SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ODAÍLTON SILVA DOS SANTOS

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SEUS DESAFIOS NO ENSINO FUNDAMENTAL:
Uma análise em livros didáticos.

Porto Velho

2023

ODAÍLTON SILVA DOS SANTOS

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SEUS DESAFIOS NO ENSINO FUNDAMENTAL:
Uma análise em livros didáticos.

Trabalho de conclusão apresentado ao mestrado Profissional em matemática em rede Nacional – PROFMAT no polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito para obtenção de Mestre em Matemática Profissional.

Orientador: Prof. Dr. Jackson Itikawa.

Porto Velho

2023

Catalogação da Publicação na Fonte
Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR

S237t Santos, Odaílton Silva dos.
O Teorema de Pitágoras e seus desafios no ensino fundamental: uma análise em livros didáticos / Odaílton Silva dos Santos. - Porto Velho, 2023.

97 f.: il.

Orientador: : Prof. Dr. Jackson Itikawa.

Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Fundação Universidade Federal de Rondônia.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Análise. 3. Livros didáticos. I. Jackson Itikawa. II. Título.

Biblioteca Central CDU 51:37(043.3)

Bibliotecário(a) Marcelo Garcia Cardoso CRB-11/1080

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE DISSERTAÇÃO

ATA Nº 67

ATA DA SEXAGÉSIMA SÉTIMA SESSÃO DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROFMAT/UNIR POLO PORTO VELHO

MESTRANDO: ODAÍLTON SILVA DOS SANTOS
INÍCIO DO CURSO: março/2021

Aos vinte e sete dias do mês de outubro de dois mil e vinte e três, às quinze horas (horário de Brasília), na Sala Virtual do Google Meet https://meet.google.com/xgj-pvvy-zgq foi realizada a sessão de defesa de dissertação do mestrando **Odaílton Silva dos Santos**, como requisito obrigatório estabelecido no Regimento Interno do PROFMAT/UNIR. A Comissão Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa, foi composta pelos membros: Prof. Dr. Jackson Itikawa (Orientador), Prof. Dr. Tomás Daniel Menendez Rodriguez (Membro interno), Prof. Dr. Fabrício Antônio Oliveira dos Santos (Membro interno) e Profa. Dra. Maité Kulesza (membra externa à Universidade), sob a presidência do primeiro, julgou o trabalho intitulado **"O Teorema de Pitágoras e seus Desafios no Ensino Fundamental: Uma Análise em Livros Didáticos".** Após a defesa apresentada pelo mestrando e arguições pela Comissão, o trabalho foi considerado "APROVADO" e, em razão das recomendações dos membros da Comissão, o Senhor Presidente se comprometeu a orientar a sequência do processo da elaboração da versão final com a inclusão das recomendações realizadas. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e, para constar, foi lavrada a presente ATA, que vai assinada digitalmente pelos membros da Comissão Examinadora e o Mestrando.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Jackson Itikawa**, **Usuário Externo**, em 28/10/2023, às 08:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **TOMAS DANIEL MENENDEZ RODRIGUEZ**, **Membro da Comissão**, em 28/10/2023, às 11:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Maité Kulesza**, **Usuário Externo**, em 30/10/2023, às 22:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **FABRICIO ANTONIO OLIVEIRA DOS SANTOS**, **Membro da Comissão**, em 31/10/2023, às 11:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **odailton silva dos santos**, **Usuário Externo**, em 31/10/2023, às 16:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Dedicatória

Ao meu ***Deus*** *por ser a minha fortaleza, por estar comigo em todos os momentos da minha vida.*

A minha esposa ***Gislaine Reinaldo Tavares*** *e ao meu filho* ***Benjamim Reinaldo dos Santos*** *que me impulsionaram a ser uma pessoa melhor.*

Agradecimentos

*Agradeço a **DEUS** por me conceder inteligência, saúde, força e por não desistir de mim. Sem o Senhor eu não conseguiria chegar até aqui.*

*Agradeço a minha esposa **Gislaine Reinaldo Tavares** por me apoiar e não medir esforços para me ajudar ao longo desses dois anos e seis meses de pós-graduação. Obrigado pelo seu carinho, cuidado, apoio e principalmente pela sua paciência. Eu amo você.*

*Agradeço ao meu pai **José Edmilson** e minha mãe **Maria de Lourdes** por serem os principais responsáveis pela formação do meu caráter, por nunca desistir da educação dos seus sete filhos mesmo com sua pouca escolaridade e por quebrarem um ciclo de analfabetismo. Obrigado pela oportunidade de me tornar mestre. Te amo pai e mãe.*

*Agradeço ao meu orientador professor **Jackson Itikawa** por me ajudar a construir esse trabalho. Obrigado pela paciência e empenho na forma em que transmitiu os ensinamentos que me acompanharão sempre.*

“São poucos que entram em campo para vencer”.

Mano Brown

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo apresentar uma análise de como tem sido abordado o teorema de Pitágoras em alguns livros didáticos e suas demonstrações. E consequentemente apresentar alguns resultados acerca do teorema de Pitágoras, referentes à fundamentação lógica e prática deste conteúdo nos livros didáticos, visando uma melhor abordagem para um possível desempenho satisfatório no processo ensino aprendizagem deste importante resultado, na escola. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica feita em livros didáticos, a análise dos dados foi realizada pelo método qualitativo. Nos resultados da análise das demonstrações desenvolvidas nos livros didáticos analisados do 9° ano, observou-se que, geralmente, as demonstrações são as mesmas utilizadas desde o início da década de 1980. Os autores dos livros analisados, em geral apresentam as demonstrações do teorema de Pitágoras utilizando somente aspectos algébricos, gerando um desestimulo aos estudantes quanto a exploração deste importante resultado matemático. É possível utilizar outras abordagens, com materiais manipuláveis de fácil acesso, que podem ser utilizadas para instigar o lado investigativo e lúdico do processo de ensino aprendizagem do teorema de Pitágoras.

Palavras - chaves: Teorema de Pitágoras. Análise. Estudantes. Livros didáticos.

ABSTRACT

This work aims to present an analysis of how the Pythagorean theorem has been approached in some textbooks and their demonstrations. And consequently present some results about the Pythagorean theorem, referring to the logical and practical foundation of this content in textbooks, aiming at a better approach for a possible satisfactory performance in the teaching-learning process of this important result, at school. It is a bibliographical research carried out in textbooks, the data analysis was carried out by the qualitative method. In the results of the analysis of the proofs developed in the 9th grade textbooks analyzed, it was observed that, generally, the proofs are the same ones used since the beginning of the 1980. The authors of the analyzed books, in general, present the proofs of the theorem of Pythagoras using only algebraic aspects, discouraging students from exploring this important mathematical result. It is possible to use other approaches, with easily accessible manipulable materials, which can be used to instigate the investigative and playful side of the teaching-learning process of the Pythagorean theorem.

Key words: Pythagorean theorem. Analysis. Students. Didatic books.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 Quatro triângulos.. 25
Figura 02 Triângulo.. 25
Figura 03 Quadrado.. 26
Figura 04 Reorganização dos triângulos.. 26
Figura 05 Projeção dos quadrados 26
Figura 06 Comparação dos quadrados.. 27
Figura 07 Comparação das áreas.. 27
Figura 08 Triângulo de Henry Perigal.. 28
Figura 09 Trapézio do Presidente James 30
Figura 10 Quadrado de Bhaskara.. 31
Figura 11 Círculo... 32
Figura 12 Triãngulos.. 33
Figura 13 Círculo e triângulo.. 35
Figura 14 Triângulo de Papus... 36
Figura 15 Triângulo equilátero.. 37
Figura 16 Paralelepipedo... 39
Figura 17 Tetraedro... 39
Figura 18 Demonstração... 50
Figura 19 Semelhança de Triaâgulos.. 51
Figura 20 Semelhança de Triângulos.. 51
Figura 21 Triângulo... 52
Figura 22 Demonstração... 52
Figura 23 Demonstração... 53
Figura 24 Demonstração... 54
Figura 25 Explorando história... 56
Figura 26 Triângulo egípcio.. 56
Figura 27 Malha quadriculada.. 57
Figura 28 Aplicações.. 58
Figura 29 Demonstração... 58
Figura 30 Demonstração... 59
Figura 31 Aplicações 60
Figura 32 Demonstração... 61
Figura 33 Demonstração... 62
Figura 34 Explorando História.. 64

Figura 35 Malha quadriculada e teorema.. 65
Figura 36 Teorema de Pitágoras.. 65
Figura 37 Demonstração.. 66
Figura 38 Demonstração.. 67
Figura 39 Explorando História.. 67
Figura 40 Aplicações do teorema.. 68
Figura 41 Explorando História.. 70
Figura 42 Enunciado do teorema de Pitágoras... 71
Figura 43 Demonstração.. 71
Figura 44 Demonstração.. 72
Figura 45 Demonstração.. 73
Figura 46 Demonstração.. 74
Figura 47 Demonstração.. 75
Figura 48 Aplicação do teorema de Pitágoras.. 76
Figura 49 Demonstração da generalização.. 77
Figura 50 Curiosidades.. 78
Figura 51 Explorando história... 79
Figura 52 Enunciado.. 79
Figura 53 Triângulo... 80
Figura 54 Poligonos... 89
Figura 55 Triângulos.. 90
Figura 56 Retângulos... 91
Figura 57 Paralelogramo.. 92
Figura 58 Trapézio isósceles.. 92
Figura 59 Trapézios isósceles... 93
Figura 60 Triângulos.. 94

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.. 13

2 **REVISÃO DE LITERATURA**.. 16
2.1 A EDUCAÇÃO NO BRASIL.. 16
2.2 A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA AO LONGO DA HISTÓRIA........................... 17
2.2.1 A geometria no Brasil.. 19
2.3 UMA BREVE HISTÓRICO SOBRE PITÁGORAS... 22
2.4 O TEOREMA DE PITÁGORAS.. 23

3 ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.................... 25
3.1 A DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA.. 25
3.2 A DEMONSTRAÇÃO DE HENRY PERIGAL.. 28
3.3 A DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE JAMES... 29
3.4 A DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA... 31
3.5 A DEMONSTRAÇÃO BASEADA NAS RELAÇOES MÉTRICAS DA CIRCUNFERÊNCIA.. 32
3.6 A DEMONSTRAÇÃO POR SEMELHANÇÃ DE TRIÂNGULOS........................ 33
3.7 A DEMONSTRÇÃO DE UM EX-ALUNO.. 34
3.8 A DEMONSTRAÇÃO DE PAPUS.. 36
3.9 UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM TRIÂNGULOS EQUILATEROS... 37
3.10 UMA GENERALIZAÇÃO INTERESSANTE.. 38
3.10.1 Teorema.. 40
3.11 A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA... 40

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 41

5 OS LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL...... 42
5.1 OS LIVROS DIDÁTICOS E A MATEMÁTICA.. 45
5.2 SELEÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS 47

6 UMA ANÁLISE NA RELEVÂNCIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO LIVRO DIDÁTICO.. 48
6.1 ANÁLISE DO 1° LIVRO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA EDIÇÃO 1985... 49
6.2 ANÁLISE DO 2° LIVRO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA EDIÇÃO 2009...... 55
6.3 ANÁLISE DO 3° LIVRO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA EDIÇÃO 2018...... 63
6.4 ANÁLISE DO 4° LIVRO PROJETO TELÁRIS... 70
6.5 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM DEMONSTRAÇÕES MANIPULÁVEIS.. 80

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 81

REFERÊNCIAS.. 85

ANEXO 1 - ALGUNS RESULTADOS GEOMÉTRICOS...................................... 89

APÊNDICE: SEQUÊNCIA DIDÁTICA.. 95

1 INTRODUÇÃO

A educação no Brasil é um direito garantido pela Constituição “A educação, direito de todos e dever do estado e da família, [...] visando o seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 1988). Sabe-se que a educação é estimada como o princípio mais valioso para o êxito de uma nação por isso deve ser considerada como prioridade (BASTOS, 2017).

Desde a década de 1990, o governo busca melhorias para garantir o acesso e permanência com sucesso dos estudantes em suas escolas. Por isso, várias mudanças têm ocorrido na educação (DAVIS, 2011). As políticas públicas que promovem a educação são incentivadas devido à necessidade para preparação da cidadania (GOLDEMBERG, 1993).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais surgiram como um referencial que orienta a prática escolar, no intuito de assegurar que toda criança e jovem brasileiros tenham um desempenho satisfatório nas instituições escolares, e mais que isso, contribuir com a sua inserção na sociedade como cidadão no mundo do trabalho (PCN, 1998).

O papel da matemática no ensino básico orientado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais tem como objetivo valorizar a importância do aluno com a compreensão do mundo a sua volta, estimulando o interesse, curiosidade e o espírito investigativo para resolver problemas com o desenvolvimento de sua capacidade. (PCN, 1998).

De acordo com Pombo (2021), o aprender matemática é muito mais do que manusear com habilidade as fórmulas matemáticas, ou marcar a alternativa certa após desenvolver um cálculo corretamente, e sim criar significados, interpretar e desenvolver seus métodos para solucionar problemas, preparando-se para diagnosticar os mesmos desenvolvendo o raciocínio lógico para transcender a capacidade de conceber e projetar o imediatamente sensível.

O aprendizado da matemática precisa de métodos que mostrem ao discente a necessidade do saber matemática mostrando o sentido e o seu real significado, para poder construir novos caminhos e estratégias (POMBO, 2021).

A matemática se mostra fundamental em todas as partes para o desenvolvimento e evolução do homem, por conta das buscas e soluções de seus problemas diários e também de sua necessidade de desvendar o universo e a si mesmo. Logo, as ideias matemáticas aparecem junto com a evolução da humanidade, com estratégias e ações definidas de acordo com o ambiente, buscando explicações para fenômenos da natureza a fim de mostrar que as ideias estão presentes no fazer saber a matemática (POMBO, 2021).

De acordo com Rossetto (2013), se a matemática for ensinada de forma isolada, não haverá contribuição para a formação nas demais áreas de conhecimento, pois o aluno deve ser conduzido a ter experiências de situações de investigação, descobrimento e exploração utilizando estratégias para que vivencie essas situações, possibilitando-lhe conseguir solucionar as dificuldades encontradas no decorrer do ensino aprendizagem da matemática. Buscando aplicar na realidade local e no tempo nas quais estão situadas as aprendizagens, contextualizando os componentes curriculares para poder apresentá-los, representá-los, conectá-los e exemplificá-los assim tornado significativo (BNCC, 2017).

A geometria, sempre presente nos livros didáticos matemáticos, deve ter sua importância demonstrada como um todo. O que ocorre é que os conteúdos de geometria em geral são expostos nas últimas semanas do ano letivo, quando o docente não possui mais tempo hábil para explorá-lo com profundidade. Logo a geometria fica sendo reduzida à algumas fórmulas para cálculos de área (PINHO, 2010).

Cabe destacar que a geometria é parte fundamental da matemática, e sua importância se dá tanto no âmbito prático e cotidiano, quanto na organização do pensamento lógico e também na construção da cidadania, pois a sociedade, sobretudo nos últimos séculos, cada vez mais faz uso de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, nos quais todos cidadãos devem conhecer e se aprimorar. De fato, não é exagero afirmar que, sem a geometria, a interpretação do mundo seria incompleta.

O teorema de Pitágoras, que geralmente é estudado como um dos tópicos de geometria, é um dos mais belos e importantes teoremas matemáticos de todos os tempos, devido a sua posição especial na história da matemática, apresentando-se desde pelo menos o século V a.C. até o século XX d.C. Neste grande período de tempo, inúmeras demonstrações deste importante resultado já foram feitas (NEVES, 2017).

Segundo Pinho (2010), o teorema de Pitágoras tem sido negligenciado no ensino básico, pois o ensino da matemática tem buscado mais as habilidades de manipulação algébrica. Consequentemente, o teorema de Pitágoras vem sendo considerado mais uma relação algébrica do que uma relação geométrica, não sendo explorado o seu real significado geométrico, que é uma relação entre áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.

Andrade (2013), afirma que o principal responsável por todo o processo evolutivo da matemática é a sociedade, ao mesmo tempo em que se tornou fundamental para a evolução da humanidade.

O conhecimento matemático não é construído e utilizado apenas por engenheiros, cientistas e matemáticos, mas por todos os grupos socioculturais que desenvolvem habilidades diferenciadas para contar, localizar, representar, medir e explicar em virtude de seus interesses e necessidades (PCN, 1998).

Para Pinho (2010), as riquezas do teorema de Pitágoras não são exploradas corretamente havendo apenas demonstrações eventuais durante o processo de ensino.

Em vista disso surgiu o questionamento: como os livros didáticos vem apresentando o teorema de Pitágoras nos últimos quarenta anos?

Diante deste problema este trabalho tem como objetivo apresentar uma análise de como tem sido abordado o teorema de Pitágoras em alguns livros didáticos e suas demonstrações. E consequentemente apresentar alguns resultados acerca do teorema de Pitágoras, referentes à fundamentação lógica e prática deste conteúdo nos livros didáticos, visando uma melhor abordagem para um possível desempenho satisfatório no processo ensino aprendizagem deste importante resultado, na escola.

A dissertação está organizada do seguinte modo: No Capítulo 2, apresentamos uma breve revisão da literatura a respeito da evolução da Educação no Brasil e da evolução da Geometria ao longo da história, contemplando aspectos relacionados ao desenvolvimento desta importante área da Matemática em nosso país, além de tratar de aspectos históricos relacionados ao matemático grego Pitágoras e seu famoso teorema. Em seguida, algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras são apresentadas no Capítulo 3, bem como aplicações e generalizações deste conhecido resultado. No Capítulo 4 são detalhados os procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento do presente trabalho, enquanto no Capítulo 5, descrevemos um breve histórico acerca dos livros didáticos no Brasil, enfatizando sua relação com o ensino de Matemática, e apresentamos os livros de matemática analisados neste trabalho, com relação ao desenvolvimento do conteúdo relacionado ao Teorema de Pitágoras. O Capítulo 6 da dissertação é dedicado à análise da relevância do Teorema de Pitágoras no livro didático. Por último, fazemos as considerações finais no Capítulo 7. A dissertação conta ainda com um Anexo, onde são apresentados alguns conceitos e resultados geométricos necessários ao desenvolvimento do trabalho e um Apêndice, com uma Sequência Didática relacionada ao ensino do Teorema de Pitágoras.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 A EDUCAÇÃO NO BRASIL

Em busca de uma redemocratização da educação pública, ocorreram desequilíbrios entre o aumento de vagas ofertadas e a qualidade do atendimento aos estudantes. Por conseguinte, houve uma piora no ambiente de trabalho dos professores. Com isso, ao término da década de 1990, o Ministério da Educação reconheceu que a formação das professoras e professores brasileiros estava defasada para proporcionar a aprendizagem adequada aos estudantes (DAVIS, 2011).

Sem uma formação pedagógica adequada, os professores e professoras dos variados cursos de licenciatura acabam reproduzindo a pedagogia tradicional (FREDERICO, CRISTINA, NEMOTO et al., 2015).

Para Brock & Schwartzman (2005), por muito tempo acreditou-se que os principais problemas da educação brasileira era a pouca quantidade de escolas e o baixo recurso financeiro destinado a educação. Acreditava-se que era primordial a construção de novas escolas e garantir uma boa remuneração aos profissionais da educação, sendo que o Brasil não desenvolveu um mecanismo próprio de formação de docentes, como ocorreu em outros países, apenas o desenvolveu junto com o sistema universitário, o qual não obteve o êxito desejado. A graduação do docente ficou restrita a áreas de menor prestigio das universidades públicas e privadas.

Com isso a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, para poder assegurar a aprendizagem básica de cada segmento da educação, tem remodelado o currículo para uma adequação da realidade local com a busca da autonomia da rede de ensino, instituições escolares e o sistema na característica e contexto dos alunos em busca do envolvimento e participação das famílias e comunidade. Buscando assim aplicar na realidade do local e o tempo nas quais estão situadas as aprendizagens contextualizando os componentes curriculares para poder apresenta-los, representa-los, conectá-los, exemplificá-los assim tornado significativo (BNCC, 2017).

Vale ainda destacar compromissos assumidos pelo país em âmbito internacional. Por exemplo, como recorda Costin (2020), no ano de 2015, o Brasil foi um dos signatários dos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável-ODS. Dentre estes objetivos, está o ODS 4, que se refere a Educação, no qual é estabelecido o ano de 2030 como prazo para assegurar a todos Educação de qualidade e oportunidades de aprendizagem ao longo da vida.

Infelizmente, não obstante os avanços relacionados sobretudo ao acesso à escola no período recente, ainda são inúmeros os obstáculos para o Brasil possa efetivamente oferecer um ensino de excelência, como apontam as expressivas desigualdades educacionais como no maior estudo sobre educação do mundo, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, aplicado a jovens de 15 anos de 79 economias e organizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE. De fato, a edição 2018 do PISA apontou que o Brasil tem baixa proficiência em Matemática, Leitura e Ciências, quando comparado aos demais 78 países que participaram da avaliação. Os resultados são estarrecedores, revelando, por exemplo, que 68,1% dos alunos brasileiros com 15 anos de idade, não possuem nível básico de Matemática, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Além disso, mais de 40% dos jovens que estão no nível básico de conhecimento não são capazes de solucionar questões simples e rotineiras e ínfimos 0,1% dos 10.961 estudantes brasileiros que realizaram o PISA alcançaram o nível máximo de proficiência na área de Matemática. Os índices estão estagnados desde 2009, BRASIL (2018).

2.2 A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA AO LONGO DA HISTÓRIA

Sabemos que a geometria é a área da matemática com os registros históricos mais antigos, que se desenvolveu de acordo com as necessidades humanas, construindo-se durante milênios com uma importância imensurável para a civilização (PINHO, 2010). As culturas pré-históricas já desenvolviam desenhos com simetria de figuras geométricas para realizar medições de comprimentos, superfícies e volumes (PCN, 1998). Podemos encontrar registros de temas geométricos procedentes das civilizações da Babilônia, Suméria e Egito, bem antes dos gregos que são considerados os instituidores da geometria como estudo independente (PINHO, 2010).

A origem da geometria egípcia se dá pela necessidade de redistribuir os campos cultiváveis entre os seus proprietários por conta das inundações que ocorriam no rio Nilo de acordo com relatos do historiador Herodoto (484 – 420 a.C.) (MOL, 2013).

Com o desenvolvimento natural da agricultura, deu-se a origem dos problemas relacionados a demarcação de terras e a avaliação da produtividade de algumas áreas (PINHO, 2010). O principal objetivo era obter métodos e regras eficazes do ponto de vista da aplicação por meio de tentativas e aproximações para o cálculo de áreas como o triângulo, quadrado e trapézio (MOL, 2013).

A geometria egípcia mostrou-se de forma prática pela maneira como os escribas do médio império resolviam os problemas (PCN, 1998). Eles se limitavam a resolver alguns problemas específicos sem muita preocupação com procedimentos numéricos, princípios filosóficos e estrutura intelectual (MOL, 2013). O subsídio deixado pelos gregos na geometria está mais no sentido da estrutura do pensamento do que na invenção de técnicas práticas (PINHO, 2010). A primeira ação no sentido da organização da geometria como um estudo dedutivo e abstrato é atribuída a Tales de Mileto (MOL, 2013). Considerado o primeiro geômetra da história, de acordo com alguns registros de matemáticos gregos, que atribuem a Tales a demonstração de alguns resultados geométricos simples, como o ângulo inscrito em um semicírculo e um ângulo reto (PINHO, 2010).

A Matemática como a conhecemos atualmente percorreu diversos caminhos em diversas culturas em seu desenvolvimento, tendo sua origem com a civilização grega, período que vai aproximadamente de 700 a.C. a 300 d.C., utilizando sistemas formais e estruturados em um conjunto de premissas e regras de raciocínio preestabelecidas (PCN, 2008). Com a obra de Euclides de Alexandria (360 a. C. – 295 a. C.) a geometria chegou ao seu formato plenamente desenvolvido (PINHO, 2010).

Além disso, é importante destacar que a matemática desenvolvida no extremo oriente é tão ou ainda mais antiga que a ocidental. A título de exemplo, pode-se citar o Chóu-peï, um livro da literatura chinesa que possivelmente é anterior à dinastia Huan, de 202 a.C., e que trata de uma conversa entre um príncipe chinês e seu ministro acerca do calendário. O diálogo faz referência a cálculos astronômicos envolvendo o estudo dos triângulos retângulos e frações, inclusive há menção de um caso particular do Teorema de Pitágoras para um triângulo de catetos 3 e 4 (BOYER, 2010).

Mol (2013), afirma que em meados do século XVII, a geometria avançou em duas importantes vertentes. A primeira, e possivelmente a mais importante, foi o desenvolvimento da geometria analítica, pelos franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). O outro avanço geométrico importante ocorrido nesta época foram os estudos relacionados à geometria projetiva, feitos por matemáticos como Girard Desargues (1591-1661) e Jean-Victor Poncelet (1788-1867).

No século XIX, alguns grandes matemáticos como Gauss, Bolyai e Lobatchevski, pesquisando de maneira independente, concluíram que o quinto postulado de Euclides, relacionado às retas paralelas, é independente dos demais, implicando na possibilidade de construir sistemas geométricos nos quais o quinto postulado pode ser substituído por outro axioma. Em outras palavras, esses matemáticos demonstraram a existência de outros tipos de geometria, diferentes da euclidiana, comumente conhecidas como geometrias não-euclidianas.

Mais recentemente, novas disciplinas como a geometria algébrica, envolvendo o estudo de curvas e superfícies sobre corpos finitos, a exemplo dos trabalhos da matemática iraniana Maryam Mirzakhani no estudo da geometria de superfícies de Riemann e a geometria computacional, que trata de representações discretas de dados geométricos, podem ser enumerados como avanços em geometria.

2.2.1 A geometria no Brasil

Conforme apontam Caldatto & Pavanello, (2015), historicamente, foi por volta de 1549 que se iniciou o processo de formação de uma rede escolar rudimentar no Brasil, por meio dos padres da Companhia de Jesus. Nos duzentos anos que se seguiram, os jesuítas foram os únicos educadores em nossas terras, já que a política colonizadora de Portugal preconizava a catequização e a aculturação dos indígenas. D’Ambrósio (1999) assinala que “a preocupação foi ensinar aos poucos nativos e crioulos a língua portuguesa, o catecismo e a aritmética (ou arismética) vigentes em

Portugal". Quando a nobreza portuguesa começou a se estabelecer no Brasil, os educadores se voltaram à instrução dos filhos dos mesmos.

Nota-se, portanto, que nesta época o ensino de matemática estava restrito à aritmética, sem qualquer abordagem a outras áreas, como a geometria.

Em 1759, com a ascensão do Marquês de Pombal ao poder em Portugal, os jesuítas foram expulsos do território português e de suas colônias, e a educação no Brasil foi significativamente modificada. Dentre as muitas mudanças, o Marquês de Pombal instituiu as Aulas Régias, que basicamente eram disciplinas isoladas e que, na prática, se constituíam em aulas isoladas, sem articulação entre si, ministradas muitas vezes por docentes não qualificados, já que o Brasil colônia não dispunha de professoras e professores com formação adequada. Apesar de todos esses problemas, a reforma pombalina na educação possibilitou a introdução das aulas régias de aritmética, álgebra e geometria.

Um passo importante para o estabelecimento da geometria no currículo escolar brasileiro se deve à formação militar para capacitar os habitantes do Brasil colônia, a partir de 1648. De fato, a geometria foi a base matemática do curso de formação de diversos profissionais, tais como cartógrafos, engenheiros, arquitetos para trabalhar no projeto e construção de instrumentos militares, fortificações, dentre outros.

É claro que, nesta época, o ensino da matemática ficava restrito às pessoas ligadas às áreas militares, portanto excluindo a maior parcela da população brasileira. Entretanto, esse foi um passo importante para que fossem delineados os currículos de matemática e geometria. As bibliografias adotadas nos cursos dessa época embasaram os conteúdos curriculares do ensino de matemática e geometria até meados do século XIX no país.

Com a chegada da Corte Portuguesa ao país, em 1808, alterou-se drasticamente a educação brasileira. Até essa época, como nos assinala Lima:

> Eram proibidos, no Brasil, escolas, jornais, circulação de livros, associações, discussão de ideias, bibliotecas, fábricas, agremiações políticas e qualquer outra forma de movimento cultural ou de produção livre de bens, sendo as opiniões controladas pela moribunda, mas eficiente Inquisição Peninsular que veio atuar também no Brasil e daqui jamais se mudou. (LIMA, 1975)

Assim, diversas instituições importantes foram criadas nessa época, tais como a Biblioteca Pública, a Imprensa Régia, a Academia Real Militar e Academia Real dos Guardas-Militares, dentre outras. No tocante ao ensino da matemática e da geometria, estas duas últimas instituições foram fundamentais para o estabelecimento de conteúdos matemáticos ensinados, ocorrendo pela primeira vez a organização da matemática escolar no Brasil. Posteriormente, isto desencadeou a separação entre a matemática ensinada no nível superior e na escola secundária. Desta maneira, é a partir dos cursos técnico-militares que a matemática que estará presente nos liceus e preparatórios do século XIX será delineada. Cabe ainda salientar que foi por volta de 1830 que começam a surgir as primeiras obras didáticas nacionais.

Em 1822, o Brasil emancipa-se de Portugal. Nesta fase do Brasil Império, corrobora-se tanto o estabelecimento do ensino secundário, e os conhecimentos contemplados nele, como a criação de cursos superiores no Brasil, inicialmente das áreas de direito, medicina e engenharias. Ressalta-se que estes cursos possuíam como um dos pré-requisitos a matemática, e em particular, nos cursos de direito e engenharia, a geometria era pré-requisito.

Com respeito à matemática do ensino secundário:

> A matemática escolar secundária terá sua referência a partir do programa de ensino do Colégio posto em seu regulamento: a Aritmética era ensinada nos três primeiros anos do curso, seguida pela Geometria por mais dois anos e Álgebra no sexto ano. Nos dois últimos, as matemáticas eram ensinadas sob o título de matemática. Na verdade, tratava-se do ensino da Trigonometria e da Mecânica (VALENTE, 1999, p. 118).

D'Ambrósio (1999) assinala que "com a Proclamação da República, em 1889, inicia-se uma fase que, do ponto de vista matemático e científico em geral, pouca inovação trouxe ao país". Tal situação permanece inalterada até a década de 1920, por diversos fatores, dentre os quais o Movimento Internacional de Reforma do Ensino de Matemática e pelo trabalho do professor Euclides Roxo.

Até meados do século passado, não haviam cursos de formação de professores de Matemática. Assim, os professores de matemática que haviam eram autodidatas, com relação à sua formação profissional, geralmente migrando de outras profissões para atuar na docência de matemática.

Apesar dos currículos incluírem geometria, percebe-se que, a partir da década de 1960, esta área passa a ser abandonada na prática, devido à fraca formação dos professores de matemática na época.

Com a democracia, nas décadas de 1980 e 1990, o país busca implementar a democratização do ensino, que esbarra novamente em problemas sérios como a formação dos professores de matemática nas escolas de nível básico.

O movimento da matemática moderna, durante um longo tempo teve uma grande influência no Brasil, principalmente nos livros didáticos perdendo força apenas depois que houve a comprovação do desajuste de alguns conceitos iniciais e excessos ocorridos. Observa-se que os conteúdos mostram um aspecto inovador em explorá-los na dimensão de conceitos, procedimentos e atitudes, evidenciando a importância de estudar geometria já no ensino fundamental (PCN, 1998).

Primeiramente temos que mostrar a importância do estudo da geometria na matemática (PINHO, 2010). Uma parte importante do curriculum matemático do ensino fundamental são os conceitos geométricos, com eles os alunos podem desenvolver, compreender, descrever e representar um tipo especial de pensamento (PCN, 1998).

Os conteúdos de geometria estão sempre presentes nos livros didáticos, embora muitas vezes sempre são expostos no final do ano quando não se tem mais tempo hábil para abordá-los com muita ênfase (PINHO, 2010).

Por exemplo, nos resultados do SAEB, as questões que exploram a álgebra raramente atingem 40% de êxito em algumas regiões do país. Isso faz com que os docentes proponham em suas aulas aumentar ainda mais o tempo de exposição deste assunto, apresentando muitas vezes apenas a repetição exaustivas de exercícios isto gera um grave prejuízo aos outros temas da matemática, como à geometria, embora esta seja um campo fértil para se trabalhar com situações-problema que possibilitam a capacidade do desenvolvimento para construir e argumentar demonstrações (PCN, 1998).

O ensino da geometria nos anos finais do ensino fundamental tem que ser visto como ampliação e consolidação da aprendizagem realizada (BNCC, 2017), contribuindo diretamente para o aprendizado de medidas e números, e estimulando os alunos a perceberem regularidades, diferenças e semelhanças (PCN, 1998). É importante expor os alunos aos problemas geométricos para que possam aprofundar a noção de número (BNCC, 2017). E não reduzindo a geometria a simples fórmulas de cálculos de áreas e volumes (PINHO, 2010).

2.3 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE PITÁGORAS

Pode-se afirmar poucas coisas sobre Pitágoras, já que as informações sobre sua vida e obra foram escritas apenas séculos depois de seu falecimento sabe-se que nasceu aproximadamente por volta de 572 a.C. na ilha egeia de Samos (CHAVANTE, 2015).

Para Santos (2011), no que se refere ao homem Pitágoras é difícil separar lenda e história pois ele era tido como matemático, filósofo, astrônomo, santo, profeta, milagreiro, mágico, charlatão e abominador de feijão.

Pitágoras, por ser filho de um mercador, teve a oportunidade de acompanhar seu pai em algumas viagens, e com isso pode ter tido contato com grandes professores e filósofos como por exemplo Ferécides de Siros, que se intitulava maestro de Pitágoras, despertando assim seu interesse por Matemática, Geometria, astronomia e cosmologia contribuindo assim para a sua formação (NEVES, 2017).

Em outros relatos sobre a vida de Pitágoras, encontramos histórias de que ele realizou diversas viagens para o Egito, onde permaneceu aproximadamente 25 anos, de onde provavelmente absorveu todos os seus conhecimentos filosóficos e matemáticos (DA SILVA, FANTI & PEDROSO, 2016).

Ainda muito jovem, Pitágoras resolveu partir de Samos para conhecer o mundo. Passou pelo Egito, Babilônia e possivelmente pela Índia, onde aprofundou seus conhecimentos matemáticos e religiosos. Quando retornou para a Grécia, morou no porto marítimo de Crotona, que era uma colônia grega, hoje situada onde é a Itália. Ali, fundou uma sociedade secreta denominada como a escola pitagórica, dedicada ao estudo da matemática e filosofia. A escola pitagórica tinha o lema “tudo é número” (SILVA, 2016). De acordo com alguns autores, Pitágoras criou a palavra *matemática*, e também foi o primeiro a fazer uso do termo *filosofia,* para expressar “aquele que é amigo da sabedoria” (STRATHERN, 1998).

Tal como a vida e obra de Pitágoras, os registros sobre sua morte também não são muito precisos. Em alguns relatos, Pitágoras foi expulso de Crotona por rivais políticos e morreu provavelmente entre 510 e 470 a.C. Sua escola em Crotona foi destruída e a maioria dos membros foi assassinada, mas os sobreviventes dispersaram-se e seguiram divulgando a filosofia dos números.

2.4 O TEOREMA DE PITÁGORAS

De acordo com Bressiani (2011), o teorema de Pitágoras vem sendo apresentado da seguinte maneira: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo. Sua importância na matemática ao longo da história pode ser ilustrada pela célebre frase atribuída ao matemático e astrônomo Johannes Kepler (1571-1630): “A geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro; o segundo a uma joia preciosa.” (BOYER, 2010).

Amorim (2015) destaca que, por ser um dos teoremas mais famosos, vem ocupando um lugar de destaque por conta de sua aplicabilidade, mesmo não sabendo ao certo sua demonstração original. Sabe-se que existem diversas demonstrações para melhor definir este teorema, ainda sim nos deparamos com situações em que alunos não conseguem compreender o real significado de $a^2= b^2 + c^2$.

Para Pinho (2010), o teorema de Pitágoras é tão fundamental que deveria ser um axioma por conta de que todas as consequências da geometria euclidiana podem ser deduzidas pelo teorema.

Segundo Silva (2016), o teorema de Pitágoras tem que ser tratado como uma das ferramentas mais importantes para resolução de problemas geométricos e não se pode deixar que um assunto tão importante se torne um conteúdo indigno na aprendizagem dos alunos.

Importante observar, ainda, que resultados fundamentais como o Teorema de Pitágoras impulsionam e inspiram o desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos. Um conhecido exemplo, neste caso específico, é o Último Teorema de Fermat, célebre teorema conjecturado em 1637, pelo matemático francês Pierre de Fermat, e que pode ser entendido como uma generalização do Teorema de Pitágoras. A seguir, enunciamos este famoso resultado:

Dados os números naturais x, y, z, a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem solução para qualquer n natural maior que dois.

Como não é o escopo deste trabalho, não entraremos em detalhes sobre o Último Teorema de Fermat, mas salientamos que sua demonstração resistiu às mentes mais brilhantes dos últimos quatrocentos anos, como o matemático alemão Carl Friedrich Gauss, e a matemática francesa Sophie Germain, dentre outros, até ser solucionado pelo matemático britânico Andrew Wiles, em 1994.

No anexo -1 Alguns resultados geométricos, apresentamos conceitos, formulas e resultados geométricos necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos.

3 ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras, por ocupar um lugar de destaque, tornou-se um dos mais famosos teoremas da matemática. Por não sabermos ao certo qual a sua demonstração original, diversas demonstrações são utilizadas para definir esse teorema (AMORIM, 2015). A seguir enunciamos este famoso teorema.

Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

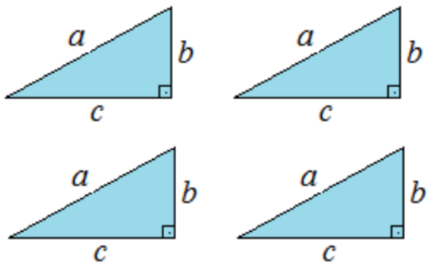
O Teorema de Pitágoras apresenta diversas demonstrações. O professor Elon Lages Lima comenta em seu livro “Meu professor de Matemática e outras histórias” que o professor norte-americano Elisha Scott Loomis conseguiu catalogar em 1940 um total de 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras, sendo elas divididas em algébricas e geométricas (SANTOS, 2011).

Vamos apresentar algumas demonstrações do teorema de Pitágoras.

3.1 A DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA

Tomando-se 4 triângulos retângulos iguais de lados a b e c.

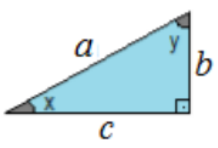
Figura 01



Fonte: SILVA (2016).

Identificando os ângulos agudos em um dos triângulos, como X e Y, podemos observar que a soma deles vale 90°. Isso porque a soma dos ângulos internos de um triangulo é igual a 180°.

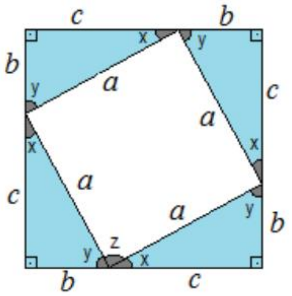
Figura 02



Fonte: SILVA (2016).

Organizando os quatro triângulos conforme a figura podemos observar que:

Figura 03

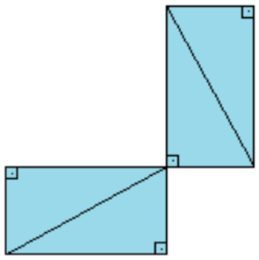


Fonte: SILVA (2016).

Forma-se um quadrado de lado b + c, com um quadrilátero interno de lado a. Podemos também dizer que esse quadrilátero, devido à disposição dos ângulos internos, é um quadrado. De fato, temos x + y = 90° e x + y + z = 180°. Portanto z = 90°.

Organizando os triângulos de um outro modo temos:

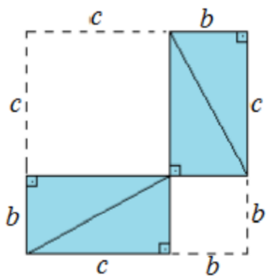
Figura 04



Fonte: SILVA (2016).

Podemos observar que pelas projeções é possível formar um outro quadrado também com medidas b + c.

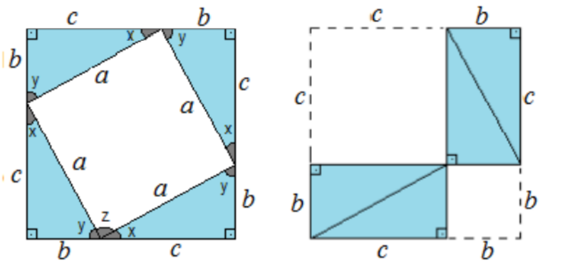
Figura 05



Fonte: SILVA (2016).

Comparando agora as duas figuras fica claro que ambas possuem áreas iguais, pois possuem arestas de mesma medida b + c.

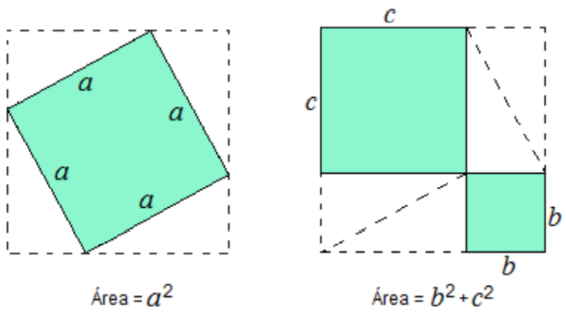
Figura 06



Fonte: SILVA (2016).

Retirando-se agora os triângulos retângulos iniciais de ambas as figuras, podemos observar que a parte hachurada tem a mesma medida de área pois foram retiradas medidas iguais nas duas figuras.

Figura 07



Fonte: SILVA (2016).

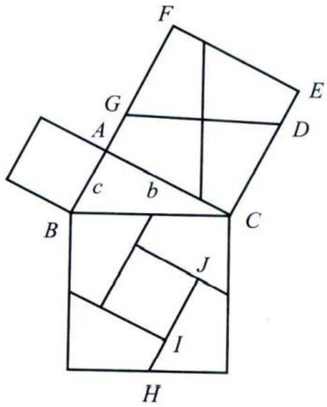
Portanto, podemos observar que $a^2 = b^2 + c^2$ (SILVA, 2016).

Esta demonstração está presente em muitos livros didáticos do 9º ano, como por exemplo o livro didático A conquista da matemática dos autores José Ruy Giovannyi Júnior & Benedicto Castrucci. Em sua grande maioria, estes livros didáticos privilegiam a parte algébrica da demonstração, apesar das ilustrações que eventualmente acompanham a demonstração, que poderiam ser melhor utilizadas para o seu entendimento. Em nossas práxis em sala de aula percebemos que esta abordagem pouco intuitiva pode não ser a mais recomendada, já que o aluno é levado apenas a perceber e manipular expressões matemática. Devido a este fato, entendemos haver a necessidade de desenvolver a demonstração do teorema de Pitágoras de forma mais prática e intuitiva, utilizando por exemplo materiais manipuláveis, como recortes de folhas coloridas, para obter uma melhor compreensão do teorema de Pitágoras em sua forma geométrica, pois o teorema pode ser explorado mais de forma geométrica do que algébrica, ampliando o entendimento do estudante acerca deste importante resultado

3.2 A DEMONSTRAÇÃO DE HENRY PERIGAL

A demonstração feita por Henry Perigal, que foi publicada em 1873, mostra que a soma das áreas dos quadrados construídos com a medida de cada cateto preenche exatamente o quadrado construído com a medida da hipotenusa.

Figura 08



Fonte: SANTOS (2011).

A ideia de Perigal é seccionar o quadrado de lado b (ACEF), com duas retas que se intersectam no centro deste quadrado, sendo a primeira (GD) paralela à hipotenusa BC do triângulo ABC e a outra perpendicular a esta. Nestas condições, o quadrado ACEF é dividido em quatro partes congruentes, que adicionadas ao quadrado de lado c, preenchem o quadrado de lado BC (hipotenusa do triângulo ABC). A seguir, a demonstração formal é apresentada.

Considerando AB = c e AC = b, os quadrados formados com as medidas dos catetos do triângulo ABC, devemos provar que a soma das áreas dos quadrados menores de lados b e c, respectivamente, é igual à área do quadrado maior, conforme ilustrado na figura. Temos que as quatro regiões formadas no interior do quadrado ACEF são congruentes ou seja AG = DE = x.

Temos que BCDG é um paralelogramo, onde CD = BG, ou seja, $b – x = c + x \rightarrow c = b – 2x$. logo GF = HJ e DE = HI, observamos que $IJ = HJ – HI = b – x – x = b – 2x = c$.

Considerando que os lados do triângulo retângulo estejam em progressão aritmética onde suas medidas são: $x – r$, x e $x + r$, tomando $r > 0$, e considerando que $x + r$ é a hipotenusa logo.

$(x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2 \rightarrow x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + x^2 – 2xr + r^2 \rightarrow x^2 – 4xr = 0 \rightarrow$

$x (x – 4r) = 0$. Logo $x = 4r$. Assim os lados medem 3r, 4r e 5r.

Aplicando a desigualdade, observamos que b + c < a + h ↔ $(b + c)^2 < (a + h)^2 \leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc < a^2 + h^2 + 2hc \leftrightarrow 2bc < h^2 + 2ah \leftrightarrow 0 < h^2$. Portanto a desigualdade é verdadeira.

Sejam os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABC, AHB e AHC denotados por r, r_1 e r_2. Observando que esses triângulos são semelhantes logo temos que: $\frac{r}{a} = \frac{r1}{c} = \frac{r2}{b}$. Elevando ao quadrado e multiplicando por π, observamos que $(\frac{\pi r}{a})^2 = (\frac{\pi r1}{c})^2 = (\frac{\pi r2}{b})^2$. Temos que $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que: $\pi r^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$ (SANTOS, 2011).

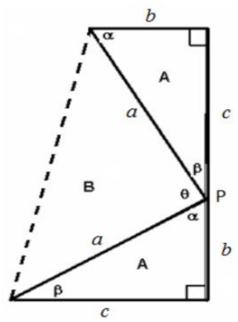
Nestes quatorze anos de docência, em que desenvolvi o conteúdo de geometria plana, os alunos sempre apresentaram muita dificuldade em assimilar que figuras com formatos distintos podem ter a mesma medida de área e que reorganizando essas figuras, elas podem obter um novo formato com a mesma medida de área. Desse modo, essa demonstração busca desenvolver o fator investigativo dos alunos para formar novas figuras com as formas geométricas obtidas de alguns recortes. A demonstração de Perigal, nesse sentido, apesar de envolver aspectos algébricos relativamente complexos, pode ser apresentada a estudantes do ensino fundamental, em particular, a estudantes do nono ano do ensino fundamental, fazendo-se uso de material manipulável, como recortes em cartolina ou outro material barato e acessível.

3.3 A DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE JAMES

O vigésimo presidente dos Estados Unidos da América, Abrahan Garfield (1831 – 1881) era um grande entusiasta e estudioso da matemática. No ano de 1876, conseguiu fazer uma demonstração muito interessante do teorema de Pitágoras, enquanto rabiscava um papel na Câmara de representantes.

Esta demonstração foi publicada pelo New England Journal of Education e consiste essencialmente em arranjar em uma figura, de maneira conveniente, duas cópias de um triângulo retângulo com catetos b e c de hipotenusa a, do qual se quer extrair a relação do teorema de Pitágoras é $a^2 = b^2 + c^2$. Garfield desenhou um triângulo retângulo, com catetos de medidas b e c tendo sua hipotenusa valendo a, e logo após repetiu o mesmo desenho em outra posição, coincidindo um de seus vértices e alinhando o cateto b com o cateto c do outro triângulo. Ele então observou que este arranjo formava um trapézio retângulo dividido em três triângulos retângulos.

Figura 09



Fonte: SILVA (2016).

Precisa-se mostrar que o ângulo θ localizado no triângulo (B) tem sua medida valendo 90° para poder provar que ele também é retângulo. Como o triângulo inicial (A) por construção é retângulo, sabemos que a soma dos ângulos α e β vale 90° e que a reta vale 180°. Observando o ponto P temos que α + β + θ = 180°, assim concluímos que θ = 90°, mostrando que o triangulo (B) também é retângulo.

Conforme já citado anteriormente, os três triângulos formam um trapézio retângulo, de altura b + c e bases b e c.

É possível calcular a área deste trapézio retângulo de duas formas distintas: usando a fórmula da área do trapézio e somando as áreas dos triângulos A e B, observando que o triângulo A aparece duas vezes na figura.

Calculando pela fórmula da área do trapézio $A = \frac{(A + B).\ H}{2}$, como a altura do trapézio é h = (b + c). I temos: $A = \frac{(b + c).(b+c)}{2} \rightarrow A = \frac{(b+c)^2}{2}$ (I)

Considerando que a área de um triângulo de altura h e base b é calculada pela fórmula $A = \frac{B\ .\ H}{2}$, como temos dois triângulos A e um triangulo B logo temos: 2A + B → 2. $\frac{b\ .\ c}{2} + \frac{a\ .\ a}{2} \rightarrow$ bc + $\frac{a^2}{2}$. (II)

Igualando a expressão I com a II Temos:

bc + $\frac{a^2}{2} = \frac{(b+c)^2}{2}$

2bc + $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$ e finalmente, $a^2 = b^2 + c^2$ (SILVA, 2016).

Para o entendimento desta demonstração, é evidente que há necessidade do estudante conhecer alguns conceitos relacionados a ângulos e triângulos. Entretanto, estes conhecimentos são apresentados e discutidos no 8º ano do ensino fundamental e portanto, os estudantes do 9º ano já são capazes de compreender os resultados empregados nesta demonstração, como a soma dos ângulos internos de um triângulo e que a soma das áreas dos três triângulos formados nas figuras dadas tem que ser a mesma do trapézio.

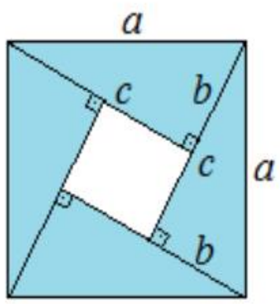
3.4 A DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA

Bhaskara Akaria, conhecido também como Bhaskaracharya (1114 – 1185) foi um importante matemático hindu, cujo trabalho mais célebre é o manuscrito Lilavati, dedicado a problemas de Aritmética, Geometria Plana e Combinatória. No Brasil, Bhaskara é conhecido sobretudo pela fórmula de resolução de equações polinomiais de 2º grau, mesmo não tendo sido ele que a descobriu, já que existem registros babilônicos de sua existência que datam de quase quatro mil anos.

A respeito da demonstração do Teorema de Pitágoras de sua autoria, é dito que Bhaskara apresentou uma ilustração sem quaisquer explicações, deixando apenas uma palavra cujo significado é “Contemple” ou “Veja”. Para mais detalhes, consulte Santos (1993). A seguir, a demonstração de Bhaskara é apresentada.

Tomando quatro triângulos congruentes e organizando conforme mostra a figura abaixo, onde os triângulos possuem suas medidas a, b e c.

Figura 10



Fonte: SILVA (2016).

Podemos observar que são formados dois quadrados um de medida a e outro interno de medida (c - b), assim a área do quadrado externo é a soma da área dos quatro triângulos mais o quadrado interno.

$A_q = 4\,\frac{b.\,c}{2} + (c - b)^2$

$A_q = 2.b.c + (c - b)^2$

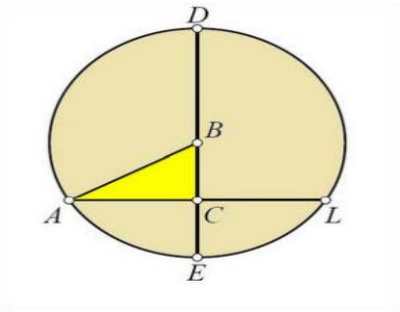
$A_q = 2.b.c + b^2 - 2.b.c + c^2$

Como a área do quadrado maior vale a^2 temos que: $a^2 = b^2 + c^2$ (SILVA, 2016).

A bela demonstração de Bhaskara visa mostrar mais uma vez a importância de se utilizar a semelhança entre figuras, e a forma lúdica através de recortes para que os estudantes possam compreender as relações entre as áreas e as manipulações algébricas para se encontrar a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

3.5 A DEMONSTRAÇÃO BASEADA NAS RELAÇÕES MÉTRICAS DA CIRCUNFERÊNCIA

Figura 11



Fonte: SANTOS (2011).

Dado o triângulo ABC da figura acima tomando o ponto B como o centro da circunferência e a medida AB como a hipotenusa do triângulo e consequentemente o raio da circunferência, prolongando os catetos AC e BC até tocarem a circunferência nos pontos L, D e E respectivamente.

Temos pelo teorema das cordas que:

$\overline{AC} x\ \overline{CL} = \overline{DC} x \overline{CE}$ (I)

Podemos observar $\overline{DC} = \overline{DB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (2)

$\overline{CL} = \overline{AC}$ (3)

$\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC} = \overline{AB} - \overline{BC}$ (4)

Substituindo os itens (2), (3) e (4) em (1), vamos obter a seguinte igualdade

$\overline{AC}^2 = (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{AB} - \overline{BC}) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$

Assim temos, $\overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AC}^2$ (SANTOS, 2011).

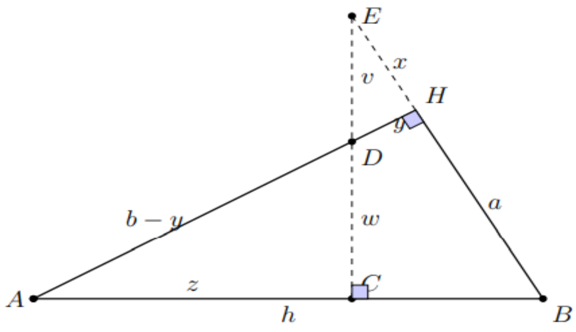
Esta demonstração tem como diferencial a utilização da circunferência para encontrar relações para provar o teorema de Pitágoras, fazendo uso, ainda, de conhecimentos adquiridos em anos anteriores do ensino básico. Esta certamente não é uma das provas mais intuitivas do teorema de Pitágoras, o que pode explicar a razão de raramente aparecer nos livros didáticos. Por outro lado, certamente é uma opção que pode ser oferecida aos alunos, para que entendam os conceitos envolvidos.

3.6 A DEMONSTRAÇÃO POR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Esta demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Silva (2022) e faz uso das técnicas de semelhança entre triângulos. Essa demonstração é atribuída a John Wallis (1616 – 1703), que foi um matemático britânico cujos trabalhos em Cálculo são considerados precursores aos de Isaac Newton (1642 – 1727). Considere o triângulo ABH dado na Figura 13. Toma-se um ponto D qualquer sobre o cateto AH do triângulo ABH e constrói-se uma perpendicular a hipotenusa AB no ponto C. Trace o prolongamento de DC até o encontro com o prolongamento de BH. Rotulando $AB = h$, $BH = a$, $AH = b$, $AD = b - y$, $DH = y$, $DC = w$, $EH = x$, $ED = v$. A solução será conduzida por semelhança de triângulos retângulos e utilizando relações lineares. Assim, considerando os triângulos ACD e ABH, que são semelhantes:

Agora podemos observar uma demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras, desenvolvida pela técnica de semelhança de triângulos: Do triângulo ABH, podemos pegar um ponto D pertencente ao cateto AH e construir uma perpendicular a hipotenusa AB no ponto C, conforme a figura. Traçando o prolongamento de DC até a interseção com o prolongamento de BH no ponto E. Tomando $AB = h$, $BH = a$, $AH = b$, $DH = y$, $AD = b - y$, $DC = w$, $EH = x$, AC = z e $ED = v$. Vamos utilizar a semelhança de triângulos retângulos e algumas relações lineares para poder realizar a demonstração.

Figura 12



Fonte: SILVA (2022).

Observando a semelhança entre os triângulos *ACD* e *AHB* temos que: $\frac{b-y}{h} = \frac{z}{b}$

$b^2 - yb = h$z (I)

Observando a semelhança dos triângulos EHD e ECB (triângulos retângulos com ângulo agudo Ê em comum), temos: $\frac{x+a}{h} = \frac{h-z}{b}$.

$xa + a^2 = h^2 - h$z

hz $= h^2 - xa - a^2$ (II)

Igualando os resultados de I e II temos:

$b^2 - yb = h^2 - xa - a^2$

$a^2 + b^2 = h^2 + y$b $- xa$

Trabalhando a semelhança entre os triângulos EHD e ABH, podemos observar que: $\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$

$yb = xa$

$h^2 = a^2 + b^2$.

A demonstração do Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos está presente em diversos livros do 9º ano, como por exemplo no livro didático, A conquista da matemática dos autores José Ruy Giovannyi Júnior & Benedicto Castrucci, pois este é um conteúdo desenvolvido durante o ano letivo.

Apesar de não ser uma demonstração difícil e fazer uso de alguns conhecimentos geométricos, seu caráter bastante algébrico pode deixá-la pouco interessante aos alunos, levando-os a realizar a prova de maneira mecânica, decorada, reforçando a necessidade de repensar as demonstrações do Teorema de Pitágoras oferecidas aos estudantes do nono ano, já que existem diversas outras formas de demonstrar esse resultado, como as apresentadas neste trabalho.

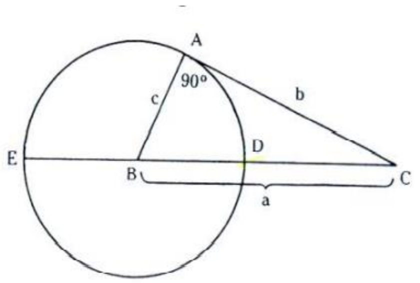
3.7 A DEMONSTRAÇÃO DE UM EX-ALUNO

Santos (2011) afirma que Barbosa, Professor doutor em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas, e professor titular do Centro Universitário de Araraquara (2017). Quando lecionava em uma escola de uma cidade no interior paulista no ano de 1993, quando ele estava trabalhando o conteúdo de relações métricas no círculo, um de seus alunos do 9° ano, apresentou em uma folha do seu caderno uma demonstração do teorema de Pitágoras. Essa prova era uma consequência dessas relações (parece ser de Hoffmann, professor e escritor no país da Venezuela, que provou em 1821), mostrando assim o interesse pelo teorema e a criatividade.

Dado o triângulo BAC retângulo em A de acordo com a figura 19 determinando B como o centro da circunferência e o seu raio BA, determinamos um ponto D no ponto de intersecção da circunferência com a medida BC. Sabemos que CA é tangente a circunferência porque o triângulo é retângulo em A. Prolongando CB até a intersecção com a circunferência no ponto E, podemos observar que CE é secante pela relação métrica entre tangente e secante temos a seguinte igualdade: $CA^2 = CD.CE$.

Como CA = b, CD = (a - c) e CE = (a + c) de acordo com a figura 20.

Figura 13



Fonte: SANTOS (2011).

Substituindo as medidas na relação $CA^2 = CD.CE$ temos:

$b^2 = (a – c).(a + c)$

$b^2 = a^2 + ac – ac – c^2$

$b^2 = a^2 – c^2$

$a^2 = b^2 + c^2$

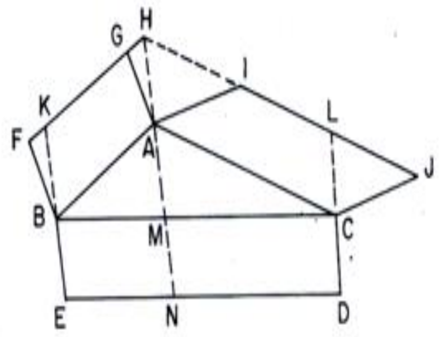
Esta demonstração nos apresenta, mais uma vez, a importância de saber manipular e desenvolver conceitos geométricos e algébricos. Este tipo de manipulação na forma abstrata não é muito desenvolvido durante o ensino básico, onde muitas vezes, o professor de matemática apenas apresenta diversas aplicações do teorema de Pitágoras.

3.8 A DEMONSTRAÇÃO DE PAPUS

Essa demonstração do teorema de Pitágoras é muito interessante pois se trata de uma generalização. Ela utiliza um triângulo arbitrário ABC em vez de um triângulo retângulo, tomando paralelogramos, sendo dois deles quaisquer e o terceiro tem que cumprir a condição de CD / / HA / / BK, de mesma medida.

A prova do teorema que Papus desenvolveu afirma que a área do paralelogramo BCDE é igual à soma das áreas dos outros dois paralelogramos ABFG e AIJC e se baseia na observação de que os paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento tem a mesma área.

Figura 14



Fonte: SANTOS (2011).

Observando que AHKB possui a mesma área que os quadriláteros ABFG e BMNE. Temos que as áreas ABFG e BMNE são iguais, consequentemente CDNM e CAIJ possuem também a mesma área. Assim concluímos que a soma das áreas ABFG e CAIJ é igual a área do paralelogramo BCDE (SANTOS, 2011).

Esta demonstração usa, essencialmente, argumentos geométricos, evitando aspectos algébricos. Além disso, Papus generaliza o teorema de Pitágoras, conforme pode ser percebido na demonstração apresentada. Ao mostrar o teorema de Pitágoras de forma prática, pude constatar as vantagens de se apresentar uma generalização de um determinado resultado, como por exemplo esta fornecida por Papus, para que os alunos possam perceber que, independentemente da forma que a figura se apresenta, podemos relacionar os lados do triângulo em uma expressão similar à do teorema de Pitágoras.

Além disso, o exercício lógico de se imaginar possíveis generalizações de um resultado matemático é um dos fatores importantes que levam o ser humano, seja ele pesquisador matemático ou não, a avançar em suas reflexões, permitindo à humanidade evoluir a matemática e as demais áreas do saber. No caso dos estudantes, ao apresentar-lhes uma generalização interessante, eles são instigados a refletir sobre o tema de estudo, permitindo-lhes comparar e analisar seus conhecimentos, desenvolvendo assim, efetivamente, seu raciocínio lógico e matemático.

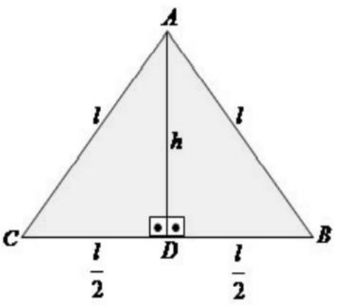
3.9 UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

Para iniciar esta aplicação, vamos utilizar um triângulo retângulo especial, que é o de catetos com medidas 3 e 4 unidades, e sua hipotenusa valendo 5 unidades. Vamos utilizar a triangulação ao invés de quadriculação, como cada triângulo equilátero corresponde a uma unidade de área.

Podemos verificar que a proposição 9 + 16 = 25 é válida, agora vamos procurar condições para triângulos equiláteros construídos com os valores de um triangulo retângulo qualquer.

Primeiramente vamos estabelecer a fórmula da área do triângulo equilátero qualquer conforme a figura:

Figura 15



Fonte: SANTOS (2011).

Podemos observar que ao traçar a altura de um triângulo equilátero, ela coincide com a mediana e a bissetriz do triângulo. Além disso, a altura f divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos. Aplicando o teorema de Pitágoras em cada um desses triângulos retângulos, observamos que:

$$L^2 = h^{\,2} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \rightarrow h^2 = \frac{3L^2}{4} \rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Fazendo o uso da área do triângulo $A_t = \frac{b\,.\,h}{2}$, agora substituindo h por $\frac{L\sqrt{3}}{2}$ e b por L, temos $A_t = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$. Utilizando as medidas a, b e c como hipotenusa e catetos respectivamente, para construirmos triângulos equiláteros com essas medidas temos que as áreas valem:

$A_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $A_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ e $A_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

Como $A_b + A_c = (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$. Observando que $b^2 + c^2 = a^2$, logo podemos escrever $A_b + A_c = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ ou $A_a = A_b + A_c$. concluímos assim que o padrão pitagórico é valido para triângulos equiláteros (SANTOS, 2011).

Os conceitos de mediana, bissetriz e altura, são desenvolvidos durante o 8º ano do ensino básico. Assim, esta aplicação visa reforçar que os conceitos para se desenvolver um bom entendimento do teorema de Pitágoras vai muito além dos conhecimentos algébricos e que é necessário o conhecimento dos conceitos geométricos que envolvem triângulos. Sendo resultado apresentado em diversos livros didáticos como por exemplo no livro didático A conquista da matemática dos autores José Ruy Giovanny Júnior & Benedicto Castrucci.

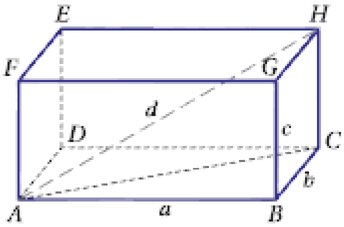
3.10 UMA GENERALIZAÇÃO INTERESSANTE

Conforme ilustrado pelos exemplos anteriores, as aplicações do teorema de Pitágoras se apresentam de diversas maneiras, interessantes e até mesmo lúdicas aos alunos. Por outro lado, esse teorema clássico pode envolver ainda, outros resultados matemáticos mais elaborados, mas que, em geral, não estão ao alcance do professor de matemática do ensino básico. O exemplo a seguir, publicado na Revista do Professor de Matemática RPM79, ilustra esse fato: O autor do resultado a seguir se inspirou na observação do cartaz da OBMEP de 2012.

Gerando o seguinte questionamento: será que existe uma extensão natural que relaciona o teorema de Pitágoras no espaço?

Podemos observar que em um paralelepípedo retângulo existe uma relação entre a diagonal e as suas arestas.

Figura 16

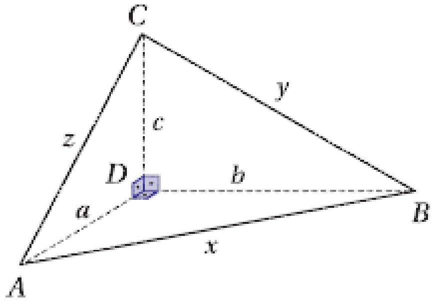


Fonte: Revista do professor de matemática (ed.79).

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABC e ACH, encontramos a seguinte relação $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, o quadrado da diagonal do paralelepípedo e igual à soma dos quadrados das arestas que si intersectam em um dos vértices. Apesar de apresentar uma semelhança com o enunciado do teorema de Pitágoras, ele não utiliza outros elementos do paralelepípedo.

Em analogia ao ângulo reto do triângulo retângulo, intuitivamente podemos pensar em um tetraedro trirretângulo, como mostra a figura a seguir.

Figura 17



Fonte: Revista do professor de matemática (ed.79).

Analisando um tetraedro trirretângulo a princípio pensamos logo nas faces que possuem ângulos retos e a face oposta.

Temos que as medidas das arestas a, b, c das faces trirretângulares nos conduz a: (1) $x^2 = a^2 + b^2$, (2) $y^2 = c^2 + b^2$ e (3) $z^2 = a^2 + c^2$, adicionando as equações (1), (2) e (3) obtemos $x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

Esse é um resultado que não relaciona as faces do tetraedro, assim como o paralelepípedo, os dois resultados não possuem a mesma forma do teorema de Pitágoras. Mas quando relacionamos a área podemos observar um comportamento semelhante. Como o resultado a seguir:

3.10.1 Teorema

Em um tetraedro trirretângular a soma dos quadrados das áreas das faces trirretângulares, é igual ao quadrado da área da face não trirretângular.

3.11 A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Dados os triângulos *ABC*, *ABD*, *ACD* e *BCD*, e respectivamente suas áreas *A*(*ABC*), *A*(*ABD*), *A*(*ACD*) e *A*(*BCD*).

Como na figura *AB*, *BC*, *AC*, *AD*, *BD* e *CD*, possuem respectivamente as medidas *x*, *y*, *z*, *a*, *b* e *c.*

Temos que: $A(ABD) = \frac{a.b}{2}$, $A(BCD) = \frac{b.c}{2}$, $A(ACD) = \frac{a.c}{2}$, aplicando a fórmula de Heron na face não pertencente ao trirretângulo obtemos: $A(ABC) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, sendo $p = \frac{x+y+z}{2}$.

Elevando as áreas a segunda potência, temos: (i) $A(ABD)^2 = \frac{a^2b^2}{4}$, (ii) $A(BCD)^2 = \frac{b^2c^2}{4}$, (iii) $A(BCD)^2 = \frac{a^2c^2}{4}$ e (iiii) $A(ABC)^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$.

Substituindo o valor de p em (iiii), temos a seguinte expressão:

$$A(ABC)^2 = \left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{y+z-x}{2}\right)\left(\frac{x+y-z}{2}\right)$$

$$A(ABC)^2 = \frac{1}{16}\,[(x + y + z)(x + y - z)][(y + z - x)(x + z - y)]$$

$$A(ABC)^2 = \frac{1}{16}\,(x^2 + 2xy + y^4 - z^2)(2xy - x^2 - y^2 + z^2)$$

$$A(ABC)^2 = \frac{1}{16}\,(- x^4 + 2x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 - z^4).$$

Note que, $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = b^2 + c^2$ e $z^2 = a^2 + c^2$, ao substituirmos os valores de x^2, y^2 e z^2, na expressão $A(ABC)^2 = \frac{1}{16}(- x^4 + 2x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 - z^4)$, e desenvolvendo as multiplicações entre eles encontramos o resultado a seguir: $A(ABC)^2 = \frac{1}{16}(4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2)$. Efetuando o produto podemos observar o seguinte resultado: $A(ABC)^2 = \left(\frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4}\right)$, então $A(ABC)^2 = A(ABD)^2 + A(BCD)^2 + A(ACD)^2$.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho desenvolve-se como uma pesquisa bibliográfica com análise de dados qualitativos. Para Figueiredo (2008), as pesquisas qualitativas utilizam fontes de dados não quantificáveis, analisam e coletam dados narrativos e pouco estruturados, com o objetivo de mostrar como as pessoas se pautam com o seu cotidiano. Esta modalidade de pesquisa se preocupa com a realidade que não pode ser quantificada, consistindo em um universo de significados, motivações, valores, aspirações, crenças e atitudes.

Para GIL (2002), a pesquisa bibliográfica mostra-se indispensável para os estudos históricos, sendo em muitas ocasiões, a única maneira de obter conhecimento do mesmo. A pesquisa bibliografia é organizada e desenvolvida a partir de material já elaborado e desenvolvido, usando principalmente livros e artigos científicos.

Esta pesquisa bibliográfica será desenvolvida em duas etapas.

1° Seleção e pré-análise,

2° A exploração do material.

Para Bardin, (2016), a pré-análise consiste em definir o corpo do trabalho. Neste caso, consiste em selecionar e analisar alguns livros didáticos distribuídos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), sendo três livros didáticos da coleção A Conquista da matemática escritos por José Ruy Giovannyi Júnior & Benedicto Castrucci. Esta coleção vem sendo utilizada desde 1985, até os dias atuais nas escolas do estado de Rondônia. A outra obra é o livro didático Projeto Teláris, cujo autor é Luiz Roberto Dante.

Conforme já mencionado, todos os livros didáticos selecionados para avaliação nesta dissertação, são utilizados em escolas públicas de Porto Velho – RO. Estes livros são distribuídos previamente pelas editoras credenciadas pelo Ministério da Educação, através do PNLD, para a análise dos professores, e após serem selecionados, são utilizados nas escolas durante seu período de vigência, que atualmente é de quatro anos.

Na segunda etapa será realizada a exploração do material. De acordo com Bardin, (2016), é a análise propriamente dita do material que foi selecionado na etapa anterior.

Em particular, tem-se o objetivo de avaliar as abordagens das demonstrações do teorema de Pitágoras, utilizadas durante o processo de ensino aprendizagem com o uso dos referidos livros didáticos analisados. A perspectiva da análise se fará mediante avaliação das estratégias adotadas pelos autores, tais como argumentos algébricos, manipulação geométrica, experiências cotidianas dos estudantes e utilização de materiais manipuláveis, dentre outros, nas demonstrações abordadas. E de que forma os exercícios estão sendo explorados nos livros didáticos analisados, à luz das estratégias dos respectivos autores.

5 OS LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL

De acordo com a editora Brasil, em 1929 foi criado o dia nacional do livro didático, pelo Instituto Nacional do Livro (INL), comemorado no dia 27 de fevereiro. O livro didático é um recurso de fundamental importância para a divulgação de conceitos, ideias, valores, crenças e culturas, reunindo informações confiáveis, de cunho científico, elaboradas em linguagem e formato adequados à faixa etária que contemplam Indubitavelmente, é um símbolo de uma grande conquista, quando inserido no dia a dia escolar, pois auxilia, orienta e até mesmo direciona o currículo escolar e o processo de ensino aprendizagem.

Na grande maioria das vezes, a principal fonte de pesquisa do professor é o livro didático, onde em alguns casos eles sugerem sequências, atividades e desenvolve o conteúdo buscando transformar o conhecimento letrado em ciência escolar, misturando ideias, filosofias, valores e finalidades que nem sempre são compatíveis (RUGGIERO & BASSO, 2003). Quando a família real chegou ao Brasil em 1808, trazendo em suas bagagens uma impressora, ocorreu a fundação da imprensa régia, dando origem às primeiras produções de obras didáticas no país, voltadas para a escola militar. De acordo com a editora Brasil a produção de livros didáticos só ocorreu em 1822, com a independência do Brasil e as primeiras leis educacionais.

Há aproximadamente um século o livro didático vem sendo discutido nas políticas governamentais, apesar de que á estavam inseridos em escolas de artilharia do Brasil Colônia, com procedências estrangeiras, sendo impressos na França, gerando elevados gastos ao país. Com a grande depressão de 1929, o Brasil passa a produzir por completo seus livros didáticos, pois importá-los principalmente da Europa se tornou um processo demasiado caro. Com este cenário desfavorável, foram necessárias algumas medidas que debatessem de qual forma os livros didáticos deveriam ser elaborados e utilizados na sociedade brasileira e como seria a sua produção. Assim, durante o governo de Washington Luís, no ano de 1929, ocorreu a criação do Instituto Nacional do Livro (INL), mas a ideia permaneceu no papel durante alguns anos. Em 1934 o instituto ganhou suas primeiras atribuições, durante o governo de Getúlio Vargas (MAZZI & AMARAL-SCHIO, 2021).

Em 1937 ocorreu a criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o programa de distribuição de livros didáticos mais antigo do país.

A Lei de Diretrizes e Bases (LDB) foi promulgada em 1961, estabelecendo a obrigatoriedade do ensino fundamental no Brasil, fato este que inseriu muitas crianças e adolescentes nas escolas, e que influenciou diretamente nas políticas de distribuição dos livros didáticos, pois gerava uma necessidade maior de livros disponíveis (MAZZI & AMARAL-SCHIO, 2021).

Com a criação da lei N° 5.692, de 11 de agosto de 1971, que no Art, 4° definiu-se que os currículos de 1° e 2° do ensino seriam compostos por um centro comum, imprescindível no regime nacional, e uma parte diversificada para atender as necessidades locais e as diferenças individuais dos alunos. Esta lei determinou uma nova forma de ensino no Brasil, obrigando estados e municípios a atenderem às camadas populacionais desprovidas de recursos financeiros.

Por conta de um custo elevado na produção dos livros didáticos, o governo passou a se preocupar com a permanecia dos estudantes nas escolas, visto que estes investimentos elevados geravam um problema na escola pública (MAZZI & AMARAL-SCHIO, 2021).

Podemos observar que ao longo da história as desigualdades educacionais foram naturalizadas no Brasil, no que diz respeito ao acesso à escola, aprendizado e permanência dos alunos. Diante desse fato, a organização das instituições no planejamento do trabalho anual e as decisões curriculares, didático pedagógicas das secretarias de educação têm levado em consideração a necessidade de superar as desigualdades. As instituições escolares e o sistema de ensino devem focar no reconhecimento de que as necessidades dos estudantes são distintas. A desigualdade na educação básica do Brasil não foi alterada pela (BNCC, 2017).

De a acordo com os PCN´s a construção de um referencial teórico que orienta o exercício escolar de maneira a contribuir com que todas as crianças e jovens encontrem acesso ao conhecimento que lhe dê a possibilidade de contribuir com a sua inserção no mundo do trabalho, relações sociais e cultural é primordial, pois influenciará nos currículos, na formação dos professores e na produção de materiais didáticos (BNCC, 2017).

Em decorrência disso, os PCN's também podem influenciar na formação continuada dos docentes. À medida em que os fundamentos do currículo são expostos, fica subentendida a forma como deve ser a formação dos novos docentes, contribuindo diretamente para produção de livros e materiais didáticos, alcançando uma nova configuração para uma melhoria efetiva do ensino básico brasileiro. Entretanto, uma parte significativa dos professores ainda não foi atingida por essas iniciativas, dessa forma ainda não foi alterado o quadro desfavorável que caracteriza o ensino brasileiro (PCN, 1998).

Ponderando que não leciona quem quer e sim quem está habilitado para isso, além disso supomos que não se ensina o que se quer e sim o que tem que ser ensinado, o que está previsto nas diretrizes curriculares (FIGUEIREDO & SALES, 2009).

O modelo de alheamento das tarefas do professor impele no docente uma ascensão não critica do aspecto a sua volta, ainda mais se estiverem respaldados pelo selo oficial (RUGGIERO & BASSO, 2003).

Conseguimos observar que nas últimas quatro décadas, o uso do livro didático não foi o único apoio dos professores em sala de aula, mas tem sido utilizado como a principal ferramenta do ensino (PITOMBEIRA & CARVALHO, 2010).

Observamos que hoje o ensino de qualidade é aquele que se apresenta de acordo com as diretrizes curriculares e políticas que norteiam o ensino básico tais como LDB, PCN entre outros, onde subentende-se que elas atendem as necessidades da sociedade. Compreendemos também que os livros didáticos são desenvolvidos de acordo com os documentos oficiais, rigorosamente avaliados e indicados pois contém de forma implícita para a sociedade um ensino de qualidade (FIGUEIREDO & SALES, 2009).

Com o entendimento errôneo das concepções pedagógicas observamos que ocorrem distorções na implementação de novas ideias que aparecem como propostas, devido a uma formação inadequada dos professores, tanto na inicial como na continuada, onde pouco tem contribuído para a qualidade do exercício da docência. Por não ter condições e oportunidade de aprimorar a sua formação e não dispondo de novos recursos para as práticas da sala de aula, os professores utilizam praticamente de forma exclusiva somente os livros didáticos, onde muitas vezes não apresentam uma qualidade satisfatória (PCN, 1998).

Ao conhecer a trajetória do desenvolvimento da política educacional do país relacionada ao livro didático observamos que ele estabelece na maioria das vezes as condições materiais para o ensino aprendizagem na sala de aula, sendo o mediador entre o currículo real e o proposto. É por meio dele que o conteúdo especifico chega na sala de aula e se concretiza (FIGUEIREDO & SALES, 2009).

5.1 OS LIVROS DIDÁTICOS E A MATEMÁTICA

O ensino da matemática passou por três etapas principais durante o século XX, sendo elas: 1° "avaliação e treino", 2° "aprendizagem significativa" e 3° "matemática moderna". A primeira tinha como objetivo garantir pela repetição que o aluno decorasse a tabuada e as fórmulas que possibilitassem desenvolver cálculos com precisão e habilidade. A segunda teve como objetivo o aprendizado do aluno através do envolvimento em atividades de aritmética e a terceira buscou mostrar aos alunos o desenvolvimento histórico da matemática ao longo dos anos, atendendo aos critérios desenvolvidos pelos PCN'S (MAZZI & AMARAL-SCHIO, 2021).

O movimento da matemática moderna, veiculado diretamente com os livros didáticos no Brasil, gerou uma grande influência por um período muito longo, só vindo a baixar com a constatação de muitas inadequações de alguns princípios básicos, distorções e exageros. O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dos Estados Unidos, em 1980, exibiu algumas recomendações voltadas para o ensino da matemática, tendo como foco o ensino da matemática nos anos de 1980, voltados à resolução de problemas (PCN, 1998).

O que veio a ser conhecido como "matemática moderna" surgiu na busca de tentar ensinar a estrutura da disciplina e de gerir um currículo de novos caracteres. Ao longo da década de 1990, o Governo Federal organiza e lança os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN'S, que buscam no ensino da história da matemática, uma forma de se ensinar matemática em sala. Este ocorrido agrupado ao desenvolvimento da história da matemática nas salas de aulas no Brasil na década de 1990, desenvolveu um processo que gerou o aumento do uso em livros didáticos (MAZZI & AMARAL-SCHIO, 2021).

O livro didático de matemática tem como finalidade dar suporte ao professor de matemática, sendo elemento importante no contexto do processo de ensino e aprendizagem, considerando que, em muitos casos, é o único apoio que os docentes possuem para preparar suas aulas. Os livros didáticos de matemática constituem tema frequente em estudos relacionados à Educação Matemática, tendo em vista que estas análises podem contribuir para o seu aperfeiçoamento como instrumento fundamental da prática escolar em todos os níveis de ensino.

Por outro lado, cabe registrar que o livro não tem o poder de decidir o tempo, o método utilizado e a forma de transmissão do conhecimento exposto pelo professor ao aluno (RUGGIERO & BASSO, 2003).

O Guia de Livros Didáticos, PNLD 2008 – Matemática referencia os pesquisadores Gérard e Roegiers, para elencar as funções mais relevantes do livro didático, no que se refere ao estudante:

- favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes; propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas, que contribuam para aumentar a autonomia;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;
- auxiliar na autoavaliação da aprendizagem;
- contribuir para a formação social, cultural, desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania (BRASIL, 2007).

Ainda segundo este mesmo Guia (BRASIL, 2007), no que se refere ao docente, o livro didático tem as seguintes funções principais:

- auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos;
- favorecer a aquisição dos conhecimentos, assumindo o papel de texto de referência;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno (BRASIL, 2007).

Até o início dos anos de 1990, as coleções de matemática para o ensino fundamental apresentavam o livro voltado para os professores como uma mera cópia dos livros dos alunos acrescidos das respostas, no entanto ele vem se modificando ao longo dos anos, hoje ele está dividido em duas partes.

A primeira é uma cópia do livro do aluno acrescido da resposta dos exercícios e breves orientações. A segunda etapa destinada aos professores apresenta material teórico-metodológico em diferentes aspectos, com alguns títulos como: suplemento pedagógico, manual pedagógico ou caderno de orientação ao professor entre outros títulos (CARVALHO & GITIRANA, 2010).

Neste sentido pretende-se que o livro do professor auxilie na discussão de documentos que mostrem direções para um novo modelo de ensino da matemática no país, observando-se os parâmetros curriculares e as orientações do novo ensino fundamental. Orientando também os professores a pesquisar as medidas sugeridas pelos seus estados e municípios (CARVALHO & GITIRANA, 2010).

Nas seções que se seguem, apresentamos os livros didáticos selecionados em nossa pesquisa, bem como a análise destes livros com relação à apresentação e discussão do teorema de Pitágoras.

5.2 SELEÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros utilizados para este estudo são os seguintes:

1° A conquista da matemática : teoria e aplicação : 8° série / José Ruy Giovanni, Benedicto Castrucci. – São Paulo : FTD, 1985.

2° A conquista da matemática : 9° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — Ed. renovada. — São Paulo : FTD, 2009.

3° A conquista da matemática : 9° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

4° Projeto Teláris : Matemática : ensino fundamental 2 / Luiz Robeto Dante. . – 2. ed.- São Paulo : Ática, 2015. – (Projeto Teláris : matemática)

Estes livros didáticos foram selecionados com o objetivo de analisar o desenvolvimento e a abordagem das demonstrações do teorema de Pitágoras ali apresentadas em diferentes épocas. Além do recorte temporal, há ainda um recorte espacial, no sentido de estes quatro livros didáticos foram utilizados especificamente em escolas públicas do município de Porto Velho – RO.

O intuito é mostrar que, apesar de termos o conhecimento de inúmeras demonstrações deste importante resultado matemático, essa diversidade de demonstrações diferentes ainda não é explorada pelos autores de livros didáticos de matemática.

De fato, várias provas do teorema de Pitágoras são desenvolvidas de forma prática, intuitiva e lúdica, com a possibilidade de potencializar o aprendizado dos alunos atendendo, assim, às recomendações dos documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC). A seleção dos três livros da coleção A conquista da matemática dos autores José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci em três edições diferentes, espaçadas temporalmente por períodos de cerca de 20 anos entre si, é para poder observar como, as edições foram adaptadas as orientações dos documentos oficiais elaborados pelo Ministério da Educação ao longo deste período de aproximadamente 40 anos, sendo eles oferecidos com as edições nos anos de 1985, 2009 e 2018. Dentre outros aspectos relevantes, buscou-se verificar se os autores acrescentaram alguma novidade na apresentação e demonstração do teorema de Pitágoras que pudessem propiciar maior interesse e aprendizado dos alunos.

Quanto ao quarto livro, pretendeu-se efetuar uma comparação com os demais livros, tendo em vista que este livro oferece outras possibilidades de apresentação e demonstração do teorema de Pitágoras, permitindo assim, ilustrar de maneira efetiva como é possível apresentar outras demonstrações em que não é necessário um conhecimento algébrico avançado para a compreensão do resultado discutido.

6 UMA ANÁLISE NA RELEVÂNCIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO LIVRO DIDÁTICO

As aplicações dos conteúdos matemáticos estão presentes em todos os lugares da sociedade, sendo uma delas em um simples cálculo de medicação para uma pessoa enferma ou para as mais complexas que exigem cálculos que envolvem conhecimento matemático mais avançado utilizado somente por estudiosos matemáticos.

Analisando as raízes da aplicação da matemática, pensamos logo em situações problemas complexos e difíceis encontrados como por exemplo na indústria, saúde, meio ambiente entre outros. Porém, a matemática não está presente somente no trabalho com operações e números, ela vai muito além. Temos que considerar toda a sua amplitude e sua área de conhecimento que pode ofertar na formação do indivíduo (JUNIOR, 2018).

Por outro lado, para todos os alunos da educação básica é necessário o conhecimento matemático. Seja pela sua potencialidade na construção do conhecimento crítico do cidadão, ou por sua vasta aplicabilidade na sociedade moderna (BNCC, 2017).

O teorema de Pitágoras, como já foi dito anteriormente, é um dos resultados mais importantes dentro do ensino da matemática, pois tem uma vasta aplicabilidade dentro do ensino básico. Ao longo de minha prática docente, enquanto ministrava aulas envolvendo o teorema de Pitágoras, venho observando e refletindo sobre este importante teorema matemático, sob diversos aspectos, tais como as formas como é apresentado em sala de aula, as dificuldades dos estudantes, bem como a forma como os livros didáticos apresentam, discutem e demonstram este teorema, assim surgindo a curiosidade de como este conteúdo tem sido abordado ao longo do tempo, nas escolas públicas de Porto Velho.

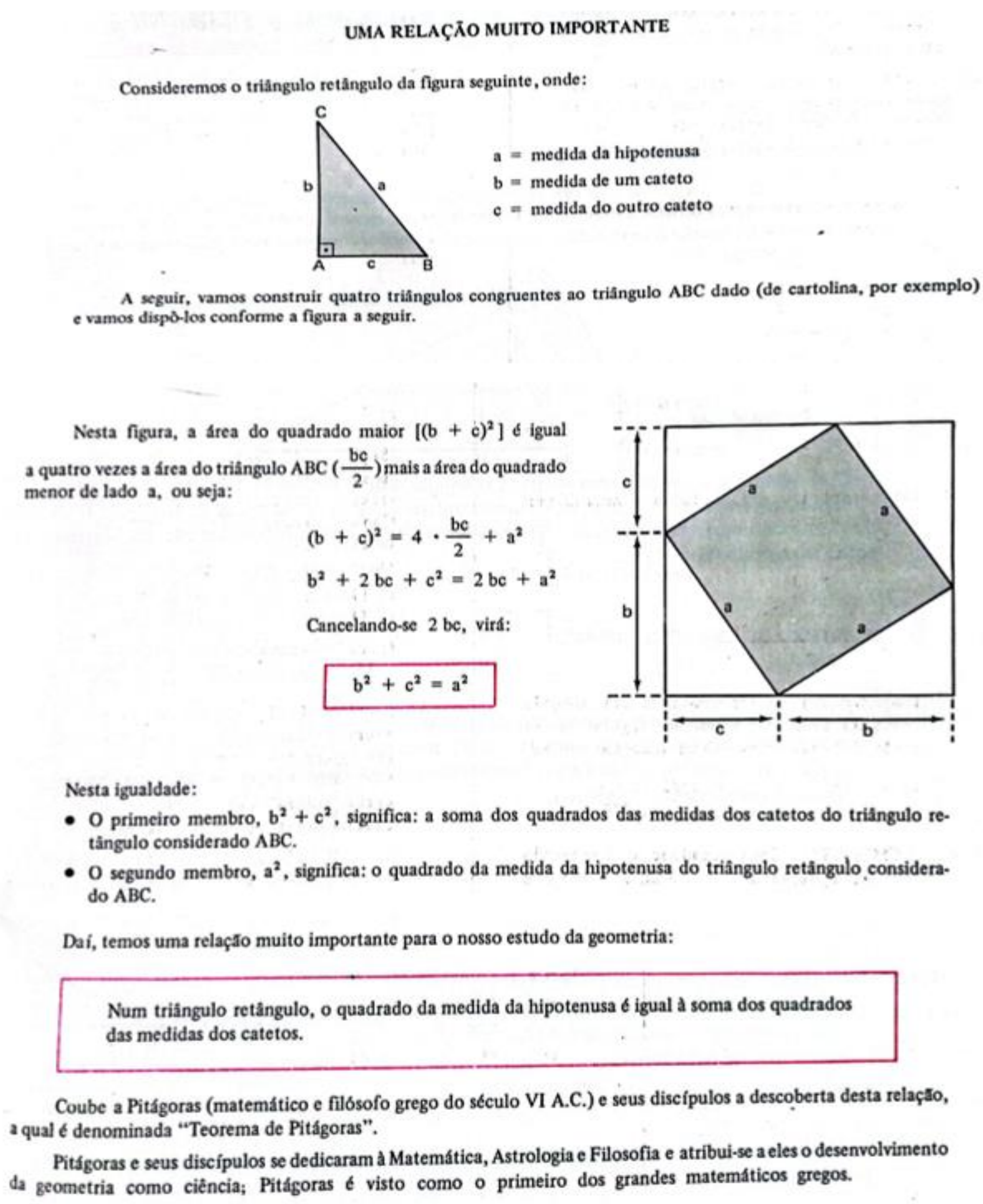
Diante dos desafios que são expostos aos alunos, precisamos observar como este determinado conteúdo tem sido explorado ao longo dos anos nos livros didáticos, nas escolas públicas de Porto Velho, sendo analisados alguns livros utilizados nos seguintes anos: 1985, 2009 e 2023, para observar se as demonstrações, aplicações e contexto histórico tem sido desenvolvidos de acordo com a legislação, normativas e demais documentos exigidos ao longo da história da Educação do Brasil, especialmente no estado de Rondônia.

Como podemos observar, o teorema de Pitágoras é utilizado nas mais diversas ocasiões dentro do ensino da geometria plana, espacial e trigonométrico, dentre outros, sendo explorado até o final do ensino médio, evidenciando a necessidade de que temos que ter um bom aprendizado do teorema de Pitágoras tanto na forma geométrica quanto na algébrica.

6.1 ANÁLISE DO 1° LIVRO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA EDIÇÃO 1985

No livro do professor utilizado no ano de 1985 da coleção “A Conquista da matemática” dos autores Jose Ruy Giovanni e Benedito Castrucci, o teorema de Pitágoras é apresentado na unidade 17, dentro do conteúdo Relações métricas no triângulo retângulo. Mas antes de iniciar o conteúdo, os autores apresentam um texto informando que existe uma relação muito importante que será abordada dentro do conteúdo. Com uma breve demonstração de acordo com a figura 18.

Figura 18



UMA RELAÇÃO MUITO IMPORTANTE

Consideremos o triângulo retângulo da figura seguinte, onde:

a = medida da hipotenusa
b = medida de um cateto
c = medida do outro cateto

A seguir, vamos construir quatro triângulos congruentes ao triângulo ABC dado (de cartolina, por exemplo) e vamos dispô-los conforme a figura a seguir.

Nesta figura, a área do quadrado maior $[(b+c)^2]$ é igual a quatro vezes a área do triângulo ABC $\left(\frac{bc}{2}\right)$ mais a área do quadrado menor de lado a, ou seja:

$$(b+c)^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

Cancelando-se 2 bc, virá:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

Nesta igualdade:

- O primeiro membro, $b^2 + c^2$, significa: a soma dos quadrados das medidas dos catetos do triângulo retângulo considerado ABC.
- O segundo membro, a^2, significa: o quadrado da medida da hipotenusa do triângulo retângulo considerado ABC.

Daí, temos uma relação muito importante para o nosso estudo da geometria:

> Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Coube a Pitágoras (matemático e filósofo grego do século VI A.C.) e seus discípulos a descoberta desta relação, a qual é denominada "Teorema de Pitágoras".

Pitágoras e seus discípulos se dedicaram à Matemática, Astrologia e Filosofia e atribui-se a eles o desenvolvimento da geometria como ciência; Pitágoras é visto como o primeiro dos grandes matemáticos gregos.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (1985).

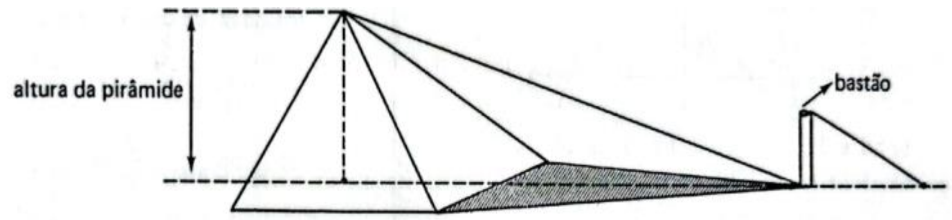
A intenção é mostrar que existe um conteúdo muito importante a ser estudado e descrevendo em dois pequenos períodos a história de Pitágoras.

Nas unidades anteriores, os autores expõem conteúdos que poderão auxiliar em algumas possíveis demonstrações do teorema de Pitágoras, tais como Segmentos proporcionais, semelhança e razões trigonométricas no triângulo retângulo.

O livro não apresenta comentários destinados aos professores, pois nesta época o livro didático era apenas uma extensão do livro do aluno, que vinha com as respostas no final do livro.

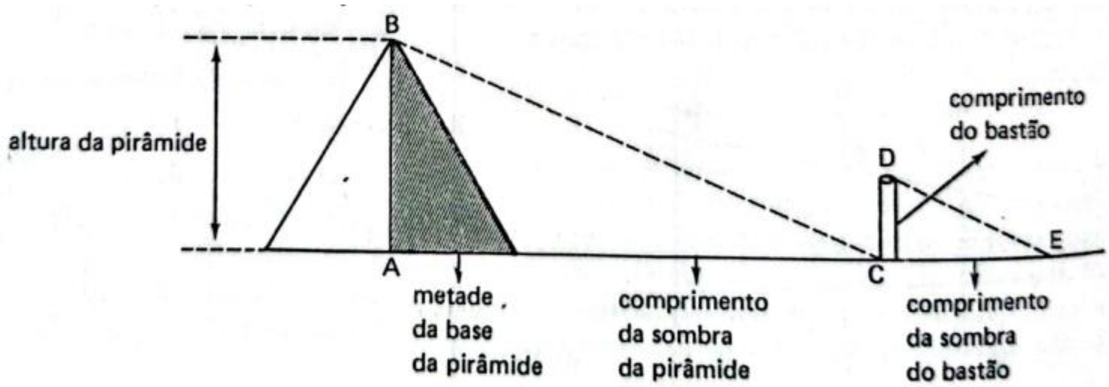
Os autores começam a desenvolver o conteúdo de geometria com o estudo de segmentos proporcionais envolvendo o Teorema de Tales na unidade 14, para iniciar o conteúdo de semelhança o livro apresenta uma breve leitura envolvendo semelhança e um texto que eles acreditam que tenha sido a primeira demonstração de semelhança de figuras geométricas de acordo com as figuras 19 e 20, podemos observar o esquema montado para poder analisar as razões de semelhança.

Figura 19



Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (1985).

Figura 20



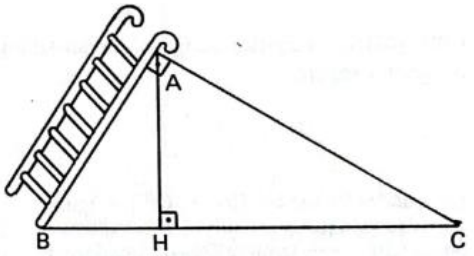
Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (1985).

O conteúdo de Razões trigonométricas no triângulo retângulo que se encontra na unidade 16, também apresenta uma leitura com pontos interessantes relacionados a história e onde acontecem algumas aplicações da trigonometria no dia a dia, provavelmente este assunto vem sendo apresentado antes do teorema de Pitágoras para poder introduzir o conceito de triângulo retângulo.

Na unidade 17 os autores começam a introduzir o conteúdo de Relações métricas no triangulo retângulo com o seguinte problema: *Queremos construir um escorregador obedecendo ao esquema abaixo. A escada AB já está pronta e mede*

6m. A distância BC deverá ser de 10 m e o comprimento de AC, igual a 8m. nessas condições, de quantos metros deverá ser a altura AH do escorregador?

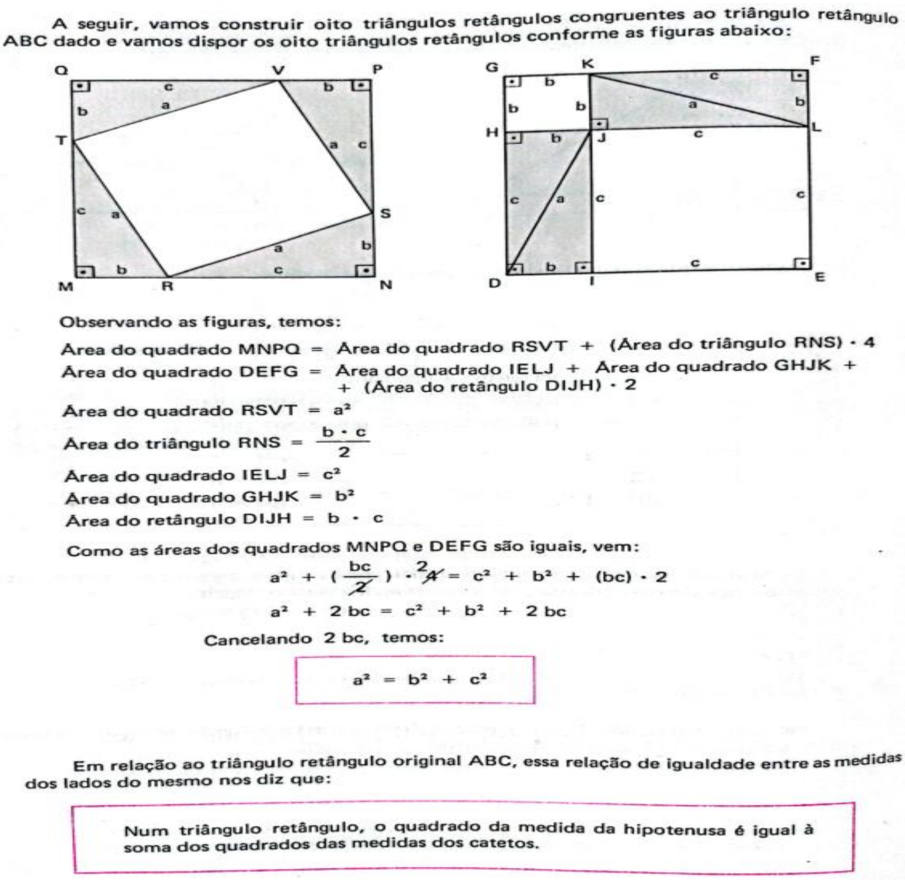
Figura 21



Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (1985).

Ao começar a desenvolver o assunto de relações métricas ele já apresenta uma demonstração da relação $a^2 = b^2 + c^2$. Conforme a figura.

Figura 22



A seguir, vamos construir oito triângulos retângulos congruentes ao triângulo retângulo ABC dado e vamos dispor os oito triângulos retângulos conforme as figuras abaixo:

Observando as figuras, temos:

Área do quadrado MNPQ = Área do quadrado RSVT + (Área do triângulo RNS) · 4

Área do quadrado DEFG = Área do quadrado IELJ + Área do quadrado GHJK + + (Área do retângulo DIJH) · 2

Área do quadrado RSVT = a^2

Área do triângulo RNS = $\frac{b \cdot c}{2}$

Área do quadrado IELJ = c^2

Área do quadrado GHJK = b^2

Área do retângulo DIJH = $b \cdot c$

Como as áreas dos quadrados MNPQ e DEFG são iguais, vem:

$$a^2 + \left(\frac{bc}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{4}^{2} = c^2 + b^2 + (bc) \cdot 2$$

$$a^2 + 2\,bc = c^2 + b^2 + 2\,bc$$

Cancelando 2 bc, temos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Em relação ao triângulo retângulo original ABC, essa relação de igualdade entre as medidas dos lados do mesmo nos diz que:

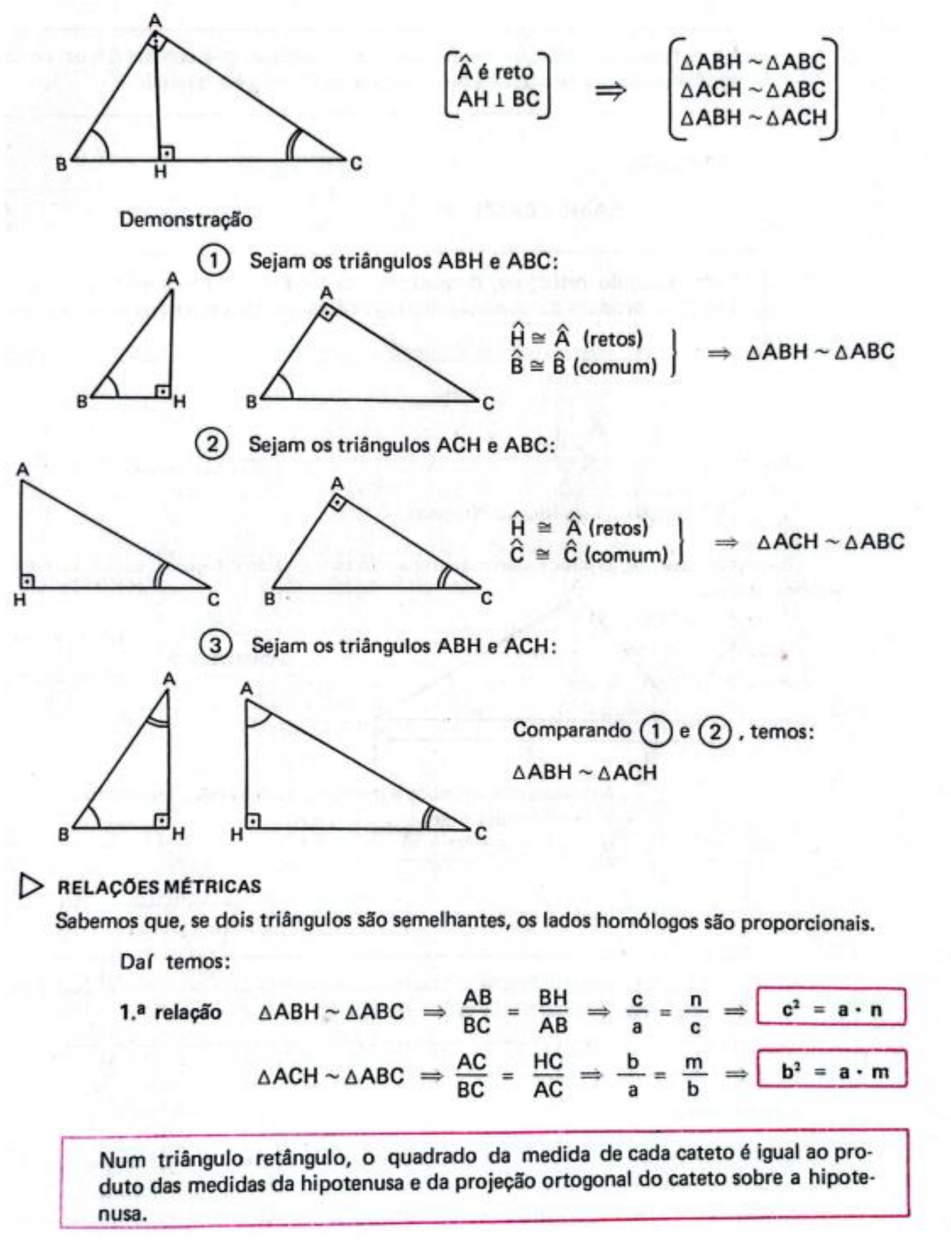
Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (1985).

Antes de iniciar a demonstração do teorema de Pitágoras utilizando semelhança de triângulos ele apresenta o seguinte *Teorema: Em todo triângulo retângulo, a altura à hipotenusa determina dois outros Triângulos retângulos, ambos semelhantes ao triângulo dado e, portanto, semelhantes entre si.*

Sendo feita a demonstração sem apresentar de maneira explícita quais os critérios de semelhança são utilizados para determinar as relações métricas que são desenvolvidas para obter o teorema de Pitágoras. Conforme foi apresentado no capitulo algumas demonstrações do teorema de Pitágoras.

Figura 23



Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (1985).

Figura 24

2.ª relação

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow \boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

Num triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura a ela relativa.

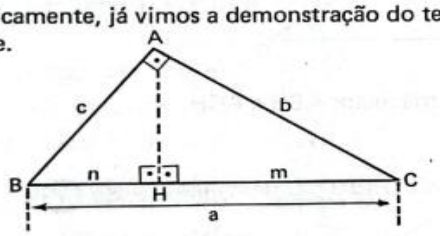
3.ª relação

$$\Delta ABH \sim \Delta ACH \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

4.ª relação: Teorema de Pitágoras

Geometricamente, já vimos a demonstração do teorema de Pitágoras; vamos fazê-lo, agora, algebricamente.



Sabemos que:

$$b^2 = a \cdot m$$
$$c^2 = a \cdot n$$

Adicionando, membro a membro, as duas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(m + n)}_{a}$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (1985).

Os exercícios apresentados nesta edição estão divididos em grupos da seguinte forma:

1° grupo - escrever as relações métricas com duas atividades (a e b).

2° grupo - determinar a medida desconhecida indicadas na figura com quatro atividades de (a até d).

3° grupo - resolver problemas como: (Num triângulo retângulo, a medida da hipotenusa é 12 cm. A medida da projeção de um cateto sobre a hipotenusa é 3 cm. Determine a medida desse cateto). Distribuídos da letra (a até d).

4° grupo – exercícios do teorema de Pitágoras do seguinte modo: (Nos triângulos seguintes usando o teorema de Pitágoras, calcule as medidas desconhecidas, indicadas): distribuídas de (a até f).

5° grupo – exercícios do seguinte modo: (Seja um triângulo retângulo ABC (Â é reto); então) os exercícios apresentam duas medidas de quaisquer do triângulo e pede para calcular a terceira medida sem indicar qual o procedimento a ser utilizado, mas de forma bem obvia deixando a entender que será utilizado o teorema de Pitágoras. Sendo apresentado da letra (a até d).

6° grupo – mais um da forma resolva os problemas, mas agora eles apresentam alguns somente texto deixando o desenho para o aluno e alguns exercícios com enunciado e o desenho.

O 7° grupo se desenvolve igualmente ao sexto grupo.

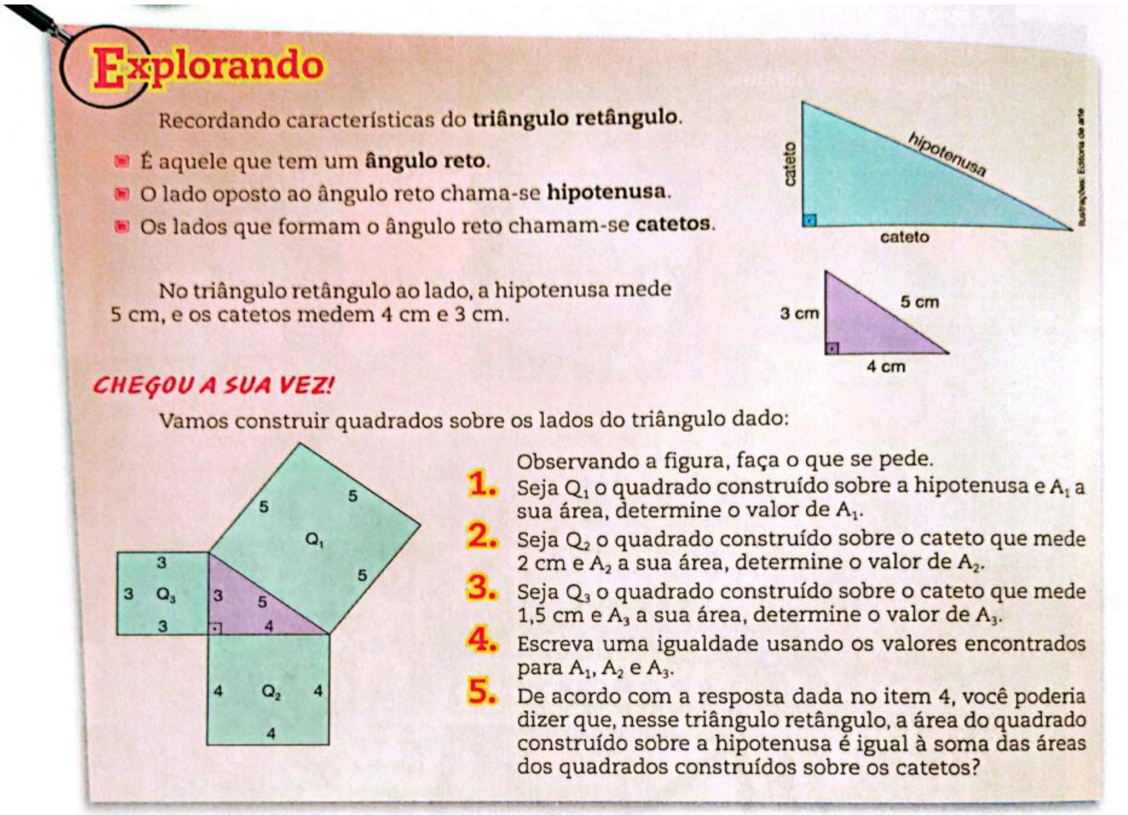
Os autores do livro se preocupam em apresentar algumas aplicações importantes do teorema de Pitágoras como o cálculo da medida da diagonal de um quadrado e a relação fundamental da trigonometria, $sen^2 + cos^2 = 1$. Pois em uma unidade anterior as relações trigonométricas no triângulo são explicadas aos estudantes.

6.2 ANÁLISE DO 2° LIVRO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA EDIÇÃO 2009

O segundo livro a ser estudado é da mesma coleção, mas agora em uma nova edição denominada A conquista da matemática edição renovada.

No livro a conquista da matemática edição renovada do ano de 2009, o teorema de Pitágoras está dentro da unidade “Estudando as relações métricas no triângulo retângulo”, que é dividida em duas seções: 49 e 50, sendo elas respectivamente, “O teorema de Pitágoras” e “as relações métricas no triângulo retângulo”. Antes de iniciar o conteúdo a ser estudado, os autores discutem a forma como deve ser apresentado aos alunos e professores, apresentando alguns textos e um exemplo que utiliza o cálculo da área do quadrado por meio de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, para mostrar que a soma das áreas dos valores 3 e 4, que correspondem aos catetos do triângulo é igual a área da hipotenusa. De acordo com a figura 25:

Figura 25



Explorando

Recordando características do **triângulo retângulo**.

- É aquele que tem um **ângulo reto**.
- O lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa**.
- Os lados que formam o ângulo reto chamam-se **catetos**.

No triângulo retângulo ao lado, a hipotenusa mede 5 cm, e os catetos medem 4 cm e 3 cm.

CHEGOU A SUA VEZ!

Vamos construir quadrados sobre os lados do triângulo dado:

Observando a figura, faça o que se pede.

1. Seja Q_1 o quadrado construído sobre a hipotenusa e A_1 a sua área, determine o valor de A_1.
2. Seja Q_2 o quadrado construído sobre o cateto que mede 2 cm e A_2 a sua área, determine o valor de A_2.
3. Seja Q_3 o quadrado construído sobre o cateto que mede 1,5 cm e A_3 a sua área, determine o valor de A_3.
4. Escreva uma igualdade usando os valores encontrados para A_1, A_2 e A_3.
5. De acordo com a resposta dada no item 4, você poderia dizer que, nesse triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos?

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

Na busca de instigar o aluno a desenvolver o seu lado investigativo, os autores apresentam fatos históricos sobre a utilização do triângulo retângulo pelos egípcios conforme a figura abaixo:

Figura 26

O TRIÂNGULO RETÂNGULO DOS EGÍPCIOS

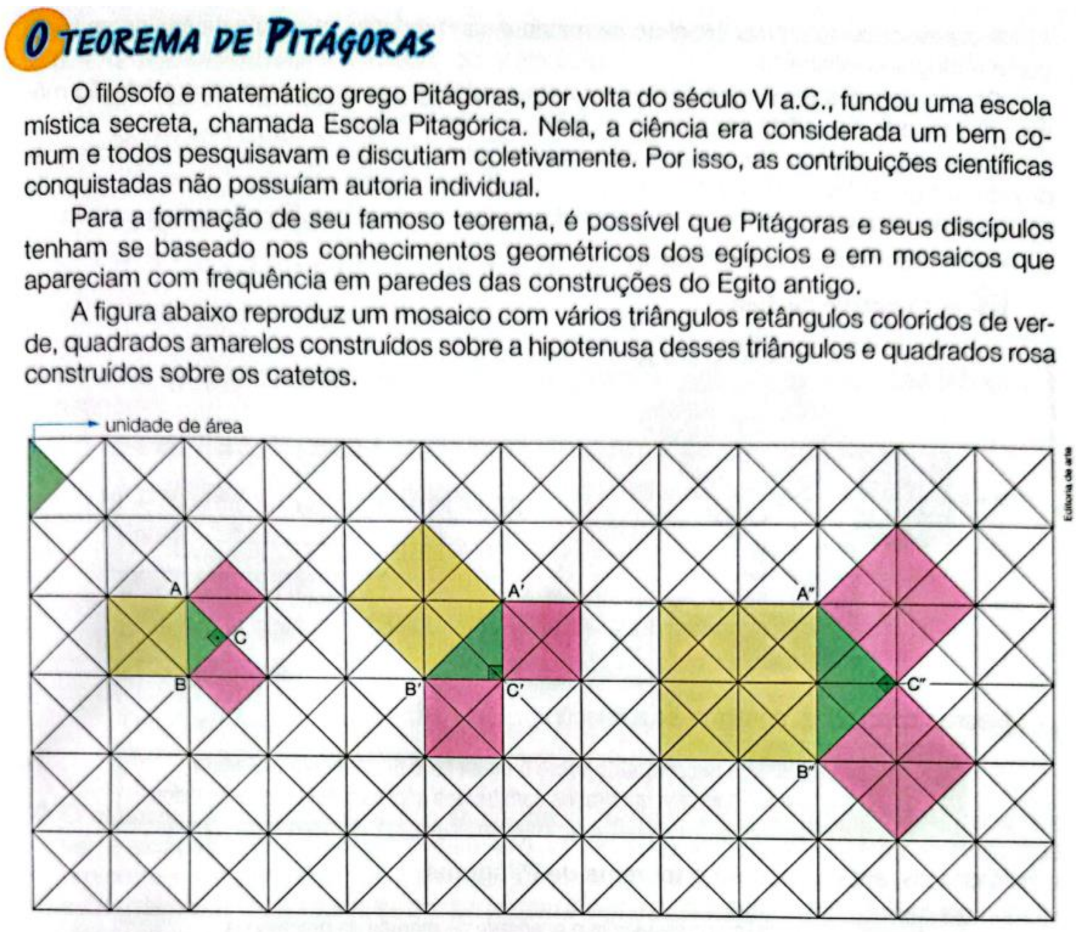
A construção de pirâmides de base quadrada é uma das muitas aplicações do conhecimento geométrico dos antigos egípcios, que usavam um processo prático para obter "cantos" retos (ângulos retos).

Usando uma corda com 12 nós, os egípcios parecem ter construído um triângulo retângulo particular para obter "cantos" em ângulos retos. Nesse triângulo, cujos lados mediam 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades de comprimento, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo reto.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

E um breve resumo da vida de Pitágoras e a origem do teorema que levou o seu nome. Mostrando também uma construção geométrica muito interessante que pode ser verificada de forma fácil e lúdica pelo professor, na hora de expor o conteúdo proposto de acordo com a figura 27:

Figura 27



O TEOREMA DE PITÁGORAS

O filósofo e matemático grego Pitágoras, por volta do século VI a.C., fundou uma escola mística secreta, chamada Escola Pitagórica. Nela, a ciência era considerada um bem comum e todos pesquisavam e discutiam coletivamente. Por isso, as contribuições científicas conquistadas não possuíam autoria individual.

Para a formação de seu famoso teorema, é possível que Pitágoras e seus discípulos tenham se baseado nos conhecimentos geométricos dos egípcios e em mosaicos que apareciam com frequência em paredes das construções do Egito antigo.

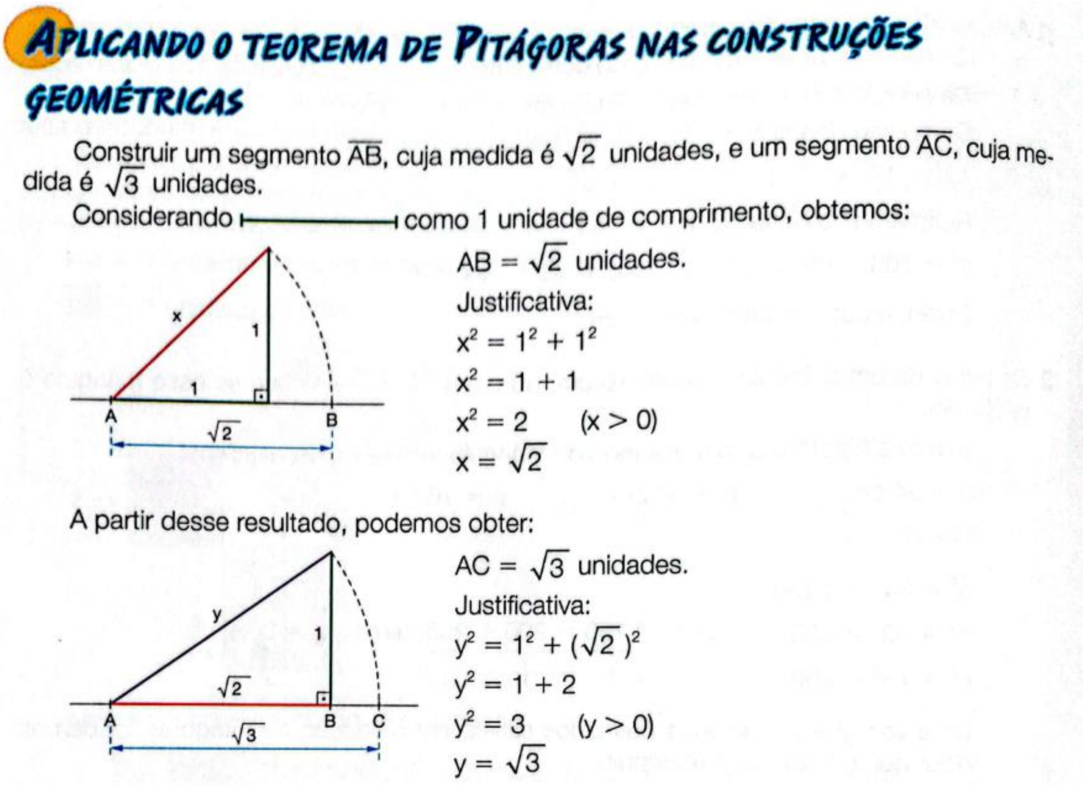
A figura abaixo reproduz um mosaico com vários triângulos retângulos coloridos de verde, quadrados amarelos construídos sobre a hipotenusa desses triângulos e quadrados rosa construídos sobre os catetos.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

Nos capítulos anteriores ao que os autores desenvolvem o teorema de Pitágoras no livro, são apresentados alguns conteúdos que serão utilizados como suporte para as demonstrações do teorema de Pitágoras. Sendo eles: Segmentos proporcionais dividido em cinco seções, Semelhança dividido em três seções. Em relação a edição de 1985, os autores alteraram a ordem dos conteúdos, “relações métricas no triângulo retângulo” & “relações trigonométricas no triângulo retângulo” invertendo assim o conceito de triângulo retângulo utilizado na edição de 1985. Em ambas as edições os autores abordam o conceito de área somente depois de expor o teorema de Pitágoras, mas este conceito, por se tratar de uma relação geométrica e algébrica, deveria ser abordado antes de apresentar o teorema.

Ao começar a apresentar as demonstrações do teorema de Pitágoras os autores expõem uma aplicação geométrica interessante, que aborda o conceito de números irracionais, conforme a figura 28.

Figura 28



APLICANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Construir um segmento $\overline{AB}$, cuja medida é $\sqrt{2}$ unidades, e um segmento $\overline{AC}$, cuja medida é $\sqrt{3}$ unidades.

Considerando ├──────┤ como 1 unidade de comprimento, obtemos:

$AB = \sqrt{2}$ unidades.

Justificativa:

$x^2 = 1^2 + 1^2$

$x^2 = 1 + 1$

$x^2 = 2 \quad (x > 0)$

$x = \sqrt{2}$

A partir desse resultado, podemos obter:

$AC = \sqrt{3}$ unidades.

Justificativa:

$y^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$

$y^2 = 1 + 2$

$y^2 = 3 \quad (y > 0)$

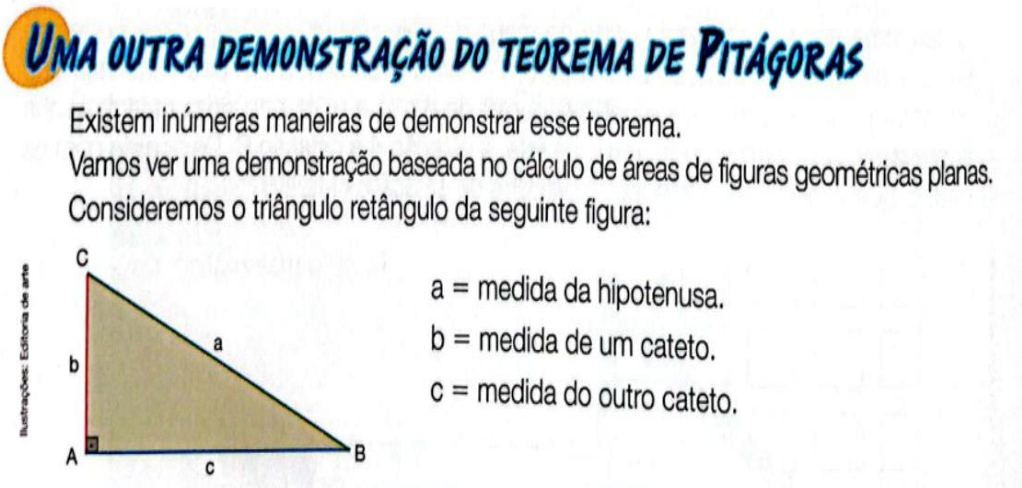
$y = \sqrt{3}$

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

Cabe salientar que os números irracionais incomodaram os seguidores de Pitágoras, chamados de pitagóricos, que acreditavam que o universo é composto essencialmente por números e que portanto, tudo poderia ser mensurável.

Para assim poder apresentar uma demonstração geométrica do teorema de Pitágoras de acordo com a seguintes figuras 29 e 30.

Figura 29



UMA OUTRA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Existem inúmeras maneiras de demonstrar esse teorema.

Vamos ver uma demonstração baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.

Consideremos o triângulo retângulo da seguinte figura:

a = medida da hipotenusa.

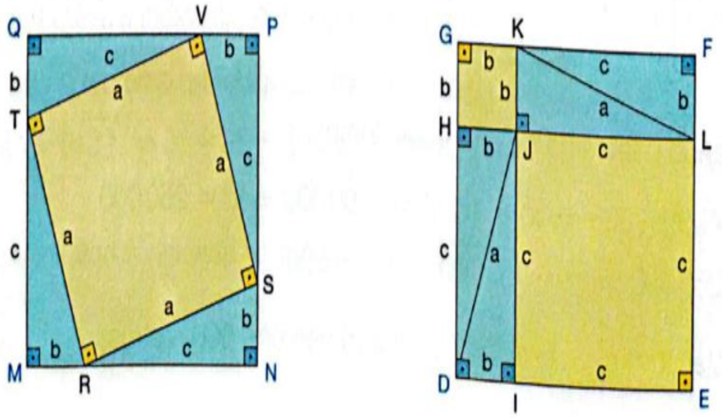
b = medida de um cateto.

c = medida do outro cateto.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

Figura 30

Observe, agora, os quadrados MNPQ e DEFG, que têm mesma área, já que o lado de cada quadrado mede (b + c).



A partir desses dois quadrados, temos:

- área do quadrado MNPQ = área do quadrado RSVT + (área do triângulo RNS) · 4.
- área do quadrado DEFG = área do quadrado IELJ + área do quadrado GHJK + (área do retângulo DIJH) · 2.
- área do quadrado RSVT = a^2.
- área do triângulo RNS = $\dfrac{b \cdot c}{2}$.
- área do quadrado IELJ = c^2.
- área do quadrado GHJK = b^2.
- área do retângulo DIJH = $b \cdot c$.

Como as áreas dos quadrados MNPQ e DEFG são iguais, podemos escrever:

$$a^2 + \left(\frac{bc}{\cancel{2}}\right) \cdot \overset{2}{\cancel{4}} = c^2 + b^2 + (bc) \cdot 2$$

$$a^2 + 2bc = c^2 + b^2 + 2bc$$

Cancelando 2bc, temos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

A demonstração algébrica do teorema de Pitágoras será feita mais adiante.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

Além disso, duas aplicações do teorema de Pitágoras muito importantes são estabelecidas, sendo elas as aplicações do teorema no cálculo da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero, de acordo com a figura 31

Figura 31

1ª aplicação: O teorema de Pitágoras no quadrado.

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida da diagonal e a medida do lado do quadrado.

No quadrado ABCD, ℓ é a medida do lado e *d*, a medida da diagonal.

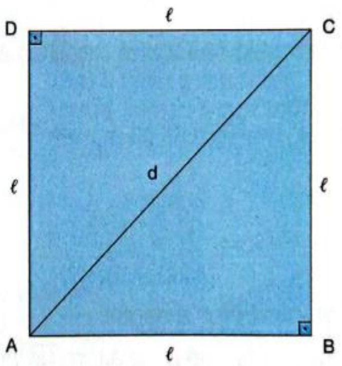
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, podemos escrever:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2 \ (\ell > 0)$$

$$d = \sqrt{2\ell^2}$$

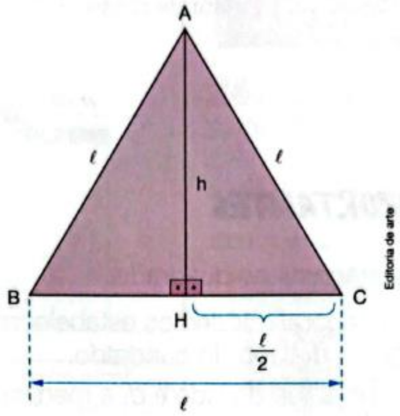
$$\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$



2ª aplicação: O teorema de Pitágoras no triângulo equilátero.

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida *h* da altura e a medida ℓ do lado do triângulo equilátero.

A figura abaixo é um triângulo equilátero, em que ℓ é a medida do lado e *h* é a medida da altura. Observe:



No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem; logo, o ponto *H* é ponto médio do lado $\overline{BC}$.

No triângulo retângulo AHC ($\hat{H}$ é reto), de acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

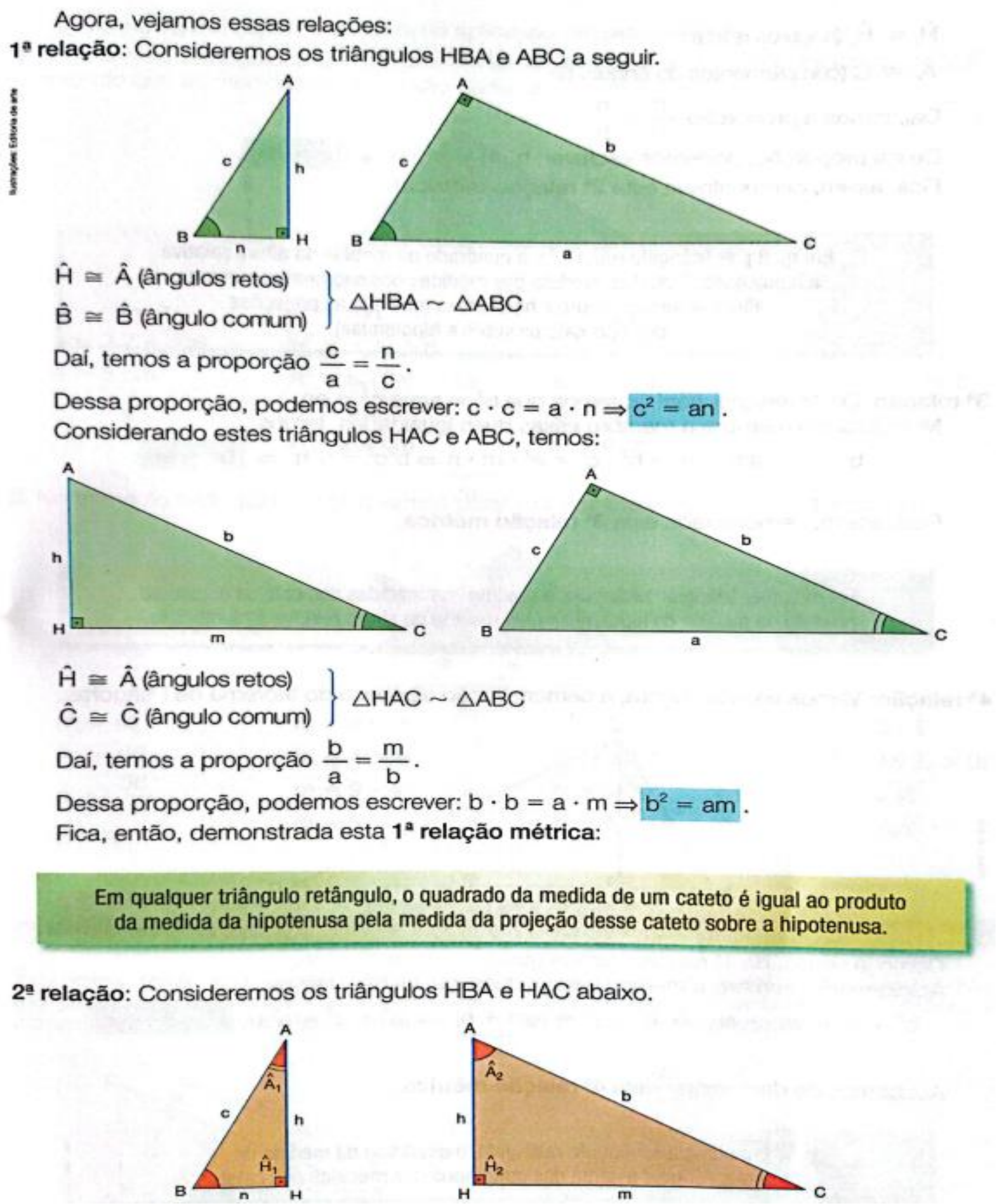
$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3\ell^2}}{\sqrt{4}} \ (\ell > 0) \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

A demonstração utilizando as relações métricas no triângulo retângulo, como na edição anterior do livro, também não expõem quais os critérios de semelhança de triângulos foram utilizados durante a demonstração, conforme seção 50 do livro reproduzida nas figuras a seguir.

Figura 32



Agora, vejamos essas relações:

1ª relação: Consideremos os triângulos HBA e ABC a seguir.

$\hat{H} \cong \hat{A}$ (ângulos retos)
$\hat{B} \cong \hat{B}$ (ângulo comum) $\Big\}$ $\triangle HBA \sim \triangle ABC$

Daí, temos a proporção $\dfrac{c}{a} = \dfrac{n}{c}$.

Dessa proporção, podemos escrever: $c \cdot c = a \cdot n \Rightarrow \boxed{c^2 = an}$.

Considerando estes triângulos HAC e ABC, temos:

$\hat{H} \cong \hat{A}$ (ângulos retos)
$\hat{C} \cong \hat{C}$ (ângulo comum) $\Big\}$ $\triangle HAC \sim \triangle ABC$

Daí, temos a proporção $\dfrac{b}{a} = \dfrac{m}{b}$.

Dessa proporção, podemos escrever: $b \cdot b = a \cdot m \Rightarrow \boxed{b^2 = am}$.

Fica, então, demonstrada esta **1ª relação métrica:**

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

2ª relação: Consideremos os triângulos HBA e HAC abaixo.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

Figura 33

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_1 \cong \hat{H}_2 \text{ (ângulos retos)}\\ \hat{A}_1 \cong \hat{C} \text{ (complementos do ângulo } \hat{B})\end{array}\right\} \Delta HBA \sim \Delta HAC$$

Daí, temos a proporção $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$.

Dessa proporção, podemos escrever: $h \cdot h = m \cdot n \Rightarrow \boxed{h^2 = mn}$.

Fica, assim, demonstrada esta **2ª relação métrica**:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que essa altura determina sobre a hipotenusa (que são as projeções dos dois catetos sobre a hipotenusa).

3ª relação: Da 1ª relação métrica, temos que $b^2 = am$ e $c^2 = an$.

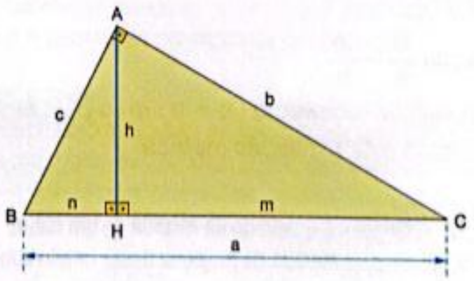
Multiplicando membro a membro essas duas igualdades, temos:

$$b^2 \cdot c^2 = am \cdot an \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{m \cdot n}_{h^2} \Rightarrow b^2c^2 = a^2h^2 \Rightarrow \boxed{bc = ah}.$$

Fica, assim, demonstrada esta **3ª relação métrica**:

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

4ª relação: Vamos verificar, agora, a demonstração algébrica do teorema de Pitágoras.



Como já vimos, da 1ª relação, temos que $b^2 = am$ e $c^2 = an$.

Adicionando membro a membro essas duas igualdades, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a\underbrace{(m + n)}_{a} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \text{ ou } \boxed{a^2 = b^2 + c^2}.$$

Acabamos de demonstrar esta **4ª relação métrica**:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2009).

Os exercícios nesta edição estão divididos em 24 questões, que exemplificamos a seguir:

1° - Aplicando o teorema de Pitágoras determine a medida x indicada em cada um dos triângulos retângulos. Com letras que vão de a até f.

2° - Dois exercícios somente com enunciado para o aluno desenhar a figura.

3° - Um exercício que apresenta cálculo de área para poder determinar a lateral do quadrado que coincide com a lateral do triângulo.

4°- E os demais exercícios todos apresentam situações problemas de diversas formas com figuras para poder desenvolver os problemas.

Ao final do capitulo os revisores trouxeram mais uma bateria de exercícios envolvendo os conhecimentos passados pelo professor como uma verificação de aprendizado. Com 14 atividades propostas.

No final do livro do professor, ele apresenta alguns temas interessantes para ser pesquisado pelo professor a nível de enriquecimento do seu conhecimento matemático e pedagógico mostrando a importância da resolução de problemas na sua forma pedagógica no processo de ensino-aprendizagem tanto da matemática quanto de outras disciplinas tendo em vista que o ser humano é desafiado todos os dias a resolver problemas.

O manual do professor apresenta uma outra seção voltada para o planejamento de aulas com o seguinte tema “Objetivos e Orientações Metodológicas”, dando sugestões para o desenvolvimento das atividades propostas.

6.3 ANÁLISE DO 3° LIVRO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA EDIÇÃO 2018

No livro a conquista da matemática com sua edição escrita no ano de 2018 e utilizado em algumas escolas públicas de ensino fundamental do estado de Rondônia em especial na cidade de Porto Velho, o conteúdo abordando o teorema de Pitágoras está situado na unidade 7 capitulo 1, dentro do conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência, sendo que nas unidades 4 e 5, o autor que coordenou a reedição do livro começa a desenvolver os conteúdos que envolvem geometria.

A abordagem do conteúdo começa com a explanação de fatos ligados à história do triângulo, desenvolvido pelos egípcios, bem como a vida de Pitágoras, conforme a figura 34, este enfoque atende às orientações dos PCN’s e da BNCC.

Figura 34

O triângulo retângulo dos egípcios

A construção de pirâmides de base quadrada é uma das muitas aplicações do conhecimento geométrico dos antigos egípcios, que usavam um processo prático para obter "cantos" retos (ângulos retos).

Com o auxílio de uma corda com 12 nós, os egípcios parecem ter construído um triângulo retângulo particular para obter "cantos" em ângulos retos. Nesse triângulo, cujos lados medem 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades de comprimento, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo reto.

O triângulo retângulo e um grego famoso

ALBUM/AKG/NORTH WIND PICTURE ARCHIVES/FOTOARENA

Gravura de Pitágoras.

O filósofo e matemático grego Pitágoras nasceu, ao que parece, por volta de 572 a.C., na ilha egeia de Samos. A ele é atribuída a descoberta do teorema que leva seu nome, embora esse teorema tenha sido conhecido pelos babilônios, mais de um milênio antes. Acredita-se, porém, que a primeira demonstração geral desse teorema possa ter sido feita por Pitágoras.

Pitágoras foi o fundador da famosa Escola Pitagórica, que, além de ser um centro de estudo de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais, era uma irmandade unida por ritos e cerimônias secretas.

Como os fundamentos dessa escola eram estritamente orais, e todos os conhecimentos construídos eram atribuídos ao fundador, é difícil saber ao certo quais descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da confraria.

Para a demonstração do famoso teorema, é possível que Pitágoras e seus discípulos tenham se baseado nos conhecimentos geométricos dos egípcios e em mosaicos que eram vistos com frequência em paredes das construções do Egito antigo.

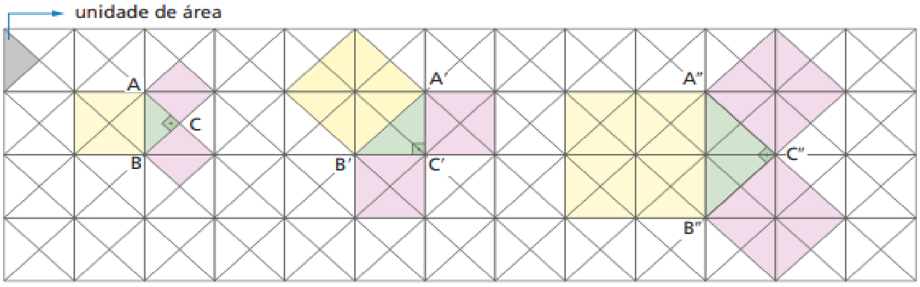
Mosaicos compostos de triângulos retângulos, parecidos com este abaixo, presentes em culturas mais antigas, levaram o ser humano a perceber importantes relações na Geometria.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2018).

Para iniciar o desenvolvimento do raciocínio a ser utilizado durante a abordagem das demonstrações do teorema de Pitágoras, os autores mostram um mosaico desenvolvido em uma malha quadriculada, onde cada quadrado tem traçadas as suas diagonais para poder deduzir os fatores que relacionam as áreas dos quadrados desenvolvidos com a medida dos lados do triângulo utilizado na malha quadriculada. Conforme a figura 35.

Figura 35

A figura abaixo reproduz um mosaico com triângulos retângulos coloridos de verde, quadrados amarelos construídos sobre a hipotenusa desses triângulos e quadrados cor-de-rosa construídos sobre os catetos.



Considerando a unidade de área dada na ilustração, podemos construir o seguinte quadro:

	Triângulo ABC	Triângulo A′B′C′	Triângulo A″B″C″
Área do quadrado construído sobre a hipotenusa	4	8	16
Área do quadrado construído sobre um cateto	2	4	8
Área do quadrado construído sobre o outro cateto	2	4	8

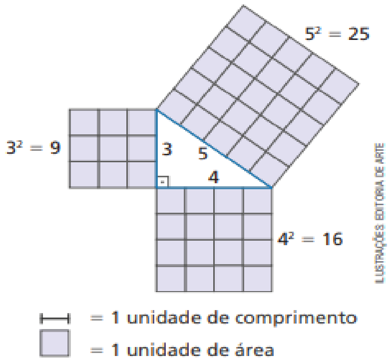
Observando que **4** = **2** + **2**; **8** = **4** + **4** e **16** = **8** + **8**, temos exemplos de uma relação válida para esses triângulos:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Essa descoberta estava inicialmente restrita a um triângulo retângulo particular: o triângulo retângulo isósceles.

Porém, estudos realizados posteriormente mostraram que a relação métrica descoberta era válida para todos os triângulos retângulos.

Tomando, por exemplo, o triângulo retângulo particular dos egípcios e construindo quadrados sobre os lados desse triângulo, podemos obter a figura ao lado, que nos permite estabelecer uma relação entre as medidas dos lados desse triângulo retângulo escaleno.



$25 = 16 + 9$ ou $5^2 = 4^2 + 3^2$

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2018).

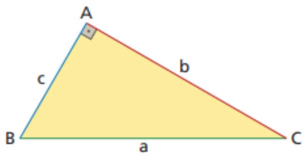
Para então enunciar o teorema de Pitágoras como podemos observar a seguir na figura:

Figura 36

Podemos, então, enunciar o **teorema de Pitágoras**:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

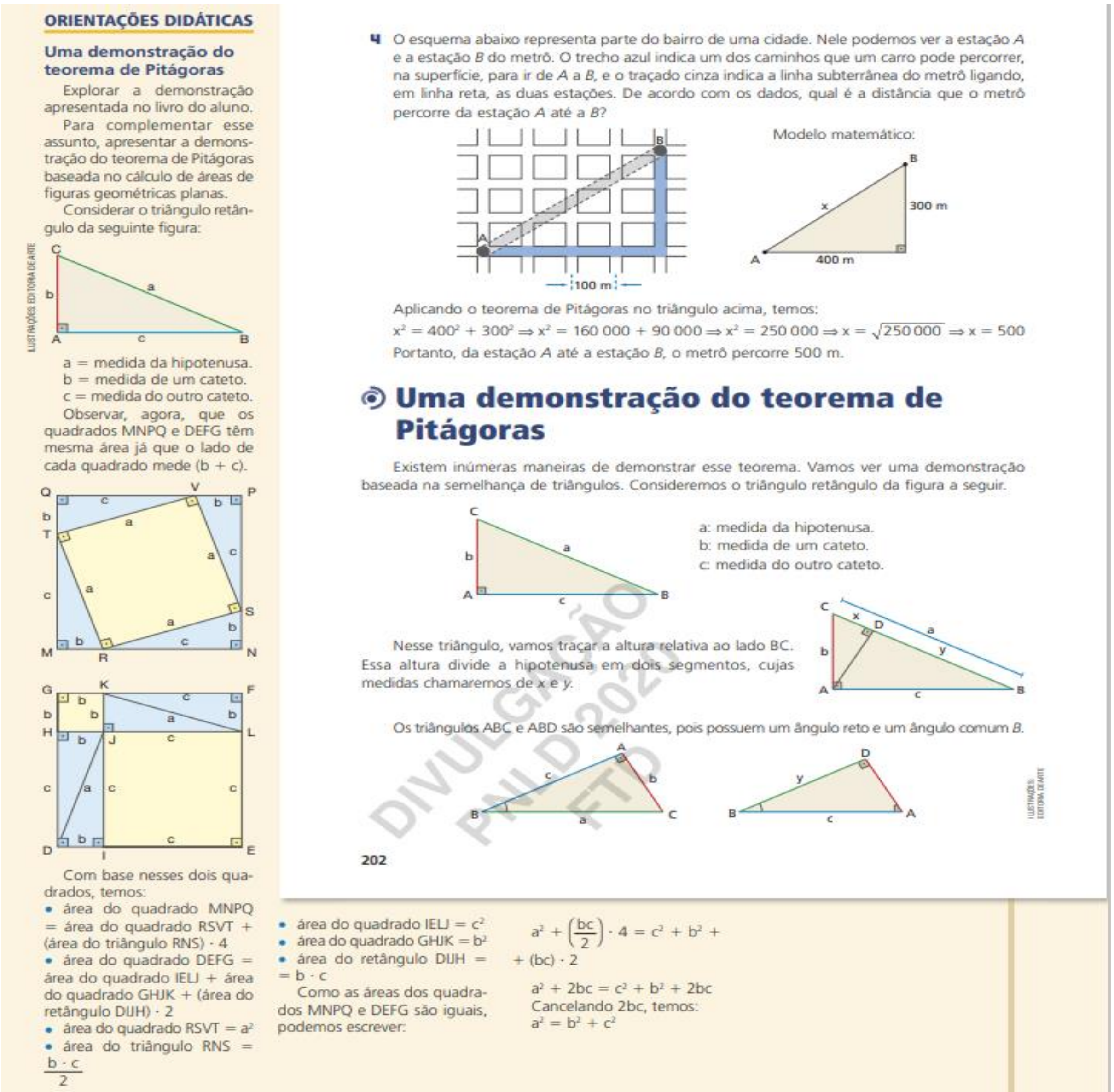
$$a^2 = b^2 + c^2$$



Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2018).

O livro mostra alguns exemplos de aplicações algébricas do teorema de Pitágoras, para só então apresentar a primeira demonstração, que é desenvolvida pelo método de semelhança de triângulos, tratando-se de um conteúdo apresentado na unidade 5 do livro. Essa demonstração é apresentada em detalhes em um capítulo anterior desta dissertação, onde é chamada de "demonstração clássica". Como o livro analisado é do professor, este apresenta algumas orientações didáticas para o desenvolvimento do conteúdo como um suporte para o professor, oferecendo uma outra demonstração do teorema de Pitágoras, que pode ser desenvolvida de forma lúdica pelo professor com os alunos, evitando a forma algébrica como é proposta pelos autores no livro do aluno, de acordo com as figuras 37 e 38.

Figura 37



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Uma demonstração do teorema de Pitágoras

Explorar a demonstração apresentada no livro do aluno.

Para complementar esse assunto, apresentar a demonstração do teorema de Pitágoras baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.

Considerar o triângulo retângulo da seguinte figura:

a = medida da hipotenusa.
b = medida de um cateto.
c = medida do outro cateto.

Observar, agora, que os quadrados MNPQ e DEFG têm mesma área já que o lado de cada quadrado mede (b + c).

Com base nesses dois quadrados, temos:

- área do quadrado MNPQ = área do quadrado RSVT + (área do triângulo RNS) · 4
- área do quadrado DEFG = área do quadrado IELJ + área do quadrado GHJK + (área do retângulo DIJH) · 2
- área do quadrado RSVT = a^2
- área do triângulo RNS = $\frac{b \cdot c}{2}$
- área do quadrado IELJ = c^2
- área do quadrado GHJK = b^2
- área do retângulo DIJH = $= b \cdot c$

Como as áreas dos quadrados MNPQ e DEFG são iguais, podemos escrever:

$$a^2 + \left(\frac{bc}{2}\right) \cdot 4 = c^2 + b^2 + (bc) \cdot 2$$

$$a^2 + 2bc = c^2 + b^2 + 2bc$$

Cancelando 2bc, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

4 O esquema abaixo representa parte do bairro de uma cidade. Nele podemos ver a estação *A* e a estação *B* do metrô. O trecho azul indica um dos caminhos que um carro pode percorrer, na superfície, para ir de *A* a *B*, e o traçado cinza indica a linha subterrânea do metrô ligando, em linha reta, as duas estações. De acordo com os dados, qual é a distância que o metrô percorre da estação *A* até a *B*?

Modelo matemático:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo acima, temos:

$x^2 = 400^2 + 300^2 \Rightarrow x^2 = 160\,000 + 90\,000 \Rightarrow x^2 = 250\,000 \Rightarrow x = \sqrt{250\,000} \Rightarrow x = 500$

Portanto, da estação *A* até a estação *B*, o metrô percorre 500 m.

Uma demonstração do teorema de Pitágoras

Existem inúmeras maneiras de demonstrar esse teorema. Vamos ver uma demonstração baseada na semelhança de triângulos. Consideremos o triângulo retângulo da figura a seguir.

a: medida da hipotenusa.
b: medida de um cateto.
c: medida do outro cateto.

Nesse triângulo, vamos traçar a altura relativa ao lado BC. Essa altura divide a hipotenusa em dois segmentos, cujas medidas chamaremos de *x* e *y*.

Os triângulos ABC e ABD são semelhantes, pois possuem um ângulo reto e um ângulo comum *B*.

202

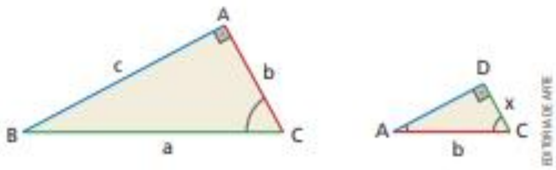
Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2018).

Figura 38

Assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{y} = \frac{a}{c} \Rightarrow ya = c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{a}$$

Analogamente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes, pois possuem um ângulo reto e um ângulo comum C.



Assim, podemos escrever:

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow xa = b^2 \Rightarrow x = \frac{b^2}{a}$$

Como $a = x + y$, podemos escrever:

$$a = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Veja no material audiovisual o vídeo sobre o teorema de Pitágoras.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2018).

Figura 39

PARA QUEM QUER MAIS

A Matemática chinesa e Bhaskara

Datar o começo da história documentada da Matemática chinesa não é fácil. Estimativas quanto à data de *Chou Pei Suan Ching*, considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos. Alguns consideram esse registro como uma boa exposição da Matemática chinesa de cerca de 1200 a.C., mas outros colocam a obra no primeiro século de nossa era.

Quase tão antigo quanto essa obra, e talvez o mais influente livro chinês de Matemática, foi o *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática*. Esse livro contém 246 problemas, e a maior parte deles envolve situações práticas.

O famoso problema do "bambu quebrado" apresenta o seguinte texto:

> "Um bambu com 1 *zhang* de altura partiu-se, e a parte de cima tocou o chão a 3 *chih* da base do bambu. Qual é a altura da quebra? (Nota: 1 *zhang* = 10 *chih*)".

No século XII, o matemático hindu Bhaskara publicou o mesmo problema assim:

> "Se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado?".

- Que tal você resolver esse problema no caderno? 12 cúbitos

Informações obtidas em: BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996. p. 143-144; 162.

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2018).

Logo após essa demonstração, o autor apresenta uma lista de 14 exercícios, onde 9 exercícios são do tipo “determine a medida desconhecida”, ora apresentando figuras ora com um pequeno texto. Os outros 5 exercícios estão mais elaborados, com aplicações que buscam relacionar alguma situação cotidiana.

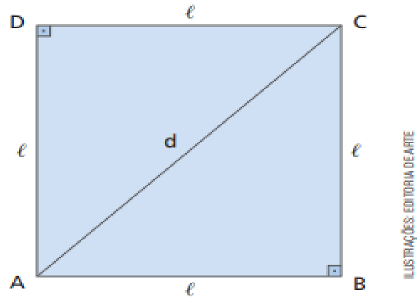
Na continuação do conteúdo, o livro já apresenta duas aplicações do teorema de Pitágoras, que aparecem em todos os livros analisados. Como podemos observar na figura a seguir.

Figura 40

Aplicando o teorema de Pitágoras no quadrado

Aplicando o teorema de Pitágoras no quadrado, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida da diagonal e a medida do lado do quadrado. No quadrado ABCD, ℓ é a medida do lado, e *d*, a medida da diagonal. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, podemos escrever:

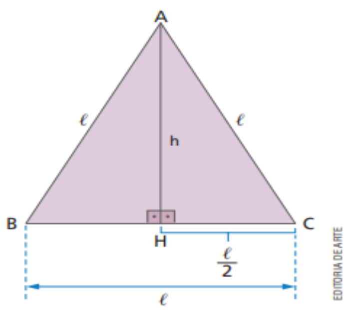
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2 \ (\ell > 0)$$
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo equilátero

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo equilátero, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida *h* da altura e a medida ℓ do lado do triângulo.

A figura abaixo é um triângulo equilátero, em que ℓ é a medida do lado, e *h* é a medida da altura.



No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem; logo, o ponto *H* é ponto médio do lado $\overline{BC}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHC ($\hat{H}$ é reto), temos:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \ (\ell > 0) \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Fonte: JÚNIOR & CASTRUCCI (2018).

Novamente, apresenta-se mais uma lista de exercícios com 13 atividades que aplicam somente esses dois conceitos apresentados acima.

Neste livro, o autor, que coordenou a reedição, muda totalmente a ordem de apresentação do conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo, pois nos outros dois livros observados temos que o teorema de Pitágoras é o último conteúdo abordado nas unidades que são apresentados, já que é uma relação algébrica desenvolvida através dos triângulos semelhantes e a consequência da soma de algumas relações matemáticas.

Por último, descrevo a seguinte reflexão: em minha prática docente na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Juscelino Kubitschek de Oliveira, no município de Porto Velho - RO o livro didático A conquista da matemática, edição de 2018, vem sendo utilizado pelos professores como referência para o ensino da matemática desde o ano de 2020. Ao lecionar o conteúdo do teorema de Pitágoras costumo ouvir o questionamento dos alunos em tom de brincadeira: “professor onde eu vou utilizar o teorema de Pitágoras na minha vida?” ou ainda “para que serve esse teorema?” E como resposta, também em tom de brincadeira, ilustro algumas situações em que este famoso resultado é utilizado, como por exemplo, na construção civil, pois se você precisar esquadrejar uma casa, com o teorema de Pitágoras não é necessário utilizar um esquadro ou outra ferramenta, bastando construir um triângulo retângulo com as medidas de 30 cm, 40 cm e 50 cm.

Estes questionamentos dos alunos se dão, em parte, por conta das excessivas manipulações algébricas que usualmente aparecem no livro didático, causando um descontentamento com o teorema a ser estudado. Assim, percebo a necessidade de outras abordagens para o ensino do teorema de Pitágoras, tais como atividades com manipulações utilizando recortes de materiais de baixo custo, que o autor poderia ter considerado incluir no livro didático.

Por outro lado, observo que alguns colegas professores já deixaram de fazer questionamentos deste tipo, limitando-se a empregar os recursos oferecidos pelo livro didático, o que pode reduzir a qualidade do processo de ensino aprendizagem do teorema de Pitágoras e dos demais tópicos apresentados no livro.

6.4 ANÁLISE DO 4° LIVRO PROJETO TELÁRIS

No livro do autor Luiz Roberto Dante da coleção “Projeto Teláris” o teorema de Pitágoras está na situado no capitulo 6, dentro do conteúdo “relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência” Mas antes de iniciar o conteúdo propriamente dito, o autor apresenta alguns fatos históricos, de acordo com a seguinte figura:

Figura 41

Fonte: DANTE (2015).

Com isso, o autor busca mostrar ao leitor que a geometria é estudada e desenvolvida durante um longo período da história, instigando o estudante a entender a importância da geometria para a humanidade. Em dois capítulos anteriores, o autor desenvolve os conteúdos de geometria com alguns conceitos geométricos que, posteriormente, darão suporte para a demonstração utilizada por ele do teorema de Pitágoras. Que no capítulo algumas demonstrações do teorema de Pitágoras desta dissertação esta denominada como demonstração por semelhança de triângulos. Onde o autor denomina como relação ou teorema de Pitágoras, descrevendo o seu enunciado de acordo com a figura.

Figura 42.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (b e c):

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

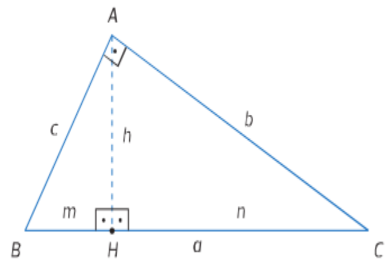
Fonte: DANTE (2015).

Aqui o desenho do triângulo é explorado de uma maneira distinta da forma como foi exposto no capítulo algumas demonstrações do teorema de Pitágoras nesta dissertação como podemos observar nas figuras 43 e 44.

Figura 43

Na história da Matemática, muitas foram as demonstrações do teorema de Pitágoras. Vejamos uma delas, baseada na semelhança de triângulos.

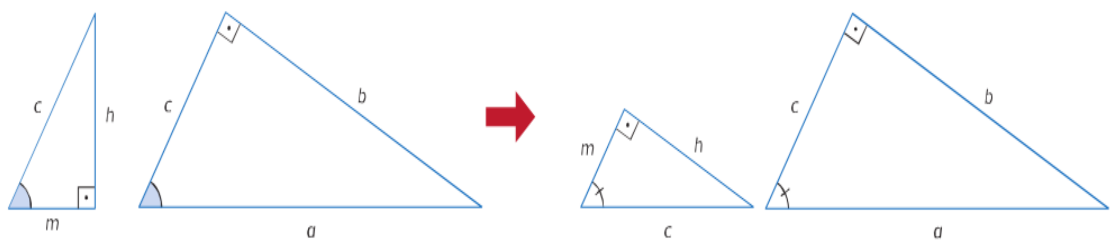
Consideremos o seguinte triângulo ABC, retângulo em A, com a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa.



Nele, temos: $a = m + n$ (1)

Vamos considerar os triângulos retângulos HBA e ABC.

Colocando esses dois triângulos na mesma posição, podemos perceber melhor os ângulos e os lados correspondentes (lados homólogos).



Fonte: DANTE (2015).

Figura 44

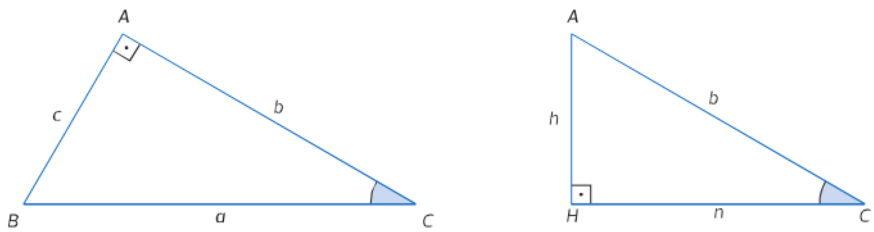
Os dois triângulos têm um ângulo reto (são triângulos retângulos) e têm o ângulo $\hat{B}$ comum; logo, pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

Se os triângulos são semelhantes, os lados homólogos têm medidas proporcionais, o que nos permite escrever:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$

Dessas proporções, tiramos a relação: $c^2 = am$ (2)

Vamos, agora, considerar os triângulos ABC e HAC da figura inicial:



Esses dois triângulos têm um ângulo reto, e o ângulo $\hat{C}$ é comum; portanto, são semelhantes: $\triangle ABC \sim \triangle HAC$.

Como os lados homólogos são proporcionais, escrevemos as proporções e delas obtemos as relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$

E delas obtemos: $b^2 = an$ (3)

Adicionando-se os dois membros das igualdades demonstradas, (3) e (2), temos:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = an \\ c^2 = am \end{array}\right\} b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $a = m + n$ (1), temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Essa é uma das demonstrações do teorema de Pitágoras, mas há muitas outras maneiras de prová-lo.

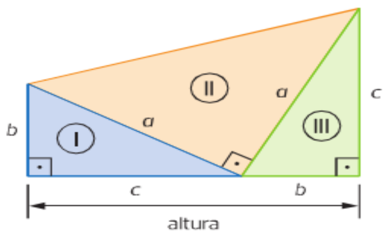
Fonte: DANTE (2015).

Ao final da demonstração, o autor apresenta uma lista de 9 exercícios com algumas aplicações da relação de Pitágoras, onde alguns itens são do tipo “determine a medida desconhecida” geralmente acompanhados de figuras, pois todos exercícios são apenas aplicações do teorema de Pitágoras de forma algébrica.

Mas um fator interessante é que o autor apresenta outras demonstrações do teorema de Pitágoras a título de curiosidade, tais como: as quais são apresentadas nesta dissertação no capítulo dedicado às demonstrações do teorema de Pitágoras. Este é o único livro analisado que mostra duas demonstrações de forma diferente dos demais. Conforme as figuras 45, 46 e 47.

Figura 45

1ª) Vamos determinar a área da região limitada pelo trapézio abaixo de duas maneiras: pela fórmula $A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$ e pelo cálculo das áreas das três regiões triangulares.
Esta demonstração é atribuída a James Garfield (1831–1881), na época, congressista norte-americano e, mais tarde, 20º presidente dos Estados Unidos.



- $A_{\text{região trapezoidal}} = \dfrac{(b+c)\cdot(b+c)}{2} =$
  $= \dfrac{b^2+2bc+c^2}{2}$ 1

- $A_{\text{região trapezoidal}} = A_{\text{região triangular I}} + A_{\text{região triangular II}} +$
  $+ A_{\text{região triangular III}}$

- $A_{\text{região trapezoidal}} = \dfrac{cb}{2} + \dfrac{aa}{2} + \dfrac{cb}{2} =$
  $= \dfrac{2bc+a^2}{2}$ 2

Igualando os resultados de 2 e 1, temos:

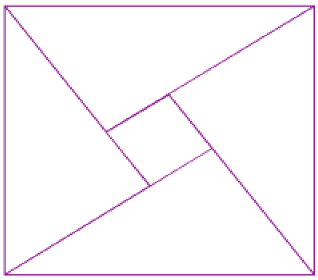
$$\frac{2bc+a^2}{2} = \frac{b^2+2bc+c^2}{2} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Fonte: DANTE (2015).

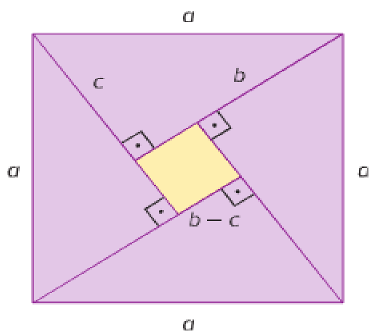
A outra demonstração que o autor desenvolve também aparece no capítulo da dissertação dedicado às demonstrações do teorema de Pitágoras e é atribuída ao matemático Bhaskara. Esta prova pode ser desenvolvida facilmente, utilizando recortes com folhas de papel ou outros materiais acessíveis aos estudantes. Assim, de forma prática e lúdica, o conteúdo pode ser desenvolvido de forma mais prazerosa no processo ensino aprendizagem.

Figura 46

2ª) Uma demonstração bastante curiosa do teorema de Pitágoras foi apresentada pelo matemático hindu Bháskara (1114-1185), que elaborou a figura representada a seguir e escreveu embaixo "Aqui está". Um verdadeiro enigma que a Álgebra nos ajuda a solucionar.



Traçamos 4 triângulos retângulos com hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c. A área da região quadrada maior (a^2) é igual à soma das áreas das 4 regiões triangulares $\left(4 \cdot \frac{bc}{2}\right)$ com a área da região quadrada menor $(b - c)^2$.



Assim:

$$a^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + (b - c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \cancel{2bc} + b^2 - \cancel{2bc} + c^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

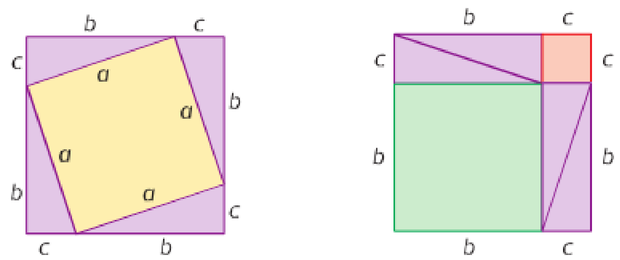
Fonte: DANTE (2015).

A demonstração a seguir, é uma das mais utilizadas nos livros didáticos, como já discutido e apresentado anteriormente. Embora possa ser explorada de forma pratica, utilizando recortes por exemplo, em geral é muito explorada de forma apenas algébrica.

Figura 47

3ª) Uma terceira demonstração é obtida comparando-se áreas (segundo os historiadores, a demonstração de Pitágoras deve ter sido uma demonstração geométrica semelhante à que segue).
As duas regiões quadradas têm lados $(b + c)$. Logo, têm a mesma área. Retirando das duas as quatro regiões triangulares congruentes, o que sobra na primeira (a^2) é igual ao que sobra na segunda $(b^2 + c^2)$. Então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Fonte: DANTE (2015).

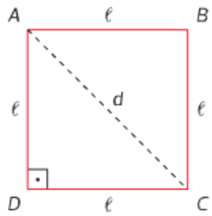
Esta é uma demonstração que aparece em quase todos os livros didáticos do ensino fundamental. Os autores e editoras poderiam considerar outras demonstrações nos livros didáticos, que pudessem facilitar o seu entendimento, valorizando aspectos geométricos, ou intuitivos nestas demonstrações, por exemplo. Existem inúmeras demonstrações interessantes do teorema de Pitágoras. O professor norte-americano Elisha Scott Loomis apresentou a catalogação de 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras no ano de 1940, sendo elas divididas em algébricas e geométricas.

Depois de apresentado alguns exercícios que trabalham somente o critério de relações métricas no triangulo retângulo, o autor mostra algumas aplicações importantes do teorema de Pitágoras como a diagonal de um quadrado e também uma aplicação no cálculo da altura de um triângulo equilátero de acordo com a figura 48.

Figura 48

Diagonal de um quadrado

Consideremos o quadrado *ABCD* representado abaixo, cujo lado mede ℓ.



Vamos determinar a medida (d) da diagonal desse quadrado em função de ℓ, com d e ℓ na mesma unidade de medida.

O $\triangle ADC$ é retângulo em D. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2$$

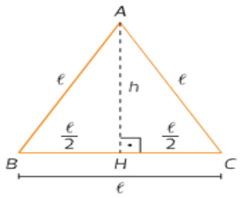
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

Portanto, $\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$.

Altura de um triângulo equilátero

Consideremos o triângulo equilátero *ABC* representado abaixo, cujo lado mede ℓ.



Vamos determinar a medida (h) da altura desse triângulo em função de ℓ, com h e ℓ na mesma unidade de medida.

O triângulo *ABH* é retângulo em H. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

Portanto, $h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$ ou $\boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$ ou $\boxed{h = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{3}}$.

Fonte: DANTE (2015).

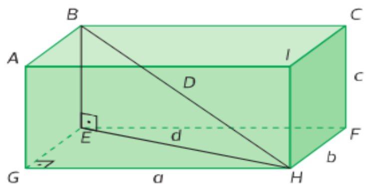
Sendo exibido novamente uma lista de exercícios com algumas aplicações da relação de Pitágoras.

Um fato interessante que o autor aborda é o cálculo da diagonal de um paralelepípedo através da utilização do teorema de Pitágoras. Uma generalização deste resultado é exposta no capítulo anterior desta dissertação, que apresenta as demonstrações do teorema de Pitágoras.

Figura 49

Diagonal de um bloco retangular

Consideremos um bloco retangular cujas dimensões medem a, b e c e cuja diagonal de uma face mede d; considere também que a diagonal do bloco retangular mede D.



O $\triangle BEH$ é retângulo em E, e sua hipotenusa é $\overline{BH}$. Para calcular D (medida de $\overline{BH}$), precisamos conhecer antes o valor de d (medida da hipotenusa do $\triangle EGH$, retângulo em G).

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (1) \qquad\qquad D^2 = d^2 + c^2 \quad (2)$$

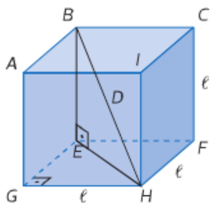
Substituindo (1) em (2), temos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Caso particular: diagonal do cubo

Como o cubo é um caso particular do bloco retangular em que $a = b = c = \ell$, a fórmula fica:

$D = \sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} = \sqrt{3\ell^2} = \ell\sqrt{3}$, ou seja: $\boxed{D = \ell\sqrt{3}}$



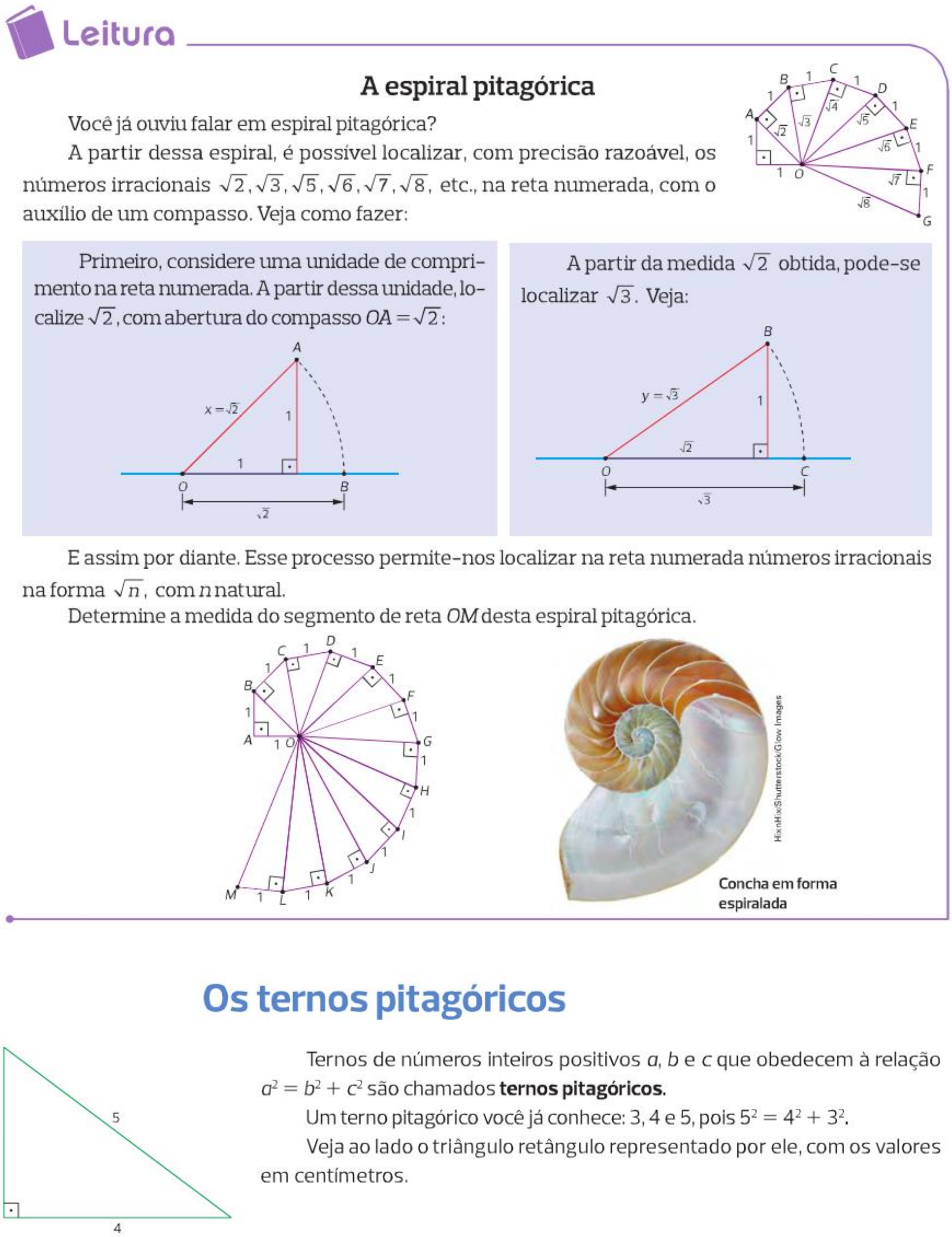
Fonte: DANTE (2015).

É muito importante observar que o autor se preocupa em apresentar diversos fatos curiosos que envolvem o uso algébrico do teorema de Pitágoras como podemos observar nas figuras acima.

Em seguida, o autor apresenta uma nova lista de 14 exercícios com diversas aplicações do teorema de Pitágoras na sua forma algébrica.

Duas novas curiosidades algébricas relacionadas ao uso do teorema de Pitágoras também são mostradas, conforme a figura abaixo.

Figura 50



Leitura

A espiral pitagórica

Você já ouviu falar em espiral pitagórica?

A partir dessa espiral, é possível localizar, com precisão razoável, os números irracionais $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$, etc., na reta numerada, com o auxílio de um compasso. Veja como fazer:

Primeiro, considere uma unidade de comprimento na reta numerada. A partir dessa unidade, localize $\sqrt{2}$, com abertura do compasso $OA = \sqrt{2}$:

A partir da medida $\sqrt{2}$ obtida, pode-se localizar $\sqrt{3}$. Veja:

E assim por diante. Esse processo permite-nos localizar na reta numerada números irracionais na forma $\sqrt{n}$, com n natural.

Determine a medida do segmento de reta OM desta espiral pitagórica.

Concha em forma espiralada

Os ternos pitagóricos

Ternos de números inteiros positivos a, b e c que obedecem à relação $a^2 = b^2 + c^2$ são chamados **ternos pitagóricos**.

Um terno pitagórico você já conhece: 3, 4 e 5, pois $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Veja ao lado o triângulo retângulo representado por ele, com os valores em centímetros.

Fonte: DANTE (2015).

Apresentando até fatos históricos relacionados ao mesmo: como podemos observar na figura 51.

Figura 51

Leitura

Os babilônios já conheciam os ternos pitagóricos

Os escribas babilônios encheram suas tabuinhas de argila com tabelas impressionantes de sequências de ternos exibindo a relação de Pitágoras. Eles registraram ternos como 3, 4, 5 ou 5, 12, 13, mas também outros como 3 456, 3 367, 4 825.

São pequenas as chances de se obter um terno que funcione, verificando três números ao acaso. Por exemplo, nos primeiros doze números 1, 2, 3, ..., 12, há centenas de maneiras de escolher ternos diferentes; de todos eles, somente os ternos 3, 4, 5 e 6, 8, 10 satisfazem o teorema de Pitágoras.

A menos que os babilônios tenham empregado um exército de calculadores, que passaram toda a sua carreira fazendo tais cálculos, podemos concluir que eles conheciam, pelo menos, o suficiente da teoria dos números para gerar esses ternos.

Fonte: MLODINOW, Leonard. *A janela de Euclides*. 2. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

- Descubra mais ternos pitagóricos. Desafie seus colegas para saber quem consegue descobrir um maior número de ternos. Vale usar calculadora.

Fonte: DANTE (2015).

O autor finaliza o capitulo com a apresentação de mais 5 exercícios que contextualizam a aplicação do teorema de Pitágoras de forma interdisciplinar como podemos observar na figura seguinte com a seleção de uma das questões de acordo coma as figuras 52 e 53.

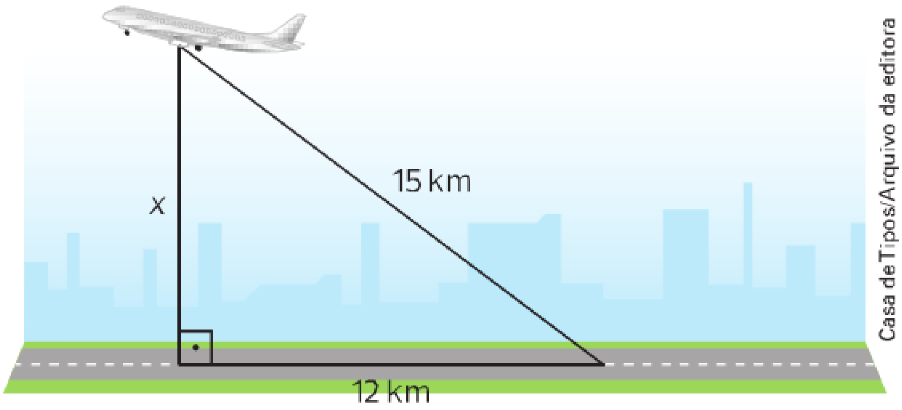
Podemos observar que este livro é bem atual, e atende as orientações do Ministério da Educação, dando suporte e dicas didáticas orientando os professores ao longo da exposição dos conteúdos.

Figura 52

A aviação é uma atividade humana que utiliza amplamente conhecimentos matemáticos, abrangendo operações numéricas, Álgebra, Geometria, entre outros assuntos.
Um conhecimento extremamente importante na aviação é o teorema de Pitágoras.
Ele é utilizado, por exemplo, pelo GPS (*Global Positioning System*, ou Sistema de Posicionamento Global) para determinar a altitude do avião em relação ao solo e sua distância em relação a determinados pontos da superfície terrestre.
Na aviação, a altitude dos aviões geralmente é medida em pés. Um pé corresponde a 30,48 cm.
Sabendo disso, considere a seguinte situação: um avião decolou do aeroporto sob um ângulo de 45°, perfazendo uma distância em linha reta de 15 km a partir da cabeceira da pista. A distância terrestre da cabeceira da pista até o ponto no solo imediatamente abaixo do avião é de 12 km, como mostra a figura abaixo. Qual era sua altitude nesse momento, em quilômetros? E em pés?

Fonte: DANTE (2015).

Figura 53



Fonte: DANTE (2015).

6.5 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM DEMONSTRAÇÕES MANIPULAVEIS

Ao desenvolver um estudo de como o teorema de Pitágoras está sendo explorado durante um período aproximado de 40 anos, nos livros didáticos disponibilizados pelo PNLD, gerou-se o interesse em desenvolver uma sequência didática com a finalidade de tornar prazeroso o processo de ensino aprendizagem do teorema de Pitágoras aos estudantes e auxiliar o docente no estimulo dos mesmos. Para isso apresento no apêndice uma sequência didática com os seguintes objetivos:

- instigar o lado investigativo dos estudantes através da aplicação de um questionário inicial;
- explorar o teorema de Pitágoras de forma geométrica e algébrica com algumas demonstrações;
- avaliar o êxito do aprendizado desenvolvido utilizando um questionário final com abordagens distintas.

A sequência didática utiliza demonstrações manipuláveis que podem ser desenvolvidas com recortes de materiais tais como: folha de papel sulfite, cartolinas ou outros materiais de fácil acesso por parte dos professores e estudantes.

Cabe evidenciar que esta sequência didática não foi aplicada com os estudantes dos 9° anos. A aplicação, aprimoramento e desenvolvimento desta sequência didática constituem objetivos futuros de pesquisa em escolas públicas do município de Porto Velho-RO.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar um estudo detalhado das demonstrações desenvolvidas nos livros didáticos analisados do 9° ano, e considerando a grande quantidade de aplicações algébricas apresentadas, observamos que, geralmente, as demonstrações são as mesmas utilizadas desde o início da década de 1980. Notamos que o professor norte-americano Elisha Scott Loomis catalogou no ano de 1940, um total de 370 demonstrações do teorema de Pitágoras, dividindo-as em demonstrações algébricas e geométricas.

O livro A Conquista da matemática vem sendo utilizado desde 1985 como opção de livro didático no estado de Rondônia, em especial no município de Porto Velho. Mesmo em suas reedições nos anos de 2009 e 2018, entendemos que o autor não apresenta uma demonstração do teorema de Pitágoras que possa ser entendida e aplicada de forma prática pelos estudantes do 9° ano do ensino fundamental.

De fato, os resultados apresentados nestes livros, com relação ao teorema de Pitágoras, são os mesmos desde a edição de 1985, sendo acrescentadas na edição do livro de 2009, apenas algumas orientações pedagógicas para os professores, e fatos relacionados a história da matemática apresentados em pequenos textos relacionados à vida de Pitágoras e a algumas civilizações que também contribuíram para o desenvolvimento de resultados relacionados ao teorema de Pitágoras.

Os exercícios que acompanham a discussão teórica, pouco exploram a parte geométrica do resultado, sendo maciçamente explorada a forma algébrica, pois as demonstrações e resultados do livro A Conquista da matemática são abordadas totalmente de forma algébrica pelos autores. Embora a demonstração utilize quadrados e triângulos, sendo, portanto, aparentemente geométrica, ela é mais compreensível aos estudantes de forma algébrica, devido à ênfase das manipulações algébricas realizadas para se chegar ao resultado pretendido.

Por outro lado, verifica-se no cotidiano escolar, que os estudantes muitas vezes apresentam baixo entendimento, compreensão e exploração do conteúdo de geometria, dificultando uma possível abordagem geométrica na apresentação e demonstração do teorema de Pitágoras. Desta maneira, uma possível abordagem fazendo uso, por exemplo, de materiais manipuláveis, poderia auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem do teorema de Pitágoras. Algumas demonstrações deste resultado possibilitam uma abordagem destas, a exemplo da demonstração de

Henry Perigal ou a de Bhaskara, descritas em detalhes, no capítulo 3 dessa dissertação.

O livro do Projeto Teláris, na sua 2° edição, do ano de 2015, também é ofertado como opção de livro didático para os professores de escolas públicas do estado de Rondônia, em especial do município de Porto Velho.

Este por sua vez é o 4° livro analisado neste trabalho e verifica-se que o autor apresenta a demonstração do teorema de Pitágoras de maneira similar ao do livro A Conquista da matemática, que é feita fundamentalmente por semelhança de triângulos.

Entretanto, o autor Luiz Roberto Dante oferece outras demonstrações a título de curiosidade para os professores e estudantes, as quais são apresentadas no capítulo anterior desta dissertação, tais como a demonstração clássica, demonstração do Presidente James e demonstração de Bhaskara.

A demonstração de Bhaskara é feita de maneira algébrica, mas poderia ser facilmente desenvolvida de forma geométrica pelo professor, utilizando recortes com papéis ou cartolinas, dentre outros materiais manipuláveis de fácil acesso pelos estudantes. Uma abordagem assim, poderia mostrar um outro significado para o aprendizado dos alunos, estimulando o fator investigativo e lógico, relacionados a demonstração feita.

Já a demonstração do presidente James, valoriza mais o fator investigativo relacionado aos conhecimentos desenvolvidos em geometria nos anos anteriores pelos estudantes do 9° ano, utilizando conceitos de áreas e triângulos retângulos, aprendidos em anos anteriores, mas vistos como revisão no ano vigente para a exploração de novos conceitos geométricos. Esta demonstração é apresentada de forma algébrica, utilizando o conceito de comparação de áreas.

O autor poderia apresentar outras demonstrações, como por exemplo a demonstração de Henry Perigal, que pode facilmente ser demonstrada utilizando recortes de matérias manipuláveis de fácil acesso dos estudantes.

Diante do exposto, verifica-se que os autores dos livros analisados, em geral apresentam as demonstrações do teorema de Pitágoras utilizando somente aspectos algébricos, gerando um desestimulo aos estudantes quanto a exploração deste importante resultado matemático. Outras possíveis abordagens, com materiais manipuláveis de fácil acesso, podem ser utilizadas para incrementar o lado investigativo e lúdico do processo de ensino aprendizagem do teorema de Pitágoras.

O quadro a seguir sintetiza os principais aspectos observados nos livros didáticos estudos:

Coleção	Demonstração do Teorema	Exercícios Propostos	Outras características
A conquista da matemática 1985	Utiliza as demonstrações clássica e por semelhança de triângulo como sendo as principais.	Apresenta exercícios de aplicação direta do teorema de Pitágoras sem contextualização.	Não apresenta comentários destinados aos professores. Apresenta alguns fatos históricos.
A conquista da matemática 2009	Utiliza as demonstrações clássica e por semelhança de triângulo como sendo as principais.	Apresenta exercícios de aplicação direta. E exercícios no final do capitulo como verificação de aprendizagem.	Apresenta comentários destinado aos professores de acordo com os documentos do governo. Apresenta fatos relacionados ao teorema de Pitágoras de acordo com as recomendações dos documentos do governo.
A conquista da matemática 2018	Utiliza como demonstração principal a por semelhança de triângulos e a que denominamos como clássica fica como orientação didática.	Apresenta exercícios de aplicação direta e outros com uma breve contextualização.	A ordem dos conteúdos é alterada de forma que o teorema de Pitágoras seja apresentado, como uma relação algébrica desenvolvida com triângulos semelhantes.
Projeto Télaris	Mas um fator interessante é que o autor apresenta outras demonstrações. Este é o único livro analisado que mostra duas demonstrações de forma diferente dos demais.	Apresenta exercícios de aplicação direta e outros com uma breve contextualização.	Apresenta comentários destinado aos professores de acordo com os documentos do governo. fatos históricos e duas demonstrações diferentes dos outros livros.

Diante deste fato, deixo uma sequência didática que explora demonstrações do teorema de Pitágoras com uma abordagem geométrica no intuito de estimular o processo de ensino aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AMORIM, R.G.G. et al. **Elementos de geometria Riemaniana: Análise da esfera S2**. Revista Brasileira de Ensino de Física [online]. 2015, v. 37, n. 2. Acesso em 4 Outubro 2022, pp. 2302-1-2302-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1806-11173721687>.

ANDRADE, Cíntia Cristiane de. **O ensino da matemática para o cotidiano**. Medianeira–PR,2013 Acesso em 13 de março de 2023. Disponível em <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20816/3/MD_EDUMTE_2014_2_43.pdf >.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria josé. **Praticando matemática**, - 3º ed. renovada.-São Paulo: Editora do Brasil, 2012.-(Coleção praticando matemática)

BARBOSA, R.M. Descobrindo padrões pitagóricos, geométricos e numéricos. São Paulo, Atual, 1993.

BARDIN, Laurence. Análise de conteúdo. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2016

BASTOS, Manoel de Jesus. **Análise do Contexto da Educação Brasileira.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 02, Ed. 01, Vol. 14, p. 47- 54, 2017. Disponível em <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/analise-da-educacao-brasileira> Acesso em 1 out. 2022.

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina azenha, OLIVARES, Ayrton **Matemática : fazendo a diferença** 1. ed. – São Paulo : FTD, 2006 – (COLEÇÃO FAZENDO A DIFERENÇA)

BONJORNO, José Roberto: Matemática: **Fazendo a diferença** / José Roberto Bonjorno, Regina Azenha Bonjorno, Ayrton Olivares. – 1. Ed. – São Paulo : FTD, 2006. – (Coleção fazendo a diferença)

BOYER, CARL B., **História da Matemática.** Prefácio de Isaac Asimov; revista por. Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL no Pisa 2018 [recurso eletrônico]. – Brasília : Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020. 185 p. : il.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Versão final.(2017) Acesso em 23 de setembro 2022 Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >.

BRASIL, Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal: Secretaria Especial de Editoração e Publicações, 2012.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática. Brasília: MEC, 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais** : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília : MEC / SEF, 1998. 148 p. 1. Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática : Ensino de quinta a oitava séries. I. Título. CDU: 371.214. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf > acesso em 01 de out 2022.

BRESSIANI, Ligia. **Teorema de Pitágoras, Abordagem em Mídias Digitais**. Porto alegre-RS<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31564/000783229.pdf> Acesso em 14 de out. 2022.

CALDATTO, Marlova Estela; PAVANELLO, Regina **Maria. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais**. Quadrante, Vol. XXIV, N.º 1, 2015.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues **Convergências**: matemática 9º ano: anos finais: ensino fundamental /– 1. ed. – São Paulo : Edições SM, 2015.

COSTIN, Claudia. **Desafios da Educação no Brasil após a COVID19.** In: 72ª Reunião Anual da SBPC – 2020. Virtual. Painél: A Educação nos Novos Tempos. Disponível em <http://reunioes.sbpcnet.org.br/72RA/textos/PN-ClaudiaCostin.pdf>. Acesso em 8 de ago. 2023.

D'AMBRÓSIO, U (1999). **História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. Saber y Tiempo**: Revista de Historia de la Ciencia, 2(8), 7–37.

Dante, Luiz Robeto, **Projeto Teláris** : Matemática : ensino fundamental 2. - 2°. ed.- São Paulo : Ática, 2015. – (Projeto Teláris : matemática)

DA SILVA, João Evangelista Brito; FANTI, Ermínia de Lourdes Campello; PEDROSO, Hermes Antônio Acesso em 04 de outubro 2022. Disponível em <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v06a03-teorema-de-pitagoras.pdf >

DAVIS, Claudia Leme Ferreira et al. **Formação continuada de professores em alguns estados e municípios do Brasil**. Cad. Pesqui., São Paulo, v. 41, n. 144, p. 826-849, dez. 2011. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-15742011000300010&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 3 out. 2022.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana**, Volume 9, 8ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005.

FERNANDES, João Bosco Pitombeira de Carvalho . **Matemática : Ensino Fundamental** / Coordenação - Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 248 p. : il. (Coleção Explorando o Ensino ; v. 17)

FIGUEIREDO, Sonner Arfux de; SALES, Antônio. **O USO DO LIVRO DIDÁTICO PELO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.** Disponível em < https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3610 > Acesso em 15 de jul. de 2023

FIGUEIREDO; Nébia Maria Almeida de, **Método e metodologia na pesquisa cientifica organização** . – 3. ed.- São Caetano do Sul, SP : Yendis Editora, 2008.

FREDERICO NETO, Francisco; CRISTINA CARDOSO, Andréa; NEMOTO KAIHAMI; Harumi, et al. **Dificuldade de aprendizagem no ensino fundamental e médio: a percepção de professores de sete escolas públicas de São Paulo - SP**. Rev. psicopedag., São Paulo , v. 32, n. 97, p. 26-37, 2015. Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103848620150001000004&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 4 out. 2022.

GIL, Antônio Carlos, 1946- **Como elaborar projetos de pesquisa**. - 4. ed. - São Paulo : Atlas, 2002

GOLDEMBERG, José. **O repensar da educação no Brasil**. Estud. av., São Paulo, v. 7, n. 18, p. 65-137, Aug. 1993. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40141993000200004&lng=en&nrm=iso>. Acesso em 4 out. 2022.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni, CASTRUCCI, Benedicto **A conquista da matemática** : 9° ano : ensino fundamental : anos finais / — 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

Legislação informatizada – lei N° 5.692 de 11 de agosto de 1971 https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html < acessado em 22-06-2023>

LIMA, L. O. **Estórias da Educação no Brasil: de Pombal a Passarinho.** Rio de Janeiro: Editora Brasília, 1975.

MAZZI, Lucas Carato; AMARAL-SCHIO, Rúbia Barcelos. **Uma trajetória histórica dos livros didáticos: um foco nas políticas públicas implementadas nos séculos XX e XXI.** Disponível em < https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/8077> Acesso em 15 de jul 2023

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria** – Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NEVES, Luiz Antônio Mach
ado. **Geometria por meio de Contextualizações: Uma proposta didática para o conteúdo de cálculo de áreas e do teorema de Pitágoras** Rio Tinto – PB 2017. Acesso em 31 de out. 2022. Disponível em <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/3244/1/LAMN18122017.pdf >

PINHO, José Luiz Rosas BATISTA Eliezer, Neri; CARVALHO, Terezinha Both **Geometria** I, – 2. ed. – Florianópolis : EAD/UFSC/CED/CFM, 2010

POMBO, Taciana Rodrigues. **A concepção da Matemática através da história.** Revista Educação Pública, v. 21, n° 39,26 de outubro de 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/29/a-concepcao-da-matematica-atraves-da-historia> Acesso em 13 de março de 2023.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Um resgate histórico: a importância da História da Matemática**. Medianeira – PR, 2013 Disponíel em <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20816/3/MD_EDUMTE_2014_2_43.pdf > Acesso em 13 de março de 2023.

RPM79, Teorema de Pitágoras no Espaço. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/79/5.html#:~:text=O%20teorema%20de%20Pit%C3%A1goras%20%C3%A9,os%20estudantes%20do%20ensino%20b%C3%A1sico.&text=A%20intui%C3%A7%C3%A3o%20sugere%20que%20um,como%20mostra%20a%20figura%201>. Acesso em: 17 de Dez. de 2020.

RUGGIERO, Marta Abdelnur; BASSO, Itacy Salgado. **A Matemática no Livro Didático: uma Reflexão Crítica na Perspectiva Histórico-Cultural.** Disponível em < https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10542 > Acesso em 14 de jul 2023.

SANTOS, Marconi coelho Dos. **Teorema de Pitágoras [manuscrito]: suas diversas demonstrações** Acesso em 04 de outubro 2022. Disponível em <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/678/1/PDF%20-%20Marconi%20Coelho%20dos%20Santos.pdf >.

SILVA, Lenilson Oliveira da. **Atividades lúdicas no ensino do Teorema de Pitágoras**. Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wpcontent/uploads/sites/14/2017/09/28042016Lenilson-Oliveira-da-Silva.pdf > Acesso em 31 de out. 2022.

SILVA, Stênio Rocha. **A Resolução De Problemas Matemáticos Sob Diferentes Perspectivas: Um Olhar Para a Resolução De Problemas Geométricos** / Stênio Rocha silva. – Toledo Paraná. Acesso em 13 de Mar. 2023. Disponível em <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/30326/1/resolucaoproblemasdiferentesperspectivas.pdf > .

STRATHERN, P. **Pitágoras e o seu Teorema em 90 minutos**. 1. Ed. Rio de Janeiro: J. Z. E, 1998.

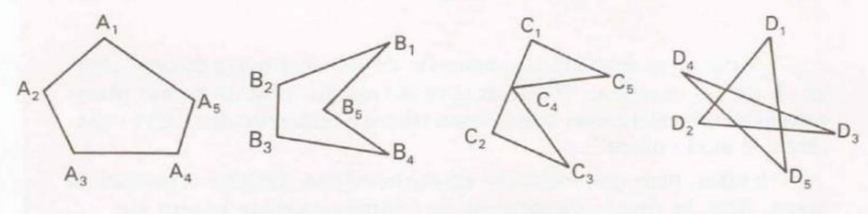
VALENTE, W. R. (1999). **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730–1930)**. 1. ed. São Paulo: Annablume, 1999.

ANEXO 1 - ALGUNS RESULTADOS GEOMÉTRICOS

1 DEFINIÇÃO DE UM POLÍGONO

Dada uma sequência de pontos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, não colineares em um plano, falamos que $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, formam um polígono se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $A_i A_{i+1}$ não possui outro ponto A_j, com j diferente de i e i +1. Dentre os que ele determina, deixando todos em um mesmo semiplano (MUNIZ NETO, 2013).

Figura 54



$A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ e $D_1D_2D_3D_4D_5$ são polígonos.

Fonte: DOLCE & POMPEO (2005).

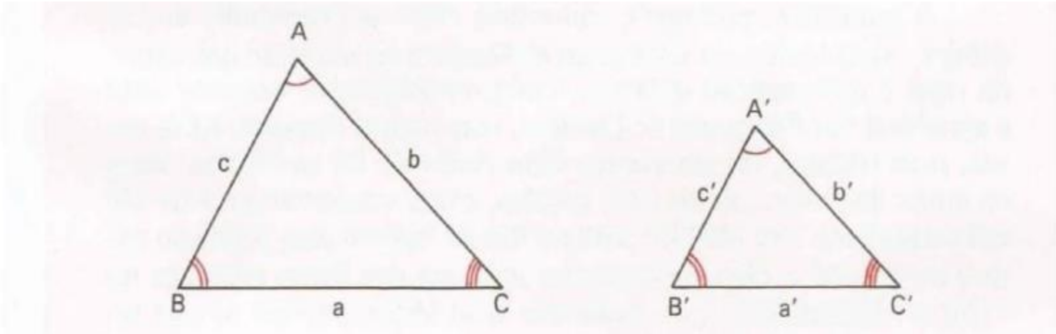
De acordo com os PCN´s o estudante precisa desenvolver a noção de semelhança entre figuras planas a partir de reduções ou ampliações, observando que a medida do ângulo não se altera, e as que se alteram só lado, perímetro e superfície.

1.2 SEMELHANÇA & CONGRUÊNCIA ENTRE POLÍGONOS

Segundo Chavante (2015), dois polígonos são semelhantes quando possuem seus respectivos lados com medidas de comprimento proporcionais e seus respectivos ângulos internos congruentes. Conforme Andrini (2021), quando duas figuras planas são sobrepostas e coincidem ponto a ponto dizemos que elas são congruentes.

Por exemplo, Dois triângulos, serão semelhantes se, e somente se, possuírem ordenadamente seus três ângulos congruentes e seus lados proporcionais forem homólogos. Na figura a seguir ilustramos a semelhança de triângulos, mas podemos generalizar para qualquer polígono de n lados.

Figura 55



Fonte: DOLCE & POMPEO (2005).

ΔABC ~ ΔA´B´C´

A ≡ A´, B ≡ B´, C ≡C´ e $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (DOLCE & POMPEO,2005).

De acordo com Muniz Neto (2013), dois triângulos ABC e A´B´C´ são congruentes, se existir uma correspondência entre os vértices dos triângulos, de modo que os vértices correspondentes e os ângulos internos sejam congruentes, assim como os lados opostos aos vértices sejam correspondentes. Os critérios para congruência de triângulos são os seguintes:

I) LLL, (lado-lado-lado); dois triângulos que tem os lados correspondentes de mesma medida são congruentes;

II) ALA, (ângulo-lado-ângulo); dois triângulos que tem dois ângulos iguais, e o lado adjacente também possui a mesma medida eles são congruentes;

III) LAL, (lado-ângulo-lado). dois triângulos que possuem dois lados iguais e o ângulo formado por eles de mesma medida também é congruentes.

Para uma demonstração destes critérios, consultar as bibliografias: Dolce & Pompeo, 2005 ou Muniz Neto, 2013.

1.3 ÁREA DE POLÍGONOS

1.3.1 Definição de área

Segundo Amorim (2015), a medida de uma porção do plano ocupada por uma figura geométrica chama-se área. Para determinar essa medida precisamos comparar uma unidade de medida pré-determinada, com a medida de sua superfície e o resultado desta comparação que exprime quantas vezes ela contém esta unidade de área.

Muniz Neto (2013), define que polígonos possuem quatro propriedades básicas para definição de área:

1º Polígonos congruentes possuem áreas iguais.

2º Quando um polígono é dividido em uma quantidade finita de polígonos, de modo que não haja sobreposição então a soma das áreas dos polígonos menores é igual a área do maior.

3º Quando um polígono menor está contido estritamente no interior de um polígono maior, logo a área do polígono menor será menor que a área do polígono maior.

4º Um quadrado de lado 1cm tem área igual 1 cm^2.

De acordo com os postulados, divida um quadrado de lado n Є N em n^2 quadrados de lados 1. Escrevendo a área do quadrado maior por A_n, temos que A_n é a soma dos quadrados de área n^2 com 1 de lado.

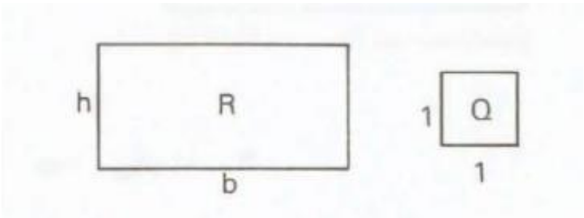
De modo que $A_n = n^2$.

Pode-se estender esta formula para o cálculo da área de quadrados de lado com valor real positivo qualquer, para mais detalhes ver Muniz Neto (2013).

1.4 ÁREA DE ALGUNS POLÍGONOS

1.4.1 Área retângulo

Figura 56



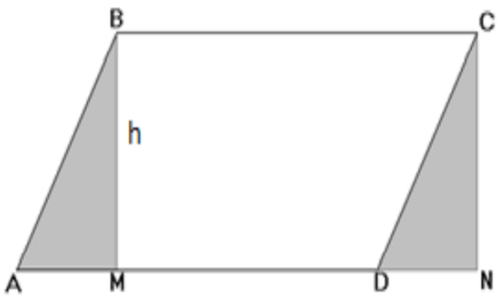
Fonte: DOLCE & POMPEO (2005).

Em um retângulo de área R e lados b (base) e h (altura) fixando um quadrado de área Q e lado 1 temos:

Área do retângulo R(b, h) = $A_R \frac{R(b,n)}{Q(1,1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{n}{1} \rightarrow A_R =$ (medida de b) x (medida de h) onde será representada da forma $A_R = b \cdot h$ (DOLCE & POMPEO,2005).

1.4.2 Área do paralelogramo

Figura 57

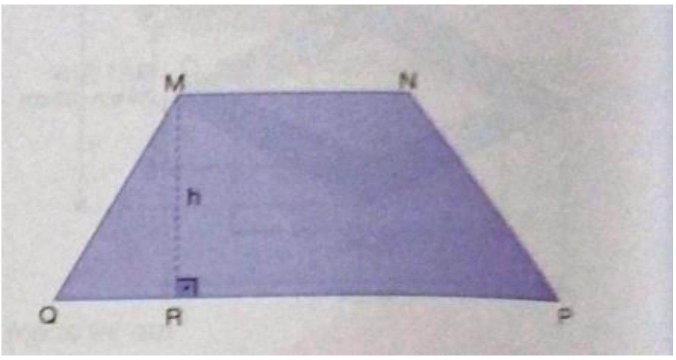


Fonte: AMORIM (2015).

Dado um paralelogramo ABCD de base AD = a e altura h, sendo traçado do ponto B uma semirreta perpendicular que intersecta AD no ponto M. conforme ilustrado na figura. De maneira análoga, traçamos uma semirreta que parte do ponto C perpendicular ao lado AD que toca no ponto N. Sendo a região limitada pelos pontos BCNM que possui os seus lados paralelos congruentes e ângulos internos todos igual a 90º, observamos que BCNM é um retângulo, e que os triângulos ABM e DCN são congruentes. Sendo assim a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo BCNM (AMORIM, 2015).

1.4.3 Área do trapézio

Figura 58



Fonte: BONJORNO & AYRTON (2006).

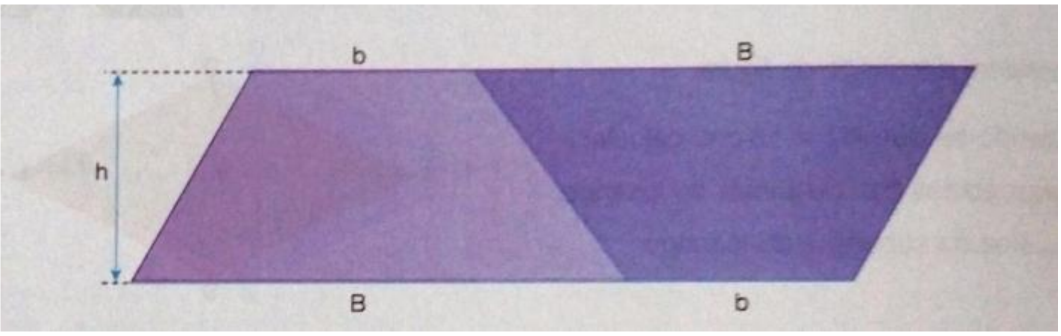
PQ = B é a medida da base maior.

MN = b é a medida da base menor.

MR = h é a medida da altura.

Considere o trapézio isósceles MNPQ. Podemos calcular sua área da seguinte forma, juntando dois trapézios idênticos ao anterior, e desenhando um deles de cabeça para baixo.

Figura 59



Fonte: BONJORNO & AYRTON (2006).

Obtemos um paralelogramo de área igual a (B + b). h.

Sendo assim, a área do trapézio isósceles é determinada pela divisão ao meio da área paralelogramo, isto é: A = $\frac{(A + B).\ H}{2}$.

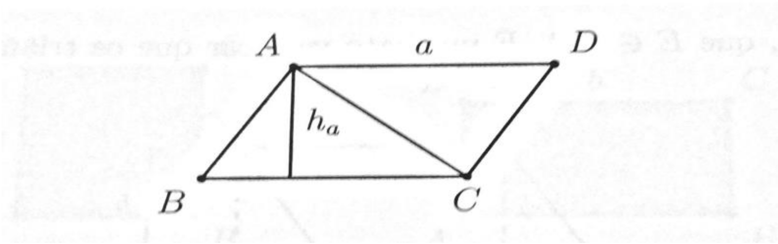
Logo, a área de um trapézio isósceles é igual ao produto da soma das medidas das bases pela medida da altura, dividido por 2. Pode-se demonstrar que esta relação vale para o cálculo da área de qualquer trapézio.

$A = \frac{(A + B).\ H}{2}$ em que: B, b e h são números reais positivos. (BONJORNO & AYRTON, 2006).

1.4.4 Área do triângulo

Sendo A = A(ABC) e D o ponto de intersecção da paralela a BC e pelo ponto A com a paralela a AB por C.

Figura 60



Fonte: MUNIZ NETO (2013).

Logo ABC ≡ CDA pelo critério ALA, sendo que BAC = ACD e AC como lado comum, de fato que ACB = DAC. Mas, como ABCD é um paralelogramo de altura h_a e base a, temos que:

2A = A(ABC) + A(CDA) = A(ABCD) = ah.

Concluímos que, A(ABC) = A = $\frac{1}{2}$ ah_a **(**MUNIZ NETO, 2013).

APÊNDICE: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

QUESTIONÁRIO INICIAL

1º Você consegue encontrar alguma representação de triângulo dentro da escola?

2º Você consegue citar um local na cidade Porto Velho que apresenta algum tipo de forma triangular? (Ex.: praça, parques, museu e etc.).

3º Você acha que conhecendo duas medidas de um triângulo é possível calcular a terceira?

AULAS PARA SEREM DESENVOLVIDAS

Aula 1

Apresentação do teorema de Pitágoras por meio de mídias digitais e (observação de triângulos dentro da escola).

Objetivo: Mostrar a importância da história da matemática.

Número de aulas: 2

Aula 2

Manipulação de algumas demonstrações. (Henry Perigal e Bhaskara)

Objetivo: Mostrar que o teorema de Pitágoras é uma aplicação geométrica e não algébrica.

Material: folhas de papel sulfite, régua, esquadros, tesoura e lápis de cor.

Número de aulas: 3

Aula 3

Apresentar algumas demonstrações de forma algébrica.

Objetivo: mostrar manipulações algébricas.

Número de aulas: 2

Aula 4

Aplicação de alguns exercícios algébricos.

Objetivo: Resolver de forma algébrica exercícios.

Número de aulas: 4

Aula 5

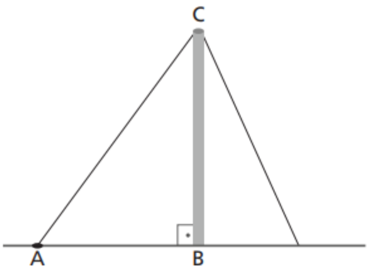
Aplicação do questionário com problemas envolvendo o teorema de Pitágoras

Objetivo: Observar se houve êxito quanto a resolução dos problemas.

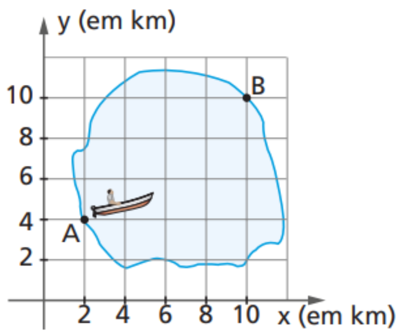
Número de aulas: 1

QUESTIONÁRIO FINAL

1 - Uma torre vertical é presa por cabos de aço fixos no chão, em um terreno plano horizontal, conforme mostra o esquema abaixo. Se o ponto A está a 15 m da base B da torre e o ponto C está a 20 m de altura, qual é o comprimento do cabo AC?



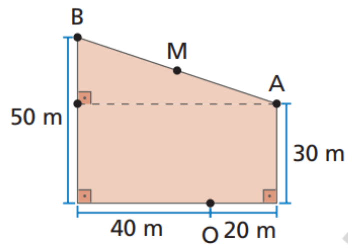
2 - João, um navegante solitário, deseja ir da cidade A à cidade B, ambas às margens de um lago e representadas na figura a seguir. Ele não considera a correnteza da água e pretende navegar o menor tempo possível. Qual é a distância, em quilômetro, entre a cidade A e a cidade B?



3 - Conta a lenda que um pirata deixou um mapa com a localização exata de um valioso tesouro em uma ilha. Esse mapa continha dicas de como encontrar o tesouro, a partir de certo ponto O de origem. O tesouro localizava-se no ponto médio M, entre os pontos A e B, definidos no mapa de acordo com as dicas descritas a seguir:

- ponto A: a partir do ponto O de origem, seguir 20 m na direção leste e, em seguida, mais 30 m na direção norte;
- ponto B: a partir do ponto O de origem, seguir 40 m na direção oeste e, em seguida, 50 m na direção norte.

Veja o esquema:



4 - Durante um incêndio em um edifício residencial, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10 m para atingir a janela de um dos apartamentos incendiados. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 6 m do edifício. Qual é a altura desse apartamento em relação ao chão?

5 - . (UFSM-RS) Observe na figura os três quadrados identificados por I , II e III . Se a área do quadrado I é 36 cm2 e a área do quadrado II é 100 cm2 qual é, em centímetros quadrados, a área do quadrado III ?