UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JEFFERSON TORRES MACHADO

A METODOLOGIA DE ENSINO SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA ABORDAGEM DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

REDENÇÃO - CEARÁ
2023

JEFFERSON TORRES MACHADO

A METODOLOGIA DE ENSINO SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA ABORDAGEM DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares.

REDENÇÃO - CEARÁ

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Machado, Jefferson Torres.

M129m

A metodologia de ensino sequência fedathi: Uma abordagem da geometria euclidiana plana na 1ª série do ensino médio / Jefferson Torres Machado. - Redenção, 2023.
90f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientadora: Profª Dra. Danila Fernandes Tavares.

1. Matemática - Ensino dinâmico. 2. Aprendizagem protagonista. 3. Pensamento lógico. I. Título

CE/UF/Dsibiuni CDD 510.7

JEFFERSON TORRES MACHADO

A METODOLOGIA DE ENSINO SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA ABORDAGEM DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 29/09/2023

BANCA EXAMINADORA

Dra. Danila Fernandes Tavares (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará - UFC

Dedico este trabalho a Deus, à minha esposa Késsia, aos meus pais José e Aurinha, aos meus irmãos Juarez e Jallyson.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por me permitir superar os obstáculos encontrados nessa jornada.

À Secretaria de Educação do Ceará por possibilitar uma experiência de aprimoramento da prática docente no cenário estadual através da iniciativa PROFMAT-SEDUC.

À Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares, pela paciência, incentivo e por despertar uma melhor versão minha durante a execução desse trabalho sob sua orientação.

À minha amada esposa, Késsia Costa, pela compreensão nos momentos que não pude estar presente em razão deste trabalho e por acreditar em mim nas fases vividas até aqui.

Aos professores da banca examinadora, Dra. Maria José Costa dos Santos (UFC) e Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (UNILAB), por dedicarem tempo para compartilharem valiosas contribuições à presente dissertação.

Aos professores do PROFMAT-UNILAB pelos relevantes ensinamentos necessários à minha formação enquanto professor da escola básica.

Aos meus colegas de turma, Joabe Damasceno, Márcio de Lacerda e Paulo César, pelo apoio, aprendizados e risadas compartilhadas.

Aos amigos Rafael Souza, Tiago Estevam, Toni Zael, Valberson Silva, Kenia Beserra e Lorena Fidélis, que não mediram esforços para me auxiliarem na construção do trabalho.

Aos amigos Franzé Souza e Paulo Rodrigues, pelas instruções e palavras de encorajamento tão importantes nessa fase de estudos.

Aos estudantes da EEMTI Visconde do Rio Branco, por participarem ativamente das atividades propostas na pesquisa.

À diretora da escola, Alnedi Costa, pela amizade e suporte para o desenvolvimento do trabalho.

"*Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma, continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra.*"
(ALVES, 2012, p. 4)

RESUMO

A geometria é relevante para a compreensão das propriedades dimensionais da realidade e produção de um cenário mais favorável à existência humana por permitir que os sujeitos atuem de modo crítico sobre o mundo. No entanto, alguns desafios têm se apresentado no cenário escolar, prejudicando que estudantes e professores desempenhem uma relação favorável à aquisição desse conhecimento. Assim, o presente estudo buscou analisar a Sequência Fedathi como alternativa metodológica para o ensino de Geometria Plana na 1ª série do ensino médio a partir das concepções da didática da matemática e pesquisa ação de viés qualitativo. Dito isso, foram aplicados questionários compostos de perguntas abertas e realizadas sessões didáticas fundamentadas pela Sequência Fedathi para responder como essa metodologia pode contribuir para a aprendizagem em geometria. Nesse contexto, percebeu-se a necessidade de mudanças no modo de ensino predominante nas escolas, o método convencional, dado que não tem respondido às exigências por aulas dinâmicas e interativas nas quais os estudantes elaboram o pensamento lógico-dedutivo sem se limitarem ao uso de fórmulas memorizadas para solucionarem os problemas. Observou-se também que a Sequência Fedathi, experimentada nessa pesquisa, produziu o estímulo postulado pelos estudantes com a inserção de elementos importantes para a aprendizagem, como o contraexemplo e o acordo didático. Nessa perspectiva, os professores agem como mediadores do processo formativo, enquanto os aprendizes atuam de forma autônoma e são protagonistas da própria formação. Por fim, fundado nas reflexões oriundas dessa investigação, conclui-se que a Sequência Fedathi é uma proposta formativa significativa para a obtenção de melhores resultados no ensino de geometria plana quando comparados com a metodologia convencional, pois os princípios basilares da metodologia Fedathi mostraram-se eficientes para o ensino de geometria plana.

Palavras-chave: Ensino dinâmico. Aprendizagem protagonista. Pensamento lógico.

ABSTRACT

Geometry is relevant for understanding the dimensional properties of reality and producing a more favorable scenario for human existence by allowing subjects to act critically on the world. However, some challenges have arisen in the school scenario, hindering students and teachers from having a favorable relationship with the acquisition of this knowledge. Thus, the present study sought to analyze the Fedathi Sequence as a methodological alternative for teaching Plane Geometry in the 1ª high school series based on the concepts of mathematics didactics and action research with a qualitative bias. That said, questionnaires composed of open questions were administered and didactic sessions based on the Fedathi Sequence were held to answer how this methodology can contribute to learning in geometry. In this context, the need for changes in the predominant teaching method in schools, the conventional method, was perceived, as it has not responded to the demands for dynamic and interactive classes in which students develop logical-deductive thinking without limiting themselves to the use of memorized formulas to solve problems. It was also observed that the Fedathi Sequence, experimented in this research, produced the stimulus postulated by the students with the insertion of important elements for learning, such as the counterexample and the didactic agreement. From this perspective, teachers act as mediators of the training process, while apprentices act autonomously and are protagonists of their own training. Finally, based on the reflections arising from this investigation, it is concluded that the Fedathi Sequence is a significant training proposal for obtaining better results in the teaching of plane geometry when compared to the conventional methodology, as the basic principles of the Fedathi methodology proved to be efficient for teaching plane geometry.

Keywords: Dynamic teaching. Protagonist learning. Logical thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria é essencial ao desenvolvimento de um raciocínio que possibilite ao estudante compreender as propriedades dimensionais da realidade humana e atuar criticamente sobre o mundo de modo a produzir um cenário mais favorável à sua própria existência.

De acordo com Sousa *et al.* (2021), a geometria destacou-se nos últimos anos na qualidade de fragmento curricular por meio de pesquisa e reconhecimento de documentos reguladores a exemplo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), enfatizando o seu mérito para solução de problemas concretos. Além disso, o autor aponta a sua relevância para o êxito do estudante em avaliações externas como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Ademais, apesar da visualização ser necessária para que os estudantes consigam manipular situações em busca pelo saber, os discentes têm apresentado bloqueio ao estudarem geometria, notadamente por falharem na abstração para a compreensão da figura presente nas questões (SANTOS; ALVES, 2022).

Em grande parte, os obstáculos apresentados nos processos de ensino e aprendizagem dessa matéria surgem das metodologias empregadas pelos professores que não respondem aos anseios dos aprendizes (LORENZATO, 1995, p. 5). E, apesar das tentativas de mudanças, ainda se nota o conhecimento sendo transmitido ao estudante de forma diretiva, baseada numa aula expositiva convencional (FELÍCIO *et al.*, 2021).

Diante disso, os pesquisadores estão engajados em estabelecer uma prática que produza aprendizado com eficiência, fato que justifica o emprego de métodos que otimizem a prática docente. Nesse contexto, emerge uma metodologia inovadora, intitulada Sequência Fedathi, que auxilia o docente na mediação do saber matemático para o estudante (SANTOS *et al.*, 2019).

A Sequência Fedathi (SF) é um método de ensino concebido pelo professor Dr. Hermínio Borges Neto, coordenador do Laboratório de Pesquisa Multimeios - MM da Universidade Federal do Ceará (UFC) e possui em sua essência pedagógica e formativa a mudança de postura do professor, a partir de mediações que posicionem o estudante em situação de aprendizagem (SANTOS, 2017).

A SF é baseada em quatro etapas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova. Na Tomada de Posição, o professor propõe um problema para o estudante apresentar uma solução a partir dos seus próprios conhecimentos. A Maturação ocorre quando o estudante busca a compreensão do problema e em seguida parte à procura da resposta. A Solução é o momento em que o estudante apresenta sua proposta de resolução, podendo ser o resultado esperado ou não. E na Prova, o professor discute as ideias redundantes dos estudantes, além de simplificar, sofisticar ou ainda generalizar a situação formulada (MENEZES *et al.*, 2016).

Os estudantes apresentam domínios distintos sobre o que se pretende ensinar e isso remete ao entendimento sobre a perfeita percepção, por parte do professor, de um conjunto de conhecimentos adquiridos pelos estudantes e que seja compreendido por todos. Este conjunto de conhecimentos compreendidos entre os estudantes e conhecidos pelo professor é denominado *plateau* (BEZERRA, 2017; BORGES NETO, 2018, p. 68-69).

Assim, surge uma pergunta: Como a Sequência Fedathi pode contribuir para a aprendizagem em geometria na 1ª série do ensino médio? A partir dessa indagação e da conjuntura descrita acima, o presente trabalho objetivou analisar a Sequência Fedathi como proposta metodológica para o ensino de Geometria Plana na 1ª série do ensino médio e, especificamente, (i) refletir sobre as dificuldades para o ensino e aprendizagem de Geometria Plana na perspectiva da metodologia de aulas convencionais; (ii) caracterizar as etapas para a aplicação da Sequência Fedathi; (iii) discutir sobre os processos de ensino e aprendizagem no contexto da Geometria Plana com enfoque na Sequência Fedathi.

A seguir, apresenta-se como foi estruturado o texto desse estudo. No primeiro capítulo, divulgou-se a introdução, com a contextualização do cenário de investigação, a problemática, o objetivo geral, os objetivos específicos e a divisão da escrita subsequente. No segundo capítulo, foram abordadas noções relativas à didática da matemática, à geometria com enfoque na congruência de triângulos e aos conceitos que envolvem a Sequência Fedathi. No terceiro capítulo, o percurso metodológico da dissertação. No quarto capítulo, os resultados e análises realizadas mediante os objetivos da investigação. E, no quinto capítulo, as considerações finais sobre o tema em questão.

2 METODOLOGIAS DE ENSINO

O ensino de matemática enfrenta grandes desafios relatados por diversos profissionais e estudantes. Nesse sentido, serão abordadas nessa seção, algumas das principais concepções sobre a educação matemática, em particular, da geometria. O contexto descrito pode assim contribuir para uma mudança no processo formativo a partir da reflexão sobre a prática docente e teorias que explicam a aprendizagem dos estudantes na escola.

2.1 Didática da Matemática

A palavra didactika provém do grego didasko, e designa o relativo ao ensino, à atividade formativa. De acordo com Brousseau (1986), Comenius a definia como "a arte de ensinar" e seria um método único, válido para todas as matérias. Não haveria a necessidade de métodos personalizados visto que as variações entre estes métodos seriam mínimas (TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

Os debates e preocupações com o ensino de Matemática adquiriram maior destaque e adeptos de diferentes áreas, como o psicólogo John Dewey (1859 – 1952), que sugeriu a reavaliação do ensino de Matemática, propondo uma relação mais cooperativa entre professor e estudante, pautada menos no formalismo, enfatizando a integração entre as disciplinas e a intuição matemática. Morris Kline (1908 - 1992) também defendeu mudanças, tecendo críticas severas ao movimento posteriormente denominado Matemática Moderna (ANTUNES *et al.*, 2019).

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) surgiu, a princípio na Europa e Estados Unidos, com forte influência na discussão acerca de determinadas regras relativas ao ensino para obtenção de uma matemática mais contextualizada e acessível. Contudo, o movimento, sistematicamente, desconsiderou as diferenças culturais regionais, negligenciando as condições internas ao sistema de ensino de cada sociedade, além de enfatizar a matemática acadêmica em desfavor da relevância da matemática cotidiana. Tais fatores resultaram numa desestruturação da educação global de matemática, culminando em seu vertiginoso insucesso (BURIGO, 1989; DORIER, 2014; ALVES, 2017; CAMILO *et al.*, 2021).

A didática da matemática (DM) surgiu na França da década de 70 motivada pela preocupação com o ensino a fim de contornar as dificuldades na transmissão dos saberes matemáticos (ALMOULOUD, 2019). Compreende-se como campo de pesquisa da transmissão dos saberes matemáticos e suas reformas (BROUSSEAU, 2008, p. 16), ampara-se em teorias e metodologias do conhecimento humano e social, abordando questões relativas à formação do professor de Matemática (PONTE, 2020) e apresentou alterações no ensino de Matemática (DOUADY, 1984; ALVES, 2016).

Segundo Almouloud (2019), a Didática da Matemática dedicou-se inicialmente às dificuldades na transmissão dos saberes matemáticos em face aos requisitos impostos pela própria matemática. Nesse cenário, o autor afirma que

> [...] a Didática da Matemática é definida como sendo a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e aprendizagem, mais especificamente, é o estudo das situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, quanto do tipo de aprendizagem que elas possibilitam (ALMOULOUD, 2019, p. 148).

Para Brousseau (2008, p. 53), o ensino, concebido como experiência social na qual o estudante aprende um tema consolidado ou em via de consolidação, define a didática da matemática como ciência dos meios que permitem a transferência e acomodação de saberes matemáticos relevantes à humanidade.

A preocupação com o aprimoramento do ensino, proporcionou a criação dos Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM) na França a partir da década de 1980, viabilizando o progresso de estudos considerando o professor, o sistema educacional e o estudante (DOUADY, 1984; ALVES, 2016). Preliminarmente, os IREM investiram na formação complementar dos professores de matemática e daqueles que viriam a ensinar essa disciplina nas escolas (GÁLVEZ, 1996). A prática docente esteve em evidência e as pesquisas apoiaram-se sobre o objeto a ser ensinado pelo professor e o modo de aplicá-lo a fim de estabelecer o conhecimento (ALMOULOUD, 2019).

A didática da matemática mobiliza a cognição matemática e nessa concepção, o professor, enquanto agente dessa mobilização, deve compreendê-la além da perspectiva do pragmatismo, em razão da aprendizagem não se restringir apenas a questões de métodos e requer daquele que ensina o entendimento de que não é viável mobilizar qualquer aprendizagem, de modo eficiente, ignorando como se aprende (SILVA, 2015; COSTA; GHEDIN, 2022). Assim, os pesquisadores compreenderam também a necessidade de estudos acerca de toda a estrutura educativa, como por exemplo, o currículo (ALMOULOUD, 2019).

Os currículos eram supervisionados por matemáticos notáveis objetivando o fornecimento de uma quantidade escassa de técnicas matemáticas eficientes que mantinham o rigor matemático (DOUADY, 1995, p. 2; ALVES, 2016) e passam por contínuo aperfeiçoamento. Contudo, deve-se atentar aos diferentes currículos que existem: o currículo oficial (o programa), o currículo disposto em materiais, o currículo previsto por professores, o currículo executado na aula, o currículo assimilado pelos estudantes e o currículo considerado nas avaliações (ROBITAILLE, 1980; ALMEIDA; MATOS, 2014; PONTE, 2020).

Em meio às diferentes questões observadas pela Didática da Matemática, devemos destacar o papel das tarefas no cenário internacional. Frequentemente, o termo "atividade" assume a conotação de tarefa. Porém, na teoria educacional, uma dada tarefa planejada pelo professor produz múltiplas atividades em diferentes estudantes, com consequências distintas em relação à aprendizagem. Portanto, o conhecimento adquirido na aula de matemática deriva sobretudo da atividade e da reflexão que efetuada pelos estudantes sobre tal atividade (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986; PONTE, 2020).

Chevallard (1982) retrata os princípios da transposição didática que fundamentam a didática da Matemática como ciência e explicam a relação entre o conhecimento consolidado no domínio do saber matemático e aquele conhecimento matemático ensinado (KLUTH; ALMOULOUD, 2020).

Nesse contexto, Guy Brousseau desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas, baseado na ideia da determinação do conhecimento ou saber matemático a partir de uma situação, isto é, mediante a ação entre pessoas intencionadas à aquisição de um saber. Sendo assim, a situação deve ser assimilada como um modelo de ensino, tanto como condição para uma relação didática particular com o conhecimento (relação professor – estudante – saber) quanto como um recurso eficiente no processo de ensino e aprendizagem (BROUSSEAU, 1996; SOUZA; LIMA, 2014).

Na perspectiva dessas discussões, reiteramos que a didática da matemática não está preocupada com a proposição de modelos que solucionem problemas específicos relativos ao processo educativo. Todavia, essa ciência objetiva a descrição e a explicação de fenômenos próprios das relações entre o ensino e a aprendizagem de um certo tópico do saber; e a análise sobre o nível de influência de cada situação didática para o progresso dos estudantes e da produção de conhecimentos na relação pedagógica. Assim sendo, são relevantes para a didática tanto as situações promissoras quanto aquelas que não tiveram sucesso (GÁLVEZ, 1996; ALMEIDA; LIMA, 2013).

2.2 Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas idealizada por Guy Brousseau na França, se caracteriza como um padrão teórico que expressa assuntos matemáticos, evidencia algumas situações elementares, serve de fundamento teórico para novos trabalhos de pesquisa no campo didático e para a atividade de professores de matemática (TEIXEIRA; PASSOS, 2013), além de suscitar o protagonismo do estudante na elaboração de seu conhecimento (BROUSSEAU, 2008; SANTOS; ALVES, 2022).

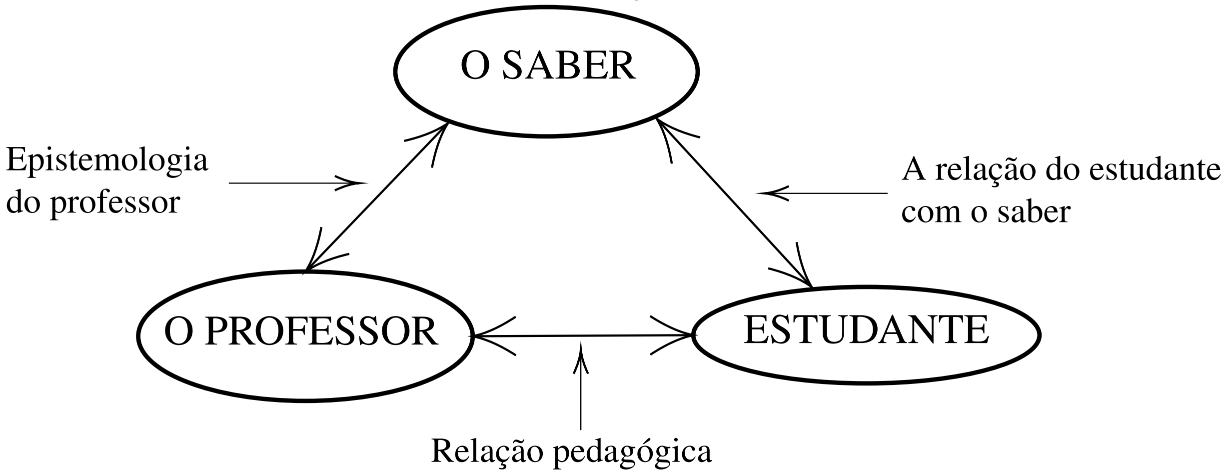
O conceito prévio para a compreensão da Teoria da Situações Didática é o de "situação" ou precisamente de "conjunto de situações" organizada pelo professor para permitir uma aprendizagem (ALMOULOUD, 2019). Denomina-se situação o padrão de relação de alguém com um ambiente em particular que define um conhecimento, como mecanismo de obtenção de resultado satisfatório nesse ambiente. Por vezes, essas situações demandam todos os saberes como pré-requisitos, já outras possibilitam ao sujeito a construção de um novo conhecimento (BROUSSEAU, 2008, p. 19–20).

De acordo com Almouloud (2016), o objetivo da teoria é configurar um processo de aprendizagem através de situações reprodutíveis com potencial para provocar mudanças em um conjunto de comportamentos dos estudantes. Essas mudanças caracterizam a aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos/saberes em decorrência de uma aprendizagem significativa.

A apresentação de uma situação adequada pelo professor é valiosa para o progresso da aprendizagem do estudante. Desse modo, a centralidade dessa teoria está nas situações didáticas, que permitem uma interação diretamente relacionada com o triângulo didático: professor, o saber e o estudante (SILVA *et al.*, 2020).

O esquema do triângulo didático, ilustrado na Figura 1, expressa o vínculo direto que qualquer uma das partes mantém com as demais, sem interferências. Conforme Brousseau (1997, p. 22,23,35), o professor transforma o saber científico - saber sábio - no saber a ensinar a partir de suas concepções epistemológicas, num processo intitulado por Yves Chevallard de transposição didática. O estudante, por sua vez, relaciona-se com o saber atuando de modo semelhante ao pesquisador matemático, isto é, construindo matemática. Enfim, professor e estudante simulam em sala de aula uma sociedade científica, produzindo reflexão sobre a resposta do problema proposto a partir da aplicação de conceitos prévios e da aquisição de um novo conhecimento pelo estudante (GONÇALVES, 2014).

Figura 1 – Triângulo didático



Fonte: Adaptado de Almouloud (2010, p. 32).

Brousseau (1996) indica que a situação mais eficiente para o aprendizado decorre do meio que propõe uma resistência balanceada ao estudante, sendo denominado de *milieu* antagonista. De outro modo, se os conhecimentos anteriores dos estudantes estiverem muito distantes dos novos, o *milieu* será ineficaz. Se o professor exagerar no auxílio ao estudante, será extinto o papel antagonista do mecanismo e instalado um *milieu* aliado, comprometendo a participação do estudante no processo instrutivo (SILVA *et al.*, 2015).

Assim, a definição de *milieu* contém além do problema matemático, as peculiaridades dos sujeitos e um conjunto de relações essencialmente matemáticas, remodeladas conforme o conhecimento é produzido, alterando dessa maneira a realidade com a qual há interação (MARGOLINAS, 2002; CARMO; FONSECA, 2016). E as conexões entre professor e estudante referentes às interações do discente com o *milieu* são caracterizadas pela ideia de contrato didático, ou seja, por um conjunto de acordos recíprocos entre docente e discente, alguns explícitos e outros não, que pautam as relações existentes entre eles na relação didática e permitem a ambos, mas não precisamente, condições favoráveis à aprendizagem (TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

De acordo com Azevedo *et al.* (2018), as situações didáticas, ilustradas na Figura 2, podem ser classificadas em quatro fases: ação, formulação, validação e institucionalização.

- Fase de Ação: Neste momento, há o contato inicial dos estudantes com a situação proposta. O professor, desinteressado em formalizações ou coerência em escrita, deve incentivar soluções experimentais. A comunicação estabelecida pelos pares é realizada em linguagem, usual, coloquial. Existe a expectativa por respostas de natureza intuitiva e empírica.

- Fase de Formulação: Nesta fase, o professor deve promover a colaboração entre os estudantes, possibilitando a comparação das soluções parciais e favorecendo a identificação de padrões. É esperado que surja a necessidade de um diálogo sistemático que admita o compartilhamento de dados e correlações satisfatórias, porém sem interesse excessivo em linguagem matemática formal.
- Fase de Validação: Neste instante, é necessária a adoção de uma linguagem matemática mais precisa, porque, nesse estágio, os estudantes apresentarão, de modo coletivo ou individual, suas conclusões. O restante da turma será responsável pelo julgamento acerca da pertinência/precisão das conclusões elaboradas, fato que justifica o cuidado na comunicação.
- Fase de Institucionalização: Fase final para a efetivação da situação didática. O professor deve analisar e sintetizar as respostas dos estudantes, apresentando-lhes a formalização matemática prevista para o assunto selecionado, considerando as soluções e elaborações divulgadas pelos discentes, discutindo as noções convergentes e recorrendo aos erros para explorar o conteúdo.

Figura 2 – Fases das situações didáticas

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma interação será didática se, e somente se, um indivíduo expressar o seu intuito em remodelar o repertório de conhecimentos do outro (as vias de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as influências culturais) (BROUSSEAU, 2008, p. 53). Assim, a situação adidática é descrita pelo esforço individual do estudante, em certas etapas de aprendizagem. Caso o educando tenha problemas na resolução de uma situação adidática, o educador deve manifestar intenção de direcioná-lo, configurando, dessa forma, uma situação didática. Portanto, uma situação adidática pode converter-se em situação didática (BROUSSEAU, 1986; TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

Para Gonçalves (2014), a TSD contrapõe à educação clássica da Matemática, pela qual o professor transmite o conhecimento, de modo expositivo e impositivo, depositando-o no estudante que permanece indiferente e acrítico, tal como na "ensino bancário" definido por Freire (1975).

2.3 Transposição Didática

A noção de "Transposição Didática" surgiu no ano de 1975, apresentada por Michel Verret, a partir do seu interesse pela ação humana que tem como objetivo a transmissão de saberes (ALMOULOUD, 2011) e para entendê-la, podemos fazer uso do conceito de transposição didática utilizado por Chevallard e Joshua (1982) no contexto didático francês, pois permite a compreensão sobre as mudanças que um saber experimenta até a sua prática docente (SILVA; ABAR, 2016).

A Teoria da Transposição Didática é organizada sobre o sistema de ensino, constituído por cientistas, pais, gestão educativa, dentre outros, e sobre o sistema didático, constituído por professores, estudantes e o saber (PEREIRA *et al.*, 2018), proporcionando a transição do conhecimento científico para o conhecimento a ser ensinado, assim como o modo deste conhecimento ingressar à sala de aula (CHEVALLARD, 1991; SOUSA *et al.*, 2021).

Nestes termos, Yves Chevallard estabelece que:

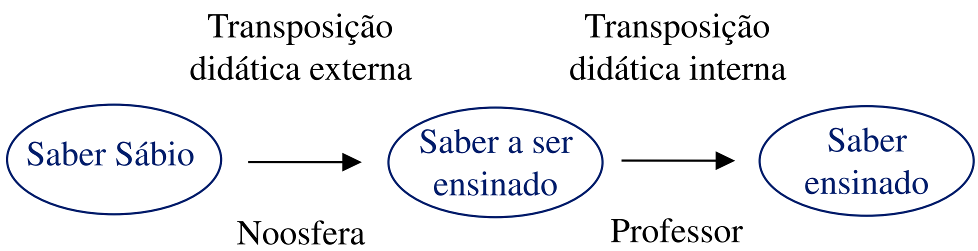
> Um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, passa então por uma série de transformações adaptativas que o tornam apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho"que transforma um objeto de saber a ensinar num objeto de ensino chama-se transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 45).

A efetivação da Transposição Didática (TD) demanda a transição do saber científico para o saber escolar, em razão dos objetivos da comunidade acadêmica diferirem da finalidade da escola. Assim, o saber chega à sala de aula diferente do saber produzido no campo científico oportunizando o ensino (CHEVALLARD, 1991; SOUSA *et al.*, 2021).

A transformação inaugural do saber sábio em saber a ensinar é chamada de transposição didática externa e transcorre fora da sala de aula. O saber a ensinar manifesta-se nos instrumentais pedagógicos, pelo fato de revelarem as orientações do projeto social de ensino e as intervenções da noosfera (AGUIAR, 2016). Para Chevallard, a noosfera é o campo de interação entre a sociedade e o sistema de ensino (professor-estudante-saber). Nesse contexto, são discutidos o currículo, com análise dos objetos de saber a serem escolarizáveis, e as exigências sociais que o professor deve se apropriar na sua formação (PEREIRA *et al.*, 2018).

Quando o saber a ensinar converte-se em saber ensinado, temos a transposição didática interna, com a colaboração do professor, ao planejar as aulas baseando-se no livro didático, por exemplo (AGUIAR, 2016). O professor de matemática do ensino básico comunica-se com a matemática científica, como objeto de estudo, e com a matemática básica, como objeto de trabalho na escola. Desse modo, conforme a Figura 3, o docente transita entre o saber científico e o saber a transmitir na educação básica (PEREIRA *et al.*, 2018), atuando como mediador do chamado trabalho interno de transposição (CHEVALLARD, 1991; SOUSA *et al.*, 2021).

Figura 3 – Transposição didática



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os conteúdos ao serem submetidos às adaptações, constituem-se em verdadeiras criações didáticas, nome dado por não existirem quando o saber científico original fora produzido, que se fazem indispensáveis pelas determinações do exercício didático, a fim de favorecer a apropriação, pelos estudantes, do conhecimento em questão (CIVIERO; SANT'ANA, 2013).

Segundo os estudos de Chevallard, é possível questionar a finalidade de um saber em específico integrar os programas de ensino. Por exemplo, qual a conexão desse saber com o saber científico? Ou, ainda, quais reformulações, adaptações e sínteses foram efetivadas? A TD tem na sua gênese a intenção de analisar o saber ensinado e questionar se permanece adequado às expectativas de ensino e de formação (AGUIAR, 2016).

Nesse cenário, a transição do saber sábio para o saber a ensinar pode gerar erros conceituais no objeto ensinado. Os agentes do sistema de ensino, comunidade científica e, principalmente, o professor, por atuar mais diretamente no sistema, são os responsáveis pela vigilância epistemológica a fim de evitarem tais distorções (PEREIRA *et al.*, 2018). Chevallard usa a expressão vigilância epistemológica para a ação que visa identificar o papel do saber ensinado na conjuntura de um projeto de ensino em específico (AGUIAR, 2016). Assim, esse processo garante o distanciamento necessário entre o saber sábio e o saber ensinável e evita que a separação produza as distorções conceituais ao objeto de saber (PEREIRA *et al.*, 2018).

Outro elemento da teoria da TD é a cronogênese do saber. Chevallard define a cronogênese do saber como o tempo exigido para o ensino e aprendizagem dos saberes escolares. Para o autor, esse tempo é subdividido em tempo burocrático e tempo didático. O tempo didático é aquele onde o processo de ensinar e aprender é cumprido. O professor, por possuir um conjunto de saberes mais complexos que o estudante, indica a quantidade de aulas para ensinar cada conteúdo. Esse exercício é realizado objetivando o cumprimento do cronograma - tempo burocrático, isto é, aquele que determina o início e o término do trabalho do professor (ALMEIDA; JÚNIOR, 2020).

Sobre as diferenças em relação ao saber entre o professor e o estudante, tem-se a topogênese, relativa à dimensão e ao domínio do objeto de saber que o professor detém em comparação ao estudante. Ademais, o professor domina as técnicas para ensinar, ou seja, para que o estudante desenvolva além da dimensão conceitual do objeto de saber, as competências e as capacidades críticas (CHEVALLARD, 1991; PEREIRA *et al.*, 2018).

Segundo Filho (2000), as diretrizes estabelecidas por Chevallard e Joshua (1982) fundamentam o desenvolvimento da pesquisa. Tais regras, segundo Silva e Abar (2016), podem ser resumidas como:

- Regra 1 - Reformar o saber escolar: O desenvolvimento e o crescimento da produção científica são intensos, logo faz-se necessária a modernização do saber abordado na escola. Os modelos e teorias produzido pela comunidade científica impõem a inserção desses novos conhecimentos nos programas de formação de futuros educadores;
- Regra 2 - Renovar o saber a ensinar: Há a possibilidade da supressão de saberes ou conhecimentos específicos, que foram difundidos em larga escala, abrindo espaço para introdução do novo, justificando a atualização curricular;
- Regra 3 - Associar saber “antigo” com saber “novo”: A inclusão de um novo objeto de saber é otimizada se articulada com o antigo. O novo é apresentado de modo a explicar o

conteúdo antigo, e o antigo garante validade ao novo;

- Regra 4 – Converter saber em exercícios e problemas: O saber sábio possibilita uma maior variedade de exercícios, assim, terá preferência diante de conteúdos com menor capacidade operacional. Talvez, essa seja a regra fundamental, pois relaciona-se diretamente com o processo avaliativo e de controle da aprendizagem;
- Regra 5 – Favorecer a transmissão de conceitos: Conceitos e definições derivados da produção de novos saberes, frequentemente, apresentam grau de complexidade significativo e, por isso, demandam uma transformação para facilitar o aprendizado no âmbito escolar.

Assim, no processo de transposição didática, o professor é o principal agente da transformação do saber para o estudante, transportando suas características específicas e subjetivas, convertendo-o em saber ensinável (SOUSA *et al.*, 2021).

2.4 Contrato Didático

A ideia de contrato didático surgiu durante um questionário clínico e estatístico, realizado pelo Centro de Observação e Pesquisas sobre o Ensino de Matemática (Corem, sigla em francês) da Universidade de Bordeaux em 1980, com estudantes que enfrentavam dificuldades em Matemática como parte das pesquisas sobre as situações matemáticas (BROUSSEAU, 2013). Esse contrato contém um conjunto de regras, geralmente implícitas, que definem o comportamento dos partícipes da aula, instituindo uma relação com conhecimento (RODRIGUES *et al.*, 2021).

Brousseau (2002) definiu o contrato didático como um conjunto de deveres recíprocos do professor e do estudante, idênticos a um contrato, cujas regras são focadas no conteúdo matemático programado (CAMILO *et al.*, 2021). A relação entre professor e estudante estabelece um acordo, pelo qual há o compromisso do estudante, tendo o professor como mediador, de se apropriar de saberes propostos pelo docente na realização das atividades apresentadas na sequência didática (TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

Essa noção transcende o conceito legal do termo contrato, porque, enquanto um contrato, em seu sentido jurídico, estabelece o regramento que garante estabilidade, o contrato didático dinamiza as regras, viabilizando que as situações se concretizem (JONNAERT, 2002, p. 153; SOUZA; LIMA, 2014). No entanto, quando o professor falha ou encontra dificuldades, cada parte age como se ambos tivessem firmado um contrato que acabara de ser desrespeitado. Cada sujeito atribui uma responsabilidade ao outro e se esforça na busca por cláusulas e penalidades de ruptura. Admitindo que o estudante aprende apenas mediante decisões próprias em situações adequadas, o professor não pode direcionar e nem definir suas decisões, sob pena de não poder ensiná-las e impedir que os estudantes as produzam (BROUSSEAU, 2008, p. 75–76).

Entretanto, numa situação qualquer, caso o professor perceba que os estudantes não estão mobilizados ou interessados para executarem as tarefas, ou em razão de questionamento, um instrumento proposto para tentar suplantar tal obstáculo é justamente a evocação do contrato didático (BROUSSEAU, 1996; POMMER; POMMER, 2013).

A contínua negociação do contrato didático, por vezes, descaracteriza os assuntos matemáticos e os objetivos de aprendizagem, visto que o professor, interessado no acerto por parte dos estudantes, tende a facilitar a atividade de maneiras diferentes: apresentação de algoritmos, inúmeras explicações, proposição de problemas divididos em subquestões, etc (ALMOULOUD, 2010, p. 93). A redução dos obstáculos para os estudantes gera problemas que direcionam a alguns efeitos desfavoráveis do contrato didático, a saber: "efeito pigmaleão", "efeito Topázio", "efeito Joudain" e também o "deslizamento metacognitivo" (POMMER; POMMER, 2013). Almouloud (2010, p. 93–95) caracteriza esses efeitos como:

- Efeito Pigmaleão: O contrato didático sujeita-se às expectativas do professor relacionadas aos estudantes ou a um estudante em específico. Observa-se que, em certos episódios, um estudante ou um grupo de estudantes apresentam o mesmo rendimento nos testes realizados em decorrência de um pacto estabelecido tacitamente. Tal pacto, em determinados momentos, limita o nível de exigências do professor em razão da análise que faz desse(s) estudante(s);
- Efeito Topázio: O professor projeta condições para que o estudante supere suas dificuldades sem um efetivo engajamento do discente. Esse fenômeno surge nas situações didáticas em que o professor assume uma parte essencial do trabalho, que deveria ficar a cargo do estudante. O estudante responde o que fora determinado previamente e o professor seleciona as questões para que essa resposta possa ser dada ou que podem provocar as respostas previstas, favorecendo as técnicas dos estudantes e maximizando o sentido dessas respostas;
- Efeito Joudain: Este gênero de efeito se configura quando um procedimento comum do estudante é considerado pelo professor como uma manifestação de um saber científico. O professor admite reconhecer o índice de um conhecimento científico nos procedimentos ou nos resultados dos estudantes, no instante em que são motivados por fatores adicionais

e por sentidos triviais a fim de evitar o debate de saber com o estudante e, possivelmente, o surgimento de um insucesso;

- Deslizamento Metacognitivo: O fenômeno ocorre quando um método, considerado útil pelo professor para a resolução de um problema, é promovido a objeto de estudo, a despeito do verdadeiro saber a ser desenvolvido. Por exemplo, o professor utiliza suas próprias palavras e heurísticas como objetos de ensino, ao invés do autêntico conhecimento matemático, por ocasião de um fracasso de uma atividade enunciada previamente.

Os efeitos do contrato didático representam tentativas do professor de evitar iminentes insucessos das situações de ensino e aprendizagem, concebendo, nesse cenário, a simulação de uma aprendizagem em via de consolidação, envolvendo docente e estudantes numa ideia enganosa de que a situação está fluindo de modo adequado (ALMEIDA; LIMA, 2017; ELOI; ANDRADE, 2020).

Quando o professor ou o estudante enfrentam uma situação paradoxal, particularmente durante resolução de problemas, surgem as rupturas do contrato didático, primordiais numa relação didática. Em face de um problema, o estudante se depara com obstáculos para resolvê-lo e, mesmo consciente sobre a importância dessas adversidades para o aprendizado, solicita ao professor um mecanismo que o auxilie na resolução. Todavia, o professor pode negar o auxílio, situando desse modo o estudante como promotor do próprio desenvolvimento, isto é, promove a denominada devolução didática (ALMEIDA; LIMA, 2013; CRUZ *et al.*, 2014).

2.5 Sequência Didática

A sequência didática (SD) surgiu na França na década de 80 e, por meio da implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) passou a ser executada no Brasil na década de 90. Em ambos os países, o início da SD iniciou tendo em vista o ensino do idioma vernáculo e somente depois passou a ser usado em outras áreas do conhecimento (OLIVEIRA, 2013; LOPES *et al.*, 2020).

Zabala (1998, p. 18) define as sequências didáticas como “[...] conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos estudantes”.

A pedagogia freireana estabelece que o professor não detém de modo exclusivo o conhecimento, mas constrói o conceito em conjunto com o estudante. Assim, a percepção do docente e discente baseada em técnicas de ensino transforma-se em interação entre os sujeitos, com elaboração de uma aprendizagem significativa e transformadora (FRANCO, 2018).

Nesse sentido, essas sequências são planejadas para ensinar um conteúdo e suas etapas são organizadas conforme os objetivos que o professor pretende alcançar, incluem atividades de aprendizagem e avaliação, proporcionando assim ao docente intervir nas atividades propostas e produzir mudanças ou tarefas que tornem mais acessível o aprendizado (MAROQUIO, 2021).

Assim, há uma intencionalidade didática, na qual as práticas estão relacionadas e dispostas de modo detalhado, apresentam situações, tarefas e perguntas investigativas, oportunizam interação entre os aprendizes e destes com o material didático, possibilitam a atuação do professor como mediador do processo e permitem ao estudante a elaboração dos conceitos que o conduzam à definição do objeto matemático a ser ensinado (GOIS, 2020).

Para Oliveira (2013, p. 40), ao propor uma sequência didática, deve-se considerar algumas fases: a escolha do tema, questionamentos para problematização da temática, planejamento dos conteúdos, objetivos, determinação da sequência de atividades, e ainda, a divisão de grupos, o cronograma, o material didático, a integração entre as atividades e avaliação dos resultados (UGALDE; ROWEDDER, 2020).

Dentre as metodologias para o ensino, as sequências didáticas podem ser analisadas como um itinerário estruturado a partir do conhecimento prévio do discente. Essa estruturação considera fases que são logicamente encadeadas, objetivando um melhor rendimento identificado quando os saberes adquiridos são comparados aos iniciais (LAVOR; OLIVEIRA, 2022).

Dito isso, o trabalho com sequências didáticas pode contribuir com a elaboração de situações-problema, mediante atividades e múltiplos exercícios com o intuito de auxiliar o estudante a consolidar e ampliar aprendizagens e procedimentos a partir de situações de resolução de problemas em diversas situações que sustentam significado dos conceitos matemáticos (MAROQUIO, 2021).

2.6 Modelo Van Hiele

O Modelo Van Hiele surgiu no final dos anos 1950, na universidade de Utrecht na Holanda, a partir dos estudos de doutorado do casal de matemáticos Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof sobre uma forma inovadora de ensino e aprendizagem de Geometria inspirados nas frustrações de seus estudantes e deles próprios no processo de instrução dessa disciplina. (OLIVEIRA; LEIVAS, 2017). A tese defendida por Van Hiele foi denominada O problema do insight - uma conexão com a compreensão dos estudantes na aprendizagem da geometria, enquanto Van Hiele-Geldof apresentou a tese A didática da geometria na classe inicial do ensino secundário (PASSOS *et al.*, 2019).

A Teoria de Van Hiele define a aprendizagem como um sistema gradativo, construtivo e integral. Gradativo por produzir a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica de modo progressivo. Construtivo, pois supõe que o discente deverá construir por si mesmo os conceitos. E integral dado que os entes geométricos são abstrações interligadas que conduzem a novos significados (SERRAZINA; MATOS, 1996; SCHIRLO; SILVA, 2013).

Para Oliveira e Leivas (2017), o modelo de Van Hiele, ilustrado na Figura 4, para a aprendizagem indica que o pensamento geométrico se processa em cinco níveis: Nível básico - Reconhecimento ou Visualização; Nível 1 - Análise; Nível 2 - Síntese ou Abstração; Nível 3 - Dedução e Nível 4 - Rigor. Tais níveis, de acordo com Nasser e San'anna (2004), Schirlo e Silva (2013), são descritos como:

- Nível básico (visualização): os estudantes não identificam os componentes das figuras e não compreendem as associações existentes entre os elementos das figuras nem ao menos entre elas. A nomenclatura e a comparação das figuras geométricas decorrem do seu aspecto integral, não há percepção de propriedades. Portanto, o entendimento da Geometria baseia-se essencialmente em suas características físicas e posicionais no espaço. Assim, os discentes empregam os padrões geométricos de modo inconsistente;
- Nível 1 (análise): as propriedades geométricas presentes nas figuras são reconhecidas pelos estudantes que passam a empreender generalizações sobre as mesmas. As figuras tornam-se identificáveis por seus elementos, porém até então não é viável interpretar as associações entre as múltiplas propriedades próprias das figuras, e os conceitos são incompreendidos. Nesse nível, os estudantes ainda não estão habilitados a associar as variadas propriedades de uma figura;
- Nível 2 (síntese): os estudantes desenvolvem a capacidade de inferir as propriedades de uma figura e identificar categorias de figuras. Consequentemente, esse nível inaugura nos estudantes a compreensão sobre a inclusão de categorias e conceitos geométricos, a percepção ou execução de um argumento informal. Contudo, é frequente o emprego de resultados experimentais e de procedimentos de dedução, o que viabiliza o surgimento de uma prova formal;
- Nível 3 (dedução): nesse nível é possível que os estudantes construam uma demonstração, perpassando por diversos itinerários para entender a distinção entre condição necessá-

ria e condição suficiente, e têm potencial para diferenciar teorias opostas. Os discentes compreendem o processo dedutivo e as demonstrações. Reconhecem, assim, as condições necessárias e suficientes para elaborar deduções, passando a aceitar as diferentes possibilidades de se atingir um mesmo resultado;

- Nível 4 (rigor): é evidenciada nos estudantes a capacidade de compreensão de demonstrações formais e o estabelecimento de teoremas em diversos esquemas, verificando-os, assim como deduções abstratas, tendo uma estrutura de postulados pré-fixado como fundamento, ademais os discentes são capazes de perceber a necessidade de abordarem os fundamentos e relações matemáticas com precisão.

Figura 4 – Modelo Van Hiele

Fonte: Elaborado pelo autor.

A diferenciação desses níveis é a essência do modelo. Cada um dos níveis concebe o uso e o entendimento de ideias geométricas de modo distinto, fato verificável na maneira de classificá-las, demonstrá-las e interpretá-las. Os níveis são hierárquicos e sequenciais, isto é, o estudante só atinge um nível de posição superior caso transpasse todos os níveis inferiores (VILLIERS, 2010; MAZZINI; SANTOS, 2021).

Contudo, observa-se que os níveis de pensamento por vezes são desconsiderados no processo de ensino. Continuamente, os docentes apresentam um conceito segundo um nível de pensamento não adquirido pela totalidade de seus discentes. Tal constatação configura-se numa das razões que dificultam a aprendizagem em matemática, já que ao ensinar a partir de um nível ainda não atingido pelos estudantes, o professor impõe aos aprendizes a mera repetição da estrutura de aula. Assim, não conseguem empregar os conhecimentos num contexto concreto

(HIELE, 1986; PASSOS *et al.*, 2019).

Para haver progresso de um nível para o seguinte, o modelo Van Hiele designou que as seguintes fases fossem experimentadas pelos discentes: Fase 1: Interrogação ou Informação; Fase 2: Orientação Dirigida; Fase 3: Explicação; Fase 4: Orientação livre e Fase 5: Integração (FANTINEL, 1998; OLIVEIRA; LEIVAS, 2017). Jaime (1993), Fouz e Donosti (2005), Vargas e Araya (2013) as descrevem como:

- Fase 1 (Informação): é realizada a interação com o assunto a ser estudado. O docente identifica os conhecimentos prévios e o nível de entendimento de seus discentes acerca da temática. Os discentes recebem informação para conhecerem o objeto de estudo a ser aprendido, os tipos de questões que exigirão dele uma resposta, as técnicas e instrumentos a serem manipulados, dentre outros aspectos;
- Fase 2 (Orientação Dirigida): atividades e problemas são propostos pelo professor ou apresentados pelos próprios estudantes em prol da descoberta e assimilação das relações ou componentes basilares ao conhecimento a ser elaborado. Cabe ao docente a seleção rigorosa destes problemas e atividades e, oportunamente, o direcionamento dos estudantes a solução.
- Fase 3 (Explicação): por meio de vocabulário adequado, os discentes devem expor de forma oral ou escrita as respostas obtidas, descrever a estrutura estudada, comunicar e discutir as experiências com o docente e pares, para tomarem ciência das descobertas e consolidarem as técnicas concernentes ao objeto de estudo;
- Fase 4 (Orientação livre): esta fase é caracterizada pela consolidação da aprendizagem produzida nas fases anteriores. Os estudantes aplicarão os conhecimentos obtidos para solucionar os problemas anteriores e, outros mais complexos. Caberá ao docente a proposição de problemas que estimulem os estudantes a combinar os seus conhecimentos e aplicá-los a situações distintas das apresentadas até então. A intervenção do professor na solução das tarefas propostas deverá ser mínima nessa etapa;
- Fase 5 (Integração): os estudantes concebem uma visão holística sobre o aprendizado sobre o tema e as relações que estão sendo produzidas, integrando os novos conhecimentos, procedimentos e modos de organizar o pensamento com os saberes anteriores. Os professores oferecem sínteses ou coletâneas de dados que auxiliem os estudantes a obter essa integração. As atividades propostas não objetivam a aquisição de novas ideias, mas a ordenação do que fora estabelecido.

3 GEOMETRIA PLANA

Antes da geometria ser ensinada nas escolas, ela passou por experimentações e descobertas. A história assegura que esse importante componente da matemática foi elaborado por diversos povos e para diferentes finalidades e, hoje, a humanidade pode usufruir dessa valiosa ferramenta para transformar a sua existência.

3.1 Contextualização histórica

As atividades humanas relacionadas à geometria têm seus primeiros registros datados do tempo das antigas civilizações da Mesopotâmia. Não obstante, o historiador Heródoto confira o surgimento da geometria aos egípcios, tábuas de argila do período 1900 – 1600 a.C., contendo diagramas e textos denotam um certo domínio da geometria pelo povo da Babilônia com conceitos relativos ao Teorema de Pitágoras. Os povos da Antiguidade que desenvolveram uma geometria primitiva, dentre eles os babilônios, os egípcios, os hindus e os chineses, tinham como motivação a necessidade prática de mensurações geométricas (MANFIO, 2013).

Os agricultores egípcios, por exemplo, detinham propriedades nas proximidades do rio Nilo que alagavam pelo transbordamento do rio no período de chuvas e assim tornavam-se apropriadas para a agricultura. Então, era necessário realizar novamente as delimitações por meio de medições e desenhos para que os lotes fossem devolvidos aos proprietários, promovendo a aquisição de conhecimentos posteriormente aperfeiçoados pelos gregos (SANTOS; LEAL, 2021). Para Eves (1997), as noções inaugurais sobre a geometria surgiram mediante observações de figuras, com o reconhecimento e comparação de tamanhos e formatos. Por isso, a etimologia grega do termo geometria geo = terra + metria = medida, que significa medição de terra (COSTA *et al.*, 2020).

Segundo Roque e Pitombeira (2012), Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.C. e recebido influência dos mesopotâmicos e egípcios, está entre os primeiros matemáticos da Grécia. Afirma-se que uma de suas realizações teria sido a determinação da altura de uma pirâmide do Egito, através da semelhança entre as razões desta altura com sua sombra e também de sua própria altura com sua própria sombra (FREITAS, 2013).

Em parceria com a escola pitagórica, Tales contribuiu significativamente para o estabelecimento do método dedutivo-formal em matemática, concretizado com a obra máxima de Euclides, Os Elementos, considerada um dos manuais escritos mais relevantes da história ocidental. Composto por treze volumes, essa obra representou um modelo para o progresso sistemático de ideias matemáticas empregado até a época atual: preliminarmente, conceitos e postulados são enunciados para que proposições sejam demonstradas a partir desses axiomas e de outras proposições por dedução lógica (GORODSKI, 2002; MONTEIRO, 2015).

3.2 Ensino de Geometria

Conforme Valente (1999), os estudos em Geometria no Brasil se manifestaram inicialmente por exigência militar, pois parte significativa dos soldados apresentava dificuldades em examinar mapas, atingir alvos entre outros desafios. Diante desse quadro, foram realizados esforços para que noções geométricas fossem inseridas no ensino primário. Porém, o aprendizado dessas ideias foi adiado para o ensino secundário devido à deficiência de formação de profissionais da educação associada ao estudo facultativo da geometria e, segundo Kopke (2006), somente em 1889 a instrução de desenho técnico e geométrico é exigida no território nacional (PEREIRA, 2017).

Após o final dos anos de 1950, professores e outros representantes da educação de diferentes países, incluindo o Brasil, envolveram-se em debates sobre a necessidade de reestruturar o ensino da Matemática, suscitando um movimento denominado Movimento da Matemática Moderna (MMM) (ALVES; SILVEIRA, 2016). Contudo, mesmo não tendo se estabelecido no Brasil, essa corrente, que algebrizava a geometria, também contribuiu com o cenário desfavorável ao ensino da ciência geométrica por excluir o modelo lógico-dedutivo pautado em demonstrações que vigorava até então (LORENZATO, 1995, p. 4).

O ensino de matemática não está restrito a ensinar técnicas de cálculo aos nossos estudantes. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (BRASIL, 1998; BRASIL, 1999) estabeleciam, além dessas habilidades, o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo a partir de atividades pedagógicas que estimulassem a argumentação e prova matemática (JÚNIOR; CALDATO, 2021).

Nos últimos anos, observam-se progressos nas pesquisas da Educação Matemática no Brasil, e também em relação ao ensino da geometria. Essa evolução resulta em avanços no contexto escolar porque, por uma ótica, os estudos auxiliam na formação dos docentes e, por conseguinte, na aprendizagem dos estudantes. Por outra ótica, ainda que haja desenvolvimento educativo, muito do que fora elaborado por essas investigações não atinge o alunado da educação básica. Isso decorre da dificuldade enfrentada por grande parte dos professores de matemática em transpor os aspectos experimentados pelas pesquisas para o panorama prático da sala de aula (COSTA, 2020).

Atualmente, a geometria é classificada como uma área indispensável ao programa de matemática, ainda que o contexto histórico sinalize, em alguns períodos, o seu desprestígio ou o seu abandono no currículo escolar (BARROS; PAVANELLO, 2022). Tal notoriedade é comprovada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referência para as normas curriculares na Educação Básica, ao determinar que é necessário ao estudante do nível médio o aprendizado sobre a posição de números em retas, de figuras ou esquemas no plano cartesiano e no espaço, direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, conversões geométricas isométricas e homotéticas, além de situações-problema envolvendo noções geométricas (BRASIL, 2018; SOUSA *et al.*, 2021).

Em suma, nota-se que a geometria é fundamental à evolução da humanidade e as suas atividades cotidianas. A partir do raciocínio lógico e aperfeiçoamento da habilidade de interação e pensamento, o estudante pode transitar sem dificuldade por diversas áreas, explorando sua capacidade de reagir a inúmeras situações nas quais esteja inserido (LOBATO, 2019).

3.3 Unidade Didática

Esta seção destina-se aos conceitos básicos relativos à Congruência de Triângulos, assunto escolhido dentre aqueles previstos para a 1ª série do ensino médio para o desenvolvimento das sessões didáticas da presente pesquisa. Serão abordados axiomas, definições e teoremas extraídos de Barbosa (1995, p. 26–31) e Dolce e Pompeo (2013, p. 44–46), obras referências da Geometria no Brasil. É importante ressaltar que os resultados apresentados aqui não são originais e o leitor poderá consultar outros materiais para o estudo da temática.

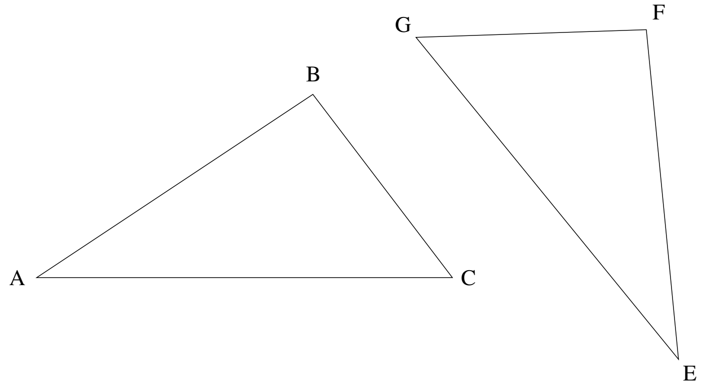
Definição 3.3.0.1. *Diremos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida.*

Observe que, com esta definição, as propriedades da igualdade de números passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Como consequência, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si. O mesmo valendo para ângulos.

Para simplificar ao máximo a nossa notação, iremos utilizar o símbolo “=” para significar congruente. Assim $\overline{AB} = \overline{CD}$ deve ser lido como $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CD}$ e $\hat{A} = \hat{B}$ deve ser lido como ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{B}$. Em geral, não haverá perigo de confusão com a igualdade de números ou de conjuntos. Quando houver, reforçaremos com palavras o significado do símbolo.

Definição 3.3.0.2. *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Figura 5 – Congruência de triângulos



Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes e se

$$A \leftrightarrow E$$
$$B \leftrightarrow F$$
$$C \leftrightarrow G$$

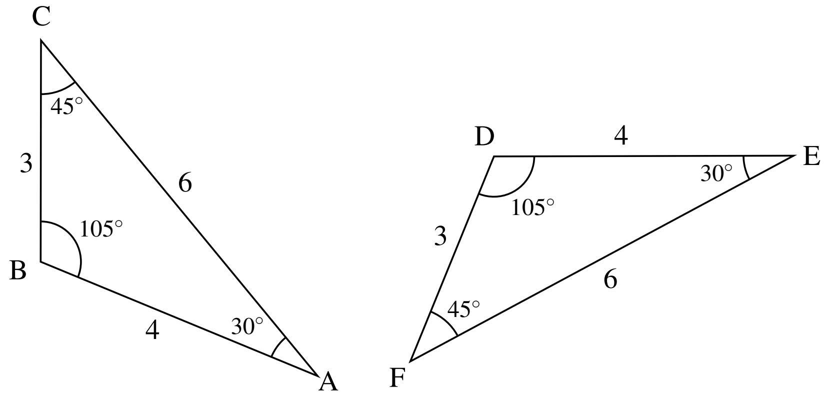
é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

$$\overline{AB} = \overline{EF} \quad \overline{BC} = \overline{FG} \quad \overline{AC} = \overline{EG}$$
$$\hat{A} = \hat{E} \qquad \hat{B} = \hat{F} \qquad \hat{C} = \hat{G}$$

A Figura 5 mostra que o triângulo ABC é congruente com o triângulo EFG. Se, nos triângulos da Figura 6, considerarmos a correspondência $C \leftrightarrow F, B \leftrightarrow D$ e $A \leftrightarrow E$, verificamos que $\hat{C} = \hat{F}, \hat{B} = \hat{D}, \hat{A} = \hat{E}, \overline{CB} = \overline{FD}, \overline{BA} = \overline{DE}$ e $\overline{AC} = \overline{EF}$. Portanto, os triângulos CBA e FDE são congruentes.

Escrevemos $ABC = EDF$ para significar que os triângulos ABC e EDF são congruentes e que a congruência leva A em E, B em D e C em F.

Figura 6 – Exemplo de triângulos congruentes



Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

Axioma 3.3.0.1. *(LAL) Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$,$\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, então $ABC = EFG$.*

Observe que, de acordo com a Definição 3.3.0.2, para verificarmos se dois triângulos são congruentes temos que verificar seis relações: congruência dos três pares de lados e congruência dos três pares de ângulos correspondentes. O axioma acima afirma que é suficiente verificar apenas três delas, ou seja:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{EF} \\ \overline{AC} &= \overline{EG} \\ \hat{A} &= \hat{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \cdot \\ \overline{AB} = \overline{EF}, \quad \overline{AC} = \overline{EG}, \quad \overline{BC} = \overline{FG} \\ \hat{A} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{G}, \quad \hat{B} = \hat{F} \end{array}\right.$$

Este axioma é conhecido como *primeiro caso de congruência de triângulos*. Outros dois casos serão apresentados a seguir.

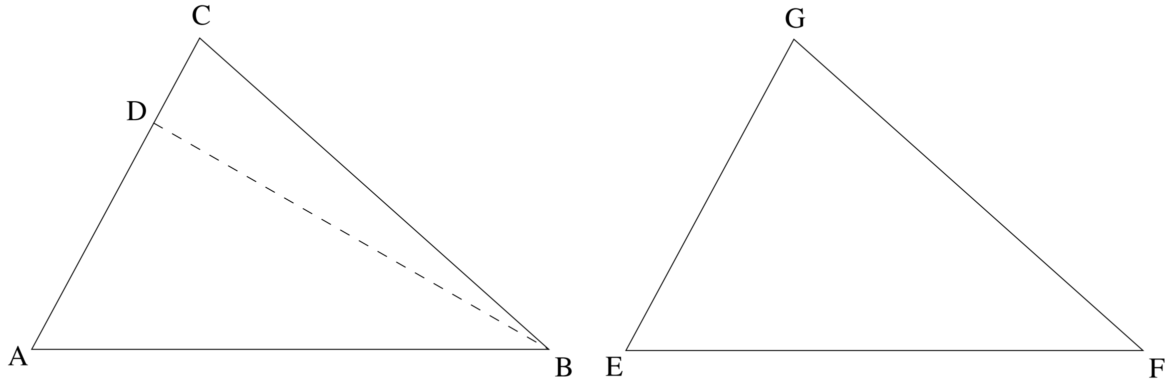
Teorema 3.3.0.1. *(2° caso de congruência de triângulos). Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$,$\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então $ABC = EFG$.*

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Seja D um ponto da semirreta S_{AC} tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$.

Considere o triângulo ABD e o compare com triângulo EFG. Como $\overline{AD} = \overline{EG}$, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, concluímos, pelo Axioma 3.3.0.1, que $ABD = EFG$. Como consequência, tem-se que $A\hat{B}D =$ F̂. Mas, por hipótese, $\hat{F} = A\hat{B}C$. Logo, $A\hat{B}D = A\hat{B}C$.

Consequentemente, as semirretas S_{BD} e S_{BC} coincidem. Mas, então o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como já provamos que $ABD = EFG$, então $ABC = EFG$ (Figura 7). ∎

Figura 7 – Caso de congruência ALA



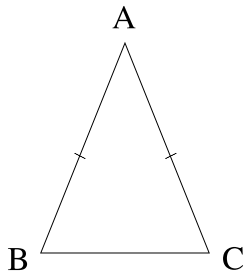
Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

Definição 3.3.0.3. *Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais, e o terceiro lado é chamado de base.*

Proposição 3.3.0.1. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo em que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Pretende-se provar que $\hat{B} = \hat{C}$.

Figura 8 – Triângulo isósceles



Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

Para isso compare o triângulo ABC com ele mesmo fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C \text{ e } C \leftrightarrow B$$

Por hipótese, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$. Como $\hat{A} = \hat{A}$, segue-se Axioma 3.3.0.1 que esta correspondência define uma congruência. Como consequência tem-se $\hat{B} = \hat{C}$. A figura Figura 8 mostra o triângulo ABC isóceles de base $\overline{BC}$. ■

Caso o leitor tenha alguma dificuldade em seguir o raciocínio acima, deve desenhar duas cópias do triângulo ABC e repetir o raciocínio para estes dois triângulos.

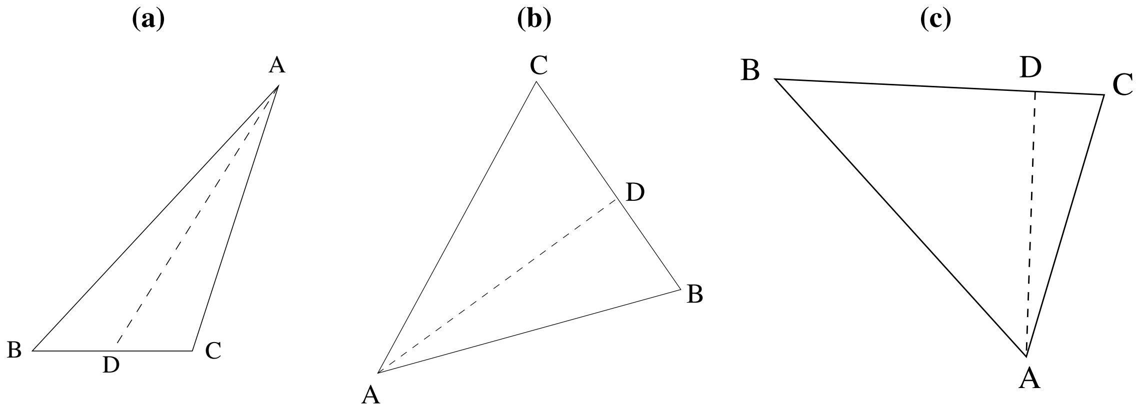
Proposição 3.3.0.2. *Se, em um triângulo ABC, tem-se dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.*

Demonstração. Seja ABC em triângulo em que $\hat{B} = \hat{C}$. Vamos mostrar que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Novamente comparemos o triângulo ABC com ele próprio, fazendo corresponder os vértices como na prova da proposição anterior, isto é: $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C$, e $C \leftrightarrow B$. Como $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{B}$ por hipótese, e $\overline{BC} = \overline{CB}$, segue-se (pelo teorema 3.3.0.1) que seja correspondência define uma congruência. Como consequência, $\overline{AB} = \overline{BC}$. ■

Definição 3.3.0.4. *Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C. O segmento $\overline{AD}$ chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado $\overline{BC}$, se D for o ponto médio de $\overline{BC}$. O segmento $\overline{AD}$ chama-se bissetriz do ângulo $\hat{A}$ se a semirreta S_{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos iguais, isto é, se $C\hat{A}D = D\hat{A}B$. O segmento $\overline{AD}$ chama-se altura do triângulo relativamente ao lado $\overline{BC}$, se $\overline{AD}$ for perpendicularmente a reta que contém B e C.*

Na Figura 9, em (a), $\overline{AD}$ é mediana; em (b), $\overline{AD}$ é bissetriz; em (c), $\overline{AD}$ é a altura.

Figura 9 – Mediana, bissetriz e altura relativas a algum lado do triângulo



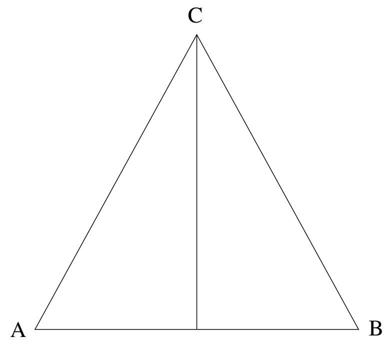
Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

Proposição 3.3.0.3. *Em triângulos isósceles, a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é $\overline{AB}$. Seja $\overline{CD}$ sua mediana relativamente à base. Deve-se provar que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ e que $A\hat{D}C$ é um ângulo reto. Para isto considere os triângulos ADC e BDC. Como $\overline{AD} = \overline{BD}$ (já que $\overline{CD}$ é mediana), $\overline{AC} = \overline{BC}$ (já que o triângulo é isósceles com base $\overline{AB}$) e $\hat{A} = \hat{B}$ (de acordo com a proposição anterior), então $ADC = BCD$. Segue se daí que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$. A primeira igualdade nos diz que $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Como $A\hat{D}B$ é um ângulo raso e $C\hat{D}A = B\hat{D}C$ então $C\hat{D}A + B\hat{D}C = 180°$. Como já sabemos que

$C\hat{D}A = B\hat{D}C$ então concluímos que $C\hat{D}A = B\hat{D}C = 90°$. Portanto $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Isto conclui a prova da proposição.

Figura 10 – Mediana relativa à base do triângulo isósceles



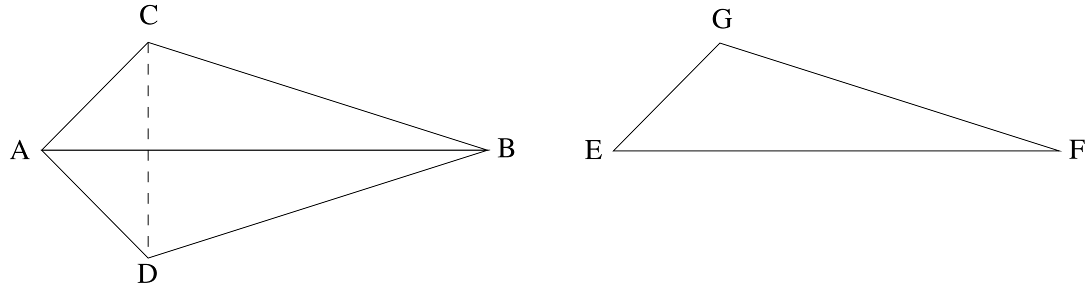
Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

■

Teorema 3.3.0.2. *(3° caso de congruência de triângulos). Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}, \overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$. Vamos provar que $ABC = EFG$.

Figura 11 – Caso de congruência LLL

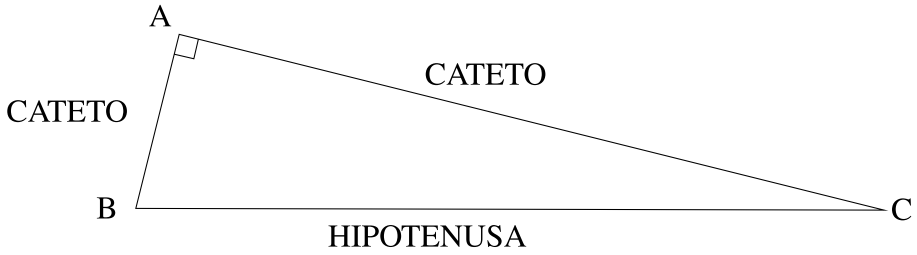


Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

Para isto, construa, a partir da semirreta S_{AB} e no semiplano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo igual ao ângulo $\hat{E}$. No lado deste ângulo que não contém o ponto B, marque um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$ e ligue D a B. Como $\overline{AB} = \overline{EF}$ (por hipótese), $\overline{AD} = \overline{EG}$ (por construção) e $D\hat{A}B = \hat{E}$ (por construção), então $ABD = EFG$ (pelo caso ALA). Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto, trace $\overline{CD}$. Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{FG} = \overline{BC}$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B$ e logo que $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Mas então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $ABD = EFG$ e $ABC = EFG$. A Figura 11 mostra os passos desta demonstração. ■

Definição 3.3.0.5. *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa, e os outros dois lados são determinados catetos (Figura 12).*

Figura 12 – Triângulo retângulo



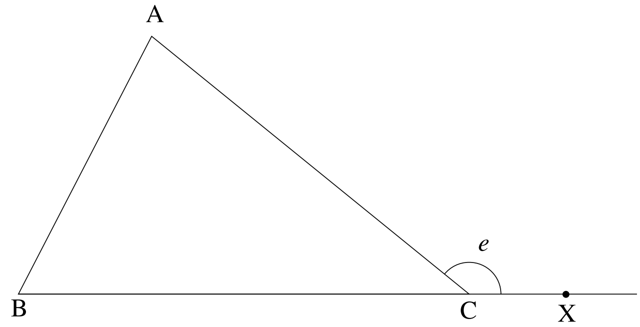
Fonte: Adaptado de Barbosa (1995).

Definição 3.3.0.6. *Dado um triângulo ABC e sendo S_{CX} a semirreta oposta à semirreta S_{CB}, o ângulo*

$$\hat{e} = A\hat{C}X$$

é o ângulo externo do triângulo ABC *adjacente a $\hat{C}$ e não adjacente aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. O ângulo $\hat{e}$ é o suplementar adjacente de $\hat{C}$ (Figura 13).*

Figura 13 – Ângulo externo



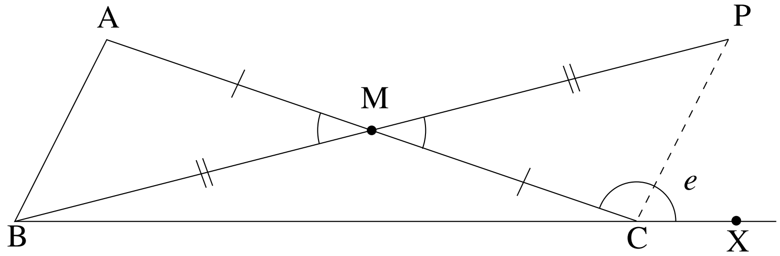
Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013).

Teorema 3.3.0.3. *(Teorema do Ângulo Externo) Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Conforme a Figura 14, M é o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertencente à semirreta S_{BM} tal que:

$$\overline{BM} = \overline{MP}$$

Figura 14 – Relação entre ângulo externo e ângulos internos não adjacentes



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013).

Pelo caso LAL, $BAM = PCM$ e daí:

$$B\hat{A}M = P\hat{C}M \tag{3.1}$$

Como P é interno ao ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$, vem:

$$\hat{e} = P\hat{C}M \tag{3.2}$$

Das equações 3.1 e 3.2, decorre que $\hat{e} > \hat{A}$. Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que:

$$\hat{e} > \hat{B}$$

■

Teorema 3.3.0.4. *(LAA_O) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Por hipótese, temos que

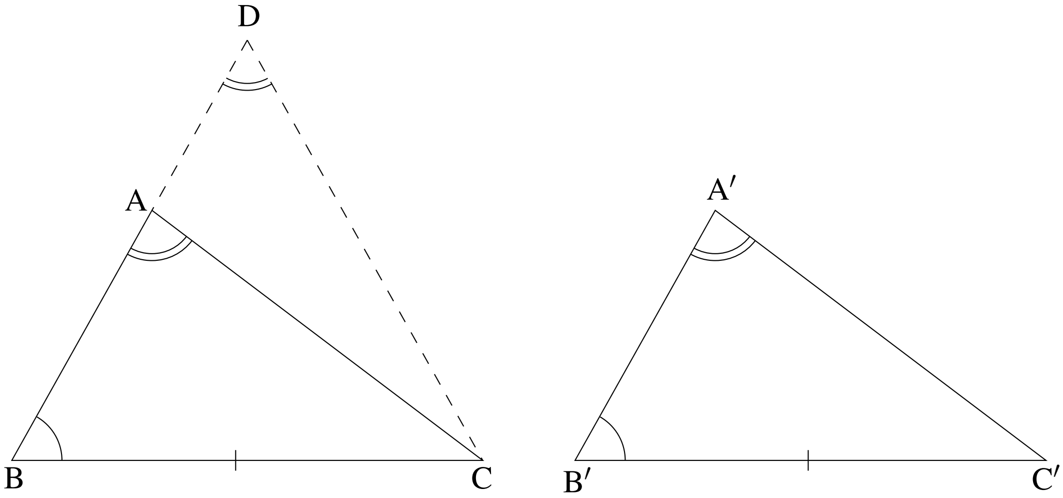
$$\overline{BC} = \overline{B'C'}, \tag{3.3}$$

$$\hat{B} = \hat{B}', \tag{3.4}$$

$$\hat{A} = \hat{A}'. \tag{3.5}$$

Há três possibilidades para $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$:

Figura 15 – Caso de congruência LAA_O



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013).

1ª) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ 2ª) $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ 3ª) $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

Se a 1ª se verifica, temos:

$$\left(\overline{AB} = \overline{A'B'},\ \hat{B} = \hat{B}',\ \overline{BC} = \overline{B'C'}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} ABC = A'B'C'$$

Se a 2ª se verificasse, tomando um ponto D na semirreta S_{BA} (Figura 15) tal que $\overline{BD} = \overline{A'B'}$, teríamos:

$$\left(\overline{DB} = \overline{A'B'}, \hat{B} = \hat{B}', \overline{BC} = \overline{B'C'}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} DBC = A'B'C' \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}' \overset{(3.5)}{\Rightarrow} \hat{D} = \hat{A},$$

o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no triângulo ADC. Logo, a 2ª possibilidade não se verifica. A 3ª possibilidade também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença de que D estaria entre A e B.

Como só pode ocorrer a 1ª possibilidade, temos:

$$ABC = A'B'C'$$

■

Colorário 3.3.0.1. *Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.*

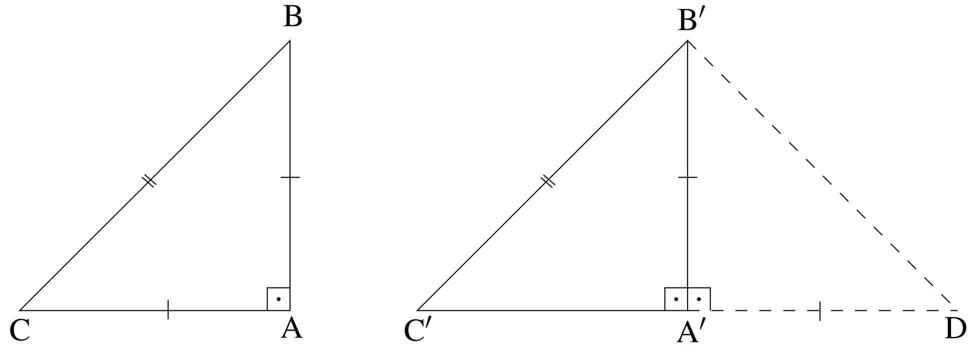
Demonstração. Por hipótese, temos que

$$\hat{A} = \hat{A}' \tag{3.6}$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \tag{3.7}$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \tag{3.8}$$

Figura 16 – Congruência entre triângulos retângulos



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013).

Tomemos o ponto D na semirreta oposta à semirreta $S_{A'C'}$ (Figura 16) tal que $\overline{A'D} = \overline{AC}$.

$$\left(\overline{AB} = \overline{A'B'},\ \hat{A} = \hat{A}',\ \overline{AC} = \overline{A'D}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} ABC = A'B'D \Rightarrow \overline{BC} = \overline{B'D} \quad \text{e} \tag{3.9}$$

$$\hat{C} = \hat{D} \tag{3.10}$$

$$(3.8) \text{ e } (3.9) \ \Rightarrow\ \overline{B'C'} = \overline{B'D} \ \Rightarrow\ B'C'D \text{ é isósceles de base } \ \overline{C'D} \ \Rightarrow\ \hat{C}' = \hat{D} \tag{3.11}$$

$$(3.10) \text{ e } (3.11) \ \Rightarrow \hat{\mathrm{C}} = \hat{\mathrm{C}}'$$

Considerando agora os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left(\overline{BC} = \overline{B'C'},\ \hat{C} = \hat{C}',\ \hat{A} = \hat{A}'\right) \overset{LAA_0}{\Rightarrow} ABC = A'B'C'$$

■

4 SEQUÊNCIA FEDATHI

Neste trecho, apresentam-se elementos substanciais para a Sequência Fedathi, mas sem exaurir a temática, porquanto a presente metodologia é objeto de numerosos ensaios, consistentes e avalizados por especialistas.

4.1 O que é a sequência

A Sequência Fedathi (SF) é um método de ensino concebido pelo professor Dr. Hermínio Borges Neto, coordenador do Laboratório de Pesquisa Multimeios-MM da Universidade Federal do Ceará (UFC) e possui em sua essência pedagógica e formativa a mudança do comportamento do professor, a partir de mediações que posicionem o estudante em situação de aprendizagem (SANTOS, 2017). Embora, tenha sido desenvolvida como proposta metodológica para o ensino da Matemática, transpassou, com o avanço das pesquisas, essa fronteira e, atualmente, contempla outras áreas, tais como Pedagogia, Física e Engenharia (MENEZES *et al.*, 2016).

O termo "sequência", nessa metodologia, é justificado pela sua organização e sucessão de atividades em etapas. Enquanto o nome "Fedathi", originou-se nas sílabas iniciais dos nomes dos três filhos de Borges Neto: Felipe, Daniel e Thiago (SOUZA, 2013; SOUSA, 2015).

Para o professor Hermínio,

> A Sequência Fedathi é uma proposta de ensino, talvez uma metodologia, com fundamentação teórico-metodológica baseada na proposta lógico-dedutiva-construtiva, acrescida de uma postura, enfoque, de um comportamento, de uma atitude por parte do professor, perante seus estudantes, que respeite e tente reproduzir o método de trabalho de um matemático (conhecido como 'la méthode') (BORGES NETO, 2016).

Assim, de acordo com o autor da SF, ao deparar-se com um problema novo, o discente deve replicar os passos de um matemático que se dedica sobre seus estudos, tais como, abordar os dados da questão, testar os modos que possibilitam a solução, investigar os possíveis erros, analisar os resultados, corrigir e elaborar um modelo (SOUSA *et al.*, 2013, p. 18).

Neste processo, os estudantes tornam-se responsáveis por seu aprendizado e, em cada discussão, são autorizados a se posicionarem de modo crítico e autônomo (MENDONÇA, 2018, p. 11). A exemplo do que ocorre em nossa sociedade, o estudante aprende adaptando-se a um meio que é fonte de contradições, adversidades e desequilíbrios. Esse saber, resultado de sua adaptação, é evidenciado por novas respostas, que são a marca da aprendizagem (BROUSSEAU, 2008, p. 34).

Ao relacionarmos a Sequência Fedathi e o Contrato Didático, observa-se que esta última teoria está direcionada ao estudo e à compreensão sobre a gestão da escola e do professor sobre os estudantes, relativa à aprendizagem. Por sua vez, a Sequência Fedathi destaca o ensino, a postura do professor, a mediação realizada em sala de aula, o que passa pelo desenvolvimento do trabalho docente (SOUSA, 2015). Por isso, a Sequência Fedathi opta por utilizar o termo acordo, quando sugere um acordo didático construído e avaliado regularmente por professores e estudantes, e definido como um conjunto de regras que delimitam as ações em sala de aula (BORGES NETO, 2018, p. 56).

Para Borges Neto (2016), a Sequência Fedathi conecta três concepções epistemológicas da matemática: a proposta de resolução de problemas, estudada por Polya, na década de 70, o intuicionismo de Brouwer e a lógica da descoberta matemática de Lakatos (1978).

Polya (1978), propunha a resolução de problemas fundamentada em quatro fases: a) Compreender o enunciado; b) Planejar a resolução; c) Resolver o problema; e, d) Verificar a solução. A SF julga relevante que o estudante atue como matemático, por meio da investigação e resolução de problemas, estabelecendo a relação entre ensino e aprendizagem baseado nas exigências do trabalho docente. Em Polya, a essência está nas estratégias de resolução de problemas, na SF o ponto central está na maturação e vivência do problema pelo estudante (SANTOS, 2017).

O Intuicionismo inspira a metodologia Fedathi pela ideia do conhecimento matemático ser construído na mente, por isso a relevância da reflexão quanto a ação do estudante, considerando o erro como componente essencial para se atingir a aprendizagem. Portanto, de acordo com o critério intuicionista, uma demonstração construtiva de qualquer enunciado matemático é uma premissa para a compreensão verdadeira desse enunciado (BARKER, 1976, p. 101; SANTOS *et al.*, 2019).

Nas concepções de Lakatos e Borges Neto, o professor estimula os estudantes a participarem de maneira ativa e interativa na procura das respostas. Mesmo em uma “Matemática pura”, Lakatos desenvolve a investigação e apresenta uma sala de aula diferenciada, possibilitando ao estudante pensar e seguir as técnicas do matemático, assim como na SF, explorando regularidades e conduzindo positivamente a investigação em sala de aula, com a valorização dos erros estudantis (BORGES NETO, 2019, p. 184).

Na SF o planejamento da ‘sessão didática’ - expressão utilizada na metodologia Sequência Fedathi para definir mais amplamente a noção convencional de aula - é a fase na qual o trabalho pedagógico é organizado, de modo didático, considerando aspectos que integram o antes, durante e depois da aula (SANTOS, 2017). Assim, Sousa (2015), mostra a Sequência Fedathi com uma estrutura de funcionamento constituída por três níveis: a preparação, a vivência e a avaliação (SANTOS *et al.*, 2019).

A preparação da sessão didática compreende a análise ambiental e a análise teórica, que embora apresentadas independentes uma da outra, mantêm-se interligadas na aplicação da SF (SANTOS *et al.*, 2013).

Na análise ambiental, o professor organiza o ambiente de trabalho, tornando-o mais adequado possível para a aprendizagem, isso abrange o planejamento da aula, os materiais necessários, assim como a sala de aula e demais espaços com o objetivo de conhecer os sujeitos (estudantes) com os quais irão trabalhar (MATOS, 2020). A análise teórica contém o objetivo da aula, a definição produzida no *plateau* que servirá de base para a apresentação do problema na Tomada de Posição e a justificativa dos materiais a serem utilizados pelo professor numa turma (ARAÚJO *et al.*, 2020).

Para Santos (2012) e Santos (2017), a palavra *Plateau* tem origem francesa, cujo significado usual é planalto. Ele é aplicado como patamar, nivelamento do conhecimento do estudante, efetuado pelo professor antes ou no início da sessão didática e é relativo aos pré-requisitos fundamentais para o aprendizado do objeto ensinado (ANDRADE *et al.*, 2019). Durante a elaboração do *plateau*, é importante que o professor saiba que o objetivo não será equiparar os conhecimentos dos estudantes, devido aos diferentes saberes existentes numa turma e às particularidades de cada estudante. Nesse sentido, a ideia que sustenta o *plateau* está focada na seleção de situações desafiadoras para todos os estudantes do grupo (BEZERRA, 2018; PEREIRA, 2023).

Contudo, Sousa *et al.* (2013, p. 77) e Sousa (2015) condicionam a organização da aula conforme a metodologia Fedathi à mudança de concepção do professor em relação ao modo de planejar, com o intuito do planejamento não se resumir a uma simples programação a ser executada, assim, a preparação escrita da aula não pode ser classificada como rito burocrático.

É comum o professor propor uma situação-problema e resolvê-la logo em seguida sem permitir a experimentação pelo estudante, o que é inconcebível para a SF, porque dentre as principais contribuições dessa metodologia, estão as etapas, representadas na Figura 17, em que ela divide o trabalho do professor e do estudante em sala, sendo elas: tomada de posição, maturação, solução e prova (SANTOS, 2017). Assim, o método é caracterizado por fases de um dado trabalho num processo que organiza e sistematiza as ideias e também as ações conforme progride em seu objetivo (SANTOS *et al.*, 2019).

Figura 17 – Sequência Fedathi

Fonte: Elaboração própria.

4.1.1 1ª Fase – Tomada de posição: apresentação do problema

Nesta fase, um problema relacionado com o conhecimento a ser ensinado é apresentado ao estudante, mediante uma circunstância que permita a abstração de seu contexto particular, para um modelo matemático generalizável (SOUSA *et al.*, 2013, p. 20), isto é, a estratégia utilizada para resolver o problema pode ser aplicada para solucionar inúmeros outros da mesma temática (SOUZA, 2013; MENEZES, 2018; ARAÚJO *et al.*, 2020).

A situação escolhida pelo professor poderá ser exibida por escrito ou verbalmente através de um jogo, uma pergunta, um material concreto, um recurso analógico ou digital e discutida individualmente ou em grupos de estudantes, em favor das discussões entre estes, desde que esteja em consonância com o que fora acordado previamente com o educador (SOUSA, 2015; SANTOS, 2016; BORGES NETO, 2018, p. 81–82).

No entanto, antes da apresentação do problema, deve-se estabelecer o acordo didático. Essa iniciativa prima pela relação de cumplicidade entre docente e discente, além do cumprimento de regras. O professor com habilidade conduz os trabalhos no ambiente de estudo e os estudantes imbuídos de suas responsabilidades perseguem o novo conhecimento, a partir da atividade sugerida (SOUSA, 2015). Segundo Santos (2017), esse acordo deve ser manifesto no planejamento, e conexo com as demandas da sala de aula e em concordância com as expectativas e a realidade dos estudantes.

4.1.2 2ª Fase – Maturação

Destinada à discussão entre o professor e os estudantes acerca da situação-problema proposta, esta etapa oportuniza aos estudantes a compreensão do problema e a identificação dos possíveis esquemas que determinem uma solução (SOUSA *et al.*, 2013, p. 23).

Para alguns pesquisadores da SF, a maturação é um dos momentos mais importantes, porque nesse momento o estudante recorre aos conhecimentos que já possui e reflete sobre possibilidades futuras, experimentando várias iniciativas. É imprescindível que o professor atente para interagir com "perguntas" e "contraexemplos" (MATOS, 2020), mas dosando sua interferência na construção do estudante por meio da pedagogia "mão no bolso", analogia ao ato do professor colocar a mão no bolso, para não realizar a questão para o estudante (FELÍCIO *et al.*, 2021).

O contraexemplo deve ser empregado pelo professor para refutar o raciocínio, ou solução, equívoca do estudante (ARAÚJO *et al.*, 2020). Para Sousa (2015), a pergunta é uma estratégia de mediação que deve ser utilizada a fim de despertar no estudante reflexão e ação para a investigação. O autor destaca ainda que o estudante, ao mostrar desinteresse para solucionar o problema proposto, precisa ser estimulado pelo professor através de perguntas que o coloquem em situação de desafio para resolver a questão (SANTOS, 2017).

Nesse processo, os erros são inevitáveis e a mediação docente deve ocorrer a partir de cada pensamento individual, socialização e compartilhamento de conhecimento, no sentido de levar à formalização do conhecimento matemático, ou seja, deve favorecer o grupo a realizar a fase de solução (PINHEIRO *et al.*, 2016). O educador deve assim, posicionar-se de modo a fortalecer o protagonismo do estudante, para que este exerça seus conhecimentos de maneira independente. Logo, está evidente que o suposto fracasso oriundo do erro será desmistificado e promoverá a autonomia do estudante (MENDONÇA, 2018, p. 63).

4.1.3 3ª Fase – Solução

Na fase da Solução, esquemas e/ou modelos que visem à solução do problema proposto são apresentados a partir de ideias trocadas, da prática do professor como mediador, de contraexemplos e da exibição de múltiplas soluções para o mesmo problema (MENDONÇA, 2018, p. 93). Esses esquemas podem estar em linguagem matemática, ou simplesmente na forma de desenhos, esboços ou mesmo de modo verbal (ANDRADE *et al.*, 2019).

O estudante apresenta nesse instante sua resolução, podendo ser o resultado previsto ou não. Caso não seja o esperado, o professor deve valorizar o percurso trilhado na concepção da resposta, discutindo o processo com o estudante (MENEZES *et al.*, 2016) para a identificação dos pontos de falha de sua solução, as deficiências ou ainda se a resolução encontra-se sistematizada (FELÍCIO *et al.*, 2021).

Com a devida interpretação, o estudante elabora argumentos sobre a sua resposta para análise dos demais colegas e do professor, que verifica se o resultado é satisfatório ou se há nele erros e limitações, direcionando, se necessário, o estudante à fase anterior ou à próxima etapa (BORGES NETO, 2016). Para isso, é fundamental que o professor atente e saiba atuar diante de cada situação, tornando a solução uma oportunidade de aquisição e/ou aprofundamento sobre o problema em estudo, sem a necessidade de gloriar alguém pelo acerto nem menosprezar outro pelo erro (SOUSA, 2015), em razão do esforço construtivo para o grupo compreenda o itinerário de resolução do problema (FELÍCIO *et al.*, 2021).

4.1.4 4ª Fase – Prova

A fase da Prova surge após as discussões e debates sobre as soluções propostas pelos estudantes. Nesse momento, o professor explica o desafio proposto numa espécie de síntese da situação problema, transmitindo um novo conhecimento e determinando associação com as soluções estruturadas pelos discentes e seus procedimentos empregados (SOUZA, 2013; MATOS *et al.*, 2023). Para Borges Neto (2016), essa capacidade de síntese ao problema, ou modelagem, tornará a solução encontrada aplicável em situações diferentes da inicial.

O professor, portando as soluções apresentadas pelos estudantes, estas certas ou não, aproveitará os roteiros para a sistematização de um conteúdo formal (FELÍCIO *et al.*, 2021). Assim, a beleza estética da disciplina torna-se evidente com a demonstração de uma argumentação lógico-dedutiva através da definição precisa e cuidado no uso da linguagem técnica

(MENDONÇA, 2018, p. 100).

Diante desses fundamentos, a SF direciona o professor numa alternativa para a sua prática em sala de aula. Esse direcionamento não se limita às etapas, como visto, e nem às posturas propostas pelo método. A SF possui também um plano de aula adaptável às inúmeras instituições de ensino, contemplando o contexto de cada centro educativo e/ou turma (ARAÚJO *et al.*, 2020).

De acordo com Brousseau (2008, p. 34), para o estudante adquirir um saber, são aceitáveis todos os procedimentos nos quais o professor não informa a resposta com essa finalidade. Porém, após o término da aula, é indispensável que o professor realize uma avaliação geral acerca da aula, avaliando os estudantes e o processo percorrido por eles para a obtenção do resultado, pela relevância do processo na SF. Também é importante a auto avaliação do professor para que sua prática possa ser sempre revista (MATOS, 2020).

5 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção, será descrita a sistemática aplicada no contexto da pesquisa realizada. Como pesquisa, entende-se "[...] um procedimento formal, com método de pensamento reflexivo, que requer um tratamento científico e se constitui no caminho para conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais (MARCONI; LAKATOS, 2007, p. 155).

Tal procedimento, composto por múltiplas fases, culmina em resultados significativos para a comunidade científica, devido às discussões provenientes das formulações, descrições ou hipóteses validadas como objetivo da investigação. Ademais, o emprego de método científico, característica basilar das ciências, fundamenta a ação do pesquisador na resolução de inúmeros problemas relacionados à humanidade.

5.1 Caracterização do Tipo de Pesquisa

O presente estudo é caracterizado como pesquisa qualitativa na qual os pesquisadores, segundo Angrosino (2009, p. 9), "[...] estão interessados em ter acesso a experiências, interações e documentos em seu contexto natural e de uma forma que dê espaço às suas particularidades e aos materiais nos quais são estudados". Assim, esse modo de coleta de informações permite uma verificação integrada sobre o fenômeno discutido e, consequentemente, uma experiência sistêmica da realidade.

Concernente aos procedimentos técnicos adotados, o trabalho foi conduzido pela Pesquisa Ação, que conforme Thiollent (2011, p. 20), é descrita como

> [...] um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Severino (2017, p. 91) destaca que tal procedimento visa, além da compreensão, a intervenção na situação a fim de modificá-la, isto é, a partir da análise de um contexto em particular, o processo indica aos sujeitos mudanças que aprimorem as práticas examinadas. Portanto, a pesquisa ação apresenta-se adequada para a presente investigação, já que oportuniza a vivência colaborativa do pesquisador e sujeitos representantes da situação (estudantes) em torno de um problema de natureza coletiva.

5.2 Instrumentos

Como instrumentos para a coleta de dados, utilizou-se de diário de campo para registro das vivências durante as sessões didáticas e de questionários compostos de perguntas abertas para que os participantes da pesquisa pudessem expressar seus pontos de vista alusivos ao ensino e à aprendizagem de geometria a partir do método convencional de ensino e da Sequência Fedathi para subsequente confrontação.

5.3 Local da Pesquisa

O levantamento de dados ocorreu na instituição EEMTI Visconde do Rio Branco pertencente à rede estadual de ensino, com sede na Av. Dom Manuel nº 1803, no bairro do Centro, Fortaleza-Ceará, CEP 60.090-091, com inscrição no Cadastro Nacional da Pessoa Jurídica – CNPJ 01653170001452, Censo Escolar nº 23078529. A escola foi criada pelo Decreto Nº 1635 de 4 de novembro de 1918, sendo instituída por 4 atos em 27 de março de 1919 com o nome de Grupo Escolar Visconde do Rio Branco, ficando conhecida como "Grupo Modelo". Em 10 de julho de 1924, foi inaugurado o novo prédio, recebendo o nome de Grupo Escolar Visconde do Rio Branco.

A referida escola foi selecionada como ambiente de pesquisa devido aos seus resultados favoráveis nos últimos anos. Ainda é oportuno enunciar que o estabelecimento, pelo Decreto Nº 34.796 de 13 de junho de 2022 que instituiu o projeto "Escola Bilíngue", tornou-se escola piloto na adoção da metodologia bilíngue no âmbito da rede pública de ensino do Estado do Ceará, evidenciando o caráter referencial da supracitada instituição.

Além disso, o pesquisador, uma vez que compõe o quadro de professores do colégio, teve acesso à rotina e ao desempenho pedagógico dos estudantes antecipadamente, fato que otimizou o percurso metodológico em suas peculiaridades.

Atualmente, a instituição conta com 182 estudantes residentes em diferentes bairros de Fortaleza e região Metropolitana (ver Figura 29), distribuídos nas turmas de 1º ano (3 turmas), 2º ano (2 turmas) e 3º ano (1 turma) do ensino médio.

Em relação à estrutura física, a escola possui 25 dependências, distribuídas em um prédio com dois andares:

- Térreo: 01 auditório, 02 banheiros para estudantes (masculino e feminino), 01 cozinha, 01 sala de conversação (Inglês), 01 sala de direção, 01 sala de planejamento, 01 sala de multimeios, 01 sala dos professores equipada com banheiros masculino e feminino, 01 secretaria, 01 laboratório de ciências, 01 laboratório de informática e 01 pátio;

- 1º Andar: 01 almoxarifado, 07 salas de aula, 01 sala de coordenação pedagógica, 01 laboratório de redação e 02 banheiros para estudantes (masculino e feminino).

5.4 A escolha dos participantes

O interesse em discutir a Sequência Fedathi como alternativa metodológica para o ensino de geometria plana direciona a pesquisa para a escola, em particular, para a sala de aula. E, para que a investigação seja fidedigna ao tema e problema explorados, é significativo que pesquisador e participantes pertençam a esse universo.

A contextualização acima justifica em parte a escolha dos participantes da investigação como fonte primária de dados, mas não em sua totalidade. Assim, além da explicação preliminar, é necessário distinguir e caracterizar tais sujeitos para que o leitor compreenda de forma mais clara o percurso e conclusões do estudo.

Em geral, a congruência de triângulos, notável e útil para diversos outros assuntos dentro do campo da geometria, é abordada ao longo da primeira série do ensino médio. Por isso, após a eleição desse conteúdo para ser manipulado, escolhemos os estudantes da referida série para participarem do presente estudo. Posteriormente, também adotamos como critério de seleção o menor desempenho escolar na disciplina de geometria e, assim, selecionamos pelos requisitos mencionados, a 1ª série - turma B composta por 29 estudantes. No entanto, para assegurar resultados coerentes com o objeto de estudo, utilizamos como critério de exclusão, a ausência em alguma das sessões didáticas e/ou a não resolução de qualquer um dos questionários. Com isso, a pesquisa contou com a participação de 22 estudantes.

5.5 Procedimentos metodológicos

Preliminarmente, realizou-se um levantamento acerca da realidade do processo de ensino e aprendizagem de geometria plana no ambiente de pesquisa. Essa sondagem ocorreu a partir da experiência pedagógica e também mediante aplicação de questionário constituído por seis questões abertas com os sujeitos participantes do estudo. Sendo a pesquisa-ação um método colaborativo de exame, o instrumento foi imprescindível para o diagnóstico preliminar e, consequentemente, para a análise posterior.

Esse questionário preliminar, identificado nesse estudo como Questionário 1, possibilitou informações que nortearam o trabalho e forneceu elementos para futura comparação entre a metodologia convencional de ensino e a Sequência Fedathi na esfera da educação geométrica dos estudantes. Após essa ação, foi proposta uma aula orientada pelos pressupostos da SF.

Destarte, caracterizando o Plateau da metodologia Fedathi, algumas questões foram apresentadas para o reconhecimento e explicação dos pré-requisitos necessários ao desenvolvimento da vivência da SF num encontro de 2h/aula. Nesse contexto, foram propostas perguntas de baixa complexidade que permitiram uma melhor programação das sessões didáticas que se sucederam.

Em seguida, um problema subdividido em três partes foi enunciado aos discentes para cumprimento das fases características da metodologia Fedathi indicadas por tomada de posição, maturação, solução e prova em mais três sessões didáticas de 2h/aula cada, paulatinamente, objetivando a execução das referidas etapas. Além disso, foi estabelecido o acordo didático em cada encontro, ou seja, os deveres de professor e estudantes em face ao presente estudo para a efetivação das situações.

O pesquisador, sob efeito do empirismo e pautado pelo que fora preconizado pela SF, registrou em diário de campo os acontecimentos em sala por ocasião da aplicação metodológica mencionada e percepções dos outros sujeitos durante todo o percurso didático. Nesse panorama, o discurso do estudante, essencial para o registro dos dados no processo investigativo, recebeu forte estímulo do professor.

Para a execução da atividade, optou-se pela divisão dos estudantes em cinco grupos promovendo a interação entre os sujeitos representativos da averiguação para elevar "[...] o conhecimento ou nível de consciência das pessoas e grupos que participarem do processo, bem como, contribuir para a discussão ou fazer avançar o debate acerca das questões abordadas (THIOLLENT, 1985, p. 14).

Conforme mencionado, as aulas seguiram os preceitos da SF e, por isso, pesquisador e estudantes executaram, além das fases preditas, outros fundamentos característicos do método, como a elaboração de acordo didático em cada sessão didática consumada, para um ambiente favorável ao aprendizado e à pesquisa.

E, como modo de avaliar a efetividade do método diante da expectativa dos discentes, aplicou-se um novo questionário, intitulado Questionário 2, nos mesmos moldes do primeiro questionário para o confronto prometido entre a metodologia convencional e a metodologia Fedathi.

Os questionários foram elaborados com perguntas que tratavam da caracterização, potencialidades, participação ativa dos sujeitos e adversidades enfrentadas nas aulas de geometria na perspectiva de cada uma dessas metodologias de ensino.

Por fim, as respostas foram submetidas à análise, com registro dos *feedbacks* mais relevantes ao nosso estudo, ou seja, consideramos as respostas coerentes aos objetivos da pesquisa. Assim, foram apresentadas e discutidas algumas considerações dos estudantes, dialogando com teóricos que promoveram estudos com os temas indicados nas questões analisadas.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

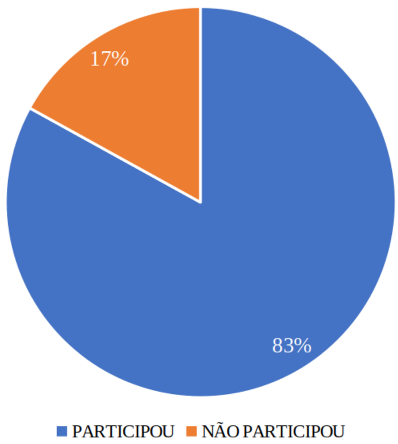
Este seção está estruturada em subseções para uma melhor compreensão das atividades desenvolvidas com os sujeitos dessa pesquisa. Apresentamos os resultados extraídos dos questionários, das percepções e dos registros de campo, as análises comparativas entre os modelos de ensino convencional e Fedathi, o contexto teórico que fundamentou os processos e suas implicações.

6.1 Análise de Questionários

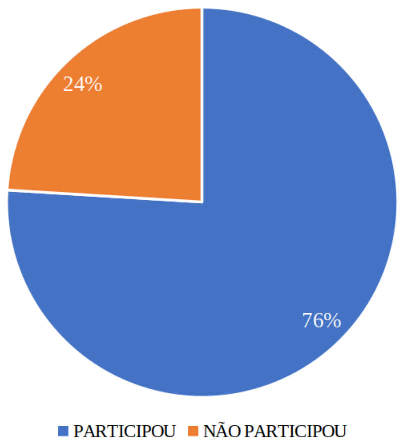
O gráfico da Figura 18 apresenta a participação dos estudantes nos questionários elaborados na presente pesquisa.

Figura 18 – Participação dos estudantes no questionários

(a) Questionário 1



(b) Questionário 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

O Questionário 1 tem a finalidade de investigar a percepção dos estudantes acerca da geometria e metodologia convencional aplicada por ocasião das aulas cotidianas desse componente curricular. Já o Questionário 2 se propõe a averiguar como as sessões didáticas elaboradas nessa pesquisa foram caracterizadas e avaliadas pelos estudantes no contexto da Sequência Fedathi.

A seguir, exibimos os questionamentos feitos aos sujeitos da pesquisa, bem como algumas das considerações do grupo pesquisado e inferências apoiadas em estudos similares. É oportuno mencionar que as respostas foram selecionadas segundo os objetivos dessa investigação, possibilitando uma discussão adequada relativa ao problema do estudo. Ressalta-se ainda, a fim de assegurar o anonimato dos participantes, que estes serão denominados pelas 22 primeiras letras do alfabeto, de A até V, correspondendo com o número efetivo de participantes. Essas informações serão apresentadas em bloco, isto é, para cada pergunta, analisaremos as respostas de ambos os questionários com intenção comparativa.

De acordo com a Tabela 1, os estudantes apresentaram suas expectativas associadas às aulas de geometria desenvolvidas mediante o método convencional, bem como suas impressões acerca da utilização da Sequência Fedathi baseadas nas experiências pessoais com as temáticas.

Tabela 1 – Resultados representativos da questão 1 dos Questionários 1 e 2

***Q1. Na sua opinião, como deveriam ser trabalhados os conhecimentos de geometria durante as aulas?**	
ESTUDANTES	**RESPOSTAS**
Estudante B	*Acredito que se fossem dados exemplos aos estudantes, utilizando objetos reais, as aulas sobre geometria plana seriam mais dinâmicas e interativas. A compreensão seria facilitada. Por exemplo, quando se fosse falar de um retângulo, seria interessante utilizar algum objeto retangular para explicar o conteúdo de forma interativa;*
Estudante K	*Sendo práticas e interativas;*
Estudante H	*Por maneira mais prática, utilizando a sala de aula como meio de ensino.*
***Q2. Na sua opinião, como foram trabalhados os conhecimentos de geometria durante as aulas?**	
ESTUDANTES	**RESPOSTAS**
Estudante B	*De uma forma bastante dinâmica. Os conhecimentos foram passados aos estudantes de forma clara, acredito que isso serviu para facilitar a compreensão dos estudantes;*
Estudante S	*De uma maneira bem diferente das aulas normais, os exercícios exploraram bastante o que estava sendo tratado;*
Estudante F	*Foram trabalhados de forma interativa, e principalmente estimulando o pensamento lógico dos estudantes.*

Fonte: Dados da pesquisa, 2023. *Q1 – Questionário 1. *Q2 – Questionário 2.

É observado em Q1 que o modelo de aula hegemônico, o modelo convencional, não aparenta ser o mais adequado para proporcionar o dinamismo almejado pelos discentes. Nesse sentido, há concordância com Mazzi (2018), por defender a mudança desse método de ensino, no qual o estudante "[...] 'assiste' à demonstração e depois, apenas aplica o resultado".

Os estudantes expuseram não somente suas aspirações, mas também sugeriram que o ensino geométrico ainda carece de meios que o tornem eficiente. Assim, um exemplo de estratégia alvitrada foi a utilização de objetos realísticos que reproduzissem as formas geométricas estudadas. Essa sugestão também atribui um caráter prático ao tema e corrobora com Kaleff (2003), Palhano *et al.* (2019), que recomendam a observação do objeto de estudo em Geometria e a contextualização dessas formas na sua realidade para a promoção de um aprendizado com sentido.

Em contrapartida, em Q2, os estudantes asseveram a aceitação da Sequência Fedathi indicando que a metodologia favorece a compreensão dos ensinamentos. Desta forma, os estudantes consideraram as aulas orientadas pelo modelo Fedathi como dinâmicas e estimulantes, validando os estudos de Sousa (2015), que apontaram a promoção de atividades interativas e colaborativas nesse contexto metodológico.

A utilização de um problema desafiador sem indicação prévia de técnica para sua resolução, característica do método Fedathi, estimulou os estudantes a elaborarem uma estratégia que pudesse solucionar a questão e o depoimento de alguns deles coincide com essa declaração. Essa iniciativa é importante para que o estudante seja protagonista da própria aprendizagem refletindo sobre sua atuação na escola e no mundo.

Quando comparadas as respostas em Q1 e Q2, observa-se que a Sequência Fedathi cumpriu as reivindicações expressas pelos estudantes por diferir do método convencional e contribuir para que os sujeitos exercitem o pensamento lógico-dedutivo proposto por Borges Neto (2016).

A Tabela 2 é relevante para a reflexão sobre a aprendizagem dos entes geométricos amparada no método convencional e na Sequência Fedathi, porque apresenta a relação dos estudantes com o tema e possibilita uma intervenção pedagógica assertiva frente aos obstáculos enunciados.

Tabela 2 – Resultados representativos da questão 2 dos Questionários 1 e 2

***Q1. Quais os principais desafios que você enfrenta durante o ensino e a aprendizagem dos conceitos geométricos?**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**
Estudante G	*No geral eu entendo as aulas, mas sempre me perco nos cálculos;*
Estudante C	*Decorar fórmulas para as atividades, e sempre perder o foco durante as explicações ou até mesmo em prova;*
Estudante A	*A matéria é difícil por si só, se a metodologia do professor não for boa, a matéria fica quase incompreensível.*

***Q2. Quais os principais desafios que você enfrentou durante as sessões didáticas?**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**
Estudante L	*Reconhecer qual a conta que deveria fazer;*
Estudante I	*Eu tive um pouco de dificuldade em entender um pouco algumas coisas, mas tirando isso foi de boa;*
Estudante T	*A conclusão dos desafios.*

Fonte: Dados da pesquisa, 2023. *Q1 – Questionário 1. *Q2 – Questionário 2.

A comunicação reproduzida em Q1 sugere a existência de alguns obstáculos ao aprendizado em geometria encontrados pelos estudantes no ambiente escolar. Desses, a técnica de memorizar uma expressão matemática é um modo equivocado de transmissão de conhecimento porque não assegura um saber duradouro, nem tampouco um aprendizado verdadeiro. Nesse contexto, Santarosa (2016) e Pimenta *et al.* (2023), afirmam que a aprendizagem em Matemática e em áreas afins tem ocorrido prioritariamente de forma mecânica, na qual os estudantes permanecem passivos e não aplicam efetivamente o conhecimento matemático.

Uma metodologia inadequada, aliada às dificuldades operatórias, configura-se como empecilho para a transmissão dos saberes aos discentes, pois ao executar um método de ensino ineficiente, o professor não atende às demandas cognitivas dos estudantes. Assim sendo, segundo Pereira *et al.* (2018), o docente tem o desafio de promover estratégias que contribuam para ensinar o saber científico aos estudantes.

Os dados extraídos de Q2 indicam uma abordagem metodológica fundamentada em pressupostos construtivistas nos quais o conhecimento é elaborado mediante estágios de desequilíbrio, ou seja, existe a necessidade de esforço para o entendimento. Almouloud (2019), pautado pelas ideias piagetianas, afirma que o desenvolvimento da inteligência ocorre por adaptação do sujeito a situações cujos conhecimentos e competências disponíveis não se mostram suficientes.

Portanto, depreende-se de Q1 e Q2, que a metodologia convencional pode produzir elementos impeditivos para a aprendizagem da geometria, enquanto os desafios propostos pela Sequência Fedathi favorecem a compreensão geométrica.

Na Tabela 3, os estudantes descreveram as ações docentes na perspectiva das metodologias convencional e Fedathi durante a instrução dos assuntos desse ramo da matemática antes e depois das sessões didáticas experienciadas na presente pesquisa.

Tabela 3 – Resultados representativos da questão 3 dos Questionários 1 e 2

***Q1. Descreva resumidamente quais ações (metodologia) o professor utiliza para ensinar os conteúdos de geometria plana em sala de aula.**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**
Estudante B	*Normalmente, os professores colocam o conteúdo no quadro, os estudantes copiam e logo depois ele explica. Os professores costumas passar algumas atividades para exercitarmos o conteúdo;*
Estudante S	*O professor costuma, ao trazer um conteúdo novo, ele apresenta o tema, depois mostra exemplos que ele resolve, depois escreve mais exemplos para os estudantes fazerem sozinhos (ajudando um pouco) e depois os corrige;*
Estudante L	*Explica várias e várias vezes a mesma coisa, ao invés de fazer vários exercícios.*
***Q2. Como você descreve as ações (metodologia) do professor na perspectiva da pesquisa em curso?**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**
Estudante C	*Boas, as questões foram interessantes. Ajudou pacientemente com as dúvidas e nos conselhos no problema passado;*

Estudante F	*Para mim, a forma que o professor tira um tempo relativamente grande para ajudar o estudante a compreender o conteúdo, sem que ele se sinta pressionado;*
Estudante K	*O professor tentou estimular o nosso conhecimento.*

Fonte: Dados da pesquisa, 2023. *Q1 – Questionário 1. *Q2 – Questionário 2.

Os resultados em Q1 indica ações típicas de uma metodologia convencional. Em geral, nesse modelo, as aulas são expositivas, repetitivas e não promovem uma análise crítica dos sujeitos. Nessa conjuntura, os estudantes são obrigados a observarem a ação do professor e apenas replicá-la em situações semelhantes. Sobre isso, Bissolotti e Titon (2022), destaca que o Movimento da Matemática Moderna suscitou falhas no ensino desde a formação dos professores, pois deduções e demonstrações foram negligenciadas. Isso significa que um número acentuado de docentes atua de modo convencional em virtude de dificuldades próprias relativas aos conceitos e sobre o trabalho pedagógico.

É evidenciado em Q2, um sistema de colaboração entre professor e estudantes. Essa constatação é resultado do estímulo docente à produção de conhecimento e a postura autônoma dos estudantes durante todo o processo de instrução, em concordância com Cruz *et al.* (2014), que atribui ao acordo didático esse modo dos sujeitos se relacionarem.

De maneira distinta de Q1, as respostas obtidas em Q2 sugerem que o interesse dos estudantes foi resgatado pela proposição de problemas sem que exemplos ou exercícios fossem resolvidos anteriormente pelo docente. Outros elementos preconizados pela Sequência Fedathi, como o contraexemplo, o uso de perguntas e o respeito ao tempo de maturação dos estudantes foram determinantes para essa conclusão.

A interação entre docente e discentes é fundamental para que haja uma aprendizagem efetiva. Por isso, a Tabela 4 explora o entendimento dos aprendizes sobre a relação didática entre os sujeitos supracitados nas perspectivas dos métodos considerados.

Tabela 4 – Resultados representativos da questão 4 dos Questionários 1 e 2

***Q1. Como professor e estudante interagem no decorrer das aulas? De modo objetivo, descreva essa relação.**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**
Estudante S	*Os estudantes interagem bastante com o professor durante a explicação;*
Estudante C	*Normalmente, ele passa a atividade sobre o conteúdo e nos deixa fazendo, e logo depois ele dá o visto e corrige;*
Estudante B	*Quando um estudante tem alguma dúvida, ele consulta o professor para tirar sua dúvida. O professor pode pedir para um estudante resolver determinada atividade, fazendo com que o estudante exercite e aprenda o conteúdo.*
***Q2. Como professor e estudante interagiram no decorrer das sessões? De modo objetivo, descreva essa relação.**	

ESTUDANTE	RESPOSTAS
Estudante O	*O professor instiga os estudantes a achar uma maneira de resolver sozinhos e depois ele ensina;*
Estudante D	*Os estudantes tirando dúvidas, e o professor explicando os objetivos;*
Estudante B	*Os estudantes tiram suas dúvidas com o professor e o professor faz diversas perguntas estimulando os estudantes.*

Fonte: Dados da pesquisa, 2023. *Q1 – Questionário 1. *Q2 – Questionário 2.

Nota-se em Q1, que professor e estudantes interagem para que haja a simples reprodução, pelos estudantes, de uma técnica ou resposta pronta em atividades. Desse modo, a prática de ensino não é dialógica, fato que dificulta a progressão de uma aprendizagem significativa. Pimenta *et al.* (2023) ratifica essa inferência ao mencionar que uma aprendizagem automática demanda pouca ou nenhuma interação com noções pré-existentes na organização cognitiva do aprendiz.

As respostas em Q2 são baseadas numa ação didática de estímulo ao desenvolvimento intelectual. Destaca-se para esse fim, a explicação dos objetivos frente aos temas a serem ensinados e o incentivo à resolução de problemas a partir da investigação, como observado nos estudos de Santos *et al.* (2019).

Diante do exposto em Q1 e Q2, os modelos de ensino convencional e Fedathi possuem preceitos distintos no que se refere à interação entre professor e estudante e à qualidade da aprendizagem.

Na Tabela 5, os estudantes responderam como os métodos de ensino analisados fomentam a participação ativa dos educandos no ambiente escolar, auxiliando na nossa reflexão sobre a efetividade da metodologia Fedathi.

Tabela 5 – Resultados representativos da questão 5 dos Questionários 1 e 2

***Q1. Você acredita que o método utilizado pelo professor estimula a participação ativa dos estudantes na sala de aula? Comente.**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**
Estudante G	*Não, é bem entediante e dá sono;*
Estudante B	*Acredito que o método utilizado não permite que as aulas sejam interativas, para mim, esse método torna as aulas cansativas, fazendo com que a maioria dos estudantes não se interesse pelo conteúdo. O que acentua o desinteresse dos estudantes por geometria plana é a grande dificuldade que muitos possuem em entender essa e outras áreas da matemática. Acho que deveriam ser criados novos métodos para ensinar geometria plana e as outras áreas da matemática;*
Estudante S	*Não, pois é uma aula em que ele traz o conteúdo e apenas o mostra na lousa e depois passa exercício, para estudantes que demoram a entender, uma aula parada não é muito proveitosa.*
***Q2. Você acredita que a Sequência Fedathi estimula a participação ativa dos estudantes na sala de aula? Comente.**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**

Estudante I	*Sim. Porque deixa os estudantes mais participativos e com expectativas de tentar descobrir o conteúdo;*
Estudante O	*Sim, instiga os estudantes a pensar.*
Estudante B	*Acredito que sim, pois busca métodos que conseguem tornar as aulas dinâmicas e interativas;*

Fonte: Dados da pesquisa, 2023. *Q1 – Questionário 1. *Q2 – Questionário 2.

As opiniões dos estudantes em Q1 sugerem que o método convencional não estimula a participação ativa dos discentes e produz aulas poucos produtivas. A partir desse cenário de descrença, os estudantes solicitam a adoção de novas estratégias metodológicas capazes de sanar a monotonia do ensino expositivo e modificar a realidade de desinteresse diante dos assuntos tratados em sala. Pelizzari (2002) e Pimenta *et al.* (2023) também criticam esse panorama ao dizerem que o estudante precisa participar ativamente do processo de aprendizagem, a partir de reelaboração particular de conceitos, ao invés da repetição de formulações empreendidas pelo professor.

Os pontos de vista em Q2 reproduzem um discurso animador sobre a Sequência Fedathi por esta oportunizar uma participação efetiva para a elaboração do conhecimento. Assim, o estudante deixa de ser expectador e passa a exercer o papel de agente impulsionador para a concretização de aulas inovadoras. Desta forma, Pommer e Pommer (2013) declara que o professor, ao não revelar o objeto de estudo, possibilita ao aprendiz atuar de modo ativo para a construção do saber.

De Q1 e Q2, entende-se que o método de ensino é determinante para a concepção de um processo instrutivo pautado ou não na participação ativa dos estudantes, podendo assim atender às necessidades dos sujeitos em torno de suas aprendizagens.

Os estudantes identificaram na Tabela 6 os elementos favoráveis de cada metodologia discutida nos questionários, propiciando subsídios importantes para a argumentação na pesquisa em execução.

Tabela 6 – Resultados representativos da questão 6 dos Questionários 1 e 2

***Q1. Quais características da metodologia utilizada pelo professor você considera positivas?**	
ESTUDANTE	**RESPOSTAS**
Estudante T	*Prestar atenção nos estudantes e repetir o que ele fala;*
Estudante U	*Quando ele explica as questões passo a passo e dá oportunidade para os estudantes resolverem;*
Estudante H	*Quando fazem uma música com a fórmula para memorizar.*
***Q2. Quais características da metodologia Fedathi você considera positivas?**	

ESTUDANTE	RESPOSTAS
Estudante G	*As tentativas, pois quanto mais tentamos mais conseguimos aprender;*
Estudante I	*De primeiro apresentar o problema e depois explicar o conteúdo daquele problema;*
Estudante L	*Estimula o estudante a se acostumar com situações difíceis, fora da sua zona de conforto.*

Fonte: Dados da pesquisa, 2023. *Q1 – Questionário 1. *Q2 – Questionário 2.

As características indicadas pelos estudantes em Q1 revelam que ações de fomento à repetição e à memorização são importantes para a aprendizagem, o que pode ser questionado conforme observado nas argumentações anteriores.

Com base em Q2, percebe-se que a metodologia Fedathi, ao empregar situações e estabelecer condições para o livre pensamento, desperta nos estudantes a vontade de generalizar resultados e também o aprendizado com os erros. As inúmeras tentativas de solução para um problema permitem ao aprendiz o estabelecimento de justificativas para os conceitos elaborados. Essa asserção é validada por Santos (2017), ao afirmar que a SF impulsiona o estudante à pesquisa, desafiando-o a sair da sua zona de conforto para elucidar situação-problema apresentada pelo professor.

Em síntese, fundado nos resultados das demais tabelas, a Sequência Fedathi apresenta-se como uma metodologia interessante para a dinâmica presente em sala de aula, pois os princípios basilares desse método mostram-se eficientes para o ensino de geometria plana.

6.2 Sessão Didática 1 – *Plateau*

Iniciamos a sessão com a formulação do acordo didático, indicado por Santos (2017), como relevante visto que determina um instrumento normativo com intenção didática e consolida a ação pedagógica ao indicar a função dos sujeitos em torno do trabalho educativo.

Na oportunidade, pesquisador (professor) e participantes concordaram em assumir os seguintes compromissos explícitos:

Como orientado por Felício *et al.* (2021), ao ministrar uma aula, é preciso examinar o nível do conhecimento prévio dos estudantes para a determinação de elemento comum que sirva à realização da aula. Por isso, decorrida essa fase, ocupamo-nos em investigar os conhecimentos necessários para os estudantes resolverem os problemas que iríamos apresentar, isto é, sondar o *plateau*.

Quadro 1 – Acordo didático estabelecido na execução da pesquisa

Compromissos dos estudantes	**Compromissos do pesquisador**
Estar presente nas aulas, com os materiais solicitados, sendo que esses deverão ser providenciados com antecedência;	Apresentar a proposta de cada aula;
Observar os horários de início e término das aulas;	Cumprir os horários de aula, combinados com a turma;
Não usar o celular durante as aulas, somente quando solicitado pelo professor;	Disponibilizar os materiais para as aulas;
Registrar os conteúdos das aulas, pois eles auxiliam na fixação dos conteúdos;	Sem uso de celular, exceto para fazer algum registro importante para a pesquisa (áudio ou foto);
Não desenvolver outras atividades que não sejam relacionadas à pesquisa;	Apresentar questões desafiadoras sobre os conteúdos, privilegiando a relação teórico-prática;
Comprometer-se com as atividades em grupos, contribuindo com os trabalhos a serem desenvolvidos;	Orientar as atividades que serão desenvolvidas em pequenos grupos;
Manter atitude respeitosa com o professor e com o grupo;	Manter atitude respeitosa com o grupo;

Fonte: Adaptado de Althaus *et al.* (2020).

Partindo dessa premissa, observou-se de modo verbal e com uso de projeção (ver Apêndice C) o domínio parcial dos discentes sobre alguns conceitos considerados pertinentes às atividades propostas: ângulo e classificação, polígono, congruência, elementos do triângulo e propriedades e transformações geométricas (translação, reflexão e rotação).

Simultaneamente à arguição, construímos a significação desses temas e demonstramos equipamentos úteis aos procedimentos que se sucederiam, a saber, o compasso e o transferidor, cumprindo desse modo o nivelamento das aprendizagens dos estudantes. Nesse momento, houve a prática de transposição de segmento e de construção (e medição) de ângulo, conduzindo o estudante ao próximo estágio da Sequência Fedathi.

6.3 Sessão Didática 2 – Vivência (Tomada de Posição e Maturação)

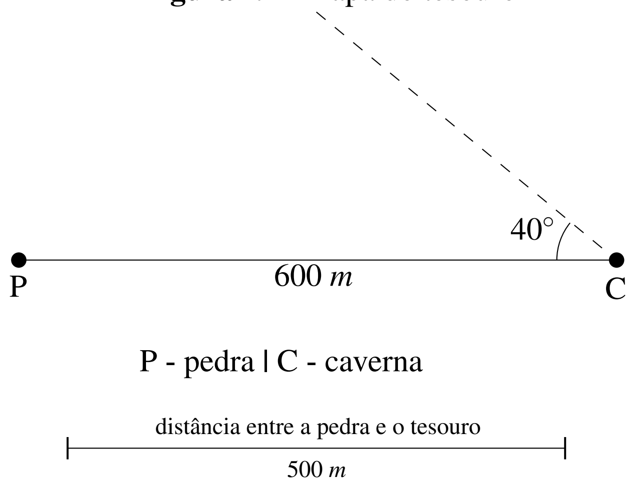
Segundo Sousa (2015), a metodologia Fedathi propõe uma investigação ao estudante, oportunizando-lhe o pensamento, a elaboração e testagem de hipóteses, o erro, o acerto e a obtenção ou não de deduções. Nesse sentido, estruturamos a segunda sessão didática com base no problema abaixo com o propósito de despertar uma ação exploradora nos estudantes:

Problema - Um pirata resolveu enterrar um tesouro em uma ilha e criou um mapa que indicava a sua localização. Mas, devido à umidade presente no navio, o desenho ficou borrado prejudicando assim as futuras buscas. Ainda que o mapa não esteja em bom estado, o pirata deu algumas dicas que podem auxiliar na caça ao tesouro:

"Além do tesouro (enterrado), havia uma pedra e uma caverna que quando ligados formavam um triângulo... Ah! A distância pedra-caverna era maior que a distância pedra-tesouro e havia um ângulo agudo no ponto que representava a caverna que permitia achar todas as riquezas sob a areia."

Sabendo que o tesouro está na semirreta pontilhada, presente na Figura 19, é possível encontrá-lo cavando apenas um buraco, ou seja, existe outro triângulo igual (congruente) partindo dessas mesmas informações? Justifique sua resposta.

Figura 19 – Mapa do tesouro



Fonte: Elaboração própria.

Na época da construção do mapa, o pirata não tinha bons instrumentos de medição, então pode ter se enganado quanto às distâncias reveladas. Por isso, investigue outras possibilidades:

a) As distâncias pedra-caverna e pedra-tesouro iguais e mesmo ângulo (40°).

b) A distância pedra-caverna menor que a distância pedra-tesouro (inverta as medidas) e mesmo ângulo (40°).

Dito isso, reafirmamos o acordo didático firmado na sessão anterior e seguimos com a apresentação dessa questão concretizando a primeira fase da vivência da SF, denominada de *tomada de posição*. Os estudantes, reunidos em grupos e munidos de material fornecido pelo professor (compasso, régua e transferidor) atuaram como matemáticos que buscam produzir um novo conhecimento ou refutar concepções errôneas sobre um tema.

O problema orientou o protagonismo dos estudantes e produziu uma relação distinta entre professor e estudantes, porque de maneira oposta ao método convencional de ensino, o movimento para a resolução foi coordenado pelos próprios discentes. Assim, conforme Menezes *et al.* (2016), percebemos a fase de *maturação* sendo executada quando os estudantes se esforçaram para a compreensão e resolução do problema aventado.

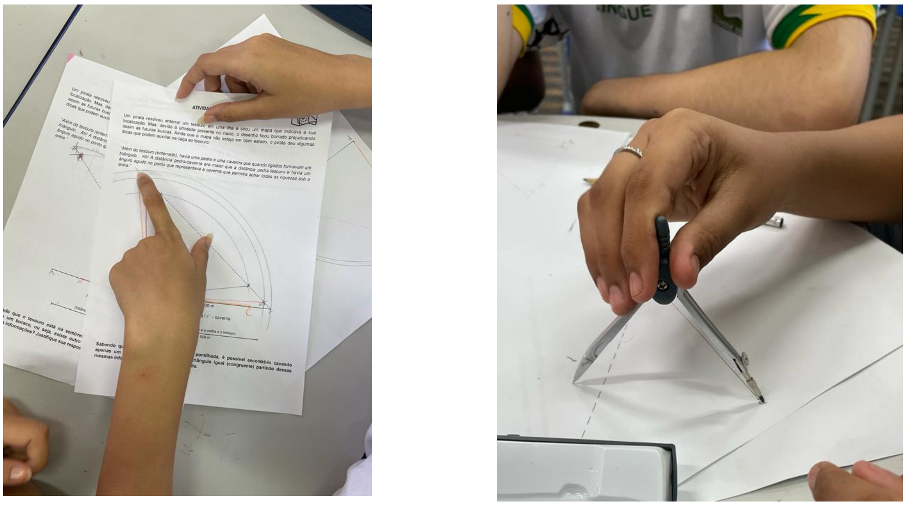
Nesse ambiente investigativo, alguns estudantes nos acionaram e perguntaram se suas estratégias e soluções estavam corretas. Então, houve da nossa parte uma tentativa de intervenção mínima, enfatizando que os sujeitos deveriam refletir sobre as técnicas utilizadas e sua efetividade. Consoante com Mendonça *et al.* (2020), essa postura docente, denominada de Pedagogia "mão no bolso" é uma conduta de incentivo ao raciocínio do discente sobre a resposta dos problemas e os atos que orientam a procura por resultados. Desse modo, o professor não intervém diretamente, mas fomenta a liberdade de ideias, o trabalho em grupo e o compartilhamento de saberes entre os pares.

Pesquisador: Eu estou tentando ajudá-lo a refletir. A ideia é que discutam sobre o problema. Estudante R, por favor, explique para ele o que aconteceu quando você usou a régua nessa primeira questão. O que você fez? Na aula passada, você explicou para mim.
Estudante R: Com a medida de 500 metros dá para fazer dois buracos. Como esse aqui é 600 metros, fica 12 centímetros aqui na régua e esses 500 metros dá 10 centímetros, aí dá para fazer um lado aqui de 10 centímetros e outro aqui.
Estudante T: Ah! O mesmo que dá aqui? Entendi.
Pesquisador: Esse instrumento (régua) é o mais adequado para fazermos esse tipo de construção? Utilize novamente. O que ocorre nesse movimento?
Estudante R: Fica saindo do lugar...
Estudante T: Ah! O certo é o compasso, né não?! Mas aqui no compasso vai fazer um círculo...
Pesquisador: Experimente e veja o que acontece.

É relevante mencionar que os sujeitos demandaram de uma nova explicação sobre o questionamento formulado e, por isso, precisamos reapresentá-lo de modo a corrigir possíveis falhas na comunicação inicial. Nesta altura, enquanto muitos concebiam e executavam planos para solucionar o problema, outros se mantinham inertes em seus grupos. Desta forma, também atuamos com o intuito de motivá-los diante do problema e, depois disso, notamos um enorme empenho desses indivíduos para solucionar a questão. A Figura 20 mostra (a) os estudantes na fase de tomada de posição e (b) na fase de maturação a partir do problema enunciado.

Figura 20 – Fases de tomada de posição e maturação

(a) Tomada de posição **(b)** Maturação



Fonte: Imagem do autor.

6.4 Sessão Didática 3 – Vivência (Solução)

Nesse instante, conforme planejado, os estudantes já começaram a esboçar os resultados de suas reflexões. Desta forma, inauguraram a terceira fase da SF, designada de fase de solução com a elaboração de conclusões por meio de esquemas, desenhos, textos e oralidade.

Observamos alguns equívocos no que tange aos planos de resolução e, portanto, nas respostas dos aprendizes no decurso dos trabalhos. Todavia, para Pinheiro *et al.* (2016), "[...] os erros são parte desse processo, e a partir de cada pensamento individual, sua socialização e troca de conhecimento, a mediação deve ocorrer no sentido de levar a formalização do conhecimento matemático intuído". Por isso, passamos a questionar os estudantes a respeito das táticas empregues e a apresentar contraexemplos para auxiliá-los no percurso investigativo. O diálogo seguinte ilustra essa situação:

Pesquisador: Quantos triângulos você encontrou?

Estudante M: Somente um.

Pesquisador: E como fez para encontrá-lo?

Estudante M: Peguei a régua, medi e encaixei para encontrar o tesouro.

A maioria dos estudantes solucionou corretamente a questão após algumas tentativas. Nessa fase, apenas o estudante do diálogo acima informou que dados dois lados e um ângulo não formado por eles, pode-se formar dois triângulos congruentes entre si, o que foi contradito no instante que os discentes dos outros grupos puderam socializar suas descobertas. Uma estratégia correta é descrita baseada no diálogo:

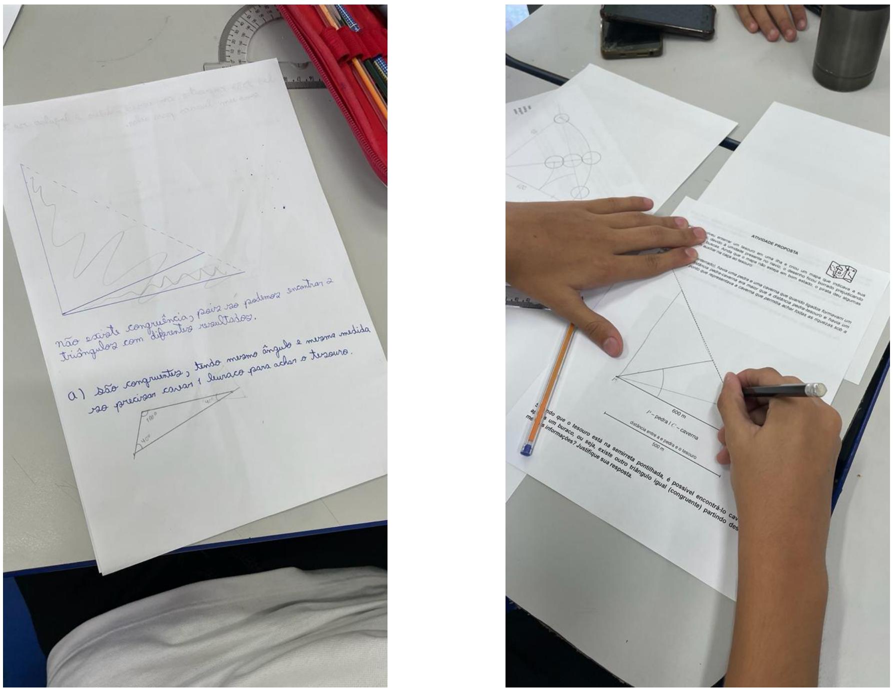
Estudante F: O que vamos fazer?

Estudante S: No item A, está falando da distância da pedra até a caverna, no caso o segmento PC, e da pedra ao tesouro, segmento PT, iguais e o mesmo ângulo de 40º. Então, a gente vai pegar o primeiro que é PC, que vai ser a base, que é igual a 600, depois vamos pegar do ponto P e vamos cruzar um semicírculo até a outra linha pontilhada, e aí a gente vai chegar onde vai está o tesouro, desse item.

Após a resolução do problema, alguns estudantes foram convidados para explicarem os procedimentos usados e as suas soluções para a turma, possibilitando assim que aprendessem uns com os outros sob a condição do respeito pelos pares. A Figura 21 exibe em (a) e (b) algumas das soluções elaboradas pelos estudantes.

Figura 21 – Fase de solução

(a) Solução A **(b)** Solução B



Fonte: Imagem do autor.

6.5 Sessão Didática 4 – Vivência (Prova)

Essa sessão didática, denominada fase de *prova*, destinou-se à apresentação de um conteúdo já visto pelos estudantes, mas que não havia sido indicado como meio para a resolução do problema em questão: a Congruência de triângulos. De modo específico, havíamos proposto uma atividade que envolvia um caso de não congruência (lado, ângulo adjacente e lado oposto) e, nesse instante, nos propomos a resolvê-lo para que os estudantes pudessem avaliar as próprias conjecturas e perceber suas imprecisões relacionadas ao problema inicial.

Em seguida, analisamos sob que circunstâncias a congruência era observada e justificamos as deduções a partir da construção de triângulos com o uso de régua, transferidor e compasso, finalizando assim essa fase de generalização dos resultados.

Finalmente, ressaltamos a atenção e a interação dos estudantes durante a explicação, produzindo assim a ressignificação do assunto e o entendimento sobre a investigação iniciada na tomada de posição. Esse diagnóstico foi concebido por meio da observação do comportamento dos sujeitos avaliados no decurso de toda a pesquisa e proposições importantes para a investigação.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho descrito promoveu uma reflexão sobre a Sequência Fedathi como abordagem metodológica de Geometria Euclidiana Plana no nível médio diante dos desafios impostos ao ensino e ao aprendizado desse componente curricular. Deste modo, foram aplicados questionários qualitativos e executadas sessões didáticas orientadas pela SF para a coleta de dados destinados à compreensão de toda essa realidade e, por conseguinte, pôde-se responder como essa metodologia contribui para a aprendizagem em geometria.

No decurso da pesquisa, os estudantes indicaram que a utilização de um problema desafiador sem indicação prévia de técnica para sua resolução, característico do método Fedathi, confirmou-se como estratégia assertiva ao exercício do pensamento lógico-dedutivo. Assim, a metodologia Fedathi favorece a compreensão dos ensinamentos, com aulas dinâmicas e estimulantes, em contrariedade do observado em aulas direcionadas pelo método convencional.

Observou-se também que a Sequência Fedathi, caracterizada e vivenciada nesse estudo, produziu o estímulo postulado pelos estudantes com a inserção de estratégias importantes para a aprendizagem, como a utilização do acordo didático e de contraexemplos. Nessa perspectiva, os aprendizes atuam de forma autônoma e são protagonistas da própria formação, enquanto os professores agem como mediadores do processo instrutivo.

De acordo com os estudantes, o incentivo à memorização de conceitos prejudica à transposição didática do conhecimento porque essa técnica não promove um saber que perdure e um aprendizado legítimo. Entretanto, a abordagem construtivista da Sequência Fedathi segue outra concepção e facilita a compreensão geométrica ao estabelecer desafios que produzem uma postura de investigação em detrimento de respostas prontas formuladas pelo professor.

Conforme exposto acima, as aulas expositivas e repetitivas produzidas pela metodologia convencional obrigam o estudante a replicar a prática docente em circunstâncias idênticas. E, a relação entre professor e aprendiz sugerida pela Sequência Fedathi, proporciona ao estudante meios para a produção de conhecimento durante o processo de instrução.

Em suma, percebeu-se a necessidade de mudanças no modo convencional de ensino dado que não tem respondido às exigências impostas pela geometria no contexto da sala de aula. Ainda que, a metodologia Fedathi, ao estabelecer o livre pensamento, valoriza os erros oriundos das tentativas de resolução e desperta nos estudantes a disposição de generalizar resultados.

Além disso, a amostra dos sujeitos participativos do estudo, caso fosse maior, poderia conceder informações relevantes para diferentes inferências para a investigação. Perante o exposto, sugere-se o desenvolvimento de outros estudos considerando esse fator limitante e ampliando a discussão para os cursos de formação docente na tentativa de produzir soluções para o ensino de geometria.

Por fim, fundado nos dados obtidos na atual dissertação, conclui-se que a Sequência Fedathi é uma ferramenta significativa para a obtenção de melhores resultados no ensino de geometria plana quando comparados com a metodologia convencional.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. As lacunas do ensino de Álgebra no ensino fundamental: uma análise a partir da transposição didática. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2016.

ALMEIDA, A. J.; MATOS, J. M. **A Matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)**. Lisboa: APM, 2014.

ALMEIDA, F. E. L.; LIMA, A. B. As negociações e efeitos de contrato didáticonuma sala de aula de matemática. In: AL., A. P. A. de Brito Lima et (Ed.). **Fenômenos Didático em uma aula de introdução à álgebra: múltiplos olhares e perspectivas teóricas**. [S.l.]: Editora UFPE, 2017. p. 137–153.

ALMEIDA, F. E. L.; LIMA, A. P. d. A. B. Negociações do contrato didático na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e na resolução da equação no 8º ano do ensino fundamental. **Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 77–102, 2013.

ALMEIDA, H. A. de; JÚNIOR, Á. L. Relações entre a teoria da transposição didática e as analogias no ensino de ciências. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 6, p. 644–662, 2020.

ALMOULOUD, S. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 11, n. 2, p. 109–141, 2016.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. [S.l.]: Editora UFPR, 2010.

ALMOULOUD, S. A. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. **Educar em Revista**, número especial, p. 191–210, 2011.

ALMOULOUD, S. A. Diálogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 9, n. 1, 2019.

ALTHAUS, M. T. M.; BAGGIO, V. A.; ZANON, D. P. O contrato didático na aula universitária. **Revista Docência do Ensino Superior**, v. 10, p. 1–13, 2020.

ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N. Uma leitura sobre as origens do movimento da matemática moderna (mmm) no brasil. **Revista Tópicos Educacionais**, v. 22, n. 2, p. 6–22, 2016.

ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, v. 7, n. 21, p. 131–150, 2016.

ALVES, F. R. V. e. a. Didática das ciências e matemáticas: Alguns pressupostos. **Interfaces da Educação**, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, v. 8, n. 22, p. 274–302, 2017.

ALVES, R. **A alegria de ensinar**. [S.l.]: Papirus Editora, 2012.

ANDRADE, W. M.; SILVA, E. M. d.; MELO, A. C. M.; MENDES, M. B.; SILVA, F. d. C. d.; LIMA, M. d. C. d. A metodologia sequência fedathi no processo de formação docente, de ensino e de aprendizagem da matemática: Uma revisão integrativa. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 12, p. 29858–29869, 2019.

ANGROSINO, M. **Etnografia e observação participante: coleção pesquisa qualitativa**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.

ANTUNES, F. C. A.; MERLI, R. F.; NOGUEIRA, C. M. I. A construção da didática da matemática na frança e sua influência sobre as pesquisas brasileiras. In: **Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2019.

ARAÚJO, C. H. D.; MENEZES, D. B.; NETO, H. B. Sequência fedathi e o papiro de rhind: o caso do problema 79. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, n. 19, p. 41–56, 2020.

AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V.; OLIVEIRA, J. C. Obmep e teoria das situações didáticas: uma proposta para o professor de matemática. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 12, n. 19, p. 82–92, 2018.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995. (Coleção Do Professor De Matemática).

BARKER, S. F. **Filosofia da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

BARROS, R. C. D. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a bncc? **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 15, n. 1, p. 11–19, 2022.

BEZERRA, A. M. A. A compreensão do plateau no campo dos ensino das ciências. In: NETO, H. B. (Ed.). **Sequência Fedathi além das ciências duras**. Curitiba: CRV, 2017.

BEZERRA, A. M. A. O plateau como elemento de reflexão e melhoria das práticas escolares. In: ____. **Sequência Fedathi: fundamentos**. Curitiba: Crv, 2018. p. 132–146.

BISSOLOTTI, M. d. L.; TITON, F. P. Diagnóstico sobre as dificuldades de aprendizagem da geometria no ensino médio e os potenciais elementos facilitadores. **CONTRAPONTO: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, v. 3, n. 4, p. 5–22, 2022.

BORGES NETO, H. **Uma proposta lógico-dedutiva-construtiva para o ensino de matemática**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

BORGES NETO, H. **Sequência Fedathi: fundamentos**. Curitiba: Crv, 2018.

BORGES NETO, H. **Sequência Fedathi: interfaces com o pensamento pedagógico (Coleção Sequência Fedathi, v. 4)**. Curitiba: EDITORA CRV, 2019.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 2023-11-10.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 2020-03-10.

BRASIL, S. d. E. F. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. **Secretaria de Educação Fundamental-Brasília: Mec/sef**, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33–116, 1986.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e métodos da Didáctica da Matemática**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 34–113 p.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics: didactique dês mathématiques, 1970-1990**. Países Baixos: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. Contrato didático: o não dito é essencial. **Nova escola**, 2013.

BURIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.

CAMILO, A. M. da S.; ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F. Uma abordagem acerca das principais teorias presentes na didática da matemática. **CONTRAPOONTO: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, v. 2, n. 2, p. 6–23, 2021.

CARMO, J. L. S. D.; FONSECA, R. V. Conceito de *milieu*: uma contribuição teórica para a educação matemática. **Revista Diálogo Educacional**, v. 23, n. 92, p. 1–18, 2016.

CHEVALLARD, Y. **Pourquoi la transposition didactique?** Grenoble: Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1982. 167–194 p.

CHEVALLARD, Y. **La tranposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado**. [S.l.]: Editora Aique, 1991.

CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M.-A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique – la notion de distance. **Recherches en Didactique des mathematiques**, v. 3, n. 2, p. 157–239, 1982.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In: **Perspectives on mathematics education**. [S.l.]: Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243–307.

CIVIERO, P. A. G.; SANT'ANA, M. d. F. Roteiros de aprendizagem a partir da transposição didática reflexiva. **Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 681–696, 2013.

COSTA, A. P. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no brasil. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 9, n. 1, p. 128–152, 2020.

COSTA, B. R.; MACHADO, S.; QUARESMA, A. A utilização da história da matemática no ensino de geometria plana. **Bol. Cearense Educ. e Hist. Mat.**, v. 7, n. 20, p. 253–265, 2020.

COSTA, L. d. F. M.; GHEDIN, E. Importância da consideração dos processos cognitivos na didática da matemática. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, n. Edição Esp, p. e022046–e022046, 2022.

CRUZ, F. F. de S.; CRUZ, S. M. C. S. d. S.; SANTOS, P. J. S. d. Reflexões sobre o ensino a distância à luz da noção de contrato didático. **Revista Linhas**, v. 15, n. 28, p. 345–369, 6 2014. Disponível em: <https://revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1984723815282014345>.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matematica elementar, 9: geometria plana**. São Paulo: Atual, 2013.

DORIER, J.-P. Aperçu de l'histoire de la didactique des mathématiques francophone. **Perspectivas da Educação Matemática**, SBM, v. 7, n. 21, p. 365–379, 2014.

DOUADY, R. Didátiques des mathematiques. **Les Cahier Rouge**, n. 6, p. 1–22, 1984.

DOUADY, R. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en francia. **Ingeniería Didáctica en educación**, p. 1–7, 1995.

ELOI, Q. C.; ANDRADE, V. L. V. X. d. Relações entre o livro didático e o contrato didático: a proposição do contrato didático potencial (cdp). **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 22, n. 1, p. 1–22, 2020.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. [S.l.]: Editora Unicamp, 1997.

FANTINEL, P. C. **Representações gráficas espaciais para o ensino de cálculo e álgebra linear**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, 1998.

FELÍCIO, M. S. N. B.; MENEZES, D. B.; NETO, H. B. Sequência fedathi para mudança de prática: estudo de caso de uma experiência com o teatro científico. **Revista Teias**, v. 22, n. 64, p. 132–150, 2021.

FILHO, J. P. A. Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 17, n. 2, p. 157–239, 2000.

FOUZ, F.; DONOSTI, B. D. Modelo de van hiele para la didáctica de la geometría. **Un paseo por la geometría**, 2005. Disponível em: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf>.

FRANCO, D. L. A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de física moderna no ensino médio. **Revista triângulo**, v. 11, n. 1, p. 151–162, 2018.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. [S.l.]: Paz e Terra, 1975.

FREITAS, B. A. **Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o Geogebra**. [S.l.]: UFJF, 2013.

GÁLVEZ, G. **A didática da matemática**. [S.l.]: Artmed, 1996.

GOIS, A. S. e. a. Desenvolvimento de sequência didática com a utilização do geoplano no ensino de figuras planas na 1ª série do ensino médio. **Revista Prática Docente**, v. 5, n. 2, p. 582–607, 2020.

GONÇALVES, M. D. **Uma abordagem para a construção de triângulos e do Teorema de Pitágoras mediada pelo software SuperLogo**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.

GORODSKI, C. **Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria**. 2002. Disponível em: <http://www.ime.usp.gorodski/ps/>.

HIELE, P. M. V. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. New York: Academic Press, 1986.

JAIME, A. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento**. Tese (Doutorado) — Universidad de Valencia, 1993.

JONNAERT, P. **Criar condições para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

JÚNIOR, C. A. A.; CALDATO, J. C. Raciocínio argumentativo em matemática no pisa e na bncc: uma investigação com estudantes da educação básica. **Boletim GEPEM**, n. 78, p. 21–38, 2021.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. Niterói: EdUFF, 2003.

KLUTH, V.; ALMOULOUD, S. Transposição didática em chevallard: conceitos e teorização primordiais para a teoria antropológica do didático. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 15, n. 1, p. 1–22, 2020.

KOPKE, A. M. Monitoria: Um aprendizado sobre a docÊncia. In: **XXXIV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2006. p. 1584–1589.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LAVOR, O. P.; OLIVEIRA, E. A. G. Grandezas proporcionais: sequência didática na formação inicial de professores. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 10, n. 1, p. e22014–e22014, 2022.

LOBATO, L. F. **Desafios do ensino de geometria no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Corrente, PI, 2019.

LOPES, K. M. V.; OLIVEIRA, R. d. F. S. de; VIZOLLI, I.; DARSIE, M. M. P. As sequências didáticas no ensino de ciências e matemática no brasil. **Revista Internacional Educon**, v. 1, n. 1, p. e20011011–e20011011, 2020.

LORENZATO, S. A. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Blumenau, v. 4, n. 3, p. 3–13, 1995.

MANFIO, F. **Fundamentos da Geometria**. 2013. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/pessoas/manfio/Fundamentos.pdf>.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia do trabalho científico: procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos**. [S.l.]: Atlas, 2007.

MARGOLINAS, C. Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activité du professeur. In: DORIER, J.-L.; ARTAUD, M.; ARTIGUE, M.; BERTHELOT, R.; FLORIS, R. (Ed.). **Actes de la 11ème École d'Eté de Didactique des Mathématiques**. [S.l.]: La Pensée Sauvage, 2002. p. 31–46.

MAROQUIO, V. S. Sequências didáticas como recurso pedagógico na formação continuada de professores. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 10, p. 95397–95409, 2021.

MATOS, E. D. A.; SCIPIÃO, L. R. d. N. P.; TÔRRES, L. M. G. Proposta didática para o ensino de matemática do 6o ano do ensino fundamental utilizando dados da pandemia da covid-19. **Abakós**, v. 11, n. 1, p. 104–124, 2023.

MATOS, F. C. C. **Formação docente em ensino de matemática anos iniciais do ensino fundamental: caminhos trilhados a partir da metodologia Sequência Fedathi e da Teoria da Objetivação**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de Geometria**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2018.

MAZZINI, T. F. dos S.; SANTOS, M. E. K. L. dos. Teoria de van hiele: os níveis de pensamento geométricos de alunos concluintes do ensino fundamental. **Revista de Casos e Consultoria**, v. 12, n. 1, p. e27013–e27013, 2021.

MENDONÇA, A. F. **Sequencia fedathi: fundamentos**. Curitiba: EDITORA CRV, 2018. v. 3.

MENDONÇA, A. F.; OLIVEIRA, S. S. D.; NETO, H. B. Análise de conteúdo do percurso formativo continuado docente mediante as propostas da sequência fedathi e do professor reflexivo. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 5, n. 2, p. 1–19, 2020.

MENEZES, D. B. **O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva da Sequência Fedathi: Caracterização do Comportamento de um Bom Professor**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, 2018.

MENEZES, D. B.; NETO, H. B.; MENDONÇA, A. F.; FONTENELE, F. C. F. A aplicação de problemas sobre taxas relacionadas com a metodologia sequência fedathi. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–10.

MONTEIRO, I. A. **O desenvolvimento histórico do ensino de Geometria no Brasil**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Instituto de Biociências exatas, 2015.

NASSER, L.; SAN'ANNA, N. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. 4. ed. [S.l.]: Projeto Fundão, 2004.

OLIVEIRA, M. M. d. **Sequência didática formativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J. C. P. Visualização e representação geométrica com suporte na teoria de Van Hiele. **Ciência e Natura**, v. 39, n. 1, p. 108–117, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/39170>. Acesso em: 2020-10-10.

PALHANO, M.; OLIVEIRA, F. de; GROSSI, L. A realidade aumentada no ensino de sólidos geométricos. In: **Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE)**. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1012.

PASSOS, A. Q.; BURIASCO, R. L. C. d.; SOARES, M. T. C. Ideias de Van Hiele e educação matemática realística: algumas aproximações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, p. 1533–1548, 2019.

PELIZZARI, A. e. a. Teoria da aprendizagem significativa segundo ausubel. **Revista PEC**, v. 2, n. 1, p. 37–42, 2002. Disponível em: <http://files.gpecea-usp.webnode.com/2002-PEC-2-1-Teoria-da-Aprendizagem-Significativa-Segundo-Ausubel.pdf>.

PEREIRA, G. A. **A Sequência Fedathi como proposta de ensino para a Licenciatura em Matemática do Programa Universidade Aberta do Brasil da Universidade Federal do Ceará**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, 2023.

PEREIRA, L. R. **Práticas de ensino em geometria plana**. 2017.

PEREIRA, R. C.; VILELA, M. A.; FREITAS, R. C. O. A transposição didática na perspectiva do saber e da formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 1, p. 41–60, 2018.

PIMENTA, A. L.; COSTA, A. d. A.; SILVA, M. d. C. d. A teoria das situações didáticas e a aprendizagem significativa: análise de trabalhos na área de ensino de ciências e matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 6, n. especial, p. 1–18, 2023.

PINHEIRO, A. C. M.; PEDROSA, V. N. M.; MENDONÇA, A. F. Uma proposta metodológica do uso do ambiente computacional como recurso didático para o ensino de conceitos matemáticos baseados na sequência fedathi. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**. São Paulo: [s.n.], 2016.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Inter-ciência, 1978.

POMMER, W. M.; POMMER, C. P. O contrato didático na sala de aula de matemática. **Seminário de Educação Matemática de nova Andradina**, v. 2013, 2013.

PONTE, J. P. da. A didática da matemática e o trabalho do professor. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 3, n. 3, 2020.

ROBITAILLE, D. **Intention, implementation, realization: Case studies of the impact of curriculum reform**. Bielefeld: IDM, 1980. 90–107 p.

RODRIGUES, J. A.; SILVA, M. d. F. da; OLIVEIRA, P. R. d. S. de; SOUZA, A. C. M. de; SOUZA, C. M. P. de. Contrato didático no ensino remoto: um contributo para o estudo de área aliado ao software geogebra. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, v. 10, n. 02, p. 232–252, 2021.

ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Profmat).

SANTAROSA, M. C. P. Ensaio sobre a aprendizagem significativa no ensino de matemática. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**, v. 6, n. 3, p. 57–69, 2016. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigo/pdf/92/v6_n3_a2016.pdf>.

SANTOS, J. N. d.; NETO, H. B.; PINHEIRO, A. C. M. **A origem e os fundamentos da Sequência Fedathi: uma análise histórico-conceitual**. 2019.

SANTOS, M. G. M.; ALVES, F. R. V. A engenharia didática e a teoria das situações didáticas em uma proposta didática para o ensino de geometria plana. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, v. 11, n. 02, p. 98–111, 2022.

SANTOS, M. J. C. A formação do professor de matemática: metodologia sequência fedathi (sf). **Revista Lusófona de Educação**, v. 38, n. 38, 2017.

SANTOS, M. J. C. d. **Rendas de bilro: contribuições para o ensino de Geometria e Simetria**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012.

SANTOS, M. J. C. d. Reflexões sobre a formação de educadores matemáticos: a metodologia de ensino sequência fedathi. In: DIAS, A. I.; MAGALHãES, E. B.; FERREIRA, G. N. L. (Ed.). **A aprendizagem como razão de ensino: por uma diversidade de sentidos**. Fortaleza: Imprece, 2016. p. 129–144.

SANTOS, M. J. C. d.; LIMA, I. P. d.; NETO, H. B. A sequência fedathi: concepções e princípios para uso no ensino de matemática. In: **Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 7633–7637.

SANTOS, S. M. F. D.; LEAL, D. A. O ensino de matemática no brasil com ênfase na geometria. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 1, p. 10647–10662, 2021.

SCHIRLO, A. C.; SILVA, S. d. C. R. d. Teoria de van hiele: contribuições para a formação de professores de matemática. **Revista iberoamericana de educación**, 2013.

SERRAZINA, M. L.; MATOS, J. M. **Didática da matemática**. [S.l.]: Universidade Aberta, 1996.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. [S.l.]: Cortez editora, 2017.

SILVA, H. N.; ABAR, C. A. A. P. A utilização do geogebra na reconstrução de atividades do imagiciel. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática–ENEM**. [S.l.: s.n.], 2016.

SILVA, J. G. Alves da; VIEIRA, F. R.; MENEZES, D. B. Aspectos da teoria das situações didáticas aplicada ao ensino de geometria plana referente a problemas das olímpiadas de matemática com amparo do software geogebra. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 5, n. 2, p. 328–342, 2020.

SILVA, N. A.; FERREIRA, M. V. V.; TOZETTI, K. D. Um estudo sobre a situação didática de guy brousseau. **Anais do XII Congresso Nacional de Educação**, p. 1–15, 2015.

SILVA, T. G. d. **A didática das ciências e seus processos cognitivos para o ensino-aprendizagem**. [S.l.]: EdUECE-Livro 1, 2015. 211–215 p.

SOUSA, A. I. E. d. *et al.* **Sequência Fedathi: uma proposta para o ensino de matemática e ciências**. [S.l.: s.n.], 2013.

SOUSA, F. E. E. d. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

SOUSA, R. T. de; SANTOS, J. N. dos; NETO, H. B.; PINHEIRO, A. C. M. Transposição didática com aporte do geogebra na passagem da geometria plana para a geometria espacial. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 7, n. 5, p. 106–124, 2021.

SOUZA, C. M. P.; LIMA, A. P. d. A. B. O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino de progressão aritmética. **Zetetike**, v. 22, n. 2, p. 31–61, 2014.

SOUZA, M. J. A. Sequência fedathi: apresentação e caracterização. In: NETO, H. e. a. B. (Ed.). **Sequência Fedathi: Uma Proposta Pedagógica para o Ensino de Matemática e Ciências**. Fortaleza: Edições Ufc, 2013. p. 15–48.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. **ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática**, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2013.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

THIOLLENT, M. J. **Metodologia da pesquisa-ação na instituição educativa**. [S.l.]: São Paulo: Cortez Editora, 1985.

UGALDE, M. C. P.; ROWEDDER, C. Sequência didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem. **Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 6, p. e99220, 2020.

VALENTE, J. A. **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: OEANIED, Unicamp, 1999.

VARGAS, G. V.; ARAYA, R. G. El modelo de van hiele y la enseñanza de la geometría. **Uniciencia**, v. 27, n. 1, p. 74–94, 2013.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a teoria de van hiele. **Educacao Matemática Pesquisa**, v. 12, n. 3, p. 400–431, 2010.

ZABALA, A. A prática educativa: Como ensinar artmed. **Editora Porto Alegre RS**, 1998.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

A.1 Questionário 1 (Q1)

Este formulário é uma ação para o levantamento de informações sobre o processo de ensino e aprendizagem em matemática, especificamente sobre o conteúdo de geometria plana. Em particular, estamos interessados em investigar como as aulas desse componente curricular são caracterizadas e avaliadas pelos estudantes. Ressaltamos ainda que os participantes não serão identificados e que suas respostas permanecerão sem rastreio, ou seja, será assegurado o anonimato desses sujeitos. Por fim, agradecemos a sua participação nesse estudo.

1. Na sua opinião, como deveriam ser trabalhados os conhecimentos de geometria plana durante as aulas?
2. Quais os principais desafios que você enfrenta durante o ensino e a aprendizagem dos conceitos geométricos?
3. Descreva resumidamente quais ações (metodologia) o professor utiliza para ensinar os conteúdos de geometria plana em sala de aula.
4. Como professor e estudante interagem no decorrer das aulas? De modo objetivo, descreva essa relação.
5. Você considera que o método utilizado pelo professor estimula a participação ativa dos estudantes na sala de aula? Comente.
6. Quais características da metodologia utilizada pelo professor que você considera positivas?

A.2 Questionário 2 (Q2)

Este formulário é uma ação para o levantamento de informações sobre o processo de ensino e aprendizagem em geometria. Especificamente, estamos interessados em investigar como as aulas desse componente curricular são caracterizadas e avaliadas pelos estudantes no contexto das sessões didáticas (aulas) vivenciadas nessa pesquisa.

1. Na sua opinião, como foram trabalhados os conhecimentos de geometria durante as aulas?
2. Quais os principais desafios que você enfrentou durante as sessões didáticas?
3. Como você descreve as ações (metodologia) do professor na perspectiva da pesquisa em curso?
4. Como professor e estudante interagiram no decorrer das sessões? De modo objetivo, descreva essa relação.
5. Você considera que a Sequência Fedathi estimula a participação ativa dos estudantes na sala de aula? Comente.
6. Quais características da metodologia Fedathi que você considera positivas?

APÊNDICE B – PLANO DE AULA

Quadro 2 – Plano de Aula

PÚBLICO-ALVO: estudantes da 1ª série do ensino médio – Turma B
CONTEÚDO: Congruência de triângulos
DURAÇÃO: 8 horas (Divididos em 4 encontros de 2 horas)
RECURSOS UTILIZADOS: Datashow, compasso, transferidor, régua, lápis, borracha, caneta e papel.
OBJETIVO(S): – Identificar os conceitos de ângulo e classificação, polígonos, congruência, elementos do triângulo e propriedades e transformações geométricas (translação, reflexão e rotação); – Avaliar o conhecimento prévio dos estudantes em relação a esses conceitos; – Desenvolver a compreensão dos estudantes em relação aos conceitos mencionados, criando significado e clareza em torno deles; – Familiarizar os estudantes com o uso de ferramentas geométricas, como o compasso e o transferidor; – Compreender os critérios para a congruência de triângulos; – Reconhecer quando os triângulos são congruentes com base em suas características; – Aplicar os critérios de congruência para resolver problemas de geometria;
PLATEAU: A sessão de aprendizado começará com a formulação de um acordo didático, com o objetivo de estabelecer normas e expectativas claras para a aula. Os participantes, incluindo o professor e os estudantes, deverão assumir compromissos explícitos para as aulas, incluindo estar presente, cumprir horários, não usar o celular durante a aula (a menos que solicitado), entre outros compromissos. Posteriormente, o professor, a partir de perguntas, fará a identificação do nível de conhecimento dos estudantes em conceitos-chave, como ângulos, classificação de ângulos, polígonos, congruência, elementos do triângulo e propriedades e transformações geométricas (translação, reflexão e rotação). Para superar as eventuais lacunas, o professor e os estudantes trabalharão juntos para construir significado em torno desses conceitos. Além disso, os estudantes praticarão a transposição de segmentos e a construção (e medição) de ângulos por meio do compasso e o transferidor.
TOMADA DE POSIÇÃO e MATURAÇÃO: O acordo didático estabelecido na sessão anterior será reafirmado, e a aula avançará para a primeira etapa da vivência da Sequência Fedathi, conhecida como "tomada de posição". Nessa etapa, os estudantes serão organizados em grupos e receberão materiais, como compasso, régua e transferidor, para atuar como matemáticos que buscam criar novo conhecimento.

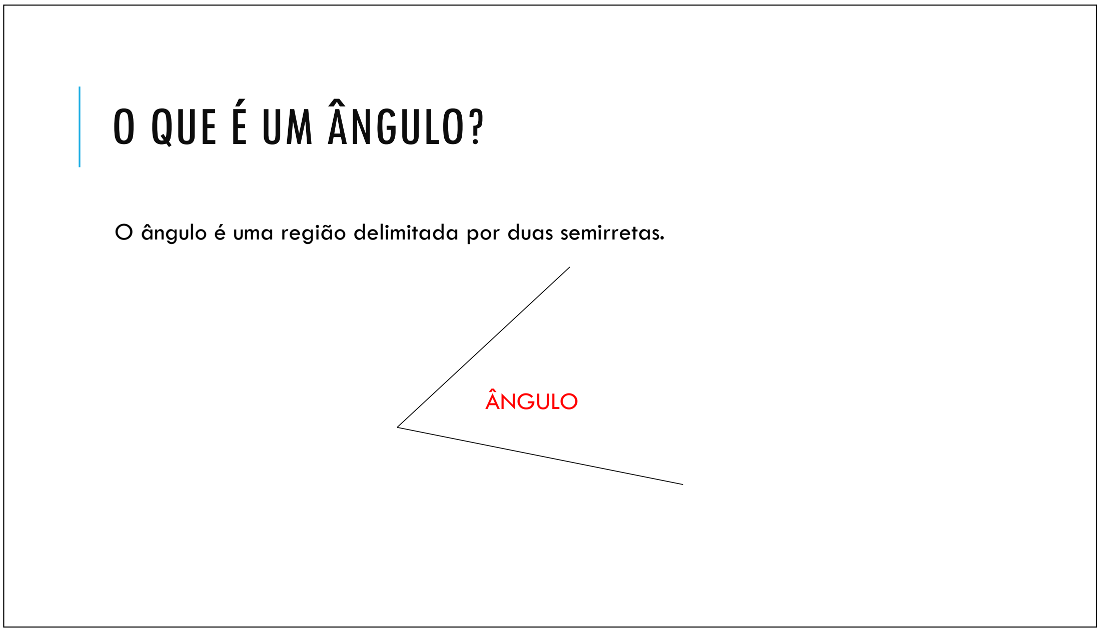
Nessa aula envolverá a apresentação de um problema desafiador permitindo aos estudantes desempenhar um papel central no processo de resolução.
SOLUÇÃO: Neste momento, os estudantes avançarão para a terceira fase da Sequência Fedathi (SF), conhecida como a fase de solução. Durante essa etapa, os estudantes começarão a esboçar os resultados de suas reflexões, elaborando conclusões por meio de esquemas, desenhos, textos e comunicação oral.
PROVA: Será apresentado aos estudantes um conteúdo relacionado à congruência de triângulos, um tópico previamente abordado por eles, mas que não havia sido indicado como uma solução para o problema específico em questão. Esse problema envolve um caso de não congruência (lado, ângulo adjacente e lado oposto). Durante esta etapa, o professor resolverá esse problema para que os estudantes possam revisar suas próprias conjecturas e perceber quaisquer imprecisões relacionadas ao problema inicial.
AVALIAÇÃO: Será baseada na observação contínua do comportamento dos estudantes ao longo da pesquisa, é uma ferramenta valiosa para entender o progresso do aprendizado. Ele permite ao professor identificar o avanço dos estudantes.

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE C – MATERIAL UTILIZADO NA SESSÃO DIDÁTICA 1 - *PLATEAU*

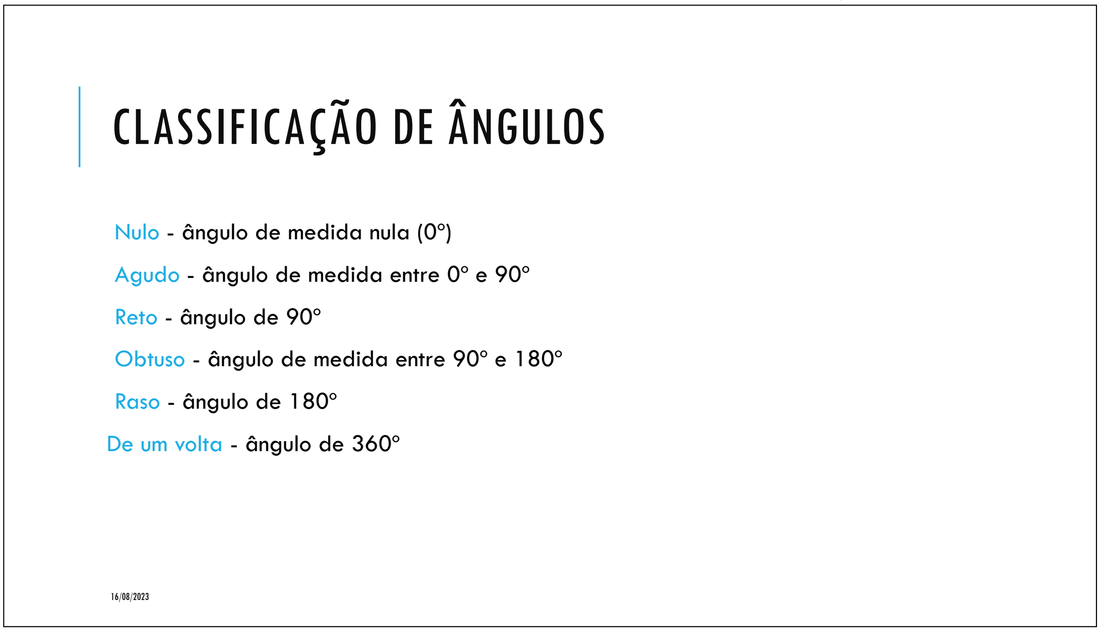
O material a seguir foi aplicado por ocasião do *plateau*, responsável pelo diagnóstico dos saberes e pelas intervenções pedagógicas que orientam toda a prática da Sequência Fedathi.

Figura 22 – Introdução do conceito de ângulo



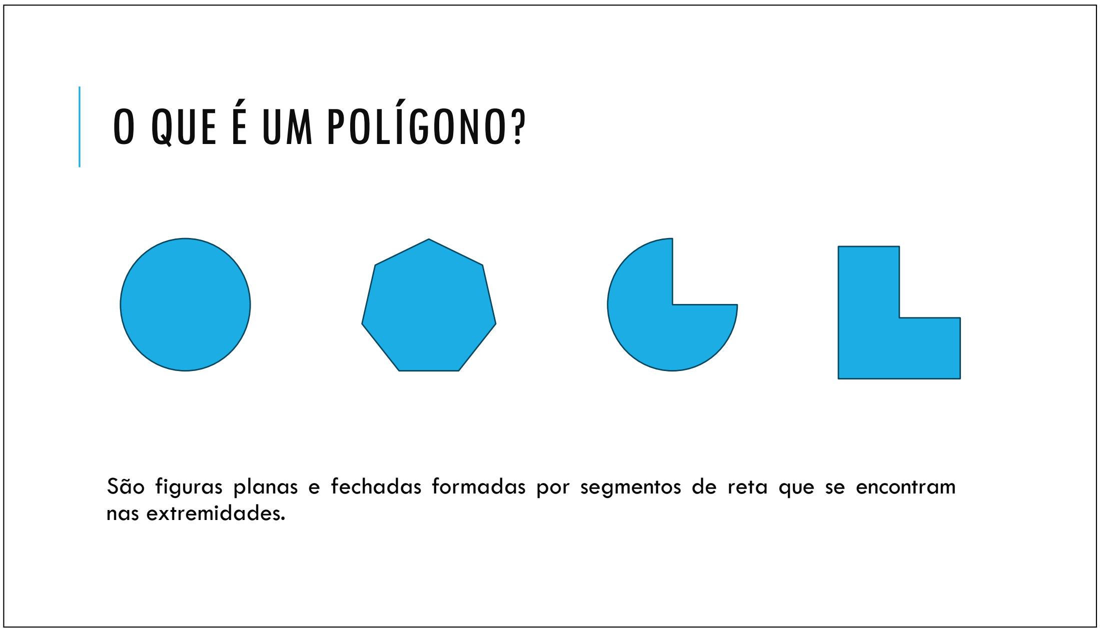
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Introdução das classificações dos ângulos



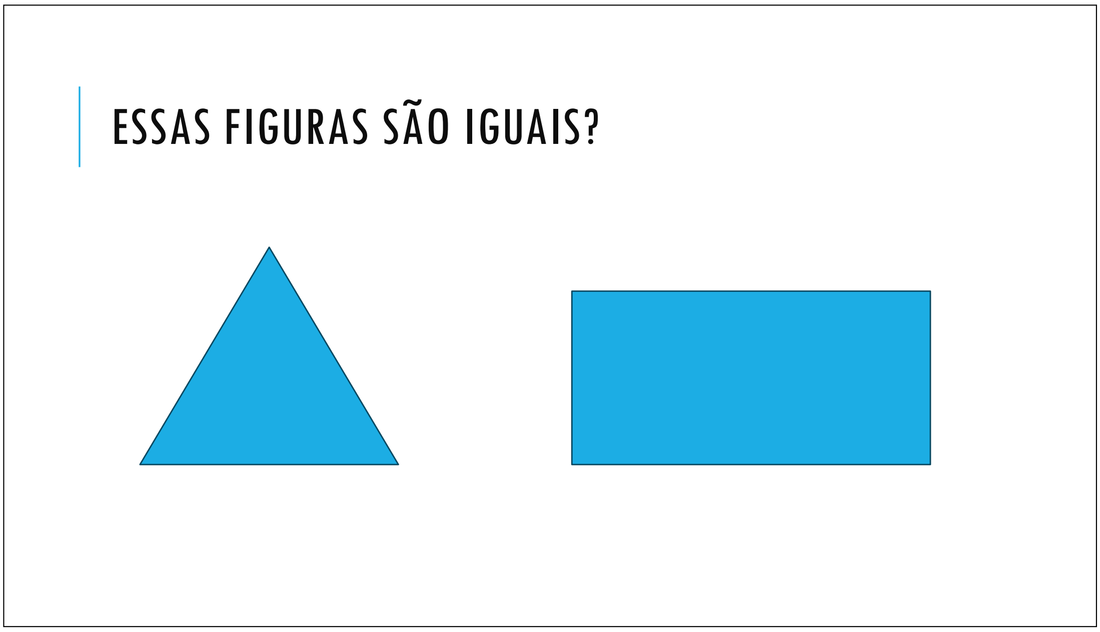
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 24 – Introdução ao conceito de polígono



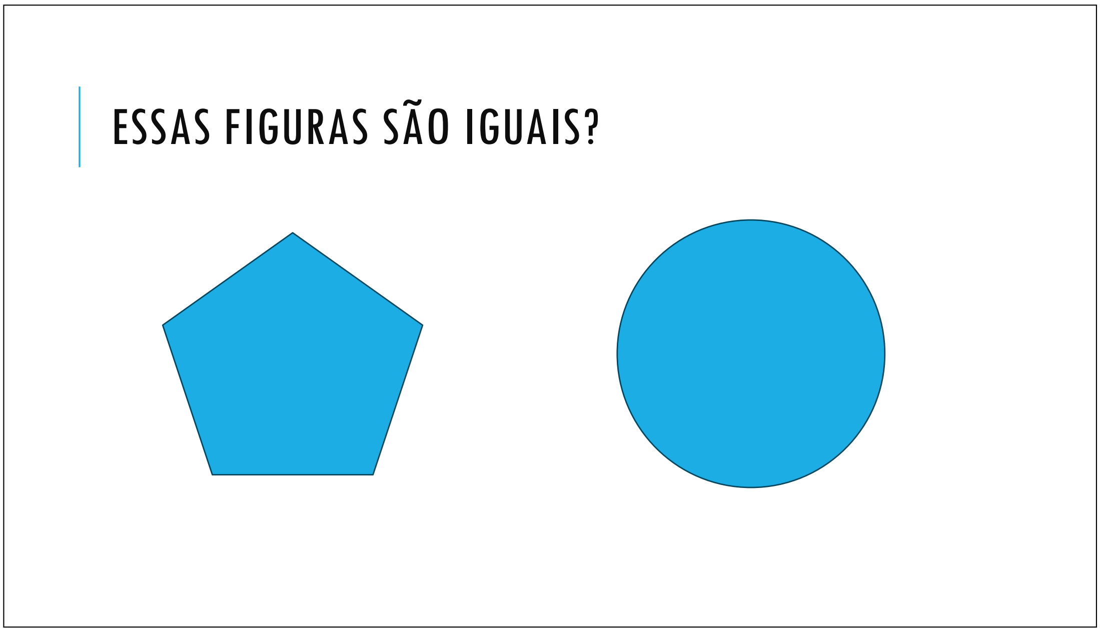
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Teste cognitivo 1



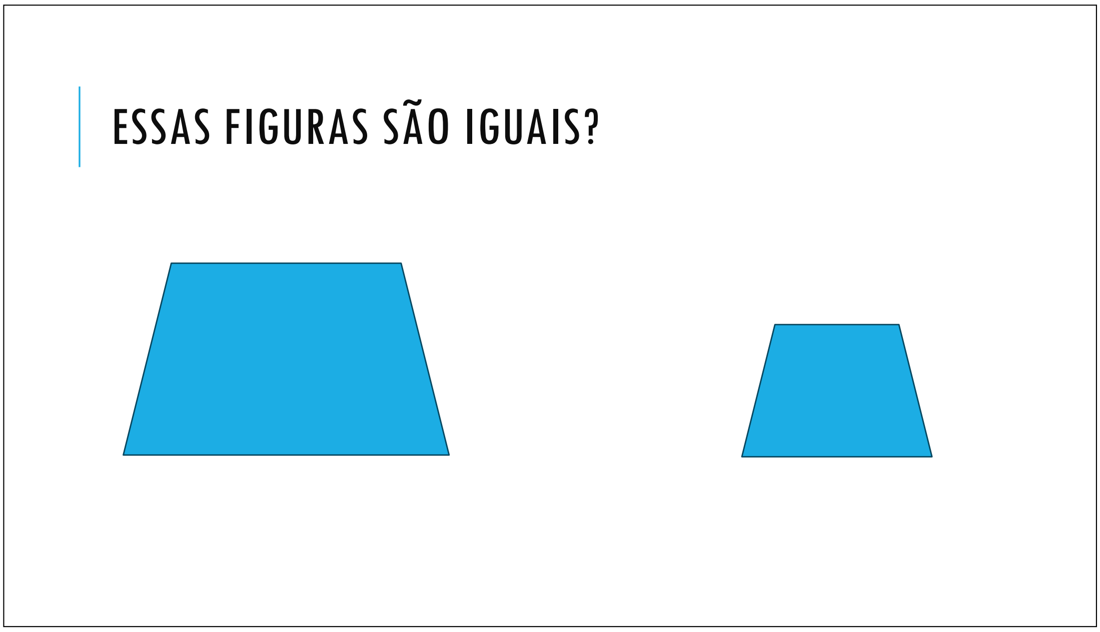
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Teste cognitivo 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

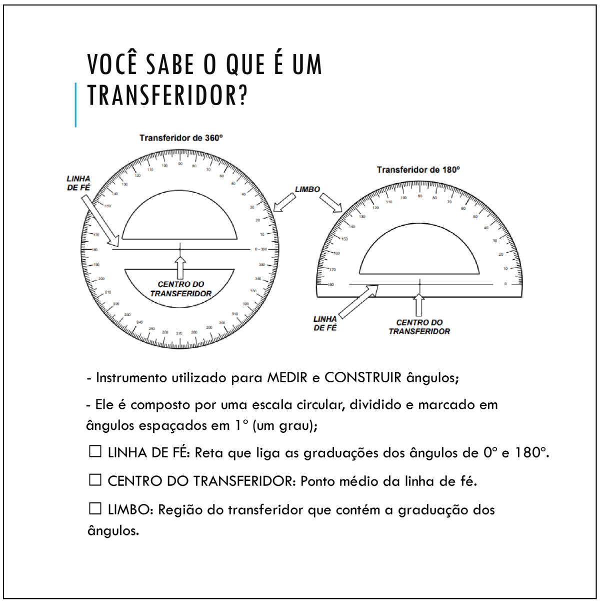
Figura 27 – Teste cognitivo 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Introdução a instrumentos de medida angular

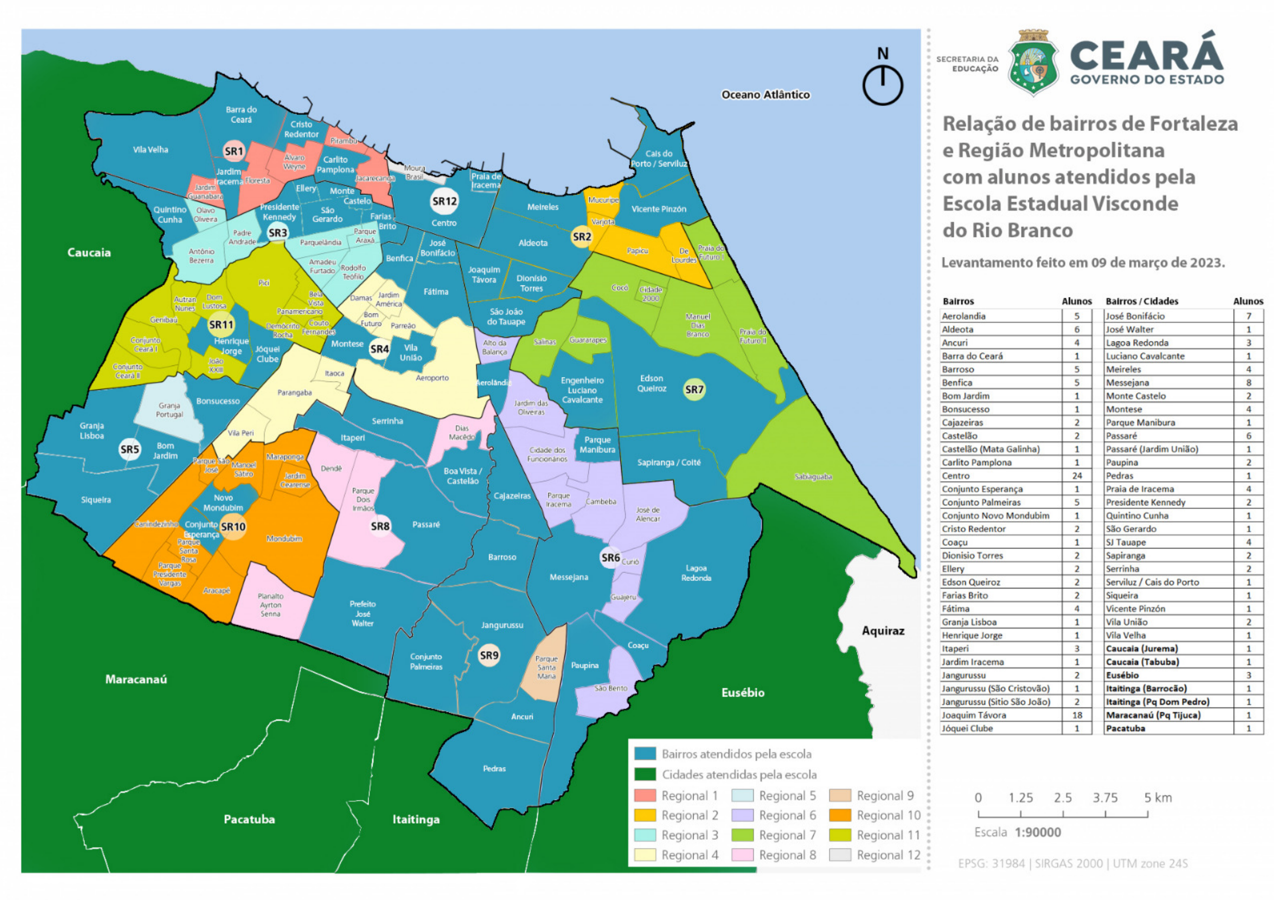
(a) Transferidor **(b)** compasso



Fonte: Imagem do autor.

ANEXO A – IMAGENS AUXILIARES

Figura 29 – Relação de bairros com estudantes atendidos pela escola



Fonte: EEMTI Visconde do Rio Branco.