11 e 13; 17 e 19; 29 e 31; 41 e 43; 71 e 73.

2.4 Encontro 2: Números Primos na Europa: Os estudos de Fermat, Mersenne e Euler nos séculos XVII e XVIII.

Veremos neste encontro, um pouco sobre equações e resultados, baseado no que Fermat, Mersenne e Euler propõem entre o século XVII-XVIII

Quadro 3: Assuntos e materiais sugeridos para o Encontro 2.

Assuntos	Materiais Relacionados	Vídeos Youtube (para o Professor Fundamentar sua aula)
Equações e Resultados	Introdução a Aritmética; Introdução à História da Matemática;	Fermat- Números Primos (em espanhol) https://www.youtube.com/watch?v=PXIPZm_LKns Números de Fermat e Mersenne https://www.youtube.com/watch?v=tITBCepQXW8 Pequeno Teorema de Fermat https://www.youtube.com/watch?v=aXAMQ8ASEhI

Quadro 4: Habilidades a serem desenvolvidas com o encontro 2.

Habilidades BNCC trabalhadas	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples. (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor. (EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário. (EF08MA06) : Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Número de Aulas	10 horas aulas

3.4 Os estudos de Fermat, Mersenne e Euler

Etapa 10: Professor neste encontro vamos introduzir os números de Fermat e algumas de suas propriedades. No primeiro momento estarão organizados individualmente e após esta etapa, no momento das atividades

sobre números de Fermat formarão duplas, primeiramente vamos relembrar e ver o que os alunos sabem sobre o tema.

Conforme Du Sautoy (2007), matemáticos tentaram encontrar fórmulas que, mesmo sem gerar todos os números primos, produzissem ao menos uma lista de primos, alguns tiveram diferentes graus de êxito, Fermat acreditava haver encontrado uma.

Em 1640 Pierre de Fermat estabeleceu a fórmula,

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, ...$$

E Segundo Peruzzo (2012) Fermat acreditou que todos os números por ela gerada eram primos. Fermat consegue provar para os quatro primeiros números, porém não possui subsídios para provar o quinto, muitos anos mais tarde Euler prova que sua suposição era falsa, pois o quinto número era composto.

$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$

Ainda não se sabe se existem outros números de Fermat, além dos 4 apresentados.

Euclides de Alexandria estabeleceu que onde p é um número primo, sabendo disso escreva abaixo utilizando os primos p ={2, 3, 5, 7 e 11} e veja se Euclides estava correto:

- (Neste momento leve o aluno a fazer a substituição em p e analisar que o primo 11 não estabelece um número primo)
- Esta atividade pode ser feita em dupla.

$2^p - 1$, com p valendo p ={2, 3, 5, 7 e 11}

$2^2 - 1 =$ __, (o aluno chega ao número 3 e afirma “é primo”)

$2^3 - 1 =$ __, (o aluno chega ao número 7 e afirma “é primo)

$2^5 - 1 =$ __, (o aluno chega ao número 31 e afirma “é primo” e começa a ter a mesma concepção de que será válido para todos os p (primos), porém o professor insiste na continuidade, até o p = 11)

- A partir desta parte, diga para que o aluno use o Crivo de Eratóstenes.

$2^7 - 1 =$ ___, (o aluno chega ao número 127, mas utilizando o Crivo de Erastóstenes, que 127 “é primo”, e continua a desconfiar que isso esta fórmula gera um padrão)

- Neste momento começa a ficar muito extenso e o uso da calculadora se faz necessário.

$2^{11} - 1 =$ ___, (o aluno deverá utilizar uma calculadora e chegará ao valor 2047, terá dúvida se é primo ou não, e por tentativas ou pesquisa vê que se trata de um número composto, ou seja, 2047 = 23 x 89, logo a fórmula é limitada, confirmando o fator histórico do início do Encontro por Du Sautoy (2007).)

- Nos momentos finais faça a correção e verifique os resultados corretos e os erros cometidos pelos alunos.
- Agora levaremos os alunos a conhecerem os primos de Mersenne e verificar o método de LUCAS-LEHMER.

Dando continuidade ao fator histórico, em 1640, Marin Mersenne (1588-1648), em cartas trocadas com René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), estabelece a seguinte conjectura, discutindo números primos, achou que os números $2^p - 1$, quando p ={2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 e 257}, achou que a resposta seriam primos, e ficaram conhecidos como primos de Mersenne, porém séculos depois descobriu-se que para 67 e 127 não temos números primos e que abaixo de 257, para 61, 89 e 107, temos primos de Mersenne.

[14]Euler (1707-1783), estudando números primos da forma $2^p - 1$, chegou a $M_{31} = 2^{31} - 1 = 2.147.483.647$ é um número primo, detalhe, é um número enorme e Euler não possuía nenhum recurso tecnológico, apenas por tentativa, contas feitas a mão.

[15]Em 1856 aparece o método de LUCAS-LEHMER, desenvolvido por Édouard Lucas (1842-1891) e Derrick Henry Lehmer (1905-1991), que diz se um número de Mersenne é ou não primo, utilizando a fórmula $S_{n+1} = S_n^2 - 2$, vamos a partir daqui levar o aluno a desenvolver substituições para ver o que temos como resposta :

$S_0 = 4$

---

[14] Retirado do canal do Youtube Toda a Matemática, Primos de Mersenne.
[15] Retirado do canal do Youtube Toda a Matemática, Primos de Mersenne.

$S_1 = 4^2 - 2 = 14$

$S_2 = 14^2 - 2 = 194$

$S_3 = 194^2 - 2 = 37634$ ...

$S_{n+1} = S_n^2 - 2$,

Logo o método seria assim, $M_p = 2^p - 1$, vamos verificar se é primo e se S_{p-2} é múltiplo de M_p: (Auxilie os alunos a desenvolver a prova abaixo.)

$M_p = 2^p - 1$

S_{p-2} = _____ = (é múltiplo de M_p ?)

$M_3 = 2^3 - 1 = 7$

$S_{3-2} = S_1 = 14$ (conforme calculado anteriormente) = 7 x 2, então S_1 é múltiplo de M_3, logo M_3 é um número primo.

$M_5 = 2^5 - 1 = 31$

$S_{5-2} = S_3 = 37634$ (conforme calculado anteriormente) = 31 x 1214, então S_3 é múltiplo de M_5, logo M_5 é um número primo.

- Após os alunos fazerem as verificações acima, os cálculos começam a ficar um tanto complicados, por isso apresente a eles a proposta abaixo:

Porém este cálculo vai ficando cada vez maior, e torna-se necessário o uso de tecnologias, como os números de Mersenne são extremamente grandes, com milhões de dígitos, então será necessário o uso do computador.

- (Neste momento leve o aluno a pesquisar o site http://www.mersenne.org, que tem como premissa calcular novos números de Mersenne, através da disponibilização do seu computador, que ficará por um tempo calculando novos números, atualmente estamos no número $2^{82.529.933} - 1$, os últimos números descobertos saíram deste projeto, comente a relevância deste projeto).

Etapa 11: Professor nesta etapa levaremos os alunos a compreenderem e aprofundar o conceito de primos utilizando nove teoremas de Fermat, onde utilizaremos 4 em nossos exercícios. Deixe que os alunos façam um reconhecimento de cada teorema e discutam

entre duplas, depois disso auxilie nas partes em que tiverem mais dúvidas.

Para Eves (2011, p. 391) Fermat elenca uma lista de nove teoremas que fazem parte da teoria dos números, conforme abaixo:

1. Se p é primo e a é primo com p, então a^{p-1} – 1 é divisível por p. Por exemplo se p = 5 e a = 2, então a^{p-1} – 1 = 15 = (5) (3). Esse teorema é conhecido como o pequeno teorema de Fermat;
2. Todo primo ímpar pode ser expresso como a diferença de dois quadrados de uma, e uma só, maneira. p = $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$;
3. Um primo da forma 4n + 1 pode ser representado como a soma de dois quadrados. Por exemplo, 5 = 4 + 1, 13 = 9 + 4, 17 = 16 + 1, 29 = 25 + 4. O primeiro enunciado desse teorema é de Fermat e figura em uma carta de Mersenne, datada de 25 de dezembro de 1640. A primeira demonstração publicada desse resultado, incluindo a unicidade de representação, é de Euler e data de 1754.
4. Um número primo de forma 4n + 1 é apenas uma vez a hipotenusa de um triângulo de lados inteiros; seu quadrado é duas vezes; seu cubo é três vezes; e assim por diante.
5. Todo inteiro não negativo pode ser representado como soma de no máximo quatro quadrados. Esse difícil teorema foi demonstrado por Lagrange em 1770.
6. A área de um triângulo retângulo de lados inteiros não pode ser um quadrado perfeito inteiro. Esse resultado também foi estabelecido por Lagrange posteriormente.
7. Há uma única solução inteira de x^2 + 2 = y^3 e apenas duas de $x^2 + 4 = y^3$. Esse problema foi lançado como um desafio aos matemáticos ingleses. A solução da primeira equação é x = 5, y = 3 e as soluções da segunda são x = 2, y = 2 e x = 11, y = 5.
8. Não existem inteiros positivos x, y, z tais que $x^4 + y^4 = z^2$.
9. Não existem inteiros positivos x, y, z, n, onde n > 2, de modo que $x^n + y^n = z^n$, conjectura do último teorema de Fermat. (Eves, 2011, p.391)

Agora que os alunos conhecem a parte história descrita acima, vamos desenvolver alguns exercícios dos tópicos 1, 2, 3 e 4, conhecido como Pequeno Teorema de Fermat:

1) Exercício (PIC – Aula 55, https://www.youtube.com/watch?v=m_69JCcCkCs) Calcule o resto da divisão de:
    a. 2^{257} por 7
    b. 3^{23456} por 13

Solução:

Temos que 7 é primo e não divide 2, portanto utilizaremos o pequeno teorema de Fermat (teorema 1).

N ≡ 2^{257} (mod 7), como 257 = 6x42+5, temos:

N ≡ 2^{6x42+5} (mod 7)

N ≡ 2^{6x42} x 2^5(mod 7) (temos 2^{p-1} (mod p)) e isso é congruente a 1 mod 7.

N ≡ 1^{42} x 2^5(mod 7)

N ≡ 2^5(mod 7)

N ≡ 32 (mod 7), Portanto N ≡ 4 (mod 7), então o resto é 4.

Temos que 13 é primo e não divide 3, portanto utilizaremos o pequeno teorema de Fermat.

N ≡ 3^{23456} (mod 13), como 23456 = 12x1954 + 8, temos:

N ≡ $3^{12x1954+8}$ (mod 13)

N ≡ $3^{12x1954}$ x 3^8(mod 13) (temos 3^{p-1} (mod p)) e isso é congruente a 1 mod 13.

N ≡ 1^{1954} x 3^8(mod 13)

N ≡ 3^8(mod 13), desmembrando o 3^8 = $3^3x3^3x3^2$

N ≡ $3^3x3^3x3^2$ (mod 13), 3^3 =27 e 13/27 e sobra resto 1.

N ≡ $1x1x9$ (mod 13), Portanto N ≡ 9 (mod 13), então o resto é 9.

2) Testando o teorema 2: Todo primo ímpar pode ser expresso como a diferença de dois quadrados de uma, e uma só, maneira. p = $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

Uma vez conhecendo os primos, vamos testar diferentes primos ímpares (todos exceto o 2) e ver a validade do teorema.

Solução: supondo que você escolha o primo ímpar p = 3, temos:

p = $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

3 = $\left(\frac{3+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3-1}{2}\right)^2$ = 4 – 1

3 = 3, ok é válida, e isso pode ser aplicada a qualquer primo ímpar.

3) O teorema 3 também é possível analisar a validade, veja:

P = 4n + 1
5 = 4x1 + 1
13 = 4x3 + 1
17 = 4x4 + 1
29 = 4x7 + 1

Escrevendo como a soma de dois quadrados temos:

5 = $2^2 + 1^2$
13 = $3^2 + 2^2$
17 = $4^2 + 1^2$
29 = $5^2 + 2^2$

Ache mais um primo da forma P = 4n + 1 e veja se teremos a soma de dois quadrados.

4) Prove o teorema 4, construindo o triângulo retângulo de hipotenusa 5 e 13, observe as relações.

Ao final o professor pode avaliar os pontos que os alunos tiveram mais dificuldades e comentar sobre os teoremas que eles utilizaram.

Encontro 3: A Busca por Possíveis Padrões

Veremos neste encontro, Possíveis Padrões de Frequência (Gauss, séc. XIX), a hipótese de Riemann (1859) e os zeros da função zeta (Hardy e Ramanujan, 1914 a 1919).

Quadro 5: Assuntos e materiais sugeridos para o Encontro 3.

Assuntos	Materiais Relacionados	Vídeos Youtube (para o Professor Fundamentar sua aula)
Possíveis Padrões de Frequência A Hipótese de Riemann Os Zeros da Função Zeta	O Fascínio dos números primos. Introdução a história dos números primos. A música dos números primos.	Como Gauss Contava os Primos https://www.youtube.com/watch?v=LKOTMCmx9ng Hipótese de Riemann parte 1, 2, 3 e 4 https://www.youtube.com/watch?v=8Bqyd-W9lsk https://www.youtube.com/watch?v=XkM_WeExU2M https://www.youtube.com/watch?v=-NSJm5tvaow https://www.youtube.com/watch?v=9IXdNbwDomo Quem foi Ramanujan https://www.youtube.com/watch?v=RMB8s27Rjeo

Quadro 6: Habilidades a serem desenvolvidas com o encontro 3.

Habilidades BNCC trabalhadas	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples. (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor. (EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário. (EF08MA06) : Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

	(EF03MA26 EF0327) Coleta, classificação, organização e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos em barras verticais e horizontais (variáveis categóricas; legenda; título; fonte de dados; elementos de uma tabela; eixos de dados).
Número de Aulas	10 horas aulas

Etapa 12: Nesta etapa vamos levar os alunos a se aprofundar mais na história dos números primos e vislumbrar as ideias de Gauss sobre Padrões, apresente o vídeo do *youtube* “Como Gauss contava os primos”, após isso comente sobre o que aprenderam e inicie a inserção deles no mundo de Gauss através do texto abaixo.

3.5 Como Gauss contava os números primos

Como os matemáticos estavam obcecados por uma fórmula que gerasse todos os números primos, segundo Peruzzo (2012), Gauss procurou descobrir quantos primos havia em um intervalo, iniciou pelos 100 primeiros números, os 1000 primeiros, os 10000 primeiros e assim sucessivamente e reparou que se tomássemos o número x, existia uma forte regularidade quando pegávamos um intervalo entre 1 e x.

Atenção Professor: Deixe que os alunos tentem achar sozinhos os padrões abaixo, dê pequenos auxílios e veja até onde eles conseguem perceber que realmente existe um padrão e após apresente o achado de Gauss conforme figura 23.

Vamos por tentativas utilizar o mesmo pensamento de Gauss para 10, para 100 e para 1000, levando o aluno a estabelecer a regularidade conforme preconiza Peruzzo (2012):

Primos entre 1 e 10: {2, 3, 5, 7}, são ao todo 4 números primos.

Primos entre 1 e 100: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... , 97}, são ao todo 25 números primos.

Primos entre 1 e 1000: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, ... , 97, ... , 997}, são ao todo 168 números primos.

Com estes dois dados os alunos já conseguem construir o início da tabela proposta por Gauss.

- (Veja neste momento que os alunos com já conhecem algo sobre Gauss observam que ele sempre procura explicitar a contagem para encontrar padrões). Segue a tabela inicial abaixo:

Figura 22 - Padrões (Gauss)

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\pi(x)}$
10	4	2,5
100	25	4,0
1 000	168	6,0
10 000	1 229	8,1
100 000	9 592	10,4
1 000 000	78 498	12,7
10 000 000	664 579	15,0
100 000 000	5 761 455	17,4
1 000 000 000	50 847 534	19,7
10 000 000 000	455 052 511	22,0

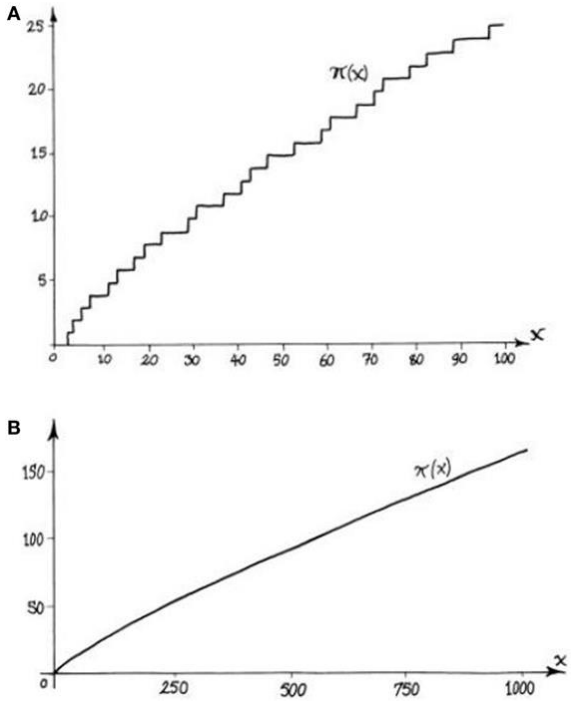
Fonte: (PERUZZO, 2018)

Os alunos poderiam da continuidade a tabela com 10.000, 100.000, 1.000.000, ... , porém não se faz necessário pois já se familiarizaram com o processo pensado por Gauss, estes números podem ser dados pelo professor para demonstrar o padrão da proporção de 2,3 a cada multiplicação por 10, porque os primos segundo Peruzzo (2012), seguem logaritmos cuja base é o número e (ln = $\log_e$).

Formando assim a função π (x), formando segundo Ribenboim, “uma escadinha”, a cada vez que x encontra um primo ela sobe um, conforme gráfico abaixo:

Atenção Professor: se possível tente demonstrar para os alunos que quanto maior a distância do intervalo, o gráfico vai ficando mais regular.

Figura 23 - Frequência dos números primos



Fonte: https://parajovens.unesp.br/numeros-primos-por-que-sao-tao-empolgantes/, Acesso em 09 de abril de 2023.

Se utilizarmos π (x) em função de x para $\rightarrow \infty$ teremos um comportamento do gráfico bem regular, tornado praticamente uma função linear, os cálculos nos levam a números primos cada vez mais raros e espaçados, à medida que aumentamos o intervalo de estudo.

Etapa 13: Professor nesta etapa levaremos os alunos a conhecerem a hipótese de Riemann e sua importância através dos vídeos Hipótese de Riemann (1, 2, 3 e 4) descritas no quadro acima, conhecer mais sobre Hardy, Littlewood e Ramanujan no vídeo “Quem foi Ramanujan?” e entender o importante legado deixado por eles, apresentar aos alunos a conjectura do Goldbach e desenvolver um pouco sobre as partições de Ramanujan em um exercício. Após os vídeos faça uma apresentação do texto abaixo.

3.6 Hardy e Ramanujan – Os zeros da função Zeta – 1914 – 1919

Godfrey H. Hardy foi um dos maiores especialistas em teoria dos números e análise matemática, Hardy pertencia a universidade de Trinity e conforme Peruzzo (2012), Hardy era muito interessado no estudo de números primos e passou grande parte de sua vida tentando provar a Hipótese de Riemann, provou em 1914 que existiam um número infinitos de zeros alinhados sobre a linha de Riemann, fazendo grande progresso, porém faltou provar que todos os zeros estavam alinhados sobre a linha norte e sul que passa por 1/2.

Hardy na universidade de Trinity em 1910, recebeu um matemático oito anos mais jovem J. E. Littlewood, que juntos passaram 37 anos explorando novos conceitos matemáticos e geraram centenas de artigos em parceria, porém enquanto a dupla Hardy e Littlewood exploravam a matemática de Riemann, do outro lado do oceano, em Madras, na Índia, um jovem chamada Srinivasa Ramanujan estudava com bastante dedicação os números primos.

Este jovem Ramanujan aos 16 anos inicia sua inspiração para com a matemática, após ler um livro com 4.400 resultados clássicos matemáticos de George Carr e mesmo sem formação acadêmica consegue extrapolar grandes ideias nas áreas de análise matemática e teoria dos números. Nos anos seguintes passou provando cada um dos 4.400 teoremas e desenvolvendo sua matemática.

Ao ganhar um bolsa de estudos para universidade, começa a trabalhar e estudar em Madras, demonstra muito talento e é recomendado pelos professores que entre em contato com os matemáticos de Cambridge através de cartas, e é em uma dessas cartas que Hardy se depara com um possível gênio da matemática e fica impressionado com a apresentação, que de início era duvidosa, onde Ramanujan apresenta, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{-1}} + \ldots = -\frac{1}{12}$. Hardy e Littlewood percebem que essa soma infinita de Ramanujan era o que estava faltando para função zeta de Riemann, possibilitando a eles prosseguirem nos estudos.

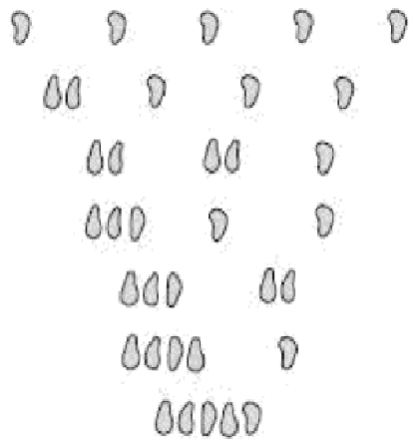
Hardy ao constatar que Ramanujan era um possível gênio da Matemática convida-o para atravessar o oceano e ir a Cambridge na Inglaterra e lá Hardy, Littlewood e Ramanujan desenvolvem importantes trabalhos de 1914 a 1919, sobre números primos e na busca incessante por um Fórmula que poderia calcular qualquer número primo, foi em outra área que o indiano deixou sua marca ao criar um caminho para calcular o número de partições e contribuindo para avanços significativos na conjectura de Goldbach (todos os números pares são a soma de dois números primos), um dos grandes problemas não resolvidos da teoria dos números primos até os dias atuais.

Atenção Professor: Vamos através do exercício abaixo mostrar um pouco da genialidade de Ramanujan e de seu grande trabalho com Hardy.

Para os alunos entrarem um pouco no que diz Hardy, Litlewood e Ramanujan, vamos trabalhar a ideia de partições conforme situação abaixo:

De quantas maneiras diferentes é possível dividir cinco pedras em grupos separados?

Figura 24 - As sete partições possíveis de cinco pedras



Fonte: (PERUZZO, 2018)

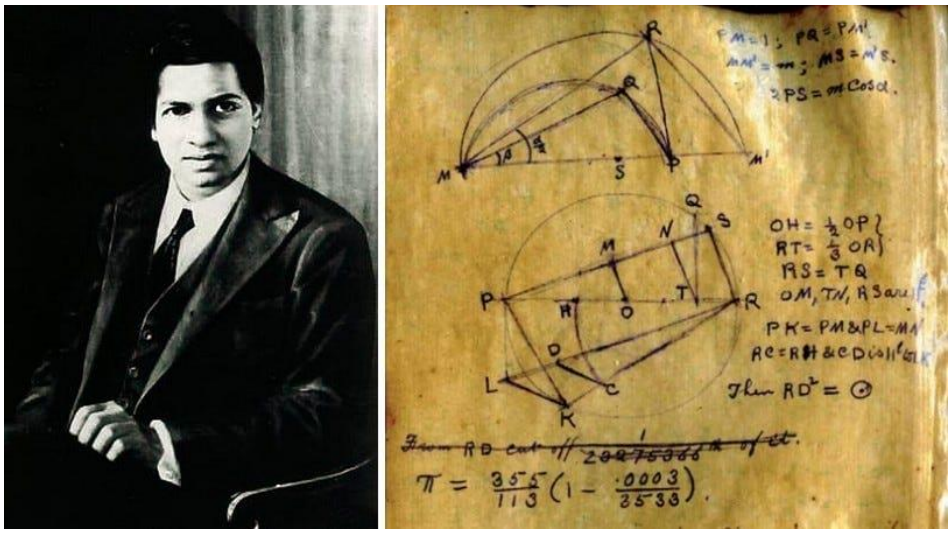
Ou seja, existem 7 partições possíveis para o número 5, a tabela abaixo mostra o número de partições entre os números 1 e 15:

Número 15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Partições 176	1	2	3	5	7	11	15	22	32	42	56	77	101	135

Atenção Professor: Peça a seus alunos que tentem fazer como Ramanujan estabelecer com pedras as partições do número 6 e do número 7, assim poderão compreender melhor o conceito de partição.

Com as intervenções de Hardy, Ramanujan chega ao P (200) = 3.972.999.029.388, bem próximo da resposta correta, que depois foi descoberta uma variação da fórmula que gera a resposta exata. Ramanujan tornou-se membro de Trinity, após grandes controvérsias e por não ter se adaptado a cultura do local, por ser vegetariano e uma série de outros fatores, adoeceu e pegou tuberculose e após 1919 ao voltar a Índia, morreu em 1920, supostamente por amebíase.

Figura 25 - Ramanujan e manuscrito



Fonte:https://marlonsousa.medium.com/ramanujan-parti%C3%A7%C3%A3o-de-um n%C3%BAmero-deduzido-com-deep-learning-bb87dd64bf9e. Acesso: 22 de maio de 2023.

Encontro 4: As Máquinas de Alan Turing

Veremos neste encontro, as máquinas de Alan Turing (1940-1950), O Sistema de Criptografia RSA (1970-1980).

Quadro 7: Assuntos e materiais sugeridos para o Encontro 4.

Assuntos	Materiais Relacionados	Vídeos Youtube (para o Professor Fundamentar sua aula)
As Máquinas de Alan Turing Sistema de Criptografia RSA Física Quântica, Caos e Números Primos	O Fascínio dos números primos. Introdução a História da Matemática;	Alan Turing – um gênio da matemática https://www.youtube.com/watch?v=EMsInIDmnyM Quem foi Alan Turing https://www.youtube.com/watch?v=8c4XLu2JaVs Criptografia RSA https://www.youtube.com/watch?v=3jR62Mew8X4

Quadro 8: Habilidades a serem desenvolvidas com o encontro 4.

Habilidades BNCC trabalhadas	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples. (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor. (EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

	(EF08MA06) : Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. (EF03MA26 EF0327) Coleta, classificação, organização e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos em barras verticais e horizontais (variáveis categóricas; legenda; título; fonte de dados; elementos de uma tabela; eixos de dados).
Número de Aulas	10 horas aulas

Etapa 14: Professor nesta etapa levaremos os alunos a conhecerem a origem do computador com Alan Turing, peça que assistam o vídeo “Alan Turing – um gênio da matemática” e “Quem foi Alan Turing”.

Atenção Professor: Faça um debate com os alunos após eles terem assistido aos vídeos e leia o texto abaixo e veja o que eles acham sobre Alan Turing e sua importância para a computação, e se conseguem entender a importância da Hipótese de Riemann neste processo.

3.7 As máquinas de Alan Turing – 1940 a 1950

Com o propósito de construir uma máquina que na teoria, já existia em sua mente, para desafiar a ortodoxia matemática, derrubando 2 dos 23 problemas de David Hilbert, entre eles o oitavo que era a Hipótese de Riemann, Alan Turing após observar o fracasso de muitos matemáticos em provar tal hipótese começa a acreditar que ela fosse falsa e que talvez existisse algum zero fora da linha de Riemann e sua máquina poderia evidenciar tais zeros.

Alan Turing era de Cambridge, cursava matemática e seus trabalhos de pesquisa voltavam-se para utilização e construção de máquinas no desenvolvimento matemático. Uma de suas máquinas em 1950 evidenciou os primeiros 1104 zeros que estavam sobre a linha de Riemann, a partir disso a evolução dessas máquinas de cálculo possibilitaram encontrar um número cada vez maior de zeros sobre a linha crítica de Riemann.

Segundo Peruzzo (2012), para Don Zagier os números são cada vez mais evidenciados na linha crítica de Riemann pelos computadores, o que não quer dizer a princípio que validaria Riemann.

Até a década de 1970 os computadores haviam evidenciado os primeiros 300 milhões de primos que se encontravam na linha crítica de Riemann, o que para Don Zagier evidenciava que a hipótese de Riemann, provavelmente, seria verdadeira.

Ainda por Peruzzo (2012), os computadores demonstram os primeiros bilhões de primos que obedecem à hipótese de Riemann, vários trabalhos até os dias atuais apontam para a veracidade da hipótese de Riemann, porém ainda não foi provada.

Etapa 15: Professor adentraremos no sistema de criptografia RSA onde os alunos poderão testar números primos e utilizar códigos no programa RSA calculator. Peça que assistam em casa o vídeo Criptografia RSA e se possível o filme “O jogo da imitação” (Classificação 12 anos).

3.8 Sistema de Criptografia RSA – 1970 – 1980 (Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman).

Segundo Coutinho (2011), o sistema de criptografia RSA é o mais conhecido e utilizado atualmente, inventado por R. L. Rivest, A. Shamir e L. Adleman, trio que trabalhava no M. I. T. – *Massachussets Institute or Technology*, há outros códigos de chave pública, porém o RSA é, o mais utilizado em aplicações comerciais.

O método de Criptografia RSA funciona da seguinte forma, BONFIM(2017):

1. Escolhe-se dois primos p e q, distintos entre si.
2. Define-se N = pq e φ_N =(p – 1) (q – 1).
3. Deve-se escolher um número e, que faz parte da chave Pública, de forma que o máximo divisor comum (mdc) entre ele e φ_N seja 1: (e, φ_N) = 1 e 1 < e < φ_N.
4. Resolvendo a congruência ed = 1 (mod φ_N) encontra-se d, que faz parte da chave privada.
5. De acordo com a tabela pré formulada e de domínio público é feita a transformação de todos os caracteres da mensagem em números (nesta tabela todos os números devem ter a mesma quantidade de dígitos), obtendo-se a mensagem numérica em um único bloco que será dividida em blocos b, de forma que: 1 ≤ b < N. Isso garante que

ao utilizar congruência obtenha-se um único resultado na decodificação.

6. De posse da Chave Pública (e, N) criptografa-se os blocos b de acordo com a congruência: b^e ≡ C(b) (mod N), onde C(b) é a mensagem criptografada.
7. De posse da Chave Privada (d, N) descriptografa-se de acordo com a congruência: C$(b)^d$≡D(C(b)) (mod N), onde D(C(b)) é a mensagem descriptografada, 1 ≤ D(C(b)) < N.
8. Cada bloco D(C(b)) deve ser colocado em sequência e de acordo com a mesma tabela utilizada do ítem 5 os números devem ser convertidos em caracteres.

Atenção Professor: Demonstre os conceitos de chave pública e privada utilizadas acima, passe para os alunos o conceito de congruência e faça os exercícios abaixo juntamente com os alunos para que entendem como os números primos estão diretamente ligados a criptografia.

Exemplo (Extraído de BONFIM, 2017, pg. 64): Neste exemplo será usado números primos menores, que facilitem o cálculo com o uso de calculadora comum. Dados os primos p e q da forma 6n + 5, sendo p = 11 e q = 17, pode-se obter N = 11 x 17 = 187 e φ_N = (11 – 1) x (17 – 1) = 160.

Dado a tabela abaixo:

Figura 26 - Tabela de Conversão (Criptografia)

A 21	B 22	C 23	D 24	E 25	F 26	G 27	H 28	I 29	J 31
K 32	L 33	M 34	N 35	O 36	P 37	Q 38	R 39	S 41	T 42
U 43	V 44	W 45	X 46	Y 47	Z 48				
0 49	1 51	2 52	3 53	4 54	5 55	6 56	7 57	8 58	9 59

Fonte:(BONFIM, 2017)

O valor de e deve ser escolhido de modo que (e, φ_N), deste modo será escolhido o número 3 e d acompanha a congruência ed ≡ 1 (mod φ_N), assim:

$$3d \equiv 1 \pmod{160}$$

Deste modo 160k = 3d – 1 ⇔ 1 = 3d – 160k, resolvendo pelo método do algoritmo de Euclides:

$$160 = 3 \times 53 + 1 \Leftrightarrow 1 = 160 - 3 \times 53.$$

Como o valor de d não pode ser negativo e as soluções desta equação são: d = - 53 + 160t e k = - 1 - 3t :

$$-53 + 160t > 0 \Leftrightarrow t > \frac{53}{160}$$

Substituindo t = 1 tem-se o menor valor possível para d que é 107. Deste modo já se tem a chave para criptografar (e, N) = (3,187) e para descriptografar (d, N) = (107,187).

A mensagem é “CHAVE”, primeiro é preciso transformar as letras em números de acordo com a tabela, assim temos: C= 23, H= 28, A= 21, V= 44 e E= 25. Ficando: 23 – 28 – 21 – 44 – 25.

Atenção Professor: mostre aos alunos após os exemplos acima que a mensagem segue conforme a tabela de conversão da figura 28.

- Demonstre aos alunos como é feito conforme exemplo abaixo a codificação de uma mensagem.

A mensagem deve ser separada em bloco b de modo que cada bloco tenha números menores que 187. Como os primos escolhidos são pequenos, os blocos também devem ser, assim:

$$2328214425 = 2 - 32 - 82 - 14 - 42 - 5$$

Para codificar a mensagem usaremos a chave (3,187) e a congruência $b^e \equiv C(b) \pmod{N}$:

$$2^3 \equiv C(b_1) \bmod N \Leftrightarrow C(b_1) = 8$$

$$32^3 \equiv C(b_2) \bmod N \Leftrightarrow 32^3 \equiv 32768 \bmod N \Leftrightarrow C(b_2) = 43$$

$$82^3 \equiv C(b_3) \bmod N \Leftrightarrow 82^3 \equiv 551368 \bmod N \Leftrightarrow C(b_3) = 92$$

$$14^3 \equiv C(b_4) \bmod N \Leftrightarrow 14^3 \equiv 2744 \bmod N \Leftrightarrow C(b_4) = 126$$

$$42^3 \equiv C(b_5) \bmod N \Leftrightarrow 42^3 \equiv 74088 \bmod N \Leftrightarrow C(b_5) = 36$$

$$5^3 \equiv C(b_6) \bmod N \Leftrightarrow 5^3 \equiv 125 \bmod N \Leftrightarrow C(b_6) = 125$$

O bloco codificado será:

8 – 43 – 92 – 126 – 36 – 125.

Para decodificar é preciso da chave (107,187) e da congruência:

$$C(b)^d \equiv D(C(b)) \bmod N$$

Com 107 é um número primo e usá-lo como expoente faz com que não seja possível utilizar uma calculadora comum, será usado algumas propriedades das congruências[16]:

- Demonstre também como decodificar a mensagem, conforme exemplo abaixo.

Para decodificar o primeiro bloco: 8, deve-se usar:

$$8^{107} = D(C(b)) \bmod 187$$

Assim como 107 = 3 x 7 x 5 + 2, temos:

$$8^3 \equiv 512 \equiv 138 \bmod 187$$

Utilizando o item 5 da proposição 14,

[16] BOMFIN, 2017, página 38, Proposição 14.

$(8^3)^5 \equiv 138^5 \mod 187$

e

$138^5 = 138^2 \times 138^2 \times 138 = 19044 \times 19044 \times 138,$

então:

$8^{15} \equiv 138^5 \equiv 138^2 \times 138^2 \times 138 \mod 187$

$\Leftrightarrow 8^{15} \equiv 19044 \times 19044 \times 138 \mod 187$

$\Leftrightarrow 8^{15} \equiv 157 \times 157 \times 137 \mod 187,$

Pois,

$19044 \equiv 157 \mod 187.$

Portanto,

$3401562 \equiv 32 \mod 187$

$\Leftrightarrow \quad 8^{105} \equiv 32768 \times 32768 \times 32 \equiv 43 \times 43 \times 32 \mod 187$

$\Leftrightarrow \quad 8^{105} \equiv 59168 \equiv 75 \mod 187.$

Finalmente conclui-se que

$\Leftrightarrow \quad 8^{107} \equiv 2 \mod 187.$

Atenção Professor: Agora vamos ao laboratório de informática ou solicitar que os alunos utilizem os *tablet's* disponibilizados pela secretaria de educação e vamos aplicar os números primos no programa que faz uma simulação de criptografia, o método está no passo a passo abaixo, utilizamos os primos 11 e 17, mas os alunos poderão escolher outros.

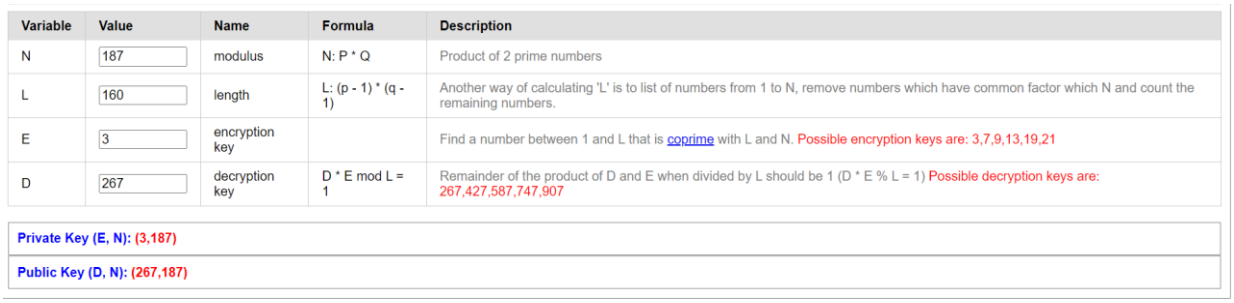
Aplicando a Criptografia RSA: para que os alunos tenham maior familiaridade com o conteúdo exposto, utilizaremos o RSA Calculator em https://umaranis.com/rsa_calculator_demo.html, para isso deveremos conhecer o p e o q então utilizaremos o nosso exemplo anterior, neste caso p = 11 e q = 17.

Figura 27 - RSA Calculator 1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Ao clicar em *Calculate*, teremos o valor de N = 187, onde N = p x q, o L = (φ_N) = (p – 1) x (q – 1), os possíveis candidatos a (1 mod φ_N).

Figura 28 - RSA Calculator 2.

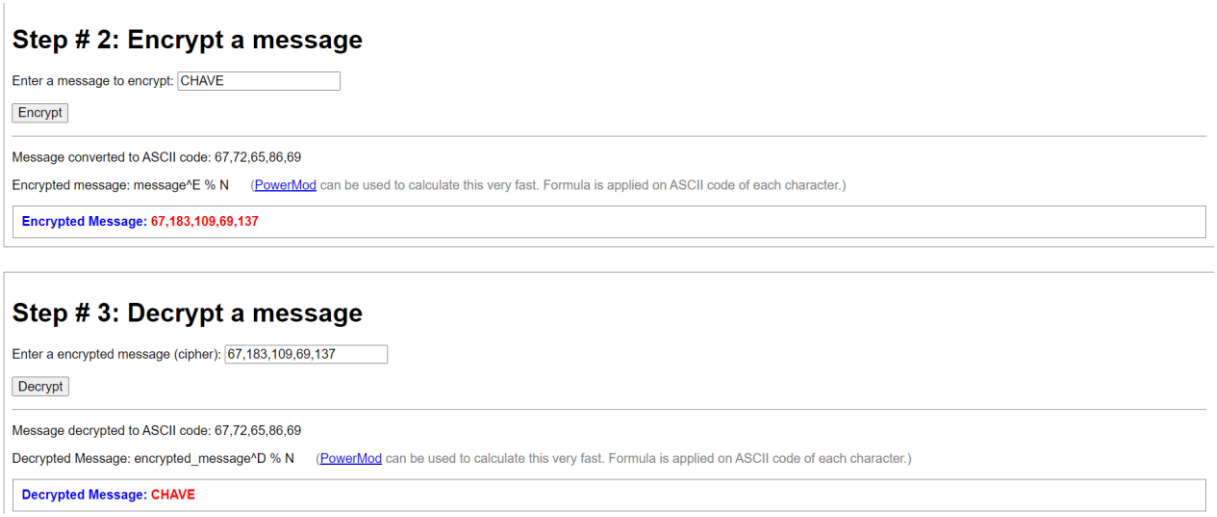


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Temos como resultado N = p x q = 187 e r = φ_N = (p – 1) x (q – 1) = 160, e utilizando e = 3 , temos como *Private Key* (e, N): (3,187) e como *Public Key* (d,N): (267,187), onde escolhemos (e, φ_N) = 3 e temos d por ed ≡ 1 mod φ_N.

No segundo passo temos a mensagem encriptada “CHAVE”: 67, 183, 109, 69, 137, e no terceiro passo para decriptar a mensagem basta inserir o código acima e teremos como devolutiva a palavra “CHAVE” novamente.

Figura 29 - RSA Calculator 3.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

4 ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES PARA O PÚBLICO-ALVO DA EDUCAÇÃO ESPECIAL

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, homologada em 1996, atualizada pela Lei n. 12.796/2013 (BRASIL, 2013), define como público-alvo da Educação Especial (PAEE) os estudantes que apresentam deficiências, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação. A Política Nacional de Educação Especial na perspectiva da Educação Inclusiva (PNEEPEI) define que a educação especial é uma modalidade de ensino que percorre todos os níveis, etapas e modalidades da escolarização. (BRASIL, 2008).

A educação especial atua de forma articulada com o ensino comum por meio do Atendimento Educacional Especializado (AEE) que tem a finalidade de cuidar que os alunos PAEE tenham acesso ao currículo de modo equitativo, complementando a formação e o desenvolvimento de alunos PAEE e oferecendo serviços com profissionais especializados e recursos acessíveis para potencializar sua aprendizagem.

No que tange às relações de educação inclusiva direcionadas às práticas docentes envolvendo os alunos PAEE, compreendemos a educação inclusiva como direito universal. “Abordar a educação inclusiva é tratar necessariamente da educação enquanto direito universal, resultado de uma conquista social, e da diferença como um dado da realidade humana que se expressa nas práticas da educação escolar.” (FIGUEIREDO; BONETI; POULIN, 2017, p. 962).

Para além da escola, a educação inclusiva é um projeto multidimensional para a composição de práticas escolares menos excludentes, direcionado ao princípio de uma escola para todos. Assim, pensar em um aprendizado para a diversidade necessita reflexão sobre às práticas atuais. Em particular, considerando a elaboração de nossa sequência didática, daremos aqui algumas contribuições para a prática docente com o PAEE, apresentando algumas opções de adaptação e flexibilização curricular.

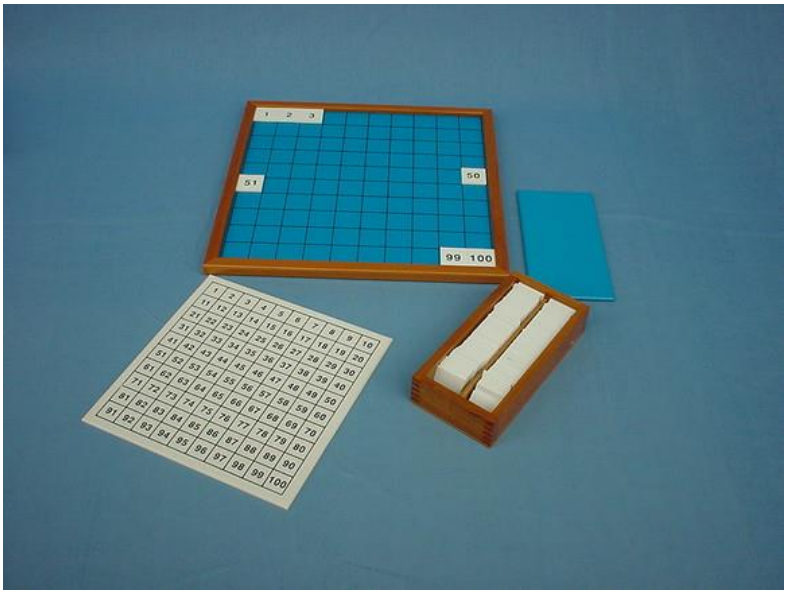
4.1 O uso do varal ordenado

A ideia da utilização de um varal que imite a reta numérica, podendo ser de barbante ou outro artefato, estimula diferentes canais sensoriais e a distribuição dos números pode ser apenas a dos números primos. Neste caso, entendemos que as apresentações matemáticas podem estabelecer uma linguagem multimodal.

A multimodalidade da matemática se caracteriza na utilização das imagens, do simbolismo matemático, da linguagem verbal e dos diferentes cenários em que os conceitos vão sendo tecidos. A organização dos números no varal pode ser feita por meio de retângulos de cartolina onde cada um traga um número associado. A distribuição no varal (linha numérica) pode ser feita por prendedores, também valorizando o “pinçamento”.

O quadro didático que reproduz o Crivo de Eratóstenes pode ser utilizado e depois estendido na forma de linha numérica. A figura 31 traz um modelo. O próprio “crivo” pode ser adaptado em linguagem Braile para estudantes com deficiência visual.

Figura 30 - Quadro didático “Crivo de Eratóstenes”

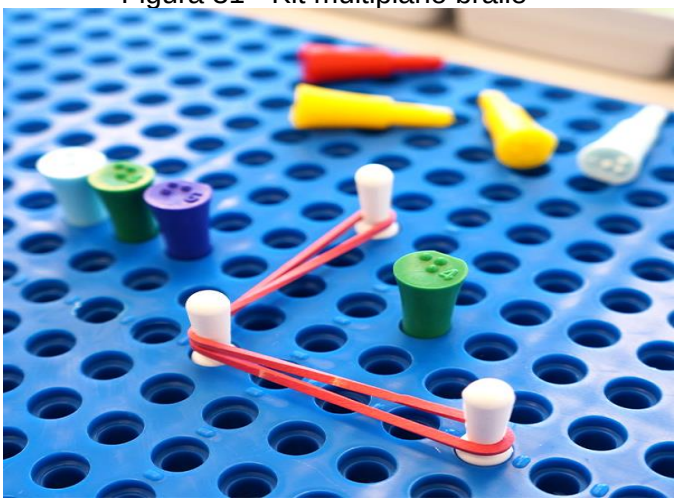


Fonte: https://www.elo7.com.br/crivo-de-eratostenes/dp/12C9A42, acesso: 30/05/2023

4.2 Kit Multiplano

Essa ferramenta didática pode auxiliar na elaboração de sequências de padrões numéricas para estudante de modo geral, mas em particular para aqueles com deficiência visual.

Figura 31 - Kit multiplano braile



Fonte: https://www.tecassistiva.com.br/produto/kit-multiplano-braille/, acesso 30 de maio de 2023

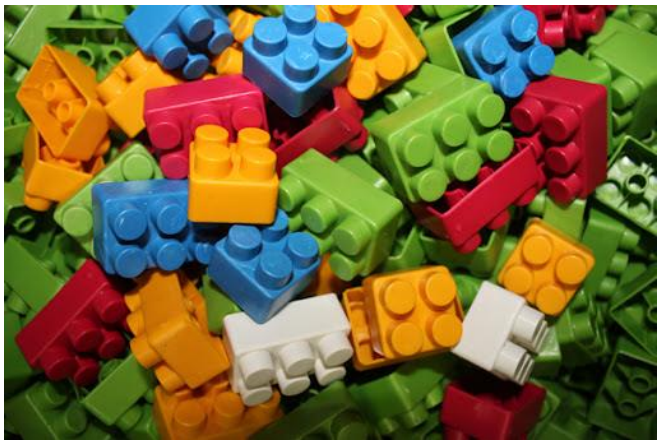
4.3 Blocos de Montar

A forma como os alunos se apropria das habilidades desenvolvidas podem variar, assim como o modo de organização e apresentação das atividades. Para alguns alunos, a separação de cores e formas é basicamente o ponto inicial das atividades, mas são aprofundadas de acordo com a idade e o perfil das turmas.

Uma das habilidades mais antigas que envolvem a socialização dos humanos é a contagem. A partir das representações numéricas e das relações estabelecidas entre objetos e símbolos numéricos, a quantificação tornou-se habitual nas atividades rotineiras. Nesta perspectiva, a contagem consiste em comparar quantidades de conjuntos finitos de objetos. Uma parte significativa da alfabetização matemática nas séries iniciais é dedicada ao estudo da contagem, considerando as diferentes etapas progressivas de abstração dos alunos.

Os blocos de montar podem ser adaptados para estudantes com desenvolvimento neurológico atípico e assim, constituir elementos para a fatoração única e a percepção de números compostos, auxiliando da compreensão do conceito de divisibilidade.

Figura 32 - Kit de montar lego



Fonte: https://blogdaarquitetura.com/wp-content/uploads/2017/05/lego-01_blog-da-arquitetura.jpg, acesso 30 de maio de 2023.

Um ponto fundamental destes instrumentos metodológicos é a flexibilização, ficando a critério do professor o direcionamento para o desenvolvimento cognitivo e motor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início deste trabalho de pesquisa, constatou-se o baixo ou quase inexistente material relacionado ao estudo e desenvolvimento de transposição didática sobre o tema teoria dos números, utilizando-se de uma cronologia de linha do tempo em relação aos números primos.

Neste sentido, utilizando-se do material do Programa de Iniciação a Pesquisa Científica Junior – PIC/OBMEP, as concepções de sequência didática proposta por ZABALA (1998) e a linha do tempo dos números primos, elaborada por LUCIANO, FIGUEIREDO E ARAUJO NETO (2017), iniciou-se a pesquisa do tema “Estudo de Primalidade na Educação Básica”, com o objetivo geral de elaborar uma sequência didática utilizando uma linha do tempo por meio de contextos históricos dos números primos.

Diante disso a pesquisa atingiu parcialmente o objetivo geral, pois foi possível elaborar uma sequência didática utilizando nos moldes do PIC/OBMEP, 4 encontros, subdividindo eles de acordo com a linha do tempo apresentada pela Professora Chiara, iniciando-se por Euclides e finalizando com Criptografia RSA e uma sessão sobre orientação aos professores para atender o público alvo da educação especial, ficando de fora apenas a última fase da linha do tempo com o tema Caos, Física e Números Primos (séc. XX).

Atingiu-se também o objetivo específico inicial que foi o de construir uma sequência didática contemplando os aspectos conceituais e históricos dos números primos, neste objetivo utilizamos o livro introdução a história da matemática, e buscamos o momento da descoberta do conceito inicial de número primo e de como foi tratado o ideia por parte do pesquisador da época, como e de que forma ele tratou da informação e deduziu o conceitos, axiomas, teoremas, proposições ou postulado em cada época, sistematizando dentro da linha do tempo.

Nos exercícios e atividades, sempre observando o que propõe a BNCC, atingiu-se também os objetivos específicos sobre Números Primos, Fatoração, Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum, Conceitos de Criptografia, buscou-se baseado no PIC/OBMEP e com a proposição de RODRIGUES (2020), criar em cada encontro proposto, exercícios variados e que viessem de

encontro com os objetivos traçados. Os objetivos específicos Funções, Matemática Financeira e Novas Tecnologias não foram tratados, pois dada a extensão do trabalho e o pouco prazo de elaboração, ficaram de fora da dissertação.

Quanto ao objetivo específico de contemplar a educação especial, foi parcialmente atingido, pois dada a diversidade de alunos, e da especificidade de atendimento de cada aluno especial, limitou-se ao desenvolvimento de uma seção com orientações aos professores para o público alvo da Educação Especial, fundamentada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, homologada em 1996, atualizada pela Lei n. 12.796/2013 (BRASIL, 2013), contemplando as ferramentas educacionais varal ordenado, kit multiplano e blocos de montar.

Diante do explicitado, a pesquisa parte da hipótese: “de que modo seria possível potencializar o ensino da Primalidade nos inteiros na Educação Básica a partir de elementos marcados por uma linha do tempo?”. Durante o desenvolvimento da dissertação, observou-se que a história da matemática trás conceitos e informações de como o pesquisador da época pensou e tratou o conhecimento adquirido, possibilitando criar um sequência didática que partia do pressuposto histórico, com uma frase, um pequeno texto ou uma proposição, desenvolver juntamente com os alunos, de acordo com cada traço da linha e do encontro proposto, entender o postulado, teorema, axioma e afins, e através dele ter a oportunidade de, assim como o pesquisador temporal, pensar e analisar a ideia matemática sobre número primo proposta na época.

Nos primeiros capítulos fica evidente que a transposição didática, por ser um conhecimento quase empírico, de complexidade menor, acontecer de forma natural e exigindo do leitor pouco esforço para abstração do conhecimento proposto, à medida que os encontros vão avançando, o conhecimento dos números primos, a partir da hipótese de Riemann, torna-se quase que apenas uma curiosidade, tamanha complexidade para o entendimento do conteúdo histórico matemático proposto.

Com uma abordagem voltada para educação básica, dada a complexidade de alguns temas e a extensão dos capítulos, limitou-se a sequência didática alunos oriundos do 6º ano do Ensino Fundamental, mostrando que caberia a

pesquisa, limitar-se a uma única fase da linha do tempo, ficando para outro momento, o desenvolvimento mais aprofundado de cada sequência didática, por tema.

A pesquisa ficou limitada a uma pesquisa bibliográfica, onde ficou prejudicada por haver pouco ou nenhum material com este viés, e pela extensão dos temas recomenda-se que para pesquisas futuras, os pesquisadores limitem a um ou no máximo dois tópicos da linha de pesquisa. Zabala (2018) contempla a necessidade da construção da sequência didática, porém, recomenda-se aprofundar no trabalho de sequência didática de Marcio Urel Rodrigues, em https://www.youtube.com/watch?v=F1T97C-jwGg, que tem um trabalho em cima deste tema na cidade de Lucas do Rio Verde/MT.

Fica também como recomendação, que pesquisem mais a fundo a parte histórica, epistemologia matemática, conteúdos mais voltados para ensino de matemática em escolas do Mato Grosso, no material proposto pela OBMEP e diversifiquem o tema para outros conteúdos matemáticos.

Esperamos que a referida dissertação sirva de inspiração para construir uma matemática mais significativa, que realmente leve nossos alunos este conhecimento, e que sua aplicação ocorra nas diversas salas de aula do nosso Brasil, contribuindo para que a sequência didática seja ferramenta utilizada para planejar nas 272 habilidades da nossa Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

REFERÊNCIAS

ANDRADE, D. **Números Primos e Números de Mersenne**. Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa Matemática, Maringá, v. 2, p. 81-89, Julho 2018. ISSN 2594-6323. Disponivel em: <http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art3_1801.pdf>. Acesso em: 30 maio 2023.

ASSIS, D. I. D. **OS NÚMEROS PRIMOS COMO INSTRUMENTO DE ESTÍMULO `A CURIOSIDADE DOS ESTUDANTES**: Dissertação de Mestrado. Brasília: UNB, 2019.

ATRACTOR , 2019. Disponivel em: <http://www.atractor.pt/mat/crivo/crivo.html>. Acesso em: 30 maio 2023.

BENATTI, K. A.; BENATTI, N. C. D. C. M. Teoria dos números / Kléber Aderaldo Benatti, Natalha Cristina da Cruz Machado Benatti. Curitiba: InterSaberes, 2019. p.197.

BEZERRA, J. **História dos números:** origem e evolução dos números. TODA MATÉRIA, 2023. Disponivel em: <https://www.todamateria.com.br/historia-dos-numeros-origem-e-evolucao-dos-numeros/>. Acesso em: 13 fev. 2023.

BONFIM, D. H. Universidade de São Paulo. [S.l.]: [s.n.], 2017. Disponivel em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06042017-164507/publico/DanieleHelenaBonfim_revisada.pdf>. Acesso em: 30 Maio 2023.

BONZANINI, T. K. https://www.youtube.com/watch?v=o28RV4VJWIE&t=373s. **Metodologia para a Educação Básica:** Resolução de Problemas - O que é uma sequência didática?/Youtube, São Paulo, 4 Abril 2021. Acesso em: 10 Novembro 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CASSEB-GALVÃO, V. C. Artigo de opinião: **sequência didática funcionalista** / Vania Cristina Casseb-Galvão. 1ª. ed. São Paulo: Parábola, 2018. 120 p.

CHAGAS, A. B. **Testes de Primalidade:** Uma visão Computacional. Tese (Graduação em) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Novembro 2009. 46.

COLEGIO PEDRO II. Blog São Cristóvão. **O Crivo de Eratóstenes** - Colégio Pedro II. Disponivel em: <http://www.cp2.g12.br/blog/saocristovao2/files/2019/08/Lista-Extra-6%C2%BA-ano-o-crivo-de-eratostenes.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2023.

CORDEIRO, G. D. R.; MOLINA, N. L.; DIAS, V. F. **Orientações e dicas práticas para trabalhos acadêmicos**. 2ª. ed. Curitiba: InterSaberes, 2014.

DUTENHEFNER, F.; CADAR, L. **Encontros de Aritmética.** Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

EULER, L. **Tratado sobre a teoria dos números em XVI capítulos** [recurso eletrônico]/ Leonhard Euler. Tradução de John A. Fossa. Natal: EDUFRN, 2015. Fossa, John A.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
EVES, H. Introdução à História da Matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, R. V. D.; BONETI, L. W.; POULIN, J.-R. Da epistemologia clássiva da educação à inclusão escolar: desafios e perspectivas. **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, v. 17, n. 53, p. p. 959-977, 2017. ISSN ISSN 1518-3483.

FILHO, A. A. S. Abrantes Filho. **Prova de que existem infinitos números primos:** a demonstração de Euclides e o pensamento matemático na ciência da computação, 2020. Disponivel em: <https://www.abrantes.pro.br/2020/05/12/prova-de-que-existem-infinitos-numeros-primos-a-demonstracao-de-euclides-e-o-pensamento-matematico-na-ciencia-da-computacao/>. Acesso em: 23 fev. 2023.

GALDINO, A. L.; FREITAS, T. P. D. A.; MACEDO, S. D. S. **Caderno de atividades: sequências didáticas para o ensino de matemática.** Catalão: IMTEC/UFCAT, 2021.

HEFEZ, A. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 127 p.

HEFEZ, A. **Aritmética**/ Abramo Hefez. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p. (Coleção PROFMAT;08).

JIMDO. Disponivel em: <https://emsmatematica.jimdofree.com/6%C2%BA-ano/m%C3%BAltiplos-e-divisores-deum-n%C3%BAmero-%20natural/>. Acesso em: 30 maio 2023.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais** / Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT, 07).

LOPES, F. fredlopes.com.br. **Euclides e seus elementos**, 2023. Disponivel em: <https://fredlopes.com.br/euclides-e-seus-elementos/>. Acesso em: 10 mar. 2023.

LUCIANO, C. M. S.; FIGUEIREDO, M. L. G. X.; ARAUJO NETO, S. L. **Linha do Tempo dos Números Primos: Uma Proposta de Ensino.** IN: III Colóquio de Ciências Naturais e Matemática: Aproximação Universidade-Escola destacando boas práticas na Educação Básica, Sinop, I, 07 Novembro 2017.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores/ Iran Abreu Mendes; Miguel Chaquiam. (“Livro 2016 01 Historia Nas Aulas de Matematica Fundamentos e ... - Scribd”) Belém: SBHMat, 2016.

OLIVEIRA, R. R. D. **Sistema de Numeração Decimal**. PreParaEnem, 2023. Disponivel em: <https://www.preparaenem.com/matematica/sistema-de-numeracao-decimal.htm>. Acesso em: 13 fev. 2023.

PERUZZO, J. **O Fascínio dos Números Primos** / Jucimar Peruzzo. Irani (SC): [s.n.], 2012. 109 p.

QUEIROZ, N. **O problema da primalidade:** alguns testes e uma proposta de situação de aprendizagem. Tese (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Fevereiro 2021. 135.

RAMOS, J. E. M. Sua Pesquisa. Eratóstenes, 2020. Disponivel em: <https://www.suapesquisa.com/quemfoi/eratostenes.htm>. Acesso em: 08 mar. 2023.

RIBENBOIM, P. Números Primos: Velhos mistérios e novos recordes. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

RIBENBOIM, P. **Números Primos:** Velhos mistérios e novos recordes. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Livro do Professor de Matemática na Educação Básica:** números inteiros / Cydara Ripoll, Letícia Rangel, Victor Giraldo. Rio de Janeiro: SBM, v. II, 2016. 120 p.

RIZEL, A. C. **REPOSITORIO UFMG**, 2014. Disponivel em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-9REL7B/1/monografia_ary.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2023.

RODRIGUES, M. U. https://www.youtube.com/watch?v=F1T97C-jwGg. **Sequência Didática das Habilidades de Matemática da BNCC para Professores que Ensinam Matemática**/Youtube, 14 Abril 2020. Acesso em: 10 Novembro 2022.

TODA MATÉRIA. Disponivel em: <https://www.todamateria.com.br/o-que-sao-numeros-primos?>. Acesso em: 30 maio 2023.

VIEGAS, G. V. Toda a Matemática. https: //www.youtube.com/watch?v=calR7_x-BGE&t=179s, Porto Alegre. Disponivel em: <http://www.youtube.com/@todamatematica>. Acesso em: 27 abr. 2023.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar / Antoni Zaballa; trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.