UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

TEOREMA DA DIVISÃO EUCLIDIANA: RETOMANDO CONCEITOS NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

ORIENTADORA: PROFA. DRA. ROSA ELVIRA QUISPE CCOYLLO

Vitória-ES
2023

LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

TEOREMA DA DIVISÃO EUCLIDIANA: RETOMANDO CONCEITOS NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

Vitória-ES
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"Teorema da divisão Euclidiana: Retomando conceitos na primeira série do Ensino Médio"

Lilian Cristina Rodrigues Sarmento

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 26/10/2023 por:

Prof.(a) Dr.(a) Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Membro interno (a) – UFES

Prof. Dr.(a) Luzia da Costa Tonon Martarelli
Membro Externo – UNIRIO

Folha de Assinaturas Lilian Cristina Rodrigues Sarmento

Data e Hora de Criação: 24/10/2023 às 12:52:21

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Lilian Cristina Rodrigues Sarmento.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: c4149456b719d8c5cd91b6902584f0aa6ca7038312153db7b30242f5c393221c
[SHA512]: dd0cb5867833386ee3479dbfd49f8cc4cb97c7d55e7239417141b64d25a049342d59f9ede070ba4d0a9ceb1ebd4304c2eae821c00617c726f3a17ef741ddb09a

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Luzia da Costa Tonon Martarelli (luzia.tonon@uniriotec.br)
Data/Hora: 26/10/2023 - 15:01:22, IP: 189.60.20.61, Geolocalização: [-22.930380, -43.181817]
[SHA256]: 1c5cbce15a2032c9938029f41027ad6804f64019dc8516ca7b40747b00bbff41

ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacrosa@gmail.com)
Data/Hora: 26/10/2023 - 17:49:52, IP: 177.97.122.67
[SHA256]: 0d966d5669b2cecffc780525c98e0cb86508d02c13fcfe4a1ba75898d3431927

ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)
Data/Hora: 26/10/2023 - 15:29:42, IP: 200.137.65.106, Geolocalização: [-20.287267, -40.30275]
[SHA256]: a8a3509c1e5efdc685288b64d536be2e2b3853f4040775bde6abf3da02eff3f4

Histórico de eventos registrados neste envelope

26/10/2023 17:49:53 - Envelope finalizado por moacrosa@gmail.com, IP 177.97.122.67
26/10/2023 17:49:52 - Assinatura realizada por moacrosa@gmail.com, IP 177.97.122.67
26/10/2023 17:49:45 - Envelope visualizado por moacrosa@gmail.com, IP 177.97.122.67
26/10/2023 15:29:42 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.106
26/10/2023 15:01:22 - Assinatura realizada por luzia.tonon@uniriotec.br, IP 189.60.20.61
26/10/2023 15:01:05 - Envelope visualizado por luzia.tonon@uniriotec.br, IP 189.60.20.61
24/10/2023 12:58:07 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.108
24/10/2023 12:57:16 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.108
24/10/2023 12:57:15 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.108
24/10/2023 12:52:27 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.108

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus, por não deixar que os momentos difíceis que passei durante a fase de estudos me fizessem desistir.

À minha mãe, Rita, que sempre acreditou em mim e me deu forças para alcançar o mais alto degrau da minha vida, mas que não está mais aqui para comemorar essa vitória comigo. Mãe, obrigada por tudo!

Aos meus filhos, Ana Clara e Davi, que sempre souberam compreender a minha ausência devido à minha dedicação ao mestrado. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

A Deus, por não me desamparar em nenhum momento da minha vida, principalmente nos mais difíceis, em que pensei muitas vezes em desistir.

À minha mãe, Rita, por acreditar em mim e me encorajar a realizar meus sonhos, mas que infelizmente não está mais aqui entre nós.

Aos meus filhos, Ana Clara e Davi, por tanto amor, carinho e compreensão que me transmitiam quando eu não podia estar presente em parte dos momentos de lazer, devido aos estudos.

Aos meus colegas de curso, em especial, Márcia, Euziná e Nathalia, que compartilharam comigo diversas vezes os conhecimentos adquiridos através de grupos de estudo, tanto presencial quanto online.

A todos os professores do PROFMAT, que sempre foram prestativos diante das nossas necessidades, inclusive nos ajudando com aulas extras.

À minha orientadora, Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo. Agradeço de todo o coração por sua paciência, incentivo e apoio incansável ao longo deste período. Este trabalho não teria sido possível sem a sua orientação e confiança em mim. Serei eternamente grata por ter tido a honra de tê-la como minha orientadora. Muito obrigada, Professora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo, por ser não apenas uma orientadora excepcional, mas também uma inspiração constante em minha jornada acadêmica e profissional.

Aos meus alunos, pela participação neste projeto.

A todos que indiretamente contribuíram, mesmo com apenas uma palavra de encorajamento para a realização deste sonho que é concluir o Mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este estudo tem como objetivo desenvolver uma proposta didática voltada ao primeiro ano do Ensino Médio, com ênfase no Teorema da Divisão Euclidiana como ponto de partida. A proposta tem por finalidade consolidar e ampliar a compreensão dessa operação fundamental, explorando suas implicações em tópicos como Sistemas de Numeração, Máximo Divisor Comum (MDC), Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Divisibilidade, integrantes do currículo do Ensino Fundamental. Além disso, introduz conceitos mais avançados de forma acessível, como o Lema dos Restos e o Algoritmo de Euclides, que ajudam no desenvolvimento da argumentação matemática e de habilidades analíticas que são úteis em todas as áreas da vida. Para atingir esses objetivos, realizou-se uma análise do conhecimento prévio sobre o tema por parte dos alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Olímpio Cunha, localizada no Espírito Santo, bem como um estudo desses conteúdos e de temas correlatos nas duas últimas coleções de livros didáticos de Matemática, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e utilizadas pelos professores e estudantes dessa escola no período de 2017 a 2023. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também foi consultada para avaliar a inclusão e profundidade desses tópicos no currículo escolar. Com base nesta pesquisa, propõe-se uma sequência didática investigativa, focada na resolução de problemas e enriquecida pelo uso de recursos tecnológicos e históricos, com o intuito de despertar o interesse dos alunos pelo assunto e desenvolver habilidades como autonomia, tomada de decisões, análise de informações, experimentação de ideias, elaboração de argumentos e verificação de conclusões. Após a implementação da sequência didática, os alunos foram submetidos a um exame final para comparar os resultados com a avaliação diagnóstica, demonstrando o progresso dos alunos e a eficácia das estratégias pedagógicas empregadas neste estudo.

Palavras-chave: proposta didática, Divisão Euclidiana, autonomia, argumentação matemática.

ABSTRACT

This study aims to develop a didactic proposal focused on the first year of High School, with an emphasis on the Euclidean Division Theorem as a starting point. This purpose has the goal to consolidate and expand the understanding of this fundamental operation, exploring its implications in topics such as Number Systems, Greatest Common Divisor (GCD), Least Common Multiple (LCM), and Divisibility, which are part of the Elementary School curriculum. Furthermore, it introduces more advanced concepts in an accessible way, such as the Remainder Theorem and the Euclidean Algorithm, which assist in the development of mathematical reasoning and analytical skills that are useful in all areas of life. To achieve these objectives, an analysis of students' prior knowledge on the subject was conducted among high school students at Coronel Olímpio Cunha State School, in Espírito Santo. Additionally, a study of these contents and related topics in the last two collections of Mathematics textbooks approved by the "*Programa Nacional do Livro Didático*" (PNLD)–National Textbook Program–and used by the teachers and students of this school from 2017 to 2023 was carried out. The "*Base Nacional Comum Curricular*" (BNCC)–National Common Curriculum Base–was also consulted to assess the inclusion and depth of these topics in the school curriculum. Based on this research, an investigative didactic sequence is proposed, focused on problem-solving and enriched by the use of technological and historical resources, aiming to spark students' interest in the subject and develop skills such as autonomy, decision-making, information analysis, idea experimentation, argumentation, and conclusion verification. After the implementation of the didactic sequence, students underwent a final examination to compare the results with the diagnostic assessment, demonstrating the progress of the students and the effectiveness of the pedagogical strategies employed in this study.

Keywords: didactic proposal, Euclidean Division, autonomy, mathematical argumentation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

EMEF – Escola Municipal de Ensino Fundamental

EEEM – Escola Estadual de Ensino Médio

EEEFM – Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio

ENADE – Exame Nacional de Desempenho de Estudantes

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MDC – Máximo Divisor Comum

MEC – Ministério da Educação

MMC – Mínimo Múltiplo Comum

PAEBES – Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos mais de quinze anos de experiência como professora, na maioria deles tenho optado por lecionar Matemática para as séries de Ensino Médio, pois, assim, poderia interagir com alunos, cujo conhecimento matemático estaria em um nível mais avançado, mais amadurecido, embora nem eles estivessem livres de um problema comumente constatado por docentes (PACHECO & ANDREIS, 2018, p. 117): lembrar do conteúdo estudado em anos anteriores e saber como utilizá-los. Sempre percebi a dificuldade dos meus alunos do Ensino Médio em utilizar vários conteúdos que são abordados no Ensino Fundamental, por exemplo: trabalhar com números em sua forma abstrata, tópico este relacionado ao nosso tema de pesquisa.

No início de cada ano letivo, dedicava algumas aulas para revisar conceitos do Ensino Fundamental, acreditando que isso fosse necessário para introduzir novos tópicos. No entanto, percebia que, mesmo com essa revisão, os alunos frequentemente esqueciam os conceitos anteriores quando introduzidos a novos tópicos. Isso era especialmente evidente quando se tratava de problemas aritméticos, nos quais muitos alunos tinham dificuldade em interpretar e aplicar as propriedades matemáticas adequadas.

Ao ingressar no PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), pude explorar diversos tópicos relacionados ao ensino de matemática da Educação Básica. No entanto, foi durante o curso da disciplina de Aritmética que minha compreensão das propriedades dos Números Inteiros se aprofundou de forma significativa, o que despertou em mim um profundo interesse em realizar pesquisas sobre a abordagem desse tópico em dissertações acadêmicas, manuais didáticos, bem como na ênfase que lhe é conferida pela BNCC no âmbito do Ensino Fundamental e Médio, e também no nível de profundidade com que esse tema é ministrado nas salas de aula.

Alguns tópicos da Teoria Elementar dos Números fazem parte dos livros didáticos do Ensino Fundamental e da BNCC (ANEXO I). No entanto, muitas vezes, os estudantes têm apenas uma exposição superficial a esses conceitos durante o Ensino Fundamental e, após essa fase, essas noções matemáticas costumam ser negligenciadas ao longo do restante da trajetória escolar. Esse cenário é confirmado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN[1]) ao mencionarem que

> [...] não se pode configurar o abandono da Aritmética, como muitas vezes ocorre. Os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos deste ciclo (8º, 9º anos do EF); em geral, as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos. Pode-se até afirmar que os procedimentos não-algébricos (os que não utilizam equações, sistemas etc.) para resolver problemas são desestimulados nos últimos anos do ensino fundamental, mesmo em situações em que a álgebra não é necessária. (BRASIL, 1998, p. 83).

Diante disso, surge a necessidade de desenvolver um trabalho que possibilite corrigir, no início do Ensino Médio, algumas possíveis lacunas no aprendizado de conceitos aritméticos, com o intuito de proporcionar aos alunos uma base sólida para que compreendam objetos matemáticos mais avançados à medida que progridem em seus estudos.

JUSTIFICATIVA

A ideia de divisão é apresentada ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental I na resolução de problemas envolvendo significado de metade, terça parte, repartição em partes iguais, em diversos contextos, com resto zero e resto diferente de zero. Conforme a BNCC (BRASIL, 2017), este tópico é aprofundado a cada série e por cada ano do Ensino Fundamental, contudo, vários aspectos desta operação são ignorados, assim, diversos problemas da teoria dos números abordados nas séries do Ensino Básico que poderiam ser resolvidos utilizando algumas propriedades envolvidas no Algoritmo da Divisão Euclidiana (Paridade, Lema dos Restos) não o são, pois, em geral, estes tópicos não são enfatizados nos livros didáticos e na BNCC, e, com isso, resta apenas aos alunos operar o algoritmo de forma mecânica, sem compreender os conceitos envolvidos e suas aplicações.

Em 2021, os estudantes das séries 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio (EEEFM) Coronel Olímpio Cunha, situada

[1] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em vigor no período de 1997 a 2017, tinham a proposta de unificação dos conteúdos presentes nos currículos do Ensino Básico de todo o país, levando em conta as suas diferenças para permitir a formação do cidadão consciente de sua importância na sociedade. O Ensino Fundamental, neste documento, era dividido em 4 ciclos, sendo o 1º com duração de três anos e os outros ciclos com duração de dois anos cada.

em Cariacica-ES, foram submetidos a um teste com dez questões extraídas dos principais Vestibulares do país, ENEM e outras provas externas, envolvendo tópicos sobre o estudo dos números. Os resultados do teste constataram que a maioria dos alunos que participaram da avaliação não possuía habilidades para identificar os objetos ou conceitos de ensino envolvidos nas questões, embora os temas abordados no teste estivessem presentes nos currículos do Ensino Fundamental (6º e 7º anos). Os problemas do teste foram classificados pelos alunos como complexos, e muitos deles disseram não ter trabalhado/estudado o conteúdo necessário para a resolução daqueles tipos de problemas. Não obstante, todas as questões abordavam conceitos que envolviam o Teorema da Divisão Euclidiana. Isso pode ter acontecido em razão de vários conteúdos que, uma vez estudados, raramente são retomados nas séries seguintes.

Em um estudo realizado em nove (9) trabalhos de conclusão de curso do PROFMAT com foco no tema "Divisão Euclidiana", constatou-se que quatro (4) deles abordaram especificamente as dificuldades enfrentadas por alunos do Ensino Fundamental no domínio da operação de divisão, sendo eles: ***1.*** *Por que e como ensiná-lo? Múltiplos Aspectos do Algoritmo da Divisão no Ensino Básico – Gerusa Fortes Pereira D'avila – 2013;* ***2.*** *Materiais Manipuláveis: Uma Intervenção em Sala de Aula para a Divisão Euclidiana – Valéria Rêgo Haddad – 2015;* ***3.*** *Algoritmo da divisão de Euclides – Susiane Bezerra Caixeta – 2016;* ***4.*** *Pensamento Computacional e Divisão Euclidiana: Possíveis Conexões na Aprendizagem – Fernanda Paula Wappler – 2021*. Para amenizar essas dificuldades, esses estudos exploraram diversas metodologias: fazendo uso de recursos manipulativos, como o Soroban e o Ábaco; aplicando técnicas de pensamento computacional; propondo atividades contextualizadas e a incorporação de jogos; e a utilização de vídeos. No entanto, a maioria dessas abordagens se concentraram principalmente no entendimento do quociente da divisão.

Por outro lado, os outros cinco (5) trabalhos defendem a inclusão de tópicos da Teoria dos Números nas aulas de matemática do Ensino Básico. Isso inclui a Congruência Modular, as Equações Diofantinas e o Teorema Chinês do Resto, que não estão contemplados nos currículos de matemática e na BNCC: ***5.*** *Teoria dos Números: Um Estudo com Resolução de Problemas na Educação Básica – Lucidio de Jesus Junior – 2013*; ***6.*** *Algoritmo da Divisão de Euclides: uma nova proposta de ensino de* *matemática na educação básica – Charles James Leite Martins – 2015;* ***7.*** *Aspectos Interessantes de Teoria dos Números para o Ensino Básico – Manuel Simão Pilar Santamarinha – 2016;* ***8.*** *Teoria dos Números no Ensino Básico: Um estudo de caso no 2º ano do Ensino Médio – Josemar Claudino Barbosa – 2017;* ***9.*** *Introdução à Teoria dos Números: Uma Nova Proposta para Educação Básica – Nicholas Ursulino da Silva – 2019*. Contudo, as atividades abordando os conceitos mencionados nas dissertações pesquisadas foram implementadas durante o período oposto ao horário regular de estudo do aluno (contraturno) – uma escolha que pode ser justificada na necessidade de alocar um período adicional de tempo para aprofundar esses conceitos, do contrário poderia comprometer o cumprimento do currículo escolar, embora sejam temas interessantes para abordar no Ensino Médio. É importante salientar que a maioria desses trabalhos supracitados tem como foco a promoção da formação continuada de professores ou a oferta de atividades complementares para alunos interessados e curiosos, não sendo caracterizados como obrigatórios.

Da mesma forma, analisou-se a abordagem da BNCC em relação aos temas relacionados ao Algoritmo da Divisão Euclidiana (ANEXO I), bem como a exploração desses tópicos nos livros didáticos utilizados na EEEFM Coronel Olímpio Cunha, abrangendo os 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, constatando-se que esses temas não receberam grande ênfase nesses manuais de referência educacional.

À vista disso, objetivando aprimorar a compreensão das propriedades e dos resultados vinculados ao Algoritmo da Divisão Euclidiana, argumenta-se neste trabalho a importância de reintroduzir objetos de conhecimento pertencentes ao currículo de Matemática do Ensino Fundamental durante as aulas regulares da 1ª série do Ensino Médio, bem como ampliar o conhecimento dos alunos apresentando objetos não pertencentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico. Esses objetos de conhecimento são geralmente apresentados no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental e, posteriormente, são deixados de lado, como já ressaltavam os PCN:

> A esse respeito convém salientar que a resolução de situações-problema com diferentes tipos de números é pouco trabalhada neste ciclo (e menos ainda no quarto ciclo), não possibilitando aos alunos ampliar ou construir novos significados [...] (BRASIL, 1998, p. 67)

E, ainda,

> Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Provavelmente isso ocorre em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações e à pouca ênfase que tradicionalmente é dada a este assunto nos terceiro e quarto ciclos. (BRASIL, 1998, p. 95)

Desta forma, alguns aspectos da aritmética podem não ter sido abordados de maneira tão abrangente nesse nível de ensino.

Além disso, no contexto dos Números Naturais e dos Números Inteiros, existem diversos elementos que podem dificultar a consolidação da aprendizagem no Ensino Fundamental: (i) a ênfase excessiva na aplicação de algoritmos – como a determinação do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e do Máximo Divisor Comum (MDC) – sem uma compreensão profunda dos princípios subjacentes e das conexões entre eles; e (ii) desestímulo ao uso dos procedimentos aritméticos, considerados como raciocínios inferiores quando comparados aos procedimentos algébricos.

Ao revisitarem essas propriedades no início do Ensino Médio, os estudantes não apenas consolidam os conhecimentos adquiridos durante o Ensino Fundamental, mas também relembram as principais características desses conceitos, estabelecendo, assim, alicerces sólidos para a aprendizagem de novos conteúdos, tais como Função e Álgebra de nível mais avançado. Isso contribui para uma base matemática robusta e uma compreensão mais profunda dos temas subsequentes da disciplina.

A partir dos resultados do teste diagnóstico e das pesquisas documentais, foi desenvolvida uma sequência didática destinada ao primeiro ano do Ensino Médio. Essa sequência é centrada na resolução de problemas e no uso de técnicas que normalmente não são exploradas, com o objetivo de fornecer aos alunos ferramentas que lhes permitam confirmar e justificar suas afirmações, desempenhando um papel ativo no processo de ensino e aprendizagem.

Apoiado nos estudos de (ABREU, 2008) e (BROCARDO, OLIVEIRA, & PONTE, 2019), e com base na BNCC (BRASIL, 2017), este trabalho adota uma abordagem investigativa que se baseia na resolução de situações-problema, permitindo aos alunos refletirem sobre os resultados obtidos, enquanto o professor desempenha o papel de facilitador dessa investigação. Busca-se a criação de metodologias que tornem o aprendizado do Teorema da Divisão Euclidiana significativo para os alunos, destacando suas inúmeras aplicações e sua integração em outros conteúdos – muitas vezes negligenciados ou abordados de forma superficial.

Em síntese, conforme foi manifestado, o objetivo primordial desta dissertação consiste em elaborar e desenvolver no primeiro ano do Ensino Médio uma proposta didática que utilize o Teorema da Divisão Euclidiana como ponto de partida, visando consolidar e ampliar as aprendizagens relacionadas a essa operação fundamental, explorando suas várias ramificações e implicações.

Para subsidiar esse propósito, temos os seguintes objetivos específicos:

- **Adaptação dos alunos à Metodologia de Ensino Investigativo**: desenvolver estratégias pedagógicas que permitam aos alunos a familiarização com a Metodologia de Ensino Investigativo, promovendo o pensamento crítico, a curiosidade e a independência na resolução de problemas matemáticos;
- **Mostrar a importância do Teorema da Divisão Euclidiana como base conceitual**: mostrar de maneira clara e acessível aos estudantes que o conhecimento do Teorema da Divisão Euclidiana serve como base fundamental para a compreensão de outros conceitos matemáticos abordados nesta pesquisa;
- **Introduzir tópicos que, embora não façam parte do currículo da educação básica, dependem do conhecimento básico do algoritmo da divisão:** expandir a gama de conhecimentos dos alunos, apresentando tópicos matemáticos mais avançados que não são tradicionalmente ensinados no Ensino Médio. É uma oportunidade para explorar e compreender conceitos matemáticos mais complexos de maneira acessível. Esses tópicos incluem, por exemplo, o Lema dos Restos e o Algoritmo de Euclides;
- **Avaliação da proposta didática**: analisar a eficácia da abordagem pedagógica elaborada, avaliando seu impacto nas habilidades matemáticas dos estudantes, assim como em sua motivação e autoconfiança no que diz respeito à matemática.

ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

A primeira fase da pesquisa compreendeu a aplicação de um teste a alunos do Ensino Médio, o qual conteve questões retiradas de provas externas (ENEM, vestibulares, concursos) com o intuito de verificar as habilidades que os alunos possuem para resolver questões envolvendo alguns tópicos relacionados ao Teorema da Divisão Euclidiana, em específico: o Algoritmo da Divisão, Sistema de Numeração Decimal e Binário (base dois), Divisibilidade, Números primos, Paridade, MDC, MMC e Lema dos Restos.

Após correção dos testes e análise dos resultados, foram pesquisadas as duas últimas coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD[2] (de 2017 e de 2020), utilizadas nas séries finais do Ensino Fundamental da escola em que a pesquisa era realizada, sendo o foco os objetos matemáticos que envolvem o algoritmo da divisão tanto de forma explícita quanto implícita e, através de uma consulta documental, foram procuradas as orientações na BNCC a respeito desses objetos de ensino. O propósito deste estudo é avaliar em qual etapa do currículo escolar esses tópicos são introduzidos e qual o grau de profundidade com que são abordados, visando determinar a necessidade de uma revisão desses conceitos com um estudo mais abrangente no início do Ensino Médio.

Considerando os resultados obtidos, foi elaborada uma (proposta) sequência didática de cunho investigativo, fundamentada na resolução de problemas para a primeira série do Ensino Médio, que teve duração de trinta e sete (37) aulas de 50 minutos cada, incluindo a avaliação final, sendo enfatizado o algoritmo da divisão euclidiana e revisados alguns conceitos relacionados com este algoritmo (sendo alguns consequências dele), entendendo que muitos desses tópicos podem não ter sido abordados nas séries anteriores. Os conteúdos trabalhados com os alunos nesta proposta foram: Teorema da Divisão Euclidiana, Paridade, Lema dos Restos, Divisibilidade, Números Primos, Sistema de Numeração de várias bases, MDC e MMC, além de alguns aspectos históricos sobre Euclides e a Divisão. Os planos de aula podem ser encontrados no capítulo 5 deste trabalho.

---

[2] O PNLD é um programa do Ministério da Educação (MEC), junto ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), para a compra e distribuição de livros e materiais didáticos para professores e estudantes de escolas públicas de todo o país.

Por fim, após a execução da sequência didática, os alunos participaram de uma segunda avaliação via formulário eletrônico (Google), contendo dez (10) questões de múltipla escolha que abordavam o tema em estudo, com o objetivo de verificar os avanços obtidos pelos alunos em comparação com o teste diagnóstico.

METODOLOGIA

A metodologia da pesquisa foi desenvolvida a partir de uma abordagem diversificada que integra diversas fontes de informação e recursos pedagógicos. Ela se baseia em atividades adaptadas de dissertações relacionadas ao tema, bem como em materiais de livros didáticos do Ensino Fundamental e conteúdos destinados aos alunos envolvidos no Programa de Iniciação Científica da OBMEP[3]. Algumas atividades foram criadas pela pesquisadora responsável.

O referencial teórico recomendado para embasar essa abordagem pode ser encontrado no capítulo 3 da dissertação. Adicionalmente, foram utilizados vídeos de canais no YouTube para explorar aspectos históricos dos Números Inteiros, enriquecendo, assim, o conteúdo apresentado.

Para a condução das atividades em sala de aula, foram empregados diversos recursos pedagógicos. Isso incluiu a distribuição de listas de atividades impressas, o uso de um quadro branco, projeção através de Datashow, a utilização de dispositivos Chromebooks, a ferramenta Geogebra para fins de verificação, construção e até mesmo jogos interativos, bem como a criação de jogos em cartolina, como o “Jogo dos Números Binários”.

A coleta de dados foi realizada de maneira abrangente, por meio de um formulário eletrônico e também por meio do registro de fotografias das atividades realizadas pelos alunos. A descrição detalhada de cada uma das aulas pode ser encontrada no capítulo 4 deste trabalho, fornecendo um panorama completo do desenvolvimento e implementação das atividades propostas.

[3] O Portal da OBMEP (www.portaldaobmep.impa.br) oferece gratuitamente uma variedade de materiais relacionados à grade curricular do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, além de tópicos adicionais.

1. AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: aplicação e resultados

Incialmente, foi programada a execução do projeto para o ano de 2021, começando com a aplicação do teste diagnóstico aos alunos do primeiro (1º) ano do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Olímpio Cunha, localizada em Cariacica, ES. Em face da pandemia COVID-19, o período letivo do ano de 2021 mal havia começado e o governo determinou a quarentena, de 18 de março a 4 de abril, quando todo o Estado foi para o risco extremo. Somente em junho as escolas foram autorizadas a retomar as aulas presenciais, porém, na modalidade de ensino híbrido. Durante esse período, a presença dos alunos na escola foi aquém do esperado em virtude de não ser obrigatória a frequência às aulas, e por causa disso resolveu-se incluir na pesquisa as turmas de outras duas séries (2º e 3º anos) do Ensino Médio.

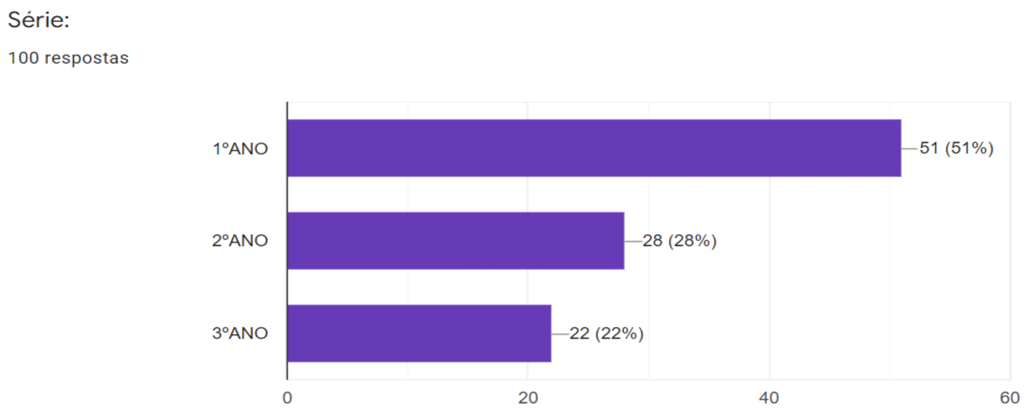
Para começar, em junho de 2021 foi aplicado um teste diagnóstico a 32 alunos do Ensino Médio (1º, 2º e 3º anos), em material impresso. Durante a realização do teste, os alunos se mostraram desmotivados e, assim, em poucos minutos, devolveram as avaliações com as alternativas marcadas de forma aleatória (chute), tornando a pesquisa inconclusiva. Em julho daquele mesmo ano, a frequência às aulas se tornou obrigatória, mas somente em novembro decidiu-se retomar a pesquisa com a elaboração de uma nova avaliação para um número maior de alunos. Desta forma, em novembro de 2021, um novo teste diagnóstico foi aplicado a 29 alunos do 1º ano e 22 alunos do 3º ano; e em dezembro de 2021, mais 28 alunos, agora do 2º ano, totalizando 79 alunos avaliados em 2021. Haja vista as dificuldades surgidas durante o ensino híbrido para a execução do projeto (2021), foi estabelecido aplicar o teste a mais 21 alunos da 1ª série do Ensino Médio em fevereiro de 2022, e, precisamente naquela turma, seria desenvolvida a sequência didática planejada. Dessa forma, os dados apresentados a seguir correspondem a um total de 100[4] alunos do Ensino Médio, distribuídos entre os 1º, 2º e 3º anos (Gráfico 1).

O teste diagnóstico foi elaborado a partir de questões retiradas de provas de concursos de nível médio, vestibulares e ENEM, ou seja, os conteúdos exigidos são os estudados na Educação Básica. Em específico, são questões que podem ser resolvidas utilizando os conceitos relacionados com o algoritmo da divisão euclidiana

[4] Embora o Gráfico 1 contabilize 101 alunos participando da avaliação diagnóstica, somente houve 100 respostas. Isso devido a uma aluna ter marcado no formulário que cursava o 1º e também o 2º ano, assim sendo contada duas vezes. Na época, ela cursava o 2º ano do Ensino Médio.

e algumas propriedades resultantes desta operação. Esta avaliação conteve dez (10) questões de múltipla escolha, com cinco (5) alternativas cada e foi realizada em um formulário eletrônico, utilizando Chromebooks, disponibilizados pela escola em que a pesquisa se realizara. O teste foi configurado de forma que os alunos não pudessem acessar outra página durante a sua realização. Além disso, o uso do celular não era permitido. Foram disponibilizadas duas aulas de 50 minutos cada (100 minutos) para a realização da avaliação diagnóstica.

Gráfico 1 – Total de alunos por série que participaram da pesquisa



Fonte: o autor (2022)

A seguir, serão descritas as questões com os resultados da avaliação:

1 - (ENEM/2015) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

- Cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
- Todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
- Não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é:

a) 2

b) 4

c) 9

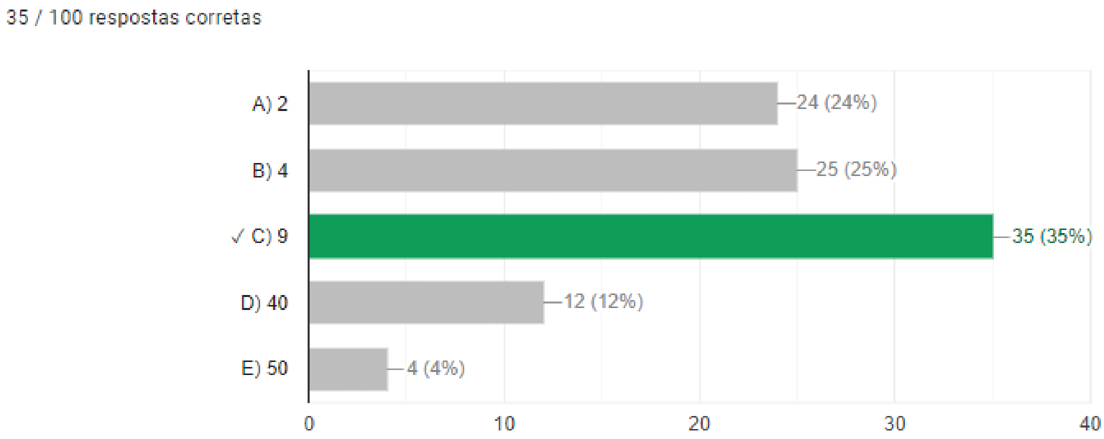
d) 40

e) 50

Resposta correta: C.

Para resolver essa questão, era preciso relacionar o problema ao cálculo do máximo divisor comum dos números 320 e 400, mdc(320, 400)=80, cujo resultado seria o número de ingressos recebidos por cada escola. Logo, haveria um mínimo de 4+5=9 escolas escolhidas para obter os 720 ingressos. Somente 35% dos alunos acertaram essa questão, e foi a alternativa mais marcada.

Gráfico 2 – Total de acertos da questão 1 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

2 - (ESPM SP/2017) Dividindo-se o número natural N por 13, obtém-se o quociente Q e resto R. Aumentando-se 2 unidades no dividendo e mantendo-se o divisor, o quociente aumenta de 1 unidade e a divisão é exata. Sabendo-se que Q + R = 16, podemos afirmar que os divisores primos de N são:

a) 2 e 19

b) 2, 3 e 13

c) 3 e 17

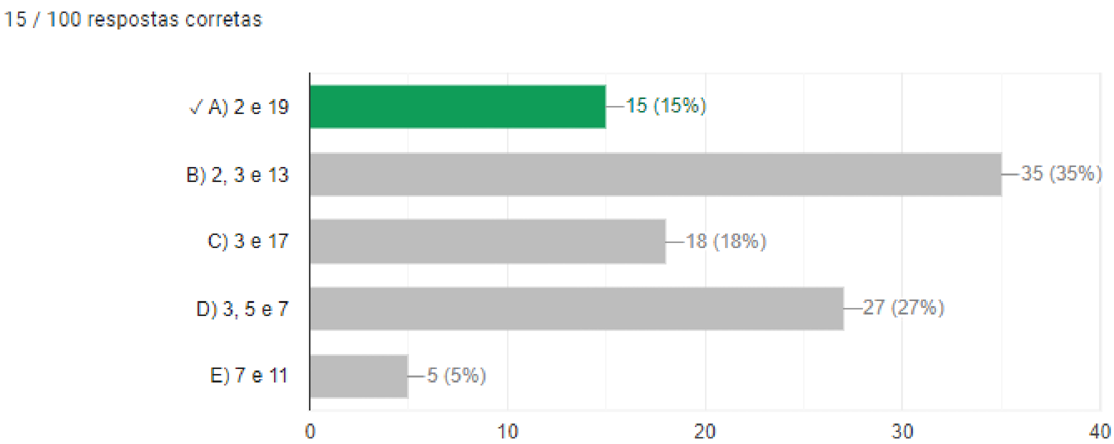
d) 3, 5 e 7

e) 7 e 11

Resposta correta: A.

Esta questão explora o conhecimento da relação fundamental da divisão. Do enunciado, N=13Q+R e N+2=13(Q+1), donde R=11. Como Q + R = 16, então Q=5 e N=76, cuja fatoração em fatores primos resulta $N=2^2.19$. A porcentagem de alunos que acertaram esta questão (15%) foi menor que da questão anterior e, além disso, a resposta correta foi a penúltima alternativa mais marcada.

Gráfico 3 – Total de acertos da questão 2 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

3 - (G1-IFSC/2017) Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles. Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

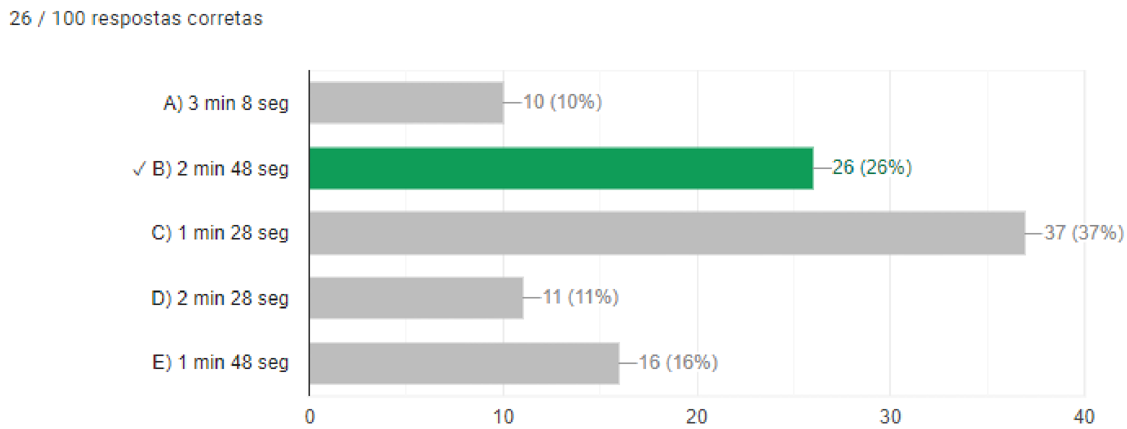
Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?

a) 3 min 8 seg
b) 2 min 48 seg
c) 1 min 28 seg
d) 2 min 28 seg
e) 1 min 48 seg

Resposta correta: B.

Uma maneira de resolver essa questão é associar o problema ao cálculo do mínimo múltiplo comum de 24 e 28, *mmc*(24,28)=168, cujo resultado é o tempo mínimo transcorrido para os amigos se encontrarem novamente no ponto da largada (168seg = 2min 48seg). A alternativa correta foi a segunda mais marcada pelos alunos, com 26% de acertos.

Gráfico 4 – Total de acertos da questão 3 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

4 - (ENEM/2009) Análise: O sistema decimal é um sistema de numeração de posição que utiliza a base dez. Esse sistema utiliza os dez algarismos indo-arábicos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), que servem para contar unidades, dezenas, centenas etc., da direita para a esquerda. Por exemplo, na representação comum, o numeral 345 pode ser escrito como: $3 .10^2 + 4 .10^1 + 5 .10^0$ (3 centenas, 4 dezenas e 5 unidades).

O sistema binário é um sistema de numeração decimal em que todas as quantidades se representam com base em dois algarismos indo-arábicos: 0 e 1. Esse sistema é utilizado em computadores digitais, que trabalham com dois níveis de tensão, denominados de ligado e desligado. Na representação binária, o numeral 101 pode ser convertido para o sistema decimal da seguinte forma: $1.\ 2^2 + 0.\ 2^1 + 1.\ 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5$. Portanto, o binário 101 é o decimal 5. Nos computadores, na entrada, via teclado, os dados numéricos decimais são convertidos em binários. Na saída, via monitor, os dados binários são convertidos em decimais. Assim, a velocidade 1111, em sistema binário, equivale a uma velocidade, no sistema decimal, com unidade em m/s, de:

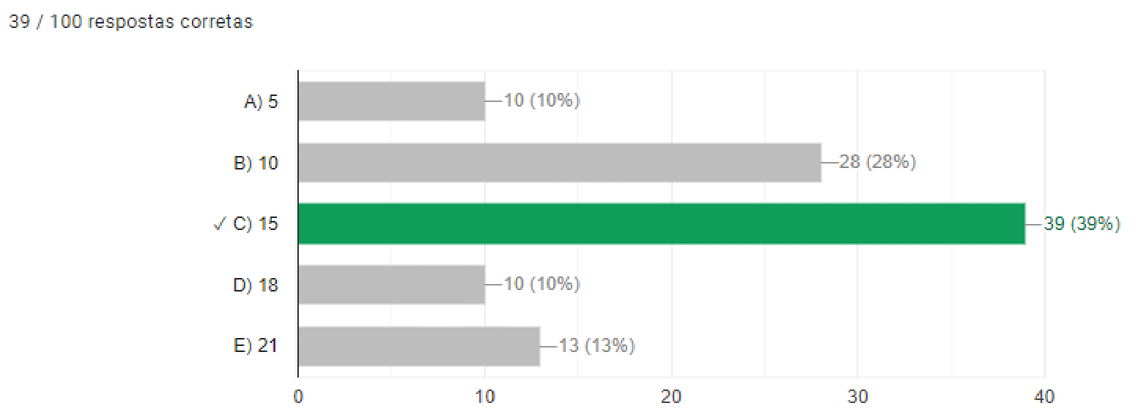
a) 5
b) 10
c) 15
d) 18
e) 21

Resposta correta: C.

Esta é uma questão que envolve o sistema de numeração posicional de base 2, isto é, o sistema binário de numeração, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Embora a questão descreva a representação decimal de um número e a conversão de um número binário a decimal, poucos alunos (39%) conseguiram resolver o problema. Contudo, a alternativa correta foi a mais marcada nesta questão.

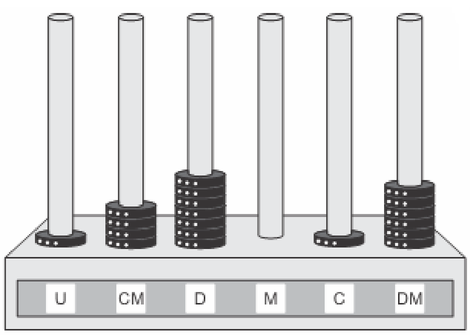
Gráfico 5 – Total de acertos da questão 4 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

5 - (ENEM/2016) O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda. Entretanto, no ábaco da Figura 1, os adesivos não seguiram a disposição usual.

Figura 1 – Ábaco formado por hastes apoiadas em uma base



Fonte: inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016

Nessa disposição, o número que está representado na figura é:

a) 46.171

b) 147.016

c) 171.064

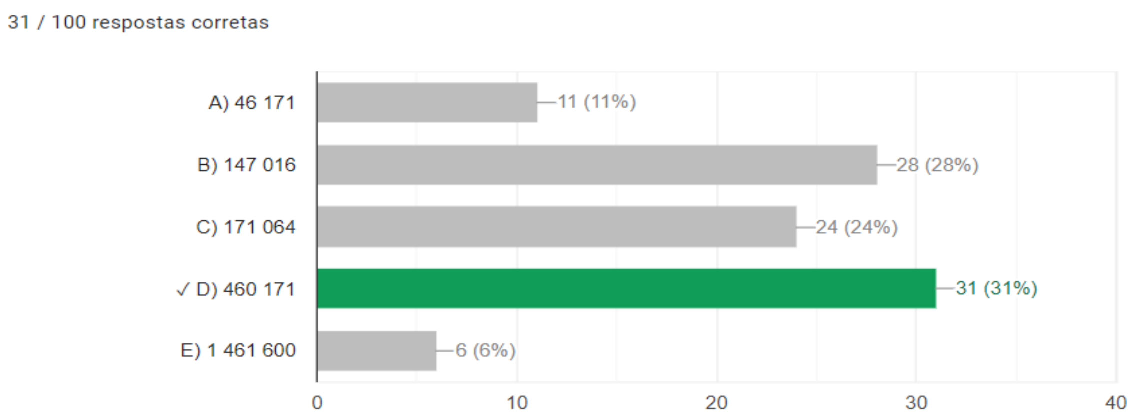
d) 460.171

e) 1 461.600

Resposta correta: D.

Este problema também envolve o sistema de numeração posicional, porém, de base decimal. Marcaram a alternativa correta 31% dos alunos, sendo esta a mais marcada. A segunda alternativa mais marcada corresponde ao número 147.016, que seria a resposta correta, se os adesivos seguissem a disposição usual. Esta opção sugere que o aluno não prestou atenção à mudança posicional dos adesivos no enunciado do problema. E a terceira resposta mais marcada, 171.064, corresponde à alternativa correta, porém, escrita na ordem inversa.

Gráfico 6 – Total de acertos da questão 5 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

6 - (FUSAR – UFF/2012) Os computadores utilizam o sistema binário ou de base 2, que é um sistema de numeração em que todas as quantidades se representam com base em dois números, ou seja, (0 e 1). Em um computador o número 2012, em base decimal, será representado, em base binária, por:

a) 110111.

b) 11111011100.

c) 111110111000.

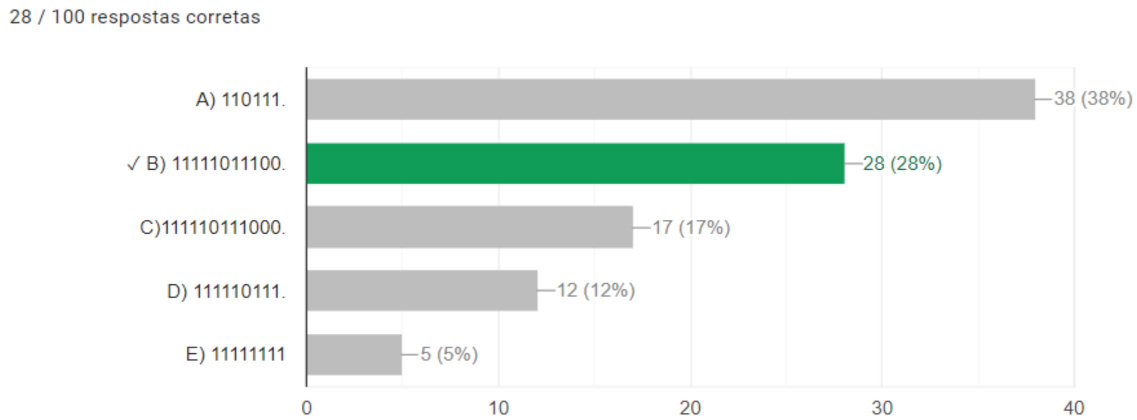
d) 111110111.

e) 11111111.

Resposta correta: B.

Como mencionado anteriormente nas questões 4 e 5, esta também é uma questão que envolve o sistema de numeração posicional, no caso de base 2, isto é, o sistema binário de numeração. Para resolver o problema, podia se aplicar sucessivamente a divisão euclidiana para converter 2012, na base decimal, para sua representação binária 11111011100. Como podemos observar no Gráfico 7, poucos alunos (28%) conseguiram resolver o problema.

Gráfico 7 – Total de acertos da questão 6 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

7 - (FGV /2016) O resto da divisão do número 6^{2015} por 10 é igual a:

a) 8.

b) 6

c) 5

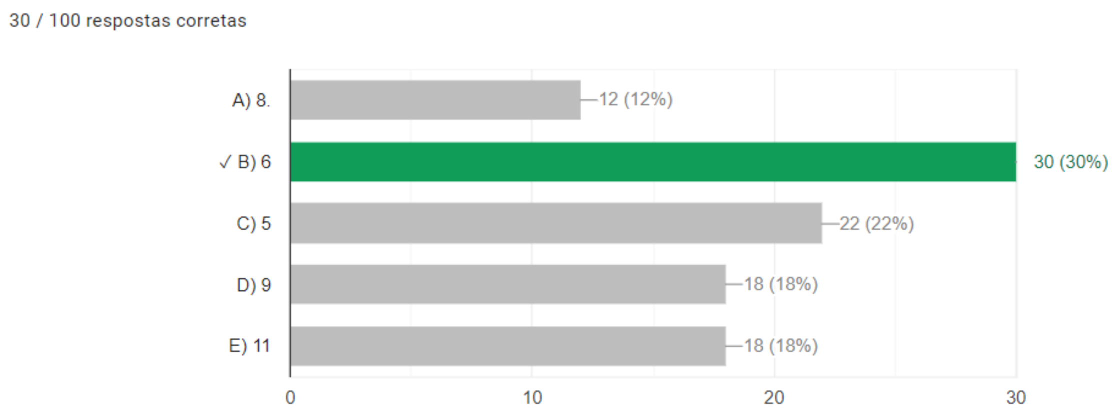
d) 9

e) 11

Resposta correta: B.

Este problema pode ser resolvido sabendo que, na divisão euclidiana de um número por 10, o resto é o algarismo das unidades deste número. Agora, o algarismo das unidades de 6^n, $n \in \mathbb{N}$, é sempre 6, o que pode ser provado por indução em $n \in \mathbb{N}$ ou usando o resultado de forma sucessiva: “o resto do produto de dois números divididos por d, é o produto dos restos de cada número quando dividido por d”. Trinta por cento (30%) dos alunos acertaram esta questão.

Gráfico 8 – Total de acertos da questão 7 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

8 - (COPEVE-UFAL/2017) Dadas as afirmativas,

I. Se x e y são dois inteiros pares, então a diferença x – y é um inteiro par.

II. Se x é um inteiro par e y é um inteiro ímpar, então o produto x^2y^2 é um inteiro par.

III. Se x e y são dois inteiros ímpares, então a soma x + y é um inteiro ímpar.

Verifica-se que está(ão) correta(s):

a) I, apenas.

b) III, apenas.

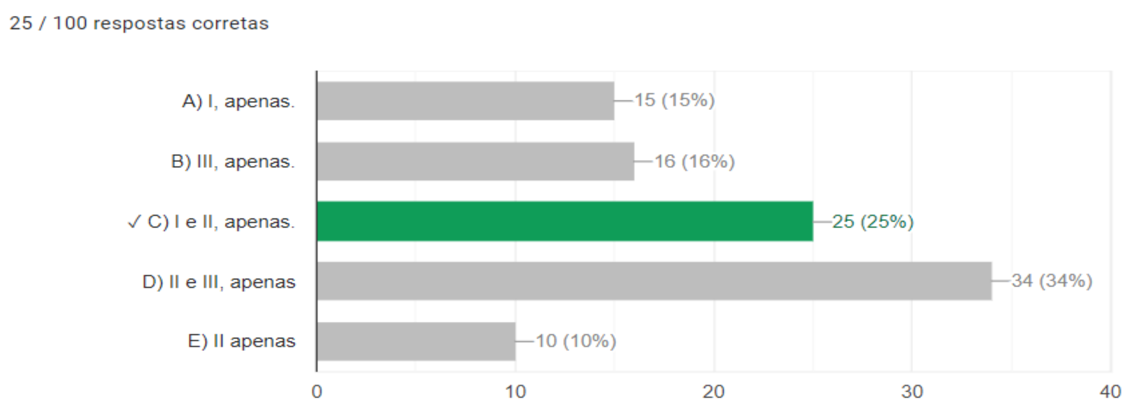
c) I e II, apenas.

d) II e III, apenas

e) II apenas.

Resposta correta: C.

Gráfico 9 – Total de acertos da questão 8 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

A resolução deste problema exigia o conhecimento de paridade de um número. Mesmo sem a utilização de técnicas algébricas de verificação, é possível tirar conclusões (exemplos/contraexemplos) fazendo verificações numéricas, mas poucos alunos (25%) conseguiram resolver a questão. Pelo menos 50% dos alunos consideraram como verdadeira a sentença III, que é falsa (quem marcou as alternativas b e d).

9 - (CRF SC–IESES/2012) Abaixo apresentamos quatro números em suas representações binárias.

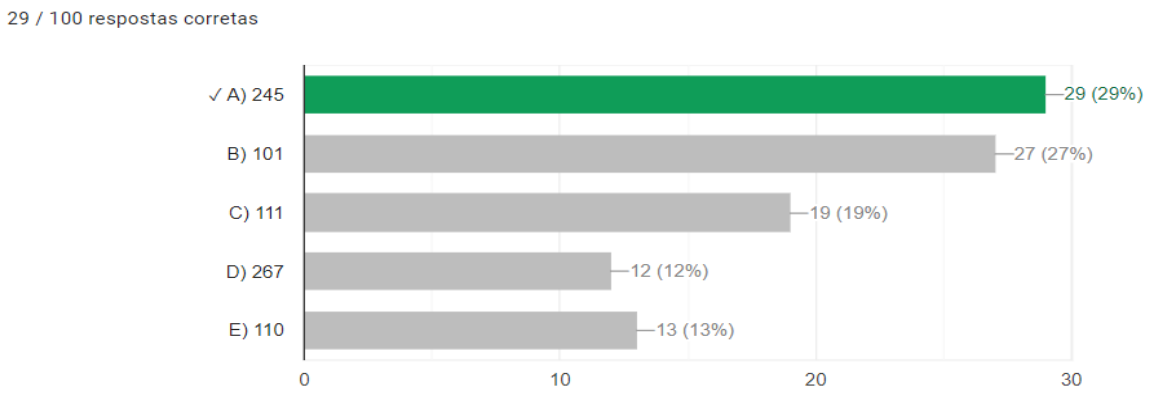
1) 0101001
2) 1101001
3) 0001101
4) 1010110

Assinale a alternativa que apresenta o somatório dos 4 números acima convertidos para o formato decimal.

a) 245
b) 101
c) 111
d) 267
e) 110

Resposta correta: A.

Gráfico 10 – Total de acertos da questão 9 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

Novamente, temos uma questão que aborda o sistema binário de numeração. Inclusive, para calcular a soma total, podemos proceder como em uma soma decimal: $2\times2^6+2\times2^5+1\times2^4+3\times2^3+2\times2^2+1\times2^1+3\times2^0=245$. Essa questão também possui uma porcentagem baixa de acertos (29%), contudo, a alternativa correta foi a mais marcada.

10 - (FCC - 2012 - TST) Pedro é um atleta que se exercita diariamente. Seu treinador orientou-o a fazer flexões de braço com a frequência indicada na tabela. No dia de seu aniversário, Pedro fez 20 flexões de braço.

Figura 2 – Frequência de exercícios feita por Pedro durante a semana

Dia da semana	Número de flexões
2ª e 5ª feiras	40
3ª e 6ª feiras	10
4ª feiras	20
Sábados	30
Domingos	nenhuma

Fonte: A casa do concurseiro/apostila

No dia do aniversário de sua namorada, 260 dias depois do seu, Pedro

a) não fez flexão.

b) fez 10 flexões.

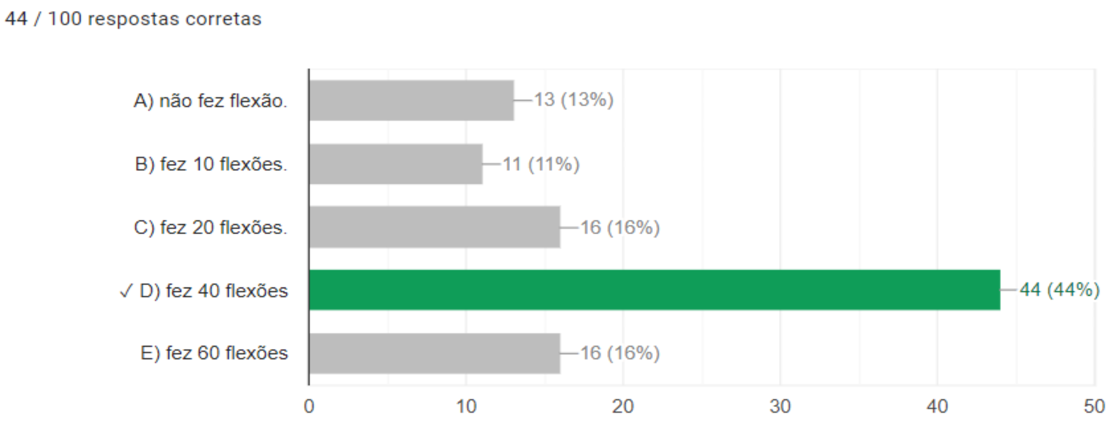
c) fez 20 flexões.

d) fez 40 flexões.

e) fez 60 flexões

Resposta correta: D.

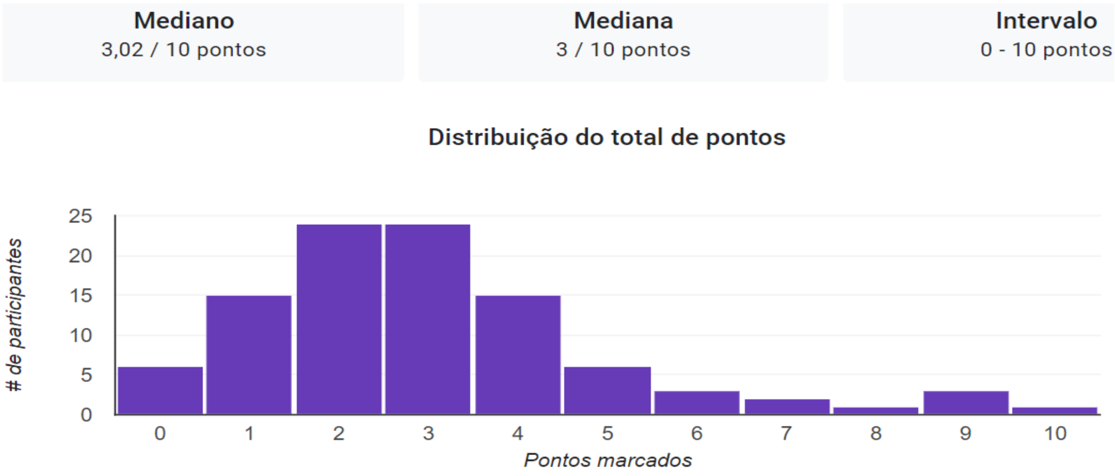
Gráfico 11 – Total de acertos da questão 10 do teste 1



Fonte: o autor (2022)

Esta questão pode ser resolvida usando o resto da divisão euclidiana de 260 por 7, $260=37\times7+1$, isto é, após 37 semanas (259 dias) que iniciam na quinta feira, resulta que o 260º dia cairá em uma quinta-feira. 44% dos alunos acertaram esta questão, sendo a mais acertada dentre as 10, enquanto a segunda questão foi a menos acertada, apenas 15%.

Gráfico 12 – Gráfico geral de acertos relativo às 10 questões do teste 1

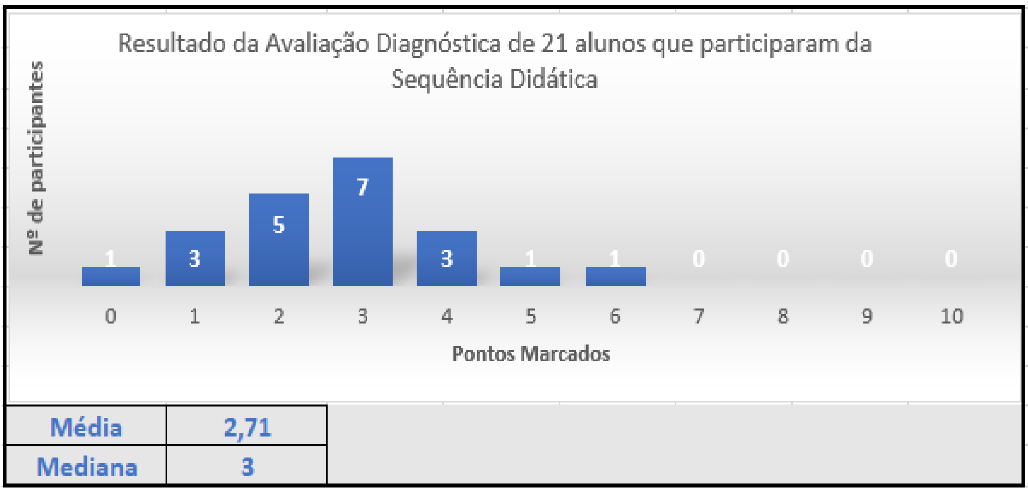


Fonte: o autor (2022)

Para concluir, no Gráfico 12 é mostrado o número de acertos dos alunos relativo às 10 questões da Avaliação diagnóstica. Podemos perceber que 68% dos alunos acertaram no máximo 3 das 10 questões aplicadas e somente 10% dos alunos acertaram 6 ou mais questões, sendo uma porcentagem reduzida de estudantes com nível de aprendizado considerado bom sobre o tema.

Para efeito de comparação, no Gráfico 13 é mostrado o número de acertos de 21 alunos que realizaram a avaliação diagnóstica em fevereiro (2022) – os mesmos eram da turma na qual seria desenvolvida a sequência didática. Podemos perceber que 76,19% dos alunos acertaram no máximo 3 das 10 questões aplicadas e menos de 5% deles acertaram 6 ou mais questões, sendo uma porcentagem menor em comparação com o resultado geral dos alunos que fizeram o teste (Gráfico 12).

Gráfico 13 – Gráfico geral de acertos relativo às 10 questões do teste 1-turma 2022



Fonte: o autor (2022)

Embora uma avaliação discursiva possibilitasse uma análise mais ampla sobre habilidades de argumentação, originalidade e coerência, bem como a capacidade de identificar problemas e propor soluções, a avaliação objetiva utilizada no projeto foi a adequada para o momento que se estava vivenciado (irregularidade da presença dos alunos nas escolas e desmotivação para os estudos) – e confiável para determinar quais conteúdos o aluno absorveu e quais não, nas séries anteriores, indicando onde havia a necessidade de reforços e correções de rumo, isto é, uma guia para estabelecer os temas que seriam abordados com mais ênfase na sequência didática.

2. A DIVISÃO EUCLIDIANA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

2.1 A Divisão Euclidiana na BNCC

Desde 2017, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem a função de orientar um currículo mínimo que cada escola deverá cumprir no período escolar do aluno.

Nesse documento, foram definidas para cada ano e cada disciplina habilidades específicas, ou seja, aprendizagens para que competências específicas de cada componente curricular sejam desenvolvidas ao longo da Educação Básica. É por meio do aprimoramento dessas habilidades que o aluno adquirirá as competências gerais propostas pela BNCC. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas (BRASIL, 2017, p. 28). O agrupamento, tanto das unidades temáticas quanto dos objetos de conhecimento e habilidades relacionadas a eles, é uma proposta da BNCC.

A BNCC propõe cinco unidades temáticas para serem desenvolvidas no Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística; e dentre essas, a temática “Números” inclui o Teorema da Divisão Euclidiana, tema central da nossa pesquisa.

A temática “Números” está presente na BNCC em várias etapas da Educação Básica, e o objetivo é que os alunos, ao final do Ensino Fundamental, tenham habilidades para resolver problemas envolvendo os números naturais, inteiros e racionais em cada operação. A compreensão de cada uma dessas habilidades depende de como elas se conectam com as habilidades adquiridas nos anos anteriores, ou seja, de acordo com o documento, as noções Matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas a cada ano, levando em consideração o conhecimento prévio dos alunos (BRASIL, 2017, p. 269). Além disso, o documento propõe que o aluno seja capaz de aplicar o conhecimento adquirido em vários outros contextos e, para isso, a unidade temática não deve ser transmitida de forma fragmentada.

O tema “Divisão Euclidiana” é mencionado na BNCC apenas no 6º ano do Ensino Fundamental, embora ele se faça presente em todo o currículo de matemática, em diversos tópicos como: o estudo da paridade de um número; a determinação do MDC e MMC entre números naturais; os sistemas de numeração decimal, binário, dentre outras bases; em problemas cíclicos, onde é utilizada a teoria do resto em suas resoluções; assim como em outros contextos.

A respeito dos objetos MDC e MMC, a BNCC sugere que no 7º ano, dentro do objeto de conhecimento Múltiplos e Divisores, pode-se incluir o Máximo Divisor Comum ou Mínimo Múltiplo Comum por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos. Ou seja, não há ênfase nos conceitos envolvidos, tampouco nos algoritmos que facilitam os cálculos na resolução de problemas, incluindo a interpretação geométrica.

O tema "Sistema de Numeração" é sugerido apenas no 6º ano e com foco exclusivo no sistema decimal. Outras bases de numeração não são mencionadas.

A Divisão Euclidiana é explicitamente ensinada apenas no 6º ano, mas essa abordagem muitas vezes não fornece um aprofundamento adequado das propriedades que envolvem todos os termos da operação, pois costuma focar principalmente no quociente, dando pouca ênfase à compreensão dos outros elementos envolvidos.

Em síntese, embora os documentos oficiais ocasionalmente mencionem que o estudo de tópicos da Teoria dos Números é necessário e não deve ser ignorado durante a educação escolar, eles não oferecem orientações claras sobre como esse tópico deve ser ensinado e frequentemente não enfatizam sua importância. Desta forma, concordamos com Almeida (2021) onde ressalta que

> [...] pode-se afirmar que o estudo da Teoria dos Números é, muitas vezes, negligenciado em documentos oficiais como foi o PCN num passado recente e como é a BNCC atualmente. Mesmo que afirmem, em alguns momentos, que seu estudo é necessário e não deve ser abandonado durante a caminhada escolar, pouco se faz referência a tais temas como sendo importante de serem trabalhados, nem ao menos como temas transversais, tampouco a abordagem ideal para que estes assuntos sejam tratados. (ALMEIDA, 2021, p. 23)

Com o objetivo de examinar a introdução e o nível de profundidade com que esses temas são abordados, realizaremos um estudo em duas coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º ano) que foram aprovadas no PLND em 2017 e 2020.

2.2 A Divisão Euclidiana nos livros didáticos

Considerando o objetivo da nossa pesquisa investigar o ensino e aprendizado relacionados ao Teorema da Divisão Euclidiana às diversas aplicações que derivam desta operação, foi realizado um estudo destes conteúdos e de temas afins nas duas últimas coleções de livros didáticos de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental, aprovadas pelo PNLD (2017 e 2020) e utilizadas na escola envolvida nesta pesquisa. O propósito deste estudo é avaliar em qual etapa do currículo escolar esses tópicos são introduzidos e qual o grau de profundidade com que são abordados. Essa investigação visa determinar a necessidade de uma revisão desses conceitos com uma abordagem mais abrangente no início do Ensino Médio. Além disso, para muitos professores, a única fonte de referência do conteúdo que será apresentado em sala de aula é o livro didático (GIMENEZ & LINS, 2001, p. 106). Deste modo, quando os manuais utilizados por eles apresentam uma abordagem superficial dos conceitos, isso pode resultar em uma aprendizagem igualmente superficial e incompleta, o que, por sua vez, demanda uma revisão dos temas em séries subsequentes.

Os livros didáticos verificados foram “Projeto Teláris” para os 6º, 7º, 8º e 9º anos, do autor Luiz Roberto Dante, aprovados pelo PNLD de 2017 e publicados pela Editora Ática em 2013 e “A Conquista da Matemática” para os 6º, 7º, 8º e 9º anos, dos autores Benedicto Castrucci e José Ruy Giovanni, aprovados pelo PNLD de 2020 e publicados pela editora FTD S.A em 2018.

A seguir, será feito um estudo da temática “Números” em cada obra, uma vez que este é o foco central de nossa pesquisa. Nossa investigação se concentrará no objeto Divisão Euclidiana, apresentado tanto de forma explícita, quanto implícita, entre outros conteúdos curriculares como Paridade, Divisibilidade, Números Primos, Sistema de Numeração, MDC e MMC.

2.2.1 Livro didático “A conquista da Matemática”

Em uma verificação preliminar, identificou-se que as obras (6º aos 9º anos) possuem uma estrutura organizada em unidades, as quais são subdivididas em capítulos. Com foco especial nos conteúdos relevantes para os temas desta pesquisa, conduziremos uma investigação que abrangerá os quatro volumes desta coleção.

A conquista da Matemática - 6º ano

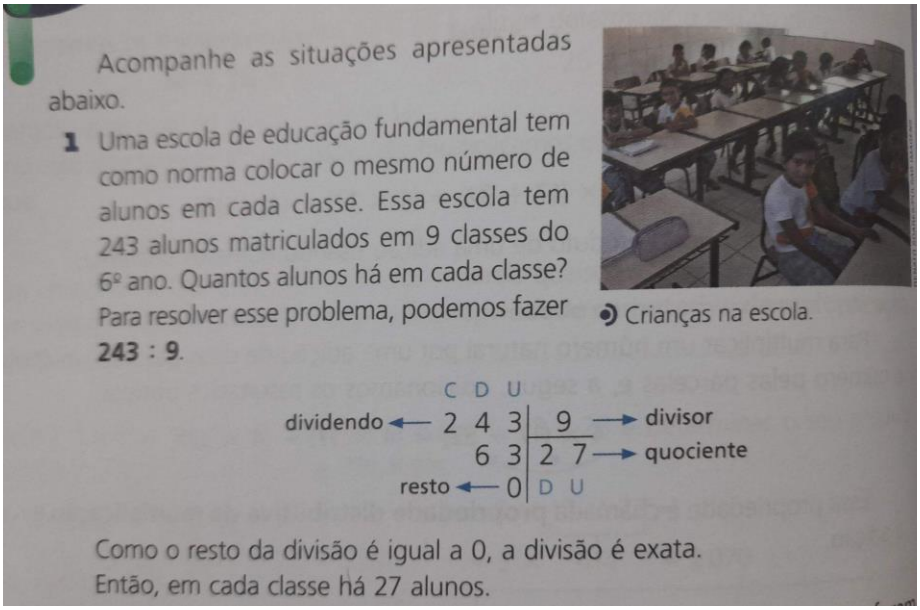
No livro do 6º ano, a temática “Números” está dividida em 5 unidades: Sistema de Numeração; Cálculos com Números Naturais; Múltiplos e Divisores; Forma Fracionária dos Números Racionais; e Forma Decimal dos Números Racionais.

A Unidade 1 começa com uma breve história dos números, explorando sistemas de numeração desenvolvidos por diferentes civilizações, como egípcios, babilônios, romanos e hindus. Isso proporciona uma reflexão sobre a importância dos números e suas diversas aplicações. Em seguida, concentra-se no Sistema de Numeração Decimal, destacando que, ao longo da história, houve vários sistemas de numeração, mas o Sistema Indo-Arábico é o predominante no mundo ocidental (habilidade EF06MA02). Finalmente, é introduzido o Conjunto dos Números Naturais como uma sequência numérica essencial em nosso cotidiano para contagens.

Na Unidade 2, o conteúdo se concentra nos Cálculos com Números Naturais, abrangendo as operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação ao longo de cinco capítulos. É no quarto capítulo que é abordada a relação fundamental da divisão.

O objeto “Divisão” é apresentado por meio de dois problemas contextualizados que se relacionam com essa operação. Ambas as situações envolvem a concepção de dividir uma quantidade em partes iguais, como ilustrado nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 – Atividade 1


Acompanhe as situações apresentadas abaixo.

1 Uma escola de educação fundamental tem como norma colocar o mesmo número de alunos em cada classe. Essa escola tem 243 alunos matriculados em 9 classes do 6º ano. Quantos alunos há em cada classe?

Para resolver esse problema, podemos fazer **243 : 9**.

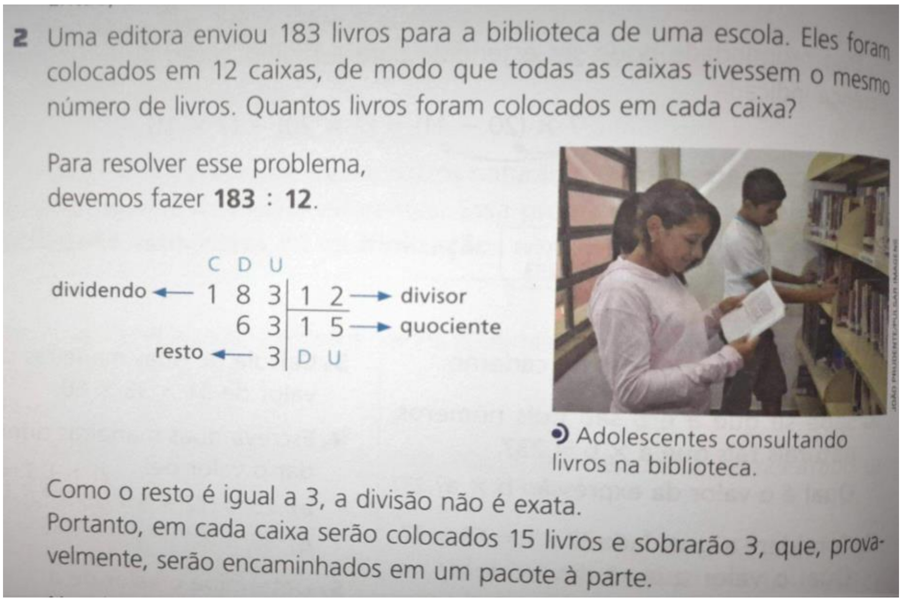
Crianças na escola.

C D U
dividendo ← 2 4 3 | 9 → divisor
6 3 | 2 7 → quociente
resto ← 0 | D U

Como o resto da divisão é igual a 0, a divisão é exata.
Então, em cada classe há 27 alunos.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

Figura 4 – Atividade 2



2 Uma editora enviou 183 livros para a biblioteca de uma escola. Eles foram colocados em 12 caixas, de modo que todas as caixas tivessem o mesmo número de livros. Quantos livros foram colocados em cada caixa?

Para resolver esse problema, devemos fazer **183 : 12**.

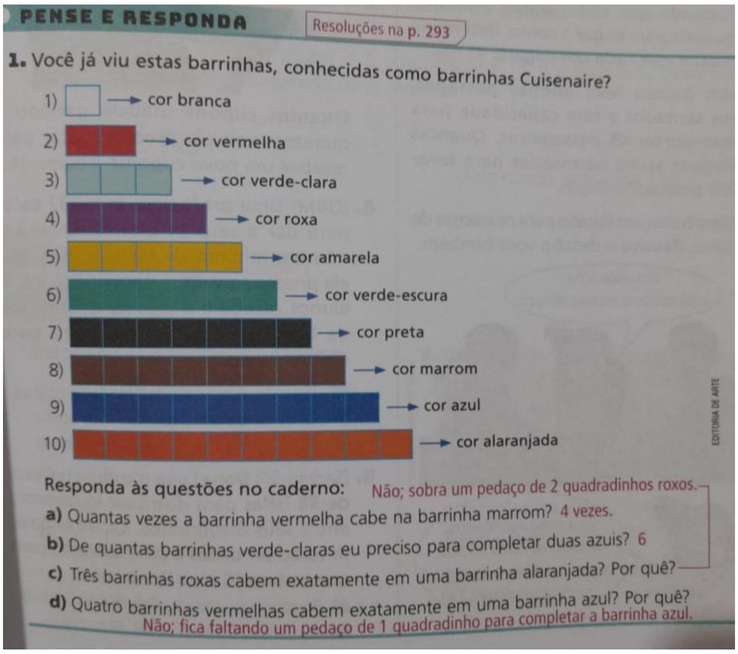
Adolescentes consultando livros na biblioteca.

Como o resto é igual a 3, a divisão não é exata.
Portanto, em cada caixa serão colocados 15 livros e sobrarão 3, que, provavelmente, serão encaminhados em um pacote à parte.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

As atividades destacam os termos relacionados às partes que compõem uma divisão, tais como dividendo, divisor, quociente e resto, uma vez que esses termos desempenham um papel crucial no estudo da relação fundamental da divisão. É sugerido que o professor revise o algoritmo da divisão de forma a assegurar que os alunos compreendam a lógica por trás do processo, em vez de realizá-lo de forma mecânica. No entanto, não há instruções específicas sobre como alcançar esse objetivo.

Figura 5 – Atividade 1 da seção pense e responda



PENSE E RESPONDA Resoluções na p. 293

1. Você já viu estas barrinhas, conhecidas como barrinhas Cuisenaire?

Responda às questões no caderno: Não; sobra um pedaço de 2 quadradinhos roxos.

a) Quantas vezes a barrinha vermelha cabe na barrinha marrom? 4 vezes.

b) De quantas barrinhas verde-claras eu preciso para completar duas azuis? 6

c) Três barrinhas roxas cabem exatamente em uma barrinha alaranjada? Por quê?

d) Quatro barrinhas vermelhas cabem exatamente em uma barrinha azul? Por quê? Não; fica faltando um pedaço de 1 quadradinho para completar a barrinha azul.

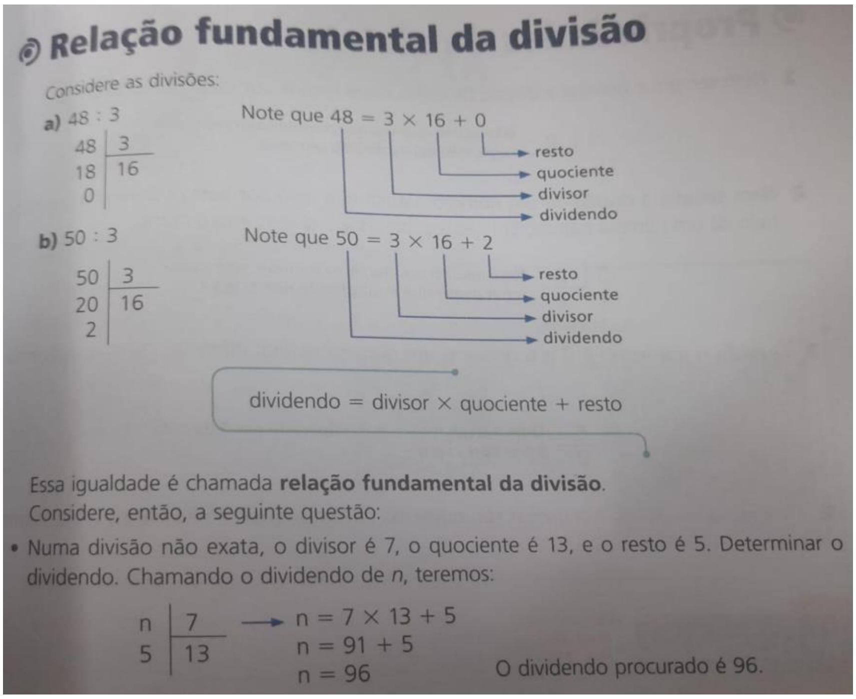
Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

Na seção “Pense e Responda”, há uma atividade utilizando barrinhas conhecidas como barrinhas Cuisenaire[5], cujo objetivo é associar a divisão de números naturais às ideias de “repartir em partes iguais” e de “quantas vezes cabe” e trabalhar com problemas que envolvem a divisão. Veja na Figura 5.

Há uma sugestão no livro do professor para que os alunos resolvam divisões com números grandes de maneira que percebam que a resolução por desenhos e material manipulável fica muito trabalhosa, portanto, o uso do algoritmo se faz necessário por ser um método prático, não entanto, não há exemplos e atividades no livro do aluno com números grandes.

A relação fundamental da divisão nesta obra objetiva estabelecer uma conexão entre a divisão e a multiplicação por meio da seguinte relação: dividendo = divisor x quociente + resto (Figura 6).

Figura 6 – A Relação Fundamental da divisão



Relação fundamental da divisão

Considere as divisões:

a) 48 : 3 — Note que $48 = 3 \times 16 + 0$ (dividendo, divisor, quociente, resto)

b) 50 : 3 — Note que $50 = 3 \times 16 + 2$ (dividendo, divisor, quociente, resto)

dividendo = divisor × quociente + resto

Essa igualdade é chamada **relação fundamental da divisão**.

Considere, então, a seguinte questão:

- Numa divisão não exata, o divisor é 7, o quociente é 13, e o resto é 5. Determinar o dividendo. Chamando o dividendo de *n*, teremos:

$n = 7 \times 13 + 5$

$n = 91 + 5$

$n = 96$

O dividendo procurado é 96.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

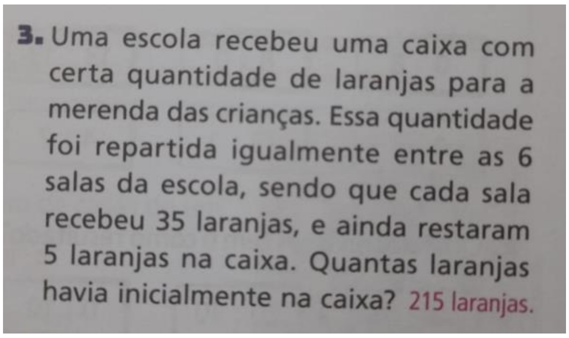
Percebe-se, na Figura 6, que a relação fundamental da divisão é usada de forma descontextualizada, apenas para encontrar um valor desconhecido, o dividendo. As atividades não proporcionam aos alunos uma compreensão completa das

---

5 As barrinhas coloridas foram confeccionadas e criadas pelo professor belga Emile-Georges Cuisenaire (1891 – 1980). O material, também chamado de Escala Cuisenaire, é simples e ajuda a criança a construir conceitos básicos de Matemática. O material Cuisenaire é constituído por uma série de barras de madeira, sem divisão em unidades e com tamanhos variando de uma até dez unidades. Cada tamanho corresponde a uma cor específica.

propriedades envolvidas nessa relação, como a unicidade do quociente e do resto, além de não deixar claro que o resto deve ser menor do que o divisor. Elas seguem o mesmo modelo da figura anterior, exceto por uma que atribui significado aos termos dessa relação. Entretanto, é o único problema contextualizado proposto na lista de atividades (Figura 7).

Figura 7 – Exercício 3


3. Uma escola recebeu uma caixa com certa quantidade de laranjas para a merenda das crianças. Essa quantidade foi repartida igualmente entre as 6 salas da escola, sendo que cada sala recebeu 35 laranjas, e ainda restaram 5 laranjas na caixa. Quantas laranjas havia inicialmente na caixa? 215 laranjas.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

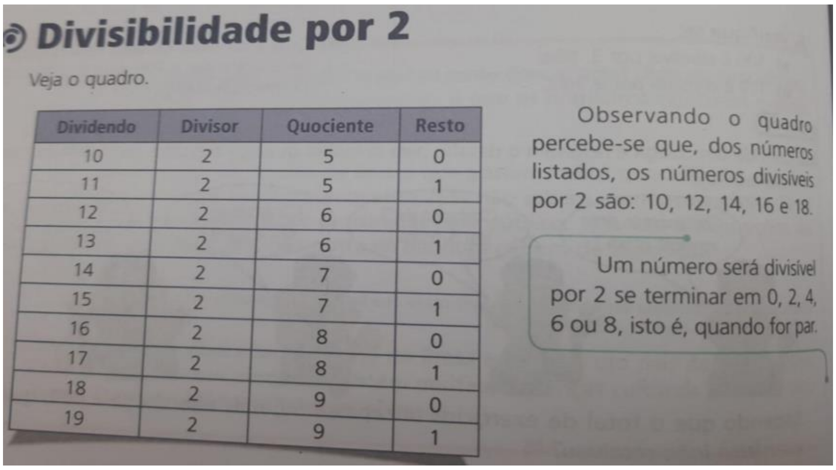
A unidade 4, Múltiplos e Divisores, é dividida em 4 capítulos: Noção de Divisibilidade; Critérios de Divisibilidade; Divisores e Múltiplos de um Número Natural; e Números Primos.

Os exercícios iniciais do capítulo 1 sobre Divisibilidade requerem do aluno a verificação por meio do cálculo mental se um Número Natural é ou não divisível por outro (GIOVANI JÚNIOR & CASTRUCCI, 2018, p. 105). As atividades propostas trabalham as ideias relacionadas a ser “divisível por” ou “divisor de” por meio da determinação do resto de uma divisão, com ou sem o uso da calculadora.

No capítulo 2, são abordados os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000, nessa ordem, utilizando o algoritmo da divisão para justificá-los.

Para mostrar a divisibilidade por 2, propõem-se que seja construído um quadro para verificar, através da Divisão Euclidiana, o resto da divisão de um número por 2 (Figura 8). O objetivo é que o aluno conclua que um número é divisível por 2 quando ele é par (se terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8), ou seja, quando na divisão deste número por 2, o resto seja igual a 0.

Figura 8 – Tabela para representar o critério de divisibilidade por 2



Divisibilidade por 2

Veja o quadro.

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
10	2	5	0
11	2	5	1
12	2	6	0
13	2	6	1
14	2	7	0
15	2	7	1
16	2	8	0
17	2	8	1
18	2	9	0
19	2	9	1

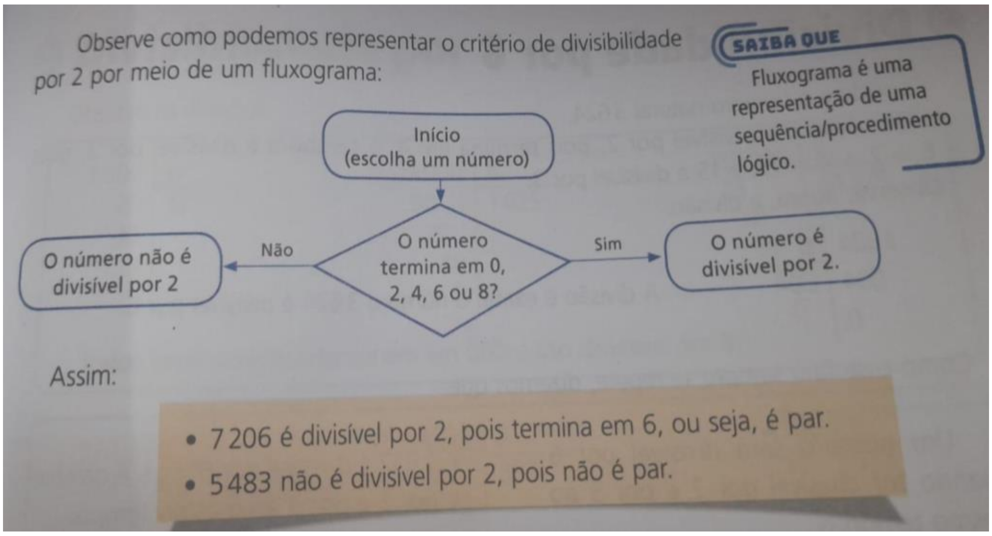
Observando o quadro percebe-se que, dos números listados, os números divisíveis por 2 são: 10, 12, 14, 16 e 18.

Um número será divisível por 2 se terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8, isto é, quando for par.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

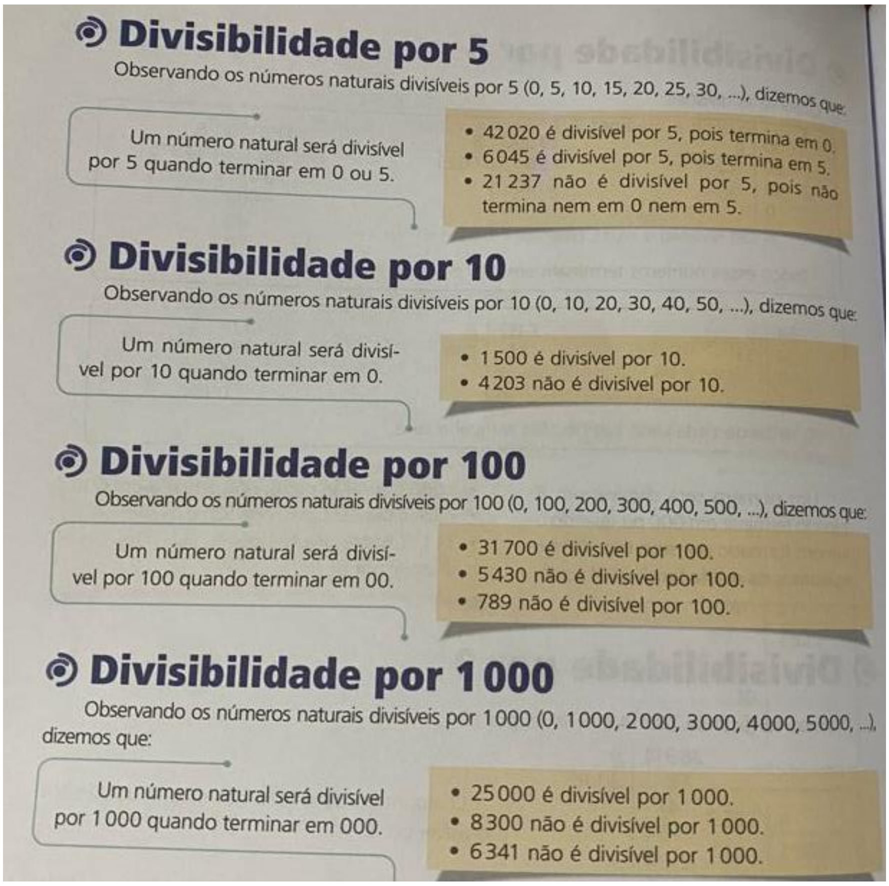
Em seguida, apresenta-se o critério de divisibilidade por 2 por meio de um fluxograma (Figura 9), sem explorar propriedades relacionadas a números pares e ímpares nesta seção.

Figura 9 – Fluxograma para representar o critério de divisibilidade por 2



Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

Figura 10 – Critério de divisibilidade por 5, 10, 100 e 1000



Divisibilidade por 5

Observando os números naturais divisíveis por 5 (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5.

- 42 020 é divisível por 5, pois termina em 0.
- 6045 é divisível por 5, pois termina em 5.
- 21 237 não é divisível por 5, pois não termina nem em 0 nem em 5.

Divisibilidade por 10

Observando os números naturais divisíveis por 10 (0, 10, 20, 30, 40, 50, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 10 quando terminar em 0.

- 1500 é divisível por 10.
- 4203 não é divisível por 10.

Divisibilidade por 100

Observando os números naturais divisíveis por 100 (0, 100, 200, 300, 400, 500, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 100 quando terminar em 00.

- 31 700 é divisível por 100.
- 5430 não é divisível por 100.
- 789 não é divisível por 100.

Divisibilidade por 1000

Observando os números naturais divisíveis por 1000 (0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 1000 quando terminar em 000.

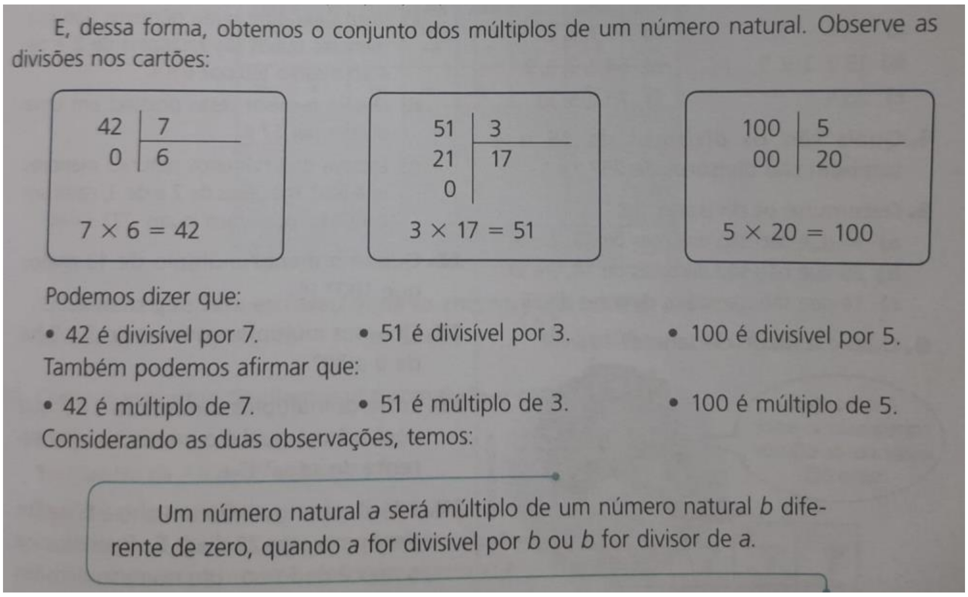
- 25 000 é divisível por 1000.
- 8300 não é divisível por 1000.
- 6341 não é divisível por 1000.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

Os critérios de divisibilidade de um número natural por 3, 6, 4, 8 e 9 são justificados a partir de exemplos de divisões euclidianas, onde verifica-se os restos dessas divisões e, em seguida, enunciam-se as respectivas regras de divisibilidade. Os critérios de divisibilidade por 5, 10, 100 e 1000 foram enunciados sem verificações, conforme mostra a Figura 10. O critério de divisibilidade por 7 não é apresentado no livro do aluno, apenas como sugestão no manual do professor. As atividades propostas visam oportunizar os alunos a aplicar os critérios de divisibilidade estudados.

No terceiro capítulo, que aborda "Divisores e Múltiplos de um Número Natural", são apresentados exemplos que demonstram o uso do algoritmo da divisão para estabelecer condições que permitem aos estudantes concluir que os fatores de um número específico também são seus divisores, como ilustrado na Figura 11. Além disso, os alunos devem compreender que a noção de múltiplo está intrinsecamente ligada à operação de multiplicação e que “ser múltiplo de” é equivalente a “ser divisível por”. Por exemplo, 132 é múltiplo de 11, pois 132 é divisível por 11, conforme podemos verificar na Divisão Euclidiana.

Figura 11 – Múltiplos de um Número Natural



E, dessa forma, obtemos o conjunto dos múltiplos de um número natural. Observe as divisões nos cartões:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 51 & 3 \\ \hline 21 & 17 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 5 \\ \hline 00 & 20 \end{array}$$

$7 \times 6 = 42$ $\quad$ $3 \times 17 = 51$ $\quad$ $5 \times 20 = 100$

Podemos dizer que:

- 42 é divisível por 7.
- 51 é divisível por 3.
- 100 é divisível por 5.

Também podemos afirmar que:

- 42 é múltiplo de 7.
- 51 é múltiplo de 3.
- 100 é múltiplo de 5.

Considerando as duas observações, temos:

Um número natural *a* será múltiplo de um número natural *b* diferente de zero, quando *a* for divisível por *b* ou *b* for divisor de *a*.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

Ou seja, a ideia de “ser múltiplo de” ou “ser divisível por” está associada ao resto da divisão ser igual a zero.

No capítulo 4, antes de começar a falar sobre números primos, é recomendado fazer uma rápida revisão dos critérios de divisibilidade, bem como dos conceitos de divisores e múltiplos de um Número Natural. Isso ajudará a compreender melhor o conteúdo e resolver os exercícios com mais facilidade.

Esse capítulo começa com uma tabela com os números de 1 a 9 e seus respectivos divisores e, a partir desta, define-se número primo e número composto. Em seguida, algumas verificações de números primos são feitas aplicando critérios de divisibilidade e utilizando a Divisão Euclidiana. Para reconhecer outros números primos é apresentado o Crivo de Eratóstenes. Por meio do procedimento prático conhecido como fatoração, é mostrado como um Número Natural composto pode ser decomposto em um conjunto de fatores, que podem ser primos ou não. A fatoração completa implica na transformação desse número em um produto composto exclusivamente por fatores primos. Para chegar à forma fatorada completa de um número recomenda-se, na obra, executar os seguintes passos:

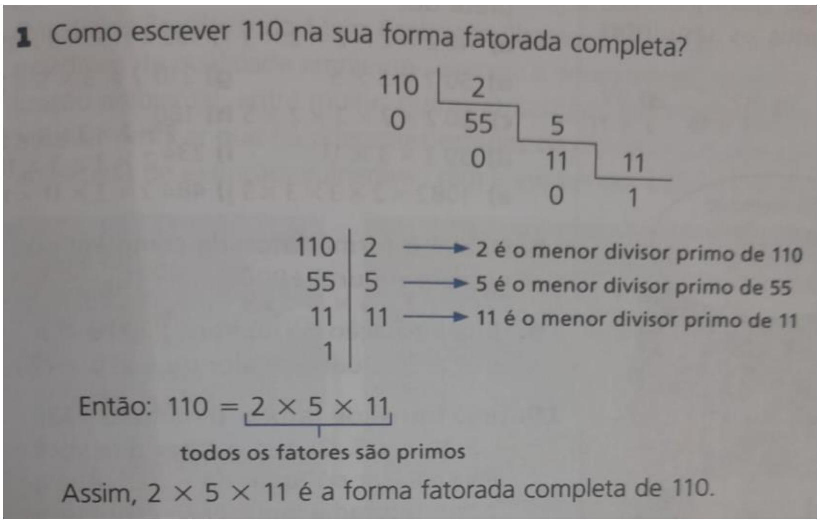
1º) dividir inicialmente o número dado por seu menor divisor primo;

2º) dividir o quociente obtido por seu menor divisor primo;

3º) repetir esse procedimento até obter quociente 1.

Veja na Figura 12.

Figura 12 – Decomposição em fatores primos


1 Como escrever 110 na sua forma fatorada completa?

$$\begin{array}{l|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

110 | 2 → 2 é o menor divisor primo de 110
55 | 5 → 5 é o menor divisor primo de 55
11 | 11 → 11 é o menor divisor primo de 11
1 |

Então: $110 = \underbrace{2 \times 5 \times 11}_{\text{todos os fatores são primos}}$

Assim, $2 \times 5 \times 11$ é a forma fatorada completa de 110.

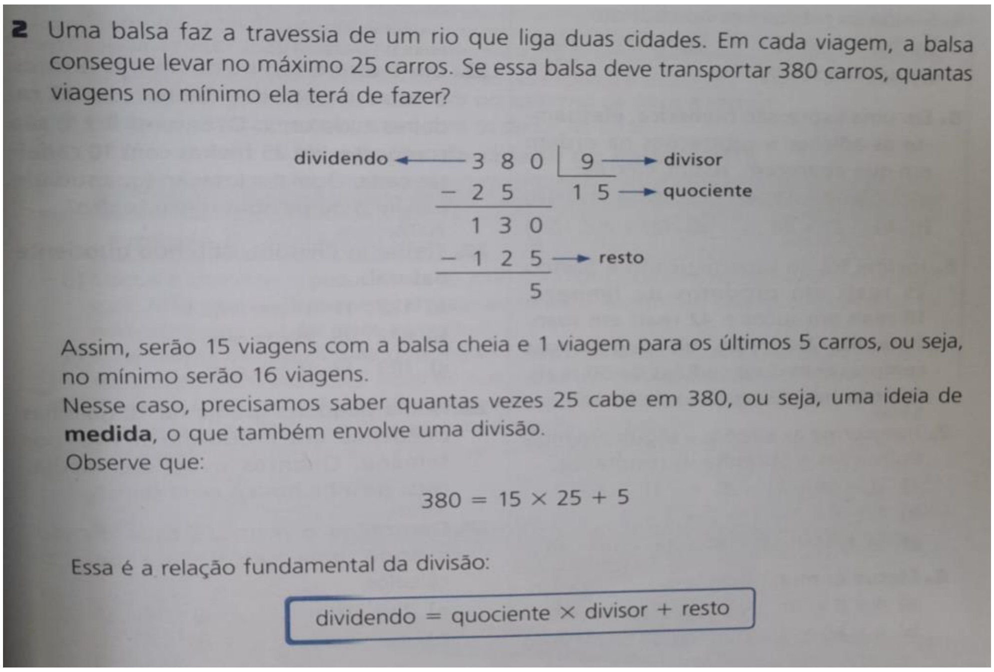
Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 6º Ano, 2018)

É possível notar que o método delineado para decompor um número em seus fatores primos pode levar o estudante a acreditar que é obrigatório começar a decomposição pelo menor divisor primo desse número e que a sequência dessa fatoração é relevante, o que não é verdade, pois a ordem dos fatores não afeta a representação da sua decomposição completa.

A Conquista da Matemática - 7º ano

A temática dos números é abordada em três unidades do livro, a saber: Números Naturais e Operações (Unidade 1); Conjunto dos Números Inteiros (Unidade 2); Conjunto dos Números Racionais (Unidade 4). A Unidade 1 é subdividida em três capítulos que tratam dos seguintes tópicos: os Números Naturais; as operações com Números Naturais; Divisores e Múltiplos de um Número Natural. Na Unidade 1, que retoma o estudo dos Números Naturais, são explorados os algoritmos previamente aprendidos nas séries anteriores. A relação fundamental da divisão ($dividendo = divisor \times quociente + resto$) é aplicada na resolução de um problema específico, exemplificado na Figura 13, que dá à relação uma ideia de medida.

Figura 13 – Atividade 2 utilizando a relação fundamental da divisão



2 Uma balsa faz a travessia de um rio que liga duas cidades. Em cada viagem, a balsa consegue levar no máximo 25 carros. Se essa balsa deve transportar 380 carros, quantas viagens no mínimo ela terá de fazer?

Assim, serão 15 viagens com a balsa cheia e 1 viagem para os últimos 5 carros, ou seja, no mínimo serão 16 viagens.
Nesse caso, precisamos saber quantas vezes 25 cabe em 380, ou seja, uma ideia de **medida**, o que também envolve uma divisão.
Observe que:

$$380 = 15 \times 25 + 5$$

Essa é a relação fundamental da divisão:

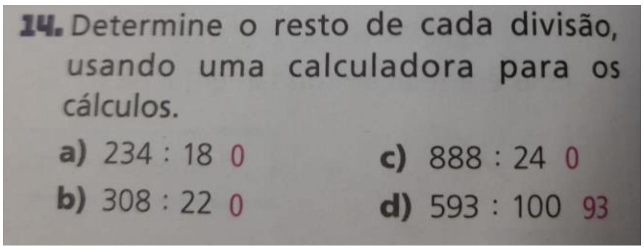
$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}}$$

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 7º Ano, 2018)

Percebe-se um erro no divisor da resolução do problema anterior (9 em vez de 25) e na indicação do resto (5), o que pode gerar dúvidas nos alunos, apesar de que na relação fundamental foram utilizados os coeficientes corretos.

A atividade de número 14 (Figura 14) permite levantar discussões sobre o significado do resto da divisão e a compreender a importância da relação fundamental da divisão. Nos casos dos itens a, b e c, é importante o aluno notar que, em divisões exatas, o quociente resultante na calculadora será um Número Natural, o que significa que o resto da divisão é igual a zero. Por outro lado, em divisões não exatas (item d), o quociente é o número antes da vírgula na resposta. Nestes casos, pode-se utilizar a relação fundamental da divisão para determinar o valor do resto.

Figura 14 – Exercício 14 para a determinação do resto



14. Determine o resto de cada divisão, usando uma calculadora para os cálculos.

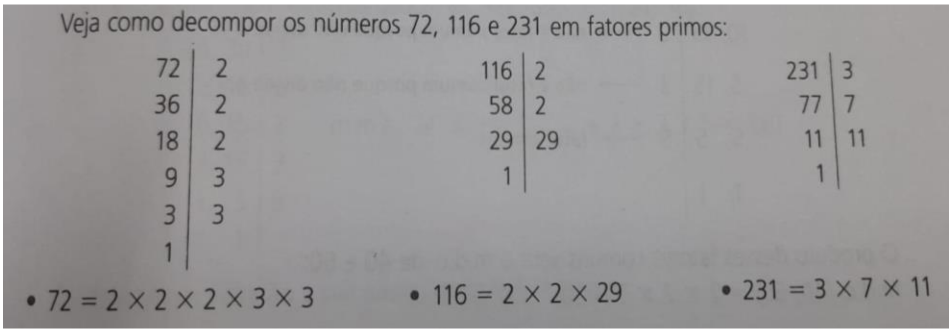
a) 234 : 18 0 **c)** 888 : 24 0
b) 308 : 22 0 **d)** 593 : 100 93

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 7º Ano, 2018)

Apesar da discussão que a atividade 14 pode gerar sobre o resto, ela é apresentada sem contextualização. O livro não propõe atividades que oportunizem aos alunos concluir que o resto da divisão deve ser menor que o divisor.

No capítulo 3 da Unidade 1, que trata dos Divisores e Múltiplos de um Número Natural, são retomados os conceitos de múltiplos e divisores de um Número Natural e de Números Primos. A decomposição em fatores primos ou a fatoração completa é feita da seguinte forma: toma-se o número que se quer decompor, divide-se esse número por um número primo que seja seu divisor, divide-se o quociente obtido por um número primo que seja seu divisor e, quando o quociente obtido for igual a 1, escreve-se a multiplicação com todos os divisores usados no processo (Figura 15).

Figura 15 – Decomposição em fatores primos



Veja como decompor os números 72, 116 e 231 em fatores primos:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

116	2
58	2
29	29
1	

231	3
77	7
11	11
1	

- $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
- $116 = 2 \times 2 \times 29$
- $231 = 3 \times 7 \times 11$

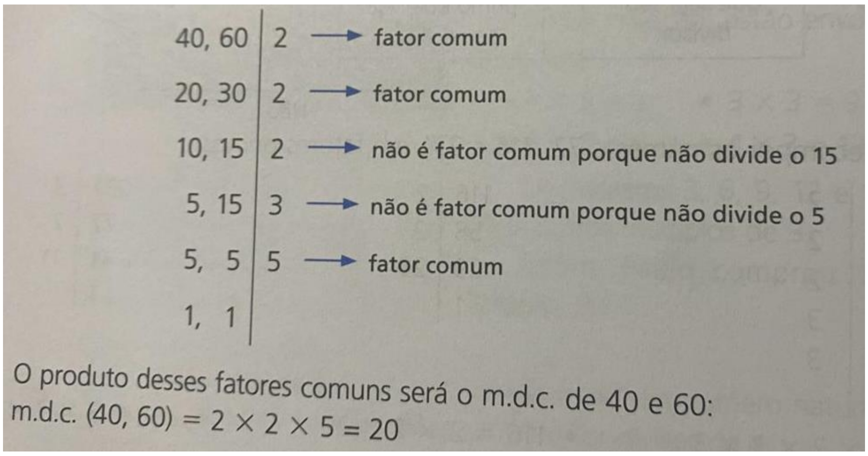
Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 7º Ano, 2018)

Os alunos devem compreender que, de todas as maneiras de escrever a fatoração de um número, apenas uma delas (a menos de sua ordem) determina a sua fatoração completa, que é aquela em que todos os fatores são primos (GIOVANI JÚNIOR & CASTRUCCI, 2018, p. 22).

O tópico do Máximo Divisor Comum (MDC) não foi incluído no livro didático do 6º ano, embora tenha sido abordado o conceito de "Divisores de um Número Natural". No entanto, o assunto é contemplado no livro do 7º ano. Na introdução desse tema, o processo se inicia pela determinação dos divisores dos números 40 e 60, de forma individual. Em seguida, identificam-se os divisores que são compartilhados por ambos os números e, por último, destaca-se o maior entre eles. A partir desse ponto, é definido o MDC.

O livro mostra também a determinação do MDC de dois ou mais números naturais através da decomposição em fatores primos destes números simultaneamente, considerando apenas os fatores primos comuns. Veja, na Figura 16, como foi calculado o MDC de 40 e 60.

Figura 16 – Determinação do MDC através da decomposição em fatores primos



40, 60	2	→ fator comum
20, 30	2	→ fator comum
10, 15	2	→ não é fator comum porque não divide o 15
5, 15	3	→ não é fator comum porque não divide o 5
5, 5	5	→ fator comum
1, 1		

O produto desses fatores comuns será o m.d.c. de 40 e 60:
m.d.c. (40, 60) = $2 \times 2 \times 5 = 20$

Fonte: Livro (A Conquista da Matemática - 7º Ano, 2018)

O produto desses fatores comuns será o MDC de 40 e 60, ou seja, $2 \times 2 \times 5 = 20$. Logo: $mdc(40{,}60) = 20$.

A definição do MDC e o algoritmo para calculá-lo são abordados, inicialmente, sem contextualização. Há uma sugestão no livro do professor como atividade complementar de uma situação contextualizada que envolve o MDC, mas fica a critério do professor explorá-la.

Para introduzir o tema “Mínimo Múltiplo Comum” (MMC), a seguinte situação é usada:

Um Número Natural N, diferente de zero, é o menor múltiplo de 12, 15 e 20 ao mesmo tempo. Qual é o número N?

Para resolver este problema, é sugerido que inicialmente sejam escritos os múltiplos de 12, 15 e 20, separadamente, e após comparação dos múltiplos em comum, seleciona-se o menor Número Natural, diferente de zero, entre eles. Esse menor múltiplo comum de 12, 15 e 20 é 60. A partir daí define-se MMC.

Outra forma sugerida para encontrar o MMC é a decomposição simultânea de 12, 15 e 20, considerando todos os fatores primos usados nas divisões dos três números dados (Figura 17).

Figura 17 – Cálculo do MMC de 12, 15 e 20 através da decomposição simultânea

12, 15, 20	2
6, 15, 10	2
3, 15, 5	3
1, 5, 5	5
1, 1, 1	

m.m.c. (12, 15, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 7º Ano, 2018)

Em seguida, os autores colocam um problema que pode ser resolvido através do cálculo do MMC, já expondo a sua solução (Figura 18).

Figura 18 – Atividade 2 sobre MMC

2 Dois navios fazem viagens entre dois portos: o primeiro navio viaja a cada 24 dias, e o segundo, a cada 30 dias. Se esses navios, em determinado dia, partirem juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos?

Para resolver esse problema, é necessário encontrar o número que representa o menor múltiplo comum dos números dados, ou seja, o m.m.c. (24, 30).

24, 30	2
12, 15	2
6, 15	2
3, 15	3
1, 5	5
1, 1	

m.m.c. (24, 30) = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

Os dois navios voltarão a sair juntos depois de 120 dias.

Fonte: livro (A Conquista da Matemática - 7º Ano, 2018)

Aqui, primeiramente se explora o algoritmo para depois dar um significado.

> O inconcebível de basear a aprendizagem em métodos somente algorítmicos, sem a proposição de problemas. Isso piora quando se trata de explicar os algoritmos depois de tê-los dado. O estudante não entende nada, a aprendizagem não é significativa. (GIMENEZ & LINS, 2001, p. 41).

Uma estratégia para abordar o tema e enriquecer o aprendizado é promover a exploração ativa dos conhecimentos prévios dos alunos. Isso pode ser alcançado através da criação de tabelas, análise e formulação de conjecturas com base nas informações do problema em questão. Essa abordagem visa capacitar os alunos, permitindo-lhes uma compreensão mais profunda e duradoura do conceito, levando-os à conclusão de que o MMC é a solução que se busca para resolver o problema.

Várias atividades de resolução de problemas envolvendo MDC e MMC são propostas na seção que se retoma o que foi aprendido na unidade, possibilitando que o aluno reveja todo o conteúdo estudado.

Na unidade 2 são retomadas as operações adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada, com o intuito de ampliar a noção de número que os alunos já têm construído. Todas as propriedades dessas operações que foram apresentadas para os Números Naturais são ampliadas para os Números Inteiros.

A Conquista da Matemática - 8º ano

Ainda sobre a temática "Números", os temas de conhecimento abordados nesta obra são as operações envolvendo os Números Racionais e os Números Reais.

O algoritmo da divisão não é mencionado na exploração dos temas.

Na seção sobre potenciação, o livro aborda a história da evolução de dispositivos de armazenamento, como o disquete e o pendrive, definindo termos como byte, kilobyte, megabyte e gigabyte em potências de base 10. No entanto, a obra não menciona o sistema binário, crucial para computadores, onde esses múltiplos do byte são, na verdade, potências de base 2 aproximadas para a base 10. Incluir essa perspectiva binária enriqueceria a compreensão dos alunos sobre a relação entre tecnologia e a matemática subjacente.

A Conquista da Matemática - 9º ano

Em uma única unidade do livro, são abordados tanto o conjunto dos Números Racionais quanto o conjunto dos Números Reais, introduzindo-se a definição dos Números Reais e seus subconjuntos. As operações são apresentadas de forma que se perceba que qualquer operação (adição, subtração, multiplicação e divisão) já estudada nas séries anteriores (para Números Naturais e Inteiros) pode ser realizada da mesma forma no conjunto dos Números Reais, com exceção da divisão por zero. O conceito de potência é retomado, enfatizando-se suas propriedades no conjunto dos Números Reais.

O algoritmo da Divisão Euclidiana não é mencionado de forma explícita.

2.2.2 Livro Didático "Projeto Teláris"

Projeto Teláris - 6º Ano

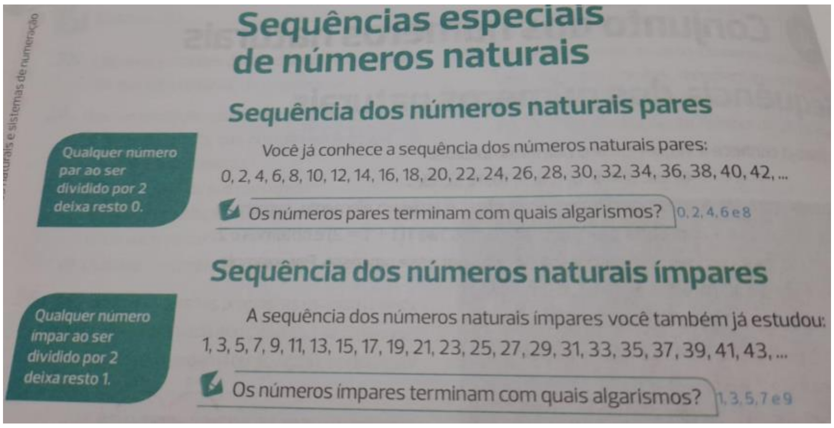
A unidade temática "Números" nessa obra está dividida em sete (7) capítulos: Números Naturais e Sistema de Numeração; Operações Fundamentais com Números Naturais; Potenciação, Raiz Quadrada e Expressões Numéricas; Divisores e Múltiplos de Números Naturais; Frações e Porcentagens e Números Decimais, onde as habilidades EF06MA01, EF06MA02, EF06MA03, EF06MA04, EF06MA05, EF06MA06, EF06MA07, EF06MA08, EF06MA09, EF06MA10, EF06MA11, EF06MA12 e EF06MA13 são exploradas.

Conforme a descrição anterior, a obra "Projeto Teláris" inicia o tópico de "Números Naturais" e "Sistema de Numeração" no capítulo 1 com uma breve introdução à história dos números, abordando as características dos sistemas de numeração egípcio, romano e indo-arábico.

O conjunto dos Números Naturais é apresentado como uma sequência numérica, começando com o número zero e somando uma unidade para se obter o próximo elemento, assim de forma sucessiva.

A obra apresenta os conjuntos dos números pares e dos números ímpares como sequências de números naturais (Figura 19). Acrescenta, ainda, a informação sobre o resto da divisão por 2 de um número par e de um número ímpar, ou seja, enquanto um deixa resto 0, o outro deixa resto 1.

Figura 19 – Sequências de Números Naturais


Sequências especiais de números naturais

Sequência dos números naturais pares

Qualquer número par ao ser dividido por 2 deixa resto 0.

Você já conhece a sequência dos números naturais pares:
0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, ...

Os números pares terminam com quais algarismos? 0, 2, 4, 6 e 8

Sequência dos números naturais ímpares

Qualquer número ímpar ao ser dividido por 2 deixa resto 1.

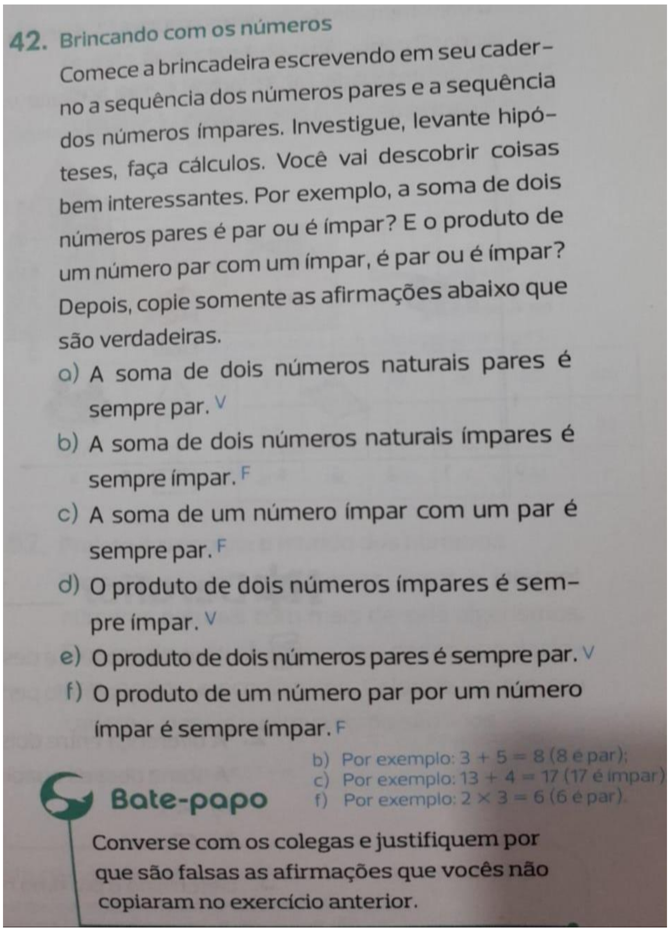
A sequência dos números naturais ímpares você também já estudou:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, ...

Os números ímpares terminam com quais algarismos? 1, 3, 5, 7 e 9

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Uma atividade que chama atenção é a de número 42 (Figura 20), que instiga o aluno a investigar e levantar hipóteses a respeito de algumas propriedades dos números pares e dos números ímpares.

Figura 20 – Atividade 42


42. Brincando com os números

Comece a brincadeira escrevendo em seu caderno a sequência dos números pares e a sequência dos números ímpares. Investigue, levante hipóteses, faça cálculos. Você vai descobrir coisas bem interessantes. Por exemplo, a soma de dois números pares é par ou é ímpar? E o produto de um número par com um ímpar, é par ou é ímpar? Depois, copie somente as afirmações abaixo que são verdadeiras.

a) A soma de dois números naturais pares é sempre par. V

b) A soma de dois números naturais ímpares é sempre ímpar. F

c) A soma de um número ímpar com um par é sempre par. F

d) O produto de dois números ímpares é sempre ímpar. V

e) O produto de dois números pares é sempre par. V

f) O produto de um número par por um número ímpar é sempre ímpar. F

b) Por exemplo: $3 + 5 = 8$ (8 é par);
c) Por exemplo: $13 + 4 = 17$ (17 é ímpar)
f) Por exemplo: $2 \times 3 = 6$ (6 é par).

Bate-papo

Converse com os colegas e justifiquem por que são falsas as afirmações que vocês não copiaram no exercício anterior.

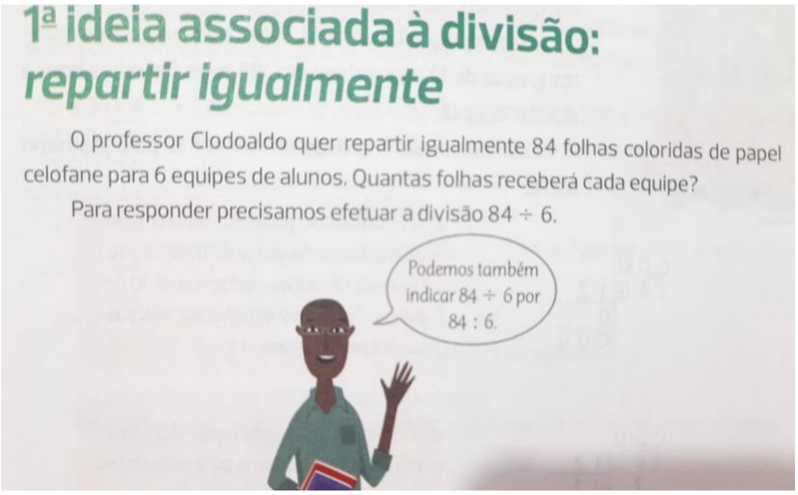
Fonte: Livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

No segundo capítulo, são abordadas, no conjunto dos Números Naturais, as propriedades das operações matemáticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Nesse capítulo, o enfoque principal é dedicado ao estudo do algoritmo da Divisão Euclidiana, explorando detalhadamente esse tópico.

Duas ideias associadas à operação “divisão” são utilizadas para introduzir o assunto: a de repartir em partes iguais (Figura 21) e quantas vezes uma quantidade cabe em outra (Figura 22).

No exercício (Figura 21), é explicado, passo a passo, o cálculo utilizando o algoritmo usual da divisão, mostrando que essa é uma divisão exata, pois seu resto é 0, concluindo que cada equipe receberá 14 folhas. Para verificar se a divisão está correta, o autor faz a prova real escrevendo a resposta em forma de produto (6 x 14 = 84).

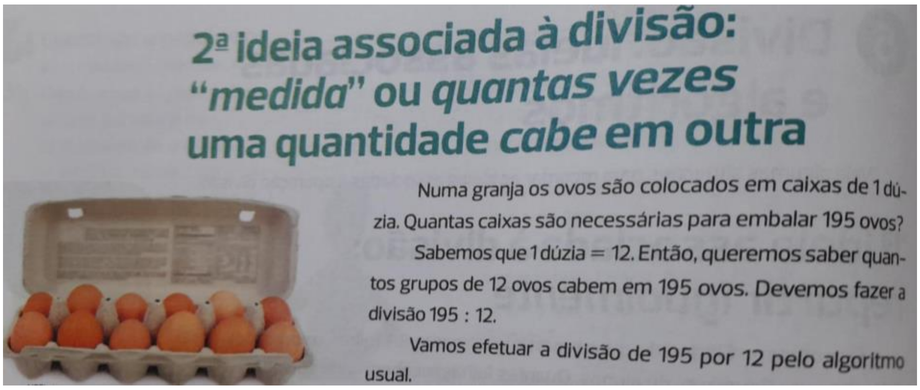
Figura 21 – Primeira ideia associada à operação divisão



Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

No exercício (Figura 22) tem-se uma divisão não exata, pois o resto é diferente de zero. Conclui-se, então, que são necessárias 16 caixas para os 195 ovos e ainda restarão 3 ovos (para serem colocados em uma outra caixa). Para verificar se a divisão está correta, basta fazer $16 \times 12 = 192; 192 + 3 = 195$. A partir daí a relação fundamental da divisão é apresentada: quociente x divisor + resto = dividendo.

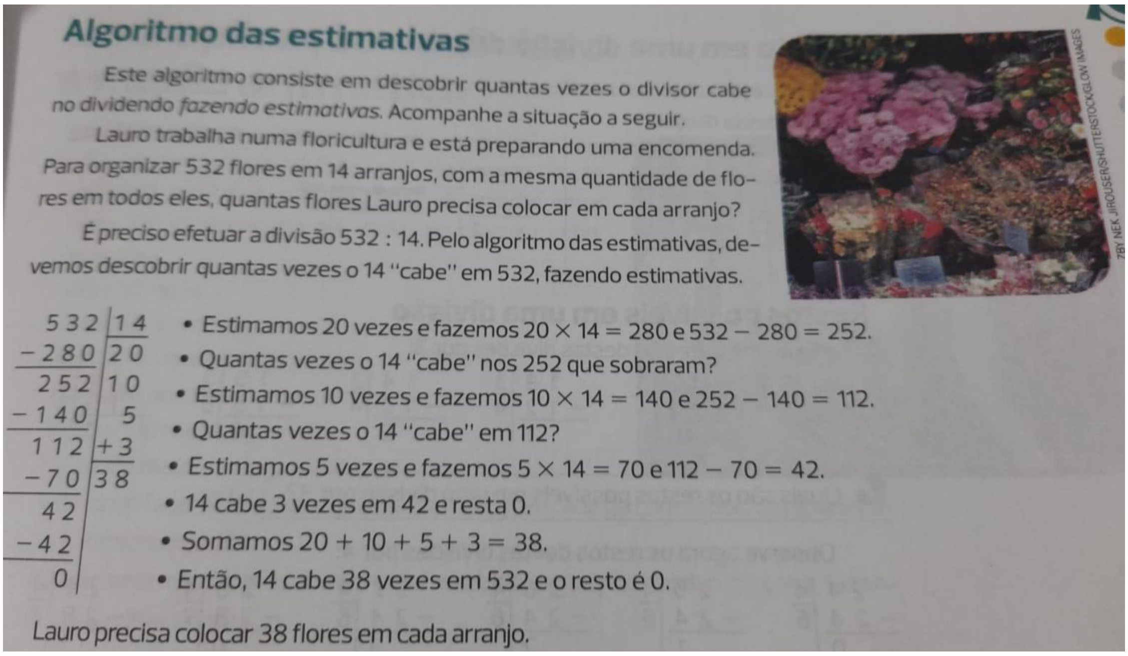
Figura 22 – Segunda ideia associada à operação divisão



Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

O próximo algoritmo (Figura 23) leva o aluno a fazer estimativas que podem ocorrer de diferentes maneiras, porém, o resultado final deverá ser sempre o mesmo.

Figura 23 – Algoritmo das estimativas



Algoritmo das estimativas

Este algoritmo consiste em descobrir quantas vezes o divisor cabe no dividendo *fazendo estimativas*. Acompanhe a situação a seguir.

Lauro trabalha numa floricultura e está preparando uma encomenda. Para organizar 532 flores em 14 arranjos, com a mesma quantidade de flores em todos eles, quantas flores Lauro precisa colocar em cada arranjo?

É preciso efetuar a divisão 532 : 14. Pelo algoritmo das estimativas, devemos descobrir quantas vezes o 14 "cabe" em 532, fazendo estimativas.

532	14
−280	20
252	10
−140	5
112	+3
−70	38
42	
−42	
0	

- Estimamos 20 vezes e fazemos 20 × 14 = 280 e 532 − 280 = 252.
- Quantas vezes o 14 "cabe" nos 252 que sobraram?
- Estimamos 10 vezes e fazemos 10 × 14 = 140 e 252 − 140 = 112.
- Quantas vezes o 14 "cabe" em 112?
- Estimamos 5 vezes e fazemos 5 × 14 = 70 e 112 − 70 = 42.
- 14 cabe 3 vezes em 42 e resta 0.
- Somamos 20 + 10 + 5 + 3 = 38.
- Então, 14 cabe 38 vezes em 532 e o resto é 0.

Lauro precisa colocar 38 flores em cada arranjo.

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

O método acima é também conhecido como método das subtrações sucessivas, que raramente é abordado em sala de aula.

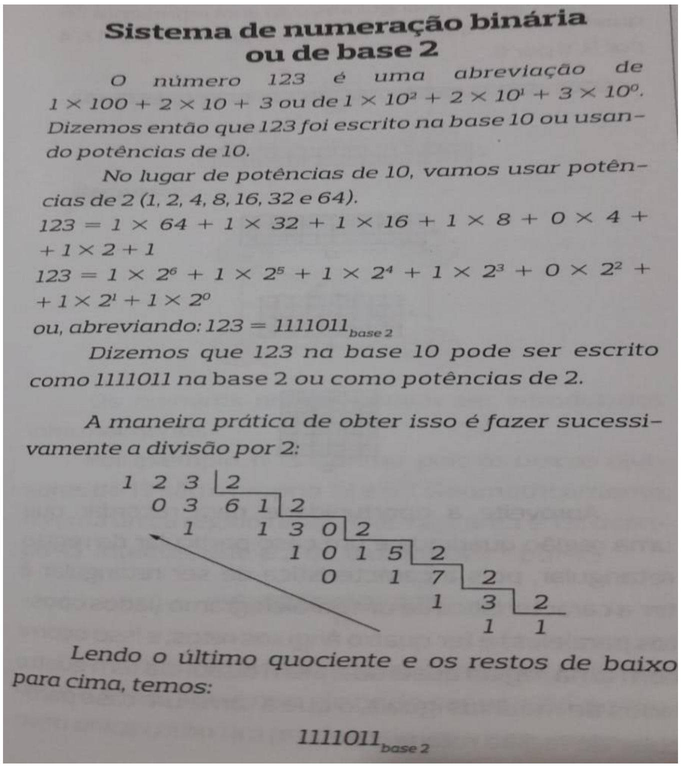
As atividades propostas exploram os possíveis restos em uma divisão de números naturais, com questionamentos que contribuem para que o aluno chegue a conclusões e generalizações, mas com situações que não envolvem uma contextualização. O conceito de resto é visto, na maioria das vezes, para verificar se uma divisão é exata ou não.

As seções restantes deste capítulo abordam o cálculo mental do aluno e a relação entre as operações de adição e subtração, assim como entre multiplicação e divisão, ou seja, as operações inversas. Por fim, o capítulo explora a resolução de problemas que envolvem essas operações.

A abertura da unidade que aborda potenciação, raiz quadrada e expressões numéricas, no capítulo 4, faz referência ao uso de tecnologias digitais e de informação e comunicação. A internet e suas características servem como contexto para a abordagem das noções de potenciação e divisibilidade. A operação de potenciação é apresentada como uma multiplicação de fatores iguais. A noção de raiz quadrada é explorada como o inverso de "elevar ao quadrado".

No manual do professor, no final da obra, há uma seção com observações e sugestões para as unidades, capítulos e indicações de leitura. Na unidade que envolve potenciação e divisibilidade, como sugestão de outras leituras, são abordados outros sistemas de numeração, como o de base 2 (Figura 24) e o de base 5 (Figura 25). Por meio da Divisão Euclidiana é ensinada uma maneira prática de transformar para outras bases um número escrito da base decimal.

Figura 24 – Sistema binário apresentado no manual do professor



Sistema de numeração binária ou de base 2

O número 123 é uma abreviação de $1 \times 100 + 2 \times 10 + 3$ ou de $1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$. Dizemos então que 123 foi escrito na base 10 ou usando potências de 10.

No lugar de potências de 10, vamos usar potências de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64).

$123 = 1 \times 64 + 1 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1$

$123 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

ou, abreviando: $123 = 1111011_{base\ 2}$

Dizemos que 123 na base 10 pode ser escrito como 1111011 na base 2 ou como potências de 2.

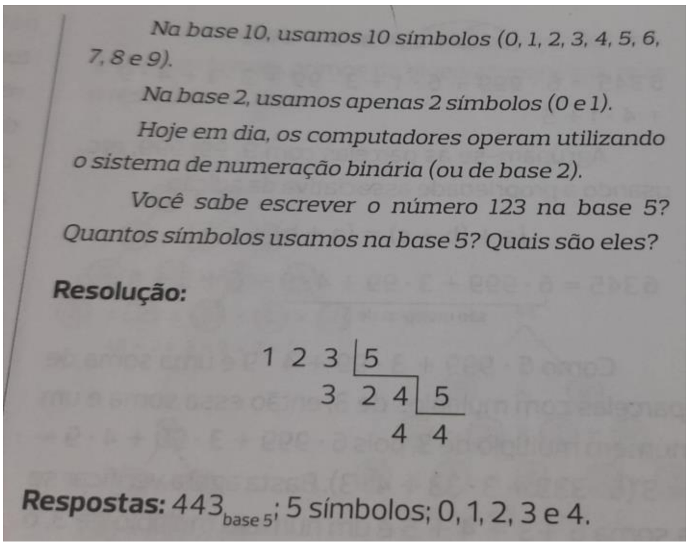
A maneira prática de obter isso é fazer sucessivamente a divisão por 2:

Lendo o último quociente e os restos de baixo para cima, temos:

$1111011_{base\ 2}$

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Figura 25 – Sistema de numeração de base 5 apresentado no manual do professor



Na base 10, usamos 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9).

Na base 2, usamos apenas 2 símbolos (0 e 1).

Hoje em dia, os computadores operam utilizando o sistema de numeração binária (ou de base 2).

Você sabe escrever o número 123 na base 5? Quantos símbolos usamos na base 5? Quais são eles?

Resolução:

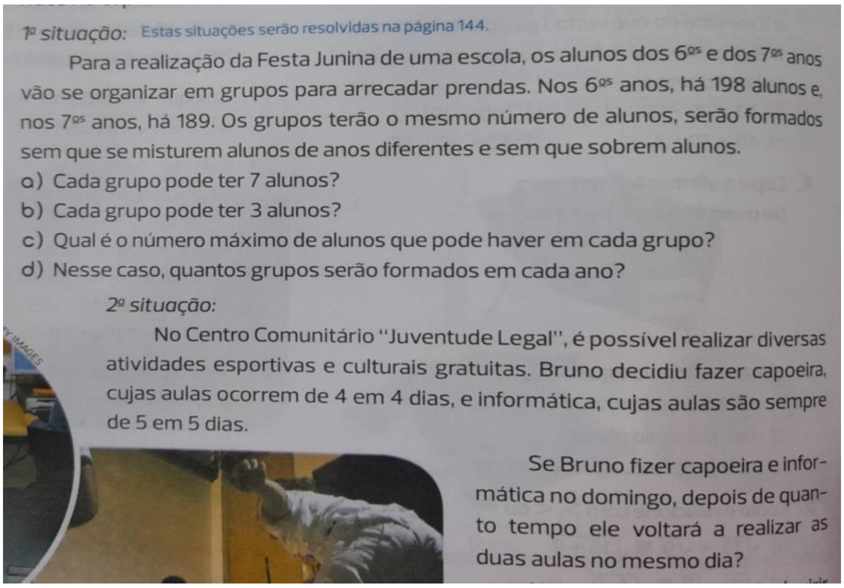
Respostas: $443_{base\ 5}$; 5 símbolos; 0, 1, 2, 3 e 4.

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

As atividades acima encontram-se apenas no livro do professor e no final da obra, deixando a critério dele(a) explorá-las ou não.

No capítulo 5, que aborda o tema "Divisores e Múltiplos de Números Naturais", as ideias de múltiplos e divisores são apresentadas por meio de duas situações-problema que envolvem múltiplos e divisores, mais especificamente o MDC e o MMC, os quais serão resolvidos posteriormente após alguns estudos (Figura 26).

Figura 26 – Situações envolvendo múltiplos e divisores do livro “Projeto Teláris”


1ª situação: Estas situações serão resolvidas na página 144.

Para a realização da Festa Junina de uma escola, os alunos dos 6ºs e dos 7ºs anos vão se organizar em grupos para arrecadar prendas. Nos 6ºs anos, há 198 alunos e, nos 7ºs anos, há 189. Os grupos terão o mesmo número de alunos, serão formados sem que se misturem alunos de anos diferentes e sem que sobrem alunos.

a) Cada grupo pode ter 7 alunos?
b) Cada grupo pode ter 3 alunos?
c) Qual é o número máximo de alunos que pode haver em cada grupo?
d) Nesse caso, quantos grupos serão formados em cada ano?

2ª situação:

No Centro Comunitário "Juventude Legal", é possível realizar diversas atividades esportivas e culturais gratuitas. Bruno decidiu fazer capoeira, cujas aulas ocorrem de 4 em 4 dias, e informática, cujas aulas são sempre de 5 em 5 dias.

Se Bruno fizer capoeira e informática no domingo, depois de quanto tempo ele voltará a realizar as duas aulas no mesmo dia?

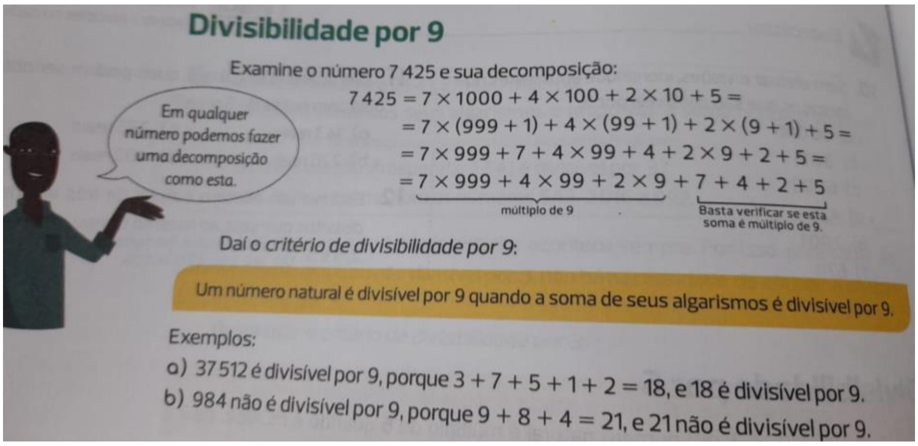
Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Estes problemas propostos na introdução do assunto podem servir para investigar o conhecimento prévio do aluno e as técnicas desenvolvidas por eles nas resoluções. É uma oportunidade para que esses estudantes possam testar e verificar hipóteses que possam contribuir para a significação dos conceitos que serão abordados em seguida sobre divisores e múltiplos.

Através da análise do resto no algoritmo da divisão, é mostrado o que é ser um número “divisível por”, “divisor de” e “múltiplo de”.

Os critérios de divisibilidade abordados neste capítulo são por 2, 3, 5, 6, 4, 9 e 10, nessa ordem. Para os demais critérios, o autor sugere que seja mais prático efetuar a divisão. Aqui, são exploradas algumas situações que levam o aluno a investigar, conjecturar e concluir que, em alguns casos, para saber se um número é divisível por outro não é necessário efetuar a divisão, basta usar os critérios de divisibilidade. A justificativa do critério de divisibilidade por 9 é feita com detalhes, usando a decomposição do número em milhares, centenas, dezenas e unidades (Figura 27).

Figura 27 – Divisibilidade por 9



Divisibilidade por 9

Examine o número 7 425 e sua decomposição:

Em qualquer número podemos fazer uma decomposição como esta.

$$7\,425 = 7 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 =$$
$$= 7 \times (999 + 1) + 4 \times (99 + 1) + 2 \times (9 + 1) + 5 =$$
$$= 7 \times 999 + 7 + 4 \times 99 + 4 + 2 \times 9 + 2 + 5 =$$
$$= \underbrace{7 \times 999 + 4 \times 99 + 2 \times 9}_{\text{múltiplo de 9}} + \underbrace{7 + 4 + 2 + 5}_{\text{Basta verificar se esta soma é múltiplo de 9.}}$$

Daí o *critério de divisibilidade por 9*:

Um número natural é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Exemplos:

a) 37 512 é divisível por 9, porque 3 + 7 + 5 + 1 + 2 = 18, e 18 é divisível por 9.

b) 984 não é divisível por 9, porque 9 + 8 + 4 = 21, e 21 não é divisível por 9.

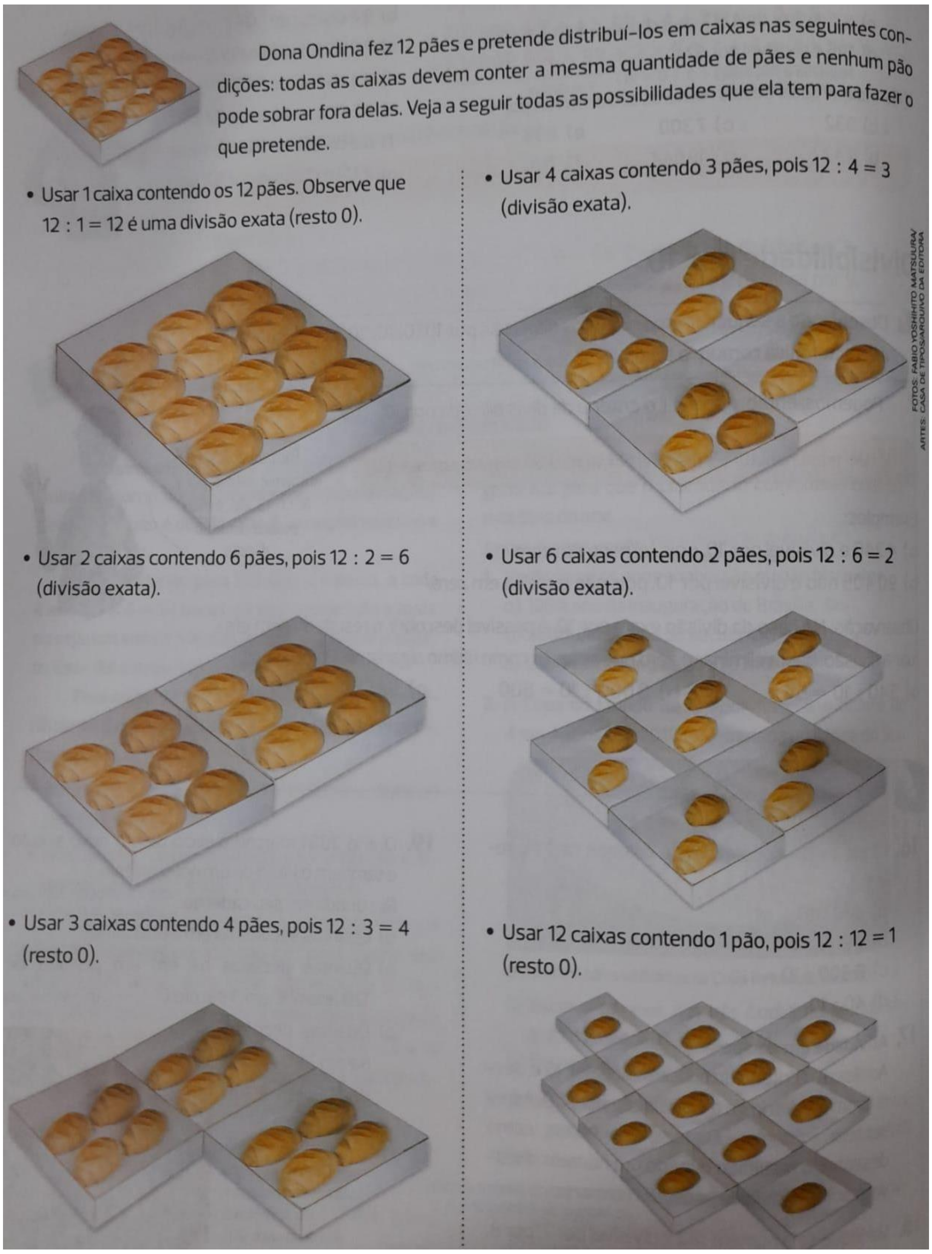
Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

É mencionado, ainda, um critério único de divisibilidade: bastando verificar se o número pode ser decomposto em parcelas de modo que cada uma delas seja múltiplo daquele número que se pede.

Através de exemplos, utilizando o algoritmo da divisão, são criadas condições para que os alunos concluam que os fatores de determinado número são também seus divisores (Figura 28).

No exemplo abaixo (Figura 28), percebe-se que Dona Ondina não pode usar 5, 7, 8, 9, 10 ou 11 caixas, pois sobrariam pães. Conclui-se então que 1, 2, 3, 4, 6 e 12 são os divisores de 12, pois a divisão de 12 por um deles é sempre exata (resto 0).

Figura 28 – Divisores de um Número Natural



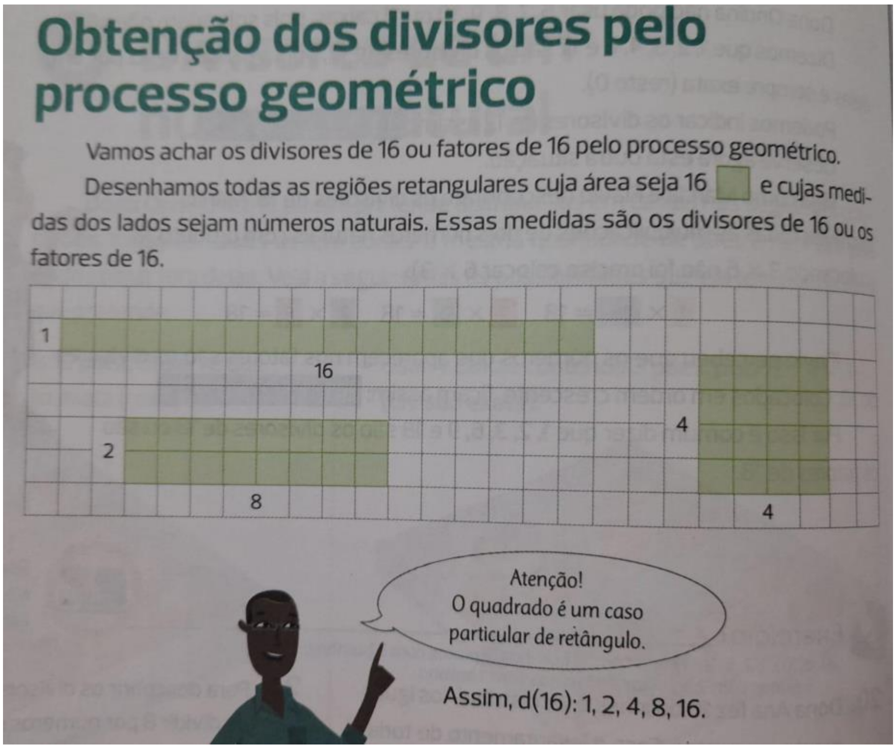
Dona Ondina fez 12 pães e pretende distribuí-los em caixas nas seguintes condições: todas as caixas devem conter a mesma quantidade de pães e nenhum pão pode sobrar fora delas. Veja a seguir todas as possibilidades que ela tem para fazer o que pretende.

- Usar 1 caixa contendo os 12 pães. Observe que $12 : 1 = 12$ é uma divisão exata (resto 0).
- Usar 2 caixas contendo 6 pães, pois $12 : 2 = 6$ (divisão exata).
- Usar 3 caixas contendo 4 pães, pois $12 : 3 = 4$ (resto 0).
- Usar 4 caixas contendo 3 pães, pois $12 : 4 = 3$ (divisão exata).
- Usar 6 caixas contendo 2 pães, pois $12 : 6 = 2$ (divisão exata).
- Usar 12 caixas contendo 1 pão, pois $12 : 12 = 1$ (resto 0).

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

O processo geométrico é abordado da seguinte maneira: para encontrar os divisores de 16, construímos todos os retângulos cuja área seja igual a 16 e cujas medidas dos lados sejam números naturais. Essas medidas representam os divisores de 16, como ilustrado na Figura 29.

Figura 29 – Obtenção dos divisores de um Número Natural pelo processo geométrico


Obtenção dos divisores pelo processo geométrico

Vamos achar os divisores de 16 ou fatores de 16 pelo processo geométrico.

Desenhamos todas as regiões retangulares cuja área seja 16 ▢ e cujas medidas dos lados sejam números naturais. Essas medidas são os divisores de 16 ou os fatores de 16.

Assim, d(16): 1, 2, 4, 8, 16.

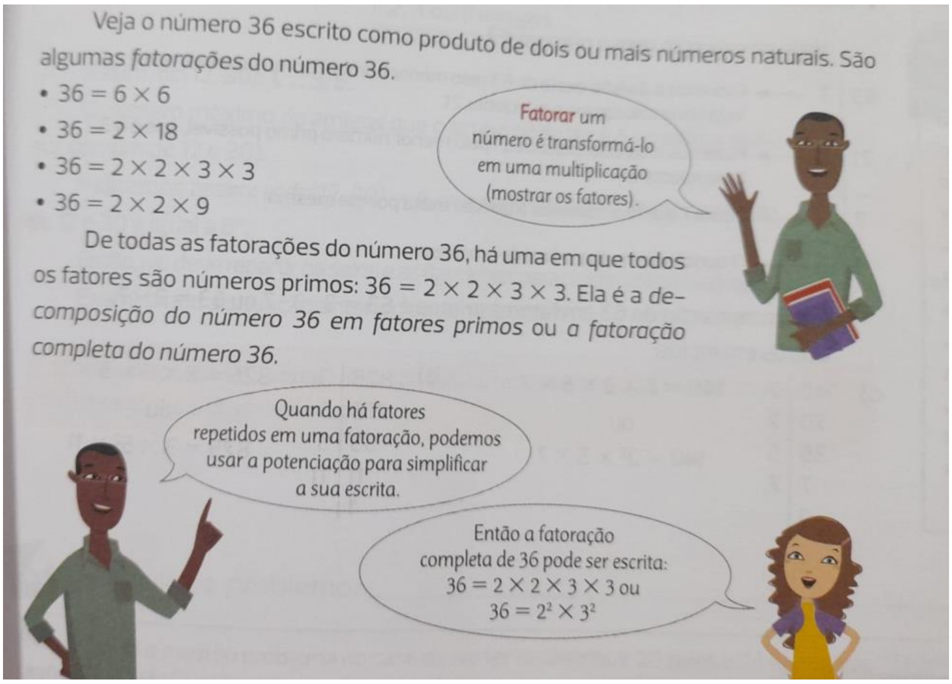
Fonte: Livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Nesta seção são explorados problemas contextualizados e diferentes técnicas para abordar o tema, não se limitando apenas a métodos algorítmicos, o que, por sua vez, pode enriquecer a experiência de aprendizagem de maneira significativa.

A partir da observação da quantidade de divisores de alguns números dados, define-se o que são números primos. Em seguida, é apresentado o Crivo de Eratóstenes como um método simples e prático para a obtenção de números primos até um determinado limite.

Por exemplo, na Figura 30, são apresentadas várias fatorações do número 36 com o objetivo de ajudar o aluno a identificar a fatoração na qual todos os fatores são números primos. Essa fatoração é conhecida como decomposição em fatores primos ou fatoração completa do número 36.

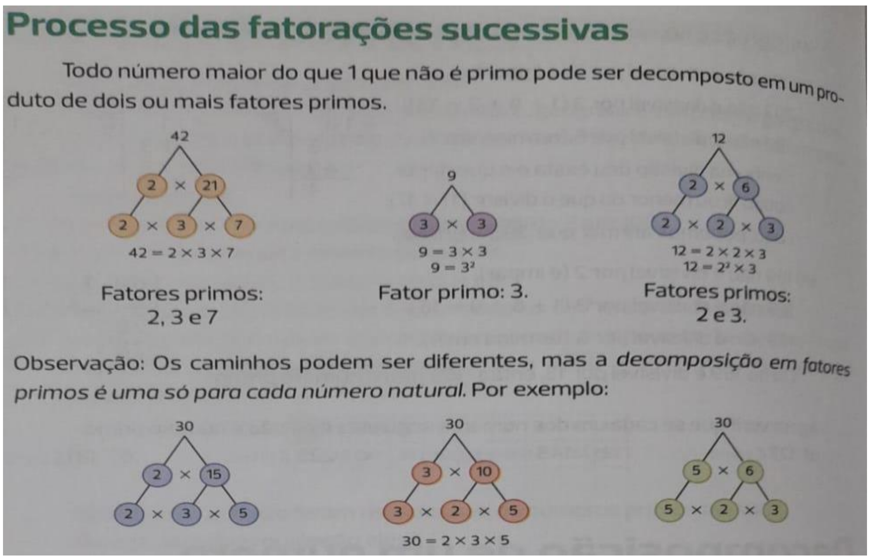
Figura 30 – Decomposição de um Número Natural em Fatores Primos



Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

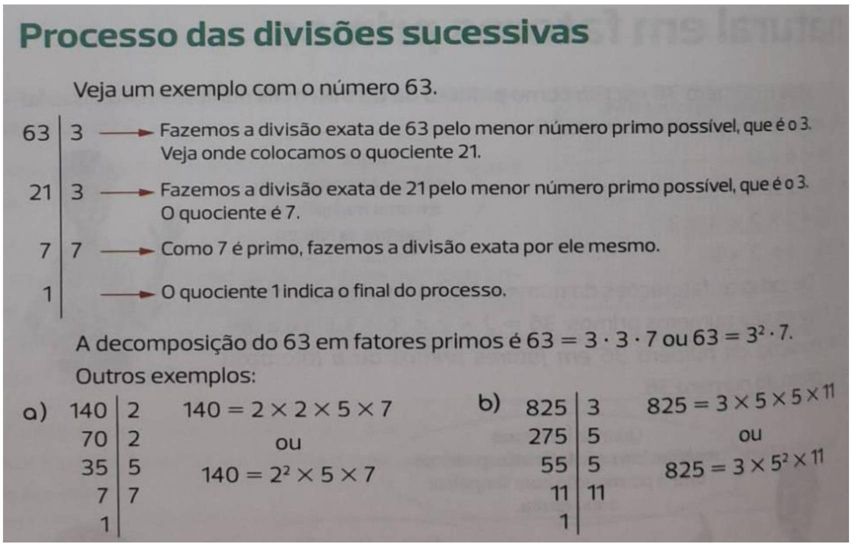
Foram utilizados dois métodos de decomposição: o Processo de Fatorações Sucessivas (Figura 31) e o Processo de Divisões Sucessivas (Figura 32). No primeiro método, é destacado um resultado importante, o “Teorema Fundamental da Aritmética”, embora não seja mencionado explicitamente por esse nome. Nesse contexto, enfatiza-se a unicidade da fatoração de um Número Natural em produto de números primos.

Figura 31 – Processo de Fatorações Sucessivas e o TFA



Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Figura 32 – Processo de Divisões Sucessivas



Processo das divisões sucessivas

Veja um exemplo com o número 63.

63	3	→ Fazemos a divisão exata de 63 pelo menor número primo possível, que é o 3. Veja onde colocamos o quociente 21.
21	3	→ Fazemos a divisão exata de 21 pelo menor número primo possível, que é o 3. O quociente é 7.
7	7	→ Como 7 é primo, fazemos a divisão exata por ele mesmo.
1		→ O quociente 1 indica o final do processo.

A decomposição do 63 em fatores primos é $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$ ou $63 = 3^2 \cdot 7$.

Outros exemplos:

a)

140	2
70	2
35	5
7	7
1	

$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

ou

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$

b)

825	3
275	5
55	5
11	11
1	

$825 = 3 \times 5 \times 5 \times 11$

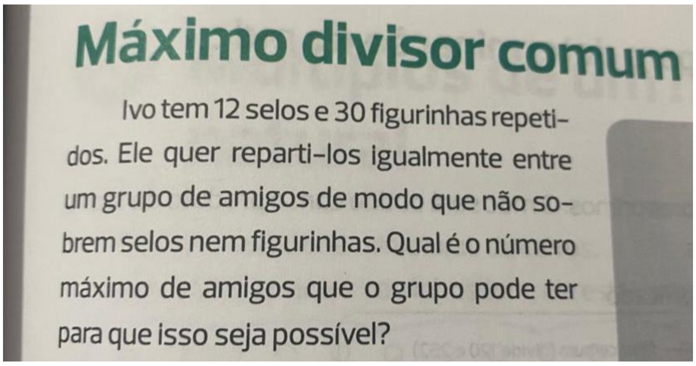
ou

$825 = 3 \times 5^2 \times 11$

Fonte: Livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

O autor introduz o assunto Máximo Divisor Comum expondo um problema de repartições iguais de 12 selos e 30 figurinhas entre um grupo de amigos, de forma que não sobrem selos e nem figurinhas, questionando sobre o número máximo de amigos que o grupo pode ter para que isso seja possível (Figura 33). A partir daí define-se MDC.

Figura 33 – Atividade proposta sobre MDC



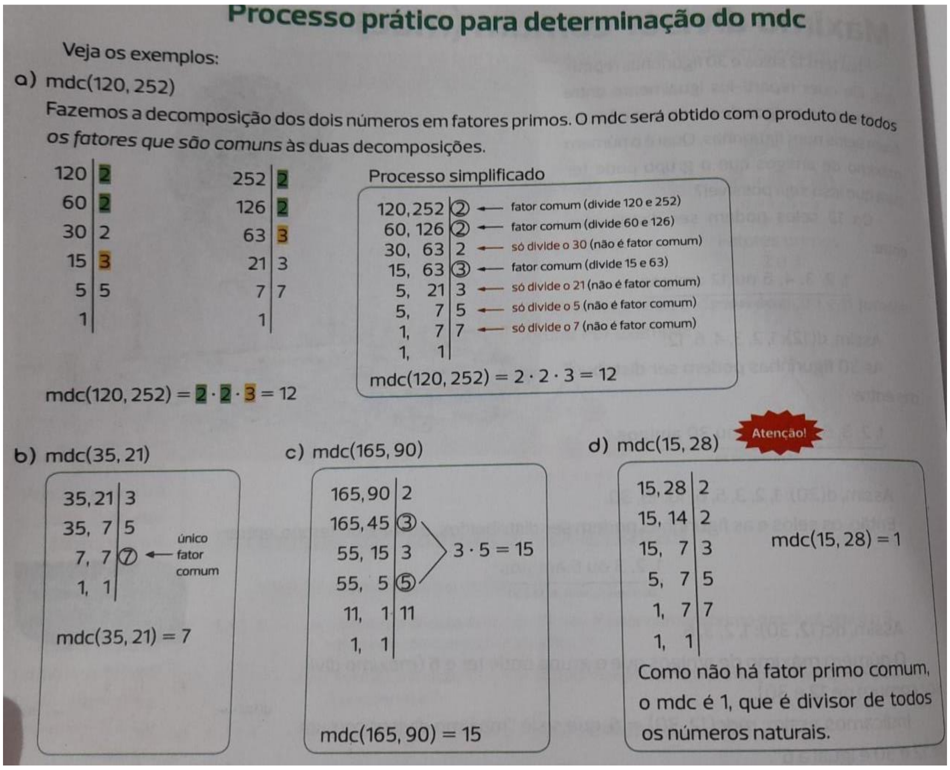
Máximo divisor comum

Ivo tem 12 selos e 30 figurinhas repetidos. Ele quer reparti-los igualmente entre um grupo de amigos de modo que não sobrem selos nem figurinhas. Qual é o número máximo de amigos que o grupo pode ter para que isso seja possível?

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Os processos utilizados para determinar o MDC de dois números incluem: a decomposição em fatores primos, onde o MDC é obtido multiplicando todos os fatores que são comuns às duas decomposições; e o processo simplificado, onde os números são fatorados simultaneamente e o MDC é obtido multiplicando os fatores comuns nas divisões sucessivas (Figura 34).

Figura 34 – Determinação do MDC por meio de decomposição em fatores primos



Processo prático para determinação do mdc

Veja os exemplos:

a) mdc(120, 252)

Fazemos a decomposição dos dois números em fatores primos. O mdc será obtido com o produto de todos os *fatores que são comuns* às duas decomposições.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

mdc(120, 252) = 2 · 2 · 3 = 12

Processo simplificado

120, 252	2	← fator comum (divide 120 e 252)
60, 126	2	← fator comum (divide 60 e 126)
30, 63	2	← só divide o 30 (não é fator comum)
15, 63	3	← fator comum (divide 15 e 63)
5, 21	3	← só divide o 21 (não é fator comum)
5, 7	5	← só divide o 5 (não é fator comum)
1, 7	7	← só divide o 7 (não é fator comum)
1, 1		

mdc(120, 252) = 2 · 2 · 3 = 12

b) mdc(35, 21)

35, 21	3	
35, 7	5	
7, 7	7	← único fator comum
1, 1		

mdc(35, 21) = 7

c) mdc(165, 90)

165, 90	2
165, 45	3
55, 15	3
55, 5	5
11, 1	11
1, 1	

3 · 5 = 15

mdc(165, 90) = 15

d) mdc(15, 28) Atenção!

15, 28	2
15, 14	2
15, 7	3
5, 7	5
1, 7	7
1, 1	

mdc(15, 28) = 1

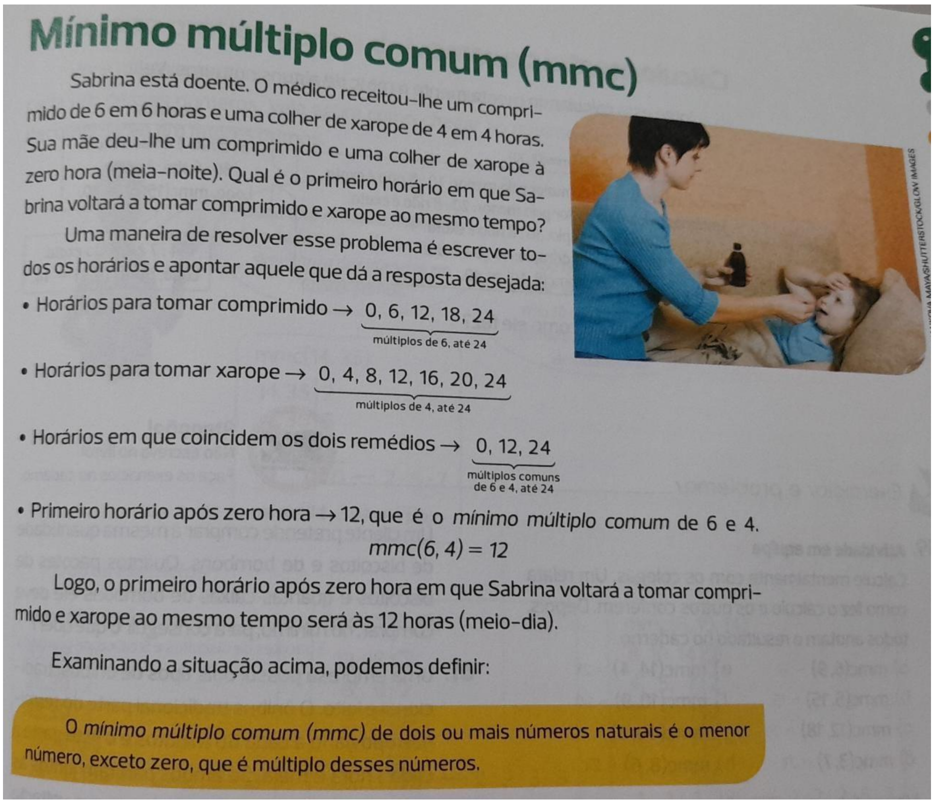
Como não há fator primo comum, o mdc é 1, que é divisor de todos os números naturais.

Fonte: Livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

O item “d” na Figura 34 poderia ser aproveitado para definir números “primos entre si”, que ocorre quando o MDC entre eles é 1.

Assim como no tópico anterior, a exploração dos múltiplos de um Número Natural introduz a discussão por meio de uma situação-problema, a partir da qual se define o MMC. O cálculo mental do MMC é abordado, juntamente com processos práticos para sua determinação, usando sequências de múltiplos ou a decomposição em fatores primos, como exemplificado nas Figuras 35 e 36.

Figura 35 – Atividade proposta sobre MMC



Mínimo múltiplo comum (mmc)

Sabrina está doente. O médico receitou-lhe um comprimido de 6 em 6 horas e uma colher de xarope de 4 em 4 horas. Sua mãe deu-lhe um comprimido e uma colher de xarope à zero hora (meia-noite). Qual é o primeiro horário em que Sabrina voltará a tomar comprimido e xarope ao mesmo tempo?

Uma maneira de resolver esse problema é escrever todos os horários e apontar aquele que dá a resposta desejada:

- Horários para tomar comprimido $\rightarrow \underbrace{0, 6, 12, 18, 24}_{\text{múltiplos de 6, até 24}}$
- Horários para tomar xarope $\rightarrow \underbrace{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24}_{\text{múltiplos de 4, até 24}}$
- Horários em que coincidem os dois remédios $\rightarrow \underbrace{0, 12, 24}_{\text{múltiplos comuns de 6 e 4, até 24}}$
- Primeiro horário após zero hora $\rightarrow$ 12, que é o *mínimo múltiplo comum* de 6 e 4.

$$mmc(6, 4) = 12$$

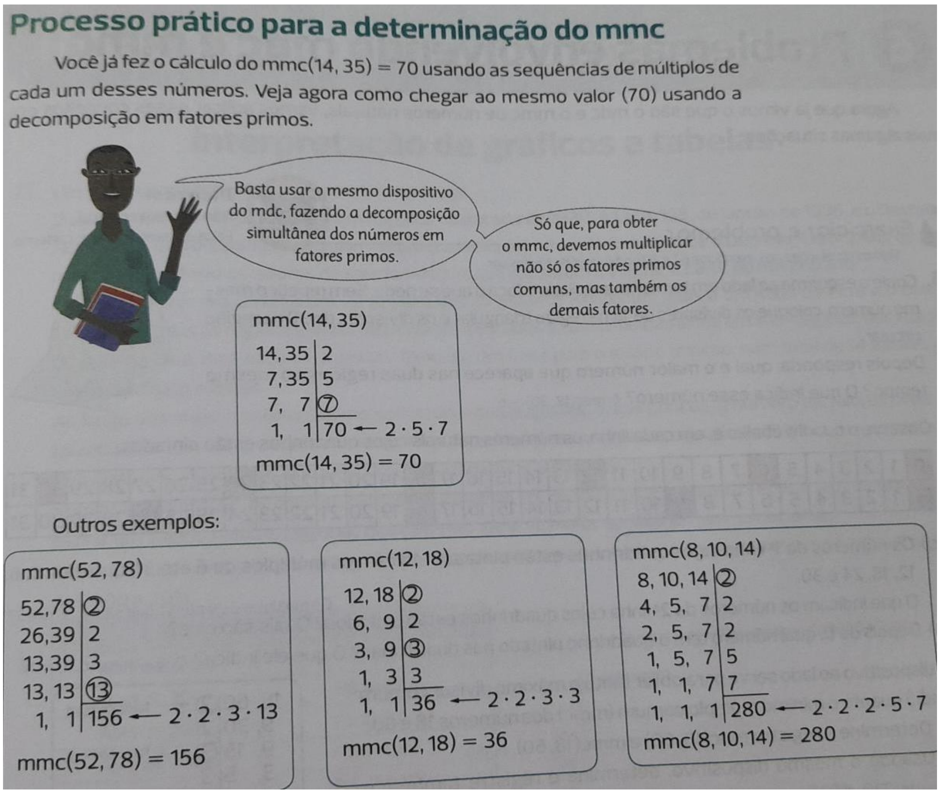
Logo, o primeiro horário após zero hora em que Sabrina voltará a tomar comprimido e xarope ao mesmo tempo será às 12 horas (meio-dia).

Examinando a situação acima, podemos definir:

O *mínimo múltiplo comum (mmc)* de dois ou mais números naturais é o menor número, exceto zero, que é múltiplo desses números.

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Figura 36 – Decomposição em fatores primos na obtenção do MMC



Processo prático para a determinação do mmc

Você já fez o cálculo do mmc(14, 35) = 70 usando as sequências de múltiplos de cada um desses números. Veja agora como chegar ao mesmo valor (70) usando a decomposição em fatores primos.

mmc(14, 35)

14, 35	2
7, 35	5
7, 7	7
1, 1	70 ← 2 · 5 · 7

mmc(14, 35) = 70

Outros exemplos:

mmc(52, 78)

52, 78	2
26, 39	2
13, 39	3
13, 13	13
1, 1	156 ← 2 · 2 · 3 · 13

mmc(52, 78) = 156

mmc(12, 18)

12, 18	2
6, 9	2
3, 9	3
1, 3	3
1, 1	36 ← 2 · 2 · 3 · 3

mmc(12, 18) = 36

mmc(8, 10, 14)

8, 10, 14	2
4, 5, 7	2
2, 5, 7	2
1, 5, 7	5
1, 1, 7	7
1, 1, 1	280 ← 2 · 2 · 2 · 5 · 7

mmc(8, 10, 14) = 280

Fonte: livro (Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano, 2013)

Na seção também são explorados problemas contextualizados que envolvem MDC e MMC.

Projeto Teláris - 7º Ano

As unidades deste volume abordam os seguintes blocos de conteúdo: Números e Operações (incluindo Álgebra); Geometria (Espaço e Forma); Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação. Esses conteúdos estão organizados em capítulos que revisam alguns conceitos, procedimentos e atitudes trabalhados no 6º ano, ao mesmo tempo que apresentam novos conceitos e procedimentos.

Neste volume, os Números Inteiros são introduzidos, explorando situações do cotidiano como fusos horários, temperaturas etc. A sequência dos Números Inteiros é apresentada como uma extensão da sequência dos Números Naturais.

Assim como no livro do 7º ano “A Conquista da Matemática”, esta obra apresenta as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação em capítulos separados. Essas operações são abordadas por meio de situações contextualizadas, permitindo ao aluno compreender o significado de cada uma delas nos conjuntos dos Números Inteiros e Racionais.

Esta obra não retoma os temas relacionados a múltiplos e divisores que foram abordados no livro do 6º ano, e, à medida que os números decimais surgem, observa-se uma diminuição da relevância dos Números Inteiros, direcionando a ênfase na exploração dos conceitos para o universo dos Números Racionais.

Os conteúdos foram abordados de forma similar ao livro “A Conquista da Matemática” para o 7º ano. Por este motivo, não há necessidade de comentar.

O algoritmo da divisão não é mencionado neste volume.

Projeto Teláris - 8º Ano

Os objetos de conhecimento abordados nesta obra sobre a temática "Números" estão concentrados no primeiro capítulo, que engloba os conjuntos numéricos. Nesse capítulo, revisita-se os Números Naturais e Inteiros, seguidos pela exposição dos Números Racionais e, por fim, a inclusão do conjunto dos Números Reais, proporcionando uma revisão dos números estudados em anos anteriores.

O algoritmo da divisão não é mencionado de forma explícita neste volume.

Projeto Teláris - 9º Ano

Os conteúdos relacionados à temática "Números" neste volume estão concentrados em um único capítulo, abrangendo tópicos como radiciação (incluindo raiz quadrada, raiz cúbica, outras raízes, operações com radicais e racionalização de denominadores) e potenciação com expoentes fracionários.

O algoritmo da divisão não é mencionado de forma explícita neste volume.

Nos quatro volumes que foram submetidos ao estudo, o autor aborda os temas de maneira geral contextualizada, frequentemente levando em conta o conhecimento prévio do aluno para proporcionar uma compreensão mais profunda do conteúdo ensinado. No entanto, é importante observar que diversos aspectos relativos ao algoritmo da Divisão Euclidiana não recebem a devida atenção ou menção. Na próxima seção, apresentaremos algumas considerações acerca das obras que foram objeto de análise.

2.3 Breve estudo dos livros didáticos em relação à “Divisão Euclidiana”

Concordamos com (GIMENEZ & LINS, 2001, p. 34) ao verificar nas obras que, em relação à aritmética, muitos pontos relevantes são ignorados. O algoritmo da divisão, por exemplo, é usado na maioria das vezes apenas para verificar se a divisão entre Números Naturais é ou não exata (resto igual a 0 ou resto diferente de 0). Os alunos executam o algoritmo sem alcançar os conceitos envolvidos, e o resto é mais conhecido como “sobra”, pois, no geral, é o único significado dado a ele na Educação Básica. Alguns desses conceitos, como os Sistemas de Numeração em bases diferentes de dez, são sugeridos no manual do professor, mas não se encontram no livro do aluno, e muitas propriedades importantes – que não apenas simplificariam a resolução de problemas, mas também desempenhariam um papel fundamental no desenvolvimento das habilidades de argumentação matemática e na capacidade analítica dos estudantes – não são mencionadas no livro do aluno, por exemplo:

- **A relação existente entre o MMC e o MDC entre dois números naturais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, ou seja, $\boldsymbol{mdc(a,b) \times mmc(a,b) = a \times b}$:** conhecer essa relação pode simplificar os cálculos na resolução de alguns problemas, principalmente se é conhecido o Algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC. Além disso, mostrar essa relação pode ajudar os alunos a conectarem conceitos aritméticos, algébricos e geométricos;

- **O algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC:** o algoritmo de Euclides é um método de Divisão Euclidiana que leva em consideração o resto. Ele é importante não apenas para calcular o MDC, mas também para desenvolver habilidades de resolução de problemas e pensamento lógico, possibilitando uma compreensão mais profunda da disciplina;
- **O significado do resto e dos outros termos envolvidos na relação fundamental da divisão:** a divisão é frequentemente utilizada para encontrar o quociente de uma operação, com menos ênfase nas propriedades matemáticas subjacentes dos números envolvidos, incluindo o significado do resto e de outros termos relacionados, que nem sempre recebem a mesma atenção;
- **A falta de exploração do Sistema Binário:** o Sistema Binário é a base da linguagem de computadores. A representação em outras bases de numeração de número escritos na base decimal é uma aplicação da Divisão Euclidiana, e sua compreensão envolve manipulação de operações matemáticas básicas, como adição e multiplicação;
- **Falta de oportunidades para formulação de conjecturas e generalizações**: em geral, as coleções apresentam problemas com respostas prontas, em detrimento da promoção ativa da formulação de conjecturas e da realização de generalizações pelos alunos, o que pode comprometer o desenvolvimento do pensamento matemático;
- **Regras teóricas sem representações geométricas**: as coleções frequentemente apresentam regras teóricas sem fornecer representações geométricas. Representações visuais podem tornar os conceitos abstratos mais concretos e compreensíveis.

Além disso, é notado que os livros didáticos verificados negligenciam aspectos práticos importantes, como problemas relacionados ao calendário, que podem ser resolvidos de forma simples utilizando o conceito de resto na divisão.

Durante o estudo realizado na seção 2.2, ficou evidente que os livros didáticos desempenham um papel fundamental no processo de aprendizagem, proporcionando uma base sólida de conhecimento sobre o assunto em questão. No entanto, é importante reconhecer que, como em qualquer recurso educacional, eles não podem abranger todos os aspectos ou detalhes relacionados a esses tópicos. Dessa forma, a utilização de um livro didático é valiosa, mas não deve ser considerada a única fonte de informações abrangentes. (DANTE L. R., 1996, p. 89).

2.4 A Divisão Euclidiana no Ensino Médio

A BNCC (2017) sugere que todo conhecimento construído no Ensino Fundamental seja aproveitado com todas as potencialidades no Ensino Médio, mas o documento não propõe, de forma explícita, os temas de conhecimentos que deverão ser trabalhados nesta última etapa da Educação Básica. Ainda que organizada por unidades temáticas, o foco é nas competências e habilidades.

A BNCC estabelece cinco (5) competências específicas para a área de Matemática no Ensino Médio, acompanhadas por 43 habilidades relacionadas a uma ou mais competências. Essas competências e habilidades direcionam o ensino para uma formação mais geral e contextualizada, incentivando a integração de diferentes tópicos matemáticos e a aplicação de conceitos em situações do mundo real.

> Ainda que Matemática, tal como Língua Portuguesa, deva ser oferecida nos três anos do Ensino Médio, as habilidades são apresentadas sem indicação de seriação. Essa decisão permite flexibilizar a definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola. (BRASIL, 2017, p. 530)

A BNCC não especifica os conteúdos de forma detalhada como no Ensino Fundamental, no intuito de permitir uma maior autonomia às unidades de ensino para a escolha de conteúdos específicos, desde que estejam alinhados com as competências e habilidades definidas no documento, de forma a permitir uma abordagem mais contextualizada e adaptável ao Ensino Médio e que melhor atendam às necessidades dos estudantes e à realidade local.

As cinco competências específicas de Matemática estão listadas na Figura 37:

Figura 37 – Competências específicas de Matemática e suas tecnologias propostas pela BNCC

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2017, p. 531)

É evidente que todas as competências implicam, em certa medida, na abordagem de resolução de problemas, investigação e modelagem, com a análise de situações por meio de algum conhecimento matemático. No que se refere aos objetos relacionados com a relação fundamental da divisão, conforme examinados nas seções 2.1 e 2.2, vários aspectos relevantes desta operação são ignorados. Além disso, é importante notar que a BNCC não explicitamente propõe a inclusão desses conceitos no currículo do Ensino Médio, como destacado por Almeida (2021).

> [...]a presença dos números inteiros no currículo do Ensino Básico no atual guia curricular nacional ocorre de maneira abundante nas séries iniciais até o 6º ano. A partir do 7º ano, entretanto, esta presença se estingue, não sendo citado explicitamente nas habilidades detalhadas a serem desenvolvidas durante o Ensino Médio. (ALMEIDA, 2021, p. 23)

Diante disso, surge uma questão: em qual etapa escolar esses conceitos poderiam ser aprofundados?

No próximo capítulo, através de marcos históricos, serão apresentados alguns métodos utilizados para efetuar a divisão ao longo da história e, em seguida, algumas aplicações do Teorema da Divisão Euclidiana. Este material poderá auxiliar os professores nas aulas junto com a proposta de sequência didática que será exposta em seguida, no capítulo 4.

3. MARCO TEÓRICO E HISTÓRICO DO ALGORITMO DA DIVISÃO EUCLIDIANA

De acordo com (SALVADOR, 2012, p. 7), um algoritmo pode ser considerado um procedimento ou uma sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma tarefa que se deseja realizar.

3.1 Métodos antigos de divisão

Nesta seção, serão apresentados alguns registros históricos de algoritmos utilizados para realizar uma divisão, sendo o objetivo principal levantar discussões e reflexões sobre o que é relevante no estudo desta operação. Para tal propósito, serão analisados diversos procedimentos praticados por povos antigos. Dessa forma, esperamos que esta pesquisa contribua para a ampliação do conhecimento do professor e propicie reflexões sobre suas práticas pedagógicas acerca do ensino da divisão.

> (...) ao manter uma relação com as práticas profissionais realizadas no passado, o professor de matemática possivelmente será capaz de desenvolver suas atividades didático-pedagógicas de melhor qualidade (SALVADOR, 2012, p. 6).

3.1.1 Método Egípcio

O Método Egípcio era baseado na duplicação do divisor para determinar o quociente. A justificativa é que todo número inteiro positivo tem uma única expansão binária e, logo, todo número inteiro positivo se escreve de modo único como soma de potências distintas de 2 (veja na seção 3.2.3). Por exemplo, para dividir 326 por 12, perguntavam-se *"por quanto deve-se multiplicar 12 para obter 326?"*. Para chegar na resposta correta, seguimos os passos abaixo:

1º) Montamos uma tabela com duas colunas: a coluna da esquerda, a partir do número 1; e a coluna da direita, a partir do divisor 12. Começamos a duplicação em ambas colunas, até a coluna à direita atingir 192, já que seu dobro ultrapassa 326.

Tabela 1 – Divisão de 326 por 12 no Método Egípcio

1	**12**
2	**24**

4	48
8	**96**
16	**192**

Fonte: o autor (2022)

2º) Na coluna da direita, os itens em negrito somam 324, que é o número que mais se aproxima de 326, o que significa que esta divisão não é exata.

3º) Na coluna da esquerda, somamos os números correspondentes àqueles utilizados para somar 324 $(1 + 2 + 8 + 16 = 27)$.

Portanto, o quociente da divisão de 326 por 12 é 27. A diferença entre o dividendo e 324 é o resto desta divisão, ou seja, 2.

Para justificar este método, observe inicialmente que $(27)_{10} = (11011)_2$ (veja na seção 3.2.3). Então,

$$\begin{aligned} 27 \cdot 12 &= (11011)_2 \cdot 12 = (2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4) \cdot 12 \\ &= 1 \cdot 12 + 2 \cdot 12 + 2^3 \cdot 12 + 2^4 \cdot 12 = 12 + 24 + 96 + 192 \\ &= 324. \end{aligned}$$

Logo, $326 = 27 \cdot 12 + 2$, ou seja: o quociente e o resto da divisão de 326 por 12 são 27 e 4, respectivamente.

Percebam que o método da divisão egípcia é didático e simples.

3.1.2 Método do Galeão

Este método de origem hindu, conhecido como “método de riscar”, também é conhecido como “Método do Galeão ou da Galé”, pois a disposição dos números neste algoritmo se assemelha a uma galé[6] (WALL, 2014, p. 97).

[6] “Galé” ou “galeão” era uma embarcação de guerra, comprida e com grandes remos.

Figura 38 – Divisão em galeão, século XVI

Fonte: (WALL, 2014, p. 159)

Para exemplificar, vejam os passos descritos por (CUNHA, 2015) para dividir 1320 por 49:

Escrevemos o divisor à esquerda do dividendo. O primeiro algarismo do quociente obtém-se dividindo 132 por 49, ou seja, 2, que é escrito à direita do dividendo,

$$49|1320|2.$$

Escrevemos o produto 2×49 = 98, abaixo do 132.

$$49\left|\begin{array}{l}1320\\098\end{array}\right|2.$$

Colocamos o resultado de $1 - 0 = 1$ acima do primeiro 1 do 132, em seguida riscamos o 1 e o 0.

$$49\left|\begin{array}{l}1\\1320\\098\end{array}\right|2.$$

Como não podemos subtrair 9 de 3, agrupamos o 1 (que está acima do 1 riscado) com o 3, formando 13, e realizamos a subtração $13 - 9 = 4$. Escrevemos o 4 acima do 3, riscando o 1, 3 e 9.

$$49\left|\begin{array}{l}14\\1320\\098\end{array}\right|2.$$

Como não é possível subtrair 8 de 2, retiramos 1 do 4 (riscando o 4, colocando 3 acima dele), e agrupamos com o 2. Efetuamos a subtração $12 - 8 = 4$ e escrevemos o 4 acima do 2, riscando o 8 e 2.

$$\begin{array}{r|c|l} & 3 & \\ & 144 & \\ 49 & 1320 & 2. \\ & 098 & \end{array}$$

Logo, o próximo dividendo será 340, formado pelos algarismos que não foram riscados. Dividindo novamente 340 por 49, obtemos 6, que é escrito no local dos divisores à direita do 2. Fazemos $6 \times 49 = 294$, colocando 29 abaixo do 98 e 4 abaixo do 0, da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|c|l} & 3 & \\ & 144 & \\ 49 & 1320 & 26. \\ & 0984 & \\ & 29 & \end{array}$$

Fazemos $3 - 2 = 1$, colocando 1 acima do 3, riscando 3 e 2.

$$\begin{array}{r|c|l} & 1 & \\ & 3 & \\ & 144 & \\ 49 & 1320 & 26. \\ & 0984 & \\ & 29 & \end{array}$$

Como não subtraímos 9 de 4, agrupamos 1 com 4, formando 14, e realizamos $14 - 9 = 5$. Coloca-se 5 acima do 4 e riscamos 1, 4 e 9.

$$\begin{array}{r|c|l} & 1 & \\ & 35 & \\ & 144 & \\ 49 & 1320 & 26. \\ & 0984 & \\ & 29 & \end{array}$$

Como não subtraímos 4 de 0, retiramos 1 do 5 (riscando o 5 e colocando 4 acima do 5) e agrupamos com o 0, formando 10, e fazemos $10 - 4 = 6$, que é colocado acima do 0, riscando 0 e 4. Desta forma:

$$\begin{array}{r|c|l} & 14 & \\ & 35 & \\ 49 & 1446 & 26. \\ & 1320 & \\ & 0984 & \\ & 29 & \end{array}$$

Como todos os algarismos de 1320 foram riscados, a conta se encerra, com quociente 26 e resto 46.

Apesar de não ser um algoritmo de fácil execução – e ainda trabalhoso –, ele pode ser utilizado nas escolas para mostrar as técnicas utilizadas no processo de divisão ao longo da história, ou seja, um caminho alternativo para se chegar em um mesmo resultado.

3.1.3 Método de Fibonacci

> No limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci ("Leonardo, filho de Bonaccio", c. 1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média. Também conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano), Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária. As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, logo depois de retornar a sua terra natal, publicou sua obra famosa intitulada Liber abaci. (EVES, 1995, p. 292).

A *sequência de Fibonacci* é a sequência (u_n) dada por $u_1 = u_2 = 1$ e $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para todo n inteiro, com $n \geq 3$.

Seja a um número inteiro. Seja a sequência (v_n) definida por $v_1 = v_2 = a$ e $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$. Afirmamos que a sequência (v_n) é a sequência $(au_n) = (au_1, au_2, \dots, au_n, \dots)$.

De fato, $v_1 = a = a \cdot 1 = au_1$, $v_2 = a = a \cdot 1 = au_2$. Seja n um número inteiro, com $n \geq 3$, e suponha, por hipótese de indução, que $v_k = au_k$, para todo k inteiro com $k < n$. Então, $v_{n-1} = au_{n-1}$ e $v_{n-2} = au_{n-2}$. Logo, $v_n = v_{n-1} + v_{n-2} = au_{n-1} + au_{n-2} = a(u_{n-1} + u_{n-2}) = au_n$. Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, $v_n = au_n$, para todo número natural n.

Assim, uma sequência do tipo Fibonacci, que ao invés de ter o primeiro termo igual a 1, tem o primeiro termo igual a um número inteiro a, é a sequência obtida a partir da sequência de Fibonacci, multiplicando cada um de seus termos por a.

Para mostrar o método de Fibonacci, considere a divisão de 321 por 17. Primeiro, constrói-se uma tabela, colocando a sequência de Fibonacci em uma das colunas, e na outra coluna uma outra sequência de Fibonacci começando com 17 (Tabela 2). Essa segunda sequência será construída até um (último) elemento que será maior ou igual a 321. Em seguida, considere o penúltimo número, se o último for maior que 321 ou, o último, se for igual a 321. Junto com este número, procure os elementos dessa coluna cuja soma seja 321 ou o mais próximo, por falta, de 321, e encontre os seus correspondentes com os números da sequência original de Fibonacci. Somando-os, tem-se o quociente da divisão. Veja a Tabela 2 ilustrando tal fato.

Tabela 2 – Sequência de Fibonacci para o cálculo da divisão

Sequência original de Fibonacci	Sequência de Fibonacci começando por 17
1	17
1	17
2	34
3	51
5	**85**
8	136
13	**221**
21	357

Fonte: o autor (2022)

Observa-se que, em cada linha da tabela, o número na coluna da direita pode ser obtido multiplicando o número da coluna da esquerda por 17, que é o que foi mostrado no começo da presente seção.

Assim, $306 = 221 + 85 = 17 \cdot 13 + 17 \cdot 5 = 17 \cdot (13 + 5) = 17 \cdot 18$. Portanto, $321 = 306 + 15 = 17 \cdot 18 + 15$ e, logo, o quociente e o resto da Divisão Euclidiana de 321 por 17 são 18 e 15, respectivamente.

Podemos perceber que o Método de Fibonacci se assemelha ao Egípcio pela analogia de construção e procedimentos associados a uma tabela, embora seja menos complexo por exigir apenas que o aluno saiba somar e subtrair. Além disso, explorar o Método de Fibonacci em sala de aula será uma oportunidade de os alunos conhecerem mais sobre uma sequência que possui grandes aplicações, por exemplo, na ciência da computação, nas configurações biológicas, na teoria dos jogos etc.

3.1.4 Método de subtrações sucessivas

Este algoritmo consiste em subtrair o divisor do dividendo sucessivas vezes até que o resultado desta subtração seja menor do que o divisor. A quantidade de subtrações efetuadas equivale ao quociente desta divisão, enquanto que o menor resultado destas subtrações representa o resto. Este processo se torna trabalhoso quando temos que efetuar muitas subtrações, ou seja, quando o quociente da divisão for um número muito grande. Porém, utilizando os múltiplos do divisor nas subtrações, este método se torna rápido, possibilitando, assim, que o aluno compreenda os processos do algoritmo até ser apresentado ao algoritmo tradicional.

> (...)trabalhar com o método das subtrações sucessivas possibilita ao aluno compreender a própria operação, assim como as etapas do algoritmo, além de desenvolver a capacidade de estimar. (SALVADOR, 2012, p. 17).

Por exemplo: para dividir 137 por 34 realizamos as subtrações sucessivas da seguinte forma: $137 - 34 = 103$. Como 103 é maior que 34, podemos subtrair 34 de 103. Logo, $103 - 34 = 69$. Portanto, já temos dois 34 em 137 e podemos retirar mais um 34, e assim por diante: $69 - 34 = 35$, $35 - 34 = 1$. Como 1 é menor que 34, encontramos 4 (quantidade de subtrações efetuadas) como quociente e 1 como resto. Para encurtar o processo, podemos perceber – e também convencer o aluno – que 3 vezes 34 é menor que 137, ou seja, fazemos $34 \times 3 = 102$ e subtraímos $137 - 102 = 35$. Retirando novamente 34 de 35 temos: $35 - 34 = 1$.

3.2 A Divisão Euclidiana

Euclides ficou conhecido como o pai da Geometria, apesar de ela ter surgido e se desenvolvido muito antes dele. Sua obra “Os Elementos”, contendo 13 volumes, ficou conhecida por reunir os conhecimentos matemáticos concebidos até aquela época por vários matemáticos, inclusive ele. O Algoritmo da Divisão Euclidiana encontra-se no volume VII.

> Os Elementos foram considerados o livro por excelência para o estudo da geometria. Euclides é com razão chamado “o pai da Geometria”. Na obra, ele reuniu em um sistema coerente e compreensível, tudo o que se sabia sobre matemática em seu tempo. Todos os fragmentos surgiram da necessidade prática do uso da aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida. (FRAZÃO, 2021).

A respeito da divisão, Euclides descreve, nos seus *Elementos*, sem enunciá-lo explicitamente, o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de um número inteiro a por um inteiro $b \neq 0$, com resto. Este resultado não é somente um importante instrumento na obra de Euclides, como é também o resultado central da Aritmética.

A presente seção é baseada em (HEFEZ, Aritmética, 2016) e (HEFEZ, Iniciação à Aritmética, 2015).

Definição 1. Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b, quando existe um número inteiro c tal que $b = c.a$ (b é múltiplo de a).

Por exemplo: $a = 3$ divide $b = 21$, pois existe um número inteiro $c = 7$ tal que $b = c.a$, ou seja, $21 = 7 \times 3$.

Representaremos o fato de um número d ser divisor de um número a, ou d dividir a, pelo símbolo $d|a$. Caso d não divida a, escrevemos $d \nmid a$.

Assim, por exemplo, temos que $1|6$, $2|6$, $3|6$, $6|6$, $-6|6$, $-3|6$, $-2|6$, $-1|6$. Além disso, se $d \notin \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, então $d \nmid 6$.

Temos também que $1|d$ e $d|0$, para todo inteiro d, inclusive quando $d = 0$, pois 0 é múltiplo de qualquer número[7]. Além disso, se $d|a$, então $-d|a,\ d|-a$ e $-d|-a$.

Proposição 1. Se a, b e d são números inteiros e d divide a, então d divide ab.

Demonstração: se $d|a$, então $a = dk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $ab = (dk)b = d(kb)$, ou seja, d$|ab$. ■

Proposição 2. Sejam a, b e d números inteiros tais que d divide a. Então, d divide $(a + b)$ se, e somente se, d divide b.

Demonstração: suponha que $d|a$ e $d|a + b$, então $a = dk_1$, para algum $k_1 \in \mathbb{Z}$ e $a + b = dk_2$, para algum $k_2 \in \mathbb{Z}$. Temos que $a + b = dk_1 + b = dk_2$, então $b = d(k_2 - k_1)$ e, portanto, $d|b$.
Reciprocamente, se $d|a$ e $d|b$, então $a = dk_1$e $b = dk_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $a + b = dk_1 + dk_2 = d(k_1 + k_2)$, ou seja, $d|a + b$.■

Teorema 1 (Divisão Euclidiana). *Sejam a e b dois números inteiros, com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que, $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.*

Demonstração:

Vamos começar provando a existência de tais números "q" e "r". Considere o conjunto $S = \{a - bq/q \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}_0$, sendo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou seja, S é o conjunto de todos os n números inteiros não negativos que podem ser obtidos subtraindo de a um múltiplo inteiro de b. O conjunto S é não vazio, pois, pela propriedade Arquimediana[8], cuja demonstração pode ser encontrada em (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 12), para $b \neq 0$ e $-a \in \mathbb{Z}$, existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q(-b) > -a$, isto é, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b.q > 0$, logo $q \in S$. Portanto, pelo *Princípio da Boa Ordenação*[9], o conjunto S possui um menor elemento. Seja r esse elemento não negativo. Isso significa que r é o menor número inteiro não negativo que pode ser expresso na forma $a - b.q$, isto é, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a - b.q$.

---

[7] Isto absolutamente não quer dizer que podemos dividir zero por zero, pois, como 0 = c×0 para todo c, o "quociente" de 0 por 0 poderia ser qualquer número, logo não estaria bem definido.
[8] A propriedade Arquimediana afirma que dados x, $y \in \mathbb{Z}$, com y≠ 0. Então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $ny > x$. (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 11)
[9] Uma das formulações do Princípio da Boa Ordenação é a seguinte: "Se T é um subconjunto dos Números Inteiros, não vazio e limitado superiormente, então T possui um menor elemento".

Para mostrar que $0 \leq r < |b|$, vamos supor que $r \geq |b| > 0$, logo, existe $m \in \mathbb{N}_0$, tal que $r = |b| + m$. Observe que $0 \leq m < r$, pois $b \neq 0$. Logo $m = r - |b| = a - b.q - |b| = a - b(q \pm 1)$, donde $m \in S$ e é menor do que r. Contradição, pois r é o menor elemento de S, *portanto,* $r < |b|$.

Para mostrar a unicidade de q e r, suponha que existam dois conjuntos diferentes de Números Inteiros q_1, r_1 e q_2, r_2 que satisfaçam $a = bq_1 + r_1$ e $a = bq_2 + r_2$, com $0 \leq r_1, r_2 < |b|$. Subtraindo essas duas equações, obtemos: $(bq_1 + r_1) - (bq_2 + r_2) = 0$. Daí, $b(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) = 0$.

De $0 \leq r_1, r_2 < |b|$, obtemos: $-|b| < -r_1 = 0 - r_1 \leq r_2 - r_1 \leq r_2 - 0 = r_2 < |b|$, donde $|r_2 - r_1| < |b|$, mas $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$, a partir disso $|b(q_1 - q_2)| < |b|$. Sendo $b \neq 0$, então $|q_1 - q_2| < 1$, como $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$, logo $|q_1 - q_2| = 0$, isto é, $q_1 = q_2$, o que leva a que: $r_1 = r_2$. Portanto, os números inteiros q e r são únicos. ■

Os números q e r do Teorema 1 são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de a por b. Os números a e b são chamados, respectivamente, de dividendo e divisor desta Divisão Euclidiana. Esta relação é conhecida hoje como a relação fundamental da divisão, cuja aplicação utiliza o processo de subtrações sucessivas.

Por exemplo: para dividir de forma euclidiana o número 54 por 13, nos embasamos em subtrações sucessivas, ou seja, determinamos os resultados da subtração de 54 pelos múltiplos de 13, até conseguirmos aquele quociente cujo resto respectivo é maior ou igual do que 0 e menor do que 13:

$$54 - 1 \times 13 = 41;$$
$$54 - 2 \times 13 = 28;$$
$$54 - 3 \times 13 = 15;$$
$$54 - 4 \times 13 = 2 > 0;$$
$$54 - 5 \times 13 = -11 < 0.$$

Assim, a Divisão Euclidiana de 54 por 13 se expressa como: $54 = 4 \times 13 + 2$.

O Teorema da Divisão Euclidiana possui várias aplicações e está inserido em vários outros conteúdos aritméticos pouco enfatizados na Educação Básica e nos livros didáticos, dentre eles, podemos destacar: Paridade de um Número Natural, Critérios de Divisibilidade, Sistema de Numeração, MDC, MMC, dentre outros.

3.2.1 Paridade de um número

Dado um Número Inteiro n qualquer, pelo Teorema da Divisão Euclidiana existem somente duas possibilidades:

i) o resto da divisão de n por 2 é 0, isto é, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2$; ou

ii) o resto da divisão de n por 2 é 1, isto é, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2q + 1$.

Portanto, os Números Inteiros se dividem em duas classes: a dos números da forma $2q$, para algum $q \in \mathbb{Z}$, chamados de *números pares*; e a dos números da forma $2q + 1$, chamados de *números ímpares.*

A *paridade* de um Número Inteiro é o caráter do número ser par ou ímpar.

Os Números Naturais são classificados em pares e ímpares, pelo menos desde Pitágoras, há 500 anos antes de Cristo (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 48).

Os problemas a seguir foram retirados do material didático, o qual foi destinado aos alunos que participam do Programa de Iniciação Científica da OBMEP.

Exemplo 1. Discuta a paridade

a) da soma de dois números pares.
b) da soma de dois números ímpares.
c) da soma de um número par com um número ímpar.
d) da diferença de dois números ímpares.
e) do produto de dois números ímpares.
f) do quadrado de um número.

Exemplo 2. Podemos decidir a paridade de uma expressão complexa envolvendo produtos e somas de inteiros.

De fato, se atribuímos o símbolo $\overline{0}$ aos números pares e o símbolo $\overline{1}$ aos números ímpares, os resultados do Exemplo 1 acima nos fornecem as seguintes tabelas que regem a paridade das somas e produtos dos Números Inteiros.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Por exemplo: se quisermos saber a paridade do número $20^{10} \times 11^{200} + 21^{19}$, será necessário desenvolver as contas indicadas para saber se o resultado final é par ou ímpar. O que fazemos é substituir na expressão acima o número 20 por $\bar{0}$, por ser par; e os números 11 e 21 por $\bar{1}$, por serem ímpares. Assim, obtemos a expressão $\bar{0}^{10} \times \bar{1}^{200} + \bar{1}^{19}$, que, operada segundo as tabelas acima, resulta igual a $\bar{1}$. Portanto, o número $20^{10} \times 11^{200} + 21^{19}$ é ímpar.

O método acima foi idealizado pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quando tinha cerca de 17 anos. Ele é considerado o maior matemático de todos os tempos.

3.2.2 Lema dos Restos

Prosseguindo na apresentação de formas de resolver problemas de restos, mas agora na divisão de um número por 3, em vez de 2, consideramos o exemplo a seguir.

Exemplo 3. Analisar a aritmética dos restos da divisão por 3.

Tabela 3 – Inteiros que deixam restos 0, 1 e 2 na divisão por 3

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-9	-8	-7
-6	-5	-4
-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: (HEFEZ, 2015)

Primeiro, vamos organizar todos os números inteiros como na Tabela 3. Note que os números da primeira coluna são os múltiplos de 3, ou seja, os números inteiros que deixam resto zero quando divididos por 3. Os números da segunda e da terceira coluna são, respectivamente, aqueles que deixam resto 1 e 2 quando divididos por 3. Note que o resto da divisão por 3 da soma ou do produto de dois números só depende dos restos da divisão desses números por 3, respectivamente, e não dos números em si. Assim, atribuindo o símbolo $\bar{0}$ aos números da primeira coluna, e os símbolos $\bar{1}$ e

$\overline{2}$ aos números que ocupam a segunda e terceira coluna, respectivamente, obtemos as seguintes tabelas que regem os restos da divisão por 3 das somas e produtos dos Números Inteiros.

Tabela 4 – Tabelas das somas e dos produtos na divisão por 3

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Fonte: (HEFEZ, 2015)

Por exemplo, usando as tabelas acima, determine o resto da divisão por 3 do número $4^{100} + 32^{30}$.

Primeiramente, na divisão por 3, o 4 deixa resto 1 e o 32 deixa resto 2. Logo, de acordo com a Tabela 4, a expressão $4^{100} + 32^{30}$ pode ser substituída por $\overline{1}^{100} + \overline{2}^{30}$, considerando os restos na divisão por 3. Agora, a partir da tabela podemos deduzir que:

- 4^{100} deixa resto 1 na divisão por 3, pois $\overline{1}^{100} = \overline{1}$;
- Na divisão por 3, potências de base 2 deixam resto 1 quando o expoente é par e resto 2 quando o expoente é ímpar, logo, 32^{30} deixa resto 1, pois $\overline{2}^{30} = \overline{1}$.

Desde que, $\overline{1}^{100} + \overline{2}^{30} = \overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$, pela Tabela 4, logo, $4^{100} + 32^{30}$ deixa resto 2, na divisão por 3.

Os exemplos anteriores são situações particulares do resultado abaixo.

Lema 1. (Lema dos Restos) A soma e o produto de quaisquer dois números inteiros deixam o mesmo resto que a soma e o produto dos seus restos, respectivamente, na divisão por um inteiro $a,\ a \neq 0$.

Exemplo 4. Ao dividirmos 16 e 13 por 5 $(a = 5)$, os restos serão 1 e 3, respectivamente. De fato, temos $16 = 5 \times 3 + 1$ e $13 = 5 \times 2 + 3$. Pelo Lema dos Restos, o resto da divisão de $16 + 13$ por 5 será igual ao resto da divisão de $1 + 3 = 4$ por 5, ou seja, será 4. Por outro lado, o resto da divisão de 16×13 por 5, pelo Lema dos Restos, será igual ao resto da divisão de $1 \times 3 = 3$ por 5 e, portanto, igual a 3.

Apesar da simplicidade do exemplo anterior, este serve como ponto de partida para a resolução de problemas mais complexos, similares aos exemplos 2 e 3.

Exemplo 5. Encontrar o resto da divisão de $4^{3000} + 5^{2150}$ por 4.

O processo de efetuar a soma das potências 4^{3000} e 5^{2150} e, em seguida, dividi-la por 4 para encontrar o resto, se torna inviável, devido ao elevado expoente. Vamos, então, utilizar o Lema dos Restos para resolver o problema. Observe que, ao dividir 4 por 4, obtemos 0 como resto. Então, pelo Lema dos Restos, o resto da divisão de 4^{3000} por 4 será igual ao resto da divisão do produto $0.0\ldots.0$ (3000 fatores) por 4, ou seja, o resto será igual a 0. Analogamente, concluímos que o resto da divisão de 5^{2150} por 4 é igual a 1 (pois o resto da divisão de 5 por 4 é 1). Logo, o resto da divisão de $4^{3000} + 5^{2150}$ por 4 é igual ao resto da divisão de $0 + 1$ por 4, ou seja: 1.

3.2.3 Sistema de Numeração

Na atualidade, o sistema decimal posicional é a forma universal para representar os Números Inteiros. Esse sistema, variante do sistema sexagesimal, utilizado pelos babilônios há cerca de 1700 anos antes de Cristo, foi desenvolvido na China e na Índia (HEFEZ, 2016, p. 58). Nesse sistema, todo número inteiro é representado por uma sequência formada pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Por serem dez esses algarismos, o sistema é chamado de decimal.

O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro da sequência. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo: o algarismo da extrema direita tem peso $10^0 = 1$; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso $10^1 = 10$; o seguinte tem peso $10^2 = 100$; o seguinte tem peso $10^3 = 1000$ etc. Assim, o número 1458, no sistema decimal, representa o número $1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 8$. Os zeros à esquerda em um número são irrelevantes, veja por exemplo, $0231 = 0 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 231$.

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima (1458), o 8 é de primeira ordem, o 5 de segunda, o 4 de terceira e o 1 de quarta ordem. A cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, é estabelecida uma classe, como explicado por (HEFEZ, Aritmética, 2016,

p. 59). As classes são comumente separadas por um ponto, e a seguir, são apresentados os nomes das primeiras classes e ordens.

Figura 39 – Classes e ordens do Sistema de Numeração

Classe das Unidades	unidades	1ª ordem
	dezenas	2ª ordem
	centenas	3ª ordem
Classe do Milhar	unidades de milhar	4ª ordem
	dezenas de milhar	5ª ordem
	centenas de milhar	6ª ordem
Classe do Milhão	unidades de milhão	7ª ordem
	dezenas de milhão	8ª ordem
	centenas de milhão	9ª ordem

Fonte: (HEFEZ, 2016)

Os sistemas de numeração posicionais estão fundamentados no teorema a seguir, que é uma aplicação da Divisão Euclidiana e cuja demonstração é encontrada em (HEFEZ, 2016).

Teorema 2[10]. Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \ldots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n$.

A representação $r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n$ é chamada de expansão relativa à base b. Quando $b = 10$, essa expansão é chamada *expansão decimal*, e quando $b = 2$, de *expansão binária.*

Para exemplo: vamos representar o número 723 na base 5. Uma vez que os restos da divisão por 5 são números não negativos menores que 5 (Teorema 2), logo, o sistema de base $b = 5$ utiliza somente os símbolos $0, 1, 2, 3$ e 4. Por divisões euclidianas sucessivas por 5, temos:

$$723 = 144 \times 5 + 3$$
$$= (28 \times 5 + 4) \times 5 + 3 = 28 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3$$
$$= (5 \times 5 + 3) \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 = 5 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3$$
$$723 = (1 \times 5 + 0) \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 = 1 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3$$

[10] A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrada em (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 59).

Portanto, $723 = \mathbf{1} \times 5^4 + \mathbf{0} \times 5^3 + \mathbf{3} \times 5^2 + \mathbf{4} \times 5^1 + \mathbf{3}$, ou seja, $723 = [10343]_5$.

Na prática, os cálculos acima representam sucessivas divisões euclidianas (dos quocientes) por 5, que só param quando o quociente encontrado é menor do que 5. Os restos encontrados, juntamente com o último quociente são os números que compõem a representação de 723 na base 5.

O Sistema Binário

No sistema de base $b = 2$, muito utilizado em computação, todo Número Natural é representado por uma sequência de 0 e 1. Por exemplo, o número 19 pode ser decomposto como na Figura abaixo.

Figura 40 – Decomposição do número 19 em binário

DECOMPOSIÇÃO	32	16	8	4	2	1
REPRESENTAÇÃO NA BASE 2	...	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
NÚMERO BINÁRIO	...	1	0	0	1	1

Fonte: o autor (2022)

Ao decompor este número como soma de potências de 2 (primeira fila), temos $19 = 16 + 2 + 1$. A decomposição aqui ocorre da esquerda para a direita, pois organizamos os numerais sempre do maior para o menor. Agora, observe a representação deste número na forma de potência (segunda fila): $19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$. Conclui-se, então, que 19 é representado da seguinte forma: $19 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$. Logo, o número decimal 19 no sistema binário é 10001, ou seja, $19 = [10011]_2$.

O processo inverso pode ser feito resolvendo a expressão numérica $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, cujo valor é: $1 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 19$. Logo, $[10011]_2 = 19$.

E por divisões euclidianas sucessivas:

$19 = 9 \times 2 + 1$

$19 = (4 \times 2 + 1) \times 2 + 1 = 4 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$

$19 = (2 \times 2 + 0) \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 2 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$

$19 = (1 \times 2 + 0) \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$

Portanto, $19 = \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1}$, ou seja, $19 = [10011]2$.

3.2.4 Critérios de divisibilidade

Teorema 3. Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.

Demonstração: inicialmente, consideremos a tabela:

Tabela 5 – Os 10 primeiros múltiplos de 2

2×0 = 0	2×5 = 10 = 10 + 0
2×1 = 2	2×6 = 12 = 10 + 2
2×2 = 4	2×7 = 14 = 10 + 4
2×3 = 6	2×8 = 16 = 10 + 6
2×4 = 8	2×9 = 18 = 10 + 8

Fonte: (HEFEZ, Iniciação à Aritmética, 2015)

Note que todo número da Tabela 5 é um múltiplo de 10 somado a um dos números 0, 2, 4, 6, ou 8 e isso acontece com qualquer número par. De fato, suponha que um dado número natural n seja par, ou seja, $n = 2m$, onde m é um número natural. Escrevendo m da forma $m_1 \times 10 + m_0$, onde m_0 é o algarismo das unidades de m, temos $n = 2(m_1 \times 10 + m_0) = 2m_1 \times 10 + 2m_0$.

Sendo $2m_0$ um dos números da Tabela 5, temos que ele é um múltiplo de 10 somado com um dos números: $0, 2, 4, 6,$ ou 8. Logo, $n = 2m_1 \times 10 + 2m_0$ é um múltiplo de 10 somado com um dos números: $0, 2, 4, 6,$ ou 8, e, portanto, o seu algarismo das unidades é $0, 2, 4, 6,$ ou 8.

Reciprocamente, escrevendo n da forma $n_1 \times 10 + n_0$, onde n_0 é o algarismo das unidades de n e $n_0 = 2 \times k$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, temos $n = n_1 \times 10 + n_0 = 2 \times 5 \times n_1 + 2 \times k = 2 \times (5 \times n_1 + k)$. Logo, $n = 2 \times m$, onde $m = (5 \times n_1 + k) \in \mathbb{N}$. Portanto, n é múltiplo de 2.■

Teorema 4. Seja $a = r_n \ldots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 5 (respectivamente por 10), é que r_0 seja 0 ou 5 (respectivamente 0).

Demonstração: sendo $a = 10 \times (r_n \ldots r_1) + r_0$, temos que a é divisível por 5 se, e somente se, r_0 é divisível por 5, e, portanto, $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$. Por outro lado, a é divisível por 10 se, e somente se, r_0 é divisível por 10, o que somente ocorre quando $r_0 = 0$. ■

Teorema 5. Seja $a = r_n \ldots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 (respectivamente por 9) é que $r_n + \cdots + r_1 + r_0$ seja divisível por 3 (respectivamente por 9).

Demonstração: dado um número a escrito no sistema decimal como $a = r_n \ldots r_1 r_0 = r_n \times 10^n + \cdots + r_1 \times 10^1 + r_0$. Subtraindo a soma $r_n + \cdots + r_1 + r_0$, dos algarismos que compõem o número a, de ambos os lados da igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned} a - (r_n + \cdots + r_1 + r_0) &= (r_n \times 10^n - r_n) + \cdots + (r_1 \times 10^1 - r_1) + (r_0 - r_0) \\ &= (10^n - 1)r_n + \cdots + (10^1 - 1)r_1. \end{aligned}$$

Como $10^n - 1 = \underbrace{99 \ldots 9}_{n \text{ noves}} = 9 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ uns}}$, então $10^n - 1$ é divisível por 9.

Note agora que, na última expressão, os termos $10^n - 1$ são sempre múltiplos de 9 (logo de 3). Portanto, temos que a é múltiplo de 9 ou de 3 se, e somente se, o número $r_n + \cdots + r_1 + r_0$ é múltiplo de 9 ou de 3. ■

Por exemplo: dado o número $257\ 985\ 921$, somando os seus algarismos obtemos, $2 + 5 + 7 + 9 + 8 + 5 + 9 + 2 + 1 = 48$. Repetindo o mesmo procedimento para o número 48, obtemos $4 + 8 = 12$, o qual é múltiplo de 3, mas não de 9. Logo, o número dado inicialmente é múltiplo de 3, mas não múltiplo de 9.

3.2.5 Números Primos

Os números primos são números especiais que desempenham um papel importante dentro da Teoria dos Números e, entre outras coisas, os seus produtos representam todos os Números Naturais, como veremos ainda nesta seção.

Definição 2. Um número natural, diferente de 0 e de 1 e que é apenas múltiplo de 1 e de si próprio, é chamado de *número primo*. Um número diferente de 0 e de 1 que não é primo é chamado de *número composto.*

Por exemplo: 2, 3, 5 e 7 são números primos, enquanto 4, 6 e 8 são números compostos por serem múltiplos de 2. Em geral, todo número par maior do que 2 não é primo, ou seja, é composto.

Note que a definição acima não classifica os números 0 e 1 nem como primos nem como compostos. Exceto esses dois números, todo Número Natural ou é primo ou é composto.

Teorema 6 (Teorema Fundamental da Aritmética[11]). Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos seus fatores) como um produto de números primos.

Denotando por $d(n)$ o número de divisores positivos de um número natural $n,$ segue, pelo princípio multiplicativo, que se $n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r},$ onde $p_1, \dots, p_r$ são números primos e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, então $d(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_r + 1).$ Por exemplo, vamos encontrar o número de divisores positivos do número 60.

Temos que $60 = 22 \times 3 \times 5$. Desta forma, $d(60) = (2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$. Portanto, 60 possui 12 divisores positivos.

Euclides, no Livro IX dos *Elementos*, respondeu à pergunta sobre a quantidade de números primos usando uma prova por redução ao absurdo, um marco na história da matemática, apresentada no teorema a seguir e contida em (HEFEZ, Aritmética, 2016).

Teorema 7. Existem infinitos números primos.

Demonstração: suponha que exista apenas um número finito de primos $p_1, p_2, \dots, p_r$. Considere o número natural:

$$n = p_1 p_2 \dots p_r + 1.$$

Pelo Teorema 6, o número n possui um fator primo p que, portanto, deve ser um dos $p_1, p_2, \dots, p_r$ e, consequentemente, divide o produto $p_1 p_2 \dots p_r$. Mas isso implica que p divide 1, o que é absurdo.■

[11] A demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética pode ser encontrada em (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 123)

O Crivo de Eratóstenes

O método chamado de *Crivo*[12] *de Eratóstenes*, atribuído ao matemático grego *Eratóstenes*, permite determinar todos os números primos até a ordem que se desejar. A eficiência deste método é baseada na observação a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 132).

Se um número natural $a > 1$ é composto, então ele é múltiplo de algum número primo p tal que $p^2 \leq a$. Equivalentemente, é primo todo número a que não é múltiplo de nenhum número primo p tal que $p^2 < a$.

Por exemplo: para mostrar que o número $221\,(= 13 \times 17)$ é composto, bastaria testar se ele é múltiplo de algum dos números primos $p = 2, 3, 5, 7, 11$ ou 13, já que o próximo primo 17 é tal que $17^2 = 289 > 221$.

Para se obter os números primos até uma certa ordem n, escreva os números de 2 até n em uma tabela.

O primeiro desses números, o 2, é primo, pois não é múltiplo de nenhum número primo anterior. Risque todos os demais múltiplos de 2 na tabela, pois esses não são primos. O primeiro número não riscado nessa nova tabela é o 3, que é primo, pois não é múltiplo de nenhum número anterior diferente de 1. Risque todos os demais múltiplos de 3 na tabela, pois esses não são primos. O primeiro número maior que 3 e não riscado na tabela é o 5 que é um número primo, pois não é múltiplo de nenhum número anterior diferente de 1. Risque os demais múltiplos de 5 na tabela. O primeiro número maior do que 5 e que não foi riscado é o 7, que é primo. Risque os demais múltiplos de 7 na tabela. Ao término desse procedimento, os números não riscados são todos os primos menores ou iguais a n. Note que o procedimento termina assim que atingirmos um número primo p tal que $p^2 \geq a$ pois, pela observação que fizemos acima, já teríamos riscado todos os números compostos menores ou iguais a n.

Exibimos a seguir (Figura 41) o resultado do crivo para $n = 250$. Note que, neste caso, o procedimento termina tão logo cheguemos ao número primo $p = 17$.

[12] A palavra “crivo” significa peneira. O método consiste em peneirar os números naturais em um intervalo [2, n], jogando fora os números que não são primos.

Figura 41 – Crivo de Erastóstenes para obtenção dos números primos até 250

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~
109	~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~	131	~~132~~
~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~	~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~
~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~	151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~
157	~~158~~	~~159~~	~~160~~	~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~
~~169~~	~~170~~	~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~	191	~~192~~
193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~	~~201~~	~~202~~	~~203~~	~~204~~
~~205~~	~~206~~	~~207~~	~~208~~	~~209~~	~~210~~	211	~~212~~	~~213~~	~~214~~	~~215~~	~~216~~
~~217~~	~~218~~	~~219~~	~~220~~	~~221~~	~~222~~	223	~~224~~	~~225~~	~~226~~	227	~~228~~
229	~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~	239	~~240~~
241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	~~247~~	~~248~~	~~249~~	~~250~~		

Fonte: (HEFEZ, 2015)

Consultando a Figura 41, temos que o número 241 é primo, respondendo à pergunta que formulamos anteriormente, e dessa mesma tabela extraímos todos os números primos até 250 (Figura 42).

Figura 42 – Números primos menores que 250

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241							

Fonte: (HEFEZ, 2015)

3.2.7 Máximo Divisor Comum (MDC)

Definição 3. Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito um *divisor comum* de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Por exemplo: os números $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ e ± 6 são divisores comuns de 12 e 18.

Definição 4. Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de *Máximo Divisor Comum* (mdc) de a e b e denotado por $mdc(a, b)$.

Por exemplo: para calcular $mdc(12, 18)$, determinamos os divisores de 12, que são: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$; e os divisores de 18, que são: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$. Tomando o maior divisor comum, obtemos: $mdc(12, 18) = 6$.

Note que $mdc(a, b) = mdc(b, a)$.

Pode ser verificado que, se $a \in Z$, então $mdc(0, a) = |a|$, $mdc(1, a) = 1$ e que $mdc(a, a) = |a|$. Além disso, para todo $b \in Z$, temos que: $a|b \Leftrightarrow mdc(a, b) = |a|$.

Se $mdc(a, b) = 1$, dizemos que a e b são primos entre si.

Quando um dos dois números for grande, o método acima para o cálculo do MDC fica impraticável, pois achar os divisores de um número grande será muito complicado ou trabalhoso. O que fazer então? Euclides, três séculos antes de Cristo, nos dá uma solução para este problema descrevendo um algoritmo muito eficiente para fazer este cálculo.

Lema 2. Um número d é divisor comum de a e b, não ambos nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de a e $a - b$.

Demonstração: seja d um divisor comum de a e b, logo, se $d|a$ então $a = d.k_1$ e se $d|b$ então $b = d.k_2$, com k_1 e k_2 inteiros. Assim, $a - b = d.k_1 - d.k_2 = d(k_1 - k_2)$, com $k_1 - k_2$ inteiro, portanto, $d|(a - b)$.

Reciprocamente, se d é um divisor comum de a e $a - b$, então existem λ_1 e λ_2 inteiros, tais que $a = d.\lambda_1$ (1) e $a - b = d.\lambda_2$ (2). Substituindo (1) em (2), temos: $d.\lambda_1 - b = d.\lambda_2$, então $d.\lambda_1 - d.\lambda_2 = b$, daí $d(\lambda_1 - \lambda_2) = b$, com $\lambda_1 - \lambda_2$ inteiro, ou seja, $d \mid b$.

Portanto, $d \mid a$ e $d \mid b \Leftrightarrow d \mid a$ e $d \mid (a - b)$. ■

A partir do lema anterior, e tomando o Máximo Divisor Comum, obtemos a seguinte identidade: $mdc(a, b) = mdc(a, a - b)$, que permite ir reduzindo sucessivamente o cálculo do MDC de dois números ao cálculo do MDC de números cada vez menores.

Como exemplo de aplicação, vejamos como isto vai permitir o cálculo do MDC entre 3264 e 1234:

$$
\begin{aligned}
mdc(3264, 1234) &= mdc(1234, 3264 - 1234) = mdc(1234, 2030) \\
&= mdc(1234, 2030 - 1234) = mdc(1234, 796) \\
&= mdc(796, 1234 - 796) = mdc(796, 438) \\
&= mdc(796 - 438, 438) = mdc(358, 438) \\
&= md(358, 438 - 358) = mdc(358, 80) = mdc(358 - 80, 80) \\
&= mdc(278, 80) = mdc(198, 80) = mdc(118, 80) \\
&= mdc(38, 80) = mdc(38, 42) = mdc(38, 4) = mdc(34, 4) \\
&= mdc(30, 4) = mdc(26, 4) = mdc(22, 4) = mdc(18, 4) \\
&= mdc(14, 4) = mdc(10, 4) = mdc(6, 4) = 2
\end{aligned}
$$

As contas acima serão abreviadas com o algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC.

3.2.8 O Algoritmo de Euclides

Lema 3 (Lema de Euclides): dados inteiros a e b, os divisores comuns de a e b são os mesmos que os divisores comuns de a e $a - c.b$, para todo Número Inteiro c fixado.

Este lema pode ser verificado ao aplicar sucessivas vezes o Lema 2, e afirma que os divisores comuns de a e b são os mesmos divisores comuns de a e $a - b.c$, logo, tomando o maior divisor comum em ambos os casos, obtemos a fórmula: $mdc(a, b) = mdc(a, a - c.b)$, o que permite ir diminuindo passo a passo a complexidade do problema, até torná-lo trivial.

Algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC

Dados dois inteiros positivos a e b, considere as divisões sucessivas:

$a = bq + r_0, \quad 0 < r_0 < b$

$b = r_0 q_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < r_0$

$r_0 = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$

...

$r_k = r_{k+1} q_{k+2} + r_{k+2}, \quad 0 < r_{k+2} < r_{k+1}$

$r_{k+1} = r_{k+2} q_{k+3}$, até algum r_{k+2} dividir r_{k+1}.

Assim, temos que $mdc(a, b) = r_{k+2}$, que é o último resto não nulo das divisões sucessivas anteriores.

Demonstração. É fácil ver que o Processo de Divisões Sucessivas descrito acima é finito. De fato, pelo algoritmo da divisão, temos que $b > r_0 > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$. Como a quantidade de números entre b e 0 é finita, então o processo é finito. Mais ainda, analisando as igualdades de cima para baixo, e utilizando o Lema 3, concluímos que: $mdc(a, b) = mdc(b, r_0) = mdc(r_0, r_1) = \cdots = mdc(r_{k+1}, r_{k+2}) = r_{k+2}$. ■

Vamos utilizar um exemplo para entender o método, calculando o $mdc(a, b)$, onde $a = 162$ e $b = 372$.

Pelo Lema de Euclides, sabemos que o MDC de a e b é o mesmo que o de a e de b menos um múltiplo qualquer de a. Otimizamos os cálculos ao tomarmos o menor dos números da forma b menos um múltiplo de a e isto é realizado pelo algoritmo da divisão: $372 = 162 \times 2 + 48$. Assim $mdc(372, 162) = mdc(372 - 162 \times 2, 162) = mdc(48, 162)$.

Aplicando o mesmo argumento ao par $a_1 = 48$ e $b_1 = 162$: $162 = 48 \times 3 + 18$. Assim, $mdc(372, 162) = mdc(162, 48) = mdc(162 - 48 \times 3, 48) = mdc(18, 48)$.

Aplicando novamente o mesmo argumento ao par $a_2 = 18$ e $b_2 = 48$: $48 = 18 \times 2 + 12$. Assim, $mdc(372, 162) = mdc(48, 18) = mdc(48 - 18 \times 2, 18) = mdc(12, 18)$.

Novamente, utilizando o mesmo argumento para o par $a_3 = 18$ e $b_3 = 12$, temos: $18 = 12 \times 1 + 6$. Assim, $mdc(372, 162) = mdc(18, 12) = mdc(18 - 12 \times 1, 12) =$

$mdc(6,12)$. Finalmente, obtemos $mdc(372,162) = mdc(12,6) = mdc(12 - 6 \times 2, 6) = mdc(0,6) = 6$. Logo, $mdc(372,162) = 6$.

O procedimento acima pode ser sistematizado como na Figura 43.

Figura 43 – Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc(372, 162)

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6 = mdc(372, 162)
48	18	12	6	0	

Fonte: (HEFEZ, 2015)

O Algoritmo de Euclides usado de trás para frente nos dá uma informação adicional fundamental. Das igualdades acima podemos escrever:

$6 = 18 - 12 \times 1$

$12 = 48 - 18 \times 2$

$18 = 162 - 48 \times 3$

$48 = 372 - 162 \times 2$

Donde,

$6 = 18 - 12 \times 1 = 18 - (48 - 18 \times 2) = 18 \times 3 - 48 = (162 - 48 \times 3) \times 3 - 48 = 162 \times 3 - 48 \times 10 = 162 - (372 - 162 \times 2) \times 10 = 162 \times 23 - 372 \times 10$.

Assim, podemos escrever: $6 = mdc(372,162) = 162 \times 23 + 372 \times (-10)$.

Note que conseguimos, através do uso do Algoritmo de Euclides de trás para frente, escrever $6 = mdc(372,162)$ como múltiplo de 162 mais um múltiplo de 372.

Este método nos dá um importante resultado, a relação de Bézout:

Teorema 8 (Relação de Bézout). Dados inteiros a e b, quaisquer, mas não ambos nulos, existem dois inteiros n e m tais que, $mdc(a,b) = a.n + b.m$.

Consideremos a seguinte situação: em um jogo para duas ou mais pessoas, há 24 fichas vermelhas e 40 fichas azuis para serem distribuídas igualmente entre os participantes. Nenhuma ficha pode sobrar. Qual é o número máximo de pessoas que podem participar desse jogo?

Observe a Figura 44, onde foi utilizado o Algoritmo de Euclides para calcular o MDC entre 24 e 40.

Figura 44 – Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc(40, 24)

	1	1	2
40	24	16	8 = mdc(40, 24)
16	8	0	

Fonte: o autor (2022)

Logo, podem participar do jogo no máximo 8 pessoas.

Uma outra forma de calcularmos o MDC entre dois inteiros, onde pelo menos um deles é diferente de zero, é via decomposição em fatores primos.

Teorema 9[13]**.** Sejam os números inteiros $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ e $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$, sendo p_1, p_2,..., p_r números primos distintos e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ números inteiros não negativos. Então, $\mathrm{mdc}(a, b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r}$, sendo $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Ou seja, $\mathrm{mdc}(a, b)$ é igual ao produto de todas as potências p^s, sendo que p pertence ao conjunto de todos os números primos que dividem a e b, e s é o menor expoente para p tal que p^s divide a e b.

De maneira análoga ao $\mathrm{mdc}(a, b)$ de dois números inteiros, o $\mathrm{mdc}(a, b, c)$ de três números inteiros é o maior de todos os divisores comuns de a, b e c e pode ser calculado por meio da fatoração em números primos de a, b e c.

Por exemplo, considerando os números inteiros 24,15 e 6, temos: $\mathrm{mdc}(24, 15, 6) = \mathrm{mdc}(2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$.

A existência e unicidade de $\mathrm{mdc(a, b)}$, para a e b sendo números inteiros, não ambos nulos, é garantida, uma vez que o conjunto D dos divisores comuns de a e b é não vazio, já que $1 \in D$, e é limitado superiormente, uma vez que, por exemplo, se $a \neq 0$, então todo elemento de D, por ser divisor de a, é menor do que ou igual a $|a|$. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, D tem maior elemento (que é único), sendo $\mathrm{mdc(a, b)}$ exatamente esse maior elemento de D.

[13] A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 126).

Pela Relação de Bézout (Teorema 8), existem números inteiros m em n tais que $\mathrm{mdc(a,b)} = an + bm$. Seja c um número inteiro que é divisor comum de a e b, logo c é divisor de $an + bm$, como $an + bm = \mathrm{mdc(a,b)}$, então c é divisor comum de $\mathrm{mdc(a,b)}$. Assim, $\mathrm{mdc(a,b)}$ é um divisor comum de a e b, que é múltiplo de todo divisor comum de a e b.

3.2.9 Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Definição 5. Diremos que um número inteiro é um *múltiplo comum* de dois números inteiros dados, se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Os números ab e 0 são sempre múltiplos comuns de a e b.

Definição 6. Sejam a e b números inteiros não nulos. O *Mínimo Múltiplo Comum de a e b*, denotado por $mmc(a,b)$, é o menor de todos os múltiplos comuns positivos de a e b.

Por exemplo: 12 é um múltiplo comum de 2 e 3, mas não é o menor desses múltiplos comuns. O número 6 é o menor múltiplo comum de 2 e 3. Denotamos: $mmc(2,3) = 6$.

A existência e unicidade de $mmc(a,b)$, para a e b números inteiros não nulos, é garantida, uma vez que o conjunto M dos divisores comuns positivos de a e b é não vazio, já que $|ab| \in M$, e é limitado inferiormente, uma vez que todo elemento de M é maior do que ou igual a zero. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, M tem menor elemento (que é único), sendo $mmc(a,b)$ exatamente esse menor elemento de M.
Seja c um número inteiro que é múltiplo comum de a e b. Pela Divisão Euclidiana, existem números inteiros q e r, com $0 \leq r < mmc(a,b)$ tais que $c = mmc(a,b) \cdot q + r$. Como c e $mmc(a,b)$ são múltiplos comuns de a e b, então $r = c - mmc(a,b) \cdot q$ é múltiplo comum de a e b. Como $0 \leq r < mmc(a,b)$, r é múltiplo comum de a e b e $mmc(a,b)$ é o menor de todos os múltiplos comuns positivos de a e b, então $r = 0$. Como $r = 0$, então $c = mmc(a,b) \cdot q$ e, portanto, $mmc(a,b)$ é divisor de c. Assim, $mmc(a,b)$ é um múltiplo comum de a e b, que divide todo múltiplo comum de a e b.

Teorema 10. Sejam os números inteiros $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ e $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$, sendo p_1, p_2,..., p_r números primos distintos e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ números inteiros não negativos. Então, $mmc(a,b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r}$, sendo $\gamma_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Ou seja, $mmc(a,b)$ é igual ao produto de todas as potências p^s, sendo que p pertence ao conjunto de todos os números primos que dividem a ou b, e $s \geq 0$ é o maior expoente para p tal que p^s divide a e b.

De maneira análoga ao $mmc(a,b)$ de dois números inteiros, temos que o $mmc(a,b,c)$ é o menor de todos os múltiplos comuns de a, b e c e pode ser calculado por meio da fatoração em números primos de a, b e c.

Por exemplo: $mmc(24,15,6) = mmc(2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$.

Teorema 11[14]**.** Dados dois números inteiros a e b, temos que $mmc(a,b)$ existe e

$$mmc(a,b) \times mdc(a,b) = |a \times b|.$$

Exemplo 6. Determinar $mmc(40,24)$.

Em exemplo anterior, vimos que $mdc(40,24) = 8$. Assim, pelo Teorema 11, $mmc\ (40,24) \times mdc\ (40,24) = 40 \times 24$, ou seja, $mmc\ (40,24) \times 8 = 960$. Daí, o $mmc\ (40,24) = 120$.

Interpretação geométrica do MMC e MDC

Um procedimento útil para abordar conceitos relacionados ao estudo do MMC e MDC é a interpretação geométrica. Este método pode ser explorado sem que o aluno saiba inicialmente do que se trata, possibilitando-o a participar da construção do conhecimento através do processo de investigação (ABREU, 2008) que o direcione a descobrir por que esta técnica funciona.

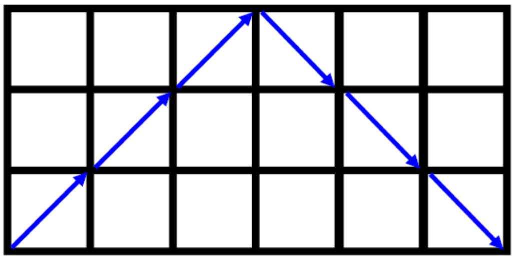
(CARDOSO & GONÇALVES, 2004), inspirados no método geométrico para o cálculo do MDC, escrito por (OLIVEIRA, 1995) em um artigo da Revista do Professor de Matemática, encontraram o seguinte método geométrico para o cálculo do MMC de dois números naturais, apenas utilizando contagem:

Considere um retângulo com dimensões *m* e *n*, dividido em *mxn* quadrados unitários. Escolhendo um dos vértices do retângulo ao acaso, são traçadas as diagonais dos quadrados unitários, sempre seguindo em linha reta até encontrar um dos lados do retângulo. Quando isso acontece, a linha é rebatida, sempre cortando as diagonais dos quadrados até chegar a outro dos vértices do retângulo. Como ilustração, temos

---
[14] A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (HEFEZ, Aritmética, 2016, p. 90).

o seguinte retângulo de dimensões 3x6 (Figura 45). Note que as diagonais cortam 6 quadrados, sendo exatamente o $mmc(3, 6)$.

Figura 45 – Representação geométrica para o mmc(3, 6)



Fonte: adaptado de (CARDOSO & GONÇALVES, 2004)

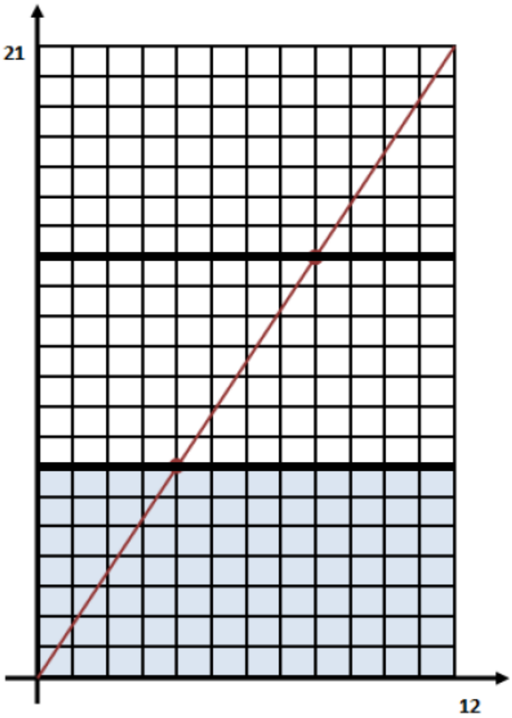
De acordo com os autores, a explicação é bem simples:

> (...)ao partirmos de um vértice do retângulo e chegarmos a um outro vértice desse mesmo retângulo, traçamos diagonais de um número de quadrados que corresponde a um múltiplo tanto de *m,* quanto de *n*; parando no primeiro outro vértice do retângulo *ABCD*, estamos determinando o mínimo dentre os múltiplos comuns de m e n. (CARDOSO & GONÇALVES, 2004, p. 79).

Na mesma revista em que publicaram (CARDOSO & GONÇALVES, 2004), consta também o artigo de (POLEZZI, 2004), que aproveita a abordagem geométrica para apresentar um novo método para calcular tanto o MMC quanto o MDC de dois Números Naturais.

Esse método também considera um retângulo de dimensões *m* e *n*, divididos em *m*x*n* quadrados unitários. A partir de um dos vértices do retângulo, é traçada uma diagonal até o vértice oposto desse retângulo. Logo são marcados todos os vértices dos quadrados que a diagonal intercepta, e, a partir desses pontos, são traçadas retas paralelas a um dos lados do retângulo, que subdividem o retângulo inicial. O número dos retângulos formados será o MDC dos números dados e, em um dos novos retângulos formados, o número de quadrados contidos será o MMC desses. Por exemplo: vamos representar geometricamente o MMC e o MDC de 12 e 21, que após cálculos: $mdc(12,21) = 3$ e $mmc(12,21) = 84$.

Figura 46 – Representação geométrica para o mmc(12, 21) e do mdc(12, 21)



Fonte: (POLEZZI, 2004, p. 88)

O método de Polezzi é justificado pelo Teorema 11, que afirma que o produto do MMC e MDC de dois números inteiros é igual ao valor positivo do produto dos números.

Uma condição evidente para a interpretação geométrica do MMC e MDC, de acordo com os métodos acima, é que sejam utilizadas coordenadas cartesianas inteiras para posicionar os lados do retângulo.

No próximo capítulo, será proposta uma sequência didática, que poderá ser utilizada pelos professores na primeira série do Ensino Médio para a retomada de alguns conceitos sobre Divisão Euclidiana que não foram abordados no Ensino Fundamental ou cujas potencialidades não foram enfatizadas. É sugerido utilizar a teoria contida neste capítulo como material de apoio.

4. PROPOSTA E EXECUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: o algoritmo da divisão no estudo dos Números Inteiros

> Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. (BROCARDO, OLIVEIRA, & PONTE, 2019, p. 13)

Os autores (BROCARDO, OLIVEIRA, & PONTE, 2019), do livro "Investigações Matemáticas na sala de aula", destacam a importância de um ensino que estimule a curiosidade, o pensamento crítico, a exploração e a resolução de problemas pelos alunos, ao invés de focar exclusivamente na memorização de fórmulas e procedimentos. Na obra, é apresentada uma série de atividades que tem como finalidade incentivar a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento matemático. Essa abordagem, que coloca o aluno como protagonista do seu processo de aprendizagem, estimulando-o a investigar e resolver os problemas matemáticos de forma ativa, é chamada de Investigações Matemáticas.

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. (BROCARDO, OLIVEIRA, & PONTE, 2019, p. 23)

Através das Investigações Matemáticas, os alunos serão estimulados a explorar conceitos, levantar hipóteses testar soluções e justificar suas conclusões. Dependendo do contexto da investigação, os alunos geralmente percorrerão três fases nesse processo investigativo: introdução da tarefa, a realização da investigação e a discussão dos resultados. Desta forma, o papel do professor será fundamental para conduzir as aulas e garantir que esses estudantes compreendam a proposta de um ensino investigativo. Com esta perspectiva, neste capítulo será apresentada uma proposta didática utilizando investigações matemáticas e cuja execução é direcionada às turmas da primeira série do Ensino Médio.

Esta proposta didática compreende o estudo de algumas propriedades dos Números Inteiros com ênfase em temas fundamentais envolvendo o Teorema da Divisão Euclidiana, cujos resultados consideramos conhecimentos relevantes a ser adquiridos pelos alunos. A proposta tem como finalidade resgatar determinados conceitos abordados no Ensino Fundamental, os quais muitas vezes são deixados de lado ao ingressar no Ensino Médio. Tendo como ponto de partida a relação fundamental da divisão, busca-se não apenas reintroduzir esses conteúdos, mas também consolidar e expandir as aprendizagens associadas a essa operação fundamental. O intuito é explorar as diversas ramificações e implicações do Teorema da Divisão Euclidiana, proporcionando uma compreensão mais profunda e abrangente desse tópico, contribuindo, assim, para uma formação mais sólida e completa dos estudantes.

Com a proposta se busca desenvolver a capacidade dos alunos de relacionar seu conhecimento matemático às diversas situações e contextos de forma autônoma e criativa, utilizando estratégias que o levem a questionar e analisar diferentes soluções e ideias matemáticas de forma clara e coerente.

As atividades ou tarefas da proposta começarão com situações abertas, a fim de incentivar o aluno a argumentar o seu ponto de vista, promovendo a compreensão conceitual e o pensamento crítico, mas podendo incluir também os problemas fechados (com resposta única e objetiva). O trabalho não será focado exclusivamente nos acertos, mas em todo o processo de resolução de problemas, mesmo que os alunos concluam em respostas erradas.

> Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. (BROCARDO, OLIVEIRA, & PONTE, 2019, p. 16)

Desta forma, os erros também serão encarados como oportunidades de aprendizado.

Pretende-se – com aulas mais atrativas e dinâmicas, inclusive utilizando de recursos tecnológicos – que o aluno adquira habilidades para fazer descobertas e verificações, com estratégias variadas que possam contribuir para a compreensão dos processos envolvidos no objeto em estudo.

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2017, p. 536)

Ou seja, as tecnologias desempenham um papel fundamental no processo de aprendizado, oferecendo aos estudantes, oportunidades para melhorar suas habilidades cognitivas como o raciocínio lógico e a argumentação, enquanto exploram uma variedade de experiências de ensino.

Por fim, embasado na competência específica número 5 da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio contida na BNCC, espera-se que esta sequência didática seja um instrumento para enriquecer o entendimento dos alunos em relação aos conceitos subjacentes à Divisão Euclidiana, e que essa abordagem os auxilie no cultivo de habilidades essenciais para a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento crítico, competências que transcendem a matemática e se tornam fundamentais em diversas áreas do conhecimento (BRASIL, 2017, p. 529). Deseja-se, ainda, que este processo contribua para fortalecer a motivação e a autoconfiança dos estudantes no que tange à matemática, capacitando-os para enfrentar desafios com maior confiança e entusiasmo.

Os conteúdos que serão abordados na proposta didática são: Teorema da Divisão Euclidiana, Paridade, Lema dos Restos, Divisibilidade, Números Primos, Sistema de Numeração, MDC, Algoritmo de Euclides e MMC, além de alguns aspectos históricos sobre Euclides e a Divisão.

A seguir, de forma concomitante à apresentação da proposta, será relatada a sua execução em uma turma de 31 alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Olímpio Cunha, localizada em Cariacica, ES, de fevereiro a maio de 2022.

Observação: na sequência didática, uma (1) aula equivale a cinquenta (50) minutos.

4.1 Tema 1: Um pouco da história sobre Euclides e a Divisão Euclidiana

Objetivo: expor alguns registros históricos de algoritmos utilizados para realizar a divisão e levantar discussões e reflexões sobre as mudanças ocorridas no estudo dessa operação ao longo da história. Se necessário, revisar o conjunto dos Números Inteiros.

Sugestão: utilizar o vídeo *Números Inteiros (História)*[15], disponibilizado na plataforma de vídeos YouTube, para revisar o conjunto dos Números Inteiros e conhecer um pouco da história de como surgiu esse conjunto.

---

[15] Aula do professor Eduardo Santos, disponível no canal MATEMÁTICA ATRATIVA PROF.EDUARDO SANTOS, acessada em 07/02/2022 no link: https://www.youtube.com/watch?v=6xwQ5NWqcqo

Total de aulas: 2.

4.2 Tema 2: O Teorema da Divisão Euclidiana

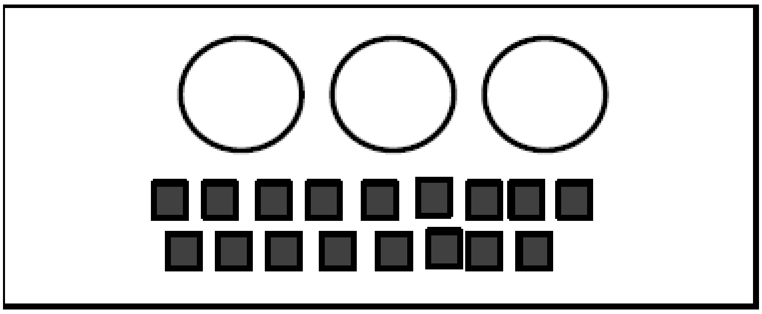
Objetivo: propor situações-problema que estimulem o raciocínio e a construção do conhecimento do aluno com atividades de natureza investigativa, a fim de atribuir significados aos elementos envolvidos no algoritmo da Divisão Euclidiana; orientar o aluno para que ele compreenda a relação fundamental da divisão de forma intuitiva; enunciar o Teorema da Divisão Euclidiana e apresentar vários exemplos envolvendo a relação fundamental da divisão, inclusive a interpretação geométrica. Por fim, espera-se que o aluno compreenda os conceitos envolvidos nos diversos problemas que podem utilizar o algoritmo da divisão.

Total de aulas utilizadas: 5.

<u>**Atividade 1**</u> **-** Esta atividade foi proposta por (SEGADAS, 2013, p. 48).

a) Observe o tabuleiro da Figura 47. Ele é composto por 3 círculos. Distribua igualmente dentro dos círculos as 17 peças.

Figura 47 – Atividade 1 envolvendo a relação fundamental da divisão



Fonte: (SEGADAS, 2013)

b) Após a divisão, como encontrar novamente a quantidade inicial sem contar peça por peça?
c) Distribua em um novo tabuleiro, agora com 5 círculos igualmente 11 peças. Como encontrar a quantidade total de peças sem contar peça por peça?
d) Complete a Tabela 6.

Tabela 6 – Dedução da relação fundamental da divisão na atividade 1

Número de peças a serem distribuídas no tabuleiro	Número de círculos no tabuleiro	Número de peças em cada circulo	Peças que sobraram na distribuição no tabuleiro	Cáculo para achar o total de peças a partir do tabuleiro
17	3	5	2	3x5 + 2 = 17
11	5			
30	10			
5	6			

Fonte: o autor (2022)

e) Que relação você percebeu entre o dividendo (quantidade a ser dividida), o divisor (quantidade de grupos a quem distribuirei o dividendo), o quociente (o resultado da operação de divisão) e o resto (quantidade do dividendo que não conseguiu ser distribuída igualmente)?

O próximo exemplo é uma adaptação de uma atividade retirada do livro *A Conquista da Matemática*, de (GIOVANI JÚNIOR & CASTRUCCI, 2018, p. 54)

Atividade 2 - Uma editora enviou 183 livros para a biblioteca de uma escola. Eles foram colocados em 12 caixas, de modo que todas as caixas tivessem o mesmo número de livros. Quantos foram os livros colocados em cada caixa?

Sugestão: peça que os alunos preencham a Tabela 7, mostrando algumas possíveis distribuições dos livros nas caixas.

Tabela 7 – Distribuição dos livros em caixas da atividade 2

Distribuição dos livros	Quantidade de livros distribuídos	Quantidade de livros que sobram
10 livros para cada uma das 12 caixas	10 x 12 = 120	183 - 10x12 = 63
13 livros para cada uma das 12 caixas		
15 livros para cada uma das 12 caixas		
16 livros para cada uma das 12 caixas		

Fonte: Fonte: Adaptada (CARRER, 2018)

Objetivo: essa distribuição (Tabela 7) visa incentivar nos alunos o pensamento matemático, a construção do conhecimento, além da compreensão da ideia de dividir em partes iguais. A atividade oportuniza várias discussões relacionadas aos elementos envolvidos na relação fundamental da divisão, como:

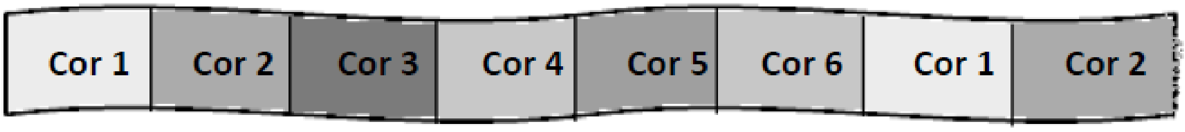
1) Qual é o maior número de livros colocados em cada caixa nessa distribuição? Sobram livros nesta distribuição? Quantos?
2) À qual distribuição corresponde a menor sobra?
3) É possível colocar 16 livros em cada caixa? Por quê?

O objetivo é concluir que é única a distribuição em que a sobra é menor que o número de caixas, que coincide com o maior número de livros por caixa, e que esta distribuição é chamada Divisão Euclidiana de 183 por 12, sendo 183 denominado dividendo, 12 o divisor, 15 o quociente e 3 o resto. Assim, na Divisão Euclidiana são equivalentes as informações o “maior quociente” e “menor resto” (CARRER, 2018, p. 22).

O próximo exemplo é uma adaptação de uma atividade de (IMENES & LELLIS, 2006) citada por (SEGADAS, 2013, p. 68).

<u>Atividade 3</u>. Na Figura 48 você está vendo somente o começo da fita. Ela tem 1000 partes e 6 cores que se repetem sempre na mesma ordem.

Figura 48 – Atividade 3 envolvendo o resto de uma divisão



Fonte: (IMENES & LELLIS, 2006)

a) Qual é a cor da última parte sabendo que começou na cor 1?
b) E se começasse na cor 5?
c) O que esses números têm em comum na divisão por 6?
d) Por que isso acontece?

Objetivo: desenvolver uma compreensão sólida do conceito de resto no algoritmo da divisão, utilizando-o como uma ferramenta eficaz para resolver problemas que envolvem ciclos e padrões repetitivos.

Atividades Complementares

1. Utilize o algoritmo da divisão e a técnica das subtrações sucessivas para efetuar a divisão:
   a) de 43 por 3
   b) de 43 por 5
   c) de 233 por 4
   d) de 1 453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

2. Uma escola irá distribuir igualmente um total de 325 chicletes entre seus 65 alunos. Quantos chicletes cada criança irá receber?

3. Uma fábrica produz chicletes que são embalados em pacotes de cinco unidades cada. Quantos pacotes serão produzidos com 325 unidades?

4. Resolva a atividade 3 utilizando subtrações sucessivas.

5. Em 972 dias há quantos meses? Quantos dias sobram? Justifique suas respostas.

6. **(OBMEP)** A professora de Emília comprou 96 balas para repartir igualmente entre seus alunos, sem que sobrassem balas. No dia da distribuição todos os alunos foram à escola, exceto Emília. A professora distribuiu igualmente as balas entre os alunos presentes, mas sobraram 5 balas. Quantos alunos tem a turma de Emília?
   a) 16
   b) 14
   c) 12
   d) 8
   e) 6

7. **(ESPM SP/2017)** Dividindo-se o número natural N por 13, obtém-se quociente Q e resto R. Aumentando-se 2 unidades no dividendo e mantendo-se o divisor, o quociente aumenta de 1 unidade e a divisão é exata. Sabendo-se que Q + R = 16, podemos afirmar que os divisores primos de N são:
   a) 2 e 19
   b) 2, 3 e 13
   c) 3 e 17
   d) 3, 5 e 7

8. O dia das crianças este ano (2022) cairá em uma quarta-feira. Sabendo que o dia da criança se comemora na data 12/10, em qual dia da semana cairá o Natal deste ano?

Figura 49 – Calendário do problema 8

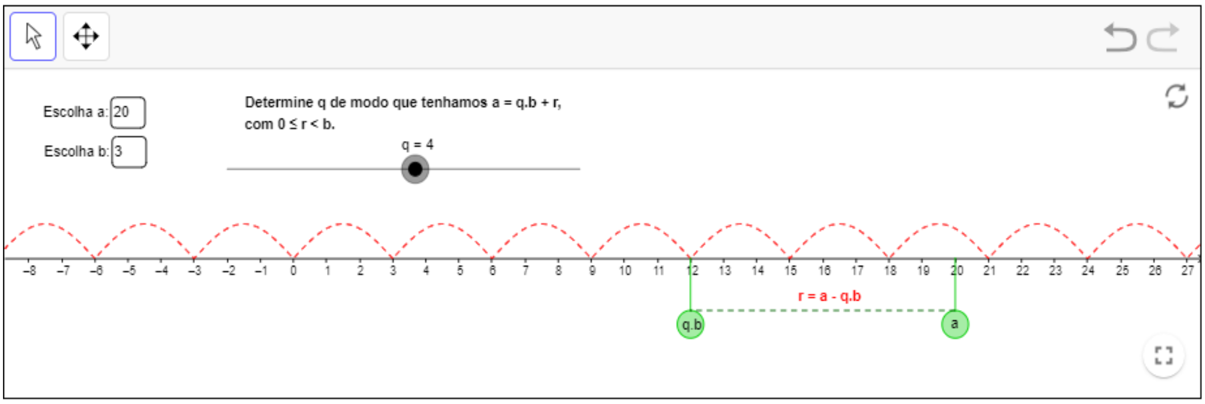
outubro						
Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Fonte: o autor (2022)

4.2.1 Representação Geométrica da Divisão Euclidiana

Objetivo: empregar uma construção no Geogebra[16] para verificar o quociente e o resto de uma divisão entre dois Números Naturais. Nesse processo, é necessário especificar o dividendo (valor a) e o divisor (valor b) e então ajustar um seletor até obter os valores q e r de forma que a relação $a = qb + r$ seja satisfeita, com r não negativo e menor do que b. A Figura 50 ilustra o caso quando $a = 20$, $b = 3$ e $q = 4$ (Observe que $r = 8 > 3 = b$). Essa representação contribui para que o aluno faça verificações e descobertas acerca da relação fundamental da divisão.

Figura 50 – Construção Geométrica no Geogebra

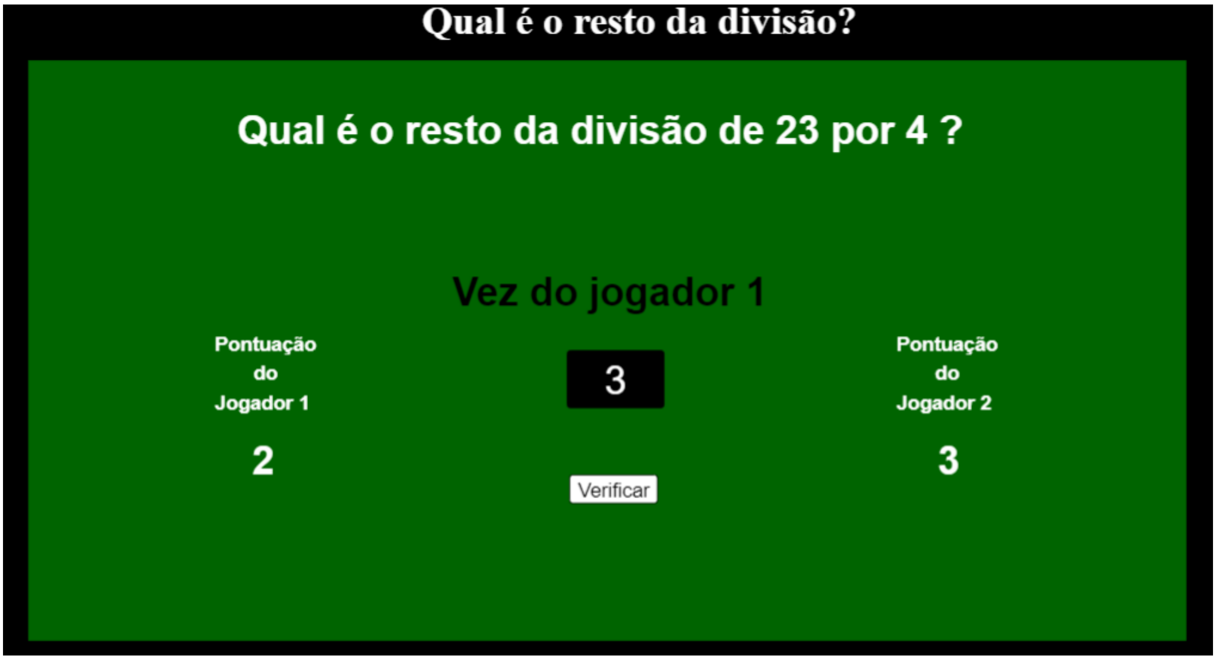


Fonte: https://www.geogebra.org/m/gfdstFKA

[16] Para utilizar essa construção, acesse o link: https://www.geogebra.org/m/gfdstFKA.(acessado em 02/2022)

4.2.2 Jogo: “qual é o resto da divisão?”

Figura 51 – Jogo “Qual é o resto da divisão?”



Fonte: https://www.geogebra.org/m/w57chhxw

Regra do jogo: ele é executado no Geogebra com dois jogadores, da seguinte maneira: para cada pergunta feita, o jogador digita sua resposta no quadrinho preto ao centro da tela e clica no botão “verificar”. As jogadas são alternadas, e quem acertar marca 1 ponto. Vence quem terminar um total de 10 jogadas (5 para cada um) com a maior pontuação. Em caso de empate, faz-se uma outra rodada.

Objetivo: além de tornar a aula mais divertida, o aluno treina o cálculo mental.

Relatório de aulas dos Temas 1 e 2

A primeira aula foi dedicada à apresentação da proposta do projeto aos alunos, à explicação do que constitui um estudo investigativo e à organização dos grupos que trabalhariam juntos durante todo o trimestre. No segundo dia, começamos a aula exibindo um vídeo do professor Eduardo Santos com o objetivo de revisar o conjunto dos Números Inteiros e conhecer um pouco da história do surgimento desse conjunto. Em seguida, introduzimos três métodos de divisão (Egípcio, Fibonacci e Subtrações Sucessivas) que foram usados ao longo da história. Devido ao tempo limitado, mostrei apenas um exemplo de cada método e fizemos os comentários pertinentes. Os alunos demonstraram curiosidade e acharam o método egípcio bastante fácil, enquanto consideraram o método de Fibonacci desafiador devido ao uso da sequência de Fibonacci.

As atividades 1, 2 e 3 foram distribuídas durante a terceira aula, em material impresso e projetadas através do Datashow, a fim de possibilitar a verificação dos resultados no quadro.

Na atividade 1, os alunos distribuíram facilmente as peças nos círculos, com exceção de quando o número de peças era menor do que o número de círculos. Embora tenham tido facilidade em determinar o número total de peças no tabuleiro, encontraram dificuldades em formular uma expressão que relacionasse esse número total com o número de peças e o número de círculos no tabuleiro. Eles não conseguiram estabelecer uma conexão com os conceitos fundamentais da divisão. Na última linha da tabela, deixaram um espaço em branco, pois não sabiam como dividir igualmente 5 peças entre 6 círculos. Eles questionavam: “falta uma peça!”. Não sabiam que era possível realizar a divisão de 5 por 6, resultando em um quociente igual a 0 e um resto igual ao dividendo, ou seja, igual a 5. Após discussões e explicações, eles compreenderam a possibilidade de o quociente ser igual a zero.

Em seguida, apresentei o Teorema da Divisão Euclidiana, estabelecendo a relação entre os termos envolvidos no problema com o teorema. Na atividade 2, ao preencher a tabela, os alunos analisaram cuidadosamente cada termo da relação fundamental da divisão, compreendendo o significado de cada um e por que é crucial que o resto seja positivo e menor do que o divisor. Nesse ponto, os alunos começaram a se familiarizar com a relação fundamental da divisão.

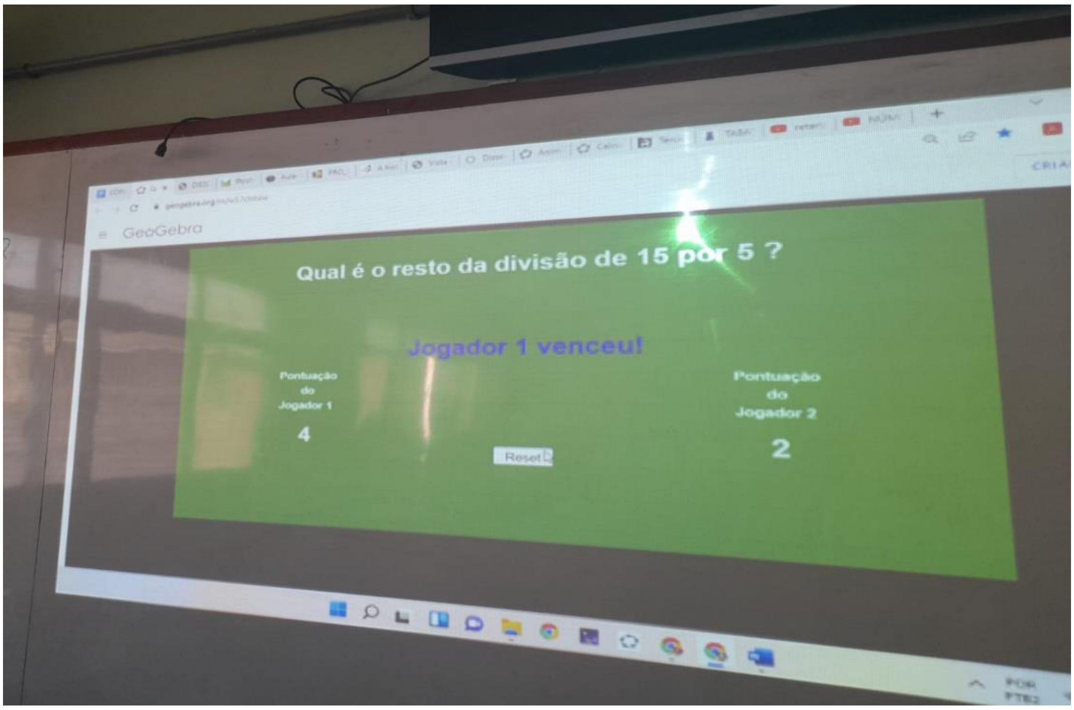
Na atividade 3, inicialmente, os alunos tiveram muita dificuldade para resolver este problema, pois não sabiam qual ferramenta matemática utilizar para resolvê-lo. Foi pedido a eles que desenhassem mais alguns pedaços de fita com suas respectivas cores e observassem o que estava acontecendo. Alguém disse: “de 6 em 6, tudo se repete!”. Eles notaram que, a partir da cor 1, a cada sequência de 6 cores, retornava à cor inicial. Eles também perceberam que haviam 166 sequências de 6 cores e sobravam 4 cores, portanto, a última era a cor 4. O item “b” da atividade 3 foi resolvido com facilidade por dois alunos, enquanto os demais conseguiram concluir somente depois de vários direcionamentos. Em seguida, foi questionado: “o que a solução do problema tinha a ver com a relação fundamental da divisão?”. Após algumas discussões, eles perceberam a relação existente entre as soluções do problema e o resto da divisão de 1000 por 6.

As atividades complementares foram passadas no quadro para que os alunos copiassem e resolvessem no caderno, em grupos. A resolução desses exercícios objetiva a compreensão da relação fundamental da divisão e do significado dos termos envolvidos nessa relação com os problemas propostos, através do processo de investigação. Os problemas 2 e 3, em particular, devem ser bem compreendidos. A atividade 2 dá a ideia de repartir em partes iguais, ou seja, os chicletes que foram divididos entre os alunos resultam em um total de 5 chicletes para cada aluno (os círculos representam os 65 alunos). Neste caso, tivemos que descobrir quantos elementos há em cada grupo formado. Já a atividade 3 investiga quantas vezes uma quantidade “cabe” na outra. Devemos descobrir quantos grupos contendo 5 elementos podemos formar, isto é, 325 chicletes divididos em pacotes contendo 5 chicletes resultam em um total de 65 pacotes. Por fim, a ideia de divisão ficou clara, e os alunos conseguiram compreender os significados de cada termo do algoritmo que executaram inicialmente.

Para a representação geométrica da Divisão Euclidiana, foram expostos no quadro alguns casos, usando o Datashow, pois os Chromebooks da escola não estavam disponíveis. Foram testados diferentes valores para *a* e *b*.

No momento do jogo “Qual é o resto da divisão?”, a sala foi dividida em dois grupos, cada um com 16 alunos – nesse período, a sala era composta por 32 alunos. Cada rodada do jogo envolvia dois alunos, um de cada grupo, e um ponto era registrado para o grupo vencedor em cada rodada. Venceu o grupo que marcou mais pontos ao final das 16 rodadas. Prêmios foram concedidos para o 1º e o 2º lugar, os quais receberam 1 kg de bombons e 1 caixa de bombons, respectivamente. Os alunos ficaram muito empolgados com essa 'brincadeira' e já estavam ansiosos para o próximo jogo, o “Zeros and Ones”, que jogaríamos em uma aula futura.

Figura 52 – Alunos jogando “Qual é o resto da divisão?”



Fonte: o autor (2022)

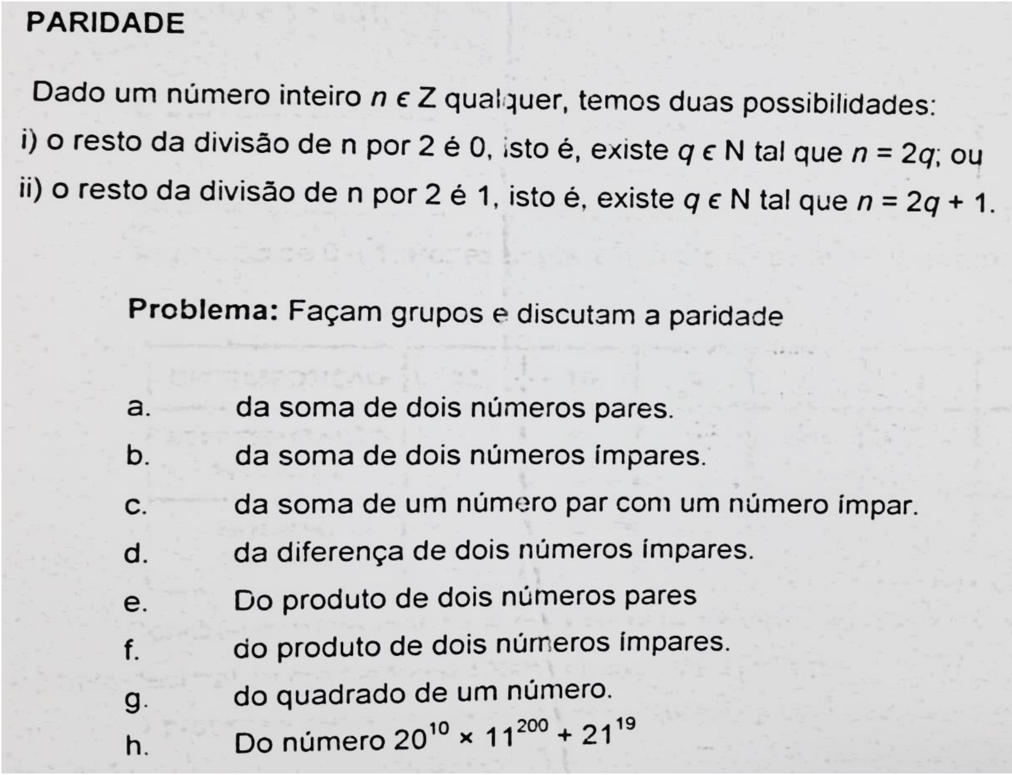
4.3 Tema 3: Paridade

Objetivo: estudar a paridade de números inteiros através de exemplos numéricos e subsequente generalização. Espera-se que o aluno compreenda que um número é par quando o resto da sua divisão por 2 é igual a zero, e ímpar quando o resto é igual a 1.

Total de aulas utilizadas: 2.

A primeira atividade (Figura 53) tem como objetivo verificar a paridade da soma do produto e do quadrado de um número inteiro.

Figura 53 – Atividade sobre paridade de um número.



PARIDADE

Dado um número inteiro $n \in Z$ qualquer, temos duas possibilidades:
i) o resto da divisão de n por 2 é 0, isto é, existe $q \in N$ tal que $n = 2q$; ou
ii) o resto da divisão de n por 2 é 1, isto é, existe $q \in N$ tal que $n = 2q + 1$.

Problema: Façam grupos e discutam a paridade

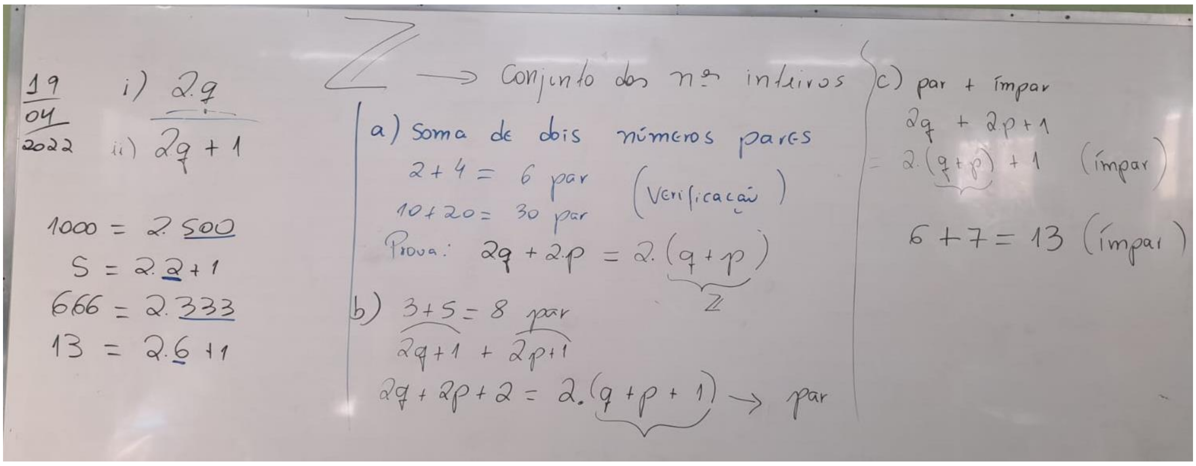
a. da soma de dois números pares.
b. da soma de dois números ímpares.
c. da soma de um número par com um número ímpar.
d. da diferença de dois números ímpares.
e. Do produto de dois números pares
f. do produto de dois números ímpares.
g. do quadrado de um número.
h. Do número $20^{10} \times 11^{200} + 21^{19}$

Fonte: o autor (2022)

Relatório de aulas do Tema 3

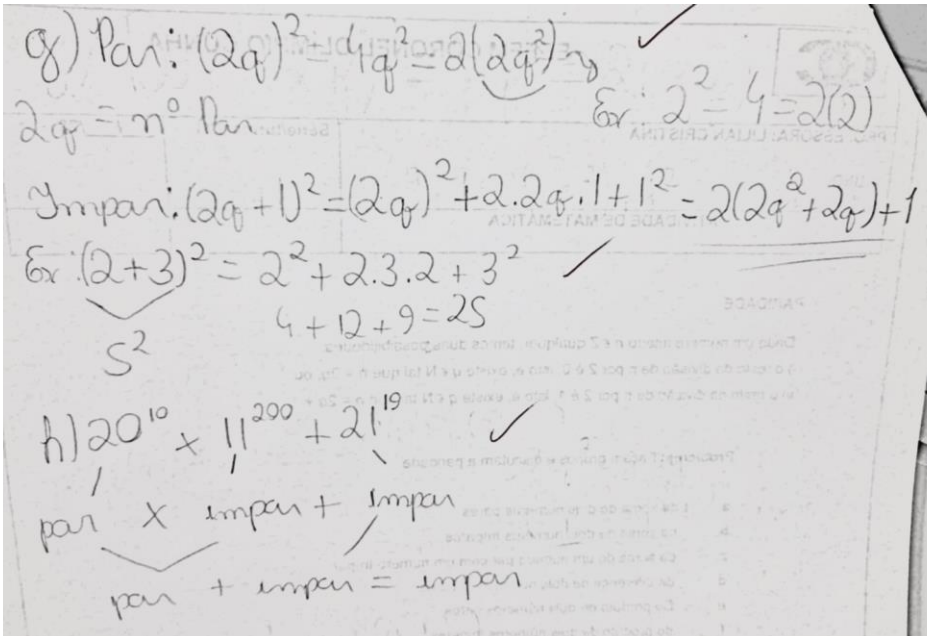
Inicialmente, foi distribuído para os alunos – juntamente com algumas atividades – um material impresso contendo alguns conceitos importantes sobre paridade e o Lema dos Restos. Em seguida, os alunos formaram grupos para discutirem as atividades, como orientado no material. A primeira atividade requeria que o aluno investigasse sobre a paridade da soma, do produto e do quadrado de números inteiros. Foi observada a não compreensão dos alunos sobre a escrita ou representação dos números pares e ímpares, então se fez uma intervenção com as seguintes perguntas: “o que são números pares? o que são números ímpares?”. Com os exemplos apresentados pelos alunos, os números foram separados em dois grupos (pares e ímpares) e logo indagado quais se encaixavam no item “i” ou no item “ii” da definição inicial de paridade. Desta forma, a definição começou a fazer sentido. Em seguida, foi solicitado a eles para verificar o problema proposto, no qual não tiveram dificuldades. Foi aproveitado o momento para mostrar a eles a diferença entre verificação e prova. Como eles não estavam habituados com as demonstrações, foi apresentada no quadro a prova dos itens “a”, “b” e “c” (Figura 54), deixando as demais para eles fazerem.

Figura 54 – Demonstração dos itens “a”, “b” e “c” sobre paridade no quadro.



Fonte: o autor (2022)

Figura 55 – Solução apresentada por um grupo de alunos aos itens “g” e “h”.



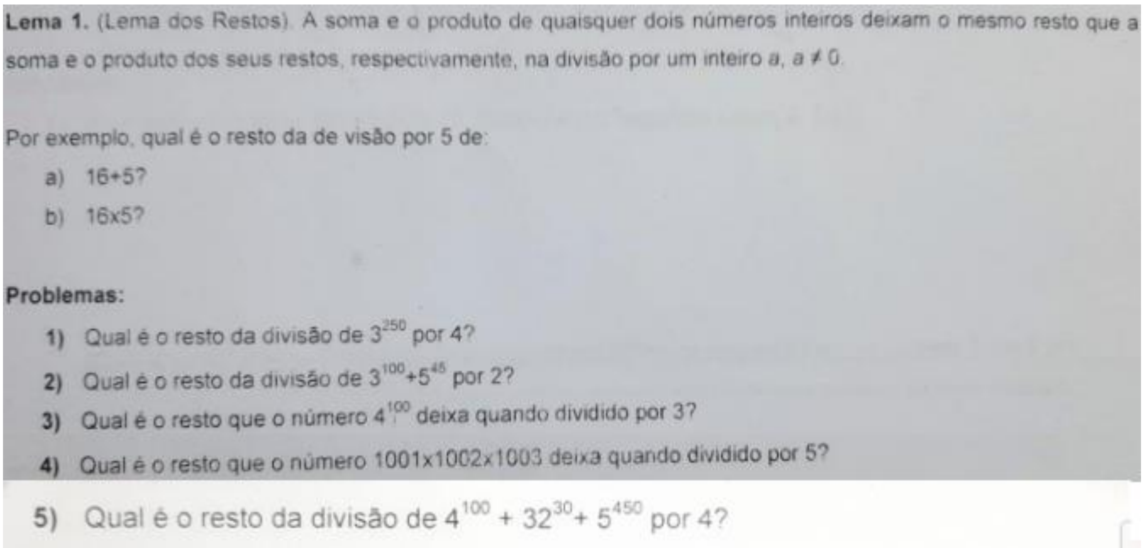
Fonte: o autor (2022)

4.4 Tema 4: Lema dos Restos

Objetivo: explorar o Lema dos Restos de forma intuitiva, utilizando o algoritmo da divisão para justificá-lo em situações envolvendo soma e produto, como nas atividades da Figura 56. Seu uso poderá simplificar cálculos, aparentemente trabalhosos, além de contribuir no desenvolvimento de habilidades como autonomia, análise de informações, experimentação de ideias, elaboração de argumentos e verificação de conclusões.

Total de aulas: 3.

Figura 56 – Atividades sobre o Lema dos Restos



Lema 1. (Lema dos Restos). A soma e o produto de quaisquer dois números inteiros deixam o mesmo resto que a soma e o produto dos seus restos, respectivamente, na divisão por um inteiro a, $a \neq 0$.

Por exemplo, qual é o resto da de visão por 5 de:

a) 16+5?

b) 16x5?

Problemas:

1) Qual é o resto da divisão de 3^{250} por 4?

2) Qual é o resto da divisão de $3^{100}+5^{45}$ por 2?

3) Qual é o resto que o número 4^{100} deixa quando dividido por 3?

4) Qual é o resto que o número 1001x1002x1003 deixa quando dividido por 5?

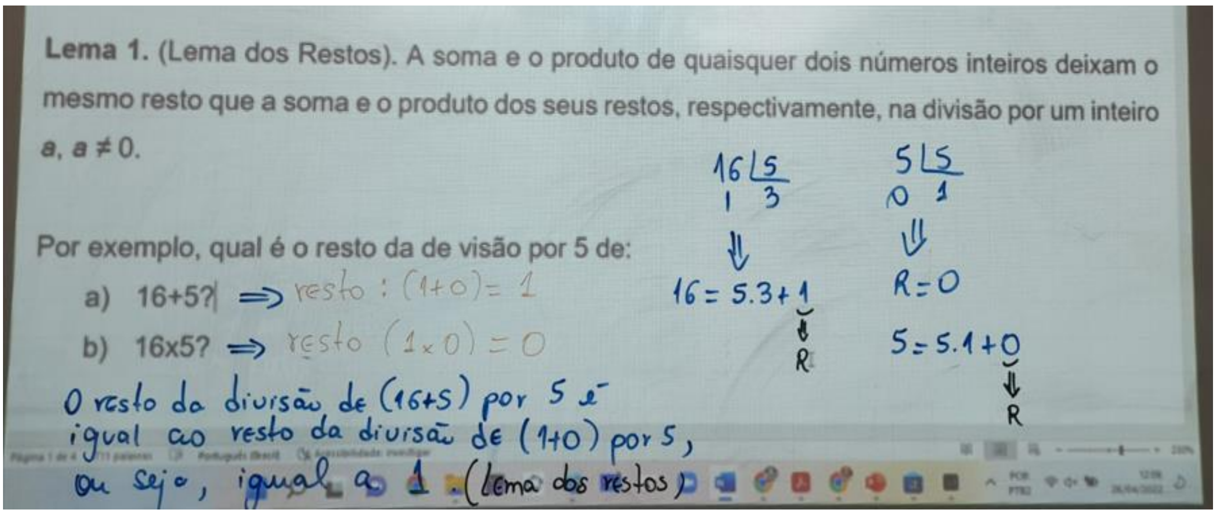
5) Qual é o resto da divisão de $4^{100} + 32^{30} + 5^{450}$ por 4?

Fonte: o autor (2022)

Relatório de aulas do Tema 4

Foi iniciada a primeira aula pedindo aos alunos que resolvessem os exemplos “a” e “b” contidos no material impresso que possuíam. Todos efetuaram a soma e a multiplicação para responder às perguntas. Em seguida, foi solicitado que verificassem qual era a soma e a multiplicação dos restos das divisões de 16 e 5 por 5. Alguns alunos, após efetuarem as divisões, perceberam que se tratava do mesmo resto que haviam encontrado antes. Após discussões, foi enunciado no quadro o Lema 1 e o utilizamos nos exemplos do material impresso (Figura 57).

Figura 57 – Lema dos Restos



Lema 1. (Lema dos Restos). A soma e o produto de quaisquer dois números inteiros deixam o mesmo resto que a soma e o produto dos seus restos, respectivamente, na divisão por um inteiro a, $a \neq 0$.

Por exemplo, qual é o resto da de visão por 5 de:

a) 16+5? $\Rightarrow$ resto : $(1+0) = 1$

b) 16x5? $\Rightarrow$ resto $(1 \times 0) = 0$

$16 = 5.3 + \underbrace{1}_{R}$

$R = 0$

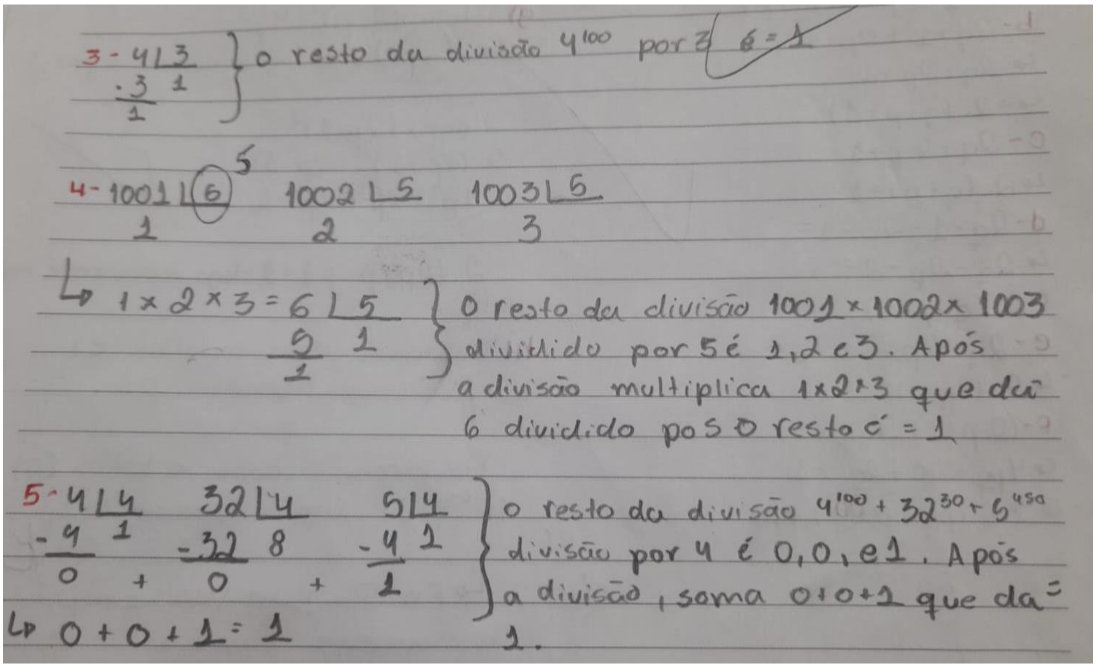
$5 = 5.1 + \underbrace{0}_{R}$

O resto da divisão de (16+5) por 5 é igual ao resto da divisão de (1+0) por 5, ou seja, igual a 1 (Lema dos restos)

Fonte: o autor (2022)

Na segunda aula, foi pedido aos alunos que discutissem os problemas propostos (1 a 5). A princípio, os alunos pensaram que era necessário calcular as potências e, em seguida, efetuar as divisões para a determinação do resto. Se fez algumas intervenções com alguns questionamentos, por exemplo: “qual a relação existente entre os problemas e o Lema dos Restos?” Após algumas verificações, muitos alunos conseguiram realizar as atividades, mas alguns ainda tiveram dificuldade, pois não estavam habituados com verificações e demonstrações. Alguns desses estudantes questionaram por que estes assuntos não foram ensinados nas séries anteriores.

Figura 58 – Solução dada por um grupo de alunos nas atividades 3, 4 e 5



Fonte: o autor (2022)

A terceira aula foi reservada para corrigir e discutir as atividades.

4.5 Tema 5: Critérios de Divisibilidade

Objetivo: investigar e enunciar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10 utilizando o algoritmo da Divisão Euclidiana. Verificar e conjecturar outros critérios de divisibilidade utilizando o Geogebra.

Observação: foi usado o termo “conclusão” para apresentar as conjecturas dos alunos.

As atividades de divisibilidade a seguir são adaptações de (CASTRO, SÁ, & SILVA, 2020):

Total de aulas: 5.

Atividades:

1. Preencha as tabelas abaixo:

Tabela 8 – Verificação da paridade de um número

Números	O número é par?		O número é divisível por 2?	
	Sim	Não	Sim	Não
72				
83				
96				
114				
125				
230				
425				
508				
5579				
1274				

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: espera-se que o aluno perceba que um número é divisível por 2 se, e somente se, ele for par.

2. Preencha a tabela abaixo:

Tabela 9 – Divisibilidade por 3

Número	O número é divisível por 3?		A soma dos algarismos do número é divisível por 3?	
	Sim	Não	Sim	Não
145				
237				
384				
503				
684				
691				
972				
1920				
1257				
5618				
9814				
8814				

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: espera-se que o aluno perceba que um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 3.

3. Preencha a tabela abaixo:

Tabela 10 – Divisibilidade por 9

Número	**O número é divisível por 9?**		**A soma dos algarismos do número é divisível por 9?**	
	Sim	**Não**	**Sim**	**Não**
185				
309				
428				
1080				
1210				
1125				
4716				
6735				
9990				
44658				

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: espera-se que o aluno perceba que um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9.

4. Preencha a tabela abaixo:

Tabela 11 – Divisibilidade por 6

Número	**O número é divisível por 6?**		**O número é divisível por 2?**		**O número é divisível por 3?**	
	Sim	**Não**	**Sim**	**Não**	**Sim**	**Não**
18						
36						
48						
312						
524						
540						
681						
912						
4312						
6321						

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: espera-se que o aluno perceba que um número é divisível por 6 se, e somente se, ele é divisível por 2 e por 3.

5. Preencha a tabela abaixo:

Tabela 12 – Divisibilidade por 10

Número	O número é divisível por 10?		O número termina em 0?	
	Sim	Não	Sim	Não
20				
26				
40				
100				
325				
13140				
20425				
32420				
40628				
45680				

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: Conjecturar um critério de divisibilidade por 10.

6. Preencha a tabela abaixo:

Tabela 13 – Divisibilidade por 5

Número	O número é divisível por 5?		O número termina em 0?		O número termina em 5?	
	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
165						
380						
563						
246						
420						
647						
1231						
5108						
10715						
9880						

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: conjecturar um critério de divisibilidade por 5.

7. Preencha a tabela abaixo:

Tabela 14 – Divisibilidade por 4

Número	O número é divisível por 4?		O número termina em 00?		Os dois últimos algarismos do número formam um número divisível por 4?	
	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
300						
932						
1000						
1300						
4158						
7813						
8991						
9998						
19990						
23456						

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: conjecturar um critério de divisibilidade por 4.

8) Preencha a tabela abaixo:

Tabela 15 – Divisibilidade por 8

Número	O número é divisível por 8?		O número termina em 000?		O número formado pelos três últimos algarismos do número é divisível por 8?	
	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
1000						
3120						
5410						
2000						
4775						
10000						
1688						
10240						
6308						
9814						

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: espera-se que o aluno perceba que um número é divisível por oito se, e somente se, terminar em três zeros ou os três últimos algarismos formarem um número divisível por oito.

9) Utilize o algoritmo da divisão no Geogebra para verificar se os números abaixo são divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. (Utilize o link seguinte para ter acesso ao algoritmo: https://www.geogebra.org/m/JU9Zcvf3)

a) 51
b) 86
c) 90
d) 100
e) 83
f) 72
g) 46
h) 16
i) 70
j) 31

Observação: espera-se que o aluno utilize o Geogebra para realizar testes e conjecturas, observando os termos relacionados ao algoritmo da divisão, a fim de verificar os critérios de divisibilidade solicitados na próxima questão. Na configuração do Geogebra, é possível ajustar o valor máximo dos divisores para testar números maiores (a princípio é para $D \leq 100$).

10) Enuncie os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10.

11) Enuncie um critério de divisibilidade por 8.

12) Qual é o resto da divisão do número 856.954.785.032 por 8?

13) Dentre os números 105, 270, 345, 853, 960, 780, 831 e 900, quais são divisíveis por 3 e por 5? Conclua um critério de divisibilidade por 15.

14) Critério de divisibilidade por 7: dado um Número Natural qualquer, separe o algarismo das unidades e, em seguida, subtraia o dobro deste algarismo do número que sobrou. Se o resultado desta subtração for um número divisível por 7, então o número inicial também será. Por exemplo: 182 é divisível por 7, pois $18 - 2\times 2 = 18 - 4 = 14$, que é divisível por 7. Utilize este critério para verificar se os números abaixo são divisíveis por 7:

a) 1785
b) 3625

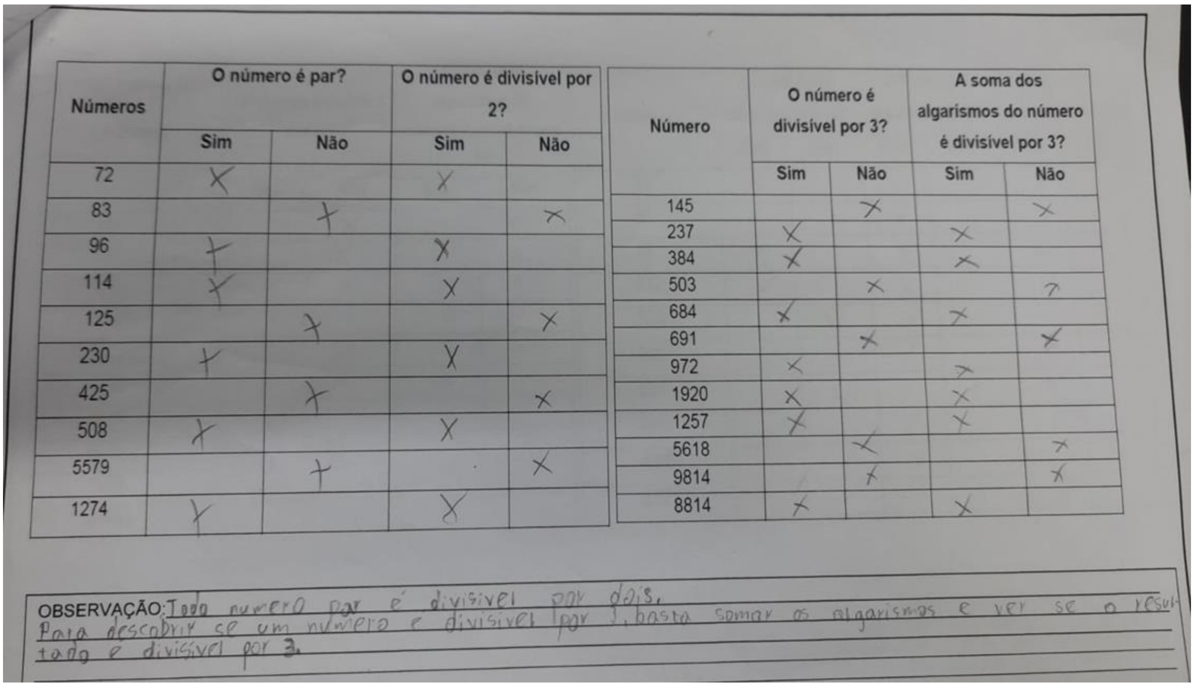
15) Em um supermercado, diversas barras de chocolate estão prestes a perder a validade. Por isso, decidiu-se realizar uma promoção para vender as 3180 barras que estão no estoque. O gerente pretende fazer pacotes com a mesma quantidade de chocolates sem que sobrem chocolates. É possível que cada pacote contenha:

a) 2 chocolates?
b) 3 chocolates?
c) 4 chocolates?
d) 5 chocolates?
e) 6 chocolates?
f) 7 chocolates?
g) 8 chocolates?
h) 9 chocolates?
i) 10 chocolates?

Relatório de aulas do Tema 5

Os alunos preencheram as tabelas com facilidade e a maioria atingiu o objetivo das tarefas, que é a compreensão dos critérios de divisibilidade.

Figura 59 – Tabelas de divisibilidade por 2 e por 3 preenchidas por um grupo de alunos.



Números	O número é par?		O número é divisível por 2?	
	Sim	Não	Sim	Não
72	X		X	
83		X		X
96	X		X	
114	X		X	
125		X		X
230	X		X	
425		X		X
508	X		X	
5579		X		X
1274	X		X	

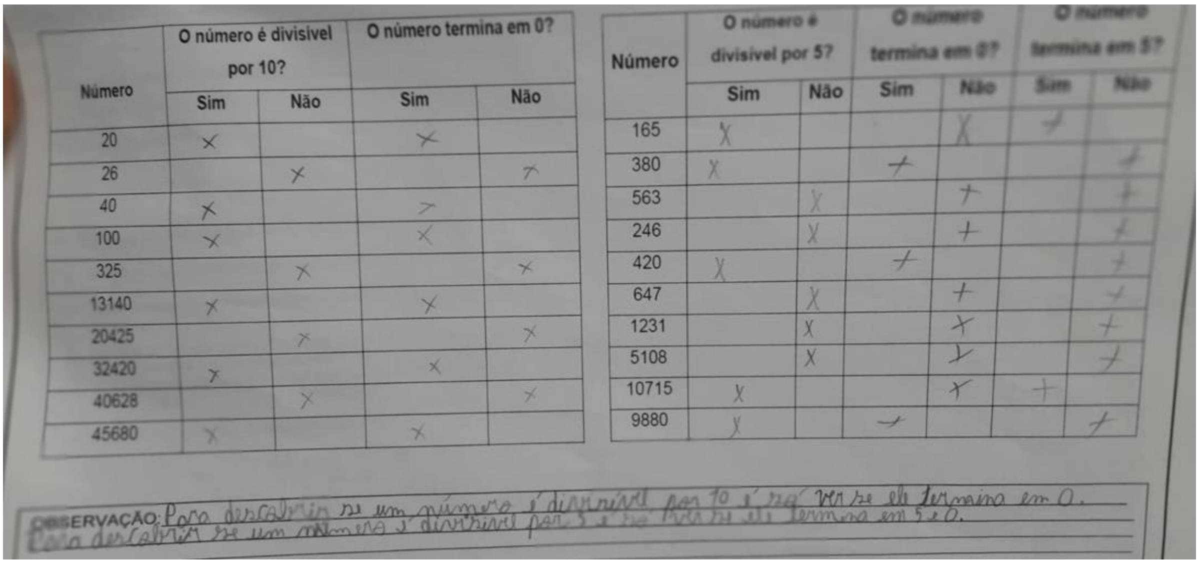
Número	O número é divisível por 3?		A soma dos algarismos do número é divisível por 3?	
	Sim	Não	Sim	Não
145		X		X
237	X		X	
384	X		X	
503		X		X
684	X		X	
691		X		X
972	X		X	
1920	X		X	
1257	X		X	
5618		X		X
9814		X		X
8814	X		X	

OBSERVAÇÃO: Todo numero par é divisivel por dois. Para descobrir se um número é divisivel por 3, basta somar os algarismos e ver se o resultado é divisivel por 3.

Fonte: o autor (2022)

Observação de um grupo de alunos: *“todo número par é divisível por 2. Para descobrir se um número é divisível por 3, basta somar os algarismos e ver se o resultado é divisível por 3.”.*

Figura 60 – Tabela de divisibilidade por 5 e por 10 preenchida por um grupo de alunos.



Número	O número é divisível por 10?		O número termina em 0?	
	Sim	Não	Sim	Não
20	X		X	
26		X		X
40	X		X	
100	X		X	
325		X		X
13140	X		X	
20425		X		X
32420	X		X	
40628		X		X
45680	X		X	

Número	O número é divisível por 5?		O número termina em 0?		O número termina em 5?	
	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
165	X			X	X	
380	X		X			X
563		X		X		X
246		X		X		X
420	X		X			X
647		X		X		X
1231		X		X		X
5108		X		X		X
10715	X			X	X	
9880	X		X			X

OBSERVAÇÃO: Para descobrir se um número é divisível por 10 é só ver se ele termina em 0. Para descobrir se um número é divisível por 5 é só ver se ele termina em 5 e 0.

Fonte: o autor (2022)

Observação de um grupo de alunos: *“para descobrir se um número é divisível por 10 é só ver se ele termina em 0. Para descobrir se um número é divisível por 5 é só ver se ele termina em 5 e 0”*.

4.6 Tema 6: Números Primos

Objetivo: definir números primos e compostos; mostrar um pouco da história da descoberta e da importância dos números primos dentro da Teoria dos Números; apresentar o *Crivo de Eratóstenes* para se obter, de modo sistemático, números primos; enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética, que é um grande resultado da Matemática; decompor um número em fatores primos e utilizar esta decomposição para a determinação do MDC e do MMC entre dois ou mais números; determinar o número de divisores de um Número Natural utilizando o Princípio Multiplicativo da Contagem.

Total de aulas: 4.

<u>Atividade 1</u>: Preencha a Tabela 16 e, em seguida, responda às questões 1 e 2:

Tabela 16 – Número de divisores de um número

x	Divisores de x	Número de divisores de x
2		
3		
4		
5		
8		
13		
16		
20		
23		
25		
30		
31		
35		
48		

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: utilizar essa atividade para definir números primos e números compostos. O aluno deve notar que alguns dos números da Tabela 16 possuem apenas 2 divisores e os demais possuem mais de dois divisores.

<u>Atividade 2</u>: Preencha a Tabela 17 e a seguir responda às questões 3, 4, 5, 6 e 7:

Tabela 17 – Números compostos e números primos

x	Fatoração em números primos	Nº de divisores de x	Número composto	Número primo
2				
3				
4				
5				
8				

13				
16				
20				
23				
25				
30				
31				
35				
48				

Fonte: o autor (2022)

Conclusão:____

Objetivo: utilizar esta atividade para enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética. O aluno deve perceber que o número da tabela ou é primo ou é composto e, sendo ele composto, pode ser escrito como produto de fatores primos. A mesma atividade pode ser usada para a contagem do número de divisores de um certo Número Natural. O professor deve orientar o aluno a preencher a tabela corretamente. Marcar com x a coluna correspondente, dependendo se o número for primo ou for composto. Caso não seja possível efetuar a fatoração, o aluno deve deixar o campo em branco.

Atividades complementares

1) O que são números primos? O que são números compostos?

2) Quais dos números abaixo são primos? Justifique utilizando o *Crivo de Eratóstenes.*
   a) 239 b) 241 c) 1789

3) Escreva o número 1 260 como um produto de números primos.

4) Quantos são os divisores positivos do número 12? E do número 100?

5) (**OBMEP**) Mostre que dois números inteiros da forma n e 2n+1 são sempre primos entre si.

6) Quantos divisores positivos tem o número $6^3 \times 25$?

7) **(ENEM 2014)** Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número N é dado pela expressão $2^x.5^y.7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos.

Sabe-se que N é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7. O número de divisores positivos de N, diferentes de N, é:

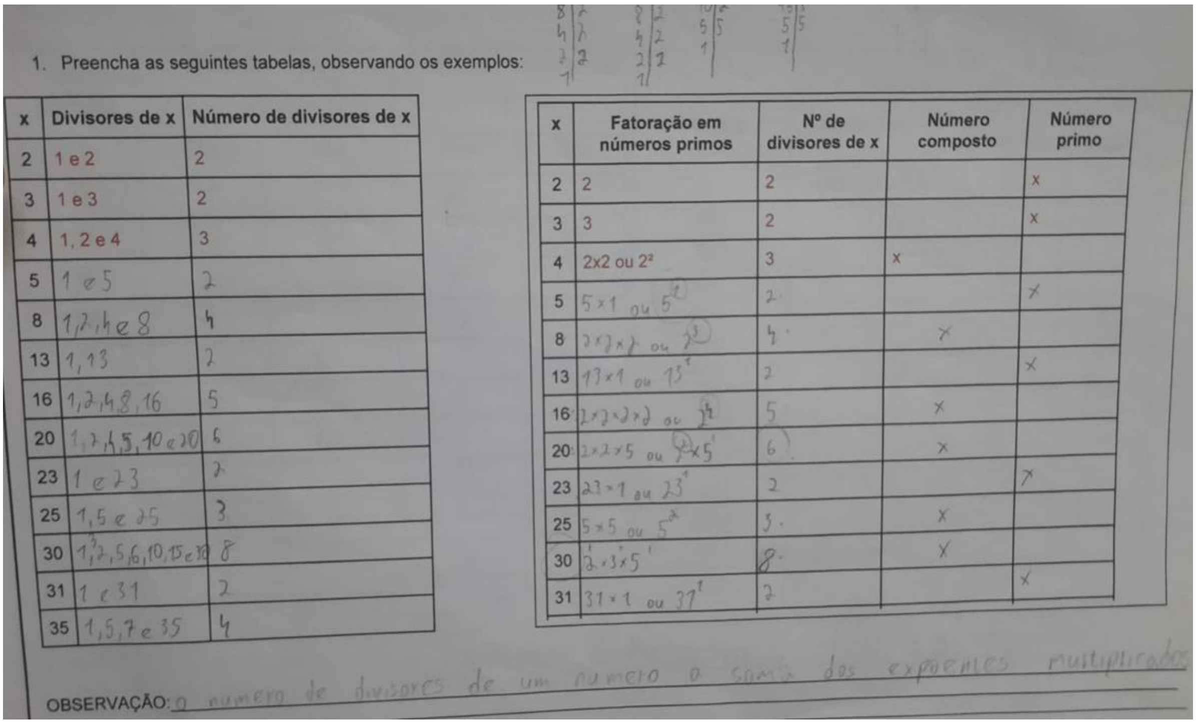
a) x.y.z
b) (x+1).(y+1)
c) x.y.z -1
d) (x+1).(y+1).z
e) (x+1).(y+1).(z+1) -1

Relatório de aulas do Tema 6

A primeira aula sobre números primos foi iniciada pedindo aos grupos que preenchessem as Tabelas 16 e 17, esclarecendo aos alunos que o número 1 é divisor de qualquer número. Como alguns alunos estavam com dificuldades em fatorar um número, foi aproveitado o momento para revisar esse assunto. A partir daí, foram definidos os conceitos de números primos e números compostos e, em seguida, foi enunciado o Teorema Fundamental da Aritmética. Na segunda aula, estudamos o Crivo de Eratóstenes. Com isso, foi projetada no quadro uma tabela com os números de 2 a 101 para verificar se alguns números eram primos, utilizando o algoritmo de Eratóstenes.

Na terceira aula, utilizando contagem e denotando por *d(n)* o número de divisores positivos de um Número Natural *n,* foi mostrado a eles, utilizando exemplos numéricos que, se $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$; onde $p_1, \dots, p_r$ são números primos e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, então $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$. Em seguida, foi pedido aos alunos que resolvessem os problemas complementares restantes, o que se estendeu até a próxima aula.

Figura 61 – Atividade para verificar o Teorema Fundamental da Aritmética



1. Preencha as seguintes tabelas, observando os exemplos:

x	Divisores de x	Número de divisores de x
2	1 e 2	2
3	1 e 3	2
4	1, 2 e 4	3
5	1 e 5	2
8	1,2,4 e 8	4
13	1, 13	2
16	1,2,4,8,16	5
20	1,2,4,5,10 e 20	6
23	1 e 23	2
25	1,5 e 25	3
30	1,2,3,5,6,10,15 e 30	8
31	1 e 31	2
35	1,5,7 e 35	4

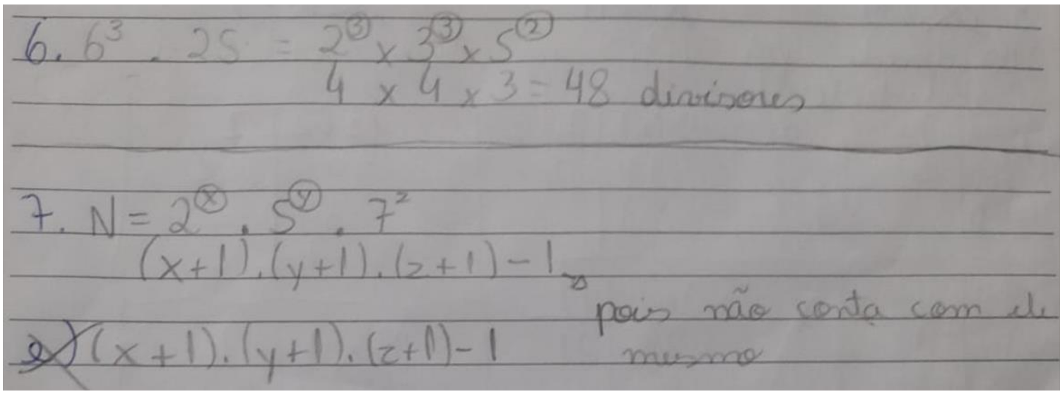
x	Fatoração em números primos	Nº de divisores de x	Número composto	Número primo
2	2	2		x
3	3	2		x
4	2x2 ou 2^2	3	x	
5	5×1 ou 5^1	2		x
8	$2 \times 2 \times 2$ ou 2^3	4	x	
13	13×1 ou 13^1	2		x
16	$2 \times 2 \times 2 \times 2$ ou 2^4	5	x	
20	$2 \times 2 \times 5$ ou $2^2 \times 5$	6	x	
23	23×1 ou 23^1	2		x
25	5×5 ou 5^2	3	x	
30	$2 \times 3 \times 5$	8	x	
31	31×1 ou 31^1	2		x

OBSERVAÇÃO: o numero de divisores de um numero o soma dos expoentes multiplicados

Fonte: o autor (2022)

Conclusão dos alunos da Figura 61*: “o número de divisores de um número é a soma dos expoentes multiplicados”.* Apesar da dificuldade de se expressarem, os alunos compreenderam os conceitos envolvidos na atividade, como constatado na resolução das questões 6 e 7 (Figura 62).

Figura 62 – Atividade sobre números de divisores de um Número Natural



Fonte: o autor (2022)

4.7 Tema 7: Sistema de Numeração

Objetivo: mostrar que os Números Naturais foram representados ao longo da história de várias formas, sendo utilizada na atualidade a representação decimal posicional – que é chamada assim, pois, cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso (uma potência de 10), que lhe é atribuído em função de sua posição dentro da sequência. Espera-se que o aluno compreenda que os sistemas de numeração posicionais estão fundamentados em um teorema, que é uma aplicação da Divisão Euclidiana, o qual permite transformar um número de base decimal em outras bases. As atividades propostas objetivam conhecer o sistema binário e suas aplicações, visto que os estudantes estão cada vez mais próximos das tecnologias.

Total de aulas: 4.

Sugestão: para introduzir o tema e contar um pouco da história dos vários sistemas de numeração até chegarmos no sistema atual com os algarismos indo-arábicos, pode-se utilizar o vídeo[17] produzido pelo professor Rafael Procópio sobre o tema, o qual pode ser encontrado na plataforma de vídeos YouTube.

<u>**Atividades**</u>

1. Seja dado o número 4783 na base 10; escreva-o nas seguintes bases: 2, 3 e 5.
2. **(FUSAR – UFF 2012 - adaptado)** Os computadores utilizam o sistema binário ou de base 2, que é um sistema de numeração em que todas as quantidades se representam com base em dois números, ou seja, 0 e 1. Em um computador, qual a representação do número 2022 (em base decimal) na base binária?
3. **(2020 • FUNDEP • DMAE-MG - adaptado)** A conversão entre bases numéricas é um dos pilares da teoria de sistemas digitais. Qual a representação decimal para o número binário 110110.
4. **(UTFPR - 2018 - adaptado)** As informações nos computadores são baseadas no código binário, composto por dois dígitos (1 e 0), chamados bit. Uma informação é apresentada por um conjunto de 8 bits (os chamados bytes). Para decifrar uma informação convertemos o registro em bytes para o sistema de numeração decimal. Veja um exemplo. Para converter o código binário 01101011, usamos a seguinte

[17] Vídeo MEF 1 - SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E UM POUCO DE HISTÓRIA, encontrado no endereço eletrônico: youtube.com/watch?v=VBUD3CzsEH0 (acessado em 01/06/2022).

tabela:

Bytes (código binário)	0	1	1	0	1	0	1	1
	128	64	32	16	8	4	2	1

Somamos os valores das posições com números 1, obtendo o registro no sistema de numeração decimal. No exemplo, somamos 64 + 32 + 8 + 2 + 1, obtendo o valor 107. Assim, o código binário **01101011** equivale a **107**, no sistema de numeração decimal. Para obter a letra que corresponde a esse código binário, consultamos a tabela a seguir:

97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
a	b	c	d	e	f	g	h	i	J	k	l	m	n	o

112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122
p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

O código binário **01101011** corresponde à letra **k**.

Com base neste raciocínio, indique a palavra escrita com os seguintes códigos binários:

0111 0000 - 0110 0101 - 0110 0100 - 0111 0010 - 0110 0001

4.7.1 Jogo Ones & Zeros-Learn binary: convertendo números decimais em binários

Trata-se de um jogo gratuito, disponibilizado no Play Store, que pode contribuir no aprendizado dos alunos sobre a conversão de números decimais em binários. Dado que muitos alunos possuem celular e a escola disponibiliza rede para acesso à internet, esse jogo pode ser baixado facilmente e utilizado nas aulas de matemática ou em qualquer outro lugar, já que não necessita de conexão com a internet para executá-lo.

Total de aulas: 1.

Objetivo: com este jogo, além de tornar a aula mais divertida, os alunos treinam cálculos mentais de potências de base dois.

Descrição do jogo: o jogador inicia na fase “3x3” com números binários de até 3 dígitos. Ao bater um recorde de 5 segundos na transformação dos decimais em binário, passa-se para a fase “4x4”, onde os números binários possuem até 4 dígitos. Para a fase 5x5, o recorde deverá ser de 10 segundos.

Sugestão: pode-se realizar um campeonato entre os alunos com premiações.

4.7.2 Jogo: “Qual é o número?”

Total de aulas: 1.

Objetivo: inserir um jogo baseado no sistema de numeração binário nas aulas de matemática com o propósito de aprimorar a compreensão dos alunos sobre os conceitos matemáticos e lógicos subjacentes à computação, promovendo habilidades de cálculo mental, tornando as aulas mais envolventes e divertidas, preparando-os alunos para a era digital.

Os seis cartões foram criados da seguinte forma: o cartão que começa pelo “1” contém todos os números de 1 a 63 que precisam de $2^0 = 1$ na representação em potências de base 2; o que começa com “2” contém todos os números de 1 a 63 que precisam de $2^1 = 2$ na representação em potências de base 2; o que começa com “4” contém todos os números de 1 a 63 que precisam de $2^2 = 4$; e assim por diante, até o cartão que começa com “32” que contém todos os números de 1 a 63 que precisam de $2^5 = 32$ na representação em potências de base 2.

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

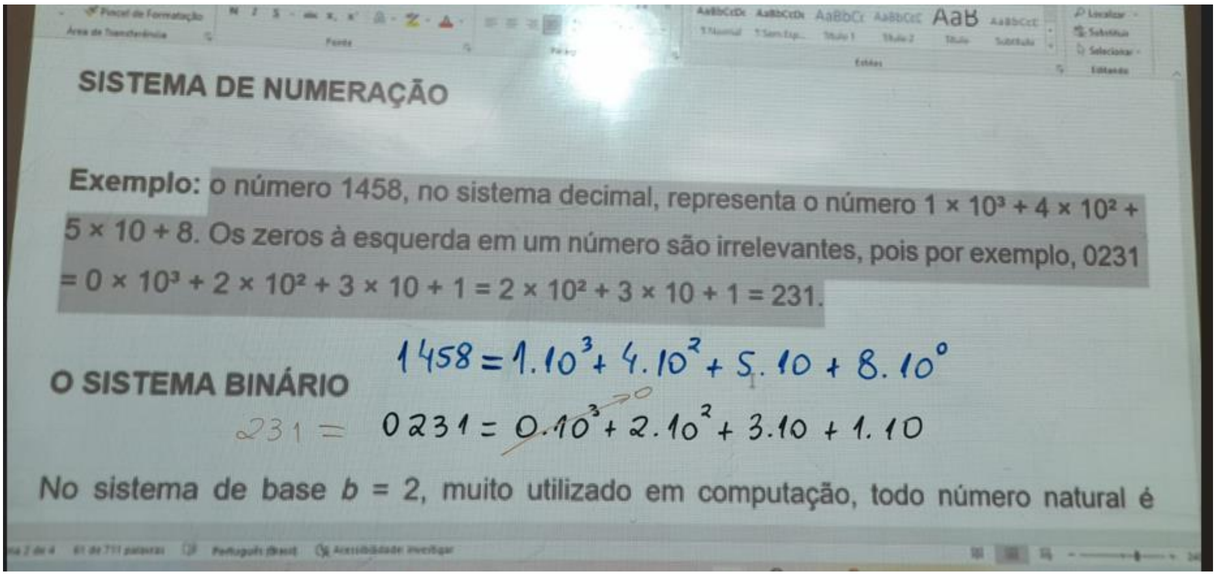
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

O jogo funciona da seguinte forma: pede-se para um aluno pensar em um número contido em algum desses cartões e a professora tenta “adivinhar” o número pensado. Por exemplo, se o número pensado for 13, coloca-se 0 nos cartões que não contêm o número, ou seja, 1, 2 e 5, e coloca-se 1 nos cartões 3, 4 e 6. Assim, 13 no sistema binário é 001101, pois $(001101)_2 = (1101)_2 = 1\times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$.

Relatório de aulas do Tema 7

A primeira aula, cujo tema foi “Os Sistemas de Numeração”, iniciou-se com a exibição de um vídeo produzido pelo professor Rafael Procópio, que conta um pouco da história dos sistemas de numeração egípcio, romano, até o sistema atual decimal com os algarismos indo-arábicos. Em seguida, foi feita uma revisão sobre o Sistema de Numeração Decimal, onde foi discutido o Teorema 2 do capítulo 3, junto a um exemplo (Figura 63). Foi pedido para que escrevessem a expansão decimal do número 19.

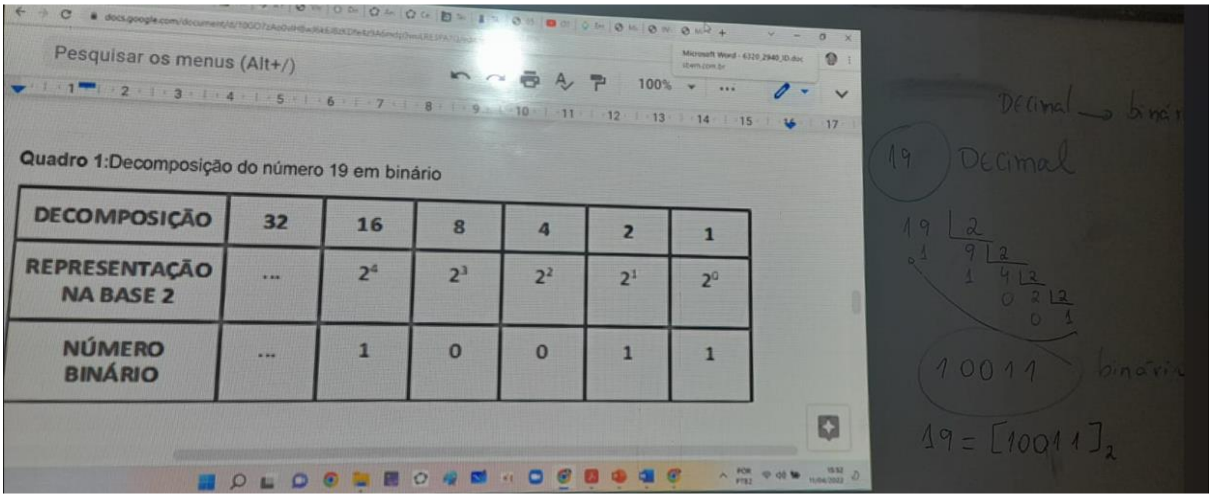
Figura 63 – Expansão decimal do número 1458



Fonte: o autor (2022)

E se a base fosse 2? Foi-lhes questionado após ser projetado no quadro a decomposição do número 19 nessa base (Figura 64).

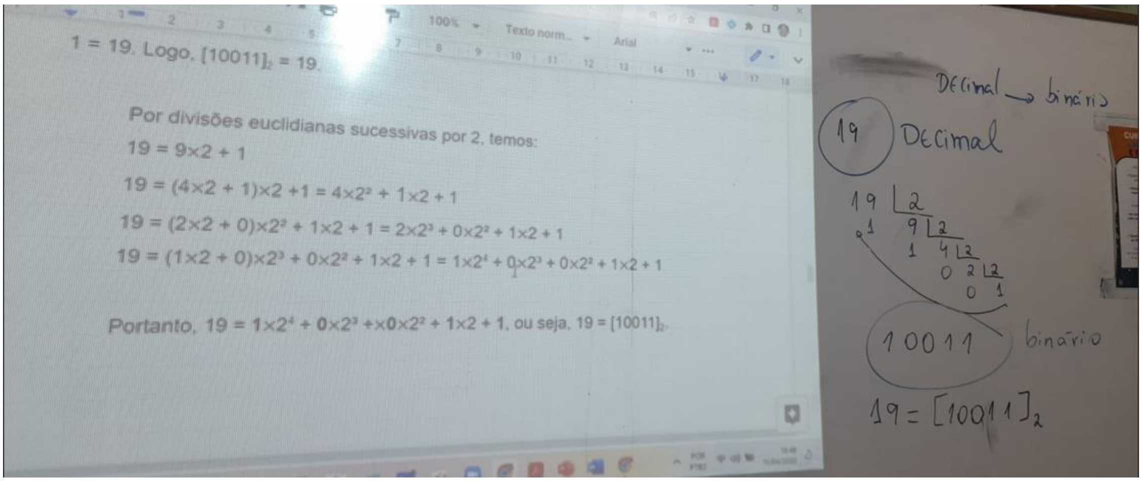
Figura 64 – Expansão binária do número 19



Fonte: o autor (2022)

Observando o quadro, já na segunda aula, eles conseguiram perceber que 19 é a soma $2^4 + 2^1 + 2^0$, e, de acordo com o Teorema 2, o número decimal 19 na base 2 é 10011. Eles foram instruídos a observar os restos dessas divisões. Rapidamente, os alunos notaram que o último quociente, junto com os restos das divisões anteriores, formava a representação binária do número 19 (conforme mostrado na Figura 65).

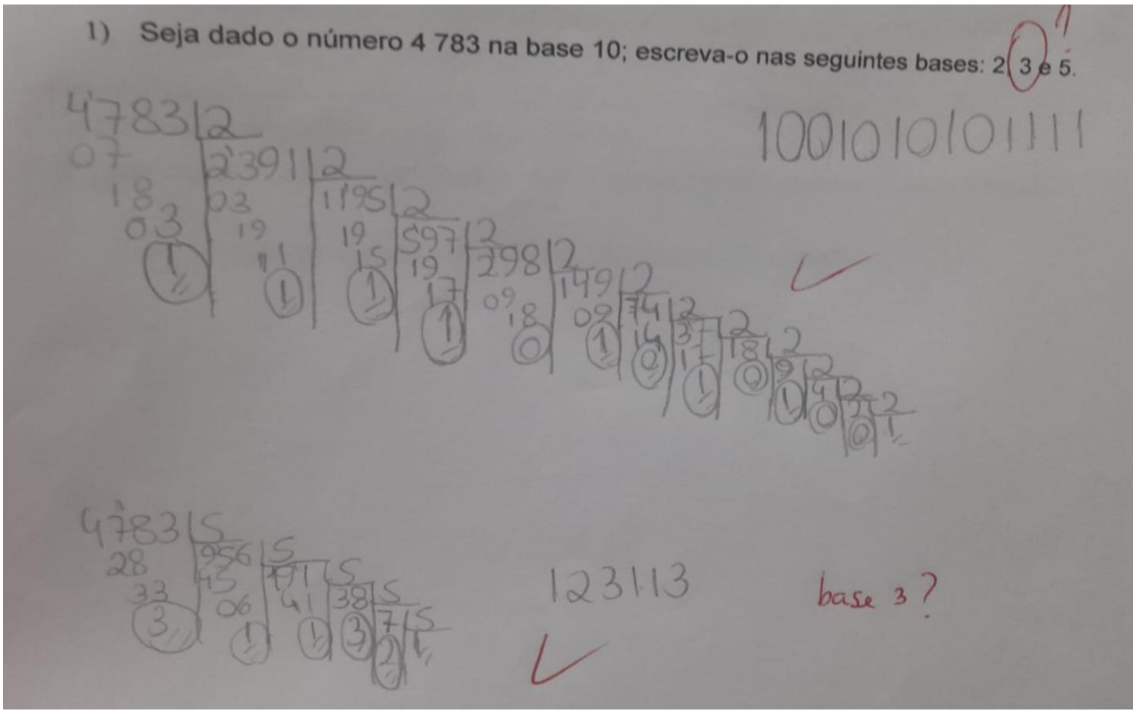
Figura 65 – Expansão binária do número 19 por divisões sucessivas por 2



Fonte: o autor (2022)

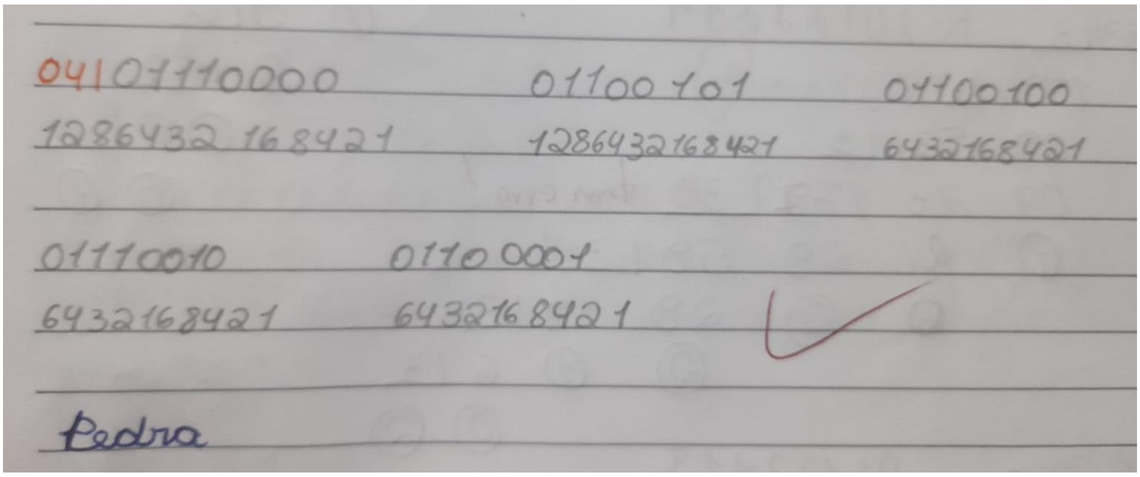
A terceira aula foi reservada para a realização das atividades propostas. Sempre trabalhando em grupos, os alunos não tiveram dificuldade para resolver os problemas. Toda tarefa valia pontos, e aqueles alunos que não conseguiram terminar em sala de aula terminariam em casa.

Figura 66 – Resolução da atividade 1 realizada por um grupo de alunos



Fonte: o autor (2022)

Figura 67 – Resolução da atividade 1 realizada por um grupo de alunos



Fonte: o autor (2022)

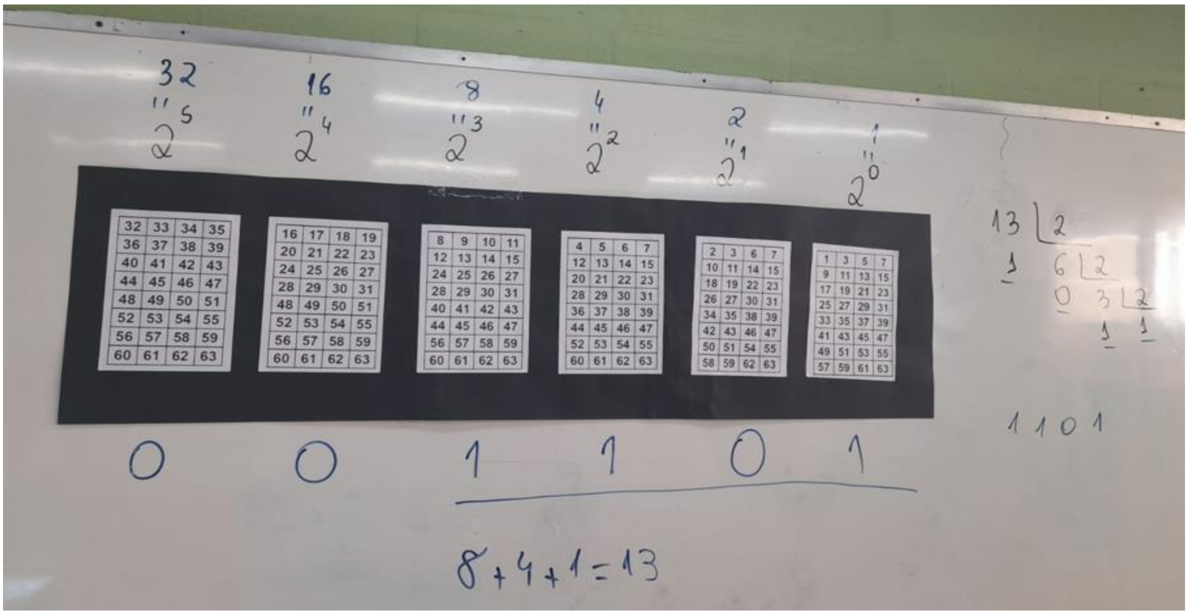
Na quarta aula, reservamos um tempo para um "campeonato" do jogo “Ones & Zeros”, para o qual já havia solicitado que eles baixassem e treinassem em seus celulares. A equipe que avançasse mais fases em 20 minutos seria a vencedora. A equipe vencedora chegou até a fase 4x4, na qual os números binários têm até 4 dígitos. O prêmio foi chocolate.

Figura 68 – Alunos jogando Ones & Zeros

Fonte: o autor (2022)

Na quinta aula, foram corrigidas as atividades no quadro. Na sexta aula, foi praticado o jogo “Qual é o número?”. Esta aula foi muito divertida, pois, após pedir que um aluno, por vez, pensasse em um número e informasse se este aparecia ou não em cada um dos seis cartões, eu “adivinhava” o número pensado. Eles não conseguiram descobrir a matemática por trás do jogo, logo lhes foi apresentada a explicação (Figura 69).

Figura 69 – Jogo “Qual é o número?”



Fonte: o autor (2022)

4.8 Tema 8: Máximo Divisor Comum - Algoritmo de Euclides

Objetivo: realizar uma revisão sobre divisores de um número e o Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois ou mais números, com exemplos contextualizados, a fim de auxiliar o aluno na compreensão do significado do MDC na resolução de problemas. Apresentaremos o Algoritmo de Euclides, uma abordagem que permite encontrar o MDC de dois ou mais números inteiros ao reduzir sucessivamente o valor dos números iniciais. Isso equivale a calcular o MDC de números cada vez menores. Espera-se que o aluno perceba que, ao utilizar o Algoritmo de Euclides, poderá otimizar seus cálculos para encontrar o MDC de números grandes. Além disso, destacaremos que esse método é uma aplicação da Divisão Euclidiana.

Total de aulas: 4.

Atividades

1. Em um jogo para duas ou mais pessoas, há 24 fichas vermelhas e 40 fichas azuis para serem distribuídas igualmente entre os participantes. Nenhuma ficha pode sobrar. Preencha a Tabela 18 para verificar qual é o número máximo de pessoas que podem participar desse jogo.

Tabela 18 – Atividade sobre MDC

Nº de pessoas	Nº de fichas vermelhas	Nº de fichas azuis
2	12	20
3	8	sobram fichas
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Fonte: o autor (2022)

2. Para cada par de números naturais *a* e *b* dados abaixo, ache o mdc(*a, b*) utilizando o algoritmo de Euclides.

a) 637 e 3 887
b) 648 e 1 218
c) 551 e 874

3. **(OBMEP)** Dona Maria comprou 160 pirulitos, 198 caramelos e 370 chocolates para presentear as crianças de sua rua. Para tanto, ela colocou os doces em sacolas de modo que cada sacola contivesse um único tipo de doce, que a quantidade de doces em cada sacola fosse sempre a mesma e de modo que cada sacola contivesse a maior quantidade possível de doces. Depois de colocar os doces nas sacolas, Dona Maria percebeu que sobraram 7 pirulitos, 11 caramelos e 13 chocolates. Quantas sacolas Dona Maria fez?

4. **(U.E. Londrina - PR**) Para levar os alunos de certa escola a um museu, pretende-se formar grupos que tenha iguais quantidades de alunos e de modo que em cada grupo todos sejam do mesmo sexo. Se nessa escola estudam 1350 rapazes e 1224 garotas e cada grupo deverá ser acompanhado de um único professor, o número mínimo de professores necessários para acompanhar todos os grupos nessa visita é:

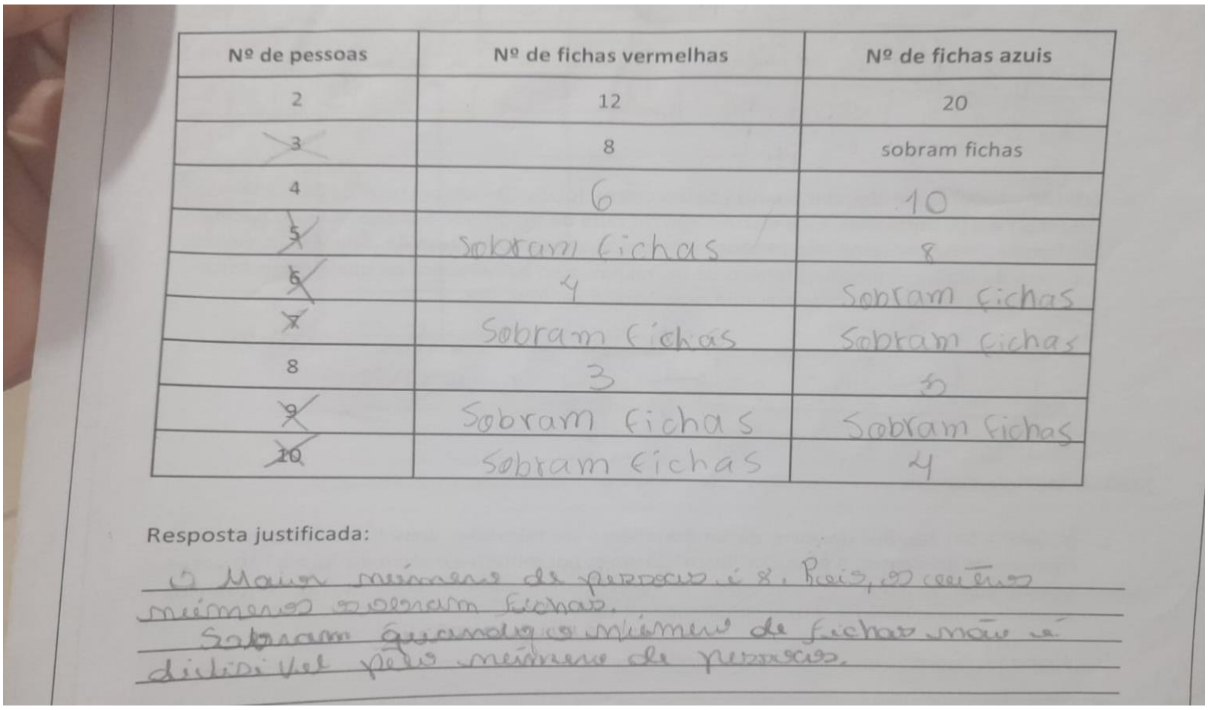
   a) 18 b) 68 c) 75 d) 126 e) 143

5. **(UFMG - 2000)** Entre algumas famílias de um bairro foi distribuído um total de 144 cadernos, 192 lápis e 216 borrachas. Essa distribuição foi feita de modo que o maior número possível de famílias fosse contemplado e todos recebessem o mesmo número de cadernos, o mesmo número de lápis e o mesmo número de borrachas, sem haver sobra de qualquer material. Determine o número de cadernos que cada família ganhou.

Relatório de aulas do Tema 8

Foi iniciada a aula com a primeira atividade, na qual foi pedido aos alunos para preencherem a tabela e, em seguida, justificar suas respostas no espaço destinado para esse fim.

Figura 70 – Resolução da atividade 1 realizada por um grupo de alunos



Nº de pessoas	Nº de fichas vermelhas	Nº de fichas azuis
2	12	20
~~3~~	8	sobram fichas
4	6	10
~~5~~	Sobram fichas	8
~~6~~	4	Sobram fichas
~~7~~	Sobram fichas	Sobram fichas
8	3	5
~~9~~	Sobram fichas	Sobram fichas
~~10~~	Sobram fichas	4

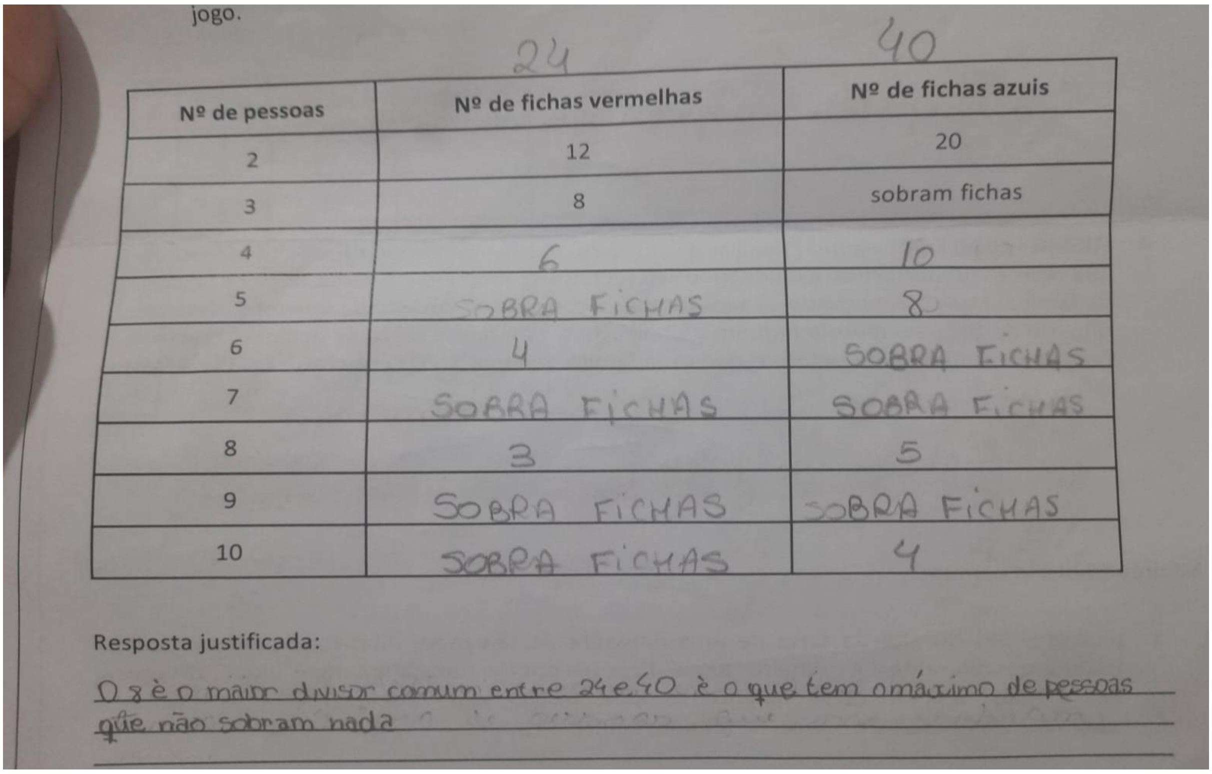
Resposta justificada:

O maior número de pessoas é 8. Pois, os outros números sobram fichas. Sobram quando o número de fichas não é divisível pelo número de pessoas.

Fonte: o autor (2022)

Justificativa do grupo de alunos na Figura 70*: "o maior número de pessoas é 8, pois os outros números sobram fichas. Sobram quando o número de fichas não é divisível pelo número de pessoas"*.

Figura 71 – Resolução da atividade 1 realizada por outro grupo de alunos



jogo.

Nº de pessoas	Nº de fichas vermelhas (24)	Nº de fichas azuis (40)
2	12	20
3	8	sobram fichas
4	6	10
5	SOBRA FICHAS	8
6	4	SOBRA FICHAS
7	SOBRA FICHAS	SOBRA FICHAS
8	3	5
9	SOBRA FICHAS	SOBRA FICHAS
10	SOBRA FICHAS	4

Resposta justificada:

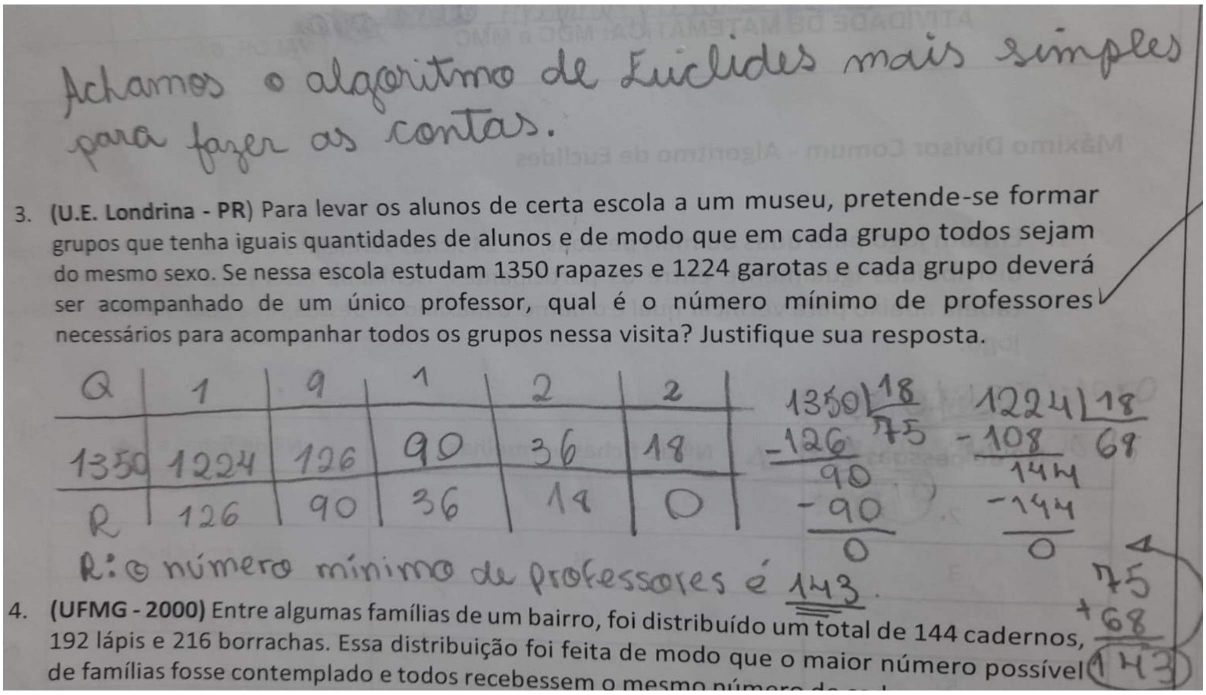
O 8 è o maior divisor comum entre 24 e 40 è o que tem o máximo de pessoas que não sobram nada

Fonte: o autor (2022)

Justificativa do grupo de alunos na Figura 71: *“o 8 é o maior divisor comum entre 24 e 40, é o que tem máximo de pessoas que não sobram nada*”.

Pelas respostas, verifica-se que os alunos conseguiram dar significado aos objetos envolvidos no problema e compreenderam o conceito de MDC na resolução deste. Na aula seguinte, após a discussão dessa atividade, foi definido o MDC, apresentado o algoritmo de Euclides e resolvido o mesmo problema utilizando esta técnica para o cálculo do MDC. Paralelamente, utilizamos o método da fatoração. Muitos alunos preferiram o método de Euclides, como consta na atividade apresentada na Figura 72. Uma aula foi dedicada à realização das atividades práticas relacionadas ao MDC e ao método da fatoração. Os grupos que não conseguiram concluir as atividades em sala de aula as finalizaram em casa. A quinta aula foi reservada para a correção e discussão das atividades.

Figura 72 – Resolução da atividade 3 realizada por um grupo de alunos



Achamos o algoritmo de Euclides mais simples para fazer as contas.

3. **(U.E. Londrina - PR)** Para levar os alunos de certa escola a um museu, pretende-se formar grupos que tenha iguais quantidades de alunos e de modo que em cada grupo todos sejam do mesmo sexo. Se nessa escola estudam 1350 rapazes e 1224 garotas e cada grupo deverá ser acompanhado de um único professor, qual é o número mínimo de professores necessários para acompanhar todos os grupos nessa visita? Justifique sua resposta.

Q	1	9	1	2	2
1350	1224	126	90	36	18
R	126	90	36	18	0

1350 ÷ 18 = 75; −126; 90; −90; 0

1224 ÷ 18 = 68; −108; 144; −144; 0

75 + 68 = 143

R: O número mínimo de professores é 143.

4. **(UFMG - 2000)** Entre algumas famílias de um bairro, foi distribuído um total de 144 cadernos, 192 lápis e 216 borrachas. Essa distribuição foi feita de modo que o maior número possível de famílias fosse contemplado e todos recebessem o mesmo número de ...

Fonte: o autor (2022)

No final, observou-se que os alunos, embora lembrassem do nome 'MDC', ainda não compreendiam plenamente seu significado e como calcular, nem mesmo pelo método de divisões sucessivas. No entanto, ao longo das aulas, eles demonstraram uma compreensão crescente do conceito de MDC e do Algoritmo de Euclides, tornando-o uma ferramenta útil na resolução de problemas.

4.9 Tema 9: Mínimo Múltiplo Comum

Objetivo: revisar o conceito de múltiplo de um número; aplicar o conhecimento do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) em situações contextualizadas, relevantes para os alunos; e explorar a relação entre o MDC e o MMC para otimizar cálculos.

Total de aulas: 3.

Atividades:

1. (Fuvest – SP) No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a "piscar simultaneamente"?

Sugestão: construir uma tabela (Tabela 19) para verificar os momentos em que as duas luzes piscam.

Tabela 19 – Momento em que as luzes se acendem na atividade 1 de MMC

tempo(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1ª Luz	x										
2ª Luz	x										

Fonte: o autor (2022)

Objetivo: espera-se que os alunos percebam que as luzes voltarão a piscar juntas após o menor múltiplo comum de 4 e 6, ou seja, o MMC entre 4 e 6. Como a 1ª luz pisca 15 vezes em 60 segundos, logo ela pisca 1 vez a cada 4 segundos ($60 \div 15$). Já a 2ª luz pisca 1 vez a cada 6 segundos ($60 \div 10$). De acordo com a tabela, elas voltarão a piscar juntas depois de 12 segundos.

2. **(G1-IFSC 2017).** Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles. Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

– Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada? Justifique sua resposta.

3. Preencha a Tabela 20:

Tabela 20 – Relação entre o MDC e o MMC

a	**b**	**a×b**	**mdc (a, b)**	**mmc (a, b)**	**mdc (a, b)×mmc (a, b)**
2	4				
3	6				
4	18				
8	20				
10	35				
30	75				

Fonte: o autor (2022)

O que você concluiu? ____

Objetivo: espera-se que o aluno, com a ajuda da Tabela 20 preenchida, descubra a relação entre o MDC e MMC de dois números. Mostrar essa relação pode ajudar os alunos a conectar conceitos em matemática, como aritmética, álgebra e geometria (junto com a visualização geométrica da próxima tarefa), permitindo a resolução de problemas geométricos fundamentados em princípios aritméticos.

4.9.1 Interpretação geométrica do MMC e MDC

Objetivo: analisar propriedades aritméticas por meio de descrições com base em modelos geométricos. Utilizar a visualização geométrica da aritmética para a compreensão e determinação do MDC e do MMC entre dois números, com o auxílio do Geogebra, utilizando procedimentos e técnicas apresentados no capítulo 4.

Total de aulas: 1.

Atividade:

1. Utilize o Geogebra como Geoplano e determine o MDC e o MMC entre:
   a) 4 e 10
   b) 6 e 12

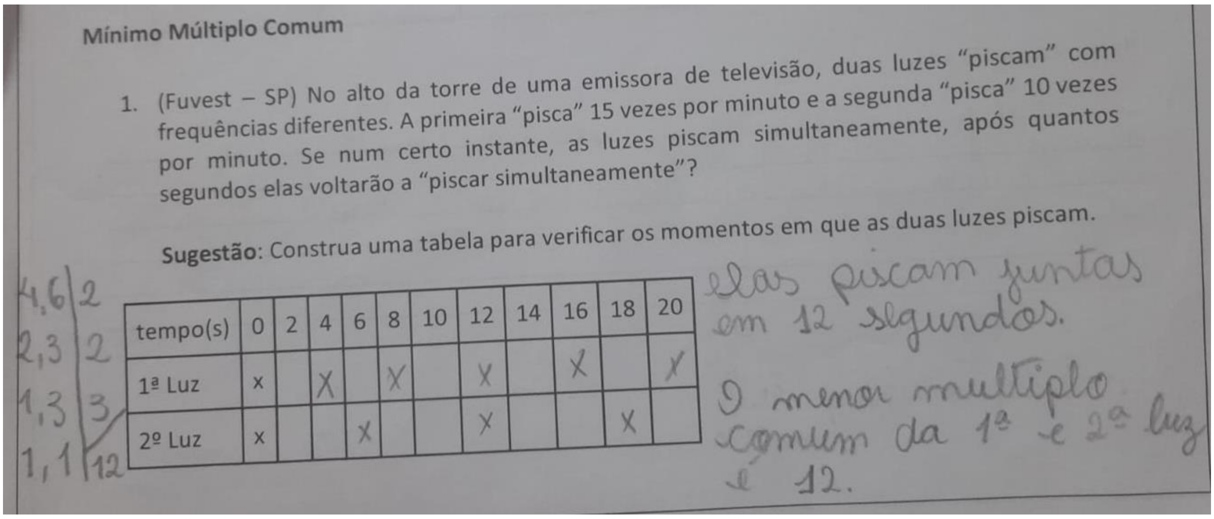
c) 5 e 6

d) 7 e 11

Relatório de aulas do Tema 9

Neste momento, após a execução de várias aulas relacionadas à sequência didática, notamos que os alunos começavam a se familiarizar com a escrita e a importância de justificar seus processos de cálculo. Inicialmente, solicitamos aos alunos que resolvessem a atividade 1 usando a tabela e que apresentassem justificativas para suas respostas. De forma surpreendente, em poucos minutos, os alunos já haviam compreendido os significados dos elementos envolvidos na situação proposta (Figuras 73 e 74).

Figura 73 – Resolução da atividade 1 sobre MMC realizada por um grupo de alunos


Mínimo Múltiplo Comum

1. (Fuvest – SP) No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a "piscar simultaneamente"?

Sugestão: Construa uma tabela para verificar os momentos em que as duas luzes piscam.

tempo(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1ª Luz	x		X		X		X		X		X
2º Luz	x			X			X			X	

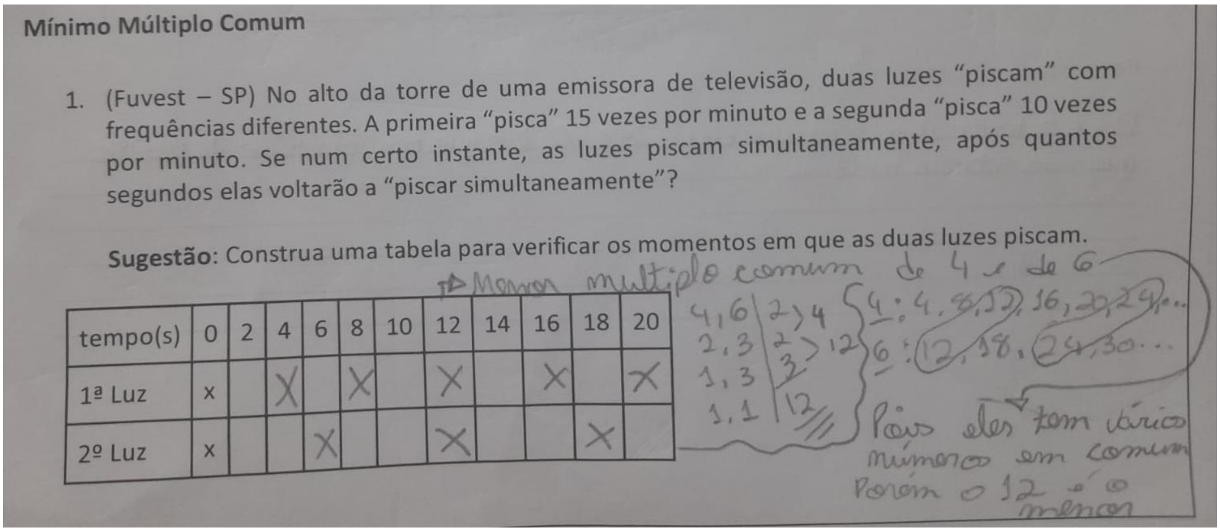
4,6 | 2
2,3 | 2
1,3 | 3
1,1 | 12

elas piscam juntas em 12 segundos.

O menor multiplo comum da 1ª e 2ª luz é 12.

Fonte: o autor (2022)

Figura 74 – Resolução da atividade 1 sobre MMC realizada por outro grupo de alunos


Mínimo Múltiplo Comum

1. (Fuvest – SP) No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a "piscar simultaneamente"?

Sugestão: Construa uma tabela para verificar os momentos em que as duas luzes piscam.

Menor multiplo comum de 4 e de 6

tempo(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1ª Luz	x		X		X		X		X		X
2º Luz	x			X			X			X	

4,6 | 2 > 4
2,3 | 2
1,3 | 3 > 12
1,1 | 12

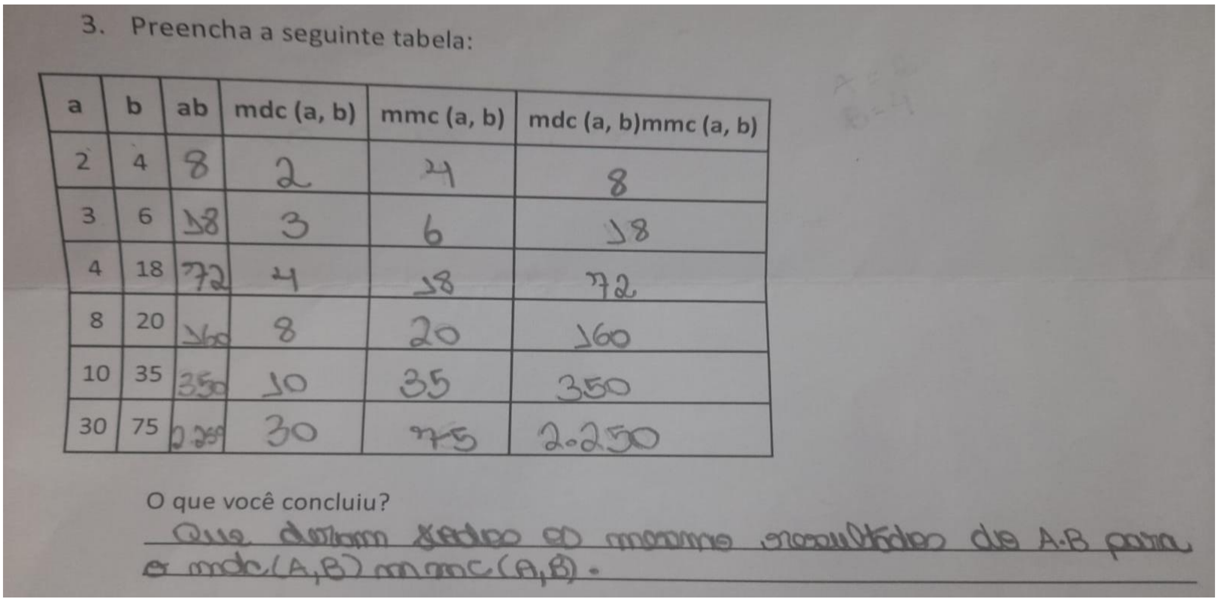
4: 4, 8, 12, 16, 20, 24...
6: 12, 18, 24, 30...

Pois eles tem varios numeros em comum Porém o 12 é o menor

Fonte: o autor (2022)

Após esta atividade, foi definido o MMC, revisando o método da fatoração. Em seguida, os alunos foram solicitados a resolver a atividade 2 (até esse ponto, foram utilizadas duas aulas). Na terceira aula, os estudantes receberam a tarefa de preencher a tabela da atividade 3 e chegar a uma conclusão, com a expectativa de que descobrissem a relação entre o MDC e o MMC de dois números (Figuras 75 e 76).

Figura 75 – Resolução da atividade 3 realizada por um grupo de alunos



3. Preencha a seguinte tabela:

a	b	ab	mdc (a, b)	mmc (a, b)	mdc (a, b)mmc (a, b)
2	4	8	2	4	8
3	6	18	3	6	18
4	18	72	4	18	72
8	20	160	8	20	160
10	35	350	10	35	350
30	75	2.250	30	75	2.250

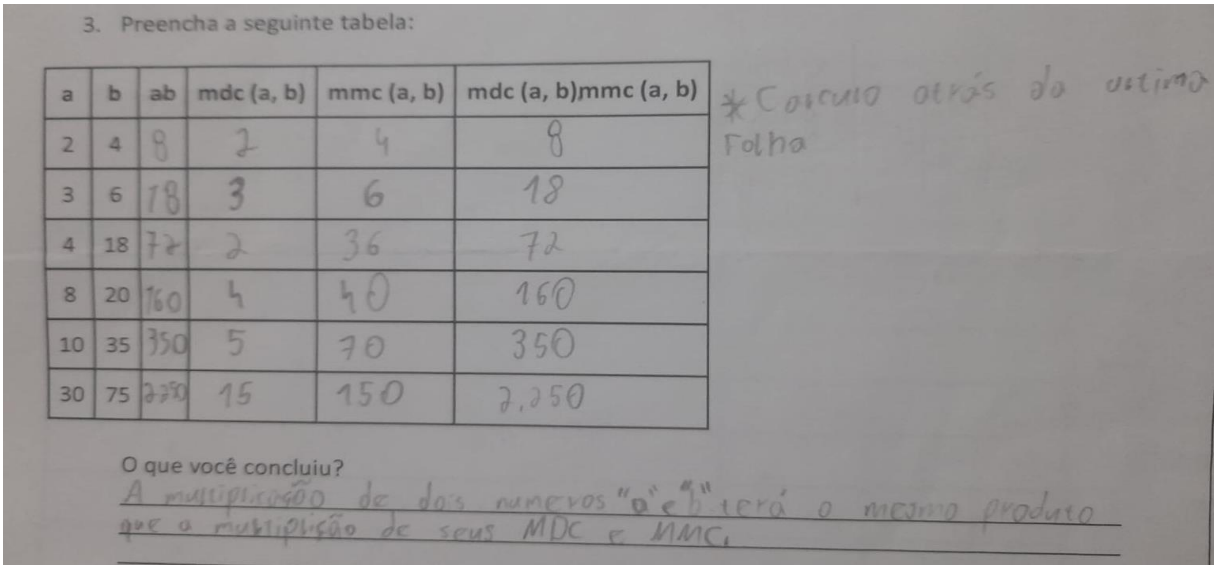
O que você concluiu?

Que deram todos o mesmo resultados do A.B para o mdc(A,B) mmc(A,B).

Fonte: o autor (2022)

A conclusão dada por um grupo de alunos: “*que deram todos o mesmo resultado do a.b para o mdc(a,b).mmc(a,b)”.*

Figura 76 – Resolução da atividade 3 realizada por outro grupo de alunos



3. Preencha a seguinte tabela:

a	b	ab	mdc (a, b)	mmc (a, b)	mdc (a, b)mmc (a, b)
2	4	8	2	4	8
3	6	18	3	6	18
4	18	72	2	36	72
8	20	160	4	40	160
10	35	350	5	70	350
30	75	2250	15	150	2.250

*Conclusão atrás da ultima Folha

O que você concluiu?

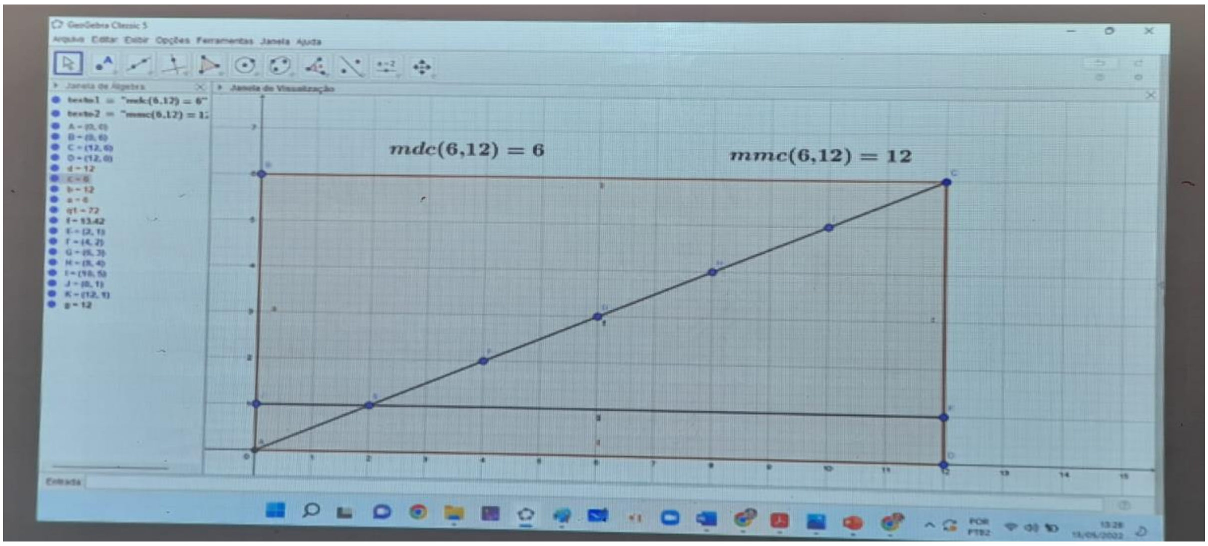
A multiplicação de dois numeros "a" e "b" terá o mesmo produto que a multiplição de seus MDC e MMC.

Fonte: o autor (2022)

A conclusão dada por outro grupo de alunos: *“a multiplicação de dois números a e b será o mesmo produto que a multiplicação de seus MDC e MMC”*.

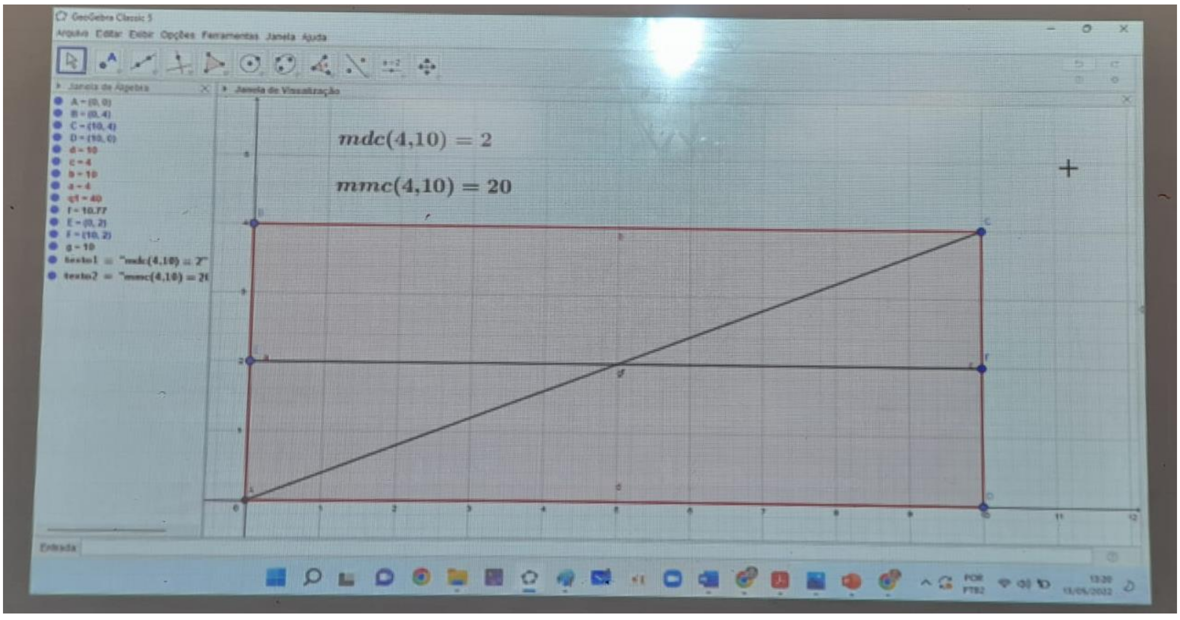
As duas conclusões dos grupos acima mostram que os alunos perceberam a igualdade: a·b = mdc(a,b)·mmc(a,b), que era justamente o objetivo da atividade. Na quarta aula, foi mostrado, através do datashow, a interpretação geométrica do MDC e do MMC. Por fim, utilizando o teorema que afirma: mmc (a, b) × mdc (a, b) = |a·b|, se fez algumas verificações no Geogebra para justificar as construções geométricas que determinam os valores do MDC e do MMC de dois números inteiros (Figuras 77 e 78).

Figura 77 – Interpretação geométrica do mdc(6, 12) e do mmc(6, 12)



Fonte: o autor (2022)

Figura 78 – Interpretação geométrica do mdc(4, 10) e do mmc(4, 10)



Fonte: o autor (2022)

5. AVALIAÇÃO FINAL E ANÁLISE DE RESULTADOS

Uma das características marcantes da avaliação do aprendizado foi o enfoque no trabalho em equipe. Os alunos foram incentivados a debater as questões, elaborar respostas conjuntas e, posteriormente, entregar uma única solução por grupo. No entanto, cada aluno manteve um registro das resoluções das atividades em seus cadernos individuais, promovendo a construção do conhecimento individual, além do coletivo. Cada atividade tinha um valor variável, entre 3 a 5 pontos, mas houve um acordo mútuo entre os alunos e a professora. Ficou estabelecido que a pontuação mínima seria de 60% da pontuação total, contanto que as atividades fossem realizadas com comprometimento e dedicação. Esse acordo proporcionou aos alunos a segurança necessária para se empenharem nas tarefas, sem o receio de errar. Questões que apresentaram maior dificuldade foram cuidadosamente corrigidas e esclarecidas em sala de aula, proporcionando um espaço para aprendizado contínuo e aprimoramento de habilidades importantes para o aprendizado.

Conforme o planejado, após a execução da sequência didática foi aplicada uma avaliação final com dez (10) questões de múltipla escolha sobre o conteúdo apresentado, para uma turma de trinta e um (31) alunos do primeiro ano de Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Olímpio Cunha, que participaram das aulas da proposta didática. Além das dez questões, via formulário online, foi solicitado aos alunos avaliar a proposta para realizar uma análise mais abrangente do projeto.

Objetivo: esta avaliação (teste 2) teve como objetivo a verificação, quanto à aprendizagem dos alunos, sobre os tópicos estudados na sequência didática proposta e cuja execução foi relatada no capítulo prévio. As questões deste teste foram semelhantes ao do primeiro teste diagnóstico.

Total de aulas: 2 aulas geminadas de 50 minutos cada.

A seguir, serão apresentadas as dez questões da avaliação, com os respectivos resultados do teste e uma análise das respostas:

1. Hoje é segunda-feira, qual dia será daqui a 900 dias?

a) terça-feira
b) quarta-feira
c) quinta-feira

d) sexta-feira

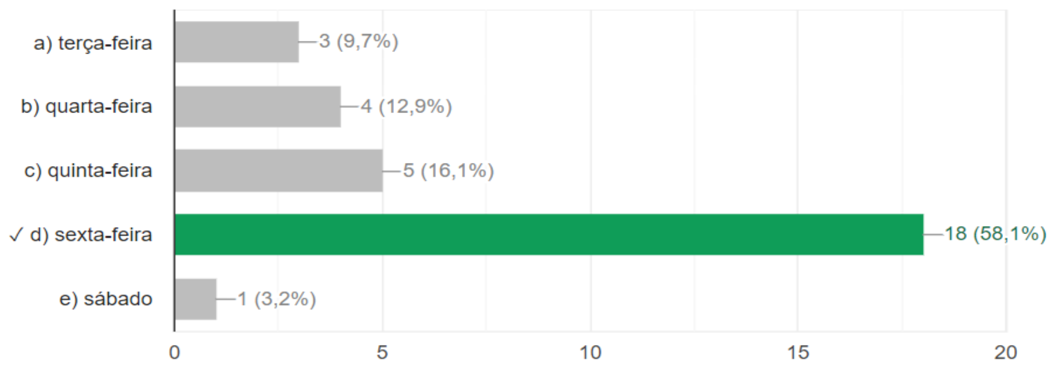
e) sábado

Alternativa correta: D.

No Gráfico 14 é mostrado o percentual de alunos que marcaram cada alternativa da questão 1. Observe que mais de 50% dos alunos acertaram a resposta correta, enquanto a maior parte das respostas incorretas se distribuíram de forma quase equitativa entre as alternativas a), b) e c) e somente houve uma resposta marcando a alternativa e).

Para a resolução deste problema, primeiro encontramos o resto da divisão de 900 por 7 (número de dias em uma semana). Como $900 = 128 \times 7 + 4$, logo o resto é 4. Se hoje é segunda-feira, então daqui a um dia será terça-feira. Logo, considerando a terça feira como o primeiro dia, após 128 semanas (896 dias), o 896° dia será uma segunda feira. Portanto, o 1º dia do resto será uma terça-feira, e o quarto dia (do resto) será uma sexta-feira.

Gráfico 14 – Total de acertos na questão 1 do teste 2



Fonte: o autor (2022)

2. (IEZZI, 2018, p. 171) Tenho 84 balas de coco, 144 balas de chocolate e 60 balas de leite. Quero formar pacotes de balas, sem misturar sabores e sem que sobrem balas. Todos os pacotes devem ter a mesma quantidade de balas, que deve ser o maior possível. Quantas balas devo colocar em cada pacote?

a) 10

b) 12

c) 14

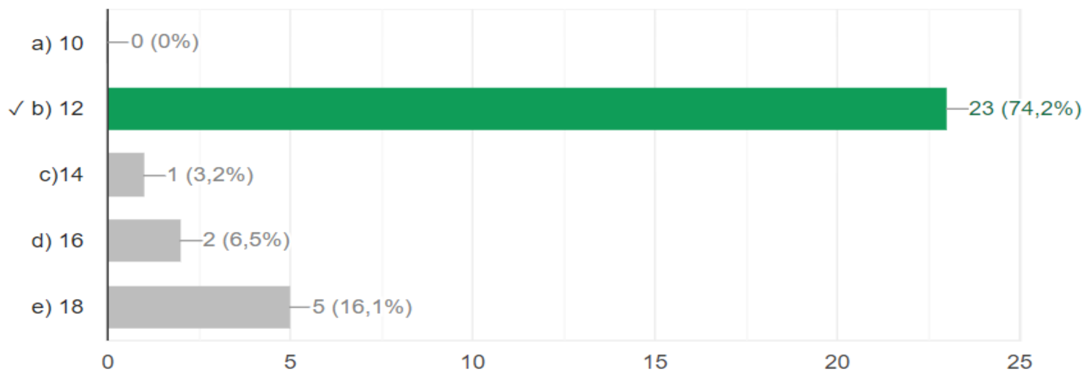
d) 16

e) 18

Alternativa correta: B.

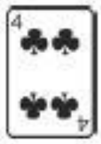
No Gráfico 15 podemos observar que grande parte (74,2%) dos alunos responderam de forma correta à questão, marcando a alternativa ("b"), que corresponde a $mdc(84, 144, 60) = 12 = 2^2 \times 3$. A alternativa incorreta marcada pelo maior número de alunos foi a letra (e), cuja resposta (o número $18 = 2 \times 3^2$) tem como fatores os números 2 e 3, que são, ainda, fatores em comum dos números 84, 144 e 60, enquanto as respostas das outras alternativas ("a", "c" e "d"), ou tinham fatores não comuns a todos os números 84,144 e 60, ou não consideravam todos os fatores em comum (2 e 3). Os resultados sugerem que 90,2% dos alunos entenderam que, para calcular o MDC dos números, devem ser considerados os fatores em comum, porém, alguns erraram na repetição dos fatores em comum.

Gráfico 15 – Total de acertos na questão 2 do teste 2



Fonte: o autor (2022)

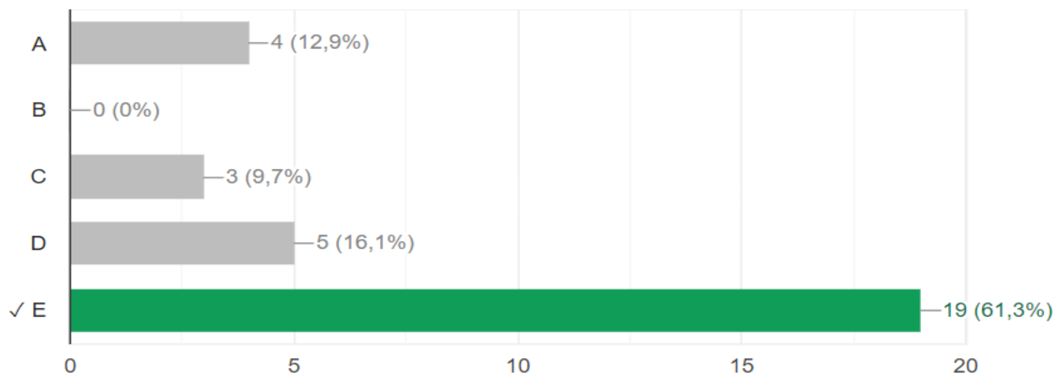
3. Cinco cartas, inicialmente dispostas como na figura, serão embaralhadas. Em cada embaralhamento, a primeira carta passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a quarta, a terceira passa a ser a primeira, a quarta passa a ser a quinta e a quinta passa a ser a terceira. Qual será a primeira carta após 2012 embaralhamentos?

a)  b)  c)  d)  e) 

Alternativa correta: E.

No Gráfico 16 podemos apreciar que 61,3% dos alunos acertaram a alternativa correta. Observe que uma forma de resolver a questão é perceber que, a cada ciclo de cinco embaralhamentos, as cinco cartas voltam para o sequenciamento inicial. Os cinco sequenciamentos, respectivos aos 5 embaralhamentos, são: 31524; 53412; 45231; 24153; 12345. Como na divisão de 2012 por 5 obtemos um resto igual a 2 ($2012 = 402 \times 5 + 2$), logo, após 402 ciclos de 5 embaralhamentos, o sequenciamento retorna à sua posição inicial; e aplicando mais 2 embaralhamentos (o resto), o sequenciamento final será 53412, sendo 5 a primeira carta.

Gráfico 16 – Total de acertos na questão 3 do teste 2



Fonte: O Autor (2022)

4. Utilize a tabela abaixo para decifrar a palavra escrita com os seguintes códigos binários:

1100001 1101101 1101111 1110010.

97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122
p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

a) AMAR

b) AMOR

c) MATO

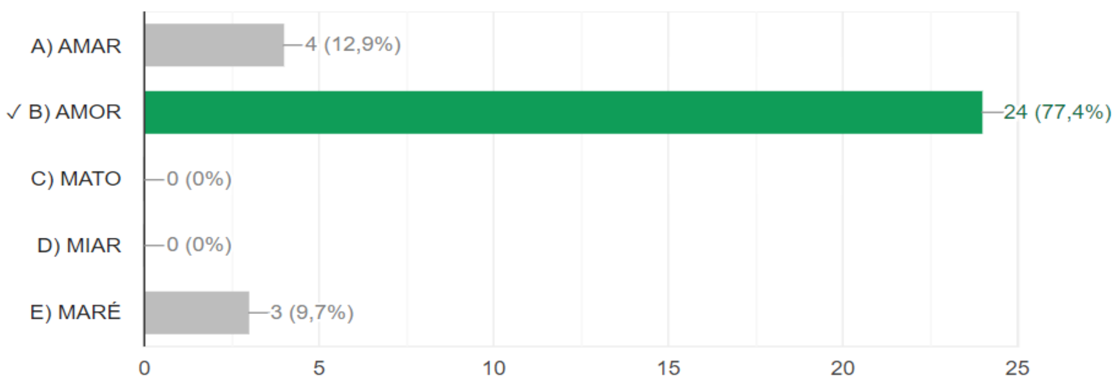
d) MIAR

e) MARÉ

Alternativa correta: B

O Gráfico 17 mostra que um grande porcentual de alunos (77,4%) marcou a resposta correta. Para resolver esta questão, devemos fazer a conversão dos números que estão na base 2 (binários), para a base decimal. Por exemplo, o número: $[1100001]_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^0 = 64 + 32 + 1 = 97,$ que corresponde à letra "A" de acordo com a tabela. De forma análoga, podemos fazer a conversão dos outros códigos binários (109, 111 e 114) e encontrar as letras correspondentes "M", "O", "R", formando assim a palavra "AMOR".

Gráfico 17 – Total de acertos na questão 4 do teste 2



Fonte: O Autor (2022)

5. Qual é o resto que o número 16^{1111} deixa quando dividido por 5?

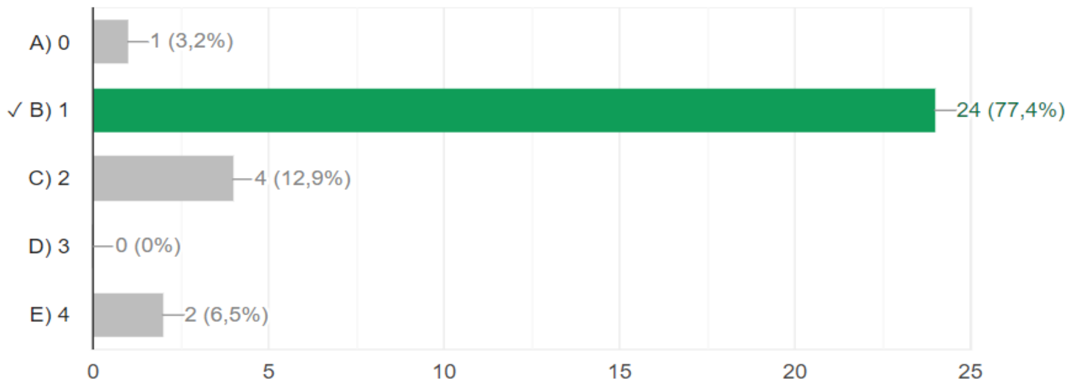
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Alternativa correta: B

Para a quinta questão também se obteve uma grande porcentagem (77,4%) de alunos marcando a resposta correta, como mostra o Gráfico 18. Esse problema pode ser resolvido utilizando o seguinte resultado: o resto da divisão por D do produto de dois números *a* e *b* é igual ao produto dos restos dos números a e b, quando divididos por D. No problema, $D = 5 \; e \; a = b = 16$. Logo, pelo resultado anterior, o resto da divisão de 16^2 por 5 é igual ao produto dos restos da divisão de 16 e 16 por 5, respectivamente, isto é, $1 \times 1 = 1$. Se continuarmos aplicando o mesmo resultado para o produto de 16^2 e 16, obtemos que o resto da divisão de

16^2 por 5 é também 1, e, assim, de forma indutiva, concluímos que o resto da divisão de 16^n por 5 é 1, para n sendo um Número Natural. Em particular, para $n = 1111$, temos que o resto da divisão de 16^{1111} por 5 é 1.

Gráfico 18 – Total de acertos na questão 5 do teste 2



Fonte: o autor (2022)

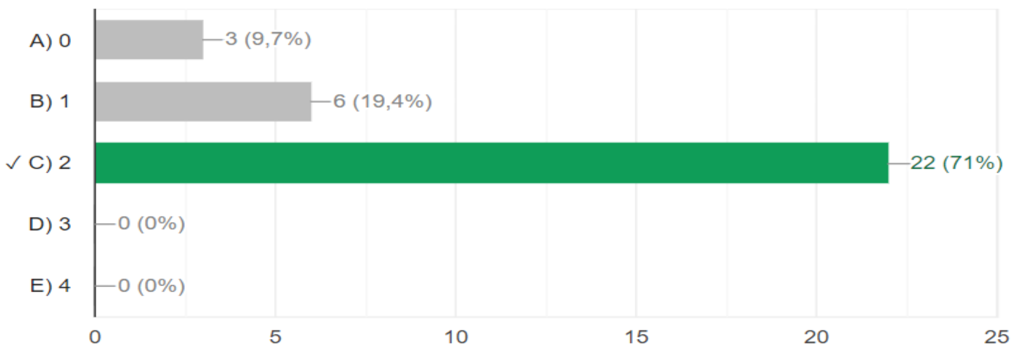
6. Qual é o resto da divisão de $4^{100} + 65^{30} + 17^{450}$ por 4?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Alternativa correta: C.

A questão 6 também teve uma porcentagem (71%) alta de acertos, como na questão anterior. Inclusive, este problema pode ser resolvido de forma similar à questão 5.

Gráfico 19 – Total de acertos na questão 6 do teste 2



Fonte: o autor (2022)

Primeiramente, sendo $4^{100} = 4 \times 4^{99}$ um múltiplo de 4, então o resto da divisão de 4^{100} por 4 será zero. Agora, o resto da divisão de 65 por 4 é 1 ($65 = 16 \times 4 + 1$), logo, o resto da divisão de 65^{30} por 4 será, $1^{30} = 1$. Por fim, o resto da divisão de

17 por 4 é 1 ($17 = 4 \times 4 + 1$), logo, o resto da divisão de 17^{450} por 4 será, $1^{450} = 1$. Portanto, utilizando o resultado: o resto da divisão por *D* da soma de dois números *a* e *b*, é igual à soma dos restos dos números a e b, quando divididos por *D*, concluímos que o resto da divisão de $4^{100} + 65^{30} + 17^{450}$ por 4 é igual à soma dos restos 0, 1 e 1, isto é, 2.

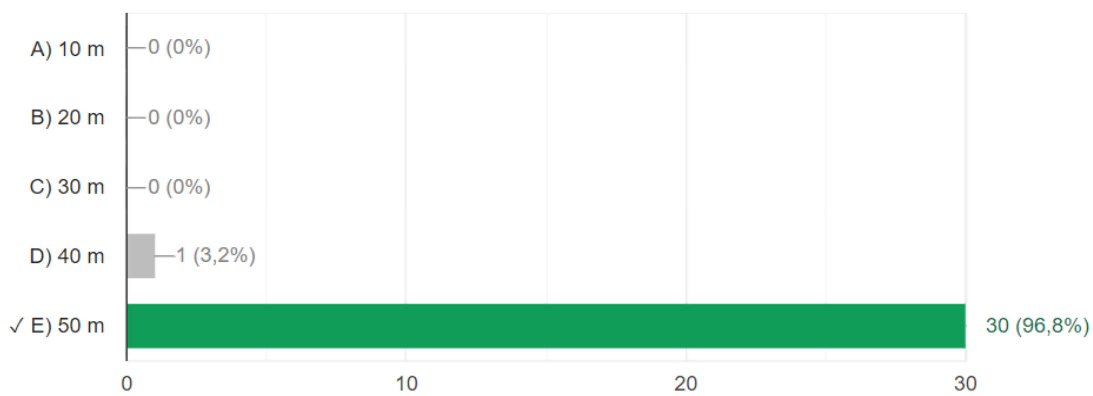
7. Dois rolos de arame, um de 200 metros e outro de 250 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. Quantos pedaços podem ser obtidos se desejamos que cada um destes pedaços tenha o maior comprimento possível?[18]

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

Alternativa correta: E.

Esta questão teve o maior número de acertos, como mostra o Gráfico 20, apesar do problema ter sido apresentado de forma contextualizada. Quase todos os alunos souberam encontrar a resposta correta do problema e uma das formas de resolvê-la era simplesmente calcular o MDC de $200 = 2^3 \times 5^2$ e $250 = 2 \times 5^3$, isto é, $mdc(250, 200) = 2 \times 5^2 = 50$. Uma outra forma de resolver a questão era determinar o maior divisor comum de 200 e 250 (entre as alternativas dadas).

Gráfico 20 – Total de acertos na questão 7 do teste 2

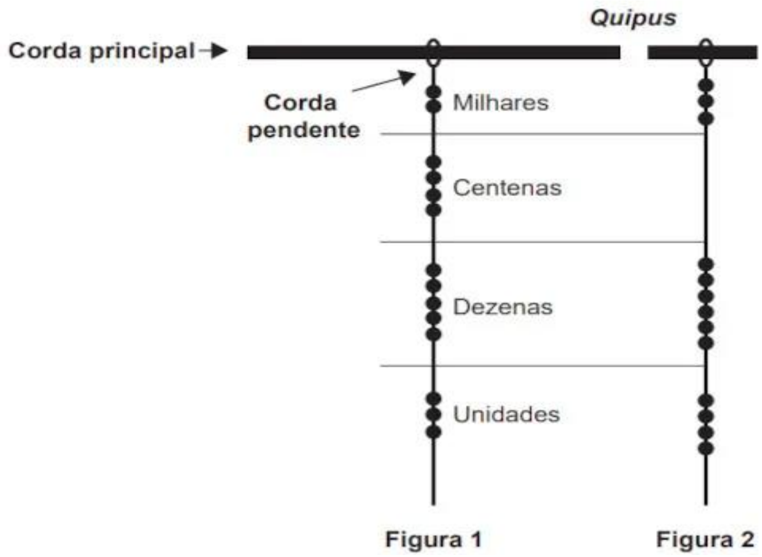


Fonte: o autor (2022)

8. (Enem - 2014) Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós, denominado quipus. O quipus era feito de uma corda

[18] Nesta questão, a pergunta correta para as alternativas dadas seria: “qual é o comprimento destes pedaços, se desejamos que cada um deles tenha o maior comprimento possível?”. Mesmo com esse erro, os alunos responderam a resposta esperada.

matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o quipus representa o número decimal 2 453. Para representar o “zero” em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.



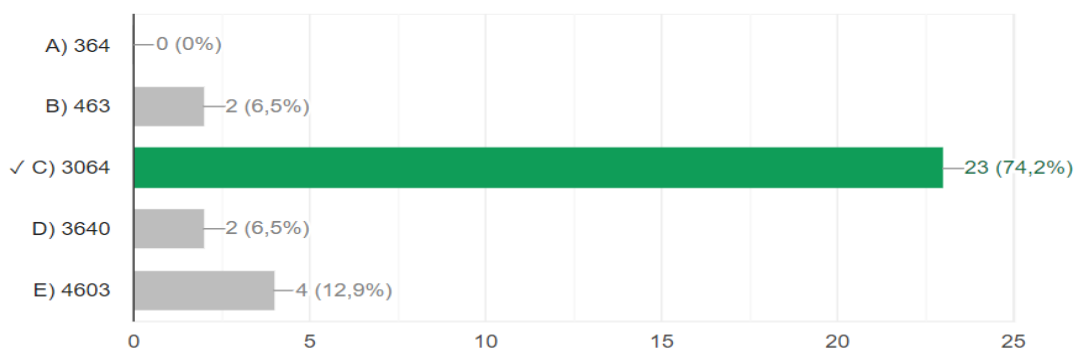
O número da representação do quipus da Figura 2, em base decimal, é:

a) 364 b) 463 c) 3 064 d) 3 640 e) 4 603.

Alternativa correta: C.

A questão 8 teve uma grande porcentagem (74,2%) de acertos, como mostra o Gráfico 21.

Gráfico 21 – Total de acertos na questão 8 do teste 2



Fonte: o autor (2022)

Para responder de forma correta à questão, o aluno devia indicar cada algarismo (número de nós) e a respectiva posição para determinar se se tratava de unidades, dezenas, centenas ou unidades de milhar. As respostas incorretas sugerem que os alunos erraram ao fazer a leitura do número, seja pela ordem (4603 e 463) ou pela não identificação do zero (ausência de nós) na posição correta (3640 e 463).

9. **(FCC – SP)** Um número tem dois algarismos, sendo y o algarismo das unidades e x o algarismo das dezenas. Se colocarmos o algarismo 2 à direita desse número, o novo número será:

Número: xy **Novo número: xy2**

a) x + y + 2

b) 200 + 10·y + x

c) 100·x + 10·y + 2

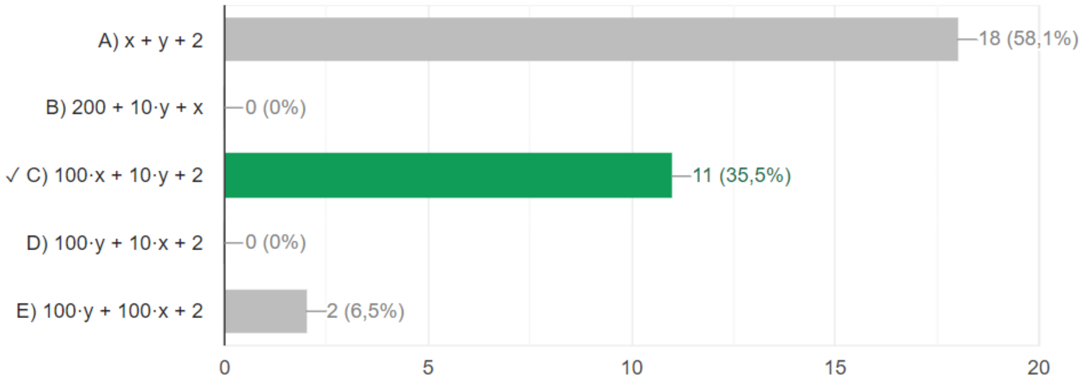
d) 100·y + 10·x + 2

e) 100·y + 100·x + 2

Alternativa correta: C.

O Gráfico 22 mostra um percentual (35,5%) baixo de alunos acertando esta questão, quando comparado às outras questões do teste.

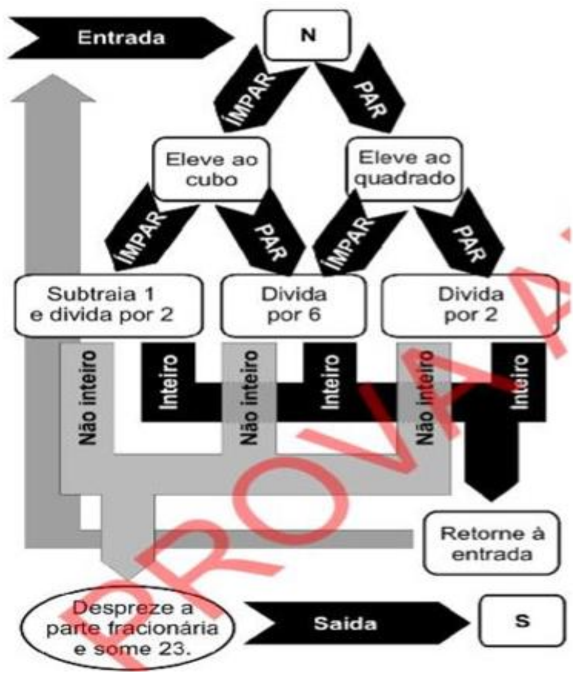
Gráfico 22 – Total de acertos na questão 9 do teste 2



Fonte: o autor (2022)

Esta foi a única questão em que o número de alunos que erraram foi maior dos que acertaram. A maioria dos alunos (58,1%) marcou a alternativa (a), o que sugere que eles não compreenderam bem sobre a representação decimal de um número, e foi um equívoco supor que o assunto já estivesse claro para os alunos, embora o enunciado do problema especificasse essa representação. A falta de tempo e o tema não ter sido enfatizado o suficiente podem ter contribuído para este resultado.

10. (FUNIVERSA/EMBRATUR/ADMINISTRADOR/2011) No diagrama representado na figura abaixo, N é um número natural maior que 23. Existe um valor de N para o qual o valor de saída S é menor do que 47?



a) Sim, e esse valor é único.

b) Sim, e esse valor é um número múltiplo de 7.

c) Sim, e os valores possíveis são números pares.

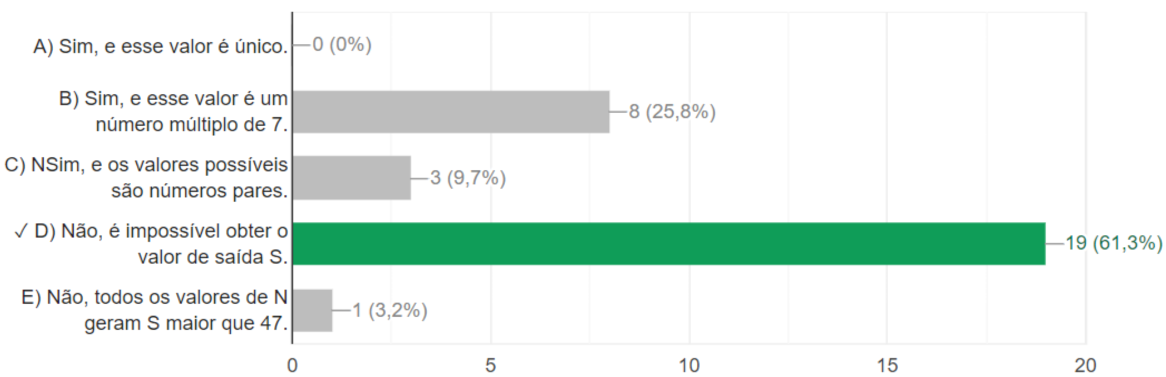
d) Não, é impossível obter o valor de saída S.

e) Não, todos os valores de N geram S maior que 47.

Alternativa correta: D.

Uma boa porcentagem (61,3%) de alunos acertou a questão 10, como mostra o Gráfico 23.

Gráfico 23 – Total de acertos na questão 10 do teste 2

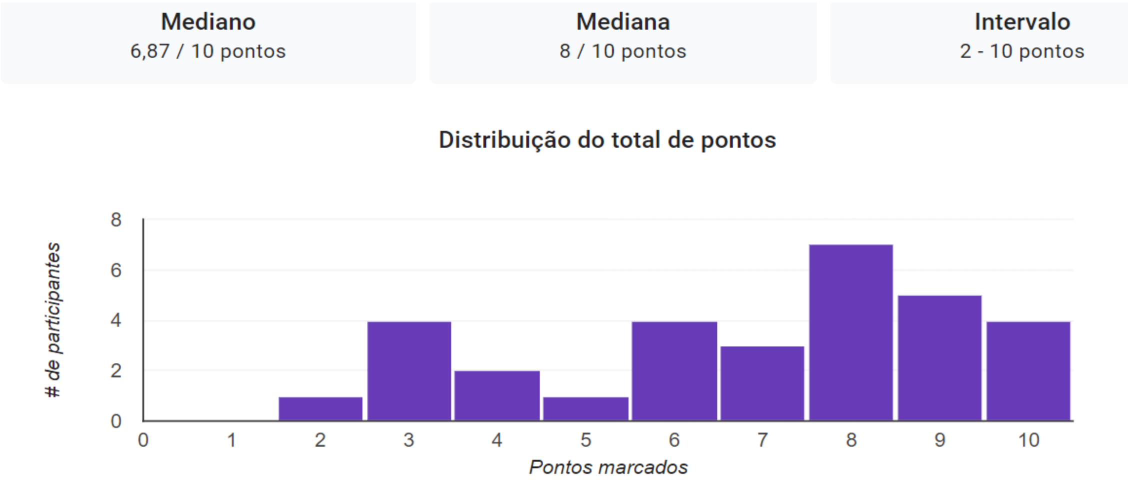


Fonte: o autor (2022)

Para reduzir as possibilidades do diagrama, o aluno devia deduzir o resultado do produto de números pares e de ímpares para concluir que era impossível obter uma saída para qualquer número N natural. O tema abordado neste problema é a paridade de números inteiros.

Finalmente, no Gráfico 24 é apresentado o número de acertos da turma (31 alunos) que participou da avaliação. Dos resultados, podemos constatar que a maioria dos alunos (16 de 31 ou 51.6%) acertou, pelo menos, 8 entre 10 questões, e que todos eles (31) acertaram, pelo menos, duas questões, o que é considerado um êxito – resultado da aplicação da sequência didática.

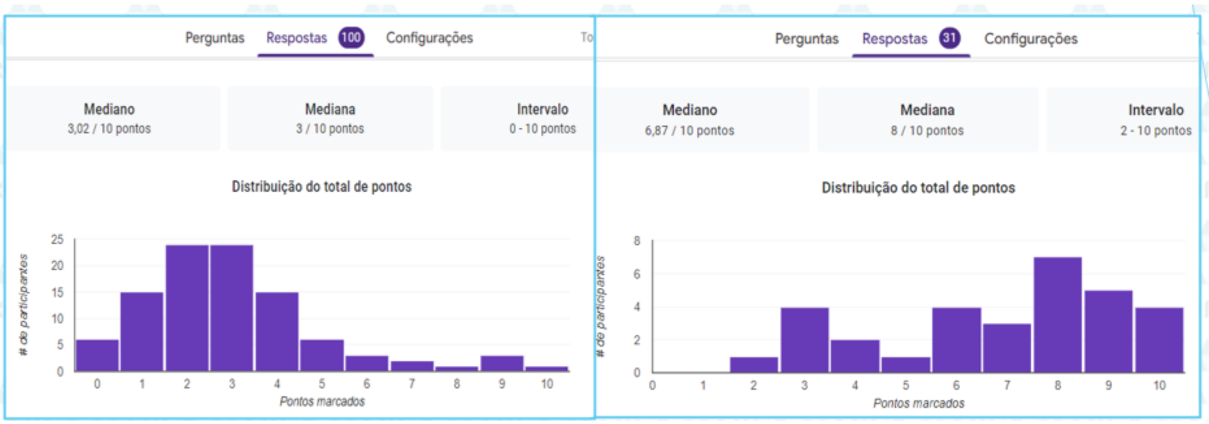
Gráfico 24 – Número de acertos da turma no teste 2



Fonte: o autor (2022)

Para fins de comparação com o desempenho geral dos 100 alunos que realizaram a Avaliação Diagnóstica, a Figura 79 exibe o desempenho dos 31 alunos que participaram da sequência didática.

Figura 79 - Avaliação Diagnóstica Geral e Avaliação Final (Teste 2)



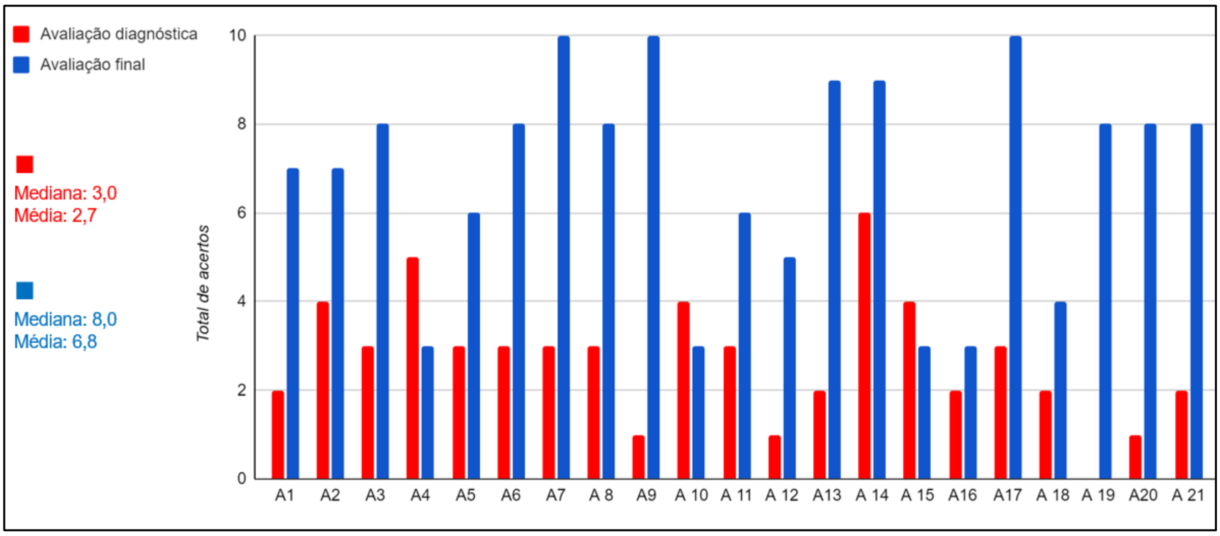
Fonte: o autor (2023)

Podemos perceber nos gráficos da Figura 79 que, no Teste 1 (Avaliação Diagnóstica), a maioria dos alunos acertou, no máximo, três das dez questões apresentadas. Apenas 10% dos alunos conseguiram responder corretamente seis ou mais questões. Por outro lado, no Teste 2 (Avaliação Final), a maioria dos alunos acertou, no mínimo, oito das dez questões propostas, indicando um notável progresso no processo de aprendizagem.

Dentre esses 31 alunos, 21 também realizaram a Avaliação Diagnóstica, e a comparação de seus resultados pode ser observada na Figura 80.

A Figura 80 apresenta os resultados obtidos pelos 21 alunos que realizaram tanto a Avaliação Diagnóstica quanto a Avaliação Final e que estiveram envolvidos na sequência didática. Esses alunos estão identificados no gráfico por A1, A2, A3 e assim sucessivamente, até o A21. É evidente a melhora significativa nas pontuações, o que atesta a eficácia da sequência didática.

Figura 80- Avaliações Diagnóstica e Final dos alunos que participaram da Sequência Didática



Fonte: o autor (2023)

No final do formulário, foi colocada, ainda, uma pergunta no intuito de fazer um levantamento entre os alunos sobre os conteúdos que haviam sido abordados na sequência didática, e se já os haviam estudado em alguma série do Ensino Fundamental. Algumas das respostas se encontram na Figura 81.

Figura 81 – Opinião de alguns alunos acerca do projeto

Comente sobre o que aprendeu neste trimestre em relação aos conteúdos estudados em Matemática. Já havia estudado esses conceitos em alguma série do Ensino Fundamental?

31 respostas

aprendi sobre o algoritmo de Euclides e me familiarizei mais nele para resolver os exercícios, ainda tenho um pouco de dificuldade em divisão e em algumas multiplicações mas sei que estes exercícios que foram passados nas folhas vão me ajudar.

sim,o mdc ja tinha estudado uma vez no ensino fundamental so nao aprendi muito porque o professor nao explicava direito so sabia da prova .

eu aprendi muitas coisas interanssantes q eu achava q nunca iria aprender mais e muito e esperiencia de entrar numa materia nova e enteressante

Estudamos divisão euclidiana, MMC e MDC, algumas propriedades matemáticas, numeros binários. A maioria sim, mas não abordados desta forma.

sim,o mdc ja tinha estudado no ensino fundamental

Algumas coisas sim já outras não.

A gente aprendeu sobre á divisao euclidiana, MMC,MDC Números binarios,Números impares,Números elevados e potentes, porem ja estudamos um pouco disso mais nao abordado dessa forma.

alguns sim outros não.

ja havia estudando mdc e divisão na oitava e na setima serie.eu aprendi algumas formulas novas e revir algumas coisa que ja tinha visto

Já havia estudado,mas não lembrava de nada.E nesse trimestre estudei sobre os codigos binarios

que eu me lembre eu nunca estudei essa materia,fiquei com umas duvidas ainda com relação a essa materia

aprendi,mdc mmc,lemas dos restos.

Aprendi teorema de euclides, lema dos restos... E ja havia aprendido mmc e mdc no quinto ano.

eu aprendi sobre a divisao euclidiana tiver dificildade mais aprendir, tambem aprendi sobre MDC e MMC ja tinha estudado sobre essa materia no 6 ano. o mdc eu ainda tenho que da uma estudada a mais pq ainda me embolo.

eu aprendi sobre a divisao euclidiana ,mmc,mdc e que o resto da divisao tambem tem valor no calculo , no 6 ano eu aprendir um pouco sobre mmc , mdc , e divisao claro nao como estou aprendendo agora.

já estudei mdc e mmc mas não assim. Só fatorava e não tinha problemas. Nunca estudei binário e nem resto.

Nunca aprendi isso.

Fonte: o autor (2022)

Os comentários dos alunos na Figura 81 confirmam que, mesmo havendo estudado (em séries anteriores) um tema ou outro dos tópicos abordados neste projeto, estes não foram apresentados com a metodologia da matemática investigativa.

> Estudamos divisão euclidiana, MMC, MDC, algumas propriedades matemáticas, Números binários. A maioria sim, mas não abordado desta forma (Aluno/a da turma-Figura 81).
>
> A gente aprendeu sobre a divisão euclidiana, MMC, MDC, Números binários, Números ímpares, Números elevados e potentes, porém já abordamos um pouco disso, mas não dessa forma. (Aluno/a da turma-Figura 81).

A aplicação de uma pedagogia investigativa pode ter desempenhado um papel fundamental na promoção do envolvimento ativo dos estudantes no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Isso se deve ao fato de que os alunos foram estimulados a adquirir habilidades de análise de informações, experimentação de ideias, elaboração de argumentos e verificação de conclusões, o que, por sua vez, fomentou um nível mais profundo de comprometimento e resultou em uma compreensão mais rica e significativa do campo da matemática. (ABREU, 2008). Além disso, o contato dos alunos com as tecnologias (Chromebook, celular, jogos etc.) contribuíram para a ampliação das habilidades em explorar conceitos matemáticos de forma mais dinâmica na resolução de problemas. (BRASIL, 2017, p. 536).

Ademais, uma das propostas deste trabalho foi estudar diferentes técnicas para calcular números fundamentais como o MDC e o MMC, com o objetivo de propiciar no aluno o desenvolvimento de uma compreensão mais ampla dos conceitos subjacentes a esses tópicos. Dessa forma, possibilitar um melhor entendimento desses temas e a capacidade de saber aplicá-los em diferentes situações, além de ampliar o seu conjunto de ferramentas e saber identificar/escolher a mais adequada para a resolução de um determinado problema. Portanto, ao incorporar essa abordagem de aprendizagem ativa, podemos esperar que os alunos não apenas adquiram uma compreensão mais profunda do MDC e do MMC, mas também desenvolvam habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico que são essenciais para o sucesso em matemática e em outras áreas do conhecimento. Essa abordagem não apenas torna a aprendizagem significativa, mas contribui para um entendimento mais duradouro dos conceitos.

> Já estudei mdc e mmc, mas não assim. Só fatorava e não tinha problemas. Nunca estudei binário nem resto. (Aluno/a da turma-Figura 81).

Além das manifestações registradas de forma escrita na Figura 81, também tivemos as manifestações orais dos alunos nos debates em sala de aula. A partir disso, foi possível verificar que muitos deles desconheciam as propriedades relacionadas ao algoritmo da Divisão Euclidiana que, na maioria das vezes, é abordado nas aulas com foco na ideia associada ao quociente de uma divisão. Em geral, como mostra essa pesquisa, o resto é visto como sobra ou utilizado para verificar se um número é ou não múltiplo de outro, no entanto, após a aplicação desta sequência didática foi possível notar que os alunos desenvolveram a habilidade de reconhecer quando o resto e suas propriedades fornecem a solução de um problema, como, por exemplo, nas situações/problemas envolvendo calendários. O Lema do Resto, um dos temas não estudados pelos alunos nas séries anteriores, é de fato uma ferramenta bastante útil para resolver problemas que, a princípio, seriam muito trabalhosos (como efetuar cálculos de números com elevados expoentes), além deste poder fornecer informação sobre a repetição de padrões, permitindo a compreensão e a solução de problemas de maneira eficiente. Ao introduzir o Lema do Resto e mostrar como ele pode simplificar problemas aparentemente complexos, os alunos podem ganhar confiança em suas habilidades matemáticas, cultivando uma base sólida para o pensamento crítico, o raciocínio lógico e o desenvolvimento de habilidades analíticas e de resolução de problemas – competências essas essenciais em diversas áreas da vida.

Após a aplicação do teste final em 16/05/2022, não foi possível fazer uma aula para comentar a resolução e ouvir dúvidas dos alunos, pois a execução do projeto tomou todo o primeiro trimestre (que finalizou em 18/05/2022), o que comprometeu parte dos conteúdos programáticos para o período; desse modo, impossibilitando o uso de mais dias de aula para o projeto. Vale destacar que os alunos ficaram quase dois anos sem aulas presenciais regulares devido à pandemia de COVID-19. Portanto, houve a necessidade de revisar vários temas básicos, necessários para a execução da sequência didática.

Com base nesta experiência, embora a Aritmética esteja presente no currículo de Matemática do Ensino Fundamental, acreditamos que retomar alguns tópicos dessa disciplina no Ensino Médio pode ser uma oportunidade de aprofundar conceitos e despertar o interesse dos alunos por esse ramo da Matemática. Para isso, é importante que o professor busque traçar metodologias que levem o aluno a construir seu próprio conhecimento, fazendo uso de ferramentas que possam contribuir no aprendizado, como a utilização de vídeos, jogos, programas computacionais, dentre outros materiais que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem, tornando, assim, as aulas mais dinâmicas e atrativas.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em junho de 2021 começaríamos a executar o projeto em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Olímpio Cunha, em Cariacica-ES, entretanto, houve a necessidade de adiar a programação em vista da baixa assiduidade dos alunos às aulas presenciais, que não eram obrigatórias no Ensino Básico no primeiro semestre de 2021, isso em função do período de pandemia da COVID-19, que se iniciou em março de 2020 e se prolongou para o ano de 2021. Inclusive, nesse ano foi difícil o cumprimento do planejamento anual, pois, além do número reduzido de alunos assistindo às aulas, a presença deles era esporádica, devido ao sistema de revezamento adotado pela escola como medida de distanciamento social. Além disso, poucos alunos possuíam recursos tecnológicos, o que inviabilizava um ensino remoto que atendesse à maioria.

Somente em julho de 2021, o ensino presencial voltou a ser obrigatório no Ensino Básico, mas, com o retorno dos alunos à escola, identificamos que grande parte deles não possuía motivação para frequentar mais o ambiente escolar, além de terem a certeza da aprovação naquele ano, com isso, houve resistência dos estudantes em cumprir tarefas que lhes eram propostas. O planejamento anual já estava comprometido e a defasagem era grande, e, nessa situação, a Superintendência Regional de Educação orientou os professores de Matemática e Língua Portuguesa a reservar duas (2) aulas por semana para trabalhar atividades com descritores específicos por eles determinados. Desta forma, o tempo para cumprir o planejamento anual ficou ainda menor, impossibilitando a inserção do projeto nas aulas presenciais de 2021.

Assim, o projeto apenas começa a ser desenvolvido em fevereiro de 2022. Durante esse período, houve um mês de atraso em virtude de um afastamento médico desta pesquisadora, contudo, após retornar no primeiro dia de abril de 2022, foi possível retomar o projeto, trabalhá-lo no restante do trimestre e concluí-lo em 18/05/2022.

Primeiramente, a avaliação diagnóstica aplicada aos alunos de Ensino Médio evidenciou a defasagem deles quanto ao conhecimento matemático, relativo ao currículo do Ensino Fundamental, algo que já se havia observado em turmas dessa etapa ao longo desses anos de docência. Eles não possuíam conhecimento ou não conseguiam lembrar dos conceitos fundamentais relevantes para o nosso projeto, os quais são essenciais para a nossa pesquisa investigativa. Além disso, estavam acostumados com a abordagem tradicional de ensino, na qual o professor explica o conteúdo e, em seguida, fornece uma série de exercícios para a fixação. A introdução de situações-problemas, nas quais os alunos são incentivados a construir seu próprio conhecimento por meio de testes, conjecturas e análise de hipóteses, foi algo novo e surpreendente para eles. Levou algum tempo para que se adaptassem a esse método. Conseguir que os alunos expusessem suas ideias durante as aulas também foi uma tarefa difícil, devido à timidez e à falta de costume de pensar nos problemas propostos, já que, em geral, estavam acostumados a receber o conhecimento pronto, acabado. Ainda assim, a cada aula os alunos compreenderam pouco a pouco a proposta e se habituaram com o método investigativo, passando a observar, encontrar padrões, testar, verificar hipóteses, conjecturar e justificar afirmações. Além disso, a interação entre eles abriu espaço para a discussão e argumentação em defesa das próprias opiniões e conclusões.

> A interação aluno-aluno tende a ser muito mais forte numa aula com investigações. Esta interação estimula os alunos a descobrir novas relações entre conceitos, proporcionando-lhes mais segurança nas suas ideias matemáticas. Por outro lado, estimula o raciocínio, a criatividade e o poder de argumentação. (TUDELLA, et al., 2000, p. 8)

Utilizando este método para a proposta didática, foi objetivado, em particular, aprofundar os conhecimentos matemáticos relacionados ao Teorema da Divisão Euclidiana, cujos conceitos e propriedades são tratados de forma esparsa e superficial, como constatado na pesquisa dos livros didáticos, que o abordam com enfoque nas ideias associadas ao quociente de uma divisão e omitindo outros elementos importantes, como o resto (da divisão). Ter habilidade para aplicar o algoritmo da divisão não garante, obrigatoriamente, a compreensão dos princípios fundamentais envolvidos nessa operação.

Na sequência didática, foi priorizado o significado de cada componente da relação fundamental, abrindo mão do excesso de repetição de técnicas e exercícios de fixação, optando por uma aula mais dinâmica e significativa, tendo o aluno como protagonista do aprendizado, onde, o que importa, não é apenas o resultado final, mas todas as etapas da construção do conhecimento.

Embora os resultados da avaliação de aprendizagem tenham sido satisfatórios, a execução da proposta demandou bastante tempo, o que comprometeu o currículo programático do 1º trimestre de 2022 – mas este investimento foi recuperado mais tarde (no segundo trimestre) com alunos mais entusiasmados e envolvidos nas aulas. Contudo, proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma abordagem mais detalhada de conceitos já explorados no Ensino Fundamental, com uma metodologia diferenciada como as investigações matemáticas, poderá (re)avivar no discente o interesse pela disciplina de Matemática e potencializar o seu aprendizado. Os conceitos relacionados à aritmética dos Números Inteiros fazem parte do currículo de Matemática do Ensino Básico, entretanto, é comum esses tópicos não serem aprofundados quando introduzidos durante o 6º e 7º anos; períodos nos quais se presume que os alunos não alcançaram ainda plena maturidade em relação a conceitos numéricos. Além disso, após essa etapa, observamos que esses conceitos não são retomados nem nos documentos oficiais, nem nos livros didáticos, conforme constatado em nossa pesquisa, que teve como foco o estudo do "Algoritmo da Divisão Euclidiana e suas propriedades".

Retomar no início do Ensino Médio conceitos relacionados à teoria dos números proporciona aos estudantes a oportunidade de relembrar características importantes desses conceitos e utilizá-los como bases sólidas para a aprendizagem de novos conteúdos, como Função e Álgebra mais avançada. Além disso, contribui para a argumentação matemática, o pensamento crítico, o teste de ideias e conjecturas, e, quando aliados a uma abordagem de ensino investigativo, pode transformar as aulas em experiências interativas e participativas. Quando os alunos estão ativamente envolvidos na construção do seu conhecimento, o resultado vai muito além da memorização de fórmulas ou procedimentos, isto é, eles desenvolvem uma compreensão mais sólida das relações matemáticas subjacentes.

Expandir o horizonte de conhecimento dos alunos ao introduzir tópicos matemáticos mais avançados, que não são tradicionalmente abordados no Ensino Médio, como o Lema dos Restos e o Algoritmo de Euclides, contribui no desenvolvimento de habilidades como a autonomia e pensamento crítico, além de aumentar a motivação dos alunos, pois eles podem ver a Matemática como algo mais do que apenas cálculos simples, tornando o aprendizado mais estimulante e envolvente, que possibilita a eles(as) a compreensão de conceitos matemáticos de maior complexidade de forma acessível, promovendo um entendimento mais profundo e duradouro.

A abordagem aqui proposta, diferente da tradicional, visa explorar a natureza desafiadora e curiosa desses temas, incentivando os alunos a se envolverem mais ativamente no processo de ensino-aprendizagem.

Por fim, o material pedagógico aqui apresentado poderá auxiliar nas aulas dos professores de Matemática, principalmente os que trabalham no Ensino Médio, podendo ser aprimorado, isto é, possibilitando o aperfeiçoamento continuo deste trabalho no intuito de alcançar uma aprendizagem efetiva e satisfatória, pois, como professores, esse é o nosso maior desafio.

REFERÊNCIAS

ABREU, M. d. (2008). *Uma investigação sobre a prática pedagógica: refletindo sobre a investigação nas aulas de Matemática*. São Carlos, SP: Dissertação de Mestrado-PPGE/UFSC. Acesso em 03 de março de 2023, disponível em https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/2438?show=full

ALMEIDA, J. d. (2021). As concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética de professores de matemática da rede pública paulista, sob o olhar da teoria APOS. São Paulo, SP, Brasil: Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Acesso em 29 de 09 de 2023, disponível em https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/24520

BIANCHINI, B. L., & D'ALMEIDA, J. (2019). A teoria elementar dos números nos PCN e na BNCC: um estudo comparativo. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática, 2*(8), 103-113. Acesso em 25 de abril de 2022, disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/103-113/pdf

BOYER, C. (1974). *História da Matemática.* (E. F. Gomide, Trad.) São Paulo: Edgard Blücher.

BRASIL. (1998). *Parâmetro Curricular Nacional: Matemática* (3 ed.). (MEC, Ed.) Brasília: Secretaria de Educação Fundamental.

BRASIL. (2017). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* Brasilia: Ministério de Educação-MEC. Acesso em 28 de fevereiro de 2023, disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192

BROCARDO, J., OLIVEIRA, H., & PONTE, J. (2019). *Investigações Matemáticas na sala de aula* (4 ed.). Belo Horizonte, MG: Autêntica.

CARDOSO, M. L., & GONÇALVES, O. A. (2004). Uma interpretação geométrica do MMC. *Explorando o ensino da Matemática-Atividades, 2*, 78-79.

CARRER, J. J. (2018). A Divisão Euclidiana e seu Resto desde os Anos Iniciais. *1ª edição*. Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática. Acesso em Fevereiro de 2022

CASTRO, S. B., SÁ, P. F., & SILVA, A. K. (2020). O ensino de divisibilidade de números naturais por atividades. Belém, Pará: Dissertação de Mestrado-

PPGEM/UEPA. Acesso em 05 de janeiro de 2021, disponível em http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/570109. 209-227.

CUNHA, J. (2015). Matemática Lúdica na Educação de Jovens e Adultos do Centro de Progressão Penitenciaria do Distrito federal. Catalão, Goiás: Dissertação de Mestrado-PPGE/UFG. Acesso em 10 de janeiro de 2021, disponível em https://profmat-sbm.org/dissertacoes/?aluno=&t

DANTE, L. R. (1996). Livro didático de matemática: uso ou abuso? Brasília, DF, Brasil: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Acesso em 01 de 10 de 2023, disponível em http://emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2375

DANTE, L. R. (2013). *Projeto Teláris: Matemática - 6º Ano* (1a ed., Vol. 1). São Paulo: Ática.

DANTE, L. R. (2013). *Projeto Teláris: Matemática - 7º Ano* (1a ed., Vol. 2). São Paulo: Ática.

DANTE, L. R. (2013). *Projeto Teláris: Matemática - 8º Ano* (1a ed., Vol. 3). São Paulo: Ática.

DANTE, L. R. (2013). *Projeto Teláris: Matemática - 9º Ano* (1a ed., Vol. 4). São Paulo: Ática.

EVES, H. (1995). *Introdução à História da Matemática.* (H. H. Domingues, Trad.) Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP.

FRAZÃO, D. (29 de 07 de 2021). *ebiografia*. Fonte: https://www.ebiografia.com/euclides/

GIMENEZ, J., & LINS, R. C. (2001). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI* (4a ed.). Campinas, SP: Papirus.

GIOVANI JÚNIOR, J. R., & CASTRUCCI, B. (2018). *A Conquista da Matemática - 6º Ano* (4a ed., Vol. 1). São Paulo: FTD.

GIOVANI JÚNIOR, J. R., & CASTRUCCI, B. (2018). *A Conquista da Matemática - 7º Ano* (4a ed., Vol. 2). São Paulo: FTD.

GIOVANI JÚNIOR, J. R., & CASTRUCCI, B. (2018). *A Conquista da Matemática - 8º Ano* (4a ed., Vol. 3). São Paulo: FTD.

GIOVANI JÚNIOR, J. R., & CASTRUCCI, B. (2018). *A Conquista da Matemática - 9º Ano* (4a ed., Vol. 4). São Paulo: FTD.

HEFEZ, A. (2015). *Iniciação à Aritmética.* Rio de Janeiro: IMPA.

HEFEZ, A. (2016). *Aritmética* (2a ed.). Rio de Janeiro: SBM-Coleção Profmat.

IEZZI, G. D. (2018). *Matemática e Realidade* (9 ed.). Pinheiros, São Paulo: Atual.

IMENES, L., & LELLIS, M. (2006). *Matemática para todos (5ª à 6ª série)* (2a ed.). São Paulo: Scipione.

MOUTINHO, I. R. (2014). *Representação Geométrica da Divisão Euclidiana*. Acesso em Fevereiro de 2022, disponível em Geogebra: https://www.geogebra.org/m/xyuuUF7E

OLIVEIRA, Z. C. (1995). Uma interpretação geométrica do MDC. *Revista do Professor de Matemática-RPM, 29*.

PACHECO, M., & ANDREIS, G. (2018). Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3 ano de ensino médio. *Princípia*(38), pp. 105-119. Acesso em 28 de 08 de 2023, disponível em https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/download/1612/806

POLEZZI, M. (2004). Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas? *Explorando o ensino da Matemática, 2*, 87-89.

SALVADOR, H. H. (2012). *Dividindo histórias e opiniões: compartilhando e polemizando a operação de divisão*, 58. Vassouras, Rio de Janeiro: Produto da Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática-Universidade Severino Sombra. Acesso em 28 de fevereiro de 2023, disponível em https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/134642/livro_impressao_Heloisa.pdf?sequence=2&isAllowed=y

SEGADAS, P. C. (2013). *A compreensão do Teorema da Divisão Euclidiana: do conceito à análise do resto*. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado PPGEC/CEFET/RJ.

TUDELLA, A., FERREIRA, C., BERNARDO, C., PIRES, F., FONSECA, H., SEGURADO, I., & VARANDAS, J. (2000). A dinâmica de uma aula de investigação. *Academia Edu*, 10. Fonte: https://www.academia.edu/13643285/Din%C3%A2mica_de_uma_Aula_com_Investiga%C3%A7%C3%B5es

WALL, E. (2014). *Teoria dos números para professores do ensino fundamental.* (R. Cataldo Costa, Trad.) Porto Alegre: AMGH.

ANEXO I

Habilidades relativas à temática Números no Ensino Fundamental II conforme a BNCC

No 6º Ano:

Tabela 21 – Habilidades relacionadas à unidade temática Números no 6º ano

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
NÚMEROS	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e números racionais representados na forma decimal.	**(EF06MA01**) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. **(EF06MA02)** Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
	Operações (adição, subtração, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	**(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
	Fluxograma para determinar paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	**(EF06MA04)** Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. **(EF06MA06**) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação adição e subtração; cálculo da fração de um número natural, adição e subtração de frações	**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	**(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
	Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	**(EF06MA12**) Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”	**(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: (BRASIL, Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2017)

No 7º Ano:

Tabela 22 – Habilidades relacionadas à unidade temática Números no 7º ano

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
	Múltiplos e divisores de um número natural	**(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
	Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	**(EF07MA02)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

NÚMEROS	Números Inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA03)** Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. **(EF07MA04)** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	**(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas, que têm a mesma estrutura, podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: (BRASIL, Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2017)

No 8º Ano:

Tabela 23 – Habilidades relacionadas à unidade temática Números no 8º ano

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
	Notação científica	**(EF08MA01)** Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
	Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
NÚMEROS	O princípio multiplicativo da contagem	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

	Porcentagens	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
	Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Fonte: (BRASIL, Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2017)

No 9º Ano:

Tabela 24 – Habilidades relacionadas à unidade temática Números do 9º ano

UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
NÚMEROS	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	**(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
	Potências com expoentes negativos e fracionários	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
	Números reais: notação científica e problemas	**(EF09MA04)** Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	**(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Fonte: (BRASIL, Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2017)

ANEXO II

Habilidades relativas à temática Números no Ensino Médio conforme a BNCC

Figura 82 – Habilidades relacionadas às competências específicas de “Números e Álgebra” - BNCC

NÚMEROS E ÁLGEBRA
HABILIDADES
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Fonte: (BRASIL, 2017, p. 543)

Figura 83 – Habilidades relacionadas às competências específicas de “Números e Álgebra” - BNCC

NÚMEROS E ÁLGEBRA
HABILIDADES
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Fonte: (BRASIL, 2017, p. 544)