UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

# Razão e proporção:
## suas diversas alternativas nas resoluções de problemas

por

José Ferreira Lima Neto

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

# Razão e proporção

## suas diversas alternativas nas resoluções de problemas

por

**José Ferreira Lima Neto**

sob a orientação do

**Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/ 2023
João Pessoa - PB

**Catalogação na publicação**
**Seção de Catalogação e Classificação**

L732r Lima Neto, José Ferreira.
Razão e proporção : suas diversas alternativas nas resoluções de problemas / José Ferreira Lima Neto. - João Pessoa, 2023.
110 f. : il.

Orientação: José Laudelino de Menezes Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Razão e proporção. 2. Frações. 3. Regra de três composta. 4. Porcentagem. I. Menezes Neto, José Laudelino de. II. Título.

UFPB/BC CDU 511.13(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**
Fone/Ramal: (83) 3216-7563 http://www.ufpb.br/pos/profmat

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

No dia vinte e cinco de agosto de dois mil e vinte e três (25/08/2023), às 15:00 horas, por meio da plataforma virtual Google Meet, através do link: https://meet.google.com/kdx-zhtn-ixb, em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, seguindo os mesmos preceitos da defesa presencial, em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado *"**Razão e proporção: suas diversas alternativas nas resoluções de problemas**",* do aluno **JOSÉ FERREIRA LIMA NETO**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do professor José Laudelino de Menezes Neto. A Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foi composta pelos professores José Laudelino de Menezes Neto (presidente), Flank David Morais Bezerra (membro interno) e Tarciana Maria Santos da Silva (membro externo/UFRPE). O professor José Laudelino de Menezes Neto, em virtude da sua condição de presidente, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou o presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 25 de agosto de 2023.

**Banca Examinadora**

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE LAUDELINO DE MENEZES NETO
Data: 25/08/2023 16:44:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

José Laudelino de Menezes Neto ______________________

Documento assinado digitalmente
gov.br FLANK DAVID MORAIS BEZERRA
Data: 25/08/2023 21:33:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Flank David Morais Bezerra ______________________

Tarciana Maria Santos da Silva ______________________

Documento assinado digitalmente
gov.br TARCIANA MARIA SANTOS DA SILVA
Data: 25/08/2023 16:56:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

# Razão e proporção
## suas diversas alternativas nas resoluções de problemas

por

**José Ferreira Lima Neto**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

**Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto** - UFPB (Orientador)

**Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra** - UFPB

**Profa. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva** - UFRPE

**Agosto/ 2023**

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Tânia e Humberto, por todos os esforços e renúncias para ensinar-me e tornar-me um cidadão de bem e que sempre valorizou os estudos. Por acompanharem meus passos durante toda minha existência, seja presencialmente ou distante fisicamente através de energias positivas e orações.

À minha esposa, Rafaela, que sempre se mostrou a principal incentivadora para a conclusão do meu mestrado e por todos os momentos de força e apoio nesse momento tão delicado de estudos e abdicação.

Às minhas filhas, Cecília e Bianca, que sempre estiveram comigo me proporcionando força e felicidades para concluir todas as demandas.

Aos professores do PROFMAT da UFPB, que contribuíram de alguma forma, com a minha formação acadêmica e foram sempre pacientes, compreensivos e prestativos. Em especial, ao professor Dr. José Laudelino, que sempre se mostrou um profissional e pessoa de extrema empatia e aceitou me orientar nesse momento tão importante da minha vida acadêmica. Também ao professor Dr. Flank Bezerra que foi um professor que me ajudou muito nessa fase, seja com transmissão de conhecimento, seja com palavras de incentivos.

Ao meu amigo Iago, que me ajudou durante toda fase de dissertação desse trabalho, bem como em quase todo o processo de estudos no mestrado.

E, por fim, a todas as escolas em que trabalhei, bem como todos os cursos preparatórios e alunos que pude lecionar, por me permitir o aprimoramento como profissional, bem como a oportunidade de ampliar minhas ideias, de modo a construir as linhas gerais desse trabalho e possibilitar que ele saísse do papel e obtivesse êxito dentro do objetivo proposto.

*A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que me tornasse uma pessoa melhor!*

# RESUMO

Apresentamos neste trabalho uma proposta metodológica para o ensino de questões específicas e recorrentes em vestibulares e concursos públicos na temática de razão e proporção, buscando permitir ao aluno duas percepções diferentes sobre um mesmo problema: método tradicional e o método proposto pelo autor deste trabalho. Dividimos essas questões e situações problemas em quatro grupos: problemas com frações, problemas com razão e proporção, problemas com regra de três composta e problemas com porcentagem. Além disso, com o objetivo de preparar o leitor para um melhor entendimento da nossa proposta, mostramos em cada tópico, a teoria objetiva para que ele entenda as resoluções através dos dois métodos, bem como seis exemplos resolvidos de cada método para cada tópico trabalhado. No final de cada temática, fizemos uma pesquisa de opinião com dez estudantes, de modo a expor seus entendimentos com a resolução de uma questão através dos dois métodos e assim definir as potencialidades e deficiências de cada um sob os seus respectivos pontos de vista.

**Palavras-Chave:** Razão e proporção; frações; regra de três composta; porcentagem.

# ABSTRACT

In this work, we present a methodological proposal for the teaching of specific and recurrent questions in entrance exams and public contests on the subject of ratio and proportion, seeking to allow the student two different perceptions about a same problem: traditional method and the method proposed by the author of this work. We divided these issues and problem situations into four groups: problems with fractions, problems with ratio and proportion, problems with the compound rule of three and percentage problems. Furthermore, in order to prepare the reader for a better understanding of our proposal, we show in each topic, the theory objective so that he understands the resolutions through the two methods, as well as six Worked examples of each method for each topic worked on. At the end of each theme, we conducted an opinion poll with ten students, in order to expose their understandings with the resolution of an issue through the two methods and thus define the strengths and weaknesses of each one from their respective points of view.

**Keywords:** Ratio and proportion; fractions; compound rule of three; percentage.

# SUMÁRIO

# LISTA DE FIGURAS

# INTRODUÇÃO

A ideia desse trabalho veio da necessidade que sinto diariamente em adaptar várias formas de didática para os diferentes tipos de conteúdos na Matemática. Por meio da minha experiência docente, percebo que parte significativa dos alunos demonstra um maior aprendizado com a repetição de exercícios, analogias e o uso mais frequente de números e situações práticas, do que com o uso excessivo de incógnitas. Existe o momento adequado de formalizar as ideias e de generalizá-las, tendo em vista que ocorrem situações que só possuem um sentido para o aluno com a dedução de tais propriedades e fórmulas, tornando assim o processo de ensino-aprendizado mais significativo.

A título de exemplo, quando comecei a lecionar o conteúdo de porcentagem e não havia um valor fixo na questão, era comum nomeá-lo de $x$, no entanto, com o tempo pude compreender que o manejo com incógnitas e decimais e/ou frações dificultam muito a compreensão dos alunos. Nós profissionais da área de exatas muitas vezes não percebemos isso, mas aos que não tem o domínio desta área, prefere evitar o uso de incógnitas por sentir maior dificuldade em compreender seus conceitos. A partir de então passei a substituir o termo "$x$", pelo número 100 como suposição, e essa simples atitude modificou a perspectiva de muitos, além de trazer aspectos bastante positivos à minha didática.

Esse trabalho, adveio dessa necessidade de adequação na explicação dos problemas clássicos da Matemática, uma vez que os meus alunos demonstravam um nível alto de dificuldade, assim, visando facilitar a compreensão deles e tornar a aprendizagem mais significativa, me dispus a buscar meios de resolução ágeis e práticos para essa problemática.

O desenvolvimento deste trabalho está pautado na resolução dos problemas clássicos matemáticos acima citados e para melhor facilitar o acesso do leitor a linha de raciocínio desta dissertação, ela está dividida em quatro capítulos, onde na ordem crescente citada, trabalharemos com estratégias de resoluções de questões de múltipla escolha a respeito dos tópicos de: frações, razão e proporção, regra de três composta e porcentagem.

Cada um desses capítulos, segue uma linha padrão em que inicialmente apresentamos uma teoria objetiva do conteúdo técnico necessário para resolver os problemas, focando em duas vertentes: Sendo a primeira, a solução tradicional e a segunda, a solução sugerida pelo autor. Onde ressaltamos, que esta última, não é criação do autor, mas sim uma técnica já existente que é adequada e utilizada pelo autor deste trabalho na sua vivência em sala de aula. O objetivo do trabalho está fundamentado na comparação dos dois métodos a fim de proporcionar melhor compreensão dos pontos positivos e negativos de cada um desses temas, fazendo uso da opinião de outras pessoas, através de uma pesquisa de opinião. Para alcançar o objetivo proposto, realizamos uma pesquisa com uma amostra de dez pessoas, para cada tema escolhido, totalizando 40 pessoas. Em que, cada pessoa assiste uma resolução/explicação de uma questão através dos dois métodos (tradicional e sugerido pelo autor), posteriormente deveria responder a uma questão similar fazendo uso dos dois métodos para, em seguida, responder uma pesquisa de opinião e expor suas impressões, facilidades e dificuldades. As questões das bancas FGV, VUNESP E CPCON/UEPB, resolvidas em cada um dos quatro capítulos foram retiradas de [12], já as do ENA, foram retiradas de [11]

Os temas tratados nesta dissertação são bastante trabalhados em provas de vestibulares e concursos públicos, além de ser obrigatório no ensino da Matemática, como consta na diretriz que norteia o ensino no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3]. As temáticas abordadas ao longo dessa pesquisa constam nas seguintes habilidades: EF07MA08 - Ler, compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador, EM13MAT104 - Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos, EM13MAT314 - Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.) e EM13MAT315 - Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Além disso, na parte de estudos e/ou teoria do Capítulo 1, tive as seguintes referências: [2], [5], [6], [7] e [13], enquanto no Capítulo 2: [1], [2], [8] e [14], Capítulo 3: [1] e [14] e Capítulo 4: [4] e [14].

É importante ressaltar, que para a realização deste trabalho obtive inspiração em algumas dissertações que foram apresentados recentemente em dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que tiveram sucesso no que propuseram. São exemplos: Souza [15], que trabalhou uma disposição metodológica empregada que se baseia em aspectos teóricos das funções, seguida da aplicação da teoria vista em exames seletivos; Peixoto [9], que apresentou uma proposta metodológica para o ensino da Análise Combinatória, baseada na Aprendizagem Baseada em Problemas, na procura por um método mais eficiente para a sua aprendizagem; Alves [2], que analisou alguns obstáculos no processo de aprendizagem dos números racionais escritos na forma de fração; Cintra [5], que apresentou e analisou as contribuições do Método do Modelo de Barras de Singapura para o ensino de frações com foco em resoluções de problemas, que foram aplicadas numa turma do sétimo ano de uma escola da rede pública e Almeida [1], que teve como objetivo descrever os conceitos de razão e proporção através de situações que estão presentes no cotidiano popular, buscando estabelecer relações da vida prática do leitor com a matemática ensinada nas escolas por análise e resolução de problemas.

Além disso, busquei entender a finalidade do PROFMAT e seus objetivos [10], que versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo da matemática da Educação básica com impacto na sala de aula. E por fim, os ideais do mestrado profissional, que se trata de reinventar a prática docente do professor, reavaliando seu papel social, de modo a se recolocar como profissionais fundamentais que são.

# CAPÍTULO 1

# FRAÇÕES

Neste capítulo, promovemos uma estratégia de resoluções de questões de múltipla escolha a respeito do tópico de frações. Falamos as definições matemáticas necessárias para entender o conceito de fração, baseado na ideia do que é uma fração e as operações básicas com esses números, que são conhecidos como números racionais. A partir daí, resolvemos tipos específicos de problemas com frações através da maneira tradicional. A seguir, definimos o método de resolução de questões sugerido pelo autor, que trabalha a ideia de praticidade associada a velocidade de resolução, além da não necessidade do uso de MMC e de incógnitas/equações. Após as apresentações dessas teorias, colocamos seis exemplos de questões de vestibulares e concursos nesta temática, e assim fizemos um comparativo entre os dois métodos de resolução, explicando uma mesma questão através desses dois métodos.

Para aceitação e análise apresentamos a um grupo de pessoas os dois métodos resolutivos das questões e buscamos a opinião de cada um deles.

## 1.1 Conjunto dos números racionais

Trabalhamos os conceitos necessários para entender os números racionais, que darão suporte para o entendimento dos problemas envolvendo frações.

Define-se que o conjunto dos números racionais é composto por todos os números expressos pela fração $\frac{p}{q}$, em que $p$ é um número inteiro e $q$ é um número inteiro não-nulo. O número $p$ é conhecido como o numerador da fração, enquanto o número $q$ é conhecido como denominador da fração. De acordo com a simbologia matemática, enunciamos o conjunto dos números racionais da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ \mid \ p \in \mathbb{Z} \ \ e \ \ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Vejamos alguns exemplos de números racionais.

- Se $p = 2$ e $q = 5$, teremos o número $\frac{2}{5}$.
- Se $p = -7$ e $q = 2$, teremos o número $-\frac{7}{2}$.

### 1.1.1 Adição e subtração de números racionais com denominadores iguais.

Nas operações de adição e subtração com denominadores iguais, basta repetirmos o denominador e realizarmos as operações de adição e/ou subtração com os numeradores de cada fração.

**Exemplo 1.1.** *Quanto é* $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$*?*

**Resolução:**

$$\frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}.$$

**Exemplo 1.2.** *Quanto é* $\frac{7}{9} - \frac{5}{9}$*?*

**Resolução:**

$$\frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}.$$

### 1.1.2 Adição e subtração de números racionais com denominadores diferentes

Nas operações de adição e subtração com denominadores diferentes, precisamos tornar os denominadores iguais, e, para isso, trabalhamos com um denominador comum, que é obtido achando um múltiplo comum desses denominadores. De maneira geral, esse múltiplo é o menor possível, de modo a facilitar os cálculos, por isso achamos o MMC (mínimo múltiplo comum).

**Exemplo 1.3.** *Quanto é* $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$*?*

**Resolução:**

Como os denominadores são diferentes, trabalharemos com o MMC de 2 e 5, que é igual a 10.

Agora precisamos achar uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{3}{5}$, cujo o denominador seja 10.

Logo,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \quad e \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}.$$

Assim,

$$\frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{11}{10}.$$

**Exemplo 1.4.** *Quanto é* $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$*?*

**Resolução:**

Como os denominadores são diferentes, trabalharemos com o MMC de 5 e 3, que é igual 15.

Agora precisamos achar uma fração equivalente a $\frac{4}{5}$ e a $\frac{2}{3}$, cujo denominador seja 15.

Logo,

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15} \quad e \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}.$$

Assim,

$$\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}.$$

### 1.1.3 Multiplicação de frações

Nas operações multiplicações de frações, independentemente se os denominadores das respectivas frações são iguais ou não, multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador, conservando o posicionamento de cada um deles.

**Exemplo 1.5.** *Quanto é* $\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{7}$*?*

**Resolução:**

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{30}{14} = \frac{15}{7}.$$

**Exemplo 1.6.** *Quanto é* $6 \cdot \dfrac{4}{27}$*?*

**Resolução:**

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{4}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}.$$

## 1.2 Método de resolução das questões de frações

O método proposto pelo autor, é utilizado em problemas específicos com frações, em que vamos utilizando partes de uma fração e após um número $x$ de "utilizações", o problema pergunta que fração resta. Os alunos apresentam muita dificuldade nesse tipo de problema, pelo fato de ter que montar equações, trabalhar com MMC e manejo de incógnitas, além de conhecimento de operações de adição, subtração com frações e entendimento de propriedades básicas das proporções.

A ideia desse método é em vez de trabalhar com incógnitas, que é um processo bastante utilizado no método tradicional, e ainda necessitar fazer todo o processo de operações envolvidas: montagem e resolução de equação do $1^\circ$ grau, conhecimento de MMC e operações com frações, é você "inventar" um valor base para cada tipo de questão, baseado nos denominadores das frações envolvidas no problema. Com isso você terá números favoráveis para realizar as divisões, ou seja múltiplos dos denominadores. É importante compreender, que para esse tipo de problema, qualquer valor que você inventar, vai dar certo. A diferença é o trabalho que teremos a mais, se não escolhermos um múltiplo conveniente. Assim, evitamos o surgimento de números decimais exatos e inexatos.

## 1.3 Resolução de questões

A seguir, resolveremos seis questões de concursos ou processos seletivos, através do método proposto pelo autor, comparando com a resolução através do método tradicional.

**Questão 1.1** (FGV 2019)**.** *Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado. A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:*

***a)*** $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

*b)* $\frac{1}{3}$.

*c)* $\frac{1}{4}$.

*d)* $\frac{3}{4}$.

*e)* $\frac{1}{12}$.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Supondo que o todo da barra de chocolate seja representado por $x$, podemos montar uma equação com a seguinte lógica:

$$\begin{aligned}
\text{Total da barra de chocolate} &= \text{O que foi consumido} + \text{O que sobrou} \\
x &= \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot x + y \\
x &= \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + y \\
x &= \frac{2x}{4} + y \\
y &= \frac{4x}{4} - \frac{2x}{4} \\
y &= \frac{2x}{4} \\
y &= \frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Se inicialmente tínhamos uma barra de tamanho $x$ e ao final, sobrou $\frac{x}{2}$ desta barra, significa que sobrou $1/2$ (metade) da barra de chocolate.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para facilitar os cálculos, vamos simular uma quantidade de partes de chocolate que seja um múltiplo comum dos denominadores das frações que são citadas no enunciado da questão: no caso, basta multiplicar os denominadores mencionados: $3 \cdot 4 = 12$ chocolates.

- Quantidade inicial de partes de chocolates $= 12$.

- 1° gasto: $\frac{1}{4}$ de $12 = \frac{12}{4} = 3$.
- Restou: $12 - 3 = 9$.
- 2° gasto: $\frac{1}{3}$ de $9 = \frac{9}{3} = 3$.
- Restou: $9 - 3 = 6$.

Se no início tínhamos doze partes de chocolates e no final restaram seis partes de chocolates, significa que restou metade das partes do chocolate: $6/12 = 1/2$. Logo, a alternativa correta é a letra A.

**Questão 1.2** (FGV 2020)**.** *José recebeu uma herança em dinheiro. Desse valor, a quinta parte foi utilizada para o pagamento do advogado e de impostos, e a terça parte do restante foi utilizada para o pagamento de dívidas. A fração do total que restou foi:*

*a)* $\frac{3}{5}$.

*b)* $\frac{7}{10}$.

*c)* $\frac{7}{15}$.

***d)*** $\mathbf{\frac{8}{15}}$.

*e)* $\frac{8}{10}$.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Supondo que o todo da herança seja representado por $x$, podemos montar uma equação com a seguinte lógica:

$$\begin{aligned}
\text{Total da herança} &= \text{O que foi gasto } + \text{O que sobrou}\\
x &= \frac{1}{5}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot x+y\\
x &= \frac{x}{5}+\frac{4x}{15}+y\\
x &= \frac{3x}{15}+\frac{4x}{15}+y\\
x &= \frac{7x}{15}+y\\
y &= \frac{15x}{15}-\frac{7x}{15}\\
y &= \frac{8x}{15}.
\end{aligned}$$

Se no início tínhamos $x$ reais de herança e sobraram $\frac{8x}{15}$, significa que sobrou $\frac{8}{15}$ da herança.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para facilitar os cálculos, vamos simular o valor da herança, em reais, como uma quantidade que seja um múltiplo comum dos denominadores das frações que são citadas no enunciado da questão: no caso, basta multiplicar os denominadores mencionados: $5 \cdot 3 = 15$ reais.

- Valor da herança $= 15$ reais.
- $1^\circ$ gasto: $\frac{1}{5}$ de $15 = \frac{15}{5} = 3$ reais.
- Restou: $15 - 3 = 12$ reais.
- $2^\circ$ gasto: $\frac{1}{3}$ de $12 = \frac{12}{3} = 4$ reais.
- Restou: $12 - 4 = 8$ reais.

Se no início tínhamos quize reais de herança e restou dela, oito reais, significa que restou $8/15$ da herança. Logo, a alternativa correta é a letra D.

**Questão 1.3** (FGV 2017). *Uma equipe de trabalhadores de determinada empresa tem o mesmo número de mulheres e de homens. Certa manhã, 3/4 das mulheres e 2/3 dos homens dessa equipe saíram para um atendimento externo. Desses que foram para o atendimento externo, a fração de mulheres é:*

*a)* $\frac{3}{4}$.

*b)* $\frac{8}{9}$.

*c)* $\frac{5}{7}$.

*d)* $\frac{8}{13}$.

***e)*** $\mathbf{\frac{9}{17}}$.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Inicialmente, a quantidade de mulheres ($m$) é igual a quantidade de homens ($h$): $m = h$.

A quantidade de mulheres que saíram para o atendimento externo é de $\frac{3m}{4}$ e a quantidade de homens que saíram para atendimento externo é igual a $\frac{2h}{3}$. Assim, a quantidade de pessoas que saíram para o atendimento externo é: $\frac{3m}{4} + \frac{2h}{3}$. Colocando a expressão em função de $m$ : $\frac{3m}{4} + \frac{2m}{3} = \frac{9m}{12} + \frac{8m}{12} = \frac{17m}{12}$. Assim das pessoas que foram para o atendimento externo, a fração de mulheres é

$$\frac{\frac{3m}{4}}{\frac{17m}{12}} = \frac{\frac{9m}{12}}{\frac{17m}{12}} = \frac{9}{17}.$$

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para facilitar os cálculos, vamos simular uma quantidade de homens e de mulheres que seja um múltiplo comum dos denominadores das frações que são citadas no enunciado da questão: no caso, $3 \cdot 4 = 12$ pessoas. Como a quantidade de homens é igual a quantidade de mulheres, podemos considerar: doze homens e doze mulheres.

- Quantidade de mulheres que foram para o atendimento externo: $\frac{3}{4}$ de $12 = \frac{36}{4} = 9$ mulheres.
- Quantidade de homens que foram para o atendimento externo: $\frac{2}{3}$ de $12 = \frac{24}{3} = 8$ homens.
- Quantidade total de pessoas que foram para o atendimento externo: $9+8 = 17$ pessoas.

Logo, das 17 pessoas que foram para o atendimento externo, nove delas são mulheres e essa fração é representada por 9/17. Assim a alternativa correta é a letra E.

**Questão 1.4** (FGV 2018)**.** *João recebeu seu salário e fez três gastos sucessivos. Primeiro, gastou a terça parte do que recebeu, depois gastou a quarta parte do restante e, em seguida, gastou dois quintos do restante. A quantia que restou do salário de João é representada pela fração:*

*a)* $\frac{1}{3}$.

*b)* $\frac{1}{4}$.

*c)* $\frac{1}{5}$.

*d)* $\frac{2}{5}$.

***e)*** $\mathbf{\frac{3}{10}}$.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Supondo que o todo do salário seja representado por $x$, podemos montar uma equação com a seguinte lógica:

Total do salário = O que foi gasto + O que sobrou

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot x + y \\
x &= \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{5} + y \\
x &= \frac{10x}{30} + \frac{5x}{30} + \frac{6x}{30} + y \\
x &= \frac{21x}{30} + y \\
y &= \frac{30x}{30} - \frac{21x}{30} \\
y &= \frac{9x}{30} \\
y &= \frac{3x}{10}.
\end{aligned}$$

Se no início tínhamos $x$ reais de salário e sobraram $\frac{3x}{10}$, significa que sobrou $\frac{3}{10}$ do salário.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para facilitar os cálculos, vamos simular o valor do salário de João, em reais, como uma quantidade que seja um múltiplo comum dos denominadores das frações que são citadas no enunciado da questão: no caso, basta multiplicar os denominadores mencionados: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ reais.

- Valor do salário = 60 reais
- $1^\circ$ gasto: $\dfrac{1}{3}$ de $60 = \dfrac{60}{3} = 20$ reais
- Restou: $60 - 20 = 40$ reais
- $2^\circ$ gasto: $\dfrac{1}{4}$ de $40 = \dfrac{40}{4} = 10$ reais
- Restou: $40 - 10 = 30$ reais
- $3^\circ$ gasto: $\dfrac{2}{5}$ de $30 = \dfrac{60}{5} = 12$ reais
- Restou: $30 - 12 = 18$ reais

Se no início tínhamos 60 reais de salário e restou dele, 18 reais, significa que restou $18/60 = 3/10$ da salário. Logo, a alternativa correta é a letra E.

**Questão 1.5** (VUNESP 2020)**.** *Mauro comprou um carro. Deu* $\dfrac{1}{3}$ *do valor total como entrada e financiou* $\dfrac{3}{4}$ *do valor restante. A quantia que falta para completar o valor total será paga em uma única parcela, após o término do financiamento. O valor dessa parcela final corresponde, do valor total do carro, a:*

*a)* $\dfrac{1}{8}$.

***b)*** $\mathbf{\dfrac{1}{6}}$.

*c)* $\dfrac{1}{5}$.

*d)* $\dfrac{1}{4}$.

*e)* $\dfrac{1}{3}$.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Supondo que o todo do valor do carro seja representado por $x$, podemos montar uma equação com a seguinte lógica:

Valor total do carro = O que foi pago + O que falta pagar

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3}\cdot x + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot x + y \\
x &= \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + y \\
x &= \frac{2x}{6} + \frac{3x}{6} + y \\
x &= \frac{5x}{6} + y \\
y &= \frac{6x}{6} - \frac{5x}{6} \\
y &= \frac{x}{6}.
\end{aligned}$$

Se no início o valor do carro era $x$ e ficou $\frac{x}{6}$ para pagar, significa que o valor da parcela final é $\frac{x}{6}$.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para facilitar os cálculos, vamos simular o valor do carro, em reais, como uma quantidade que seja um múltiplo comum dos denominadores das frações que são citadas no enunciado da questão: no caso, basta multiplicar os denominadores mencionados: $3 \cdot 4 = 12$ reais.

- Valor do carro = 12 reais
- Valor de entrada: $\frac{1}{3}$ de $12 = \frac{12}{3} = 4$ reais
- Restou: $12 - 4 = 8$ reais
- Financiou: $\frac{3}{4}$ de $8 = \frac{24}{4} = 6$ reais
- Restou: $8 - 6 = 2$ reais

Se no início o valor do carro era doze reais e a quantidade que restou no final, dois reais, seria o valor para pagar a parcela final do carro, significa que o valor da parcela final em relação ao valor do carro é $2/12 = 1/6$. Logo, a alternativa correta é a letra B.

**Questão 1.6** (VUNESP 2020). *João gasta* $\frac{3}{4}$ *do seu salário em alimentação e aluguel e economiza* $\frac{1}{3}$ *do restante. A fração que indica o quanto João economiza do seu salário é:*

*a)* $\frac{2}{3}$.

*b)* $\frac{1}{4}$.

***c)*** $\boldsymbol{\frac{1}{12}}$.

*d)* $\frac{2}{12}$.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Supondo que o todo do valor do salário seja representado por $x$, podemos montar uma equação com a seguinte lógica:

Valor total do salário = O que foi gasto + O que falta gastar

$$\begin{aligned}
x &= \frac{3}{4}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot x + y \\
x &= \frac{3x}{4} + \frac{x}{6} + y \\
x &= \frac{9x}{12} + \frac{2x}{12} + y \\
x &= \frac{11x}{12} + y \\
y &= \frac{12x}{12} - \frac{11x}{12} \\
y &= \frac{x}{12}.
\end{aligned}$$

Se no início o valor do salário era $x$ e ficou $\frac{x}{12}$ para gastar, significa que o valor que João economiza é $\frac{1}{12}$ do seu salário.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para facilitar os cálculos, vamos simular o valor do salário de João, em reais, como uma quantidade que seja um múltiplo comum dos denominadores das frações que são citadas no enunciado da questão: no caso, basta multiplicar os denominadores mencionados: $4 \cdot 3 = 12$ reais.

- Valor do salário = 12 reais

- $1^\circ$ gasto: $\dfrac{3}{4}$ de $12 = \dfrac{36}{4} = 9$ reais
- Restou: $12 - 9 = 3$ reais
- Economiza: $\dfrac{1}{3}$ de $3 = \dfrac{3}{3} = 1$ real

Se no início tínhamos doze reais de salário e se economizou dele, um real, significa que a fração que João economizou do seu salário foi $1/12$. Logo, a alternativa correta é a letra C.

## 1.4 Validação dos métodos

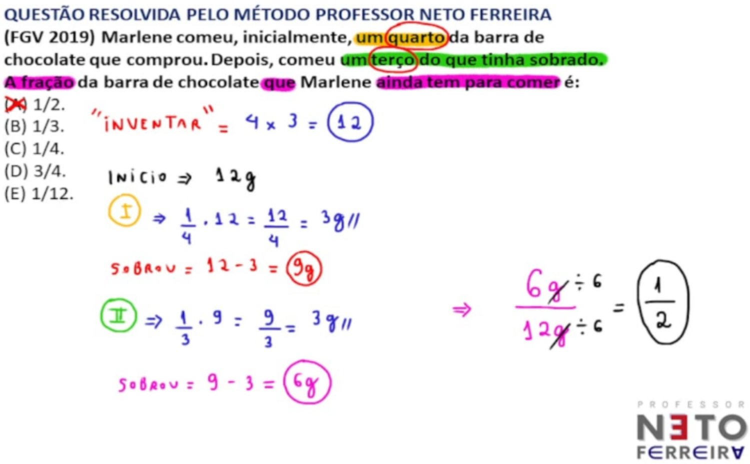
Para a validação do método de resolução proposto pelo autor, em confronto com o método de resolução tradicional, aplicamos um questionário com dez pessoas para saber a opinião de cada uma delas. Num primeiro momento apresentamos ao entrevistado uma questão resolvida em vídeo através do método tradicional e após isso o aluno copiava a questão de modo a fixar o método e assim propomos que ele fizesse uma questão semelhante, utilizando o mesmo método. Seguimos de maneira similar com outro vídeo, apresentando a mesma questão resolvida, só que agora através do método proposto pelo autor, com o aluno seguindo os mesmos procedimentos do primeiro vídeo apresentado.

Depois dessas duas etapas, fizemos as seguintes perguntas aos entrevistados (Figura 1.2):

- O que você achou do método de resolução tradicional?
- O que você achou do método proposto pelo autor?
- Qual foi o método de resolver as questões que você mais gostou?
- Em relação a resposta anterior. Justifique sua escolha/motivo:

A questão escolhida para apresentar aos entrevistados foi a Questão 1.1. Ela foi resolvida em vídeo através do método tradicional (`https://youtu.be/Uxs7RyTVTcw`) e através do método proposto pelo autor (`https://youtu.be/qwqCXxOCOYO`). Na Figura 1.1 tem um recorte da resolução via método apresentado pelo autor. Na Figura 1.2, apresentamos o questionário respondido por um dos entrevistados.

Figura 1.1: Resolução proposta pelo autor


QUESTÃO RESOLVIDA PELO MÉTODO PROFESSOR NETO FERREIRA

(FGV 2019) Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado. A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:

~~(A)~~ 1/2.
(B) 1/3.
(C) 1/4.
(D) 3/4.
(E) 1/12.

"INVENTAR" = $4 \times 3 = 12$

INÍCIO ⇒ 12g

I ⇒ $\frac{1}{4} \cdot 12 = \frac{12}{4} = 3g$//

SOBROU = $12 - 3 = 9g$

II ⇒ $\frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{9}{3} = 3g$//

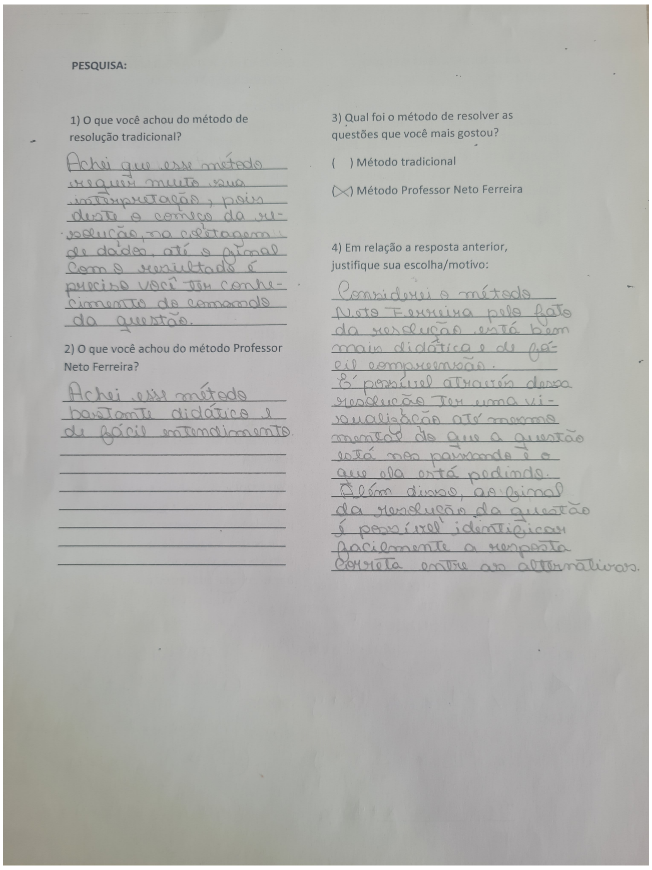
SOBROU = $9 - 3 = 6g$

⇒ $\frac{6\cancel{g} \div 6}{12\cancel{g} \div 6} = \frac{1}{2}$



Fonte: produzido pelo autor

Figura 1.2: Pesquisa respondida pelo entrevistado


PESQUISA:

1) O que você achou do método de resolução tradicional?

Achei que esse método requer muito sua interpretação, pois desde o começo da resolução, na coletagem de dados, até o final com o resultado é preciso você ter conhecimento do comando da questão.

2) O que você achou do método Professor Neto Ferreira?

Achei esse método bastante didático e de fácil entendimento.

3) Qual foi o método de resolver as questões que você mais gostou?

( ) Método tradicional

(X) Método Professor Neto Ferreira

4) Em relação a resposta anterior, justifique sua escolha/motivo:

Considerei o método Neto Ferreira pelo fato da resolução está bem mais didática e de fácil compreensão. É possível através dessa resolução ter uma visualização até mesmo mental do que a questão está nos passando e o que ela está pedindo. Além disso, ao final da resolução da questão é possível identificar facilmente a resposta correta entre as alternativas.

Fonte: produzido pelo autor

### 1.4.1 Resultados obtidos

Após realizarmos a pesquisa, colocamos os resultados obtidos numa tabela. Nelas estão lançadas as respostas de cada uma das dez pessoas entrevistadas:

**Observação 1.1.** *Na resposta da pergunta "Qual o método que mais gostou?" destacamos se o entrevistado acertou ou não a resolução das questões usando a seguinte notação:* (1) *acertou as questões usando os dois métodos;* (2) *acertou a questão usando o método tradicional e errou a questão usando o método proposto pelo autor;* (3) *errou a questão usando o método tradicional e acertou usando o método proposto pelo autor;* (4) *errou as questões usando os dois métodos.*

**Observação 1.2.** *O método Neto Ferreira que nos referimos na pesquisa com os estudantes é o método proposto pelo autor, e foi utilizada esta nomenclatura apenas com o intuito de fazer uma distinção entre o método tradicional e o proposto pelo autor.*

Tabela 1: Resultados e respostas dos estudantes sobre os métodos de resolução.

| **O que achou do método tradicional?** | **O que achou do método Professor Neto ferreira?** | **Qual o método que mais gostou?** | **Em relação a resposta anterior, justifique a sua escolha:** |
|---|---|---|---|
| O método é complicado de entender para quem tem dificuldade em matemática, além de demandar muito tempo. | Mais simples, além de abordar números imaginários como exemplo, facilitando assim o entendimento do aluno e sendo mais rápido. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | É mais simples, mais rápido e menos trabalhoso. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Um método complexo e longo, além de demorar muito e ser bem fácil de se confundir no meio da questão. | Simples, rápido e direto. Sem muita enrolação e com cálculos mais simples. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Em questões de prova o tempo é mais importante, portanto, pelo fato de o método do professor ser mais rápido e direto, prefiro ele. |
| Achei muito trabalhoso e complexo. | Achei mais fácil, simples e rápido. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É mais fácil de memorizar. Em caso de vestibulares, auxilia na economia de tempo. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Achei que esse método requer muito a sua interpretação, pois desde o começo da resolução, na coletagem de dados até o final, com o resultado, é preciso você ter conhecimento do comando da questão. | Achei esse método bastante didático e de fácil entendimento. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Considerei o método Professor Neto Ferreira pelo fato da resolução está bem mais didática e de fácil compreensão. É possível através dessa solução, ter uma visualização, até mesmo mental, do que a questão está nos passando e o que ela está nos pedindo. |
| Um método simples, porém complicado de ser resolvido e numa prova que tem tempo curto, não seria a minha escolha. | Um método simples, rápido e fácil de executar. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | É um método simples e fácil de ser executado. Numa prova que tem tempo curto, usaria o método Professor Neto Ferreira. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É um método lento. Para um vestibular ou concurso público se gastaria muito tempo. | É muito mais rápido e eficaz. Gostei muito de conhecer esse método. O método ajudaria no fator tempo , que seria determinante para poder realizar mais questões numa prova. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É muito mais simples, lógico e rápido. É menos complicado e com menos chances de nos perdermos nas letras e números do método tradicional. Gostei muito do método do professor. |
| É mais complicado e impessoal. Termina afastando o aluno da lógica matemática ao mostrar letras e números. | É perfeito, muito mais simples e palpável. Traz para o dia-a-dia e fica muito mais fácil de responder. Nunca tinha ouvido falar nessas técnicas, gostei muito! | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É muito mais simples, lógico e rápido. É menos complicado e com menos chances de nos perdermos nas letras e números do método tradicional. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É muito confuso. Eu não consegui achar a resposta. | O método facilitou muito a compreensão e a resposta foi encontrada mais fácil. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Ao assistir a aula do método tradicional conseguir entender a dinâmica. Porém, ao aplicar na questão prática, fiquei mais confusa e não consegui encontrar a resposta. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ótimo método. Direto e conciso. O método em questão torna o problema mais geral. | Método criativo. O método Neto Ferreira, instiga a criatividade do estudante deixando o problema com sentido mais prático, e palpável para o estudante, deixando-o talvez mais simples o entendimento. | Método Tradicional. (1) | Talvez por formação, acredito que o método tradicional ainda traga suas elegâncias, onde com variáveis arbitrarias um problema pode ser resolvido em sua essência. Talvez a mescla entre o método Neto Ferreira e o método tradicional conseguissem alinhar de forma interessantíssima, um novo método de solução desse tipo de problema. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| O método tradicional é confuso porque utiliza letras e conceitos, além de requerer mais uma habilidade, que é o MMC. | Adorei o método do professor Neto Ferreira. É ótimo e facilita a resolução porque utiliza exemplos reais. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Gostei mais do método Professor Neto Ferreira porque utiliza números, necessitando de habilidades de operações básicas, como divisão, adição e subtração. Já o outro método confunde muito por utilizar letras e exigir a habilidade de MMC também. Fui resolver a questão pelo método tradicional e não encontrei a resposta. |

Observamos que 30% das pessoas erraram a questão resolvendo através do método tradicional, enquanto pelo proposto pelo autor, tivemos 100% de acertos. Além disso, 90% preferiram o método proposto pelo autor, enquanto 10% preferiram o método tradicional. Dos que preferiram o método proposto pelo autor, o alegado foi a facilidade de não ter que trabalhar com incógnitas e MMC e pelo grande número de etapas envolvidas, aumentar demais as chances de erros, enquanto os 10% que preferiram o método tradicional, alegaram a “elegância” de utilizar a álgebra e a solidez do conhecimento em utilizá-lo em sua verdadeira essência.

# CAPÍTULO 2

# RAZÃO E PROPORÇÃO

Neste capítulo, promovemos uma estratégia de resoluções de questões de múltipla escolha, a respeito do tópico de razão e proporção. Falamos as definições matemáticas necessárias para entender o conceito de razão e proporcionalidade, que dará suporte para o entendimento do significado de proporção, bem como de suas propriedades. Vamos seguir como no Capítulo 1, com a apresentação de questões através dos dois métodos, e a validação deles por meio de uma pesquisa com o viés de questões para a temática de razão e proporção.

## 2.1 Definição de razão

Sem saber, já utilizamos as razões há anos, desde o início do estudo das frações, quando relacionamos "a parte" com "o todo". Observe o exemplo a seguir:

A banda de José é composta por cinco integrantes, dois meninos e três meninas.

Com isso, podemos afirmar que, a cada cinco pessoas na banda, três são meninas. Essa situação pode ser representada por meio da fração $\frac{3}{5}$, em que o denominador cinco representa o total de integrantes e o numerador três representa a parte da banda composta apenas por meninas.

De maneira análoga, podemos relacionar o número de meninos na banda com o total de integrantes por meio da fração $\frac{2}{5}$.

E se quisermos relacionar o número de meninas na banda com o número de meninos? Se nenhuma dessas quantidades representa “o todo”, como faremos? Para isso, precisamos de uma definição mais rigorosa de razão.

A razão entre dois números é dada pelo quociente entre eles, em que o segundo é, obrigatoriamente, diferente de zero. Sendo assim, a razão entre dois números, **a** e **b**, em que $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, nessa ordem, é indicada pelas expressões:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \text{ ou } \mathbf{a} \div \mathbf{b}$$

em que se lê "**a** está para **b**", "razão entre **a** e **b**"ou "razão de **a** para **b**.

Portanto, a razão entre o número de meninas e o de meninos na banda pode ser expressa por $\frac{2}{3}$, ou por $2 \div 3$.

Da mesma maneira, a razão entre o número de meninos e o de meninas na banda pode ser expressa por $\frac{3}{2}$, ou por $3 \div 2$.

### 2.1.1 Elementos de uma razão

Para escrever corretamente uma razão, é imprescindível respeitar a ordem das grandezas informadas. Assim, o primeiro termo de uma razão é chamado de antecedente, e o segundo termo, consequente. Observe a representação a seguir:

$$a \div b \quad ou \quad \frac{a}{b}$$

sendo $a$ o antecedente e $b$ o consequente.

Agora, observe os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.1.** *Durante duas horas de funcionamento dos caixas de um banco, foram atendidas* 40 *senhas comuns e* 16 *senhas preferenciais. Sendo assim, podemos afirmar que a razão entre o número de senhas preferenciais (antecedente) e comuns (consequente) é* $\frac{16}{40}$. *Note que essa fração é redutível, ou seja, podemos simplificá-la. Portanto, podemos representar a razão apresentada por meio da fração equivalente* $\frac{2}{5}$. *Isso significa que, a cada cinco senhas comuns, dois senhas preferenciais eram chamadas.*

**Exemplo 2.2.** *No estádio do Arruda compareceram* 60.000 *espectadores. Eram* 15.000 *torcedores do Sport e* 45.000 *do Santa Cruz. Sendo assim, podemos afirmar que a razão entre o número de torcedores do Sport (antecedente) e o do Santa Cruz (consequente) é* $\frac{15.000}{45.000}$, *o que equivale a* $\frac{1}{3}$. *Isso significa que, para cada torcedor do Sport, havia três do Santa Cruz.*

## 2.2 Proporção: definição, elementos e propriedades

As frações equivalentes quando simplificadas, correspondem a uma mesma fração irredutível, isto é, quando o máximo divisor comum (MDC) entre o numerador e o denominador é igual a 1. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \dots \\ \frac{4}{7} &= \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \frac{20}{35} = \dots \end{aligned}$$

As frações equivalentes podem ser chamadas proporcionais. Uma proporção é a igualdade entre duas ou mais razões. Dizemos que quatro números racionais e não nulos, a, b, c, e d, formam, nessa ordem, uma proporção se, e somente se, temos:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}.$$

Lemos " a está para b, assim como c está para d".

Pode-se expressar essa proporção também por $\mathbf{a} \div \mathbf{b} = \mathbf{c} \div \mathbf{d}$, em que **a** e **d** são chamados extremos da proporção, e **b** e **c** são chamados meios da proporção.

Sendo assim, os números 2, 3, 4 e 6 formam, nessa ordem, uma proporção, pois $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Da mesma maneira, os números 2, 5, 8 e 20 também formam, nessa ordem, uma proporção, pois $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$.

**Exemplo 2.3.** *Verifique se os números* 8, 14, 20 *e* 35 *formam, nessa ordem, uma proporção.*

*Vamos montar a proporção respeitando a ordem estabelecida e, em seguida, simplificamos cada razão individualmente e comparamos os resultados.*

$$8 : 14 = 20 : 35 \Rightarrow \frac{8}{14} = \frac{20}{35} \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{4}{7}.$$

*Como obtivemos uma igualdade entre razões, então temos uma proporção. Logo, a sequência dada forma uma proporção.*

**Exemplo 2.4.** *Qual deve ser o valor de* $x$ *de modo que os números* 15, $x$, 3 *e* 4 *formem, nessa ordem, uma proporção?*

*Como queremos uma proporção, então* $15 : x = 3 : 4$, *ou seja,* $\frac{15}{x} = \frac{3}{4}$. *Utilizando a ideia de frações equivalentes, temos:*

$$\frac{15}{x} = \frac{3}{4}.$$

*Assim, o valor de* $x$ *deve ser* 20, *para que a sequência dada forme uma proporção.*

### 2.2.1 Propriedades das proporções

Vamos considerar a proporção $8 \div 10 = 24 \div 30$. Os meios dessa proporção são 10 e 24, e o produto deles é igual a 240. Os extremos dessa proporção são 8 e 30, e o produto deles é 240. Nessa proporção, o produto dos meios foi igual ao produto dos extremos.

Vamos considerar agora a proporção $2 \div 9 = 6 \div 27$. Os meios dessa proporção são 9 e 6, e o produto deles é igual a 54. Os extremos dessa proporção são 2 e 27, e o produto deles é igual a 54.

Nessa proporção, o produto dos meios também foi igual ao produto dos extremos. Na verdade, em toda proporção isso acontecerá. Essa é a propriedade fundamental das proporções. Ou seja, em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

**Propriedade 2.1** (Propriedade Fundamental das Proporções)**.** *Seja a proporção* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$, *em que* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *e* $\boldsymbol{d}$ *são números racionais não nulos. , então* $b \times c = a \times d$, *ou, ainda,* $a \cdot d = b \cdot c$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

*em que,* $\boldsymbol{b \cdot c}$ *é o produto dos meios e* $\boldsymbol{a \cdot d}$ *é o produto dos extremos.*

Como consequência da propriedade fundamental, nós podemos, quando for conveniente, escrever a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ na forma $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Mas qual é a justificativa?

Note que, ao aplicar a propriedade fundamental na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, obtemos:

$$b \times c = a \times d.$$

Aplicando a propriedade fundamental na outra proporção, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, obtemos:

$$a \times d = b \times c.$$

Portanto, como obtivemos a mesma igualdade, uma proporção é releitura da outra, ou seja, são as mesmas proporções escritas de formas diferentes.

Além da Propriedade fundamental das proporções, destacamos uma outra que será muito útil para o objetivo do nosso trabalho:

**Propriedade 2.2.** *Em uma proporção, a soma dos seus antecedentes está para a soma dos seus consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.*

$$\textit{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \textit{ então } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

*Demonstração.* Considere a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

i) Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

ii) Somado a unidade (o número 1) em ambos os membros da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{c} = \frac{b}{d} + \frac{d}{d} \\ &\Rightarrow \quad \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}. \end{aligned}$$

iii) Permutando novamente, temos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

iv) Como $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, então:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

□

## 2.3 Método de resolução das questões de razão e proporção

O método tradicional de resolução, consiste no entendimento da montagem do problema através do conceito do que é uma razão e do que é uma proporção. Após esse entendimento, o que se usará é o conhecimento da Propriedade Fundamental das Proporções e de resolução de sistemas de equações do 1° grau. É um método que funciona bem, porém acaba se tornando mais demorado pela quantidade de cálculos envolvidos, principalmente pelo uso de frações ou decimais.

Já o método proposto pelo autor, consiste numa utilização da Propriedade 2.2 e quando necessário, deixar sempre a razão em forma de uma fração irredutível. Essa técnica é utilizada em problemas específicos de razão e proporção, onde é pedida a quantidade total de objetos numa determinada situação e conseguimos achar esses valores através de análise das alternativas, em questões do tipo múltipla escolha.

A ideia consiste em analisar a proporcionalidade de cada objeto e trabalhar a ideia de múltiplos ou divisibilidade, sabendo que em problemas matemáticos, o número de animais, pessoas e objetos é sempre um número inteiro. A vantagem é que não precisaremos fazer muitas contas utilizando sistema de equações.

## 2.4 Resolução de questões

A seguir, resolveremos seis questões de concursos ou processos seletivos, através do método proposto pelo professor Neto Ferreira, comparando com a resolução através do método tradicional.

Usaremos a notação $\propto$ para indicar a relação de proporcionalidade entre as respectivas grandezas. Dado as grandezas $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$. Se $(x_0, y_0) \propto (x_1, y_1)$, então $\dfrac{x_0}{x_1} = \dfrac{y_0}{y_1}$.

**Questão 2.1** (ENA 2016). *Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco homens e cinco mulheres, a porcentagem de homens na festa passou a ser de 26%. Depois disso, qual a quantidade de pessoas na festa?*

*a)* 45.

***b)* 50**.

*c)* 55.

*d)* 60.

*e)* 65.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional (baseada na resolução encontrada em [11]):** Sejam $m$ e $h$ o número inicial de mulheres e homens, respectivamente. Por hipótese $m = 4 \cdot h$ e $h + 5 = \dfrac{26}{100} \cdot (h + 5 + m + 5)$. Substituindo $m = 4 \cdot h$ na segunda equação temos, $100 \cdot (h + 5) = 26 \cdot (5 \cdot h + 10)$. Assim concluímos que $h = 8$ e $m = 32$. Após a chegada dos cinco homens e das cinco mulheres, $h + 5 = 13$ homens e $m + 5 = 37$ mulheres e, portanto, 50 pessoas na festa.

**Solução da questão proposta pelo autor:** O foco na questão está em saber a quantidade de pessoas no final da festa após a entrada de cinco homens e cinco mulheres. Podemos perceber que a quantidade final de homens ($h$) é proporcional a 26%, enquanto a quantidade de mulheres ($m$) é proporcional a $74\% = 100\% - 26\%$. Logo:

$$(h, m) \propto (26, 74) \Rightarrow (h, m) \propto (13, 37).$$

Assim: $\dfrac{h}{13} = \dfrac{m}{37} = \dfrac{h+m}{50}$. Concluindo que a quantidade total de pessoas na festa $(h + m)$ deve se um valor inteiro e divisível por 50, e entre as alternativas a única que atende a esses critérios é a letra b), pois 50 é múltiplo de 50.

**Questão 2.2** (FGV 2015)**.** *Em uma turma do Ensino Fundamental, havia três meninos para cada cinco meninas. Dois meninos dessa turma saíram da escola e em seus lugares, entraram duas meninas na mesma turma em que eles estudavam. Agora, nessa turma, há um menino para cada duas meninas. O número de estudantes nessa turma é:*

*a)* 30.

*b)* 36.

*c)* 42.

*d)* 45.

***e)* 48**.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:**

Chamando o número inicial de homens de $h$ e o número inicial de mulheres de $m$, temos

$$\frac{h}{3} = \frac{m}{5} \Rightarrow 5 \cdot h = 3 \cdot m \Rightarrow h = \frac{3 \cdot m}{5} \Rightarrow h = 0,6 \cdot m.$$

Na segunda parte do problema temos:

$$\begin{aligned}
\frac{h-2}{1} = \frac{m+2}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{0,6 \cdot m - 2}{1} = \frac{m+2}{2} \\
&\Rightarrow \quad 2 \cdot (0,6 \cdot m - 2) = 1 \cdot (m+2) \\
&\Rightarrow \quad 1,2 \cdot m - 4 = m + 2 \\
&\Rightarrow \quad 0,2 \cdot m = 6 \\
&\Rightarrow \quad m = \frac{6}{0,2} \\
&\Rightarrow \quad m = 30.
\end{aligned}$$

Assim, $h = 0,6 \cdot m = 0,6 \cdot 30 = 18$.

Concluindo que a quantidade total de pessoas na sala de aula $(h+m)$ é $(18+30)$, que é igual a 48, portanto, alternativa e). Como a pergunta foca na quantidade total, não importa se é na primeira ou segunda parte do problema, pois na segunda parte quantidade total não varia, já que a quantidade de homens que saem da sala é compensada com a quantidade de mulheres que entram.

**Solução da questão proposta pelo autor:** O foco na questão está em saber a quantidade de pessoas na sala de aula, que é igual na situação inicial e na situação final, já que a quantidade de homens que saem da sala é compensada com a quantidade de mulheres que entram.

Podemos perceber que a quantidade inicial de homens $(h_0)$ é proporcional a 3 enquanto a quantidade inicial de mulheres $(m_0)$ é proporcional a 5. Logo:

$$(h_0, m_0) \propto (3, 5).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{h_0}{3} = \frac{m_0}{5} = \frac{h_0 + m_0}{8}.$$

Já a quantidade final de homens ($h$) é proporcional a 1, enquanto a quantidade final de mulheres ($m$) é proporcional a 2. Logo,

$$(h, m) \propto (1, 2).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{h}{1} = \frac{m}{2} = \frac{h + m}{3}.$$

Concluindo que a quantidade total de pessoas nessa sala de aula em qualquer um dos instantes citados $(h_0 + m_0)$ ou $(h + m)$ deve se um valor inteiro e divisível por oito e três ao mesmo tempo, e entre as alternativas o único número que atende esses critérios é o 48, portanto, alternativa e).

**Questão 2.3** (FGV 2014)**.** *Em uma turma do 9° ano de um colégio de ensino fundamental, para cada três meninas há dois meninos. Uma das meninas saiu do colégio e em seu lugar entrou um menino nessa turma do 9° ano. Agora, para cada quatro meninas há três meninos. A quantidade total de alunos nessa turma é:*

*a)* 20.

*b)* 25.

*c)* 28.

*d)* 30.

***e)* 35**.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Denotemos por $h_0$ e $m_0$ o número de meninos e meninas que estavam presentes na situação inicial, respectivamente. Assim, temos

$$\frac{h_0}{m_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_0 = \frac{3h_0}{2}. \tag{2.1}$$

Porém, no final a proporção era de

$$\frac{h_0+1}{m_0-1}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4h_0+4=3m_0-3\Rightarrow h_0=\frac{3m_0}{4}-\frac{7}{4}. \tag{2.2}$$

Portanto, substituindo (2.1) em (2.2), temos

$$h_0=\frac{3\cdot\left(\dfrac{3h_0}{2}\right)}{4}-\frac{7}{4}\Rightarrow h_0=\frac{9h_0}{8}-\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{h_0}{8}=\frac{7}{4}\Rightarrow h_0=14$$

Assim, obtemos que $m_0=\dfrac{3\cdot 14}{2}=21$. Portanto o número total de alunos nessa turma é $35=14+21$.

**Solução da questão proposta pelo autor:** O foco na questão está em saber a quantidade total de alunos nessa turma de 9° ano, tanto fazendo se for antes da saída da menina e entrada do menino, ou antes disso, pois a quantidade total não mudará. Podemos perceber que a quantidade inicial de meninos ($h_0$) é proporcional a 2, enquanto a quantidade inicial de meninas ($m_0$) é proporcional a 3. Logo:

$$(h_0,m_0)\propto(2,3).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{h_0}{2}=\frac{m_0}{3}=\frac{h_0+m_0}{5}.$$

Já a quantidade final de meninos ($h$) é proporcional a 3, enquanto a quantidade final de meninas ($m$) é proporcional a 4.

Logo:

$$(h,m)\propto(3,4).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{h}{3}=\frac{m}{4}=\frac{h+n}{7}.$$

Concluindo que a quantidade total de alunos do 9° ano ($h_0+m_0$) ou ($h+m$) deve se um valor inteiro e divisível por cinco e sete ao mesmo tempo, e entre as alternativas o único número que atende esses critérios é o 35.

**Questão 2.4** (FGV 2013). *Em um grupo de $N$ pessoas, 36% são mulheres e os demais são homens. Três mulheres deixam o grupo e três novos homens integram o mesmo. Nesse novo grupo, 30% são mulheres. O valor de $N$ é:*

*a)* 72.

*b)* 60.

***c)* 50.**

*d)* 48.

*e)* 40.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Denotemos por $h_0$ e $m_0$ o número de homens e mulheres que estavam presentes na situação inicial, respectivamente.

Assim, temos

$$\frac{h_0}{m_0} = \frac{64}{36} \Rightarrow \frac{h_0}{m_0} = \frac{16}{9} \Rightarrow m_0 = \frac{9h_0}{16} \tag{2.3}$$

Porém, no final a proporção era de,

$$\frac{h_0 + 3}{(m_o - 3)} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3h_0 + 9 = 7m_0 - 21 \Rightarrow h_0 = \frac{7m_0}{3} - 10 \tag{2.4}$$

Portanto, substituindo (2.3) em (2.4), temos,

$$h_0 = \frac{7 \cdot \left(\frac{9h_0}{16}\right)}{3} - 10 = \frac{63h_0}{48} - 10 \Rightarrow \frac{15h_0}{48} = 10 \Rightarrow h_0 = 32.$$

Assim, obtemos que $m_0 = \dfrac{9 \cdot 32}{16} = 18$. Portanto o número total de pessoas do grupo é $50 = 32 + 18$.

**Solução da questão proposta pelo autor:** O foco na questão está em saber a quantidade total de pessoas do grupo, tanto fazendo se for antes da saída das três mulheres e entrada dos três homens, ou antes disso, pois a quantidade total não mudará. Podemos perceber que a quantidade inicial de homens ($h_0$) é proporcional a 64%, enquanto a quantidade inicial de mulheres ($m_0$) é proporcional a 36%. Logo:

$$(h_0, m_0) \propto (64, 36) \Rightarrow (h_0, m_0) \propto (16, 9).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{h_0}{16} = \frac{m_0}{9} = \frac{h_0 + m_0}{25}.$$

Já a quantidade final de homens ($h$) é proporcional a 70%, enquanto a quantidade final de mulheres ($m$) é proporcional a 30%.

Logo:

$$(h, m) \propto (70, 30) \Rightarrow (h, m) \propto (7, 3).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{h}{7} = \frac{m}{3} = \frac{h + m}{10}.$$

Concluindo que a quantidade total de alunos ($h_0 + m_0$) ou ($h + m$) deve ser um valor inteiro e divisível por 25 e 10 ao mesmo tempo, e entre as alternativas o único número que atende esses critérios é o 50.

**Questão 2.5** (VUNESP 2021)**.** *Uma empresa aluga triciclos e bicicletas para passeios em um parque. Atualmente, na frota dessa empresa, para cada* 3 *triciclos há* 8 *bicicletas e o proprietário pretende comprar mais* 40 *triciclos, fazendo com que para cada triciclo haja* 2 *bicicletas. O numero atual de bicicletas mais triciclos é igual a:*

*a)* 430.

***b)* 440**.

*c)* 450.

*d)* 460.

*e)* 470.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Denotemos por $t_0$ e $b_0$ o número de triciclos e bicicletas que a empresa aluga inicialmente.

Assim, temos

$$\frac{t_0}{b_0} = \frac{3}{8} \Rightarrow t_0 = \frac{3b_0}{8}. \tag{2.5}$$

Porém, se houvesse a compra dos 40 triciclos a proporção ficará de

$$\frac{t_0 + 40}{b_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_0 = 2t_0 + 80. \tag{2.6}$$

Portanto, substituindo (2.5) em (2.6), temos,

$$b_0 = \frac{2 \cdot 3b_0}{8} + 80 = \frac{6b_0}{8} + 80, \Rightarrow \frac{2b_0}{8} = 80 \Rightarrow B_0 = 320.$$

Assim, obtemos que $b_0 = \dfrac{3 \cdot 320}{8} = 120$. Portanto o número atual de bicicletas mais triciclos é $440 = 320 + 120$.

**Solução da questão proposta pelo autor:** O foco na questão está em saber a quantidade atual de bicicletas e triciclos. Podemos perceber que a quantidade atual de triciclos ($t_0$) é proporcional a 3, enquanto a quantidade atual ($b_0$) é proporcional a 8.

Logo:

$$(t_0, b_0) \propto (3, 8).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{t_0}{3} = \frac{b_0}{8} = \frac{t_0 + b_0}{11}$$

Concluindo que a quantidade atual de triciclos mais bicicletas ($t_0 + b_0$) deve ser um valor inteiro e divisível por onze ao mesmo tempo, e entre as alternativas o único número que atende esses critérios é o 440.

**Questão 2.6** (CPCON/UEPB 2019)**.** *Uma turma de alunos de um curso preparatório para concursos iniciou-se com o número de mulheres igual a* $\dfrac{3}{4}$ *do número de homens. Nessa turma, houve uma evasão de* 10 *alunos, sendo* 3 *homens e* 7 *mulheres. Ao final do curso,* 60% *da turma era composta de homens. Quantas pessoas concluíram o curso?*

*a)* 94.

*b)* 98.

*c)* 97.

***d)* 95**.

*e)* 92.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** Denotemos por $h_0$ e $m_0$ o número de homens e mulheres que o curso preparatório possuía inicialmente. Assim, temos

$$m_0 = \frac{3 \cdot h_0}{4} \Rightarrow \frac{h_0}{m_0} = \frac{4}{3} \Rightarrow h_0 = \frac{4m_0}{3}. \tag{2.7}$$

Porém, com a evasão citada no enunciado a proporção ficará de

$$\frac{h_0 - 3}{m_0 - 7} = \frac{60}{40} \Rightarrow \frac{h_0 - 3}{m_0 - 7} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2h_0 - 6 = 3m_0 - 21 \Rightarrow h_0 = \frac{3m_0}{2} - \frac{15}{2}. \tag{2.8}$$

Portanto, substituindo (2.7) em (2.8), temos

$$\frac{4m_0}{3} = \frac{3m_0}{2} - \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{m_0}{6} = \frac{15}{2} \Rightarrow m_0 = 45.$$

Assim, obtemos que $h_0 = \dfrac{4 \cdot 45}{3} = 60$. Portanto o número de pessoas que concluíram o curso é $95 = 45 + 60 - 10$.

**Solução da questão proposta pelo autor:** O foco na questão está em saber a quantidade de alunos que concluíram o curso. Podemos perceber que a quantidade final de homens ($h$) é proporcional a três, enquanto a quantidade final de mulheres ($m$) é proporcional a dois.

Logo:

$$(h, m) \propto (3, 2).$$

Assim, utilizando a Propriedade 2.2, temos:

$$\frac{h}{3} = \frac{m}{2} = \frac{h+m}{5}.$$

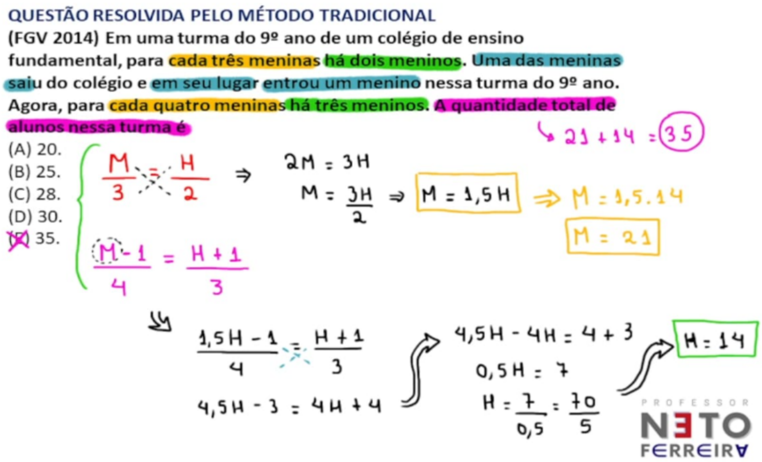
Concluindo que a quantidade de pessoas que concluíram o curso $(h+m)$ deve ser um valor inteiro e divisível por cinco, e entre as alternativas o único número que atende esses critérios é o número 95.

## 2.5 Validação dos métodos

O procedimento de aplicação da pesquisa foi feito de modo análogo ao realizado na Seção 1.4.

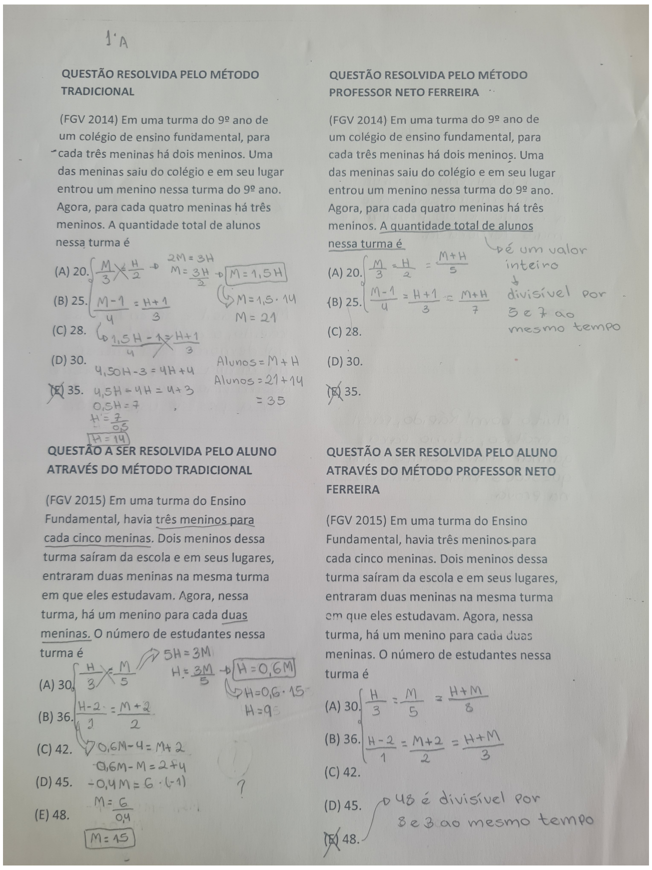
A questão escolhida para apresentar aos entrevistados foi a Questão 2.3. Ela foi resolvida em vídeo através do método tradicional (`https://youtu.be/n3YLL691_uU`) e através do método proposto pelo autor (`https://youtu.be/DoJP6XQ5E8M`). A Figura 2.1 mostra um recorte da resolução via método tradicional apresentado pelo autor em vídeo. Já a questão escolhida para o aluno tentar consolidar o que foi aprendido, foi a Questão 2.2. Na Figura 2.2, apresentamos um questionário respondido por um dos entrevistados.

Figura 2.1: Resolução através do método Tradicional




Fonte: produzido pelo autor

Figura 2.2: Pesquisa respondida pelo entrevistado



1ºA

**QUESTÃO RESOLVIDA PELO MÉTODO TRADICIONAL**

(FGV 2014) Em uma turma do 9º ano de um colégio de ensino fundamental, para cada três meninas há dois meninos. Uma das meninas saiu do colégio e em seu lugar entrou um menino nessa turma do 9º ano. Agora, para cada quatro meninas há três meninos. A quantidade total de alunos nessa turma é

(A) 20.
(B) 25.
(C) 28.
(D) 30.
(E) 35.

$\frac{M}{3} = \frac{H}{2} \rightarrow 2M = 3H$, $M = \frac{3H}{2} \rightarrow \boxed{M = 1{,}5H}$

$\frac{M-1}{4} = \frac{H+1}{3}$

$\frac{1{,}5H-1}{4} = \frac{H+1}{3}$

$4{,}50H - 3 = 4H + 4$

$4{,}5H - 4H = 4 + 3$

$0{,}5H = 7$

$H = \frac{7}{0{,}5}$

$\boxed{H = 14}$

$M = 1{,}5 \cdot 14$

$M = 21$

Alunos = M + H

Alunos = 21 + 14

= 35

**QUESTÃO RESOLVIDA PELO MÉTODO PROFESSOR NETO FERREIRA**

(FGV 2014) Em uma turma do 9º ano de um colégio de ensino fundamental, para cada três meninas há dois meninos. Uma das meninas saiu do colégio e em seu lugar entrou um menino nessa turma do 9º ano. Agora, para cada quatro meninas há três meninos. A quantidade total de alunos nessa turma é

(A) 20.
(B) 25.
(C) 28.
(D) 30.
(E) 35.

$\frac{M}{3} = \frac{H}{2} = \frac{M+H}{5}$

$\frac{M-1}{4} = \frac{H+1}{3} = \frac{M+H}{7}$

é um valor inteiro
divisível por 5 e 7 ao mesmo tempo

**QUESTÃO A SER RESOLVIDA PELO ALUNO ATRAVÉS DO MÉTODO TRADICIONAL**

(FGV 2015) Em uma turma do Ensino Fundamental, havia três meninos para cada cinco meninas. Dois meninos dessa turma saíram da escola e em seus lugares, entraram duas meninas na mesma turma em que eles estudavam. Agora, nessa turma, há um menino para cada duas meninas. O número de estudantes nessa turma é

(A) 30.
(B) 36.
(C) 42.
(D) 45.
(E) 48.

$\frac{H}{3} = \frac{M}{5} \rightarrow 5H = 3M$, $H = \frac{3M}{5} \rightarrow \boxed{H = 0{,}6M}$

$\frac{H-2}{1} = \frac{M+2}{2}$

$0{,}6M - 4 = M + 2$

$0{,}6M - M = 2 + 4$

$-0{,}4M = 6 \cdot (-1)$

$M = \frac{6}{0{,}4}$

$\boxed{M = 15}$

$H = 0{,}6 \cdot 15$

$H = 9$

?

**QUESTÃO A SER RESOLVIDA PELO ALUNO ATRAVÉS DO MÉTODO PROFESSOR NETO FERREIRA**

(FGV 2015) Em uma turma do Ensino Fundamental, havia três meninos para cada cinco meninas. Dois meninos dessa turma saíram da escola e em seus lugares, entraram duas meninas na mesma turma em que eles estudavam. Agora, nessa turma, há um menino para cada duas meninas. O número de estudantes nessa turma é

(A) 30.
(B) 36.
(C) 42.
(D) 45.
(E) 48.

$\frac{H}{3} = \frac{M}{5} = \frac{H+M}{8}$

$\frac{H-2}{1} = \frac{M+2}{2} = \frac{H+M}{3}$

48 é divisível por 8 e 3 ao mesmo tempo

Fonte: produzido pelo autor

### 2.5.1 Resultados obtidos

Após realizarmos a pesquisa, colocamos os resultados obtidos numa tabela. Nelas estão lançadas as respostas de cada uma das dez pessoas entrevistadas:

**Observação 2.1.** *Usaremos as notações conforme a Observação 1.1.*

**Observação 2.2.** *O método Neto Ferreira que nos referimos na pesquisa com os estudantes é o método proposto pelo autor, e foi utilizada esta nomenclatura apenas com o intuito de fazer uma distinção entre o método tradicional e o proposto pelo autor.*

Tabela 2: Resultados e respostas dos estudantes sobre os métodos de resolução.

| **O que achou do método tradicional?** | **O que achou do método Professor Neto ferreira?** | **Qual o método que mais gostou?** | **Em relação a resposta anterior, justifique a sua escolha:** |
|---|---|---|---|
| Um pouco confuso e mais trabalhoso. | Fácil de entender, melhor de aplicar. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Boa explicação; Melhor entendimento. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É um método mais demorado e que exige concentração na resolução, pois qualquer erro na conta, já erra a questão. Por isso é necessário cuidado e prática. Para mim é o jeito mais difícil. | Eu achei ótimo, pois além de economizar tempo, é bem mais prático. Achei melhor para questões fechadas. Talvez nas questões abertas fique mais difícil. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Achei o método do professor mais prático e rápido. Admito que se fosse aberta, ia passar mais tempo pensando, mas é um método mais viável em questões fechadas. |
| Achei complicado de fazer sem o exemplo. | Mais simples e rápido. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É mais fácil. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É bom, porém demora muito. Se eu como estudante fizer o ENEM ou outro vestibular, iria gastar muito tempo, em consequência disso, teria menos tempo para acabar o ENEM ou o vestibular. | É tão bom quanto o método tradicional, mas ele é melhor ainda, porque é mais rápido, fazendo você ganhar mais tempo. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Além de ser mais rápido, ele é mais fácil. Entretanto, se a questão não for de alternativa, não tem como resolver com esse método, deixando-o vago. Mas se você for um estudante em pré-época de ENEM ou de editais, é muito mais eficiente usar esse método a usar o tradicional. |
| Acho que ele não é difícil, porém o segundo método é mais fácil. | Mais fácil que o método tradicional. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | É mais fácil de fazer e entender |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É mais complicado de ser fazer, visto que são muitos cálculos e o aluno pode acabar se perdendo. | Muito mais fácil e prático, visto que é só montar duas equações, fazer a soma dos denominadores e depois ir testando alternativa por alternativa. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Muito mais fácil de compreender e aprender, visto de suas estratégias. |
| Achei legal, mas confunde demais minha cabeça e a resolução do problema é mais demorada. | Muito bom! Rápido, fácil e prático. Ótimo para ganhar mais tempo com questões mais difíceis na prova. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Mais fácil e aprendi mais rápido. O método tradicional demorou para entrar na minha cabeça, e mesmo assim não consegui resolver a questão. |
| Eu acho que o método funciona, porém algumas pessoas podem apresentar dificuldades, assim como eu tive na questão proposta. | Mais fácil que o método tradicional. | Método Professor Neto Ferreira. (4) | É mais fácil de fazer e entender. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É mais complicado de ser fazer, visto que são muitos cálculos e o aluno pode acabar se perdendo. | Muito mais fácil e prático, visto que é só montar duas equações, fazer a soma dos denominadores e depois ir testando alternativa por alternativa. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Muito mais fácil de compreender e aprender, visto de suas estratégias. |
| Achei legal, mas confunde demais minha cabeça e a resolução do problema é mais demorada. | Muito bom! Rápido, fácil e prático. Ótimo para ganhar mais tempo com questões mais difíceis na prova. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Mais fácil e aprendi mais rápido. O método tradicional demorou para entrar na minha cabeça. |
| É mais demorado e precisa decorar, mas isso se constrói com a prática. A vantagem é que funciona 100% das vezes. | Bem mais fácil de fazer e de decorar, mas possui a desvantagem de não funcionar sempre. É muito bom para ganhar tempo numa prova de concurso. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É bem mais rápido, então vale a pena testar, já que mesmo não dando certo, não terá consumido tanto tempo. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É muito extenso e requer mais tempo para ser resolvido. | É mais prático, requer menos tempo e muito mais fácil de se compreender. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É muito mais simples de se resolver, gasta-se menos tempo para resolver, o que em uma prova é muito importante a questão de tempo. Além de ser um método fácil de se compreender e assim não esquecer tão fácil o caminho para resolver a questão. |

Observamos que 60% das pessoas erraram a questão resolvendo através do método tradicional, enquanto pelo método proposto pelo autor esse número foi de 10%. Além disso, 100% preferiram o método proposto pelo autor, alegando praticidade, velocidade e a não necessidade de fazer sistemas de equações e cálculos demorados envolvendo frações e decimais, além de propriedades necessárias para resolução das equações. Mesmo alegando preferirem o método proposto pelo autor, 20% das pessoas entrevistadas chamaram atenção referente ao método ser um caso particular, de poder ser usado só em questões objetivas, ficando mais dificultoso, se fosse um caso de uma questão subjetiva.

# CAPÍTULO 3

# REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Neste capítulo, promovemos uma estratégia de resoluções de questões de múltipla escolha, a respeito do tópico de regra de três composta. Falamos as definições matemáticas necessárias para entender o conceito de regra de três, baseado em propriedades do conteúdo de razão e proporção. Vamos seguir como no Capítulo 1, com a apresentação de questões através dos dois métodos, e a validação deles por meio de uma pesquisa com o viés de questões para a temática de regra de três composta.

## 3.1 Regra de três simples

Neste tópico trabalhamos os conceitos de regra de três simples, envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais.

### 3.1.1 Grandezas diretamente proporcionais

Considere a situação a seguir:

**Situação 3.1.** *Um carro se desloca a uma velocidade de* $60\,km/h$*. Isso quer dizer que o carro percorre uma distância de* $60$ *quilômetros a cada* $1$ *hora de viagem. Se a* *distância percorrida aumenta, o tempo gasto também aumentará, considerando que a velocidade é a mesma em todo percurso.*

*Vamos formar razões com os valores correspondentes de cada grandeza e verificar se há um padrão.*

$$\frac{60}{1} = 60 \qquad \frac{240}{4} = 60$$
$$\frac{120}{2} = 60 \qquad \frac{150}{2,5} = 60$$
$$\frac{180}{3} = 60 \qquad \frac{210}{3,5} = 60.$$

**Propriedade 3.1.** *Duas grandezas, $x$ e $y$, são diretamente proporcionais se a razão entre seus valores é sempre constante. Na medida que uma grandeza cresce (decresce) a outra também cresce (decresce) de maneira proporcional. Sendo assim, sejam $x_1$ e $x_2$, $y_1$ e $y_2$ valores das grandezas diretamente proporcionais $x$ e $y$, respectivamente, temos*

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k.$$

*Em que **k** é um número constante, chamado **constante de proporcionalidade**. Em outras palavras, se as grandezas $x$ e $y$ são diretamente proporcionais, então, para quaisquer valores de $x$ e $y$, teremos $\frac{x}{y} = k$. Isso é equivalente a afirmar que $x = k \cdot y$.*

**Exemplo 3.1.** *Uma padaria produz 400 pães com 10 kg de trigo. Quantos quilogramas de trigo são necessários para produzir 1.000 pães?*

***I.*** *Podemos organizar os dados em um quadro.*

| *Número de pães* | *Quantidade de trigo (em kg)* |
|---|---|
| 400 | 10 |
| 1000 | $x$ |

***II.*** *Note que, quanto mais trigo tiver, mais pães serão produzidos. Ou seja, na medida que uma grandeza cresce a outra também cresce de maneira proporcional. Portanto, as grandezas são diretamente proporcionais.*

**III.** *Aplicando a definição de grandezas diretamente proporcionais, que diz que o quociente entre as grandezas é constante, temos:*

$$\frac{400}{10} = \frac{1.000}{x}.$$

*Resolvendo essa proporção, temos:*

$$\begin{aligned} 400x &= 1.000 \cdot 10 \\ 400x &= 10.000 \\ x &= 25. \end{aligned}$$

*Assim, para a produção de* 1.000 *pães, são necessários* 25 *kg de trigo.*

### 3.1.2 Grandezas inversamente proporcionais

Considere a seguinte situação:

**Situação 3.2.** *Carla contratou um profissional para fazer a reforma do escritório dela. Esse profissional disse que consegue finalizar o serviço sozinho em* 40 *dias. Diante desse prazo, Carla deseja reduzir a quantidade de dias para finalizar a obra rapidamente, porém o profissional precisa contratar ajudantes para reduzir o tempo de obra. Observe o quadro elaborado com essas informações pelo profissional para Carla.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Prazo para conclusão (em dias)* | 40 | 20 | 10 | 8 | 5 |
| *Número de trabalhadores* | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 |

*Ao analisar o quadro, Carla percebeu duas situações:*

1. *O produto entre os primeiros valores de cada grandeza é igual ao produto entre os segundos valores de cada grandeza, que é igual ao produto dos terceiros valores de cada grandeza, e assim sucessivamente.*

$$40 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5 = 5 \cdot 8 = 40.$$

2. *As razões formadas por dois valores quaisquer de uma grandeza são inversas às razões formadas pelos dois valores correspondentes da outra grandeza.*

– *A razão formada pelos dois primeiros valores da grandeza prazo é* $\frac{40}{20}$*, que equivale a* $\frac{2}{1}$*. Já a razão formada pelos dois primeiros valores da grandeza número de trabalhadores é* $\frac{1}{2}$*. Note que as razões* $\frac{2}{1}$ *e* $\frac{1}{2}$ *são inversas.*

– *A razão formada pelos dois últimos valores da grandeza prazo é* $\frac{8}{5}$*. Já a razão formada pelos dois últimos valores da grandeza número de trabalhadores é* $\frac{5}{8}$*. Novamente, as razões obtidas,* $\frac{8}{5}$ *e* $\frac{5}{8}$*, são inversas.*

**Propriedade 3.2.** *Duas grandezas $x$ e $y$ são inversamente proporcionais se o produto entre seus valores correspondentes é sempre constante. Na medida que uma grandeza cresce (decresce) a outra também decresce (cresce) de maneira proporcional. Portanto, sendo $x_1$ e $x_2$, $y_1$ e $y_2$ valores das grandezas inversamente proporcionais $x$ e $y$, respectivamente, temos:*

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k.$$

*Em que $k$ é a constante de proporcionalidade. Isto é, se as grandezas $x$ e $y$ são inversamente proporcionais, temos $x \cdot y = k$. Isso é equivalente a afirmar que* $x = \frac{k}{y}$.

**Exemplo 3.2.** *Uma torneira enche um tanque em 45 minutos. Quantas torneiras iguais a essa são necessárias para encher esse tanque em 15 minutos?*

***I.*** *Podemos organizar os dados em um quadro.*

| *Número de torneiras* | *Tempo (em min)* |
|---|---|
| 1 | 45 |
| $x$ | 15 |

***II.*** *Note que, quanto mais torneiras estiverem enchendo o tanque, em menos tempo ele estará cheio. Ou seja, na medida que uma grandeza cresce a outra decresce de maneira proporcional. Portanto, as grandezas se comportam de maneira inversamente proporcionais.*

***III.*** *Aplicando a definição de grandezas inversamente proporcionais, que diz que o produto entre as grandezas é constante, temos:*

$$\begin{aligned} 15 \cdot x &= 45 \cdot 1 \\ 15 \cdot x &= 45. \end{aligned}$$

*Resolvendo essa equação, temos:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{45}{15} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

*Portanto, são necessárias três torneiras para encher o tanque em quize minutos.*

## 3.2 Regra de três composta

Os problemas que envolvem três ou mais grandezas interdependentes podem ser resolvidos por meio da regra de três composta. Ela apresenta sucessivas regras de três simples, ou seja, várias proporções na mesma resolução.

A partir das Propriedades 3.1 e 3.2 enunciaremos a Propriedade 3.3, pois quando temos uma regra de três com pelo menos 3 grandezas envolvidas, podemos verificar se, duas a duas, elas se comportam de maneira diretamente ou inversamente proporcionais entre si.

**Propriedade 3.3.** *Sejam as grandezas $x$, $y$ e $z$, tais que $x$ é diretamente proporcional às gradezas $y$ e é inversamente proporcional à grandeza $z$. Então $x = k\frac{y}{z}$.*

Como a propriedade mostrada é válida para quaisquer valores das grandezas $x$, $y$ e $z$, então temos

$$\begin{aligned} x_1 = k\frac{y_1}{z_1} \quad &\Rightarrow \quad k = \frac{x_1 \cdot z_1}{y_1} \\ x_2 = k\frac{y_2}{z_2} \quad &\Rightarrow \quad k = \frac{x_2 \cdot z_2}{y_2}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$\frac{x_1 \cdot z_1}{y_1} = \frac{x_2 \cdot z_2}{y_2}$$

Quando resolvemos regra de três composta da forma tradicional, geralmente a igualdade anterior é reorganizada utilizando a separação das grandezas:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{z_2}{z_1}$$

Note que a razão formada pelos valores da grandeza $y$ segue a mesma ordem dos correspondentes da grandeza $x$, obedecendo a condição de que $x$ e $y$ são grandezas diretamente proporcionais. Já a razão formada pelos valores da grandeza $z$ segue a ordem inversa da razão formada pelos valores correspondentes da grandeza $x$, obedecendo a ideia de que $x$ e $z$ são grandezas inversamente proporcionais.

## 3.3 Método de resolução das questões de regra de três composta

O método proposto pelo autor, consiste numa releitura da Propriedade 3.3. As pessoas que utilizam essa técnica, a intitulam como "método processo x produto" ou "método causa x consequência".

A ideia consiste em transformar a regra de três composta em duas "grandezas", uma denominamos como "processo" e outra como "produto". A vantagem desse método é que não precisaremos ficar analisando o comportamento das grandezas duas a duas, se elas são diretamente ou inversamente proporcionais, mas sim analisar o conjunto completo: quem é o "processo" e quem é o "produto".

O "processo" é tudo que é necessário para se produzir algo. É como se fossem as ferramentas necessárias para obter um objetivo. São exemplos de grandezas que de maneira geral fazem parte do "processo": número de operários, número de máquinas, tempo, horas/dias etc. Já o "produto" é o que foi obtido a partir do "processo", a consequência gerada. São exemplos de grandezas que de maneira geral fazem parte do "produto": número de atendimentos realizados, número de parafusos produzidos, metro quadrado de muro executado etc. Por fim, todas as grandezas que ficam no "processo" se comportam de maneira inversamente proporcional, ou seja, o produto entre elas será constante. Já a relação entre o "processo" e o "produto" será sempre diretamente proporcional, pois quanto mais "processo" envolvido, mais "produto" será realizado, de forma proporcional.

## 3.4 Resolução de questões

A seguir, resolveremos seis questões de concursos ou processos seletivos, através do método proposto pelo autor, comparando com a resolução através do método tradicional.

**Questão 3.1** (FGV 2019)**.** *Sabe-se que* 3 *recenseadores, com a mesma capacidade de trabalho, entrevistam 360 pessoas em* 8 *dias. O número de dias que* 2 *desses recenseadores levarão para entrevistar* 510 *pessoas é:*

*a)* 14.

*b)* 15.

*c)* 16.

***d)* 17**.

*e)* 18.

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** É um tipo de questão que será resolvida por regra de três composta. Devemos comparar as grandezas duas a duas, sempre com uma dessas grandezas sendo a que está presente a incógnita $x$:

| Nº de recenseadores | Tempo (em dias) | Nº de pessoas entrevistadas |
|---|---|---|
| 3 | 8 | 360 |
| 2 | $x$ | 510 |

**I.** Quanto mais recenseadores tivermos, em menos tempo as pessoas serão entrevistas. Portanto essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

**II.** Quanto mais pessoas forem entrevistadas, mais tempo vai demorar para finalizar tal serviço. Portanto essas duas grandezas são diretamente proporcionais.

**III.** Calculando o valor de $x$:

- Mantemos a razão da grandeza onde temos a incógnita $x$ na mesma posição e igualamos essa razão ao produto das outras razões;
- Quando a grandeza for diretamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, mantemos a posição dos números da razão;
- Quando a grandeza for inversamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, invertemos a posição dos números da razão.

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{8}{x} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{360}{510}\\
\frac{8}{x} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{12}{17}\\
\frac{8}{x} &= \frac{24}{51}\\
\frac{1}{x} &= \frac{3}{51}\\
\frac{3}{x} &= 51\\
x &= 17.
\end{aligned}$$

Logo, serão necessários 17 dias.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para resolvermos uma regra de três composta, basta identificarmos que é o "processo" e quem é o "produto". O processo são as grandezas necessárias para realizar tal serviço, já o produto, é o serviço. O processo e o produto são sempre diretamente proporcionais, pois quanto mais processo envolvido, mais produto é gerado, e vice-versa. Com isso, organizamos os dados numa tabela: as grandezas que fazem parte do processo devem ser multiplicadas em "paralelo" (inversamente proporcionais), já o processo com o produto é uma multiplicação "cruzada", pois são diretamente proporcionais.

| Processo | | | Produto |
|---|---|---|---|
| Nº de recenseadores | | Tempo (em dias) | Nº de pessoas entrevistadas |
| 3 | → | 8 | 360 |
| 2 | → | $x$ | 510 |

Então:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot x \cdot 360 &= 3 \cdot 8 \cdot 510 \\
1 \cdot x \cdot 120 &= 1 \cdot 4 \cdot 510 \\
12 \cdot x &= 1 \cdot 4 \cdot 51 \\
3 \cdot x &= 1 \cdot 51 \\
3 \cdot x &= 51 \\
x &= 17.
\end{aligned}
$$

Logo, serão necessários 17 dias.

**Questão 3.2** (FGV 2018). *Três funcionários atendem 48 clientes em 4 horas. Com a mesma eficiência, 4 funcionários atendem 64 clientes em:*

*a)* 3 *horas.*

***b)*** 4 *horas.*

*d)* **6 *horas.***

*c)* 5 *horas.*

*e)* 7 *horas.*

**Solução da questão proposta pelo método tradicional**: É um tipo de questão que será resolvida por regra de três composta. Devemos comparar as grandezas duas a duas, sempre com uma dessas grandezas sendo a que está presente a incógnita $x$:

| Nº de funcionários | Tempo (em horas) | Nº de clientes atendidos |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 48 |
| 4 | $x$ | 64 |

**I.** Quanto mais funcionários tivermos, em menos tempo os clientes serão atendidas. Portanto essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

**II.** Quanto mais clientes forem atendidos, mais tempo vai demorar para finalizar tal serviço. Portanto essas duas grandezas são diretamente proporcionais.

**III.** Calculando o valor de $x$:

- Mantemos a razão da grandeza onde temos a incógnita $x$ na mesma posição e igualamos essa razão ao produto das outras razões;
- Quando a grandeza for diretamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, mantemos a posição dos números da razão;
- Quando a grandeza for inversamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, invertemos a posição dos números da razão.

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{48}{64} \\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{4} \\
1 \cdot x &= 1 \cdot 4 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Logo, serão necessárias quatro horas.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para resolvermos uma regra de três composta, basta identificarmos que é o "processo" e quem é o "produto". O processo são as grandezas necessárias para realizar tal serviço, já o produto, é o serviço. O processo e o produto são sempre diretamente proporcionais, pois quanto mais processo envolvido, mais produto é gerado, e vice-versa. Com isso, organizamos os dados numa tabela: as grandezas que fazem parte do processo devem ser multiplicadas em "paralelo" (inversamente proporcionais), já o processo com o produto é uma multiplicação "cruzada", pois são diretamente proporcionais.

| Processo | | Produto |
|---|---|---|
| Nº de funcionários | Tempo (em horas) | Nº de clientes atendidos |
| 3 → | 4 | 48 |
| 4 → | $x$ | 64 |

Então:

$$\begin{aligned}
4 \cdot x \cdot 48 &= 3 \cdot 4 \cdot 64 \\
1 \cdot x \cdot 16 &= 1 \cdot 1 \cdot 64 \\
16 \cdot x &= 64 \\
x &= \frac{64}{16} \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Logo, serão necessárias quatro horas.

**Questão 3.3** (FGV 2019)**.** *Se* 2 *atendentes atendem* 12 *pessoas em* 3 *horas, então* 3 *atendentes atenderão* 24 *pessoas em:*

***a)* 4 *horas.***

*b)* 3 *horas e meia.*

*c)* 3 *horas.*

*d)* 2 *horas e meia.*

*e)* 2 *horas.*

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** É um tipo de questão que será resolvida por regra de três composta. Devemos comparar as grandezas duas a duas, sempre com uma dessas grandezas sendo a que está presente a incógnita $x$:

| Nº de atendentes | Tempo (em horas) | Nº de pessoas atendidas |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 12 |
| 3 | $x$ | 24 |

**I.** Quanto mais atendentes tivermos, em menos tempo as pessoas serão atendidas. Portanto essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

**II.** Quanto mais pessoas forem atendidas, mais tempo vai demorar para finalizar tal serviço. Portanto essas duas grandezas são diretamente proporcionais.

**III.** Calculando o valor de $x$:

- Mantemos a razão da grandeza onde temos a incógnita x na mesma posição e igualamos essa razão ao produto das outras razões;
- Quando a grandeza for diretamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, mantemos a posição dos números da razão;
- Quando a grandeza for inversamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, invertemos a posição dos números da razão.

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{24} \\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{4} \\
1 \cdot x &= 1 \cdot 4 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Logo, serão necessárias quatro horas.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para resolvermos uma regra de três composta, basta identificarmos que é o “processo” e quem é o “produto”. O processo são as grandezas necessárias para realizar tal serviço, já o produto, é o serviço. O processo e o produto são sempre diretamente proporcionais, pois quanto mais processo envolvido, mais produto é gerado, e vice-versa. Com isso, organizamos os dados numa tabela: as grandezas que fazem parte do processo devem ser multiplicadas em “paralelo” (inversamente proporcionais), já o processo com o produto é uma multiplicação “cruzada”, pois são diretamente proporcionais.

| Processo | | | Produto |
|---|---|---|---|
| Nº de atendentes | | Tempo (em horas) | Nº de pessoas atendidas |
| 2 | $\to$ | 3 | 12 |
| 3 | $\to$ | $x$ | 24 |

Então:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x \cdot 12 &= 2 \cdot 3 \cdot 24 \\
1 \cdot x \cdot 1 &= 2 \cdot 1 \cdot 2 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Logo, serão necessárias 4 horas.

**Questão 3.4** (FGV 2018)**.** *Três caixas atendem* 60 *clientes em* 1$h$30*min. Cinco caixas atenderão* 120 *clientes em:*

*a)* 3 *horas.*

*b)* 2 *horas e* 30 *min.*

*c)* 2 *horas e* 06 *min.*

*d)* 1 *hora e* 54 *min.*

***e) 1 hora e 48 min.***

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** É um tipo de questão que será resolvida por regra de três composta. Devemos comparar as grandezas duas a duas, sempre com uma dessas grandezas sendo a que está presente a incógnita $x$:

| Nº de caixas | Tempo (em minutos) | Nº de clientes atendidos |
|---|---|---|
| 3 | 90 | 60 |
| 5 | $x$ | 120 |

**I.** Quanto mais caixas tivermos, em menos tempo os clientes serão atendidas. Portanto essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

**II.** Quanto mais clientes forem atendidos, mais tempo vai demorar para finalizar tal serviço. Portanto essas duas grandezas são diretamente proporcionais.

**III.** Calculando o valor de $x$:

- Mantemos a razão da grandeza onde temos a incógnita $x$ na mesma posição e igualamos essa razão ao produto das outras razões;
- Quando a grandeza for diretamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, mantemos a posição dos números da razão;
- Quando a grandeza for inversamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, invertemos a posição dos números da razão.

$$
\begin{aligned}
\frac{90}{x} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{60}{120} \\
\frac{90}{x} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \\
\frac{90}{x} &= \frac{5}{6} \\
5 \cdot x &= 90 \cdot 6 \\
5 \cdot x &= 540 \\
x &= \frac{540}{5} \\
x &= 108\,\text{minutos}
\end{aligned}
$$

Logo, serão necessários 108 minutos, equivalente a 1 hora e 48 minutos.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para resolvermos uma regra de três composta, basta identificarmos que é o "processo" e quem é o "produto". O processo são as grandezas necessárias para realizar tal serviço, já o produto, é o serviço. O processo e o produto são sempre diretamente proporcionais, pois quanto mais processo envolvido, mais produto é gerado, e vice-versa. Com isso, organizamos os dados numa tabela: as grandezas que fazem parte do processo devem ser multiplicadas em "paralelo" (inversamente proporcionais), já o processo com o produto é uma multiplicação "cruzada", pois são diretamente proporcionais.

| Processo | | Produto |
|---|---|---|
| Nº de caixas | Tempo (em minutos) | Nº de clientes atendidos |
| 3 → | 90 | 60 |
| 5 → | $x$ | 120 |

Então:

$$\begin{aligned} 5 \cdot x \cdot 60 &= 3 \cdot 90 \cdot 120 \\ 1 \cdot x \cdot 1 &= 3 \cdot 18 \cdot 2 \\ x &= 108\,\text{minutos} \end{aligned}$$

Logo, serão necessários 108 minutos, equivalente a uma hora e 48 minutos.

**Questão 3.5** (FGV 2017)**.** *Três operários constroem um muro em 6 horas. Cinco operários construirão um muro com o triplo do tamanho do muro citado em:*

*a)* 8 *horas e* 40 *min.*

*b)* 9 *horas e* 24 *min.*

***c) 10 horas e 48 min.***

*d)* 11 *horas e* 20 *min.*

*e)* 12 *horas.*

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** É um tipo de questão que será resolvida por regra de três composta. Como no enunciado não se fala o tamanho do muro, denotaremos esse valor como $y$ e o triplo desse como $3y$. Devemos comparar as grandezas duas a duas, sempre com uma dessas grandezas sendo a que está presente a incógnita $x$:

| Nº de operários | Tempo (em horas) | Serviço (tamanho do muro) |
|---|---|---|
| 3 | 6 | $y$ |
| 5 | $x$ | $3y$ |

**I.** Quanto mais operários tivermos, em menos tempo o serviço será realizado. Portanto essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

**II.** Quanto mais serviço for realizado, mais tempo vai demorar para finalizar tal serviço. Portanto essas duas grandezas são diretamente proporcionais.

**III.** Calculando o valor de $x$:

- Mantemos a razão da grandeza onde temos a incógnita $x$ na mesma posição e igualamos essa razão ao produto das outras razões;
- Quando a grandeza for diretamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, mantemos a posição dos números da razão;
- Quando a grandeza for inversamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, invertemos a posição dos números da razão.

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{x} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{1y}{3y} \\
\frac{6}{x} &= \frac{5y}{9y} \\
\frac{6}{x} &= \frac{5}{9} \\
5 \cdot x &= 6 \cdot 9 \\
5 \cdot x &= 54 \\
x &= \frac{54}{5} \\
x &= 10,8\,\text{horas}
\end{aligned}$$

Logo, serão necessários $10,8$ horas, equivalente a dez horas e 48 minutos.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para resolvermos uma regra de três composta, basta identificarmos que é o “processo” e quem é o “produto”. O processo são as grandezas necessárias para realizar tal serviço, já o produto, é o serviço, que neste caso é o tamanho do muro que será denotado por $y$, enquanto o triplo do tamanho do muro, será denotado por $3y$. O processo e o produto são sempre diretamente proporcionais, pois quanto mais processo envolvido, mais produto é gerado, e vice-versa. Com isso, organizamos os dados numa tabela: as grandezas que fazem parte do processo devem ser multiplicadas em "paralelo" (inversamente proporcionais), já o processo com o produto é uma multiplicação "cruzada", pois são diretamente proporcionais.

| Processo | | | Produto |
|---|---|---|---|
| Nº de operários | | Tempo (em horas) | Serviço (tamanho do muro) |
| 3 | $\rightarrow$ | 6 | $y$ |
| 5 | $\rightarrow$ | $x$ | $3y$ |

Então:

$$
\begin{aligned}
5 \cdot x \cdot 1y &= 3 \cdot 6 \cdot 3y \\
5 \cdot x \cdot 1 \cdot 1 &= 54 \cdot 1 \\
5 \cdot x &= 54 \\
x &= \frac{54}{5} \\
x &= 10,8\,\text{horas}
\end{aligned}
$$

Logo, serão necessários 10, 8 horas, equivalente a 10 horas e 48 minutos.

**Questão 3.6** (FGV 2018)**.** *Dois atendentes atendem* 32 *clientes em* 2*h*40*min. Com a mesma eficiência, três atendentes atenderão* 60 *clientes em:*

*a)* 2 *horas e* 40 *min.*

*b)* 2 *horas e* 48 *min.*

*c)* 3 *horas e* 10 *min.*

***d) 3 horas e 20 min.***

*e)* 3 *horas e* 30 *min.*

**Solução da questão proposta pelo método tradicional:** É um tipo de questão que será resolvida por regra de três composta. Devemos comparar as grandezas duas a duas, sempre com uma dessas grandezas sendo a que está presente a incógnita $x$:

| Nº de atendentes | Tempo (em minutos) | Nº de clientes atendidos |
|---|---|---|
| 2 | 160 | 32 |
| 3 | $x$ | 60 |

**I.** Quanto mais atendentes tivermos, em menos tempo os clientes serão atendidos. Portanto essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

**II.** Quanto mais clientes forem atendidos, mais tempo vai demorar para finalizar tal serviço. Portanto essas duas grandezas são diretamente proporcionais.

**III.** Calculando o valor de $x$:

- Mantemos a razão da grandeza onde temos a incógnita $x$ na mesma posição e igualamos essa razão ao produto das outras razões;
- Quando a grandeza for diretamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, mantemos a posição dos números da razão;
- Quando a grandeza for inversamente proporcional a grandeza onde está a incógnita, invertemos a posição dos números da razão.

$$\begin{aligned}
\frac{160}{x} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{32}{60} \\
\frac{160}{x} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} \\
\frac{160}{x} &= \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{5} \\
\frac{160}{x} &= \frac{4}{5} \\
4 \cdot x &= 160 \cdot 5 \\
4 \cdot x &= 800 \\
x &= \frac{800}{4} \\
x &= 200\,\text{minutos}
\end{aligned}$$

Logo, serão necessários 200 minutos, equivalente a 3 horas e 20 minutos.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Para resolvermos uma regra de três composta, basta identificarmos que é o "processo" e quem é o "produto". O processo são as grandezas necessárias para realizar tal serviço, já o produto, é o serviço. O processo e o produto são sempre diretamente proporcionais, pois quanto mais processo envolvido, mais produto é gerado, e vice-versa. Com isso, organizamos os dados numa tabela: as grandezas que fazem parte do processo devem ser multiplicadas em "paralelo" (inversamente proporcionais), já o processo com o produto é uma multiplicação "cruzada", pois são diretamente proporcionais.

| Processo | | Produto |
|---|---|---|
| Nº de atendentes | Tempo (em minutos) | Nº de clientes atendidos |
| 2 $\rightarrow$ | 160 | 32 |
| 3 $\rightarrow$ | $x$ | 60 |

Então:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x \cdot 32 &= 2 \cdot 160 \cdot 60 \\
1 \cdot x \cdot 16 &= 1 \cdot 160 \cdot 20 \\
1 \cdot x \cdot 1 &= 1 \cdot 10 \cdot 20 \\
x &= 200\,\text{minutos}
\end{aligned}
$$

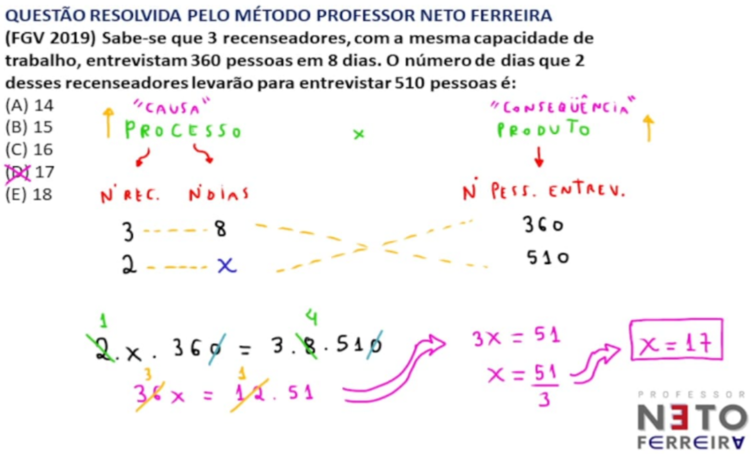
Logo, serão necessários 200 minutos, equivalente a 3 horas e 20 minutos.

## 3.5 Validação dos métodos

O procedimento de aplicação da pesquisa foi feito de modo análogo ao realizado na Seção 1.4.

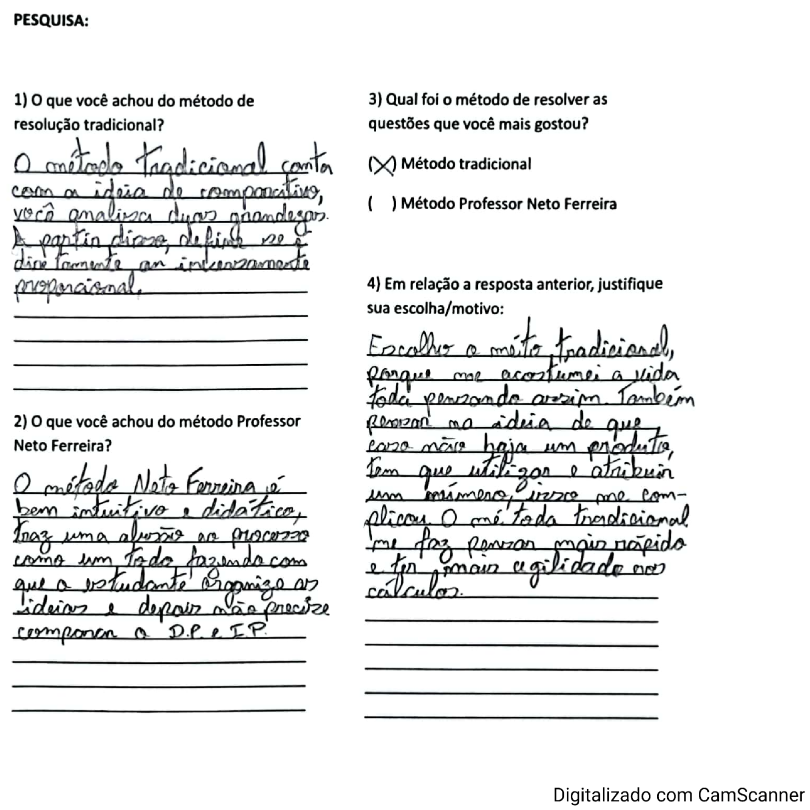
A questão escolhida para apresentar aos entrevistados foi a Questão 3.1. Ela foi resolvida em vídeo através do método tradicional, (`https://youtu.be/ZbyOabGuXIk`) e através do método proposto pelo autor(`https://youtu.be/0tnDY2TPdRg`). A Figura 3.1 mostra um recorte da resolução via método proposto pelo autor. Já a questão escolhida para o aluno tentar consolidar o que foi aprendido, foi a Questão 3.2. Na Figura 3.2 apresentamos um questionário respondido por um dos entrevistados.

Figura 3.1: Resolução proposta pelo autor




Fonte: produzido pelo autor

Figura 3.2: Pesquisa respondida pelo entrevistado



**PESQUISA:**

1) O que você achou do método de resolução tradicional?

O método tradicional conta com a ideia de comparativo, você analisa duas grandezas. A partir disso, define se é diretamente ou inversamente proporcional.

2) O que você achou do método Professor Neto Ferreira?

O método Neto Ferreira é bem intuitivo e didático, traz uma alusão ao processo como um todo fazendo com que o estudante organize as ideias e depois não precise comparar a D.P. e I.P.

3) Qual foi o método de resolver as questões que você mais gostou?

(X) Método tradicional

( ) Método Professor Neto Ferreira

4) Em relação a resposta anterior, justifique sua escolha/motivo:

Escolho o método tradicional, porque me acostumei a vida toda pensando assim. Também pensar na ideia de que caso não haja um produto, tem que utilizar e atribuir um número, isso me complicou. O método tradicional me faz pensar mais rápido e ter mais agilidade nos cálculos.

Digitalizado com CamScanner

Fonte: produzido pelo autor

### 3.5.1 Resultado obtidos

Após realizarmos a pesquisa, colocamos os resultados obtidos numa tabela. Nelas estão lançadas as respostas de cada uma das 10 pessoas entrevistadas:

**Observação 3.1.** *Usaremos as notações conforme a Observação 1.1.*

**Observação 3.2.** *O método Neto Ferreira que nos referimos na pesquisa com os estudantes é o método proposto pelo autor, e foi utilizada esta nomenclatura apenas com o intuito de fazer uma distinção entre o método tradicional e o proposto pelo autor.*

Tabela 3: Resultados e respostas dos estudantes sobre os métodos de resolução.

| O que achou do método tradicional? | O que achou do método Professor Neto ferreira? | Qual o método que mais gostou? | Em relação a resposta anterior, justifique a sua escolha: |
|---|---|---|---|
| É Fácil, mas por vim em formato de fração pode acabar gerando alguma confusão. | Também é fácil de aplicar, porém com organização mais simples, por acabar gerando uma equação, sem precisar resolver as formas fracionárias antes. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Apesar de estar familiarizada com o método tradicional, a forma de organizar, pode gerar confusões. O método do professor tem uma organização mais clara e direta. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É o método que estou acostumada a usar, porém, me confundo algumas vezes com as setas, errando a questão. | Bom, eu já conhecia o método. Usei algumas vezes, porém não era com todas as questões que davam certo. Acredito que eu errava a montagem em algum ponto, não sei. Porém, esse método é sem dúvida mais fácil. | Método Tradicional. (1) | Escolhi o tradicional, porque estou adaptada, cometo erros as vezes, mas parte do processo. Porém queria deixar claro, que o método apresentado pelo professor, é sem dúvidas, um facilitador, isto é, otimiza o tempo que seria gasto numa questão utilizando o método tradicional. |
| É um método que requer mais interpretação, já que é preciso saber se é diretamente ou inversamente proporcional. | Mais simples e rápido. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | O método é mais rápido e não precisa de tanta interpretação. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É mais extenso, requer mais tempo e ainda me deixa dúvida se está correto ou não. | É mais organizado e rápido, não deixando dúvidas. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É mais organizado e na hora de resolver a questão fica mais fácil lembrar o raciocínio que foi ensinado, ganhando assim também agilidade para resolver a questão. |
| É o método em que estamos familiarizados a resolver, porém é um pouco mais lento para chegar no resultado. | Mais prático, me levou ao resultado mais rápido. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Não resolvia regra de três há muito tempo. Foi preciso relembrar o método tradicional e aprender o método Neto Ferreira para resolver as questões. Cheguei a conclusão que gostei do método do professor pela praticidade. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eu já conhecia o método tradicional e sempre achei um pouco confuso na hora de definir se as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. E se essa definição, a resposta sairá errada também. Ou seja, a definição de diretamente e inversamente proporcional é o principal para a resolução da questão, o que torna o método um pouco complicado. | Eu gostei desse método porque não precisa definir se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais. A montagem da regra de três segue um padrão que facilita o cálculo. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Achei o método mais fácil e simples e resolver, pois o principal da questão é definir qual é o processo e o produto. Saber essa definição é mais simples do que definir se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais. Após a definição do que é o processo e produto, é só fazer o cálculo cuja montagem é padrão. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É um método que trabalhamos muito mais, pois temos que separar as razões e posteriormente defini-las em grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, para podermos armar a proporção. | É um processo menos trabalhoso, pois basta conhecer o processo x produto. O processo trabalha multiplicando as frações e em seguida aplica-se a propriedade das proporções. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | O método do professor é menos trabalhoso, pois quando descobrimos o sujeito principal, que é o produto. Basta trabalhar multiplicando as razões em paralelos e em seguida em cruz, com o produto. Ou seja: processo x produto. |
| Muito trabalhoso, pois temos que saber se as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, para só depois armar a questão. | É bem melhor, pois basta saber quem é o produto da questão. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É menos trabalhoso. Só trabalhamos com as paralelas e depois que cruzamos as razões. Ou seja: basta, multiplicar as frações e depois aplicar o método das proporções. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bem didático, porém demonstra uma redução de eficiência em razão de apresentar excesso de etapas. | Exige um pouco mais de interpretação textual, porém aparenta ser mais prático para o uso no dia-a-dia. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Apesar de, ao meu ver, o tradicional apresentar uma didática mais explicada em razão do maior número de etapas até a resolução, o método do professor me parece ser mais viável a uma aplicação do dia-a-dia, e traz uma resolução mais ágil, economizando assim o tempo, que atualmente é o ativo mais importante que dispomos. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| O método conta com a ideia de comparativo, você analisa duas grandezas. A partir disso, define se é diretamente ou inversamente proporcional. | É bem intuitivo e didático, trás uma alusão ao processo como um todo, fazendo com que o estudante organize as ideias e depois não precise comparar as grandezas diretamente e inversamente proporcionais. | Método Tradicional. (1) | Escolho o método tradicional, porque me acostumei a vida toda pensando assim. Também pensar na ideia de que caso não haja produto, tem que utilizar e atribuir um número, isso me complicou. O método tradicional me faz pensar mais rápido e ter mais agilidade nos cálculos. |

Observamos que 100% das pessoas acertaram a questão proposta através dos dois métodos. Além disso, 80% preferiram o método proposto pelo autor, alegando praticidade, velocidade e a não necessidade de analisar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais. Já, os 20% que preferiram o método tradicional, alegaram preferir o método pelo fato de já estar acostumado com a resolução dessa maneira e ter dúvidas acerca se o outro método funcionará sempre.

# CAPÍTULO 4

# PORCENTAGEM

Neste capítulo, promovemos uma estratégia de resoluções de questões de múltipla escolha, a respeito do tópico de porcentagem. Falamos as definições matemáticas necessárias para entender o conceito de porcentagem, baseado na ideia de razão centesimal, ou seja, o denominador trabalhado é o número 100. A ideia da parte teórica é dar subsídio para que consigamos resolver problemas específicos de porcentagem envolvendo: aumentos sucessivos, descontos sucessivos e aumentos e descontos sucessivos. No primeiro momento esses problemas serão resolvidos através da maneira tradicional. Após isso, vamos seguir como no Capítulo 1, com a apresentação de questões através dos dois métodos, e a validação deles por meio de uma pesquisa com o viés de questões para a temática de porcentagem.

## 4.1 Razão centesimal ou porcentagem

As razões que possuem consequentes iguais a 100 são denominadas razões centesimais ou porcetagem.

Exemplos: $\frac{54}{100}, \frac{35}{100}, \frac{7}{100}$

As porcentagens são frequentemente indicadas na forma decimal ou pelo símbolo

% (por cento).

Assim, temos:

$$\frac{54}{100} = 0,54 = 54\%.$$

$$\frac{35}{100} = 0,35 = 35\%$$

$$\frac{7}{100} = 0,07 = 7\%.$$

As representações 54%, 35% e 7% são denominadas taxas percentuais.

### 4.1.1 Questões envolvendo porcentagem

No dia-a-dia, há inúmeras situações em que temos a necessidade de calcular ou usar porcentagens.

**Exemplo 4.1.** *Um equipamento cujo valor é* $R\$600,00$ *foi comprado com desconto de* $15\%$. *Qual o valor pago?*

**Resolução:** $15\% = \dfrac{15}{100} = 0,15$. Temos, $15\%$ de $600 = 0,15 \cdot 600 = 90$. Com isso sabemos que o desconto foi de $R\$90,00$. Portanto, o valor pago pelo equipamento foi de $R\$510,00$

**Exemplo 4.2.** *Calcular* $40\%$ *de* $40\%$.

**Resolução:** $40\% = \dfrac{40}{100}$. Logo, $40\%$ de $40\%$ é igual a $\dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{40}{100} = \dfrac{1.600}{10.000} = \dfrac{16}{100} = 16\%$

## 4.2 Fator de aumento e fator de redução

Muitos problemas da área financeira podem ser envolvidos com o auxílio dos fatores de aumento e de redução.

### 4.2.1 Fator de aumento

É um conceito muito usado no cálculo de acréscimos quando se faz alguma operação financeira. Observe a situação a seguir.

**Situação 4.1.** *Um empregado de uma empresa teve um aumento de salário de* $20\%$ *sobre seu ganho atual, que é* $R\$900,00$*. Para determinar o seu novo salário, devemos fazer:*

$$20\% \quad de \quad 900 = \frac{20}{100} \cdot 900 = 0,20 \cdot 900 = 180$$

*Dessa forma, temos:* $R\$900,00 + R\$180,00 = R\$1.080,00$*. Dessa forma, temos:* $R\$900,00 + R\$180,00 = R\$1.080,00$

*Admitindo que o aumento seja estendido a todos os empregados da empresa, calcular o reajuste para um salário cujo valor atual é* $x$*.*

*Devemos fazer:* $20\% \quad de \quad x = 0,20 \cdot x$

*O novo salário é dado por:* $x + 0,20 \cdot x = (1 + 0,20) \cdot x = 1,20 \cdot x$*.*

*O número* $1,20$ *neste caso é denominador fator de aumento. De modo geral, se determinado valor* $N$ *sofre um acréscimo segundo uma taxa percentual* $i$*, o novo valor* $N'$ *é dado por:*

$$N' = (1 + i) \cdot N$$

*Sendo* $(1 + i)$ *o fator de aumento.*

**Exemplo 4.3.** *O preço de custo de uma mercadoria é* $R\$300,00$*. Sabendo que ela foi vendida por* $R\$345,00$*, qual foi o fator de aumento usado?*

**Resolução:**

Sendo $C$ o preço de custo e $V$, o de venda, temos $C = 300$ e $V = 345$. Daí, vem:

$$\begin{aligned} V &= (1 + i) \cdot C \\ (1 + i) &= \frac{345}{300} \\ (1 + i) &= 1,15 \end{aligned}$$

Portanto, o fator de aumento é $1,15$.

**Observação 4.1.** *A taxa percentual de aumento nesse caso é dada por:*

$$\begin{aligned} 1 + i &= 1,15 \\ i &= 1,15 - 1 \\ i &= 0,15 = 15\%. \end{aligned}$$

### 4.2.2 Fator de redução

É um conceito muito usado no cálculo de descontos quando se faz alguma operação financeira. Observe a situação a seguir.

**Situação 4.2.** *Um automóvel cujo valor é* $R\$60.000,00$ *foi comprado à vista com desconto de* $5\%$*. Determinar o preço que foi pago.*

**Resolução:** Devemos fazer: $5\%$ de $60.000 = \dfrac{5}{100} \cdot 60.000 = 0,05 \cdot 60.000 = 3000$. O preço pago à vista $R\$60.000,00 - R\$3.000,00 = R\$57.000,00$. Portanto, foi pago o preço de $R\$57.000,00$ pelo automóvel.

Vamos admitir agora que o desconto seja estendido a outras marcas e modelos. Nesse caso, um automóvel cujo preço é $x$ reais, terá com $5\%$ de desconto, o seguinte preço à vista:

$$x - 5\% \text{ de } x = x - 0,05 \cdot x = (1 - 0,05) \cdot x = 0,95 \cdot x$$

O número $0,95$ nesse caso é denominado fator de redução. De modo geral, se determinado valor $N$ sofre um desconto segundo uma taxa percentual $i$, o novo valor $N'$ é dado por:

$$N' = (1 - i) \cdot N$$

Sendo $(1 - i)$ o fator de redução.

**Exemplo 4.4.** *O preço de custo de uma mercadoria é* $R\$200,00$*. Sabendo que ela foi vendida por* $R\$160,00$*, qual foi o fator de redução usado?*

**Resolução:** Sendo $C$ o preço de custo e $V$, o de venda, temos $C = 200$ e $V = 160$. Daí, vem:

$$\begin{aligned} V &= (1 - i) \cdot C \\ (1 - i) &= \frac{160}{200} \\ (1 - i) &= 0,80 \end{aligned}$$

Portanto, o fator de redução é $0,80$.

**Observação 4.2.** *A taxa percentual de desconto nesse caso é dada por:*

$$
\begin{aligned}
1 - i &= 0,80 \\
i &= 1 - 0,80 \\
i &= 0,20 = 20\%.
\end{aligned}
$$

### 4.2.3 Acréscimos e descontos sucessivos

Aplicando os conceitos de fator de aumento e fator de redução, podemos resolver questões que envolvem acréscimos e descontos sucessivos.

**Exemplo 4.5.** *O preço de um certo produto sofreu um acréscimo de* 10% *sob o valor inicial e em seguida um desconto de* 20% *sob o valor cumulativo. Qual foi o desconto real que foi dado em relação ao valor inicial?*

**Resolução:** Sejam $f_1$ e $f_2$ os fatores de aumento e redução respectivamente. Então, temos:

$$f_1 = 1 + i_1 \Rightarrow f_1 = 1 + 0,10 \Rightarrow f_1 = 1,10.$$

$$f_2 = 1 - i_2 \Rightarrow f_2 = 1 - 0,20 \Rightarrow f_2 = 0,80.$$

Chamando de $N$ o preço inicial e $N'$ o preço final, vem:

$$N' = N \cdot 1,10 \cdot 0,80 \Rightarrow N' = 0,88 \cdot N$$

Portanto, o desconto real em relação ao valor inicial foi de 12%. No caso, $N - 0,88 \cdot N = 0,12 \cdot N$, que é 12% em relação ao valor inicial $N$.

## 4.3 Método de resolução das questões de porcentagem

O método proposto pelo autor, é utilizado em problemas de aumentos em descontos sucessivos que se pede o desconto ou aumento equivalente em relação a um valor desconhecido. Nesses tipos de questões, se costuma trabalhar com uma incógnita e fazer cálculos com decimais. Ou seja, dois tópicos que a maioria dos alunos apresentam bastante dificuldades.

A ideia do método é em vez de trabalhar com a incógnita $x$ ou $N$, trabalharmos com um valor padrão fictício 100, pelo fato de ser mais fácil de associá-lo aos 100% trabalhados nos cálculos de porcentagem.

## 4.4 Resolução de questões

A seguir, resolveremos seis questões de concursos ou processos seletivos, através do método proposto pelo autor, comparando com a resolução através do método tradicional.

**Questão 4.1** (ENA 2013). *Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em* 50%. *Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em* 40% *e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em* 10%. *Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?*

*a)* 27%

*b)* 50%

***c)* 73**%

*d)* 77%

*e)* 100%

**Solução proposta pelo método tradicional (baseada na resolução encontrada em [11]):** A primeira redução significa uma multiplicação por $0,5$. A segunda, uma multiplicação por $0,6$. E a terceira, uma multiplicação por $0,9$. Isso dá uma multiplicação por $0,27$ o que significa uma redução de 73%.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Como a questão só trabalha com valores em porcentagem, sem apresentar algum referencial, podemos supor que o custo inicial de produção foi R\$ $100,00$ e quando reduzirmos 50%, o novo valor será R\$ $50,00$ ($100 - 50\% \,\text{de}\, 100 = 100 - 50$). Após uma redução de 40%, o novo valor ficará R$ $30,00\,(50 - 40\%\,\mathrm{de}\,50 = 50 - 20)$. Por fim, na última redução de 10%, o valor passará a ficar R$ $27,00\,(30 - 10\%\,\mathrm{de}\,30 = 30 - 3)$. Com isso, a redução percentual do custo de produção desse produto será 73%, pois $100 - 27 = 73$.

**Questão 4.2** (ENA 2015)**.** *Duas lojas A e B ofereceram descontos para uma mesma mercadoria. A loja A ofereceu 15% e no mês seguinte outro desconto de 20%, enquanto a loja B fez o inverso, ofereceu 20% e no mês seguinte outro desconto de 15%. Depois de ocorridos os dois descontos, é correto afirmar que o desconto percentual total:*

*a) em ambas as lojas foi de 35%.*

*b) na loja A foi maior que na loja B.*

*c) na loja B foi maior que na loja A.*

***d) em ambas as lojas foi de 32%.***

*e) em ambas as lojas foi de 33,5%.*

**Solução proposta pelo método tradicional (baseada na resolução encontrada em [11]):** Se $x$ é o valor da mercadoria, então aplicando um desconto de 20%, passará a valer $0,80x$ e aplicando outro desconto de 15% passará a valer $0,85\,(0,80x) = 0,68x$, logo, independente da ordem dos descontos, o desconto percentual total foi de 32%.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Como a questão só trabalha com valores em porcentagem, sem apresentar algum referencial, podemos supor que o custo inicial de cada uma das mercadorias nas referidas lojas foi R$ $100,00$. Na loja A: Quando reduzirmos 15%, o novo valor será R$ $85,00\,(100-15\%\,\mathrm{de}\,100 = 100-15)$. Após uma redução de 20%, o novo valor ficará R$ $68,00\,(85-20\%\,\mathrm{de}\,85 = 85-17)$. Na loja B: Quando reduzirmos 20%, o novo valor será R$ $80,00\,(100-20\%\,\mathrm{de}\,100 = 100-20)$. Após uma redução de 15%, o novo valor ficará R$ $68,00\,(80-15\%\,\mathrm{de}\,80 = 80-12)$. Com isso, a redução percentual do custo de produção desse produto será igual em ambas as lojas e no valor de 32%, pois $100 - 68 = 32$.

**Questão 4.3** (ENA 2021). *Quais alterações no preço de um produto resultam em um maior preço final?*

*a) Um aumento de 20% seguido de uma redução de 10%.*

*b) Um aumento único de 10%.*

*c) Um aumento de 30% seguido de uma redução de 20%.*

*d) Uma redução de 30% seguido de um aumento de 40%.*

***e) Dois aumentos consecutivos de 5%.***

**Solução proposta pelo método tradicional (baseada na resolução encontrada em [11]):** Podemos supor que o preço inicial do produto seja 100 unidades monetárias. Calculemos o resultado obtido ao final em cada um dos itens:

a) $100 \times 1,2 \times 0,9 = 108$.

b) $100 \times 1,1 = 110$.

c) $100 \times 1,3 \times 0,2 = 104$.

d) $100 \times 0,7 \times 1,4 = 98$.

e) $100 \times 1,05 \times 1,05 = 110,25$.

Portanto dois aumentos sucessivos de 5% resultam no maior valor final.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Como a questão só trabalha com valores em porcentagem, sem apresentar algum referencial, podemos supor que o preço inicial do produto foi R\$ 100,00.

Na letra A: Quando aumentamos 20%, o novo valor será

$$\text{R\$}120,00\,(100 + 20\%\,\text{de}\,100) = 100 + 20.$$

Após uma redução de 10%, o novo valor ficará R\$ $108,00\,(120 - 10\%\,\text{de}\,120) = 120 - 12$.

Na letra B: Quando aumentamos 10%, o novo valor será

$$\text{R\$}110,00\,(100 + 10\%\,\text{de}\,100) = 100 + 10.$$

Na letra C: Quando aumentamos 30%, o novo valor será

$$\text{R\$}130,00\,(100 + 30\%\,\text{de}\,100) = 100 + 30.$$

Após uma redução de 20%, o novo valor ficará R\$ $104,00\,(130 - 20\%\,\text{de}\,130 = 130 - 26)$.

Na letra D: Quando reduzimos 30%, o novo valor será

$$\text{R\$}70,00\,(100 - 30\%\,\text{de}\,100) = 100 - 30.$$

Após um aumento de 40%, o novo valor ficará R\$ $98,00\,(70 + 40\%\,\text{de}\,70) = 70 + 28$.

Na letra E: Quando aumentamos 5%, o novo valor será

$$\text{R\$}105,00\,(100 + 5\%\,\text{de}\,100 = 100 + 5).$$

Após um novo aumento de 5%, o valor ficará R\$ $110,25\,(105 + 5\%\,\text{de}\,105) = 105 + 5,25$.

Logo, o maior valor final é gerado através das alterações de preço citados na letra E.

**Questão 4.4** (ENA 2017). *Numa liquidação, uma camisa sofreu um desconto de 10%, no mês seguinte, outro desconto de 10% e, no terceiro mês, mais um desconto de 10%. Qual foi o desconto total?*

***a)* $\mathbf{27,10\%}$.**

*b)* $27,70\%$.

*c)* $27,90\%$.

*d)* $30\%$.

*e)* $30,10\%$.

**Solução proposta pelo método tradicional (baseada na resolução encontrada em [11]):** Podemos pensar no preço inicial da camisa sendo $x$ reais. No primeiro mês passou para $x \cdot \dfrac{90}{100} = 0,9x$ (desconto de 10%), no segundo para $0,9x \cdot \dfrac{90}{100} = 0,81x$ e no terceiro $0,81x \cdot \dfrac{90}{100} = 0,729x$. Portanto, o desconto total é igual a $x - 0,729x = 0,271x$, que corresponde a um percentual de $27,10\%$.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Como a questão só trabalha com valores em porcentagem, sem apresentar algum referencial, podemos supor que o custo inicial de produção foi R\$ $100,00$ e quando reduzirmos 10%, o novo valor será R\$ $90,00$ ($100 - 10\%$ de $100 = 100 - 10$). Após uma nova redução de 10%, o novo valor ficará R\$ $81,00$ ($90 - 10\%$ de $90 = 90 - 9$). Por fim, na última redução de 10%, o valor passará a ficar R\$ $72,90$ ($81 - 10\%$ de $81 = 81 - 8,10$). Com isso, a redução percentual do custo de produção desse produto será $27,10\%$, pois $100 - 72,90 = 27,10$.

**Questão 4.5** (ENA 2016)**.** *Uma rede varejista anunciou publicamente, na última black friday, um desconto de 50% em todos os seus produtos. Pouco antes de aplicar o desconto, porém, aumentou todos os seus preços em 30%. Considerando o preço anterior ao aumento e ao desconto, e o preço final anunciado na promoção, o desconto real foi de:*

*a)* 20%.

*b)* 30%.

***c)* 35%.**

*d)* 40%.

*e)* 45%.

**Solução proposta pelo método tradicional:** Chamemos de $P$ o preço inicial do produto. Após um aumento de 30%, o preço do produto será $Pa = P + 30\%P = 130\%P$. Aplicando um desconto de 50% sobre este preço, teremos o preço final $Pf$, dado por $Pf = Pa - 50\%Pa = 50\%Pa = 50\% \cdot 130\%P = 65\%P$. Assim, o desconto real foi de 35% sobre o preço inicial P do produto.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Como a questão só trabalha com valores em porcentagem, sem apresentar algum referencial, podemos supor que o custo inicial de produção foi R\$ $100,00$ e quando aumentarmos 30%, o novo valor será R\$ $130,00\,(100 + 30\%\,\text{de}\,100 = 100 + 30)$. Após uma redução de 50%, o novo valor ficará R\$ $65,00\,(130 - 50\%\,\text{de}\,130 = 130 - 65)$. Com isso, a redução percentual do custo de produção desse produto será 35%, pois $100 - 65 = 35$.

**Questão 4.6** (FGV 2018)**.** *Mário recebeu certa quantia por um trabalho realizado e fez três despesas: gastou 20% da quantia recebida, depois gastou 30% do restante e, em seguida, gastou 40% do restante. Em relação à quantia recebida, o gasto total de Mário foi:*

*a)* 50%.

*b)* $58,6\%$.

***c)* $\mathbf{66,4\%}$.**

*d)* $75,2\%$.

*e)* 90%.

**Solução proposta pelo método tradicional:** Se $x$ é o valor inicial que Mário possuía, então aplicando um desconto de 20%, passará a valer $0,80x$ e aplicando outro desconto de 30% passará a valer $0,70\,(0,80x) = 0,56x$. Com mais um desconto de 40%, teremos: $0,60\,(0,56x) = 0,336x$. logo, o gasto total foi $0,664x\,(x - 0,336x)$ que corresponde a $66,40\%$ do valor inicial.

**Solução da questão proposta pelo autor:** Como a questão só trabalha com valores em porcentagem, sem apresentar algum referencial, podemos supor que o valor recebido inicialmente por Mário foi R\$ $100,00$ e quando ele gastou 20%, o novo valor será R\$ $80,00\,(100 - 20\%\,\text{de}\,100 = 100 - 20)$. Após outro gasto de 30%, o novo valor ficará R\$ $56,00\,(80 - 30\%\,\text{de}\,80 = 80 - 24)$. E por fim, com outro gasto de 40% do valor restante, Mário ficará com um valor final de R\$ $33,60\,(56 - 40\%\,\text{de}\,56 = 56 - 22,40)$. Com isso, em relação a quantia recebida o gasto total de Mario foi $66,40\%$, já que ele tinha R\$ $100,00$ inicialmente e no final restou R\$ $33,60\,(100 - 33,60 = 66,40)$.

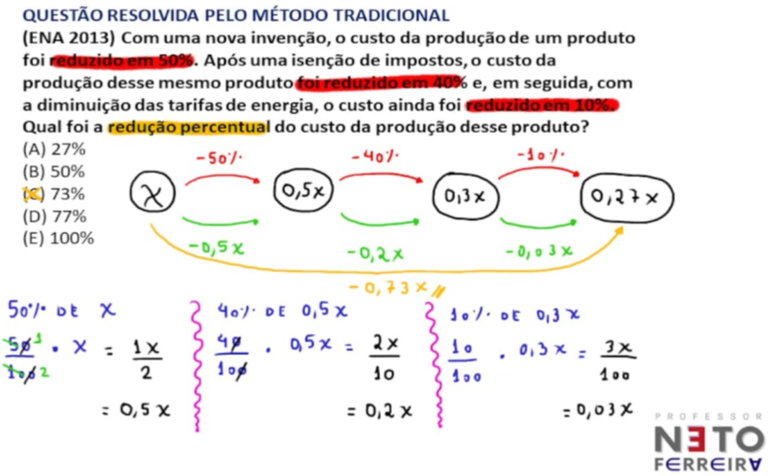
## 4.5 Validação dos métodos

O procedimento de aplicação da pesquisa foi feito de modo análogo ao realizado na Seção 1.4.

A questão escolhida para apresentar aos entrevistados foi a Questão 4.1. Ela foi resolvida em vídeo através do método tradicional (`https://youtu.be/e2ZHje1UpHk`) e através do método proposto pelo autor (`https://youtu.be/PGpzKjXWSA4`). Na Figura 4.1 mostra um recorte de resolução via método tradicional, apresentado pelo autor em vídeo. Já a questão escolhida para o aluno tentar consolidar o que foi aprendido, foi a Questão 4.5. Na Figura 4.2 apresentamos um questionário respondido por um dos entrevistados.

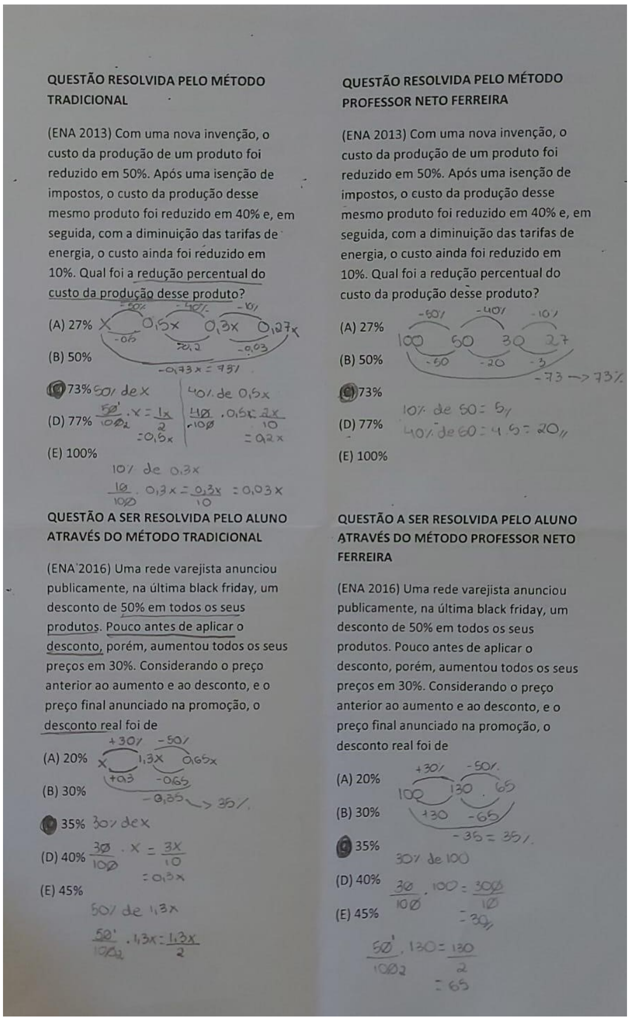
,

Figura 4.1: Resolução através do método Tradicional




Fonte: produzido pelo autor

Figura 4.2: Pesquisa respondida pelo entrevistado



**QUESTÃO RESOLVIDA PELO MÉTODO TRADICIONAL**

(ENA 2013) Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em 50%. Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em 40% e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em 10%. Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?

(A) 27%
(B) 50%
(C) 73%
(D) 77%
(E) 100%

**QUESTÃO RESOLVIDA PELO MÉTODO PROFESSOR NETO FERREIRA**

(ENA 2013) Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em 50%. Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em 40% e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em 10%. Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?

(A) 27%
(B) 50%
(C) 73%
(D) 77%
(E) 100%

**QUESTÃO A SER RESOLVIDA PELO ALUNO ATRAVÉS DO MÉTODO TRADICIONAL**

(ENA 2016) Uma rede varejista anunciou publicamente, na última black friday, um desconto de 50% em todos os seus produtos. Pouco antes de aplicar o desconto, porém, aumentou todos os seus preços em 30%. Considerando o preço anterior ao aumento e ao desconto, e o preço final anunciado na promoção, o desconto real foi de

(A) 20%
(B) 30%
(C) 35%
(D) 40%
(E) 45%

**QUESTÃO A SER RESOLVIDA PELO ALUNO ATRAVÉS DO MÉTODO PROFESSOR NETO FERREIRA**

(ENA 2016) Uma rede varejista anunciou publicamente, na última black friday, um desconto de 50% em todos os seus produtos. Pouco antes de aplicar o desconto, porém, aumentou todos os seus preços em 30%. Considerando o preço anterior ao aumento e ao desconto, e o preço final anunciado na promoção, o desconto real foi de

(A) 20%
(B) 30%
(C) 35%
(D) 40%
(E) 45%

Fonte: produzido pelo autor

### 4.5.1 Resultado obtidos

Após realizarmos a pesquisa, colocamos os resultados obtidos numa tabela. Nelas estão lançadas as respostas de cada uma das dez pessoas entrevistadas:

**Observação 4.3.** *Usaremos as notações conforme a Observação 1.1.*

**Observação 4.4.** *O método Neto Ferreira que nos referimos na pesquisa com os estudantes é o método proposto pelo autor, e foi utilizada esta nomenclatura apenas com o intuito de fazer uma distinção entre o método tradicional e o proposto pelo autor.*

Tabela 4: Resultados e respostas dos estudantes sobre os métodos de resolução.

| **O que achou do método tradicional?** | **O que achou do método Professor Neto ferreira?** | **Qual o método que mais gostou?** | **Em relação a resposta anterior, justifique a sua escolha:** |
|---|---|---|---|
| Um método muito demorado e complicado de se entender. | Um método prático que opta a trabalhar só com números; | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Preferir o método professor Neto Ferreira por ser mais rápido e não trabalhar com incógnitas. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| O método tradicional é o básico, geralmente como você aprende a fazer na escola. Leva um pouco mais de tempo, mas é o que se usa quando não se tem tanto domínio da questão para fazer com maneiras mais fáceis. | O método professor Neto Ferreira, caso você já saiba o tradicional, ajuda muito na praticidade, além de ter números, o que torna mais fácil de trabalhar, ajudando na confiança na hora de resolver. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Tendo em mente que eu já sabia o método tradicional, o método professor Neto Ferreira é muito mais prático e rápido, sendo o que se quer na hora de uma prova ou algo parecido. Além disso, é mais fácil de se confundir no método tradicional. |
| Achei um método confuso e fácil de errar as contas. Além de que é mais trabalhoso. | Fácil e simples de entender. As contas realizadas no método são fáceis, e assim achamos a resposta mais agilmente. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | Eu preferir esse método, pois as contas são mais simples e rápidas de se resolverem. Além disso, nesse método é possível compreender melhor a lógica do processo de chegar ao resultado. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Esse método pode apresentar grande taxa de erro entre os alunos, pois envolve assuntos que muitos possuem dificuldades. | Muito mais simples de compreender o que deve ser feito na questão. Um método que os alunos entendem mais rápido e com taxa de erro baixa. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É mais simples para se compreender. Sendo assim, os alunos errarão menos quando fizerem as questões desse tipo, com taxas de erros baixíssimas. |
| Uma forma que com a prática fica mais simples, porém é muito mecanizado. | Se tivermos um bom raciocínio fica muito mais fácil e perdemos bem menos tempo. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Pelo fato de possuir um bom raciocínio lógico fica bem mais simples de resolver, poupando tempo. Porém para pessoas que possuem um raciocínio menos avançado, acredito que seja mais difícil. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É muito mais complicado e pouco intuitivo. | É muito mais rápido, fácil e intuitivo. Além disso, é fácil de lembrar, mesmo depois de algum tempo. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Achei o método do professor Neto Ferreira muito melhor. Isso porque, coincidentemente, foi a forma que aprendi no ensino médio, estudando para o ENEM. |
| Achei que esse método não me ajudou a entender a resolução da questão. | Sensacional, muito mais prático, o que ajuda a fixar o tipo de questão, além de termos a possibilidade de ganhar tempo para resolver as demais questões a nível de prova. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Gostei da facilidade de raciocínio, da praticidade e da economia de tempo. |
| Complicado! | Muito mais rápido, fácil e descomplicado. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | É um método simples de resolver a questão. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| É uma forma menos intuitiva de calcular esse tipo de problema, já que envolvem números e letras, o que por si só já espanta mais. Além de que os números envolvidos possuem um formato menos intuitivo de representação de valores percentuais. | Bem mais intuitivo e simples pelas razões alegadas anteriormente. Pois usa uma representação dos números percentuais, em relação ao número inteiro 100, o qual representa a unidade 100. | Método Professor Neto Ferreira. (1) | Por tudo que foi elencado nas duas primeiras questões, isso fica claramente comprovado pelo tempo gasto na resolução das questões pelos dois métodos, já que a diferença de tempo é na casa dos 50%. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Talvez na época da escola eu até tenha conseguido ser aprovado neste conteúdo. Hoje longe do assunto a décadas, nem consegui montar a equação. Acho o método difícil e fácil de esquecer, já que não participa da prática cotidiana. | É prático e facilmente aplicável a vida cotidiana, ou seja, usa-se fora da sala de aula. | Método Professor Neto Ferreira. (3) | O método professor Neto Ferreira é mais prático e intuitivo, principalmente considerando a pessoa que saiu de sala de aula há alguns anos. Indicaria para trabalhadores utilizarem na sua vida prática, dado que o problema sugerido faz parte dela. E montar uma equação que requer conversão de fração ou número decimal é muito demorado e nada prático. |

Observamos que 20% das pessoas erraram a questão resolvendo através do método tradicional, enquanto pelo método proposto pelo autor, tivemos 100% de acertos. Além disso, 100% preferiram o método proposto pelo autor, alegando praticidade, velocidade, ser bem mais intuitivo para a maioria das pessoas e a não necessidade de utilizar decimais e incógnitas nos cálculos.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da minha experiência enquanto docente do Ensino Básico e de preparação para concursos públicos, além dos dados apresentados, dos estudos discorridos e da pesquisa realizada com a amostra de 40 estudantes, foi possível perceber que ainda há um grande deficit no aprendizado da matemática.

Muitos dos métodos tradicionais de ensino necessitam de pré-requisitos e ferramentas matemáticas básicas, bem como: conhecimento e domínio das operações com números inteiros e frações, compreensão dos conceitos de múltiplos e amplo domínio de resoluções de equações do primeiro grau, assim como de razão e proporção e suas propriedades. Durante a ministração das aulas é possível perceber e identificar essas lacunas no aprendizado dos alunos, tornando o meio tradicional de ensino ainda mais ineficiente. Na pesquisa realizada para a execução deste trabalho, ficou evidenciado o grande número de pessoas que relataram não domínio de conteúdo para resolução de questões através do método tradicional, considerando muito complicado em função do uso exacerbado de operações com frações, decimais e/ou incógnitas.

Assim, por meio desta pesquisa, foi possível evidenciar, que grande parte do corpo discente demonstra preferência pela praticidade dos métodos resolutivos de questões de modo a economizar tempo e evitar o uso de frações, decimais e incógnitas. Com isso, fica claro que nós professores necessitamos criar alternativas que tornem possíveis alcançar o maior número de alunos por meio de um ensino acessível e objetivo, almejando ofertar aos alunos a possibilidade de dominar o conteúdo e adquirir autonomia nos métodos resolutivos.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] Almeida, R. G. **Razão e proporção para além da sala de aula.** Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Juiz de Fora. 2015.

[2] Alves, T. T. R. **A aprendizagem das frações e seus obstáculos.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. João Pessoa. 2018.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2023.

[4] Bucchi, P., **Curso prático de matemática**. Vol. 2, Edição 1, Editora Moderna, 1998.

[5] Cintra, C. C. **Proposta para o ensino de frações para o 7º ano: do diagnóstico a aprendizagem mediana por modelo de barras.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. São Carlos. 2017.

[6] Marques, A. s.; Andere, A.; et al. **Matemática 6º LIvro 2 Ensino fundamental - Anos Finais**, coleção Callis, editora Poliedro, São Paulo, 2020.

[7] Marques, A. s.; Andere, A.; et al. **Matemática 7º Livro 1 Ensino fundamental - Anos Finais**, coleção Callis, editora Poliedro, São Paulo, 2020.

[8] Marques, A. s.; Andere, A.; et al. **Matemática 7º Livro 2 Ensino fundamental - Anos Finais**, coleção Callis, editora Poliedro, São Paulo, 2019.

[9] Peixoto, P. C. **A arte de combinar: Uma proposta metodológica para o Ensino Médio baseada na resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. João Pessoa. 2019.

[10] PROFMAT. Apresentação. Documento eletrônico. Disponível em <https://profmat-sbm.org.br/apresentacao>. Acesso em 07 ago. 2022.

[11] PROFMAT. Provas - Exame Nacional de Acesso. Documento eletrônico. Disponível em <https://profmat-sbm.org.br/provas-exame-nacional-de-acesso/>. Acesso em 15 out. 2022.

[12] QCONCURSOS. Documento eletrônico. Disponível em <https://www.qconcursos.com/>. Acesso em 04 jan. 2023.

[13] Sistema GGE de Ensino. **Matemática e suas tecnologias - Matemática 7º ano**. Vol. 1, Pernambuco, 2020.

[14] Sistema GGE de Ensino. **Matemática e suas tecnologias - Matemática 7º ano**. Vol. 3, Pernambuco, 2020.

[15] Souza, V. O. **Funções matemáticas aplicadas em concursos públicos.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Juazeiro do Norte. 2021.