

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Campus São Paulo  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT

# **O ensino das relações trigonométricas e as fórmulas dos arcos duplo e triplo com enfoque geométrico desenvolvida por François Viète**

**Rosemir Petrucio dos Santos**

**São Paulo - SP, 2023**



Rosemir Petrucio dos Santos

**O ensino das relações trigonométricas e as fórmulas dos arcos duplo e triplo com enfoque geométrico desenvolvida por François Viète**

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo

Campus São Paulo

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientadora: Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta

São Paulo - SP

2023

Catálogo na fonte  
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo  
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

s237e	<p>Santos, Rosemir Petrucio dos</p> <p>O ensino das relações trigonométricas e as fórmulas dos arcos duplo e triplo com enfoque geométrico desenvolvida por François Viète / Rosemir Petrucio dos Santos. São Paulo: [s.n.], 2023.</p> <p>110 f. il.</p> <p>Orientadora: Valéria Ostete Jannis Luchetta</p> <p>Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2023.</p> <p>1. História da Matemática. 2. Relações Trigonométricas. 3. Geometria. 4. Arcos Duplos. 5. Resolução de Equação Cúbica. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.</p> <p>CDD 510</p>
-------	--

Rosemir Petrucio dos Santos

# **O ensino das relações trigonométricas e as fórmulas dos arcos duplo e triplo com enfoque geométrico desenvolvida por François Viète**

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em 02/10/2023.

---

**Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta**  
Orientadora

---

**Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho**  
Membro interno

---

**Prof. Dr. Márcio Vieira de Almeida**  
Membro externo

---

**Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas**  
Suplente interno

---

**Prof. Dr. Guilherme Francisco Ferreira**  
Suplente externo

São Paulo - SP  
2023



# Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo suporte dado nos momentos difíceis, a minha orientadora, a Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta que contribuiu demais na conclusão desse trabalho e a todos os professores do IFSP campus São Paulo, que participam do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) de forma direta ou indireta.





*“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria  
produção ou a sua construção.”*

*Paulo Freire*



# Resumo

O objetivo desse trabalho é propor uma sequência de atividades destinadas aos professores de matemática, que poderão reproduzir e aplicar em sala de aula, no ensino das relações trigonométricas e no desenvolvimento das fórmulas dos arcos duplo e triplo com enfoque na geometria, para estudantes do 2º ano do ensino médio, porém algumas atividades podem ser propostas para estudantes do 9º ano do ensino fundamental. Para isso apresentamos e discutimos a história da matemática como recurso didático, passamos pelos fatos históricos que motivaram o surgimento das primeiras tabelas que indicavam relações entre medidas angulares e medidas lineares, como os ângulos centrais e as medidas das cordas, bem como, chegou-se à definição de seno com Johann Müller ou Regiomontanus (1436 – 1476). Além disso, com François Viète (1540 – 1603), temos um enfoque geométrico, que permite construir triângulos retângulos com ângulos duplos, triplos, etc. e assim determinar relações trigonométricas para arcos duplos, triplos, etc., seguido de uma conexão entre a trigonometria e a resolução de equações algébricas.

**Palavras-chaves:** História da Matemática. Relações Trigonométricas. Geometria. Arcos Duplos. Resolução de Equação Cúbica.



# Abstract

The objective of this work is to propose a sequence of activities aimed at teachers of mathematics, which they can reproduce and apply in the classroom, in teaching trigonometric relations and in the development of formulas for double and triple arcs with a focus on geometry, for 2nd year high school students, however some activities may be proposed for students in the 9th year of elementary school. For this we present and we discuss the history of mathematics as a teaching resource, we go through historical facts which motivated the emergence of the first tables that indicated relations between angular and linear measurements, such as central angles and chord measures, as well as, the definition of sine was arrived at with Johann Müller or Regiomontanus (1436 – 1476). Furthermore, with François Viète (1540 – 1603), we have a geometric approach, which allows us to build right triangles with double, triple angles, etc. and thus determine trigonometric relations for double, triple arches, etc. followed by a connection between trigonometry and solving algebraic equations.

**Keywords:** History of Mathematics. Trigonometric Ratios. Geometry. Double Arches. Solving Cubic Equation.



# Lista de ilustrações

Figura 1	– Diagrama–Metodológico VII–Elaboração do Texto. . . . .	7
Figura 2	– <i>Seqt.</i> . . . . .	10
Figura 3	– Protótipo compacto de um teodolito. . . . .	11
Figura 4	– Distância relativa entre Sol e Terra. . . . .	12
Figura 5	– Triângulo inscrito. . . . .	13
Figura 6	– Corda de $60^\circ$ . . . . .	14
Figura 7	– Corda de $90^\circ$ . . . . .	14
Figura 8	– Corda de $(180^\circ - \theta)$ . . . . .	15
Figura 9	– Corda de $\frac{\theta}{2}$ , versão 1. . . . .	15
Figura 10	– Corda de $\frac{\theta}{2}$ , versão 2. . . . .	18
Figura 11	– Corda. . . . .	20
Figura 12	– Teorema de Ptolomeu. . . . .	21
Figura 13	– Corda da diferença de dois arcos. . . . .	22
Figura 14	– Cálculo da corda de $36^\circ$ . . . . .	23
Figura 15	– Corda de $72^\circ$ . . . . .	24
Figura 16	– Tabela de cordas de Ptolomeu com valores sexagesimais. . . . .	25
Figura 17	– Meia corda ( <i>jya</i> ). . . . .	26
Figura 18	– Gnômon. . . . .	26
Figura 19	– Definição das funções trigonométricas. . . . .	28
Figura 20	– Triângulos retângulos com um ângulo agudo e um dos lados conhecidos. . . . .	30
Figura 21	– Triângulos retângulos com dois lados conhecidos. . . . .	31
Figura 22	– Triângulo retângulo. . . . .	34
Figura 23	– Dois triângulos retângulos quaisquer. . . . .	34
Figura 24	– Triângulos retângulos obtidos a partir de dois triângulos retângulos quaisquer. . . . .	35
Figura 25	– Triângulos retângulos semelhantes. . . . .	36
Figura 26	– Triângulos retângulos obtidos a partir de dois triângulos retângulos semelhantes. . . . .	37
Figura 27	– Triângulo retângulo obtido a partir de dois triângulos retângulos congruentes. . . . .	38
Figura 28	– Triângulo retângulo obtido a partir de dois triângulos retângulos um de ângulo simples e outro de ângulo duplo. . . . .	39
Figura 29	– Segmentos congruentes na circunferência. . . . .	41
Figura 30	– $\text{sen}(n\theta)$ . . . . .	42
Figura 31	– Teorema VIII. . . . .	44
Figura 32	– Teorema VIII (a). . . . .	44
Figura 33	– Teorema VIII (b). . . . .	45
Figura 34	– Teorema VIII (c). . . . .	45

Figura 35 – Teorema VIII (d). . . . .	46
Figura 36 – Teorema VIII (e). . . . .	47
Figura 37 – Teorema VIII (f). . . . .	48
Figura 38 – Equação cúbica e valor de $\text{sen}(3\theta)$ , versão 1. . . . .	49
Figura 39 – Equação cúbica e valor de $\text{sen}(3\theta)$ , versão 2. . . . .	49
Figura 40 – Triângulo retângulo. . . . .	53
Figura 41 – Triângulos retângulos semelhantes. . . . .	54
Figura 42 – Ponto $P(x, y)$ no primeiro quadrante em uma circunferência unitária. . . . .	55
Figura 43 – Simetrias entre arcos. . . . .	56
Figura 44 – Seno da diferença de dois arcos. . . . .	57
Figura 45 – Triângulo retângulo $AEF$ inscrito em um retângulo $ABCD$ . . . . .	59
Figura 46 – Triângulo isósceles $ABC$ . . . . .	61
Figura 47 – Representação geométrica da tangente. . . . .	64
Figura 48 – Representação geométrica da tangente da diferença de dois arcos. . . . .	65
Figura 49 – Representação do <i>sext</i> . . . . .	72
Figura 50 – Ângulo central e corda. . . . .	75
Figura 51 – Corda de $(180^\circ - \theta)$ . . . . .	77
Figura 52 – Relação entre a <i>corda</i> ( $\alpha$ ) e $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . . . . .	78



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela Hiparco. . . . .	19
Tabela 2 – Tabela de senos Regiomontanus. . . . .	29
Tabela 3 – Relações entre cosseno e seno. . . . .	57
Tabela 4 – Tabela Hiparco. . . . .	76
Tabela 5 – Tabela de cordas – respostas. . . . .	78
Tabela 6 – Tabela de senos de alguns ângulos específicos – respostas. . . . .	80



# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA HISTÓRIA</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>Contribuições dos egípcios</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Contribuições dos gregos</b> . . . . .	<b>11</b>
2.2.1	Cálculo de distâncias inacessíveis . . . . .	11
2.2.2	Tabelas de medidas para cordas de ângulos centrais . . . . .	12
2.2.3	Subtração de arcos conhecidos . . . . .	19
<b>2.3</b>	<b>Contribuição dos hindus</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.4</b>	<b>Contribuição de europeus</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>OBTENÇÃO DO SENO DO ÂNGULO DUPLO E TRIPLO</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Senos e cossenos do arco duplo</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Senos e cossenos do arco triplo</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>3.3</b>	<b>Conexão entre a trigonometria e a resolução de equações algébricas</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>TRIGONOMETRIA</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Razões trigonométricas</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1.1	Senos e cossenos da soma e da diferença de dois arcos . . . . .	57
4.1.2	Senos e cossenos de arcos duplos e triplos . . . . .	60
4.1.3	Senos e cossenos do arco metade . . . . .	61
4.1.4	Transformação da soma de senos ou cossenos em produtos . . . . .	62
<b>4.2</b>	<b>A razão tangente</b> . . . . .	<b>63</b>
4.2.1	Tangente da soma e da diferença de dois arcos . . . . .	65
4.2.2	Tangente de arcos duplos e triplos . . . . .	66
4.2.3	Tangente do arco metade . . . . .	67
4.2.4	Transformação da soma de tangentes em produto . . . . .	67
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES COM FOCO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>5.1</b>	<b>Considerações sobre o tratamento das razões e relações trigonométricas em alguns livros didáticos utilizados no ensino médio</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>5.2</b>	<b>Propostas de atividades</b> . . . . .	<b>72</b>
5.2.1	O <i>segt</i> de uma pirâmide . . . . .	72
5.2.2	Calculando a distância entre o Sol e a Terra . . . . .	73

5.2.3	Determinando as medidas das cordas . . . . .	75
5.2.4	Relacionando cordas e senos . . . . .	78
5.2.5	Obtendo os valores de seno a partir do conhecimento das cordas de ângulos centrais. . . . .	79
5.2.6	Obtendo a fórmula do seno do arco duplo . . . . .	81
5.2.7	Obtendo o seno, o cosseno e a tangente do arco duplo . . . . .	86
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>91</b>

# Introdução

Ao escolher o tema razões e relações trigonométricas para escrever uma dissertação, estou procurando respostas para a seguinte questão: Por que os alunos apresentam dificuldades em entender e aplicar os conceitos envolvendo razões e relações trigonométricas?

Como professor de matemática da educação básica já tive oportunidade de trabalhar esse tema com alunos do 2º ano do ensino médio e ao fim do bimestre analisando as avaliações sobre os objetos de conhecimento razões trigonométricas, transformações trigonométricas e as autoavaliações dos alunos, percebia que o objetivo não foi plenamente atingido e isso me deixava desconfortável, pois nosso trabalho não estava completo.

Com essa motivação proponho trabalhar esse tema com o uso da história da matemática como recurso didático no ensino, pois possibilita uma abordagem contextualizada no sentido de entender o que motivou o estudo deste conteúdo, quais foram as dificuldades e as soluções encontradas nas resoluções dos problemas na época do desenvolvimento dos conceitos.

No Capítulo 1 apresentamos e justificamos a história da matemática como recurso didático no ensino, pois entendemos ser uma fonte para discussões e esclarecimentos acerca dos objetos de conhecimentos. O objetivo principal desse capítulo foi trazer a história da matemática para contribuir com o ensino e a aprendizagem do estudante de modo que ele seja o protagonista.

No Capítulo 2 consideramos alguns fatos históricos que levaram ao surgimento das razões trigonométricas. Desde aplicações de simples razões como feita pelos antigos egípcios ao determinar o *seqt* de uma pirâmide de base quadrada, bem como as contribuições dos gregos no cálculo de distâncias inacessíveis, nas construções das primeiras tabelas que relacionavam o ângulo central e a medida da corda subtendida. Contudo destacamos as contribuições dos hindus, ao inserir a ideia da meia corda e destacamos como os europeus contribuíram com a evolução das razões trigonométricas.

Seguindo com a pesquisa, no Capítulo 3, apresentamos como obter as relações do seno e do cosseno de arcos duplos e triplos de forma geométrica, aplicando proposições dadas por François Viète na obtenção de triângulos retângulos de ângulos duplos, triplos, etc.

No Capítulo 4, apresentamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, bem como, determinamos algumas relações trigonométricas de forma geométrica, que facilitam o cálculo dos valores das razões trigonométricas.

Já no Capítulo 5, finalizamos a pesquisa, verificando como as razões e relações trigonométricas são abordadas em alguns livros didáticos do ensino médio aprovados no ano de

2020 no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) usados nas escolas, além disso, elaboramos algumas atividades com a história da matemática como recurso didático, visando uma melhor compreensão dos objetos de conhecimento.

# 1 A história da matemática como recurso didático no ensino

Para trabalhar os objetos de conhecimento matemáticos dispomos de diversas metodologias, sendo algumas delas a aula expositiva, a modelagem matemática, a resolução de problemas, a história da matemática entre outras. Destaco que na aula expositiva o professor é o centro da aula, pois o professor explica os conceitos, os exercícios de exemplos e propõe resoluções de exercícios aos alunos para a verificação, deste modo os alunos apenas reproduzem passivamente o que foi proposto pelo professor. Na modelagem matemática, a partir de um tema gerador relevante para os alunos a situação é explorada através de debates, experimentos e investigações e assim transformada em uma linguagem matemática. Quando trabalhamos com a resolução de problemas e seguindo algumas etapas como compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e verificar os resultados, os alunos são levados a obter novos conhecimentos.

Ao trabalhar com a história da matemática, queremos estabelecer uma conexão entre os conhecimentos do professor sobre a sua disciplina e a transmissão desse conhecimento, além de buscar no processo histórico o movimento do pensamento para a formação do conceito matemático.

Ainda, a história da matemática pode contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da matemática e oferecer contribuições didáticas para o trabalho do professor.

Uma forma para o uso educacional da história da matemática é através de questões norteadoras. Segundo D'Ambrosio (2021), Hans Freudenthal propõe as seguintes questões:

1. Por que isso não foi descoberto antes?
2. A partir de que problemas esse tema se desenvolveu?
3. Quais eram as forças que o impulsionavam?
4. Por que foi essa descoberta tão importante?
5. Por que foi ela praticamente não notada pelos seus contemporâneos (não matemáticos) e continua assim até hoje? (D'AMBROSIO, 2021, p.45).

A partir dessas questões norteadoras quando trabalhamos com a metodologia da história da matemática queremos propiciar aos alunos as situações que levaram ao surgimento dos objetos de conhecimento, quais foram as dificuldades e as soluções encontradas, quais foram as pessoas que contribuíram nesse desenvolvimento e compreender qual foi a motivação desse desenvolvimento, de acordo com Mendes e Chaquiam (2016),

tal abordagem pressupõe que o aluno tem uma oportunidade enriquecedora de se inserir o máximo possível no contexto em que o matemático, o texto

matemático escrito por ele, a comunidade em que viveu, trabalhou e produziu tal matemática, em busca de estabelecer uma de[SIC] multiplicidade explicativa para as noções matemáticas que precisará aprender. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.12).

Nosso objetivo, portanto, é trabalhar com a história da matemática aproveitando todo o seu potencial na medida que é uma construção criativa que envolve a sociedade, a cultura e a cognição, não limitando a fatos, datas e nomes a serem memorizados, porém devemos tomar cuidado para não fazer uso de uma história anedotária, isto é, segundo D'Ambrosio (2021, p.46) “pequenas histórias, isoladas, que muitas vezes são enganadoras e mais entretenimentos que verdades”.

Considerando o trabalho com história da matemática no ensino, devemos ter cuidado com o risco de cometer anacronismos, isto é, atribuir, a um estudioso de matemática do passado, posturas e atitudes conscientes que ele nunca possuiu. Além de considerar um determinado objeto do conhecimento de uma época para analisar os fatos de outro tempo.

Segundo Brasil (1998, p.42) nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), encontramos que “a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com ele”, dessa forma leva a contribuir para a aprendizagem dos objetos matemáticos. Além disso considerando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) conforme Brasil (2018, p.298) “é importante incluir a história da matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática”.

Temos que a BNCC enfatiza o uso da história da matemática como um recurso de ensino e aprendizagem de modo que um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no ensino médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história.

Por que trabalhar com a história da matemática?

Ao responder essa pergunta, quero responder outras que ao longo do tempo recebo em sala de aula feitas por nossos alunos, como por exemplo, “em que eu vou usar isso que o senhor está ensinando?”, “por que eu tenho que estudar matemática?”, respondo que utilizar a história da matemática como recurso didático pode deixar claro essas e outras questões levantadas pelos alunos, na medida que podemos entender o motivo do surgimento, sua construção, a evolução de cada tópico da matemática, além de possibilitar que os alunos vejam a matemática como uma construção humana e desenvolvida não apenas por pessoas consideradas com alto conhecimento matemático, mas que ela depende do contexto da época e de outros fatores.

O ensino e aprendizagem de matemática apoiados no recurso didático da história da matemática, não se resume a apresentação de fatos históricos, precisamos entender em qual contexto tal conteúdo foi desenvolvido, com qual propósito, quais foram as dificuldades e



---

soluções encontradas, suas evoluções e quem foram seus principais colaboradores, já que cada tema de estudo não apareceu por acaso e pronto como muitos pensam.

O recurso à história da matemática como metodologia de ensino traz várias possibilidades de aprendizagem, pois,

apresenta-se como fonte da lógica matemática em construção, como forma de superar a transição entre técnica e significado no ensino elementar e propicia uma visão de totalidade do conhecimento matemático para assim ter uma melhor compreensão da matemática. (BROLEZZI, 1991, p.44).

Além disso, a partir das informações históricas, podemos obter aspectos epistemológicos que favoreçam a explicação de porquês matemáticos e que muitas vezes favorecem a ampliação e o enriquecimento da aprendizagem dos alunos.

Logo o uso da história da matemática deve ter a intenção de ajudar no desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas. Destacando os aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares.

Para uma efetiva aplicação da história da matemática buscando o desenvolvimento das ideias matemáticas temos de promover uma transposição didática em sala de aula, segundo Mendes e Chaquiam (2016, p.22),

A transposição didática é o processo que faz com que os objetos do saber matemático erudito se transformem em saberes a ensinar, inscritos no projeto de ensino, e depois em saberes de ensino. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.22).

Portanto devemos ter cuidado ao trabalhar com a história da matemática, na medida que os objetos de conhecimentos a serem estudados precisam passar por uma readequação, ou mediação para se tornarem saberes ensináveis, logo a busca por fontes históricas se faz necessária.

Deste modo uma consulta a materiais de referências se faz mais que necessário. O nosso propósito é trabalhar com consulta em livros de história da matemática e esses livros podem apresentar conteúdos de forma cronológica, por assunto ou por civilizações, de acordo com Brolezzi (1991).

Os livros cronológicos apresentam os conteúdos matemáticos segundo uma linha do tempo sem a preocupação de aprofundamento dos conteúdos, segundo Saito e Dias (2013, p.96) “é uma tendência historiográfica que procura escrever uma história linear e progressista, acumulando grande número de datas, nomes e feitos matemáticos importantes”, os livros por assunto são aqueles que tratam da evolução de algum conteúdo específico da matemática e tem características que ajudam didaticamente no entendimento do conteúdo.

Alguns autores como David Eugene Smith e Asger Aaboe, já tinham uma preocupação com o ensino de matemática e contribuíram com livros de história da matemática por assunto, pois entendiam que este tipo de livro poderia ajudar a professores e alunos, já que os conteúdos recebem um tratamento bem detalhado e a abordagem histórica torna o conteúdo com mais significado.

Considerando como fatores externos à matemática a teriam influenciado historicamente, temos uma tendência historiográfica associada aos estudos referentes à etnomatemática, na qual tomam a sociedade como base do processo de construção do conhecimento matemático, de modo que contribuem para uma compreensão mais contextualizada dos objetos de conhecimento a serem ensinados.

Segue que, podemos contribuir para uma formação que valoriza a matemática de diferentes culturas, pois,

encontramos matemática nos trabalhos artesanais, nas manifestações artísticas e nas práticas comerciais e industriais. Recuperar e incorporar isso à nossa ação pedagógica é um dos principais objetivos do Programa Etnomatemática. (D'AMBROSIO, 2021, p.47).

Deste modo não vamos nos limitar a alguma forma específica de apresentação dos conceitos matemáticos, pois precisamos de todas essas formas para melhor compreender e entender o tema de estudo.

Nossa intenção é apresentar uma forma de se trabalhar as razões e as relações trigonométricas tendo como recurso didático a história da matemática, apresentando as situações que levaram ao seu surgimento, construção e evolução, como continuidade vamos apresentar uma sequência de atividades que favoreça o entendimento.

Para um aproveitamento da história da matemática como recurso didático, podemos partir das informações presentes em um diagrama, que será construído segundo Chaquiam (2017, p.25), “a partir de personagens/matemáticos pré-selecionados, correlacionando traços biográficos, seus contemporâneos, trabalhos produzidos e as principais contribuições à Matemática ou à Ciência”, temos assim um modo de subsidiar a construção de um texto histórico que favoreça a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Vemos nesse método uma forma de buscar na história elementos que favoreçam a reconstrução de algumas das operações cognitivas que marcaram a construção histórica dos objetos matemáticos.

Ainda assim, alguns cuidados devem ser tomados no momento da realização do texto histórico segundo Chaquiam (2017),

um problema que deve ser evitado durante a composição do texto é a sobreposição do discurso técnico ao discurso didático pedagógico, deve-se ter em vista que o texto não é especializado matematicamente e, sim, um texto

no qual deve prevalecer o discurso didático-pedagógico, numa linguagem simples e clara, rico em formas de apresentação, para a comunicação do conhecimento posto, disponível e reproduzido, observado o formalismo e o rigor matemático para esclarecer terminologias, o uso correto das nomenclaturas e impedir a ocorrência de eventuais induções ao erro ou equívocos conceituais e históricos. (CHAQUIAM, 2017, p.28).

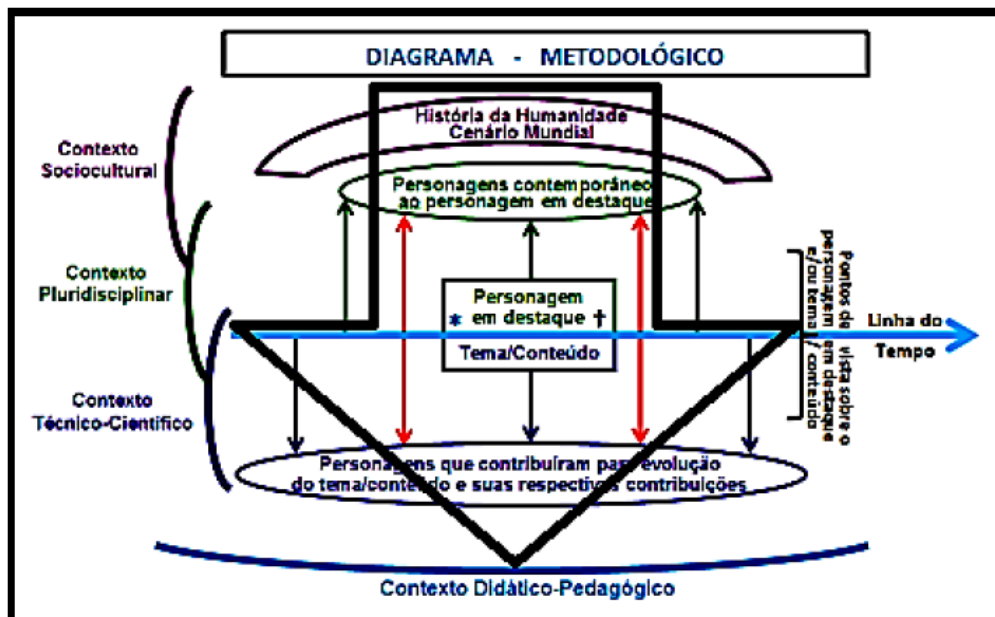
Desde modo a construção do texto histórico, permite ao autor ter uma visão de totalidade do que se pretende apresentar, sejam os acontecimentos históricos, personagens ou os objetos matemáticos, além disso, cada um deles devem ser bem explorados e desenvolvidos.

Segundo Chaquiam (2017) a elaboração do texto tendo em vista a sua função didático-pedagógica deve ser desenvolvido na seguinte ordem:

- a) História da humanidade/cenário mundial;
- b) Apresentação dos personagens contemporâneos ao principal;
- c) O personagem principal, exceto suas contribuições para o tema/conteúdo;
- d) Evolução do tema e os respectivos personagens que contribuíram para evolução do mesmo e, por fim, apresentação dos pontos de vista atual de historiadores/pesquisadores sobre o tema/conteúdo ou personagem principal. (CHAQUIAM, 2017, p.35)

e conforme a seta em destaque na Figura 1, ela indica o caminho a ser percorrido na elaboração do texto.

Figura 1 – Diagrama–Metodológico VII–Elaboração do Texto.



Fonte: Chaquiam (2017, p.36).

Logo ao elaborar o texto histórico, destacando os personagens principais, suas contribuições, além do cenário mundial na época, podemos intencionalmente propor uma

seqüência de atividades, buscando a construção histórica e o entendimento de determinados objetos do conhecimento, de modo a trabalhar a matemática juntamente com a história.

Deste modo vamos dedicar dois capítulos para o desenvolvimento do texto histórico e um capítulo para uma proposta de seqüências de atividades tendo a história da matemática como recurso didático.

## 2 Razões trigonométricas na história

Neste capítulo nosso objetivo é apresentar um pouco da história da matemática que envolve as relações trigonométricas com o objetivo de contextualizar, entender suas aplicações e deste modo buscar situações que favoreçam uma aprendizagem significativa através da história.

A trigonometria não é fruto do trabalho de uma única pessoa ou nação, as razões entre os lados de triângulos semelhantes já eram conhecidas e usadas pelos antigos egípcios e babilônios. A noção de seno, cosseno e as demais funções trigonométricas como razão entre os lados de triângulos retângulos podem ser consideradas recentes em relação a toda história, por exemplo alguns cálculos desafiadores como determinar a circunferência da Terra foi feita por Eratóstenes apenas com conhecimentos sobre arcos e ângulos. Logo a utilização da história da matemática é para entendermos que conceitos matemáticos são construídos por pessoas que estão inseridas em um contexto para resolver situações problemas de determinada época.

Veremos a seguir que Aristarco para estabelecer as distâncias relativas entre a Terra, o Sol e a Lua usou conhecimentos entre ângulos e segmentos, vemos que essa forma de trigonometria antiga usava círculos, arcos e cordas ao invés de triângulos como figuras de referência.

A palavra trigonometria<sup>1</sup> vem do grego *tri+gonía+métron*, que significa três + ângulo + medida e nos remete ao estudo das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos. A palavra trigonometria com o significado de medição de triângulo é um termo do século XVI e relacionava ângulos e segmentos de retas em um triângulo.

Para a sequência do texto vamos utilizar a palavra trigonometria para indicar o estudo das razões e relações métricas de um triângulo retângulo.

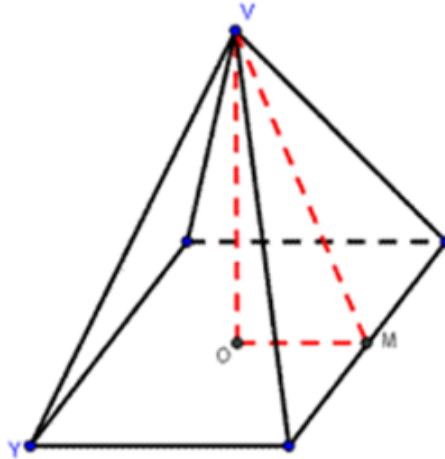
### 2.1 Contribuições dos egípcios

Os egípcios tinham particular interesse em deixar constante a inclinação das faces nas construções de suas pirâmides (Figura 2) estabelecendo uma razão entre o seu afastamento horizontal  $OM$  e a altura da pirâmide  $OV$ , que era chamado de *seqt*, que hoje é equivalente à

<sup>1</sup> Palavra de origem grega: tri (três) + gonía (ângulo) + métron (medida). Do latim trigonometria, refere-se às medidas feitas no triângulo (trígonon). Esse termo é devido a Bartolomeu Pitiscus, que publicaria em 1595 seu famoso: *Trigonometriae Sive de Solutione Triangulorum Tractatus Brevis et Perspicuus*. A segunda edição desse livro foi publicada em 1600 com o pomposo e sonoro título: *Trigonometrae Sive de Dimensione Triangulorum Libri Quinque*. Pitiscus, com seu trabalho, influenciaria gerações e gerações de matemáticos. Disponível em: <https://www.dicionarioetimologico.com.br/trigonometria/>. Acesso em: 05 jul. 2023.

função cotangente.

Figura 2 – *Seqt*.



Fonte: [www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/cont\\_historia.htm](http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/cont_historia.htm). Acesso em: 05 jul. 2023.

Vale destacar que o Problema 56 encontrado no papiro de Ahmes, é justamente sobre determinar o *seqt* de uma pirâmide, o Problema 56 diz: “Se uma pirâmide tem 250 cúbitos<sup>2,3</sup> de altura e o lado de sua base de 360 cúbitos de comprimento, qual é o seu *seqt*?”

Respondendo com uma linguagem atual temos:

$$Seqt = \frac{180}{250} = \frac{18}{25}.$$

Além disso, o Problema 57 é o inverso, dado o valor do *seqt* e a medida da base da pirâmide pergunta-se qual é a altura da pirâmide?

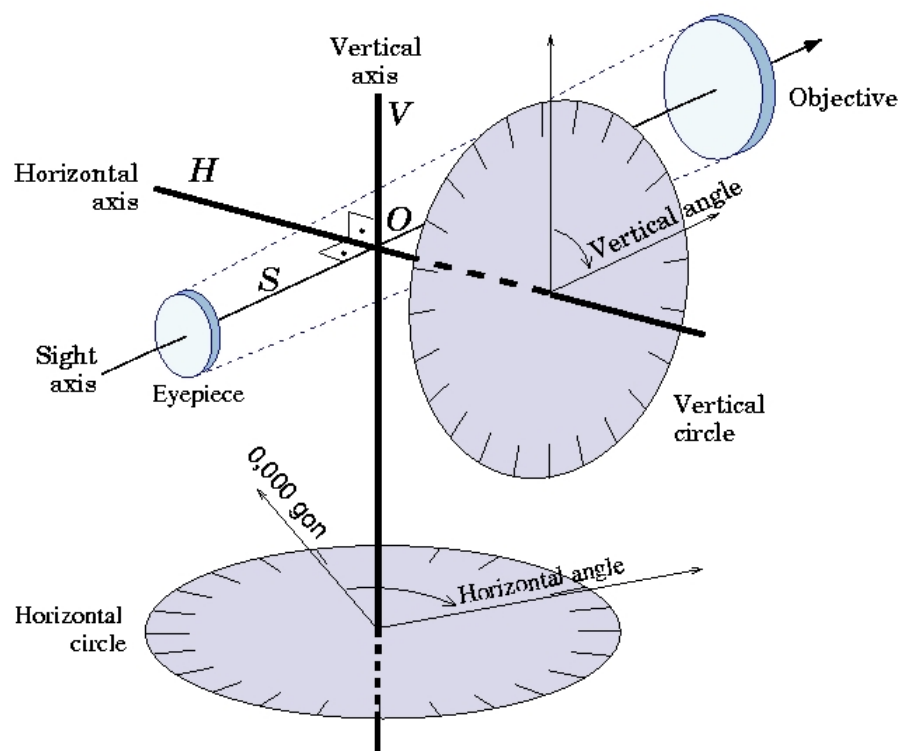
Com essas aplicações vemos que os egípcios trabalhavam com a razão entre os lados de um triângulo, porém, eles não tinham a preocupação em saber qual é o ângulo, apenas qual é a razão desejada para a inclinação das faces e isso nos mostra a utilização do que entendemos atualmente como as razões trigonométricas, isto é, estabelecendo a razão entre os lados de um triângulo retângulo de acordo com o ângulo.

<sup>2</sup> O cúbito egípcio foi desenvolvido por volta de 3000 AEC com base no corpo humano, foi tomado como o comprimento de um braço desde o cotovelo até a ponta dos dedos estendidos. Uma vez que diferentes pessoas têm diferentes comprimentos de braço, os egípcios definiram um cúbito real padrão que foi preservado na forma de uma haste de granito preto com a qual todos poderiam padronizar suas próprias hastes de medição. (tradução livre).

<sup>3</sup> Egyptian cubit developed around 3000 BC. Based on the human body, it was taken to be the length of an arm from the elbow to the extended fingertips. Since different people have different lengths of arm, the Egyptians developed a standard royal cubit which was preserved in the form of a black granite rod against which everyone could standardise their own measuring rods. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Measurement/> Acesso em: 24 jul. 2023.

Atualmente para exemplificar apresento duas situações, para saber qual é o ângulo entre a base e a face lateral da pirâmide sabendo que o *seqt* vale  $\frac{18}{25}$ , consultamos uma tabela de razões trigonométricas ou uma calculadora, como essa razão equivale à cotangente, vemos que o ângulo será aproximadamente  $54^\circ$ . Outra situação que podemos citar, seria como determinar a altura da pirâmide conhecendo a medida da base e o ângulo entre a base e a face lateral da pirâmide, já que dispomos de instrumentos que possibilitam essa medição de ângulos como o teodolito (Figura 3), novamente com o auxílio de uma tabela ou calculadora, podemos determinar qual é a altura da pirâmide.

Figura 3 – Protótipo compacto de um teodolito.



Fonte: <https://sites.usp.br/ptr-ltg/museu-virtual-teodolito-2/>. Acesso em: 05 jul. 2023.

## 2.2 Contribuições dos gregos

### 2.2.1 Cálculo de distâncias inacessíveis

Uma contribuição foi dada por Aristarco de Samos (310 AEC – 230 AEC), que foi o primeiro a propor o Sol como centro do sistema solar 1700 anos antes de Copérnico. “Um dos únicos trabalhos de Aristarco que sobrou, *On the Sizes and Distances of the Sun and Moon*”, (BRUMMELEN, 2009, p.22, tradução livre), consiste em determinar qual é a distância entre a Terra e o Sol tendo como unidade de medida a distância entre a Terra e a Lua. Aristarco

afirmou que a distância do Sol à Terra é maior que dezoito vezes, mas menos de vinte vezes, a distância da Lua à Terra. Para isso era necessário que a face da lua ao ser observada a partir da Terra fosse exatamente a metade, deste modo o triângulo formado pelos corpos Terra, Sol e Lua será um triângulo retângulo e o ângulo reto estará no vértice Sol-Lua-Terra. Para converter dados angulares como razões entre as distâncias, Aristarco teve que trabalhar com aproximações de quantidades trigonométricas.

Figura 4 – Distância relativa entre Sol e Terra.



Fonte: [www.somatematica.com.br/biograf/aristarco.php](http://www.somatematica.com.br/biograf/aristarco.php). Acesso em: 27 ago. 2023.

A Figura 4 mostra como Aristarco pensou o problema. Ele sabia que a Lua brilha pela luz solar refletida, então quando um observador vê a Lua meio iluminada, o ângulo Sol-Lua-Terra é um ângulo reto e o ângulo Lua-Terra-Sol pode ser considerado um ângulo “menor que um quadrante por um trigésimo de um quadrante” (BRUMMELEN, 2009, p.22, tradução livre), portanto igual a  $87^\circ$ , pois um quadrante possui  $90^\circ$  e um trigésimo de um quadrante equivale a  $3^\circ$ , deste modo poderia calcular a razão de suas distâncias.

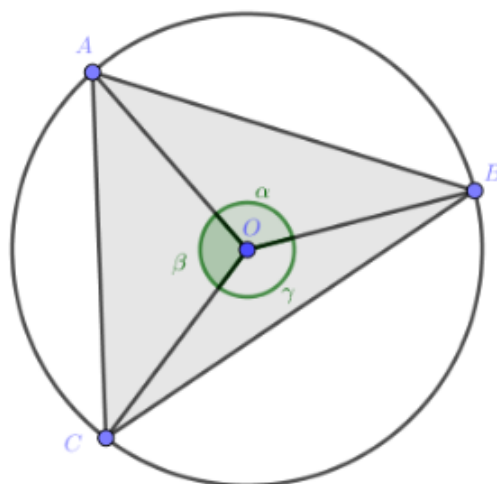
### 2.2.2 Tabelas de medidas para cordas de ângulos centrais

Se deve a Hiparco de Rodes (190 AEC – 120 AEC), que era considerado o grande astrônomo da antiguidade, a ideia de razão trigonométrica, já que para poder fazer os seus cálculos era necessária uma tabela de razões trigonométricas.

Como ainda não existia nenhuma, ele teve que construir uma por si só. Para isso ele considerava um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência de modo que cada lado fosse uma corda conforme a Figura 5, que em geometria representa um segmento de reta que une dois pontos da circunferência ou de qualquer outra curva e a ideia principal era determinar o comprimento dessas cordas. Para Hiparco, o lado de todo triângulo inscrito é a corda de um ângulo central e dado que o ângulo central era conhecido, era possível determinar as medidas das cordas e isso tornou-se a principal tarefa da trigonometria nos séculos seguintes.



Figura 5 – Triângulo inscrito.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

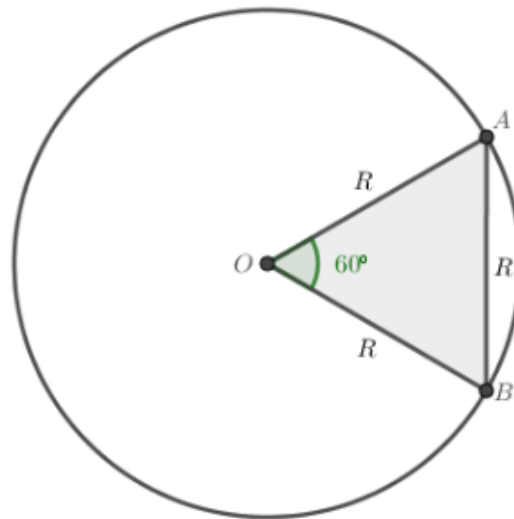
Os gregos conheciam a representação sexagesimal de numeração dos babilônios, “foi Hiparco, ou talvez Hipsicles (c. 180 AEC), quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em  $360^\circ$ ” (EVES, 2009, p.202), deste modo cada uma das 360 partes iguais em que a circunferência foi dividida recebeu o nome de arco de 1 grau ( $1^\circ$ ) e cada arco de 1 grau foi dividido em 60 partes iguais, sendo que cada uma dessas partes recebeu o nome de arco de 1 minuto ( $1^\circ = 60'$ ). Além disso, cada arco de 1 minuto também foi dividido em 60 arcos iguais e recebeu o nome de arco de 1 segundo ( $1' = 60''$ ).

Como o ângulo ou arco deveria ser medido em graus e minutos, Hiparco decidiu usar a mesma medida para o raio do círculo. Sabendo que a medida da circunferência é igual  $2\pi R$ , e tomando para  $\pi$  a aproximação sexagesimal<sup>4</sup>  $3;8,30$ , que é próxima da média entre os dois valores arquimedianos de  $3\frac{10}{71}$  e  $3\frac{1}{7}$ , ele considerou a circunferência com  $360^\circ$  então multiplicou por 60 para obter o correspondente em minutos e assim calculou o raio  $R$  como  $\frac{60.360}{2\pi}$ , passando para representação sexagesimal temos  $\frac{6,0,0}{6;17} = 57,18^5$  que é igual a  $57 \cdot 60 + 18$  logo 3438 para o inteiro mais próximo.

Considerando alguns conhecimentos geométricos, podemos entender como Hiparco possivelmente construiu sua tabela, além disso, segue alguns exemplos. Para o ângulo central de  $60^\circ$ , sua corda  $AB$  equivale ao lado de um triângulo equilátero, que possui um vértice no centro  $O$  da circunferência e os outros dois sobre a circunferência, essa corda  $AB$  tem o mesmo valor que o raio.

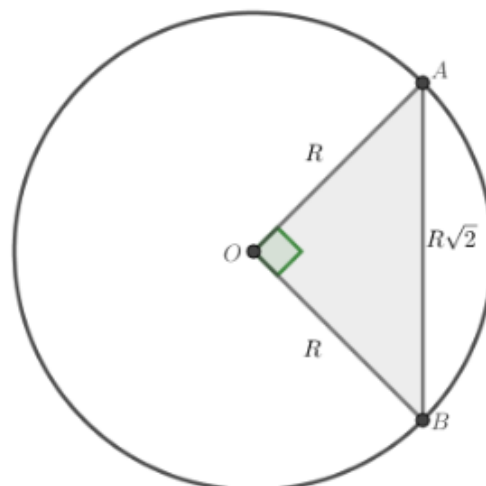
<sup>4</sup> Sistema de numeração de base 60, criado pela antiga civilização Assíria, temos que  $3;8,30 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3,141666\dots$

<sup>5</sup>  $(6,0,0)$ ,  $(6;17)$  e  $(57,18)$  estão no sistema sexagesimal, seus equivalentes no sistema decimal são respectivamente 21600, 6,2833... e 3438.

Figura 6 – Corda de  $60^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para o ângulo central de  $90^\circ$ , sua corda  $AB$  equivale à hipotenusa de um triângulo retângulo e as outras cordas  $OA$  e  $OB$  equivalem aos catetos desse triângulo, de modo que o vértice  $O$  está no centro e os outros dois sobre a circunferência, aplicando a relação do Teorema de Pitágoras obtemos o valor da corda de acordo com o raio da circunferência.

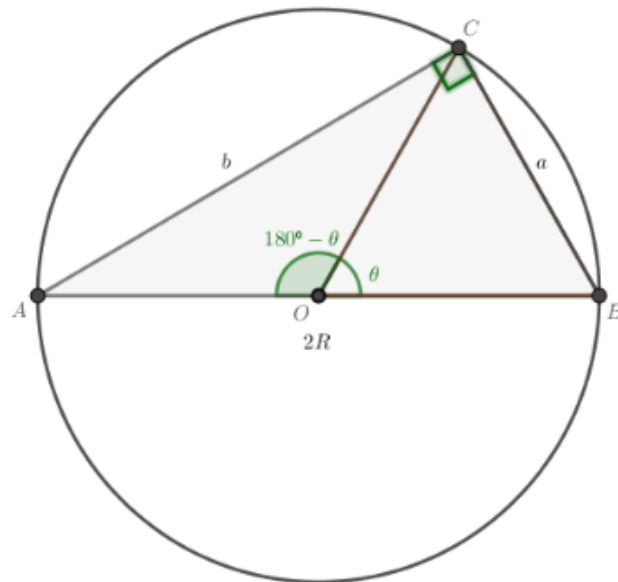
Figura 7 – Corda de  $90^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Conhecendo a corda do ângulo central  $\theta$  podemos obter a corda do ângulo central suplementar ( $180^\circ - \theta$ ), sua corda equivale ao cateto  $AC$  de um triângulo retângulo que possui o vértice do ângulo reto sobre a circunferência e a hipotenusa  $AB$  equivale ao diâmetro dessa

circunferência (Figura 8), aplicando a relação do Teorema de Pitágoras obtemos o valor da corda  $AC$  de acordo com o raio da circunferência.

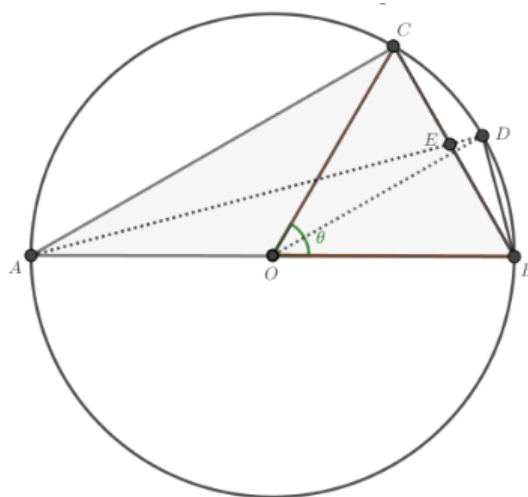
Figura 8 – Corda de  $(180^\circ - \theta)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considere  $a = \text{Corda } \theta$ ,  $b = \text{Corda } (180^\circ - \theta)$ , aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $\triangle ABC$  temos  $(2R)^2 = a^2 + b^2$ , daí,  $b^2 = (2R)^2 - a^2$ , então  $b = \sqrt{(2R)^2 - a^2}$  que resulta em  $\text{Corda } (180^\circ - \theta) = \sqrt{(2R)^2 - (\text{Corda } \theta)^2}$ .

Figura 9 – Corda de  $\frac{\theta}{2}$ , versão 1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Arquimedes de Siracusa (287 AEC – 212 AEC) em seu tratado sobre as medidas do círculo encontrou que  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$  ao aproximar a circunferência pelo perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência. Nesse processo de obter novos polígonos inscritos, Arquimedes precisava dividir a circunferência de acordo com sua necessidade e esse processo de divisão permitiu determinar a medida da corda do ângulo  $\frac{\theta}{2}$ , desde que se conheça a medida da corda do ângulo  $\theta$ .

Dada uma circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB$ , considere também um ponto  $C$  sobre a circunferência determinando assim o triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , por construção o ponto  $D$  divide o arco  $\widehat{BC}$  em dois arcos iguais  $\widehat{BD}$  e  $\widehat{DC}$ . Considere  $\theta$  o ângulo  $C\hat{O}B$ , temos também o ponto  $E$  determinado pela interseção do segmento  $AD$  com o segmento  $BC$ . Nosso objetivo é determinar a medida da corda  $DB$ , que será a corda de  $\frac{\theta}{2}$  (Figura 9). O ângulo  $C\hat{A}B$  é igual a  $\frac{\theta}{2}$ , pois é inscrito na circunferência e equivale a metade do ângulo central  $C\hat{O}B$  que é igual a  $\theta$ .

Por construção o segmento  $AD$  é uma bissetriz, então temos que ângulos  $D\hat{A}B \equiv C\hat{A}D \equiv C\hat{A}E = \frac{\theta}{4}$  e o ângulo  $D\hat{O}B$  será igual a  $\frac{\theta}{2}$ . Deste modo os triângulos  $\triangle ACE$  e  $\triangle ADB$  são semelhantes pelo caso AA<sup>6</sup>, pois temos ângulos  $A\hat{C}B \equiv A\hat{C}E \equiv A\hat{D}B = 90^\circ$  e ângulos  $D\hat{A}B \equiv C\hat{A}E$  igual a  $\frac{\theta}{4}$ , assim pela semelhança temos  $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE}$ .

Aplicando o teorema da bissetriz interna<sup>7</sup> no triângulo  $\triangle ABC$  temos  $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CE}$ , como são grandezas do mesmo gênero e são proporcionais, aplicamos uma propriedade que diz: “a adição (ou subtração), dos numeradores e denominadores da segunda razão, aos da primeira, é igual à primeira ou segunda razão”, logo a proporção  $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CE}$  também será proporcional a  $\frac{AB+AC}{BE+CE} = \frac{AC}{CE}$  então  $\frac{AD}{DB} = \frac{AB+AC}{BC}$ . Assim podemos determinar a medida da corda  $DB$ , já que os segmentos  $AB$  e  $BC$ , são conhecidos e o segmento  $AC$  pode ser calculado pelo ângulo suplementar de  $\theta$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras, no triângulo  $\triangle ABD$ , temos  $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2}$ , substituindo em  $\frac{AD}{DB} = \frac{AB+AC}{BC}$  podemos determinar a medida da corda  $DB$ .

Vamos fazer essa substituição e determinar  $DB$ :

Para facilitar os cálculos vamos considerar  $AB = 2R = a$ ;

$$BC = corda(\theta) = c;$$

$$AC = corda(180^\circ - \theta) = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{a^2 - c^2};$$

$$DB = x;$$

<sup>6</sup> AA é um caso de semelhança que diz: “Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.” (DOLCE; POMPEO, 2013, p.198).

<sup>7</sup> “Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.” (DOLCE; POMPEO, 2013, p.184).

$$AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ e substituir em } \frac{AD}{DB} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

$$\text{Segue então } \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}. \text{ Assim, obtemos}$$

$$c \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = x \cdot (a + \sqrt{a^2 - c^2}) \text{ elevamos ao quadrado, temos}$$

$$c^2 (a^2 - x^2) = x^2 \cdot (a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2} + a^2 - c^2)$$

$$c^2 a^2 - c^2 x^2 = x^2 \cdot (2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2} - c^2)$$

$$c^2 a^2 = x^2 \cdot (2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2} - c^2) + c^2 x^2$$

$$c^2 a^2 = x^2 \cdot (2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2} - c^2 + c^2)$$

$$c^2 a^2 = x^2 \cdot (2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2})$$

$$x^2 = \frac{c^2 a^2}{(2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2})}$$

$$x = \frac{c \cdot a}{\sqrt{(2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2})}}$$

$$x = \frac{c \cdot a}{\sqrt{2a(a + \sqrt{a^2 - c^2})}}$$

Portanto,  $DB = \frac{2R \cdot \text{corda}(\theta)}{\sqrt{4R[2R + \text{corda}(180^\circ - \theta)]}}$ , deste modo temos uma forma para calcular a corda do ângulo  $\frac{\theta}{2}$ .

Outro modo para o cálculo da  $\text{corda}\left(\frac{\theta}{2}\right)$  de acordo com Katz (2008, p.144), consiste em usar uma versão da fórmula do ângulo metade e obtemos que

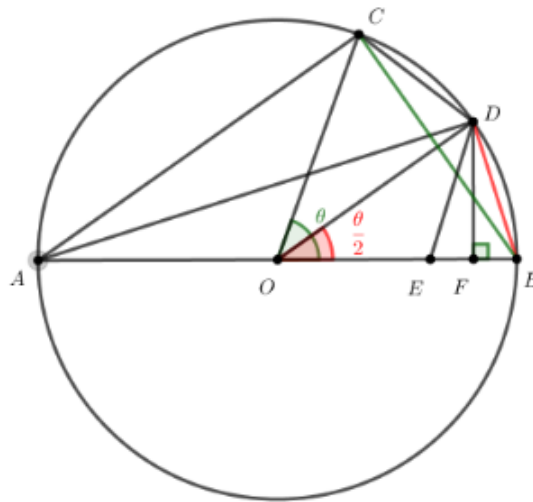
$$\text{corda}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{R[2R - \text{corda}(180^\circ - \theta)]}.$$

Na Figura 10, temos  $AB = 2R$ ,  $BC = \text{corda}(\theta)$ , considerando  $OD$  uma bissetriz do ângulo  $C\hat{O}B$ , para obter a medida da corda  $DB$  que é a  $\text{corda}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , em termos de  $BC$ , vamos marcar sobre  $AB$  o ponto  $E$  de tal forma que  $AC = AE$ , com isso temos que os triângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle ADE$  são congruentes pelo caso LAL<sup>8</sup>, já que os lados  $AC$  e  $AE$  são congruentes, os ângulos  $D\hat{A}C \equiv E\hat{A}D$ , pois são ângulos inscritos na circunferência que correspondem ao ângulo central de  $\frac{\theta}{2}$  e  $AD$  é um lado em comum. Agora temos  $BD \equiv DC$  pois são cordas de  $\frac{\theta}{2}$  e da congruência dos triângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle ADE$  temos que  $DC = DE$  então  $DE = BD$ . Seja  $DF$  perpendicular com  $EB$ , temos que  $FB = \frac{1}{2}BE$ , mas  $EB = AB - AE$ , daí  $FB = \frac{1}{2}(AB - AE)$ . Sabemos que  $AC = \text{corda}(180^\circ - \theta)$ . Agora podemos determinar  $DB$ .

<sup>8</sup> "Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes." (DOLCE; POMPEO, 2013, p.38).

Aplicando uma das relações métricas no triângulo retângulo  $\triangle ADB$ <sup>9</sup> temos  $DB^2 = AB \cdot FB$ , segue  $DB^2 = 2R \cdot \frac{1}{2}[2R - \text{corda}(180^\circ - \theta)]$ , então  $DB^2 = R[2R - \text{corda}(180^\circ - \theta)]$ , logo  $DB = \sqrt{R[2R - \text{corda}(180^\circ - \theta)]}$ .

Figura 10 – Corda de  $\frac{\theta}{2}$ , versão 2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Segue que com essas relações e começando com os arcos de  $60^\circ$  e  $90^\circ$ , podemos construir uma tabela como Hiparco, que relaciona arcos e cordas, com intervalos de  $7\frac{1}{2}^\circ$  em  $7\frac{1}{2}^\circ$ , com a tabela começando em  $7\frac{1}{2}^\circ$  e terminando em  $180^\circ$ .

Como não temos registros da tabela de Hiparco, segue uma amostra para os ângulos centrais de  $7\frac{1}{2}^\circ$  até  $90^\circ$  da tabela considerando as deduções anteriores para  $R = 3438$  e com notação decimal.

<sup>9</sup> “cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.” (DOLCE; POMPEO, 2013, p.217).

Tabela 1 – Tabela Hiparco.

ângulo central $\theta$	corda ( $\theta$ )
$7\frac{1}{2}^\circ$	449,71
$15^\circ$	897,50
$22\frac{1}{2}^\circ$	1341,44
$30^\circ$	1779,64
$37\frac{1}{2}^\circ$	2210,22
$45^\circ$	2631,33
$52\frac{1}{2}^\circ$	3041,18
$60^\circ$	3438
$67\frac{1}{2}^\circ$	3820,10
$75^\circ$	4185,84
$82\frac{1}{2}^\circ$	4533,66
$90^\circ$	4862,07

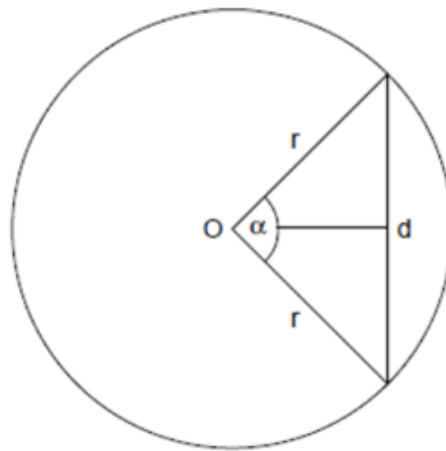
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

### 2.2.3 Subtração de arcos conhecidos

O *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu (85 – 165) foi o primeiro grande trabalho em trigonometria que nos chegou intacto (MAOR, 1998). O *Almagesto* também conhecido como um resumo matemático e astronômico é composto de 13 partes (“livros”). Ptolomeu viveu em Alexandria, o centro intelectual do período helenístico e diferente dos gregos que consideravam a matemática como uma ciência abstrata, Ptolomeu utilizava a matemática de forma não abstrata, ele a aplicava em situações práticas do cotidiano.

Acredita-se que Ptolomeu conhecia os trabalhos de Hiparco e construiu uma tabela de cordas. Como trabalhava com astronomia, Ptolomeu precisava de conhecimentos que atualmente na trigonometria relacionam medidas angulares e medidas lineares para atingir seu objetivo. No primeiro dos treze livros do *Almagesto* há uma tabela de comprimentos de cordas em um círculo e um conjunto detalhado de instruções sobre como construí-la, sua tabela nos dá o comprimento de uma corda em função do ângulo central subtendido (Figura 11) para ângulos de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  em intervalos de meio em meio grau e cujo raio da circunferência é igual a 60, usando o sistema sexagesimal. Podemos inferir atualmente que se trata de uma tabela de senos, deste modo temos uma forma de relacionar medidas angulares com medidas lineares. Sendo  $r$  o raio da circunferência e  $\alpha$  o ângulo central, o comprimento da corda  $d$  será  $d = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , usando a notação atual.

Figura 11 – Corda.



Fonte: Maor (1998, p.26).

A partir dessas tabelas que relacionam arcos e cordas, entendemos que existe uma relação na qual é possível seguir adiante e então chegar no nosso objetivo que são as razões trigonométricas.

Algumas contribuições de Ptolomeu para a determinação dos valores de outras corda consiste no seguinte teorema: “a soma dos produtos das medidas dos lados opostos de um quadrilátero inscrito é igual ao produto das medidas das diagonais”, conhecido hoje como Teorema de Ptolomeu, deste modo foi possível determinar as medidas de cordas através de subtração de arcos, como veremos.

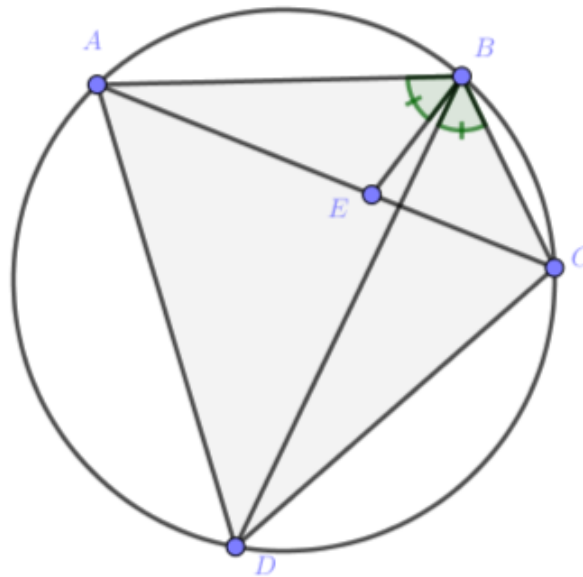
Vamos provar que o Teorema de Ptolomeu é válido para qualquer quadrilátero inscrito:

Dado o quadrilátero inscrito  $ABCD$  (Figura 12), considere o ponto  $E$  sobre a diagonal  $AC$  de tal modo que os ângulos  $\widehat{ABE}$  e  $\widehat{DBC}$  sejam congruentes. Os triângulos  $\triangle ABE$  e  $\triangle DBC$  são semelhantes pelo caso AA, já que os ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{BDC}$  são congruentes pois subtendem o mesmo arco e os ângulos  $\widehat{ABE}$  e  $\widehat{DBC}$  são congruentes por construção, daí segue as seguintes razões  $\frac{AE}{DC} = \frac{AB}{DB}$  que resulta em  $AB \cdot DC = DB \cdot AE$  (1). Os triângulos  $\triangle ADB$  e  $\triangle BCE$  são semelhantes pelo caso AA, já que os ângulos  $\widehat{ADB}$  e  $\widehat{ACB}$  são congruentes pois subtendem o mesmo arco e os ângulos  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{CBE}$  são congruentes pois o ângulo  $\widehat{ABD} = \widehat{ABE} + \widehat{EBD}$  e o ângulo  $\widehat{CBE} = \widehat{DBC} + \widehat{EBD}$  e como os ângulos  $\widehat{ABE}$  e  $\widehat{DBC}$  são congruentes por construção, daí segue as seguintes razões  $\frac{EC}{AD} = \frac{BC}{DB}$  que resulta em  $AD \cdot BC = DB \cdot EC$  (2), adicionando as equações (1) e (2) temos  $AB \cdot DC + AD \cdot BC = DB \cdot AE + DB \cdot EC$ , então  $AB \cdot DC + AD \cdot BC = DB \cdot (AE + EC)$  por fim como  $AE + EC = AC$  segue

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = DB \cdot AC \quad (2.1)$$



Figura 12 – Teorema de Ptolomeu.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com base nesse teorema Ptolomeu conseguiu encontrar a fórmula da subtração de arcos conhecidos.

De acordo com Brummelen (2009, p.74, tradução livre), a fórmula da diferença de cordas é dada por

$$\text{corda}(\alpha - \beta) = \frac{\text{corda}(\alpha) \cdot \text{corda}(180^\circ - \beta) - \text{corda}(\beta) \cdot \text{corda}(180^\circ - \alpha)}{2R},$$

para isso devemos considerar um quadrilátero inscrito em uma semicircunferência de modo que  $AD$  seja o diâmetro da circunferência,  $\widehat{AC}$  seja o arco do ângulo  $\alpha$  e  $\widehat{AB}$  seja o arco do ângulo  $\beta$  conforme a Figura 13.

Usando a Fórmula de Ptolomeu e as substituições adequadas, temos:

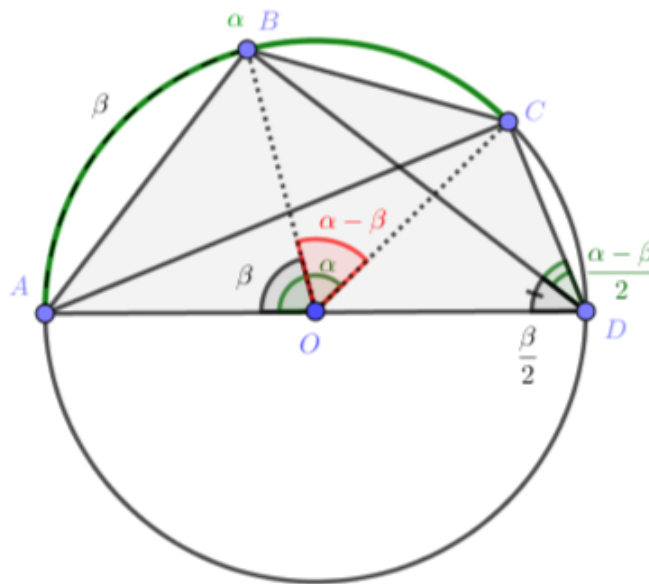
$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = DB \cdot AC$$

$$\text{corda}(\beta) \cdot \text{corda}(180^\circ - \alpha) + 2R \cdot \text{corda}(\alpha - \beta) = \text{corda}(180^\circ - \beta) \cdot \text{corda}(\alpha)$$

$$2R \cdot \text{corda}(\alpha - \beta) = \text{corda}(180^\circ - \beta) \cdot \text{corda}(\alpha) - \text{corda}(\beta) \cdot \text{corda}(180^\circ - \alpha)$$

$$\text{corda}(\alpha - \beta) = \frac{\text{corda}(180^\circ - \beta) \cdot \text{corda}(\alpha) - \text{corda}(\beta) \cdot \text{corda}(180^\circ - \alpha)}{2R} \quad (2.2)$$

Figura 13 – Corda da diferença de dois arcos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para atingir seu objetivo de construir uma tabela com os valores das cordas de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  em intervalos de meio em meio grau, ele precisava ir além das formas usadas por Hiparco, Ptolomeu precisava determinar os valores das cordas de  $36^\circ$  e seus múltiplos e submúltiplos.

Ptolomeu definiu a corda  $36^\circ$  como a medida do lado de um decágono regular inscrito em uma circunferência, aplicando a Proposição 9 do livro XIII<sup>10</sup> e a Proposição 6 do livro II<sup>11</sup> de Euclides, Ptolomeu determinou esse valor.

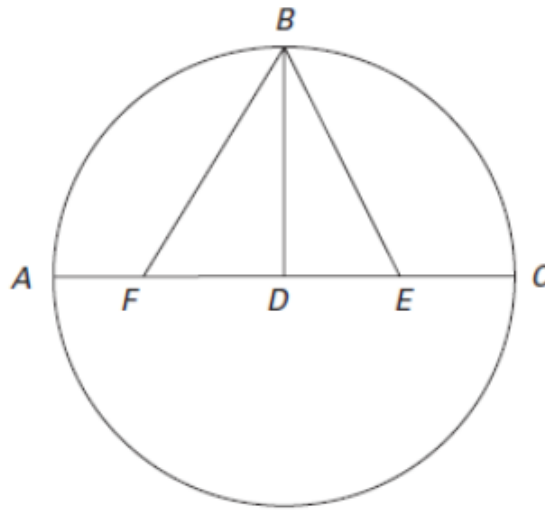
Considere a Figura 14, seja o segmento  $AC$  o diâmetro da circunferência,  $D$  o centro,  $BD$  perpendicular a  $AC$ ,  $E$  o ponto médio do segmento  $DC$  e  $F$  um ponto tal que  $BE = FE$ , pela Proposição 6 do livro II, na qual  $DC$  é a linha reta e foi cortada em duas partes iguais.  $FD$  é a linha adicionada a  $DC$  e  $FE$  é a soma da adicionada  $FD$  com a metade da linha que é  $DE$ , aplicando a proposição temos:  $FC \cdot FD + DE^2 = FE^2$ , daí  $FC \cdot FD + DE^2 = BE^2$ , então  $FC \cdot FD = BE^2 - DE^2$ , aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $\triangle BDE$  temos  $BD^2 = BE^2 - DE^2$ , segue que  $FC \cdot FD = BD^2$ , como  $BD$  e  $DC$  são iguais ao raio da circunferência, segue que  $BD^2 = DC^2$  e podemos escrever  $FC \cdot FD = DC^2$  que equivale a  $\frac{FC}{DC} = \frac{DC}{FD}$ . Agora já que  $FC = FD + DC$  temos  $\frac{FD + DC}{DC} = \frac{DC}{FD}$ , que equivale à razão do segmento  $FC$  dividido no ponto  $D$  em média e extrema razão<sup>12</sup>.

<sup>10</sup> "Caso o lado do hexágono e o do decágono, dos inscritos no mesmo círculo, sejam compostos, a reta toda foi cortada em extrema e média razão, e o segmento maior dela é o lado do hexágono." (BICUDO, 2009, p.571).

<sup>11</sup> "Caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, o retângulo contido pela reta toda junto com a adicionada e pela adicionada, com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada." (BICUDO, 2009, p.140).

<sup>12</sup> "Uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor" (BICUDO, 2009, p.231).

Figura 14 – Cálculo da corda de 36°.



Fonte: Katz (2008, p.146).

Considerando  $BD = DC = R$  e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $\triangle BDE$  obtemos:

$$BE^2 = BD^2 + DE^2$$

$$BE^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$BE^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}$$

$$BE^2 = \frac{5R^2}{4}$$

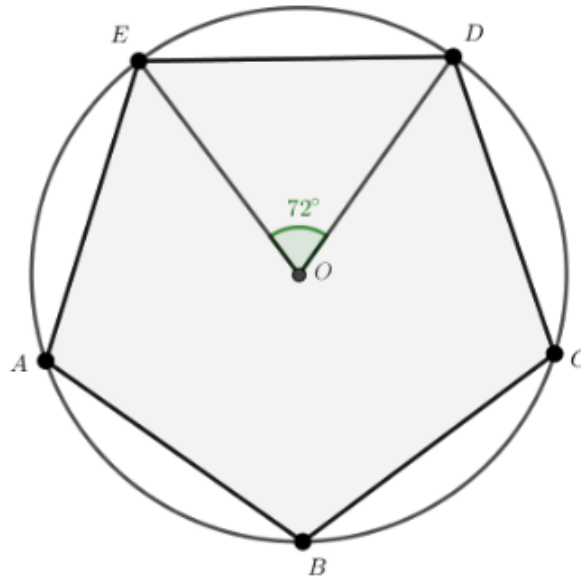
$$BE = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Temos que  $FE = FD + DE$  e como  $FE = BE$  segue que  $FD = BE - DE$ , então  $FD = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}$  daí  $FD = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ , assim de acordo com a Proposição 9 do livro XIII segue que  $FD$  é o lado do decágono pois é o menor segmento e  $DC$  é o lado do hexágono, portanto  $DC = \text{corda } 60^\circ = R = 60$ .

Temos  $FD = \text{corda } 36^\circ$ , mas  $FD = FE - DE$ , como  $FE = BE$  segue que  $FD = BE - DE$ , sabemos que  $BE^2 = BD^2 + DE^2$  logo  $BE = \sqrt{BD^2 + DE^2}$ , então  $FD = \sqrt{BD^2 + DE^2} - DE$ , que são valores conhecidos de acordo com  $BD = DC = R = 60$ , em que obtemos  $FD = \text{corda } 36^\circ = \sqrt{60^2 + 30^2} - 30 = 37,08204$  ou  $FD = \text{corda } 36^\circ = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$  de acordo com o raio  $R$  na forma decimal. Ptolomeu reconheceu que a corda de  $72^\circ$  equivale ao lado de um pentágono

regular, veja a Figura 15, a partir da Proposição 10 do livro XIII<sup>13,14</sup> de Euclides é possível obter essa medida. Como visto anteriormente já sabemos a medida da corda  $36^\circ$  e da corda  $60^\circ$  então  $\text{corda } 72^\circ = \sqrt{(\text{corda } (36^\circ))^2 + (\text{corda } (60^\circ))^2}$ .

Figura 15 – Corda de  $72^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Conhecendo as cordas de diversos ângulos centrais como  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  e aplicando a fórmula da corda da diferença de dois arcos e a fórmula da corda do ângulo metade, Ptolomeu chegou até corda  $1\frac{1}{2}^\circ$  e corda  $\frac{3}{4}^\circ$ , já que corda  $12^\circ = \text{corda}(72^\circ - 60^\circ)$ , corda  $6^\circ = \text{corda}\left(\frac{12^\circ}{2}\right)$ , corda  $3^\circ = \text{corda}\left(\frac{6^\circ}{2}\right)$ , corda  $1\frac{1}{2}^\circ = \text{corda}\left(\frac{3^\circ}{2}\right)$ , corda  $\left(\frac{3^\circ}{4}\right) = \text{corda}\left(\frac{1\frac{1}{2}^\circ}{2}\right)$  porém insuficiente para construir sua tabela com intervalos de meio em meio grau.

Para atingir seu objetivo usou um procedimento de aproximação, que é baseada no lema “se temos ângulo  $\alpha < \text{ângulo } \beta < 90^\circ$  então  $\frac{\text{corda } (\beta)}{\text{corda } (\alpha)} < \frac{\beta}{\alpha}$ ”. Segue que para  $\alpha = \frac{3^\circ}{4}$  e  $\beta = 1^\circ$ , obteve que corda  $1^\circ < \frac{4}{3}\text{corda}\left(\frac{3^\circ}{4}\right)$  e aplicando novamente para  $\alpha = 1^\circ$  e  $\beta = 1\frac{1}{2}^\circ$ , obteve que corda  $1^\circ > \frac{2}{3}\text{corda}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)$ , assim foi possível determinar um valor aproximado para a corda  $1^\circ$  pois  $\frac{2}{3}\text{corda}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) < \text{corda}(1^\circ) < \frac{4}{3}\text{corda}\left(\frac{3^\circ}{4}\right)$  e consequentemente para a corda

<sup>13</sup> If an equilateral pentagon be inscribed in a circle, the square on the side of the pentagon is equal to the squares on the side of the hexagon and on that of the decagon inscribed in the same circle (HEATH, 1908, p.457).

<sup>14</sup> Se um pentágono equilátero estiver inscrito em um círculo, o quadrado do lado do pentágono é igual aos quadrados do lado do hexágono e do decágono inscrito no mesmo círculo (HEATH, 1908, p.457, tradução livre).

$\left(\frac{1^\circ}{2}\right)$ , usando o mesmo raciocínio, construiu sua tabela.

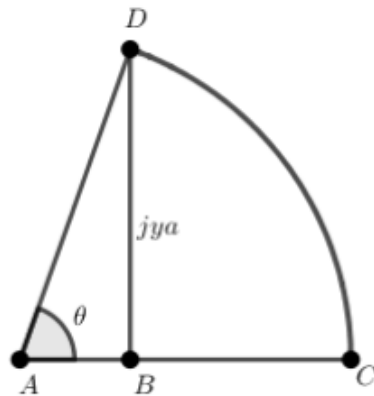
Figura 16 – Tabela de cordas de Ptolomeu com valores sexagesimais.

Table of Chords		
arcs	choras	sixtieths
$\frac{1}{2}^\circ$	0;31,25	0;1,2,50
$1^\circ$	1;2,50	0;1,2,50
$1\frac{1}{2}^\circ$	1;34,15	0;1,2,50
$2^\circ$	2;5,40	0;1,2,50
$2\frac{1}{2}^\circ$	2;37,4	0;1,2,48
$3^\circ$	3;8,28	0;1,2,48
$3\frac{1}{2}^\circ$	3;39,52	0;1,2,48
$4^\circ$	4;11,16	0;1,2,47
$4\frac{1}{2}^\circ$	4;42,40	0;1,2,47
$5^\circ$	5;14,4	0;1,2,46
$5\frac{1}{2}^\circ$	5;45,27	0;1,2,45
$6^\circ$	6;16,49	0;1,2,44
$6\frac{1}{2}^\circ$	6;48,11	0;1,2,43
$7^\circ$	7;19,33	0;1,2,42
$7\frac{1}{2}^\circ$	7;50,54	0;1,2,41
.	.	.
.	.	.
$174\frac{1}{2}^\circ$	119;51,43	0;0,2,53
$175^\circ$	119;53,10	0;0,2,36
$175\frac{1}{2}^\circ$	119;54,27	0;0,2,20
$176^\circ$	119;55,38	0;0,2,3
$176\frac{1}{2}^\circ$	119;56,39	0;0,1,47
$177^\circ$	119;57,32	0;0,1,30
$177\frac{1}{2}^\circ$	119;58,18	0;0,1,14
$178^\circ$	119;58,55	0;0,0,57
$178\frac{1}{2}^\circ$	119;59,24	0;0,0,41
$179^\circ$	119;59,44	0;0,0,25
$179\frac{1}{2}^\circ$	119;59,56	0;0,0,9
$180^\circ$	120;0,0	0;0,0,0

Fonte: Maor (1998, p.27).

## 2.3 Contribuição dos hindus

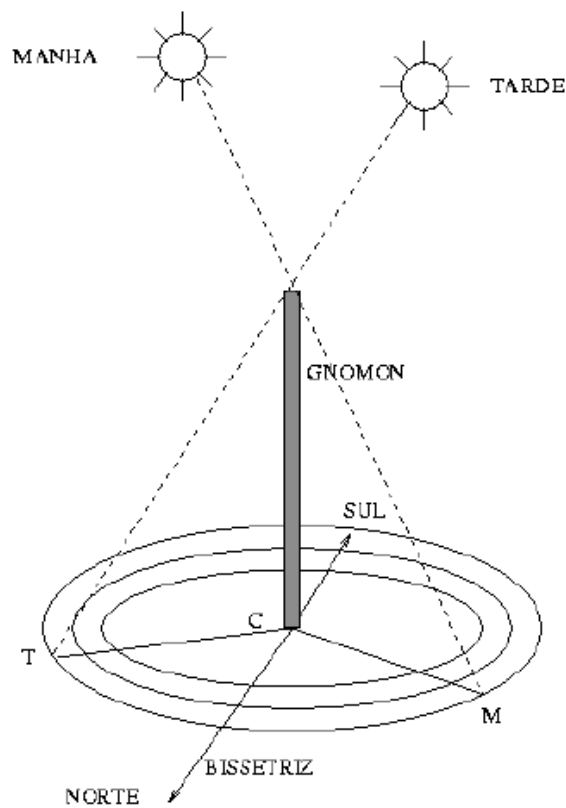
Encontramos num trabalho hindu sobre astronomia chamado *Surya Siddhanta* (400 EC), uma tabela com o valor da meia corda, com base na tabela de Ptolomeu. O trabalho hindu *Aryabhatiya* de Aryabhata (510 EC) é considerado o mais antigo tratado hindu sobre matemática, Aryabhata usa as palavras *ardha-jya* para se referir a meia corda e com o tempo a encurta para *jya* ou *jiva*. Assim como a corda, a meia corda ou *jya* é definida como o comprimento de um segmento de reta em uma circunferência de acordo com a Figura 17, no qual o arco  $\widehat{DC}$  indica o ângulo, o segmento  $DB$  é a meia corda ou *jya* e o segmento  $AD$  é o raio da circunferência. Podemos estabelecer a seguinte relação moderna entre a meia corda ou *jya* com o seno,  $jya(\theta) = R \cdot \text{sen}(\theta)$ , no qual  $R$  é o raio da circunferência, no caso em que  $R = 1$  temos  $jya(\theta) = \text{sen}(\theta)$ .

Figura 17 – Meia corda ( $jya$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Destacamos que as tabelas trigonométricas são de grande importância e utilidade envolvendo várias situações como a navegação, a astronomia, a agrimensura e facilita os cálculos. Considerando este fato, novas tabelas surgem com as demais razões.

Figura 18 – Gnômon.



Fonte: <https://ppgenfis.if.ufrgs.br/mef008/arquivos/relsol.html>. Acesso em: 11 jun. 2023.

Aryabhata tabulou em uma mesma coluna o seno dos ângulos de  $0^\circ$  a  $45^\circ$  e do cosseno dos ângulos complementares. As razões tangente e cotangente, originaram-se com o gnômon<sup>15</sup> (Figura 18) e o cálculo das sombras. Mas o tratamento dessas razões que se aproximam das ideias modernas de funções de um ângulo começou com os árabes. A primeira tabela de tangentes e cotangentes foi construída por volta de 860 por Ahmed ibn Abdallah al-Mervazi.

As razões secante e cossecante surgiram ainda mais tarde. Elas foram mencionadas pela primeira vez, sem nomes especiais, nas obras do estudioso árabe Abul-Wefa (940 – 998), que também foi um dos primeiros a construir uma tabela de tangentes.

## 2.4 Contribuição de europeus

A primeira tabela de secantes impressa apareceu na obra *Canon doctrinae triangulorum* (Leipzig, 1551) de Georg Joachim Rhæticus (1514 – 1576), que estudou com Copérnico e se tornou seu primeiro discípulo, neste trabalho todas as seis razões trigonométricas aparecem pela primeira vez.

As tabelas numéricas foram fundamentais para se trabalhar com os cálculos trigonométricos na astronomia, navegação e nas ciências de modo geral, tabelas com resultados cada vez mais precisos foram construídas por diferentes autores no século XVI.

Algumas tabelas de senos foram feitas por Johann Müller (1436–1476), também conhecido por Regiomontanus, que definiu as funções trigonométricas básicas que conhecemos hoje, no seu trabalho *De triangulis omnimodis*, escrito no século XV, porém publicado em 1533, entre as definições apresentadas na obra, temos as definições sobre quantidade, razão, igualdade, círculo, arco, corda, além disso, enuncia o seguinte teorema:

Livro I, Teorema 20: em todo triângulo retângulo, cujo um dos vértices agudos se torna o centro de um círculo e cuja [hipotenusa] é o raio, o lado subtendido a este ângulo agudo é o seno reto do arco adjacente àquele [lado e] oposto ao ângulo dado, e o terceiro lado do triângulo é igual ao seno do complemento do arco. (BRUMMELEN, 2021, p.4, tradução livre).<sup>16</sup>

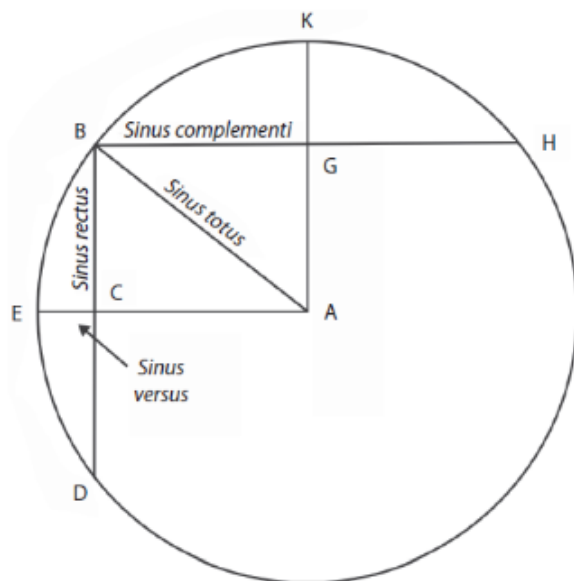
Vemos na Figura 19 que o segmento  $BC$  representa o que conhecemos como seno e o segmento  $BG$  o que conhecemos hoje por cosseno, para essa representação Regiomontanus introduz o seno de acordo com a definição hindu segundo Maor (1998, p.44, tradução livre)<sup>17</sup> “quando o arco e sua corda são bissectados, chamamos essa meia corda de seno reto do meio arco.”

<sup>15</sup> Antigo instrumento composto de um ponteiro vertical que marca a altura do Sol a partir da sombra projetada sobre um plano ou círculo horizontal.

<sup>16</sup> Book I, Theorem 20: In every right triangle, one of whose acute vertices becomes the center of a circle and whose [hypotenuse] its radius, the side subtending this acute angle is the right sine of the arc adjacent to that [side and] opposite the given angle, and the third side of the triangle is equal to the sine of the complement of the arc.

<sup>17</sup> When the arc and its chord are bisected, we call that half-chord the right sine of the half-arc.

Figura 19 – Definição das funções trigonométricas.



Fonte: Brummelen (2021, p.4).

Regiomontanus mostra como determinar os ângulos de um triângulo retângulo se dois lados são conhecidos e mostra como determinar os lados desconhecidos de um triângulo retângulo, se um dos dois ângulos agudos e um lado são dados usando sua tabela de seno.



Tabela 2 – Tabela de senos Regiomontanus.

ângulo	Seno	ângulo	Seno	ângulo	Seno
1°	1047	31°	30902	61°	52477
2°	2094	32°	31795	62°	52977
3°	3140	33°	32678	63°	53460
4°	4185	34°	33552	64°	53928
5°	5229	35°	34415	65°	54378
6°	6272	36°	35267	66°	54813
7°	7312	37°	36109	67°	55230
8°	8350	38°	36940	68°	55631
9°	9386	39°	37759	69°	56015
10°	10419	40°	38567	70°	56382
11°	11449	41°	39364	71°	56731
12°	12475	42°	40148	72°	57063
13°	13497	43°	40920	73°	57378
14°	14515	44°	41680	74°	57676
15°	15529	45°	42426	75°	57956
16°	16538	46°	43160	76°	58218
17°	17542	47°	43881	77°	58462
18°	18541	48°	44589	78°	58689
19°	19534	49°	45283	79°	58898
20°	20521	50°	45963	80°	59088
21°	21502	51°	46629	81°	59261
22°	22476	52°	47281	82°	59416
23°	23444	53°	47918	83°	59553
24°	24404	54°	48541	84°	59671
25°	25357	55°	49149	85°	59772
26°	26302	56°	49742	86°	59854
27°	27239	57°	50320	87°	59918
28°	28168	58°	50883	88°	59963
29°	29089	59°	51430	89°	59991
30°	30000	60°	51962	90°	60000

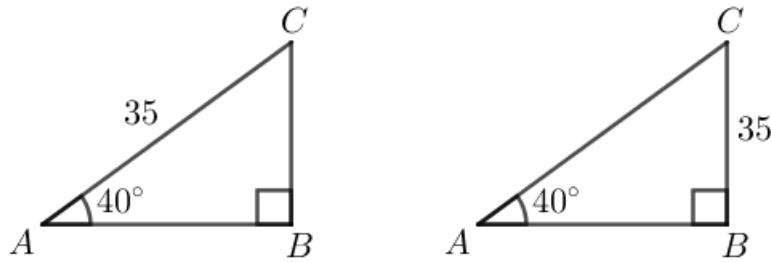
Fonte: Mundy-Castle (2004, p.5).

Segue alguns exemplos dessas aplicações:

**Exemplo 2.4.1** Quando um de dois ângulos agudos e um lado de um triângulo retângulo são conhecidos, todos os ângulos e lados podem ser encontrados.

A partir de um triângulo retângulo  $\triangle ABC$  em que  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  e o ângulo  $\widehat{CAB}$  é igual a  $40^\circ$ , vamos considerar dois casos para apresentar as soluções, no primeiro caso o lado conhecido corresponde com o lado oposto ao ângulo reto isto é  $AC = 35$  e no segundo caso o lado conhecido corresponde a um lado adjacente ao ângulo reto, seja então  $BC = 35$ , conforme a Figura 20.

Figura 20 – Triângulos retângulos com um ângulo agudo e um dos lados conhecidos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para determinar os ângulos em ambos os casos devemos lembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é  $180^\circ$ , como temos um triângulo retângulo um dos ângulos é  $90^\circ$ , como consequência a soma dos ângulos agudos desse triângulo será  $90^\circ$ , logo devemos fazer  $90^\circ - 40^\circ$  e obtemos  $50^\circ$  para o terceiro ângulo.

Para responder quais são as medidas dos lados, devemos fazer a correspondência entre os valores dos senos dos ângulos presentes na tabela com os respectivos lados e ângulos do triângulos que queremos determinar as medidas.

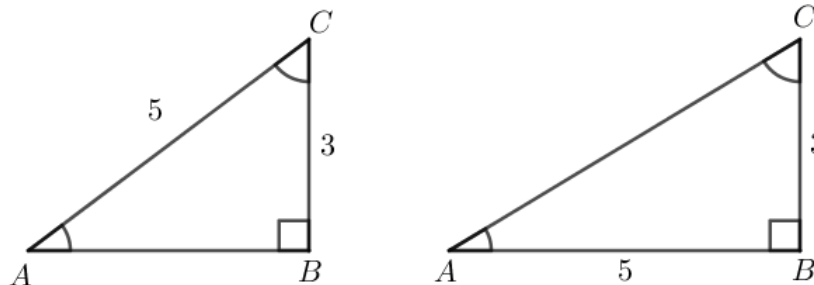
Temos  $\widehat{BAC} = 40^\circ$  e  $\widehat{ACB} = 50^\circ$ , usando a Tabela 2 e fazendo a correspondência temos novas medidas tal que  $AB = \text{sen}50^\circ = 45963$ ,  $BC = \text{sen}40^\circ = 38567$  e  $AC = 60000$  pois conforme o Teorema 20, o  $\triangle ABC$  pode ser visto como construído dentro de uma circunferência, em que  $\widehat{CAB}$  está no centro da circunferência,  $\widehat{ABC}$  é o ângulo reto,  $BC$  será o seno reto,  $AB$  será o seno do complemento do arco e  $AC$  indica a hipotenusa ou o raio conforme a Figura 19, além disso sua tabela foi construída a partir de uma circunferência de raio igual a 60000.

Com essas novas medidas podemos determinar de fato os valores desconhecidos, pois temos as medidas de dois triângulos retângulos semelhantes, então, fazendo  $\frac{60000}{35} = \frac{45963}{AB} = \frac{38567}{BC}$ , segue que  $AB = \frac{35 \cdot 45963}{60000} = 26,81$  e  $BC = \frac{35 \cdot 38567}{60000} = 22,50$ .

Para o segundo caso temos  $\frac{60000}{AC} = \frac{45963}{AB} = \frac{38567}{35}$ , segue que  $AB = \frac{35 \cdot 45963}{38567} = 41,71$  e  $AC = \frac{35 \cdot 60000}{38567} = 54,45$ .

**Exemplo 2.4.2** Quando dois lados de um triângulo retângulo são conhecidos, todos os seus ângulos podem ser encontrados.

Figura 21 – Triângulos retângulos com dois lados conhecidos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Dado um triângulo retângulo com hipotenusa  $AC = 5$ , e cateto  $BC = 3$ , conforme o primeiro triângulo da Figura 21, de acordo com o Teorema 20, o  $\triangle ABC$  pode ser visto como construído dentro de uma circunferência, em que  $\widehat{CAB}$  está no centro da circunferência,  $\widehat{ABC}$  é o ângulo reto,  $BC$  será o seno reto,  $AB$  será o seno do complemento do arco e  $AC$  indica a hipotenusa ou o raio conforme a Figura 19, como vamos usar uma tabela de senos, é necessário que um dos lados conhecidos seja  $AC$ , caso seja esse o caso conforme o primeiro triângulo da Figura 21, faremos a correspondência entre os valores da tabela e o  $\triangle ABC$ . Assim  $AC = 60000$ , como temos dois triângulos retângulos semelhantes segue que  $\frac{60000}{5} = \frac{BC}{3}$ , logo temos  $BC = 36000$  que corresponde ao seno reto de  $\widehat{BAC}$ , consultando a Tabela 2 vemos que o ângulo cujo seno é 36000 é aproximadamente  $37^\circ$ . Como temos um triângulo retângulo o ângulo  $\widehat{ACB}$  será dado por  $90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$  e pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que o lado  $AB$  mede 4 unidades.

Caso os lados conhecidos sejam dados conforme o segundo triângulo da Figura 21, devemos aplicar o Teorema de Pitágoras e determinar a medida do lado  $AC$  e proceder como visto no primeiro caso. Como a seguir.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no segundo triângulo temos  $AC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ , então  $AC = \sqrt{34} = 5,83$  aproximadamente. Agora vamos proceder conforme visto no primeiro caso, para  $AC = 5,83$  e  $BC = 3$ . Fazemos a correspondência entre os valores da tabela e o segundo  $\triangle ABC$ , temos  $AC = 60000$ , desta forma temos dois triângulos retângulos semelhantes, segue que  $\frac{60000}{5,83} = \frac{BC}{3}$ , logo temos  $BC = 30874$  aproximadamente, que corresponde ao seno reto de  $\widehat{BAC}$ , consultando a Tabela 2 vemos que o ângulo cujo seno é 30874 é aproximadamente  $31^\circ$ . Como temos um triângulo retângulo o ângulo  $\widehat{ACB}$  será dado por  $90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$ .

Regiomontanus também construiu tabelas equivalentes à tangente de acordo com Pereira e Morey (2018) no tratado *Tabulae directionum et projectionum* publicado em 1490

em Augsburg,

Nas 43 páginas iniciais ele traz trinta e um problemas astronômicos e nas 272 páginas seguintes diversas tabelas, dentre elas a do seno recto e da tabula fecunda, isto é, uma tábua de tangentes com raio igual a 100.000 ( $\text{tg } 45^\circ = 100.000$ ) (PEREIRA; MOREY, 2018, p.28),

com isso vemos a importância de se obter novas tabelas e como elas são úteis nas resoluções de problemas.

### 3 Obtenção do seno do ângulo duplo e triplo

Com François Viète (1540 – 1603), a trigonometria assume uma característica analítica, pois temos o desenvolvimento simbólico algébrico no qual Viète foi o maior contribuidor. Assim Viète pode resolver certas equações e com elas construiu tabelas de senos.

Em seu tratado *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores* (Notas Preliminares em Logística Especiosa), Viète mostra como usar sua álgebra, apresentando algumas proposições algébricas e também proposições que combinam álgebra e geometria.

Além disso, esse tratado tem um capítulo chamado “Gênese dos triângulos”, que apresenta proposições sobre como obter um triângulo retângulo a partir de outros dois triângulos retângulos, sejam eles semelhantes ou não. Ainda é possível aplicar as proposições na obtenção do seno do ângulo duplo, seno do ângulo triplo, seno do ângulo quádruplo, entre outros, já que essas construções possibilitam tirar essas conclusões trigonométricas.

Nosso objetivo é perceber a trigonometria envolvida para obtenção do seno do ângulo duplo, seno do ângulo triplo, seno do ângulo quádruplo, entre outros, para isso segue algumas proposições e alguns triângulos obtidos por Viète, porém faremos uso de uma notação algébrica atual.

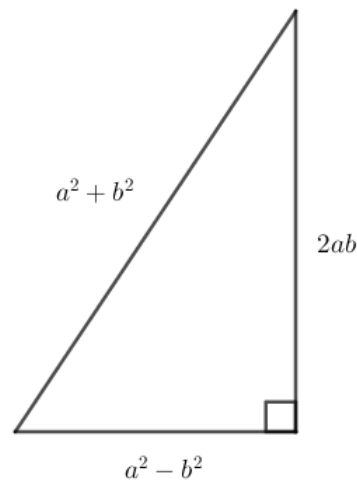
Nesse tratado, a Proposição 45 é sobre construir um triângulo retângulo a partir de duas raízes, de acordo com Witmer (2006). Essa tarefa é feita aplicando o Teorema de Pitágoras de modo que o quadrado construído sobre a hipotenusa seja igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos. Dadas duas raízes  $a$  e  $b$  temos que  $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ . Tomando  $a$  e a terceira proporcional<sup>1</sup> de  $a$  e  $b$  que é  $\frac{b^2}{a}$  como raízes temos:

$$\left(a + \frac{b^2}{a}\right)^2 = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)^2 + 4b^2,$$

que indica a aplicação do Teorema de Pitágoras em que  $a + \frac{b^2}{a}$  é a hipotenusa,  $a - \frac{b^2}{a}$  um cateto e  $2b$  outro cateto. Multiplicando cada um desses valores por  $a$  obtemos  $a^2 + b^2$  para a hipotenusa,  $a^2 - b^2$  para um cateto e  $2ab$  para o outro, como vemos na Figura 22.

<sup>1</sup> Dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , não-nulos, denomina-se terceira proporcional desses números o número  $x$  tal que:  $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ .

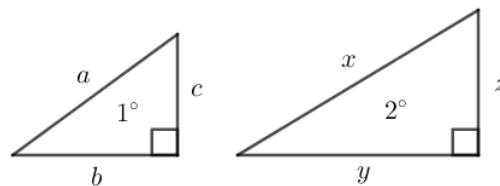
Figura 22 – Triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A Proposição 46, refere-se a obtenção de um terceiro triângulo retângulo a partir de dois triângulos retângulos dados conforme a Figura 23, de modo que a hipotenusa desse terceiro triângulo retângulo seja igual ao produto das hipotenusas dos dois triângulos retângulos dados.

Figura 23 – Dois triângulos retângulos quaisquer.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considerando os dois triângulos retângulos da Figura 23, queremos um terceiro cuja hipotenusa seja igual a  $ax$ , deste modo o quadrado da hipotenusa desse terceiro triângulo retângulo será  $a^2 x^2$ , que equivale a  $(b^2 + c^2) \cdot (y^2 + z^2)$ , pois no  $1^\circ$  triângulo temos  $a^2 = b^2 + c^2$  e no  $2^\circ$  triângulo temos  $x^2 = y^2 + z^2$ .

Desenvolvendo a expressão  $(b^2 + c^2) \cdot (y^2 + z^2)$ , temos  $c^2 y^2 + b^2 z^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$ . Adicionando  $2bcyz$  e subtraindo  $2bcyz$  na expressão obtida, ela não se altera e podemos fazer isso de duas formas:

$$c^2 y^2 + 2bcyz + b^2 z^2 + b^2 y^2 - 2bcyz + c^2 z^2 \quad (3.1)$$

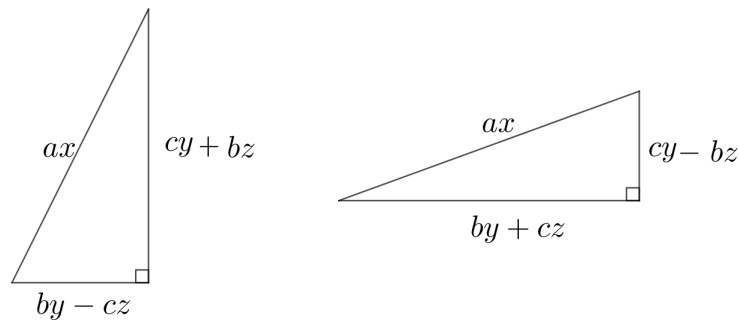
$$c^2 y^2 - 2bcyz + b^2 z^2 + b^2 y^2 + 2bcyz + c^2 z^2 \quad (3.2)$$

Fazendo fatorações, a expressão (3.1) pode ser reescrita como  $(cy + bz)^2 + (by - cz)^2$  e a expressão (3.2) pode ser reescrita como  $(cy - bz)^2 + (by + cz)^2$ .

Para Viète conforme o ângulo agudo, um cateto era considerado base e o outro como perpendicular, além disso de acordo com Witmer (2006, p.72, tradução livre),<sup>2</sup> “esse ângulo é chamado agudo, se é oposto à perpendicular”, assim era possível obter dois triângulos retângulos conforme a Figura 24.

Segue que o terceiro triângulo tem as seguintes medidas: hipotenusa igual  $ax$ , perpendicular  $cy + bz$  e base  $by - cz$  ou hipotenusa igual  $ax$ , perpendicular  $cy - bz$  e base  $by + cz$ .

Figura 24 – Triângulos retângulos obtidos a partir de dois triângulos retângulos quaisquer.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Comparando os triângulos obtidos com os dois triângulos retângulos iniciais da Figura 23, temos que a hipotenusa é dada pelo produto das hipotenusas dos dois triângulos e considerando a distinção entre base e perpendicular, podemos separar essa construção em dois casos:

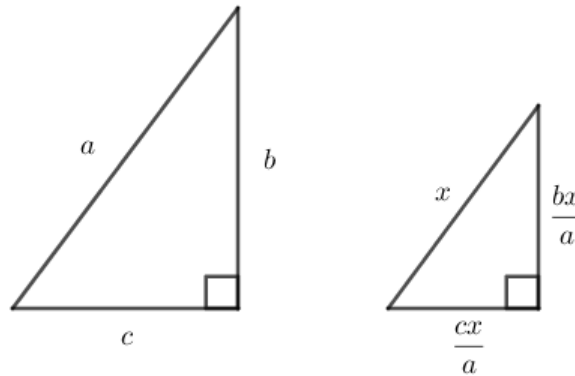
- No primeiro caso a perpendicular é proporcional à soma do produto da perpendicular do primeiro com a base do segundo mais o produto da base do primeiro a perpendicular do segundo e a base é proporcional à diferença entre o produto das bases pelo produto das perpendiculares dos dois triângulos.
- No segundo caso, a perpendicular é proporcional à diferença do produto da perpendicular do primeiro com a base do segundo e o produto da base do primeiro com a perpendicular do segundo e a base é proporcional à soma do produto das bases com o produto das perpendiculares dos respectivos triângulos.

<sup>2</sup> that angle is called acute, which the perpendicular subtends.

De acordo com Witmer (2006, p.69, tradução livre)<sup>3</sup>, “um triângulo retângulo construído a partir de outros dois triângulos retângulos pelo primeiro método chamava-se triângulo sinerésico, enquanto que um triângulo construído pelo segundo método era chamado triângulo dierésico.”

A Proposição 47 trata de como obter um terceiro triângulo retângulo a partir de dois triângulos retângulos semelhantes. Vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa igual a  $a$ , base igual a  $c$  e perpendicular igual a  $b$  e um segundo triângulo retângulo com hipotenusa igual a  $x$  e como consequência da semelhança base igual a  $\frac{cx}{a}$  e perpendicular igual a  $\frac{bx}{a}$ , conforme a Figura 25.

Figura 25 – Triângulos retângulos semelhantes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nesse caso para Viète, o quadrado da hipotenusa do terceiro triângulo será igual à soma dos quadrados das hipotenusas dos dois triângulos retângulos semelhantes, isto é  $a^2 + x^2$ . A partir daí podemos multiplicar essa hipotenusa ao quadrado do terceiro triângulo retângulo  $a^2 + x^2$  por  $b^2 + c^2$  e em seguida dividir por  $a^2$  que nada será acrescentado ou tirado, já que  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Deste modo temos  $\frac{(a^2 + x^2) \cdot (b^2 + c^2)}{a^2} = \frac{a^2 c^2 + x^2 b^2 + a^2 b^2 + x^2 c^2}{a^2}$ , em seguida podemos adicionar  $\frac{2abcx}{a^2}$  e subtrair  $\frac{2abcx}{a^2}$  na expressão obtida de duas formas:

$$\frac{a^2 c^2 + 2abcx + x^2 b^2 + a^2 b^2 - 2abcx + x^2 c^2}{a^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{a^2 c^2 - 2abcx + x^2 b^2 + a^2 b^2 + 2abcx + x^2 c^2}{a^2} \quad (3.4)$$

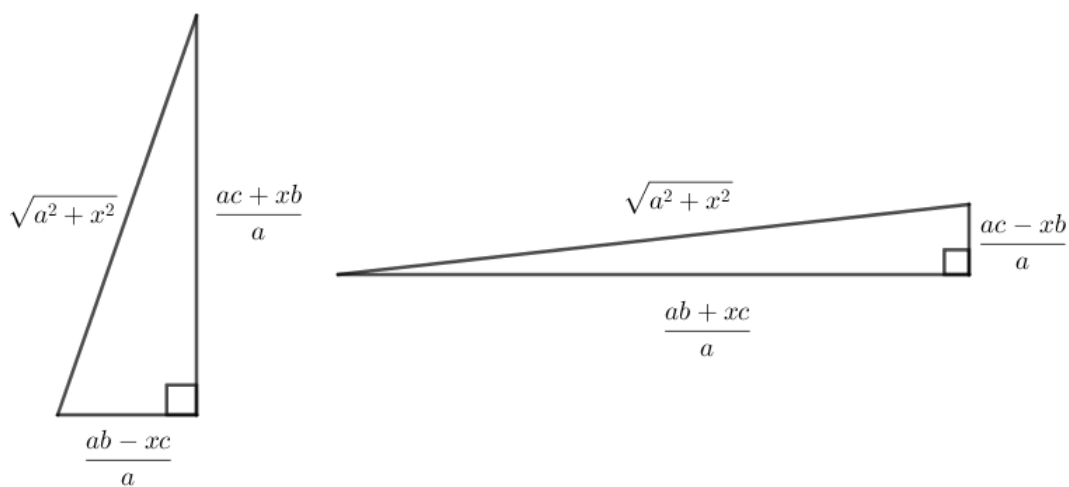
<sup>3</sup> a right triangle constructed from two other right triangles by the first method is called a synaeresic triangle and [one constructed] by the second method a diaeresic triangle.



A expressão (3.3), pode ser reescrita como  $\left(\frac{ac + xb}{a}\right)^2 + \left(\frac{ab - xc}{a}\right)^2$  e a expressão (3.4) pode ser reescrita como  $\left(\frac{ac - xb}{a}\right)^2 + \left(\frac{ab + xc}{a}\right)^2$ .

Segue que  $a^2 + x^2 = \left(\frac{ac + xb}{a}\right)^2 + \left(\frac{ab - xc}{a}\right)^2$  ou  $a^2 + x^2 = \left(\frac{ac - xb}{a}\right)^2 + \left(\frac{ab + xc}{a}\right)^2$  logo essas expressões indicam a aplicação do Teorema de Pitágoras nas medidas do terceiro triângulo retângulo procurado, então segue na Figura 26 as medidas da hipotenusa, da base e da perpendicular desse triângulo retângulo que acontece de dois modos.

Figura 26 – Triângulos retângulos obtidos a partir de dois triângulos retângulos semelhantes.



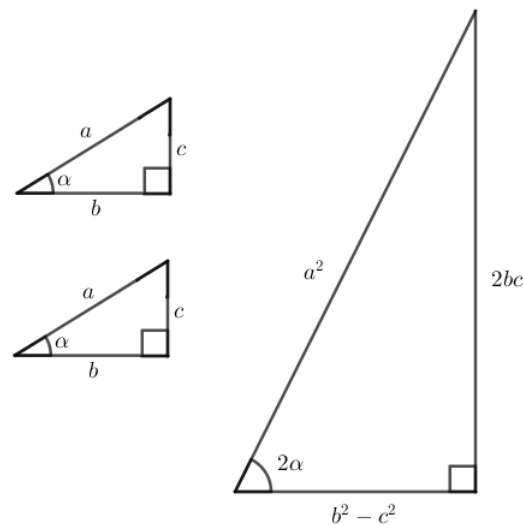
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

### 3.1 Seno e cosseno do arco duplo

A Proposição 48 trata de como obter um terceiro triângulo retângulo a partir de dois triângulos retângulos congruentes, ele será obtido pelo método sinerésico aplicando a Proposição 46 vista anteriormente. Vamos partir de dois triângulos congruentes de hipotenusa igual a  $a$ , base igual a  $b$  e perpendicular igual a  $c$ .

Aplicando a Proposição 46 obtemos para o terceiro triângulo retângulo, hipotenusa igual a  $a^2$ , perpendicular igual a  $2bc$  e base igual a  $b^2 - c^2$ , como vemos na Figura 27.

Figura 27 – Triângulo retângulo obtido a partir de dois triângulos retângulos congruentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

De acordo com Witmer (2006, p.72, tradução livre)<sup>4</sup> “o terceiro triângulo retângulo é chamado triângulo de ângulo duplo<sup>5,6</sup> e o primeiro ou o segundo de triângulo de ângulo simples”.

Com o conhecimento de como obter um triângulo retângulo de ângulo duplo, podemos determinar  $\text{sen}(2\alpha)$  e  $\text{cos}(2\alpha)$ . Na Figura 27 concluímos que  $\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$  e  $\text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$ , além disso temos  $\text{sen}(2\alpha) = \frac{2bc}{a^2} = 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a}$ , resultando em

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha) \text{cos}(\alpha), \quad (3.5)$$

que representa o seno do ângulo duplo. Temos também que  $\text{cos}(2\alpha) = \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a}$ , em seguida obtemos  $\text{cos}(2\alpha) = \text{cos } \alpha \text{cos } \alpha - \text{sen } \alpha \text{sen } \alpha$ , resultando em

$$\text{cos}(2\alpha) = \text{cos}^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha), \quad (3.6)$$

que representa o cosseno do ângulo duplo.

<sup>4</sup> the third triangle is called a triangle of the double angle and the first or second is called a triangle of the single angle.

<sup>5</sup> the reason is that the acute angle of a right triangle derived from two right triangles by synaeresis is equal to the sum of acute angles of those triangles. Anderson demonstrates the converse of this in the second theorem on angular sections.

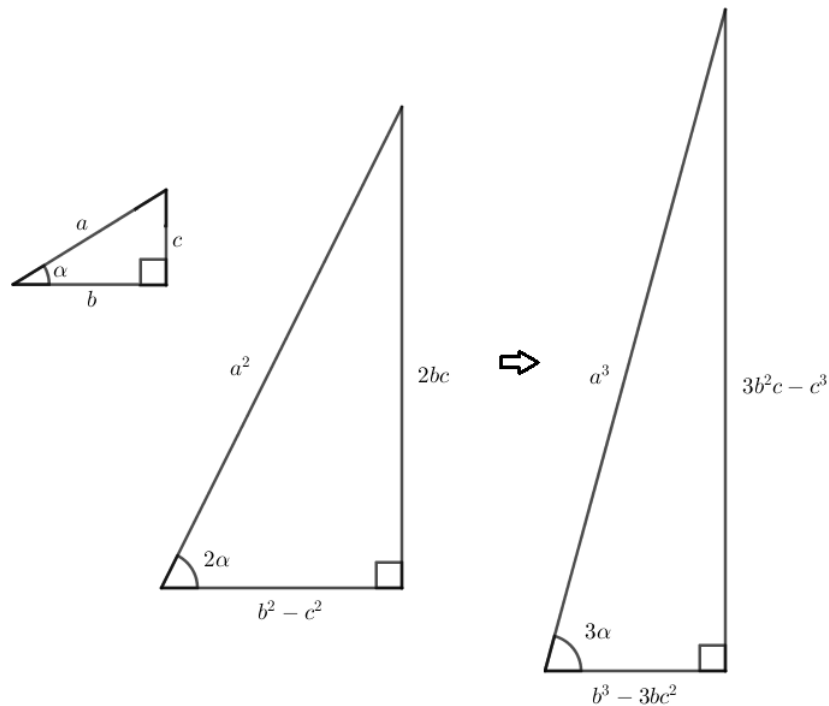
<sup>6</sup> a razão é que o ângulo agudo de um triângulo retângulo derivado de dois triângulos retângulos por sínérese é igual à soma dos ângulos agudos desses triângulos. Anderson demonstra o inverso disso no segundo teorema do *angular sections*. (tradução livre).

## 3.2 Seno e cosseno do arco triplo

A Proposição 49 trata de como obter um terceiro triângulo retângulo, a partir de um triângulo de ângulo simples e outro de ângulo duplo.

Com um triângulo retângulo de ângulo simples de hipotenusa igual a  $a$ , base igual a  $b$  e perpendicular igual a  $c$  e com um triângulo retângulo de ângulo duplo de hipotenusa igual a  $a^2$ , perpendicular igual a  $2bc$  e base igual a  $b^2 - c^2$  e aplicando a Proposição 46 pelo método de sinérese, obtemos para o terceiro triângulo retângulo, uma hipotenusa igual a  $a^3$ , perpendicular igual a  $3b^2c - c^3$  e base igual a  $b^3 - 3bc^2$ , além disso esse triângulo obtido será um triângulo de ângulo triplo.

Figura 28 – Triângulo retângulo obtido a partir de dois triângulos retângulos um de ângulo simples e outro de ângulo duplo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com o triângulo retângulo de ângulo triplo, podemos determinar  $\text{sen}(3\alpha)$  e  $\text{cos}(3\alpha)$ . Na Figura 28 concluímos que  $\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$  e  $\text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$ , além disso temos  $\text{sen}(3\alpha) = \frac{3b^2c - c^3}{a^3} = 3 \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3}$  em seguida obtemos  $\text{sen}(3\alpha) = 3 \text{cos}^2 \alpha \text{sen } \alpha - \text{sen}^3 \alpha$ , ao substituir  $\text{cos}^2 \alpha$  por  $(1 - \text{sen}^2 \alpha)$ , obtemos

$$\text{sen}(3\alpha) = 3 \text{sen}(\alpha) - 4 \text{sen}^3(\alpha), \quad (3.7)$$

que representa o seno do ângulo triplo.

Temos também que  $\cos(3\alpha) = \frac{b^3 - 3bc^2}{a^3} = \frac{b^3}{a^3} - 3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c^2}{a^2}$ , em seguida obtemos que  $\cos(3\alpha) = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$ , ao substituir  $\sin^2 \alpha$  por  $(1 - \cos^2 \alpha)$ , obtemos

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3(\alpha) - 3 \cos(\alpha), \quad (3.8)$$

que representa o cosseno do ângulo triplo.

Empregando continuamente essa forma de se obter novos triângulos retângulos, conseguimos obter novas expressões para  $\sin(n\alpha)$  e  $\cos(n\alpha)$ .

### 3.3 Conexão entre a trigonometria e a resolução de equações algébricas

De acordo com Brummelen (2021), nos trabalhos de Viète envolvendo álgebra e geometria é possível obter uma relação de recorrência para  $\sin(n\alpha)$  e  $\cos(n\alpha)$ .

Seus métodos aparecem em *Ad angularium sectionum analyticen*, publicado por Alexander Anderson em 1615 mais de uma década depois da morte de Viète. A chave para a solução vem logo no início deste trabalho em que Viète determina relações de recorrência para  $\sin n\theta$  e  $\cos n\theta$ . (BRUMMELEN, 2021, p.25, tradução livre)<sup>7</sup>.

A obtenção da recorrência para  $\sin(n\theta)$  pode ser explicada a partir do Teorema IIII<sup>8</sup> presente no texto *Ad angularium sectionum analyticen* (BRUMMELEN, 2021).

O Teorema IIII diz:

se começarmos com um ponto sobre a circunferência de um círculo, um número qualquer de segmentos iguais é traçado e linhas retas são traçadas [do ponto inicial] para os pontos individuais que marcam os segmentos, conforme o mais curto está para o próximo a ele, como qualquer um dos outros acima do mais curto estará [para] a soma dos dois mais próximos a ele. (BRUMMELEN, 2021, p.25, tradução livre).

Dada a Figura 29, temos uma circunferência de diâmetro  $AH$ , considere os pontos  $B, C, D, E$ , etc. sobre a circunferência de modo que os arcos  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \dots$ , são todos congruentes por construção, considere a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $D$ , o ponto  $F$  pertence a essa reta e é obtido de tal forma que  $AC \equiv CF$ . Do mesmo modo considere a reta

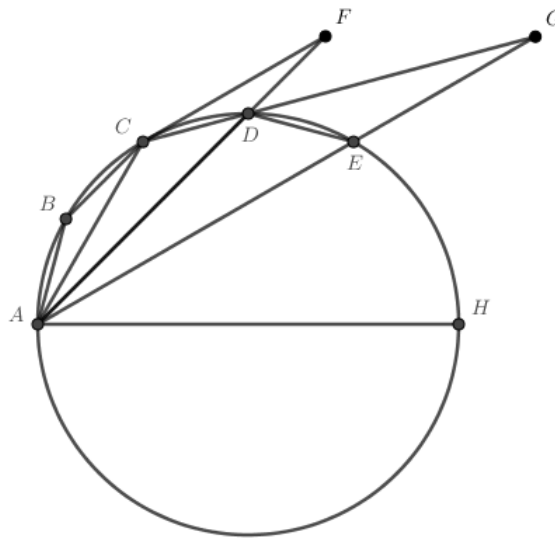
<sup>7</sup> His methods appear in *Ad angularium sectionum analyticen*, published by Alexander Anderson in 1615 more than a decade after Viète's death. The key to the solution comes early in this work where Viète determines recurrence relations for  $\sin n\theta$  and  $\cos n\theta$ .

<sup>8</sup> Theorem IIII: If beginning as a point on the circumference of a circle any number of equal segments are laid off and straight lines are drawn [from the beginning point] to the individual points marking the segments, as the shortest is to the one next to it, so any of the others above the shortest will be [to] the sum of the two nearest to it. (BRUMMELEN, 2021, p.25).

que passa pelos pontos  $A$  e  $E$ , o ponto  $G$  pertence a essa reta e é obtido de tal forma que  $AD \equiv DG$  e assim sucessivamente.

Temos que os triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ACF$ ,  $\triangle ADG$ , são isósceles e todos semelhantes, pois em todos os triângulos temos dois lados congruentes e os ângulos internos relativos à base são congruentes, já que  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAD} \equiv \widehat{DAE}$  são ângulos inscritos na circunferência cujos arcos são congruentes.

Figura 29 – Segmentos congruentes na circunferência.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Pela semelhança dos triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ACF$  e  $\triangle ADG$  obtemos a equação

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AG} = \dots \quad (I)$$

Voltando na Figura 29 vemos que o ângulo  $\widehat{CDA}$  é o dobro do ângulo  $\widehat{BAC}$  pois é inscrito na circunferência e corresponde ao arco  $\widehat{AC}$  que equivale a dois arcos  $\widehat{AB}$ . Temos que  $\widehat{CDA}$  é um ângulo externo ao triângulo  $\triangle CDF$ , então  $\widehat{CDA} = \widehat{CFD} + \widehat{FCD}$ , daí  $\widehat{CFD} + \widehat{FCD} = 2\widehat{BAC}$ , como  $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{CAF} = \widehat{CFD}$ , temos  $\widehat{CFD} + \widehat{FCD} = 2\widehat{CFD}$ , na qual concluímos que  $\widehat{FCD} = \widehat{CFD}$ .

Segue que o triângulo  $\triangle CDF$  é isósceles e os segmentos  $CD$  e  $DF$  são congruentes, mas  $CD = BC = AB$ , como  $AF = AD + DF$  temos que  $AF = AD + AB$ .

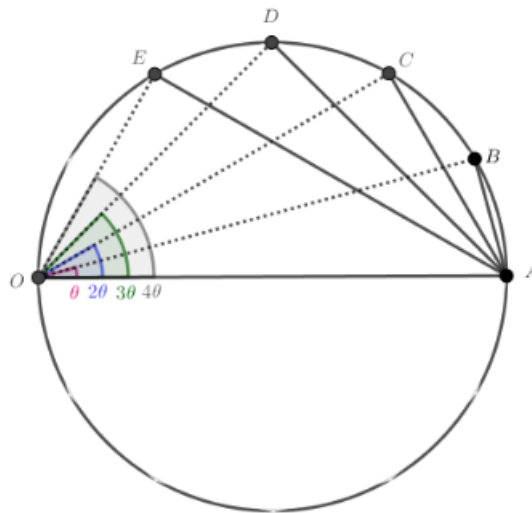
Ainda na Figura 29 temos o triângulo isósceles  $\triangle ADG$ , em que  $\widehat{DAG} \equiv \widehat{DGA}$ , além disso  $\widehat{DGA} \equiv \widehat{CAD}$ . Temos que o ângulo  $\widehat{DEA}$  é externo ao triângulo  $\triangle DGE$  e vale  $3\widehat{CAD}$ , segue então que  $\widehat{EDG} \equiv 2\widehat{CAD}$ , pois  $\widehat{DEA} = \widehat{EDG} + \widehat{DGA}$ .

Já sabemos que  $C\hat{D}A = 2B\hat{A}C = 2C\hat{A}D$  então  $E\hat{D}G \equiv C\hat{D}A$  e como  $DE \equiv CD$  e  $DG \equiv AD$  então os triângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle EDG$  são congruentes pelo caso LAL, daí  $EG \equiv AC$  e  $AG = AE + EG$  ou  $AG = AE + AC$ .

Substituindo em (I), obtemos  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD + AB} = \frac{AD}{AE + AC} = \dots$  e assim sucessivamente.

Partindo de um ponto inicial  $A$  em uma circunferência, construímos os arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{DE}$ , ..., de modo que os arcos sejam todos congruentes, temos também os segmentos  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ , ..., conforme a Figura 30. Segue que, de acordo com o Teorema III visto anteriormente, a razão entre o segmento mais curto estará para o próximo assim como a razão entre os demais segmentos maiores que o mais curto está para a soma dos segmentos próximos a ele,  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB + AD}$ .

Figura 30 –  $\text{sen}(n\theta)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Agora, denotando o segmento  $AB = x$  e  $AC = y$  obtemos  $\frac{x}{y} = \frac{y}{AD + x}$ , segue que  $AD = \frac{y^2 - x^2}{x}$ . Usando a mesma ideia, aplicando o Teorema III, podemos determinar  $AE$  pois  $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AC + AE}$  e obtemos  $AE = \frac{y^3 - 2x^2y}{x^2}$ , assim podemos determinar as medidas de quaisquer segmentos a partir do conhecimento dos dois segmentos iniciais.

Na Figura 30 os arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{DE}$ , ..., são todos congruentes por construção, na circunferência temos o segmento  $AO$  como diâmetro, então os triângulos  $\triangle ABO$ ,  $\triangle ACO$ ,  $\triangle ADO$ ,  $\triangle AEO$ , ..., são triângulos retângulos pois estão inscritos na semicircunferência. Considerando  $A\hat{O}B = \theta$  temos  $B\hat{O}C = \theta$ ,  $C\hat{O}D = \theta$ ,  $D\hat{O}E = \theta$ , logo segue que  $A\hat{O}C = 2\theta$ ,  $A\hat{O}D = 3\theta$ ,  $A\hat{O}E = 4\theta$ , ...

Sendo o raio da circunferência igual a  $R$  e aplicando as razões trigonométricas nos triângulos retângulos temos  $AB = 2R \operatorname{sen}(\theta)$ ,  $AC = 2R \operatorname{sen}(2\theta)$ ,  $AD = 2R \operatorname{sen}(3\theta)$ ,  $AE = 2R \operatorname{sen}(4\theta)$ , então substituindo esses valores em  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB + AD}$  temos

$$\frac{2R \operatorname{sen}(\theta)}{2R \operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{2R \operatorname{sen}(2\theta)}{2R \operatorname{sen}(\theta) + 2R \operatorname{sen}(3\theta)} \implies \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(3\theta)},$$

com a mesma ideia e aplicando com os demais segmentos temos:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(3\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta) + \operatorname{sen}(4\theta)}.$$

Em uma notação moderna temos a seguinte relação de recorrência:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{\operatorname{sen}((n-1)\theta)}{\operatorname{sen}((n-2)\theta) + \operatorname{sen}(n\theta)},$$

a recorrência é verdadeira para  $n$  maior ou igual a 3, assim podemos descobrir novos valores para uma tabela de senos.

Outra situação a destacar, foi que Viète usou a trigonometria para resolver equações polinomiais. Com o auxílio de alguns Teoremas presentes no tratado *Ad angularium sectionum analyticen*, veremos como isso foi possível.

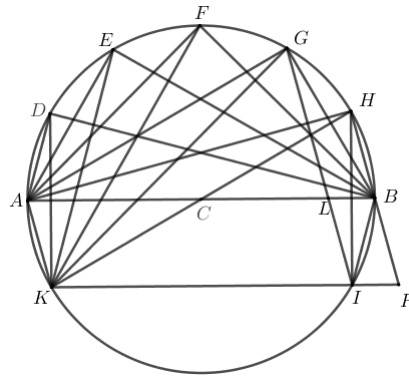
Segundo Witmer (2006, p.436-437, tradução livre), o Teorema VIII do tratado diz:

Começando em uma extremidade do diâmetro, na qual estão dispostas várias partes iguais ao longo da circunferência de um círculo e linhas retas são traçadas das extremidades do mesmo diâmetro para os pontos de cada seções individuais, o raio estará para a corda que subtende uma das partes iguais, como qualquer outra linha reta traçada de qualquer extremidade do diâmetro, exceto o próprio diâmetro ou a linha próxima a ele, se elas caírem dentro dessas seções, estará para a diferença entre as duas linhas traçadas da outra extremidade do diâmetro para as seções mais próximas a ele em ambos os lados. Assim também o próprio diâmetro, quer caia dentro de uma das seções iguais ou não, e o próximo a ele caindo dentro de uma seção está para a soma de duas linhas de cada extremidade do diâmetro até as duas seções mais próximas a ele em cada lado.<sup>9</sup>

Segue a demonstração de acordo com Witmer (2006).

<sup>9</sup> If beginning at one end of a diameter there are laid off along the circumference of a circle a number of equal parts and straight lines are drawn from the ends of the same diameter to the individual section points, the radius will be to the chord subtending one of the equal parts as any other straight line drawn from either end of the diameter, except the diameter itself or the line next to it, if they fall within these sections, is to the difference between the two lines drawn from the other end of the diameter to the sections nearest to it on either side. Thus also the diameter itself, whether it falls within an equal section or not and the one next to it falling within a section is the sum of two lines from either end of diameter to the two sections nearest to it on either side.

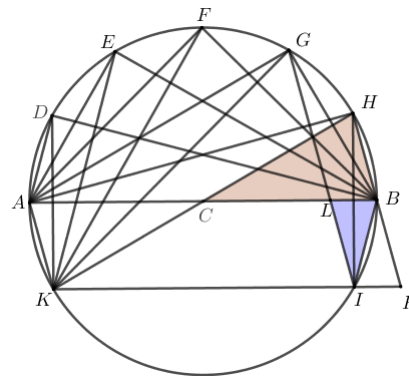
Figura 31 – Teorema VIII.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considere uma circunferência de diâmetro  $AB$  e centro  $C$ , conforme a Figura 31, essa circunferência é dividida em arcos iguais,  $AD$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HB$  e  $BI$  e linhas retas são traçadas dos pontos  $A$  e  $B$  para cada uma das partes determinadas. Vamos considerar que os arcos  $AK = AD$  e traçamos os segmentos  $HI$ ,  $GI$ ,  $GK$ ,  $FK$ ,  $EK$ ,  $DK$  e  $AK$ , além disso temos o ponto  $P$  que está na intersecção do prolongamento dos segmentos  $HB$  e  $KI$ . Seja  $CH$  o raio da circunferência e considere o segmento  $GI$  que corta o diâmetro no ponto  $L$ .

Figura 32 – Teorema VIII (a).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

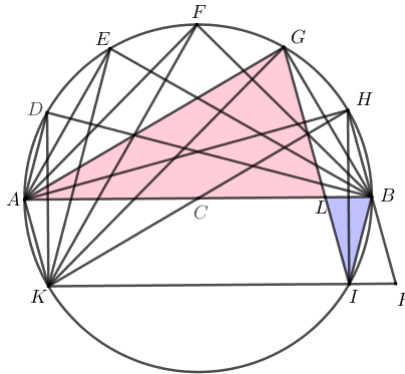
Na Figura 32, temos que o segmento  $HI$  é perpendicular ao segmento  $AB$  pois os arcos  $\widehat{BH}$  e  $\widehat{BI}$  são iguais. Além disso, o segmento  $HI$  divide o ângulo  $B\hat{I}L$  ao meio, já que  $B\hat{I}L = B\hat{I}H + H\hat{I}G$  e  $B\hat{I}H = H\hat{I}G$  pois são ângulos inscritos que determinam arcos com medidas iguais, logo o triângulo  $\triangle BIL$  é isósceles pois é formado por dois triângulos retângulos congruentes pelo caso ALA, cujo segmento que indica a altura é comum aos dois triângulos retângulos, ambos possuem um ângulo reto e  $B\hat{I}H = H\hat{I}G$ . Além disso, ele é semelhante ao triângulo  $\triangle HCB$  pelo caso AA, já que  $H\hat{C}B \equiv B\hat{I}L$  e como  $\triangle HCB$  e  $\triangle BIL$  são isósceles, os



ângulos correspondentes das bases são congruentes nos dois triângulos.

O triângulo  $\triangle BIL$  também é semelhante ao triângulo  $\triangle GAL$  pelo caso AA, já que  $\widehat{GAL} \equiv \widehat{BIL}$  e  $\widehat{AGL} \equiv \widehat{IBL}$  pois são ângulos inscritos cujos arcos correspondentes são congruentes, logo o triângulo  $\triangle GAL$  é isósceles e os lados  $GA$  e  $AL$  são iguais, Figura 33.

Figura 33 – Teorema VIII (b).

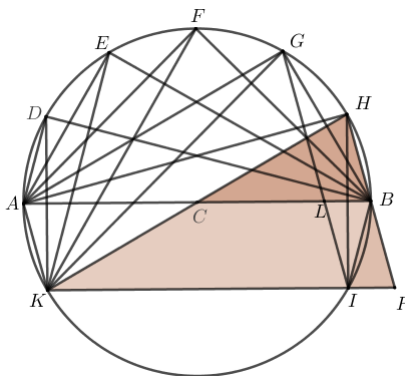


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considerando  $\triangle HCB$  e  $\triangle BIL$  temos  $\frac{HC}{BI} = \frac{HB}{BL}$ , temos também  $BL = AB - AL$  ou  $BL = AB - AG$ . Logo,

$$\frac{HC}{BI} = \frac{HB}{AB - AG}. \tag{3.9}$$

Figura 34 – Teorema VIII (c).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

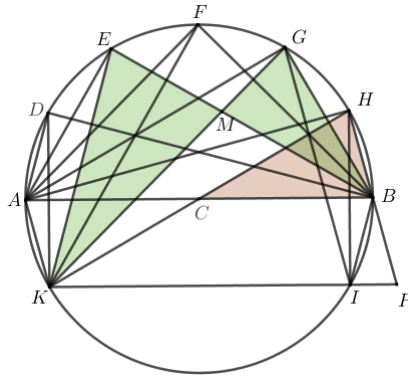
Na Figura 34 considere os segmentos  $HK$ ,  $KP$  e  $HP$ , os triângulos  $\triangle HCB$  e  $\triangle HKP$  são semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos  $\widehat{HCB}$  e  $\widehat{HKP}$ , o primeiro no centro, o último com vértice K sobre a circunferência são iguais, e o ângulo  $\widehat{CHB}$  é comum a ambos os triângulos. Portanto,  $\frac{HC}{HB} = \frac{HK}{HP}$ .

O segmento  $HP$  é o dobro do segmento  $HB$ , já que a razão de semelhança entre os triângulos  $\triangle HCB$  e  $\triangle HKP$  é igual a 2, pois  $\frac{HK}{HC} = \frac{2r}{r} = 2$ . O ângulo  $\widehat{I\hat{B}P}$  é igual ao ângulo  $\widehat{H\hat{K}I}$ , já que  $\widehat{I\hat{B}P}$  é um ângulo externo ao triângulo  $\triangle HBI$ , portanto  $\widehat{I\hat{B}P} = \widehat{I\hat{H}B} + \widehat{H\hat{I}B}$ , como  $\widehat{I\hat{H}B} = \frac{\widehat{H\hat{C}B}}{2}$  e  $\widehat{B\hat{I}H} = \frac{\widehat{H\hat{C}B}}{2}$  temos que  $\widehat{I\hat{B}P} = \widehat{H\hat{C}B} = \widehat{H\hat{K}P} = \widehat{H\hat{K}I}$ , além disso o ângulo  $\widehat{B\hat{P}I}$  é igual ao ângulo  $\widehat{B\hat{H}C}$  pois são os ângulos da base do triângulo isósceles  $\triangle HKP$ . Logo o triângulo  $\triangle BIP$  é isósceles e  $BP = BI = HB$ .

Como visto anteriormente  $\frac{HC}{BI} = \frac{HB}{AB - AG}$ , então destacamos que

$$\frac{HC}{HB} = \frac{HB}{AB - AG}. \quad (3.10)$$

Figura 35 – Teorema VIII (d).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

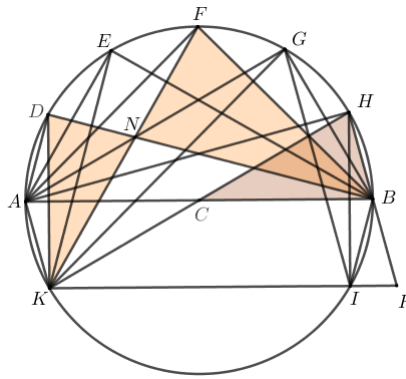
De forma semelhante, na Figura 35, como os ângulos  $\widehat{G\hat{B}E}$  e  $\widehat{E\hat{K}G}$  são iguais ao ângulo  $\widehat{H\hat{C}B}$ , pois os dois primeiros subtendem arcos duplos na circunferência e o terceiro arco simples no centro, os ângulos  $\widehat{K\hat{E}B}$  e  $\widehat{B\hat{G}K}$  são iguais ao ângulo  $\widehat{C\hat{B}H}$ , pois eles subtendem arcos iguais. Os segmentos  $GK$  e  $EB$  se intersectam no ponto  $M$ . Os triângulos  $\triangle EKM$  e  $\triangle GBM$  são semelhantes ao triângulo  $\triangle HCB$  pelo caso AA, então considerando os triângulos  $\triangle HCB$  e  $\triangle GBM$  temos  $\frac{HC}{HB} = \frac{GB}{GM}$ , em que  $GM = GK - KM$  ou  $GM = GK - EK$ .

Apontamos também que os segmentos  $GK$  e  $AH$  são iguais, já que os triângulos  $\triangle HGK$  e  $\triangle BHA$  são triângulos retângulos semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos  $\widehat{H\hat{G}K}$  e  $\widehat{B\hat{H}A}$  são ângulos retos inscritos na semicircunferência uma vez que os segmentos  $HK$  e  $AB$  são diâmetros da circunferência e os ângulos  $\widehat{G\hat{K}H}$  e  $\widehat{H\hat{A}B}$  são ângulos inscritos na circunferência que correspondem arcos de mesma medida. Desta forma temos  $\frac{AB}{HK} = \frac{AH}{GK}$ , como  $AB$  e  $HK$  são iguais ao diâmetro segue que  $1 = \frac{AH}{GK}$ , logo  $GK = AH$ . Além disso temos que os segmentos  $EK$  e  $AF$  são iguais, pois os triângulos  $\triangle HEK$  e  $\triangle BFA$  são triângulos retângulos semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos  $\widehat{H\hat{E}K}$  e  $\widehat{B\hat{F}A}$  são ângulos retos inscritos na semicircunferência já que os segmentos  $HK$  e  $AB$  são diâmetros da circunferência e os

ângulos  $E\hat{K}H$  e  $F\hat{A}B$  são ângulos inscritos na circunferência que correspondem arcos de mesma medida. Desta forma temos  $\frac{AB}{HK} = \frac{AF}{EK}$ , como  $AB$  e  $HK$  são iguais ao diâmetro segue que  $1 = \frac{AF}{EK}$ , logo  $EK = AF$ . Então  $GM = AH - AF$  e

$$\frac{HC}{HB} = \frac{GB}{AH - AF}. \quad (3.11)$$

Figura 36 – Teorema VIII (e).

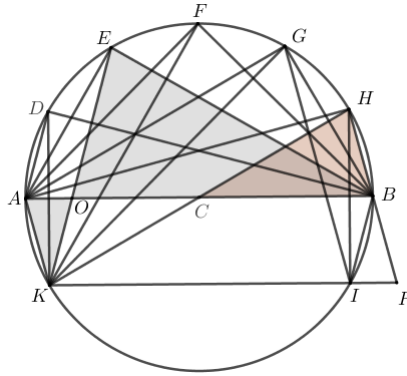


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 36, os segmentos  $FK$  e  $DB$  se intersectam no ponto  $N$  e os triângulos  $\triangle FBN$  e  $\triangle DKN$  são semelhantes ao triângulo  $\triangle HCB$  pelo caso AA, pois os ângulos  $D\hat{K}N$  e  $F\hat{B}N$  são iguais ao ângulo  $H\hat{C}B$ , pois os dois primeiros subtendem arcos duplos na circunferência e o terceiro arco simples no centro, além disso temos os ângulos  $K\hat{D}N$ ,  $B\hat{F}N$  e  $B\hat{H}C$  congruentes pois subtendem arcos iguais, logo os triângulos são isósceles e considerando  $\triangle HCB$  e  $\triangle FBN$  temos  $\frac{HC}{HB} = \frac{FB}{FN}$  e  $FN = FK - KN$  ou  $FN = FK - DK$ . Ainda temos que os segmentos  $FK$  e  $AG$  são iguais pois os triângulos  $\triangle HFK$  e  $\triangle BGA$  são triângulos retângulos semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos  $H\hat{F}K$  e  $B\hat{G}A$  são ângulos retos inscritos na semicircunferência já que os segmentos  $HK$  e  $AB$  são diâmetros da circunferência e os ângulos  $F\hat{K}H$  e  $G\hat{A}B$  são ângulos inscritos na circunferência que correspondem arcos de mesma medida. Desta forma temos  $\frac{AB}{HK} = \frac{AG}{FK}$ , como  $AB$  e  $HK$  são iguais ao diâmetro segue que  $1 = \frac{AG}{FK}$ , logo  $FK = AG$ , além disso temos que os segmentos  $DK$  e  $AE$  são iguais, já que os triângulos  $\triangle HDK$  e  $\triangle BEA$  são triângulos retângulos semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos  $H\hat{D}K$  e  $B\hat{E}A$  são ângulos retos inscritos na semicircunferência já que os segmentos  $HK$  e  $AB$  são diâmetros da circunferência e os ângulos  $D\hat{K}H$  e  $E\hat{A}B$  são ângulos inscritos na circunferência que correspondem arcos de mesma medida. Desta forma temos  $\frac{AB}{HK} = \frac{AE}{DK}$ , como  $AB$  e  $HK$  são iguais ao diâmetro segue que  $1 = \frac{AE}{DK}$ , logo  $DK = AE$ . Deste modo,  $FN = AG - AE$  e

$$\frac{HC}{HB} = \frac{FB}{AG - AE}. \quad (3.12)$$

Figura 37 – Teorema VIII (f).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

De maneira semelhante na Figura 37, os segmentos  $EK$  e  $AB$  se intersectam no ponto  $O$  e os triângulos  $\triangle AKO$  e  $\triangle EBO$  são semelhantes ao triângulo  $\triangle HCB$  pelo caso AA, pois os ângulos  $\widehat{AKO}$  e  $\widehat{EBO}$  são iguais ao ângulo  $\widehat{HCB}$ , pois os dois primeiros subtendem arcos duplos na circunferência e o terceiro arco simples no centro, além disso temos os ângulos  $\widehat{OAK}$ ,  $\widehat{OEB}$  e  $\widehat{BHC}$  são congruentes pois subtendem arcos iguais, logo os triângulos são isósceles e considerando  $\triangle HCB$  e  $\triangle EBO$  temos  $\frac{HC}{HB} = \frac{EB}{EO}$ , além disso segue que  $EO = EK - KO$  ou  $EO = EK - AK$  que equivale a  $EO = AF - DA$ , pois temos  $AF = EK$  e  $DA = AK$ , Logo,

$$\frac{HC}{HB} = \frac{EB}{AF - AD}. \quad (3.13)$$

Reunindo as principais razões obtidas anteriormente (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), temos

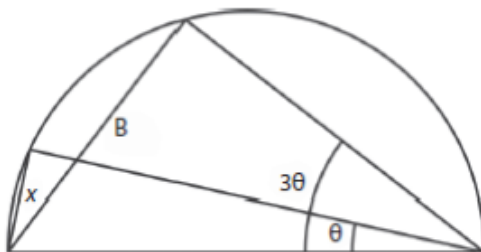
$$\frac{HC}{HB} = \frac{HB}{AB - AG} = \frac{GB}{AH - AF} = \frac{FB}{AG - AE} = \frac{EB}{AF - AD} = \dots,$$

deste modo o raio estará para a corda que subtende uma das partes iguais, como qualquer outra linha reta traçada de qualquer extremidade do diâmetro, estará para a diferença entre as duas linhas traçadas da outra extremidade do diâmetro para as seções mais próximas a ele em ambos os lados.

Agora podemos entender como Viète, procedeu para resolver equações polinomiais com o auxílio da trigonometria.

Considerando a Figura 38, a incógnita  $x$  representa a corda do ângulo  $\theta$  e  $B$  representa a corda do ângulo  $3\theta$ , veremos como ela auxilia na resolução da equação  $3x - x^3 = 1$ .

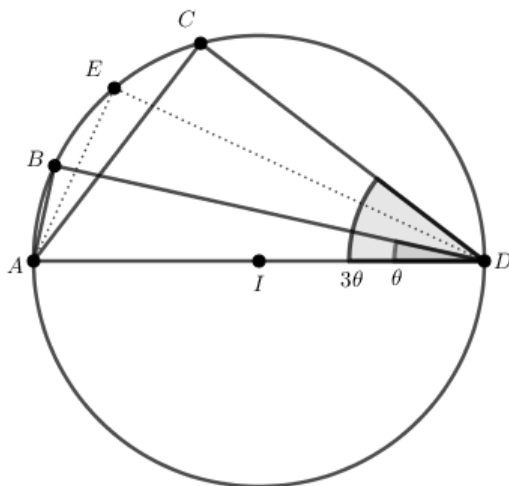
Figura 38 – Equação cúbica e valor de  $\text{sen}(3\theta)$ , versão 1.



Fonte: Brummelen (2021, p.29).

Visualizando a Figura 39, temos que  $AB$  representa a corda do ângulo  $\theta$  e  $AC$  representa a corda do ângulo  $3\theta$ . Seja  $AI = R$  o raio da circunferência dada. Os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$ , são triângulos retângulos cuja hipotenusa vale  $2R$ . No  $\triangle ABD$  temos  $\text{sen}\theta = \frac{AB}{2R}$  de modo que  $AB = 2R \cdot \text{sen}\theta$ . No  $\triangle ACD$  temos  $\text{sen}(3\theta) = \frac{AC}{2R}$  de modo que  $AC = 2R \cdot \text{sen}(3\theta)$ .

Figura 39 – Equação cúbica e valor de  $\text{sen}(3\theta)$ , versão 2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 39 considere o ponto  $E$  na circunferência de tal forma que os arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BE}$  e  $\widehat{EC}$  sejam todos congruentes, aplicando o Teorema VIII do tratado obtemos que  $\frac{AI}{AB} = \frac{DE}{AC - AB}$ . Desenvolvendo temos  $AI(AC - AB) = AB \cdot DE$ , então  $AC - AB = \frac{AB \cdot DE}{AI}$ , logo  $AC = \frac{AB \cdot DE}{AI} + AB$ . Assim,  $AC = \frac{AB \cdot DE + AB \cdot AI}{AI}$ , no qual obtemos:

$$AC = \frac{AB(DE + AI)}{AI} \tag{3.14}$$

Aplicando o Teorema III<sup>10</sup> do tratado visto anteriormente temos  $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AB + AC}$ , desenvolvendo obtemos  $AB^2 + AB.AC = AE^2$ , segue que:

$$AC = \frac{AE^2 - AB^2}{AB}. \quad (3.15)$$

Os triângulos  $\triangle ABE$  e  $\triangle BID$  são semelhantes pelo caso AA, pois são triângulos isósceles no qual em ambos, os ângulos relativos à base  $AE$  e  $BD$  respectivamente são iguais a  $\theta$ . Deste modo temos  $\frac{AB}{AE} = \frac{BI}{DB}$ , segue que  $AB.DB = AE.BI$ , no qual obtemos:

$$AE = \frac{AB.DB}{BI}. \quad (3.16)$$

Realizando a substituição do valor de  $AE$  determinado em (3.16) na Equação (3.15) encontramos  $AC = \frac{\left(\frac{AB.DB}{BI}\right)^2 - AB^2}{AB}$ , daí  $AC = \frac{AB^2.DB^2}{BI^2} - AB^2$  então  $AC = \frac{AB.DB^2}{BI^2} - AB$ , logo:

$$AC = AB \left( \frac{DB^2}{BI^2} - 1 \right). \quad (3.17)$$

Como temos a Equação (3.14) igual a Equação (3.17), podemos escrever a igualdade  $\frac{AB(DE + AI)}{AI} = AB \left( \frac{DB^2}{BI^2} - 1 \right)$ , então dividindo ambos os membros por  $AB$  temos  $\frac{DE + AI}{AI} = \frac{DB^2}{BI^2} - 1$ . De acordo com a Figura 39 segue que  $AI = BI$ , pois são iguais ao raio da circunferência, deste modo  $\frac{DE + AI}{AI} = \frac{DB^2}{AI^2} - 1$ . Segue também que  $\frac{DE + AI}{AI} + 1 = \frac{DB^2}{AI^2}$ , daí  $\frac{DE + 2AI}{AI} = \frac{DB^2}{AI^2}$ , simplificando obtemos  $DE + 2AI = \frac{DB^2}{AI}$  então:

$$DB^2 = AI(DE + 2AI). \quad (3.18)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no  $\triangle ABD$  temos que  $AB^2 = AD^2 - DB^2$ , como  $AD = 2AI$ , segue  $AB^2 = (2AI)^2 - DB^2$ , podemos substituir também a Equação (3.18) nesta equação e obtemos  $AB^2 = 4AI^2 - AI(DE + 2AI)$ , daí  $AB^2 = 4AI^2 - AI.DE - 2AI^2$ . Assim  $AI.DE = 2AI^2 - AB^2$  então:

$$DE = \frac{2AI^2 - AB^2}{AI}. \quad (3.19)$$

Agora vamos substituir a Equação (3.19) na Equação (3.14) e obtemos

$$AC = \frac{AB \left( \frac{2AI^2 - AB^2}{AI} + AI \right)}{AI}, \text{ segue que } AC = \frac{AB \left( \frac{3AI^2 - AB^2}{AI} \right)}{AI}, \text{ daí:}$$

$$AC = \frac{3AI^2 \cdot AB - AB^3}{AI^2}. \quad (3.20)$$

<sup>10</sup> Relembrando, o Teorema III diz: se começar com um ponto na circunferência de um círculo, um número qualquer de segmentos iguais é traçado e linhas retas são traçadas [do ponto inicial] para os pontos individuais que marcam os segmentos, como o mais curto é para o próximo a ele, então qualquer um dos outros acima do mais curto será [para] a soma dos dois mais próximos a ele. (BRUMMELEN, 2021, p.25, tradução livre).

Comparando as Figuras 38 e 39, vemos que  $B = AC$ ,  $AB = x$  e considerando  $AI = R$ , em que  $R$  é o raio da circunferência, obtemos  $B = \frac{3R^2 \cdot x - x^3}{R^2}$ , isto é,  $R^2 \cdot B = 3 \cdot R^2 \cdot x - x^3$ , para a corda  $B = 1$  e raio também 1 temos a equação  $3x - x^3 = 1$  que pode ser resolvida com o auxílio da trigonometria como segue:

Viète reconheceu que a forma desta equação cúbica está relacionada com a fórmula do seno do ângulo triplo que ele expressa como  $3R^2 x - x^3 = R^2 B$ , em que  $R$  é o raio do círculo,  $x$  é a corda subtendendo o ângulo  $\theta$  e  $B$  é a corda subtendendo  $3\theta$ . Se estivermos em um círculo unitário, podemos verificar que  $B = 2 \sin 3\theta$  e  $x = 2 \sin \theta$ . Para o nosso exemplo temos  $B = 1$ . Isso implica que  $\sin 3\theta = \frac{1}{2}$ . Assim  $3\theta = 30^\circ$  ou  $150^\circ$ , então  $\theta = 10^\circ$  ou  $50^\circ$ . Portanto  $x = 2 \sin 10^\circ = 0,347296$  ou  $x = 2 \sin 50^\circ = 1,53208$ , e Viète encontrou duas das três raízes da equação cúbica. (Já que Viète só considerou ângulos entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  ele não pode encontrar a terceira raiz, que é negativa.) (BRUMMELEN, 2021, p.29, tradução livre).<sup>11</sup>

Vemos que essa forma analítica permite novas formas de determinar valores para uma tabela trigonométrica mais precisa.

Henry Briggs (1561-1630) usou métodos de interpolação para construir tabelas trigonométricas.

Nosso objetivo até aqui foi destacar como se deu a construção das tabelas que relacionam o ângulo central com a medida da sua respectiva corda. Vimos que novas tabelas foram construídas porém relacionando o ângulo com a medida da meia corda, e assim chegamos em uma tabela de senos quando o raio for igual a 1.

<sup>11</sup> Viète recognizes that the form of this cubic equation is related to the sine triple-angle formula that he expresses as  $3R^2 x - x^3 = R^2 B$ , where  $R$  is the base circle radius,  $x$  is the chord subtending angle  $\theta$  in figure 1.14, and  $B$  is the chord subtending  $3\theta$ . If we are in a unit circle, then we may verify that  $B = 2 \sin 3\theta$  and  $x = 2 \sin \theta$ . For our example we have  $B = 1$ . This implies that  $\sin 3\theta = \frac{1}{2}$ . Thus  $3\theta = 30^\circ$  or  $150^\circ$ , so  $\theta = 10^\circ$  or  $50^\circ$ . Hence  $x = 2 \sin 10^\circ = 0.347296$  or  $x = 2 \sin 50^\circ = 1.53208$ , and Viète has found two of the three roots of the cubic equation. (Since Viète can consider only angles between  $0^\circ$  and  $180^\circ$  he cannot find the third root, which is negative.)





## 4 Trigonometria

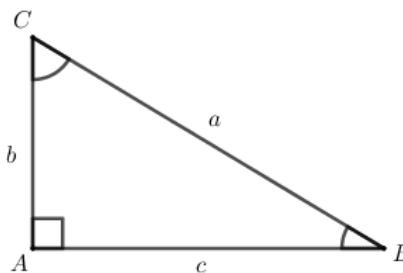
Nosso objetivo agora é apresentar as razões e as relações trigonométricas nos dias atuais, de modo que abordaremos como obter as relações com a aplicação da geometria.

### 4.1 Razões trigonométricas

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são amplamente discutidas nos anos finais do ensino fundamental e assim servem de ponto de partida para as funções trigonométricas que são abordadas no ensino médio.

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$ , ângulos agudos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  opostos respectivamente aos catetos  $b$  e  $c$ , conforme a Figura 40.

Figura 40 – Triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Temos as seguintes razões:

I - Considerando o ângulo  $\hat{B}$ :

- $\frac{b}{a} = \text{sen } \hat{B} = \text{cateto oposto dividido pela hipotenusa.}$
- $\frac{c}{a} = \text{cos } \hat{B} = \text{cateto adjacente dividido pela hipotenusa.}$
- $\frac{b}{c} = \text{tg } \hat{B} = \text{cateto oposto dividido pelo cateto adjacente.}$

II - Analogamente considerando o ângulo  $\hat{C}$ :

- $\frac{c}{a} = \text{sen } \hat{C}.$
- $\frac{b}{a} = \text{cos } \hat{C}.$

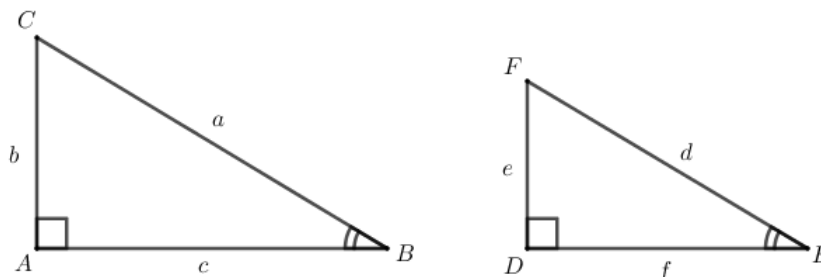
- $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} \widehat{C}$ .

Essas razões definem o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo qualquer, pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo.

Destacamos que  $\operatorname{sen} \widehat{B}$ ,  $\operatorname{cos} \widehat{B}$  e  $\operatorname{tg} \widehat{B}$  dependem apenas do ângulo  $\widehat{B}$  e não do tamanho do triângulo retângulo do qual  $\widehat{B}$  é um dos ângulos agudos. Considerando dois triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo igual a  $\widehat{B}$ , eles serão semelhantes pelo caso AA.

Se esses triângulos são  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , com  $\widehat{B} = \widehat{E}$  conforme a Figura 41.

Figura 41 – Triângulos retângulos semelhantes.

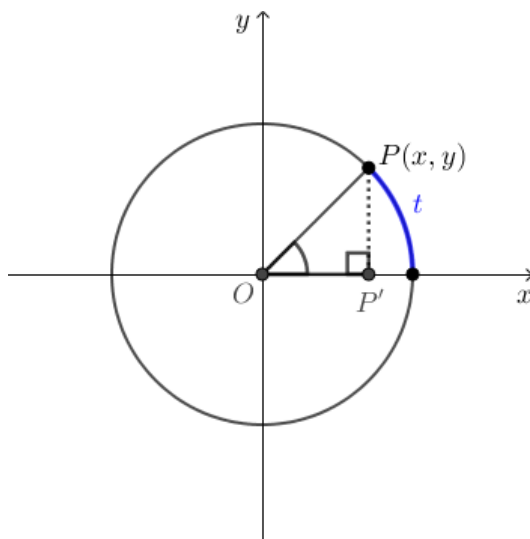


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Pela semelhança temos  $\frac{b}{e} = \frac{a}{d}$ , daí  $\frac{b}{a} = \frac{e}{d}$ , logo  $\operatorname{sen} \widehat{B} = \operatorname{sen} \widehat{E}$ , analogamente temos  $\operatorname{cos} \widehat{B} = \operatorname{cos} \widehat{E}$ . Deste modo de acordo com Lima (2014, p.218), “o seno e o cosseno pertencem ao ângulo, e não ao eventual triângulo que o contém”.

Para a continuidade do texto, temos Lima (2014) como referência.

Dada uma circunferência  $C$  de raio unitário, com centro na origem do sistema cartesiano de coordenadas ortogonais, considere um arco de comprimento  $t$  no primeiro quadrante, que determina um ponto  $P(x, y)$  sobre a circunferência. Temos que o triângulo determinado pelos pontos  $P$ ,  $P'$  que é a projeção ortogonal de  $P$  no eixo  $x$  e pelo ponto  $O$  que é a origem do sistema de coordenadas é um triângulo retângulo conforme a Figura 42.

Figura 42 – Ponto  $P(x, y)$  no primeiro quadrante em uma circunferência unitária.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Segue que  $\text{sen}(t) = \frac{PP'}{OP}$ , como  $OP = 1$  temos  $PP' = \text{sen}(t)$ , além disso,  $\text{cos}(t) = \frac{OP'}{OP}$ , logo  $OP' = \text{cos}(t)$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $\triangle PP'O$  temos  $(OP)^2 = (PP')^2 + (OP')^2$ , substituindo os valores de  $PP'$ ,  $OP'$  obtidos anteriormente e  $OP = 1$ , segue que  $1^2 = \text{sen}^2(t) + \text{cos}^2(t)$ .

Deste modo vale a seguinte relação fundamental da trigonometria:

$$\text{cos}^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1, \quad (4.1)$$

para os demais quadrantes vale também a relação obtida, ao desenvolver o mesmo raciocínio.

A relação fundamental, sugere que, para todo ângulo  $\alpha$ , os números  $\text{cos } \alpha$  e  $\text{sen } \alpha$  são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos considerar duas unidades de medidas para ângulos dentre as diversas que existem, uma delas é o radiano (rad) que é uma forma natural de se medir ângulos pois usamos o raio da circunferência como unidade de medida. Outra unidade é o grau, que é uma unidade tradicional e  $1^\circ$  é um ângulo central correspondente a um arco de  $1^\circ$ , isto é, é um ângulo central que determina na circunferência um arco equivalente a  $\frac{1}{360}$  desta.

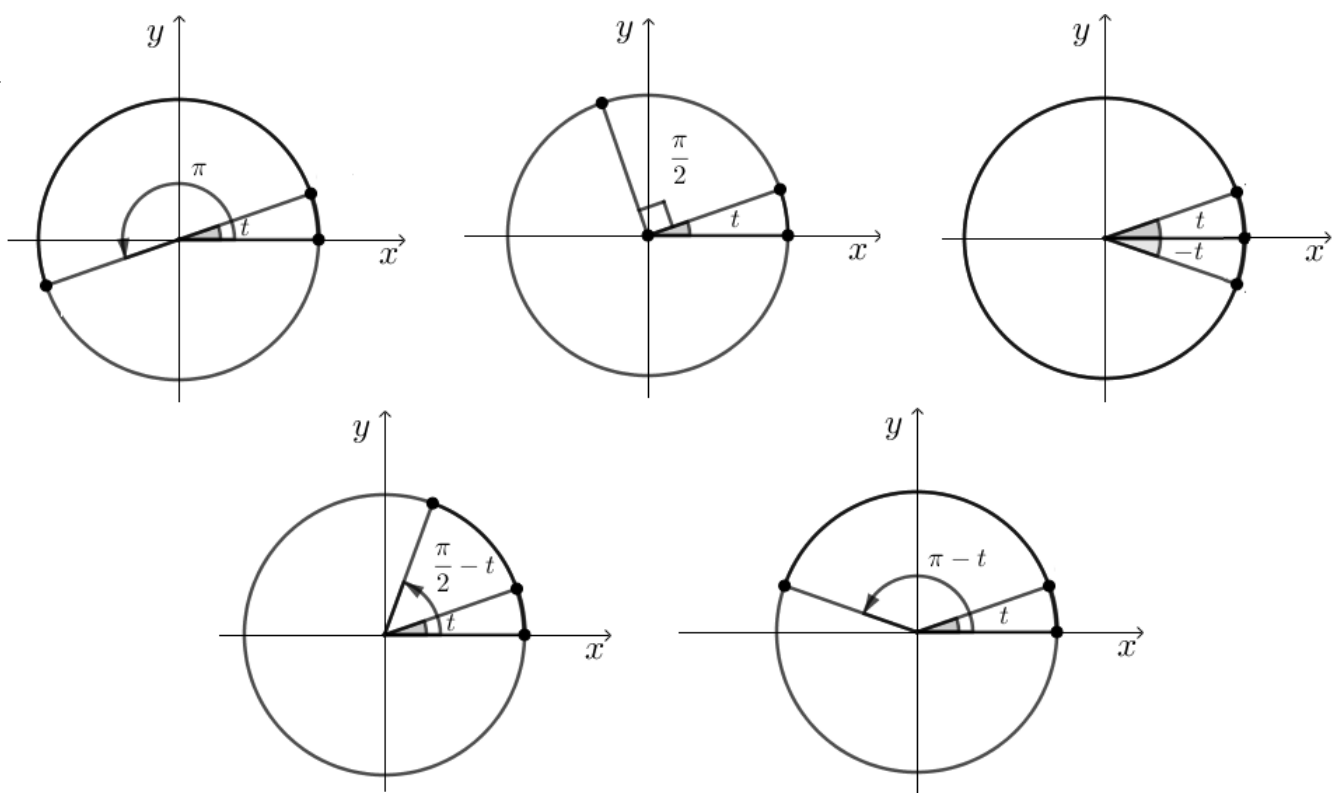
Para nosso propósito usaremos a unidade de medida radiano.

O ângulo  $\widehat{AOB}$  mede 1 radiano se, e somente se, o arco  $\widehat{AB}$  da circunferência  $C$ , por ele subtendido, tem comprimento igual a 1, isto é, igual ao raio da circunferência. Além disso numa circunferência de raio  $r$  a medida de um ângulo central em radianos é igual a  $\frac{l}{r}$ , em que  $l$  é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo.

A medida do ângulo central em radianos, do arco equivalente a uma volta completa em uma circunferência de raio  $r$ , será dado por  $2\pi$  rad, pois  $\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ , já que  $l$  é o comprimento do arco, portanto uma volta completa terá comprimento  $2\pi r$  e o raio é  $r$ . Já a medida do ângulo central em graus, do arco equivalente a uma volta completa será  $360^\circ$ .

Assim estabelecemos a equivalência em que  $2\pi = 360^\circ$  e novas equivalências podem ser determinadas, isto é, dado um ângulo central medido em radianos podemos obter o seu equivalente em graus ou dado um ângulo central medido em graus podemos obter o seu equivalente em radianos.

Figura 43 – Simetrias entre arcos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considerando algumas simetrias entre arcos na circunferência unitária, conforme a Figura 43, segue algumas propriedades das razões seno e cosseno, como veremos na Tabela 3.

Tabela 3 – Relações entre cosseno e seno.

$\cos(\pi + t) = -\cos(t)$	$\sin(\pi + t) = -\sin(t)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t)$
$\cos(-t) = \cos(t)$	$\sin(-t) = -\sin(t)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$
$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$	$\sin(\pi - t) = \sin(t)$

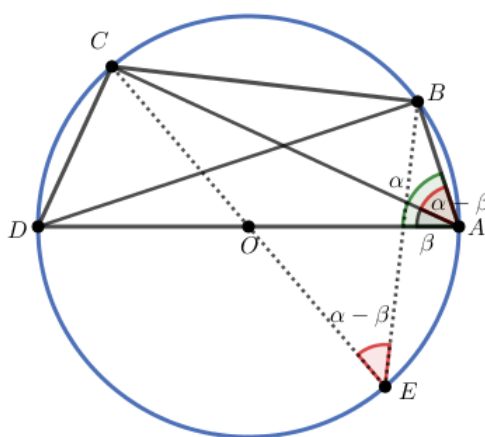
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

#### 4.1.1 Seno e cosseno da soma e da diferença de dois arcos

Como visto na Subseção 2.2.3, página 21, a Equação (2.2), indica a corda da diferença de dois arcos. Agora a partir do Teorema de Ptolomeu vamos determinar expressões para o seno da soma e o seno da diferença de dois arcos.

Para determinar a fórmula que permite calcular o seno da diferença de dois arcos com o auxílio do Teorema de Ptolomeu, vamos partir de uma circunferência de centro  $O$  na qual temos um quadrilátero  $ABCD$  inscrito de tal forma que um dos seus lados  $AD$  seja o diâmetro da circunferência. Vamos considerar também um ponto  $E$ , que é o ponto de interseção da semireta  $CO$  com a circunferência, conforme a Figura 44.

Figura 44 – Seno da diferença de dois arcos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Traçando as diagonais  $AC$  e  $DB$  obtemos os triângulos retângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$  pois são inscritos na semicircunferência e  $AD$  é um diâmetro. Vamos considerar no  $\triangle ABD$  que  $\widehat{DAB} = \alpha$ , aplicando as razões trigonométricas temos  $\sin(\alpha) = \frac{BD}{AD}$  logo  $BD = AD \cdot \sin(\alpha)$

$$\text{e } \cos(\alpha) = \frac{AB}{AD} \text{ logo } AB = AD \cdot \cos(\alpha).$$

Considerando o  $\triangle ACD$ , vamos tomar  $D\hat{A}C = \beta$ , aplicando as razões trigonométricas temos  $\text{sen}(\beta) = \frac{CD}{AD} \text{ logo } CD = AD \cdot \text{sen}(\beta)$  e  $\cos(\beta) = \frac{AC}{AD} \text{ logo } AC = AD \cdot \cos(\beta)$ .

Ainda na Figura 44, temos que o triângulo  $\triangle EBC$  é um triângulo retângulo, pois está inscrito na semicircunferência em que o segmento  $CE$  é um diâmetro. Dado que os pontos  $C$  e  $E$  pertencem à circunferência e o segmento  $CE$  passa pelo ponto  $O$  que é o centro da circunferência. Os ângulos  $B\hat{A}C$  e  $B\hat{E}C$  são iguais pois são ângulos inscritos que subtendem o arco  $\widehat{BC}$  e podemos dizer que são iguais a  $\alpha - \beta$ . Aplicando as razões trigonométricas no  $\triangle BEC$  temos  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{BC}{CE} \text{ logo } BC = CE \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)$  e  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{BE}{CE} \text{ logo } BE = CE \cdot \cos(\alpha - \beta)$ . Como o segmento  $CE$  é um diâmetro, ele é igual a  $AD$ , podemos reescrever  $BC = AD \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)$  e  $BE = AD \cdot \cos(\alpha - \beta)$ .

Agora vamos substituir os valores  $AB$ ,  $CD$ ,  $BC$ ,  $BD$  e  $AC$  no Teorema de Ptolomeu  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AC$ , assim obtemos

$$AD \cdot \cos(\alpha) \cdot AD \cdot \text{sen}(\beta) + AD \cdot AD \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) = AD \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot AD \cdot \cos(\beta)$$

$$AD^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) + AD^2 \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) = AD^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

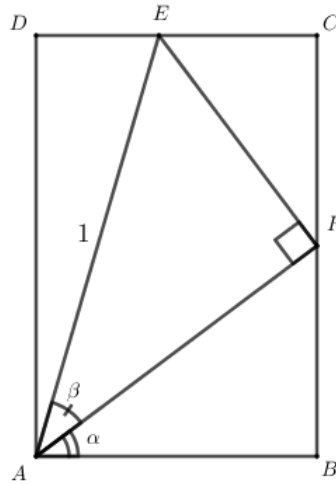
$$AD^2 \cdot [\cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)] = AD^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

$$[\cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)] = \frac{AD^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{AD^2}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \text{sen}(\beta). \quad (4.2)$$

Para determinar geometricamente a fórmula que permite calcular o seno da soma de dois arcos, vamos construir um triângulo retângulo  $\triangle AEF$  de hipotenusa  $AE$  igual a 1 inscrito em um retângulo  $ABCD$ , conforme a Figura 45.

Figura 45 – Triângulo retângulo  $AEF$  inscrito em um retângulo  $ABCD$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considerando o triângulo retângulo  $\triangle AEF$  temos  $\widehat{FAE} = \beta$ , segue que  $\text{sen}(\beta) = \frac{EF}{1}$ , portanto  $EF = \text{sen}(\beta)$ , além disso,  $\text{cos}(\beta) = \frac{AF}{1}$  logo  $AF = \text{cos}(\beta)$ .

Considerando o triângulo retângulo  $\triangle ABF$  temos  $\widehat{BAF} = \alpha$ , então  $\text{sen}(\alpha) = \frac{BF}{\text{cos}(\beta)}$ , portanto  $BF = \text{sen}(\alpha) \text{cos}(\beta)$ , além disso,  $\text{cos}(\alpha) = \frac{AB}{\text{cos}(\beta)}$  logo  $AB = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta)$ .

Temos que  $\widehat{CFE} = \alpha$ , pois a soma dos ângulos internos do triângulo  $\triangle ABF$  é  $(90^\circ + \alpha + \widehat{BFA}) = 180^\circ$  daí  $\widehat{BFA} = 90^\circ - \alpha$ , temos também que a soma dos ângulos  $\widehat{CFE} + \widehat{EFA} + \widehat{BFA} = 180^\circ$  pois formam um ângulo raso, daí  $\widehat{CFE} = 90^\circ - \widehat{BFA}$ , então  $\widehat{CFE} = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ .

Considerando o triângulo retângulo  $\triangle FCE$  temos  $\text{sen}(\alpha) = \frac{EC}{EF} = \frac{EC}{\text{sen}(\beta)}$ , portanto  $EC = \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$ , além disso  $\text{cos}(\alpha) = \frac{FC}{EF} = \frac{FC}{\text{sen}(\beta)}$  logo  $FC = \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta)$ .

Temos que  $\widehat{DEA} = \widehat{EAB}$  pois são ângulos alternos internos, deste modo  $\widehat{DEA} = \alpha + \beta$ . Considerando o triângulo retângulo  $\triangle DEA$  temos  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{1}$  então segue que  $AD = \text{sen}(\alpha + \beta)$ , além disso  $\text{cos}(\alpha + \beta) = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{1}$  logo  $DE = \text{cos}(\alpha + \beta)$ .

Na Figura 45 temos o retângulo  $ABCD$  de modo que  $AD = BC$ , pois são lados paralelos do retângulo, mas  $BC = BF + FC$ , segue que  $AD = BF + FC$  logo

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \text{cos}(\beta) + \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta).$$

Agora algebricamente vamos determinar a fórmula que permite calcular o seno da soma de dois arcos. Vamos substituir  $\beta$  por  $-\beta$  em (4.2). Deste modo temos  $\text{sen}[\alpha - (-\beta)] = \text{sen}(\alpha) \text{cos}(-\beta) - \text{cos}(\alpha) \text{sen}(-\beta)$ . Lembrando que a função seno é uma função ímpar, portanto

$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$  e que a função cosseno é uma função par, portanto  $\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$ .

Assim obtemos,

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \text{cos}(\beta) + \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta). \quad (4.3)$$

Para determinar geometricamente a fórmula que permite calcular o cosseno da soma de dois arcos, vamos partir das conclusões já obtidas com o auxílio da Figura 45.

Considerando o quadrilátero  $ABCD$  temos  $AB = DC$ , segue que  $DC = DE + EC$  então  $AB = DE + EC$  logo  $\text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) = \text{cos}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$  reorganizando temos

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta).$$

Agora algebricamente com o conhecimento do seno da soma e da diferença de dois arcos, e das relações obtidas na Tabela 3, podemos obter fórmulas para determinar o cosseno da soma e da diferença de dois arcos, como segue:

Sabemos que  $\text{cos}(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ , tomando  $t = \alpha + \beta$  temos,  $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)\right)$ . Reorganizando os argumentos obtemos  $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \beta\right)$ .

A fórmula  $\text{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \beta\right)$  é o seno da soma de dois arcos que já sabemos calcular, então  $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \text{cos}(\beta) + \text{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \text{sen}(\beta)$ , que resulta após uma análise na Tabela 3 em,

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta). \quad (4.4)$$

Para determinar o cosseno da diferença de dois arcos, isto é  $\text{cos}(\alpha - \beta)$  vamos representar a expressão  $\alpha - \beta$  pela equivalente  $\alpha + (-\beta)$  e substituir em (4.4). Assim obtemos  $\text{cos}[\alpha + (-\beta)] = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(-\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(-\beta)$ . Consultando a Tabela 3, podemos escrever:

$$\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta). \quad (4.5)$$

#### 4.1.2 Seno e cosseno de arcos duplos e triplos

De forma natural, podemos encontrar fórmulas para o seno e o cosseno do arco duplo, isto é,  $\text{sen}(2\alpha)$  e  $\text{cos}(2\alpha)$ , para isso basta fazer  $\beta = \alpha$  e substituir nas equações (4.3) e (4.4).

Vamos substituir  $\beta = \alpha$  primeiramente na Equação (4.3) e depois na Equação (4.4), deste modo temos  $\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}(\alpha) \text{cos}(\alpha) + \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha)$ , resultando em

$$\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen}(\alpha) \text{cos}(\alpha),$$

de modo análogo, temos  $\text{cos}(\alpha + \alpha) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\alpha) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\alpha)$  resultando em

$$\text{cos}(2\alpha) = \text{cos}^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha).$$



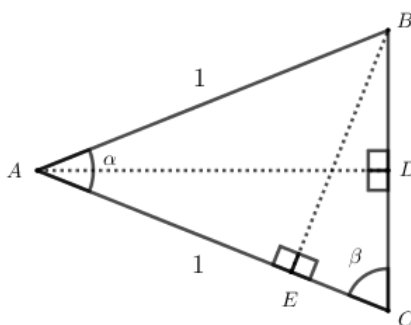
Porém conforme visto na Seção 3.1, página 38, já obtemos essas expressões de forma geométrica a partir de um triângulo retângulo de ângulo duplo.

Além disso determinamos fórmulas para o seno e o cosseno do arco triplo, isto é,  $\sin(3\alpha)$  e  $\cos(3\alpha)$ , de forma geométrica a partir de um triângulo retângulo de ângulo triplo, conforme visto na Seção 3.2, página 39, sendo elas  $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$  e  $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$ .

### 4.1.3 Seno e cosseno do arco metade

A demonstração geométrica do seno do arco metade, apresenta uma limitação pois devemos ter  $0 < \alpha < 90^\circ$ , porém apresentaremos também uma demonstração algébrica onde esse fato é superado.

Figura 46 – Triângulo isósceles  $ABC$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Vamos partir de um triângulo isósceles  $ABC$  no qual os lados iguais tem medida 1 e cujos ângulos relativos à base são iguais a  $\beta$  e o outro ângulo é igual a  $\alpha$ . Destacamos o segmento  $AD$  que é a altura relativa a base  $BC$  e que no triângulo isósceles também é bissetriz e divide o ângulo  $\alpha$  em duas partes iguais. Considere ainda o segmento  $BE$  que é uma altura do triângulo isósceles relativa ao lado  $AC$ , além disso temos  $AE + EC = 1$  conforme a Figura 46.

Considerando o triângulo retângulo  $\triangle AEB$  temos que  $\sin(\alpha) = \frac{EB}{AB} = \frac{EB}{1}$  então  $EB = \sin(\alpha)$ , segue também que  $\cos(\alpha) = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{1}$  logo  $AE = \cos(\alpha)$ .

Examinando o triângulo retângulo  $\triangle ADC$  temos que  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{1}$  então  $CD = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Como temos  $CB = CD + DB$  e  $CD = DB$ , segue que  $CB = 2CD$  então temos  $CB = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

Temos que o ângulo  $\widehat{EBC} = \frac{\alpha}{2}$ , pois a soma dos ângulos internos do triângulo retângulo  $\triangle ADC$  é  $\frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \beta = 180^\circ$ , então  $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ$  e a soma dos ângulos internos do triângulo

retângulo  $\triangle BEC$  é  $E\widehat{B}C + 90^\circ + \beta = 180^\circ$ , então  $E\widehat{B}C + \beta = 90^\circ$ . De  $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ$  e  $E\widehat{B}C + \beta = 90^\circ$  concluímos que  $E\widehat{B}C = \frac{\alpha}{2}$ .

Considerando o triângulo retângulo  $\triangle BEC$  temos que  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{EC}{CB}$  então temos  $EC = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot CB$ , daí  $EC = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2 \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , resultando em  $EC = 2 \left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2$ .

Como temos  $AE + EC = 1$ , segue que  $\cos(\alpha) + 2 \left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 = 1$ , então obtemos que  $\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$  assim  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$ .

Algebricamente para determinar uma fórmula para o arco metade, isto é,  $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$  e  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , vamos partir da fórmula  $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$  e reescrevê-la de duas outras formas, utilizando a Equação (4.1), obtemos que

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2(\alpha) \quad (4.6)$$

e

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1. \quad (4.7)$$

Agora fazendo  $2\alpha = \theta$ , conseqüentemente  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ , substituindo esses novos valores nas equações (4.6) e (4.7) obtemos,

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \quad (4.8)$$

e

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}. \quad (4.9)$$

#### 4.1.4 Transformação da soma de senos ou cossenos em produtos

As fórmulas para a soma e diferença de arcos, além das fórmulas para arcos duplos, triplos, etc, são úteis nas resoluções de problemas, pois a partir de senos e cossenos de determinados arcos já conhecidos podemos obter outros, porém mais fórmulas podem ser obtidas, fórmulas essas que transformam somas de senos ou cossenos em produtos, como veremos. Essas transformações são conhecidas por fórmulas de Werner<sup>1</sup> ou por fórmula de prostaférese.

Vamos adicionar as equações  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$  e  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$ , assim obtemos a seguinte igualdade,

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\beta), \quad (4.10)$$

<sup>1</sup> Johann Werner (1468–1522), foi um matemático alemão cujo trabalho principal foi em astronomia, matemática e geografia. Em matemática, Werner trabalhou em trigonometria esférica e seções cônicas. (tradução livre). Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Werner/>. Acesso em: 30 jul. 2023.

fazendo  $\alpha + \beta = p$  e  $\alpha - \beta = q$ , segue que  $\alpha = \frac{p+q}{2}$  e  $\beta = \frac{p-q}{2}$ , substituindo os novos valores em (4.10) obtemos

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \quad (4.11)$$

Ao aplicar o mesmo raciocínio, porém fazendo a diferença entre as equações  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$  e  $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$ , temos a seguinte igualdade,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta), \quad (4.12)$$

fazendo  $\alpha + \beta = p$  e  $\alpha - \beta = q$ , segue que  $\alpha = \frac{p+q}{2}$  e  $\beta = \frac{p-q}{2}$ , substituindo os novos valores em (4.12)

$$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right). \quad (4.13)$$

Agora vamos fazer a adição das equações  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$  e  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$ , para determinar a fórmula que transforma a adição de cossenos em produto. Ao adicionar obtemos,

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \cos(\beta), \quad (4.14)$$

novamente fazendo  $\alpha + \beta = p$  e  $\alpha - \beta = q$ , segue que  $\alpha = \frac{p+q}{2}$  e  $\beta = \frac{p-q}{2}$  e substituindo os novos valores em (4.14), obtemos

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \quad (4.15)$$

Ao fazer a diferença entre as equações  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$  e  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$ , aplicando o mesmo raciocínio obtemos a seguinte igualdade

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta), \quad (4.16)$$

novamente fazendo  $\alpha + \beta = p$  e  $\alpha - \beta = q$ , segue que  $\alpha = \frac{p+q}{2}$  e  $\beta = \frac{p-q}{2}$  e substituindo em (4.16) obtemos,

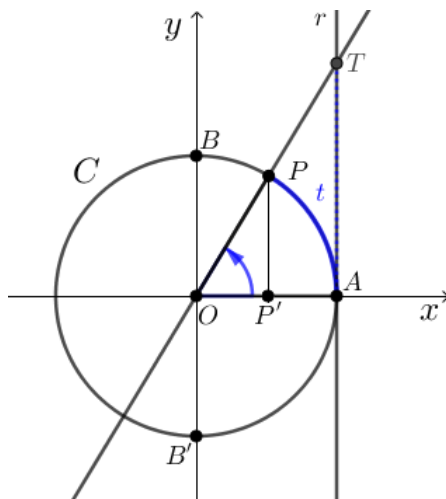
$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right). \quad (4.17)$$

## 4.2 A razão tangente

Vamos tratar nesta seção sobre as relações envolvendo a tangente, pois a ideia principal é trabalhar com a definição na qual  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ , com  $\cos(\alpha) \neq 0$  e assim determinar as principais relações.

De forma geométrica, considere a circunferência unitária  $C$ , com centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal, uma reta  $r$ , tangente à circunferência no ponto  $A = (1, 0)$ . Deste modo, dado um número real  $t \in [0, 2\pi]$ , com  $t \neq (\frac{\pi}{2}) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , de modo que o ponto  $P$  seja sua imagem na circunferência  $C$ . Agora considere a reta  $\overrightarrow{OP}$  e seja  $T$  sua intersecção com a reta  $r$ . A medida algébrica do segmento  $AT$  será a tangente de  $t$ , veja a Figura 47.

Figura 47 – Representação geométrica da tangente.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Quando  $t = \frac{\pi}{2}$ , o ponto  $P$  estará sobre o ponto  $B$  e quando  $t = \frac{3\pi}{2}$ , o ponto  $P$  estará sobre o ponto  $B'$  como indicado na Figura 47, daí as retas  $r$  e  $\overrightarrow{OP}$  serão paralelas e não temos o ponto  $T$  de intersecção, logo a tangente não será definida para esses valores.

Vamos mostrar que vale a relação  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)}$ , para  $\alpha \in [0, 2\pi]$  com  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  e  $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$ . Na Figura 47, seja  $t = \alpha$  o comprimento do arco da circunferência com extremidade em  $P$  e  $P'$  a projeção ortogonal de  $P$  no eixo  $x$ . Caso  $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$  temos  $\operatorname{tg}(\alpha) = 0$ , agora se  $\alpha \notin \{0, \pi, 2\pi\}$  os pontos  $O$ ,  $P'$  e  $P$  formam o triângulo retângulo  $\triangle OP'P$ , pois o ângulo  $\widehat{OP'P}$  é reto já que  $P'$  é a projeção ortogonal de  $P$ . Além disso o triângulo  $\triangle OAT$  é semelhante ao triângulo  $\triangle OP'P$  pelo caso AA, pois temos o ângulo  $\widehat{O}$  comum aos dois triângulos e ambos apresentam um ângulo reto, já que a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado  $AT$  é tangente a circunferência no ponto  $A$ . Então pela semelhança de triângulos, temos  $\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT}$ , mas  $OP' = \operatorname{cos}(\alpha)$ ,  $P'P = \operatorname{sen}(\alpha)$  e  $OA = 1$  pois é o raio da circunferência, segue agora que  $\frac{\operatorname{cos}(\alpha)}{1} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{AT}$ , daí  $AT \cdot \operatorname{cos}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ , então  $AT = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)}$ , como  $AT = \operatorname{tg}(\alpha)$ , segue que  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)}$ .

Além disso, para  $\alpha = -t$ , temos um triângulo simétrico ao triângulo  $\triangle OAT$  em relação ao eixo  $x$ , de modo que  $\operatorname{tg}(-t) = -AT$ , como  $\operatorname{tg}(t) = AT$ , temos  $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg}(t)$ .

## 4.2.1 Tangente da soma e da diferença de dois arcos

Vamos apresentar o desenvolvimento algébrico, temos que  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{cos}(\alpha + \beta)}$ , como  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) + \operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$  e  $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$ , segue que

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) + \operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)},$$

agora dividimos o numerador e o denominador dessa por  $\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)$ , com  $\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) \neq 0$  isto é, para  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e para  $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , logo,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)}{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)} + \frac{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)}}{\frac{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)}{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)} - \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)}},$$

que resulta em

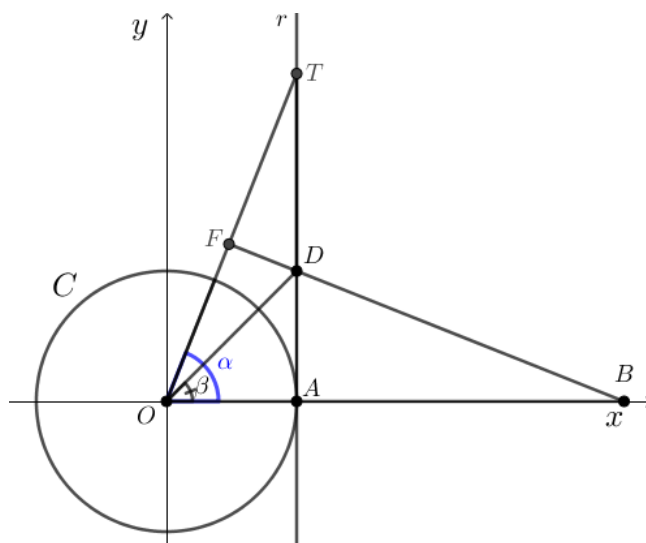
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}. \quad (4.18)$$

Para obter a tangente da diferença de dois arcos, isto é,  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ , vamos representar a expressão  $\alpha - \beta$  pela equivalente  $\alpha + (-\beta)$  e substituir na Equação (4.18), assim obtemos  $\operatorname{tg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(-\beta)}$ , como a função tangente é uma função ímpar concluímos que

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}. \quad (4.19)$$

Agora de forma geométrica, vamos determinar a tangente da diferença de dois arcos.

Figura 48 – Representação geométrica da tangente da diferença de dois arcos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Dada uma circunferência unitária  $C$ , cujo centro  $O$  está na origem do plano cartesiano ortogonal, considere a reta  $r$  tangente à circunferência no ponto  $A(1,0)$  e os pontos  $D$  e  $T$  pertencentes a reta  $r$ , de modo que  $\widehat{AOT} = \alpha$  e  $\widehat{AOD} = \beta$ , além disso considere uma reta  $s$  que passa pelo ponto  $D$  e é perpendicular ao segmento  $OT$ , cuja interseção com o segmento  $OT$  é o ponto  $F$  e a interseção com o eixo  $x$  é o ponto  $B$ , assim ficam determinados os triângulos retângulos  $\triangle OAT$ ,  $\triangle OAD$ ,  $\triangle DAB$  e  $\triangle OFB$  conforme a Figura 48, vamos tomar nessa demonstração  $\alpha > \beta$ .

Com o  $\triangle OAD$  temos  $\operatorname{tg}(\beta) = \frac{AD}{OA}$ , daí  $\operatorname{tg}(\beta) = \frac{AD}{1}$  logo  $AD = \operatorname{tg}(\beta)$ .

Pelo mesmo raciocínio, com o  $\triangle OAT$  temos  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AT}{OA}$ , daí  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AT}{1}$  logo  $AT = \operatorname{tg}(\alpha)$ .

Como  $DT = AT - AD$ , segue que  $DT = \operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)$ .

Temos que os triângulos  $\triangle DAB$  e  $\triangle OFB$  são semelhantes pelo caso AA, pois o ângulo  $\widehat{B}$  é comum ao dois e ambos possuem um ângulo reto, desse modo temos que  $\widehat{ADB} = \alpha$ , segue então no  $\triangle DAB$  que  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AB}{AD}$ , daí  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AB}{\operatorname{tg}(\beta)}$  logo  $AB = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)$ .

Com o  $\triangle OFB$  temos  $\cos(\alpha) = \frac{OF}{OB}$ , como  $OB = OA + AB = 1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)$ , segue que  $\cos(\alpha) = \frac{OF}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$ , daí  $OF = \cos(\alpha) \cdot [1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)]$ .

Os ângulos  $\widehat{ADB}$  e  $\widehat{FDT}$  são opostos pelo vértice, portanto tem a mesma medida, logo temos  $\widehat{FDT} = \alpha$ , no triângulo retângulo  $\triangle FDT$  temos  $\cos(\alpha) = \frac{DF}{DT}$ , então  $\cos(\alpha) = \frac{DF}{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}$  logo  $DF = \cos(\alpha) \cdot [\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)]$ .

Agora segue no triângulo retângulo  $\triangle OFD$  que  $\widehat{FOD} = \alpha - \beta$ , segue que  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{DF}{OF}$ , então  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha) \cdot [\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)]}{\cos(\alpha) \cdot [1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)]}$ , que resulta em

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}(\beta)}.$$

#### 4.2.2 Tangente de arcos duplos e triplos

Para determinar a tangente do arco duplo, isto é,  $\operatorname{tg}(2\alpha)$ , vamos fazer  $\beta = \alpha$  e substituir na Equação (4.18), desta forma temos  $\operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}(\alpha)}$ , que resulta em

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}. \quad (4.20)$$

Afim de determinar a tangente do arco triplo, isto é,  $\text{tg}(3\alpha)$ , basta considerar os arcos de medidas  $\alpha$  e  $2\alpha$  e substituir na fórmula da tangente da soma de dois arcos, deste modo temos  $\text{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg}(\alpha) + \text{tg}(2\alpha)}{1 - \text{tg}(\alpha)\text{tg}(2\alpha)}$ , como já sabemos  $\text{tg}(2\alpha)$ , vamos substituir novamente,

$$\text{daí } \text{tg}(3\alpha) = \frac{\text{tg}(\alpha) + \frac{2\text{tg}(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)}}{1 - \text{tg}(\alpha)\frac{2\text{tg}(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)}}, \text{ então } \text{tg}(3\alpha) = \frac{\frac{\text{tg}(\alpha)[1 - \text{tg}^2(\alpha)] + 2\text{tg}(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)}}{\frac{[1 - \text{tg}^2(\alpha)] - 2\text{tg}^2(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)}}, \text{ desde modo con-}$$

cluímos que

$$\text{tg}(3\alpha) = \frac{3\text{tg}(\alpha) - \text{tg}^3(\alpha)}{1 - 3\text{tg}^2(\alpha)}. \quad (4.21)$$

### 4.2.3 Tangente do arco metade

Para determinar a tangente do arco metade, vamos utilizar  $\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ , como já sabemos o seno e o cosseno do arco metade, vamos substituir esses valores e obtemos,

$$\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \text{cos}(\theta)}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \text{cos}(\theta)}{2}}},$$

simplificando concluímos que

$$\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{cos}(\theta)}{1 + \text{cos}(\theta)}}. \quad (4.22)$$

### 4.2.4 Transformação da soma de tangentes em produto

Já obtemos as fórmulas que transformam somas de senos ou cossenos em produtos, vamos agora determinar a fórmula que transforma a soma de tangentes em produto.

Partindo de  $\text{tg}(\alpha) + \text{tg}(\beta)$ , obtemos que  $\text{tg}(\alpha) + \text{tg}(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} + \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{cos}(\beta)}$ , com  $\text{cos}(\alpha) \neq 0$  e  $\text{cos}(\beta) \neq 0$ , isto é, para  $\alpha \neq \pi + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e para  $\beta \neq \pi + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Desenvolvendo a fórmula obtida, segue que

$$\text{tg}(\alpha) + \text{tg}(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha)\text{cos}(\beta) + \text{sen}(\beta)\text{cos}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta)},$$

em que já conhecemos algumas dessas fórmulas e podemos substituir, então concluímos que

$$\text{tg}(\alpha) + \text{tg}(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta)}. \quad (4.23)$$

De maneira semelhante obtemos  $\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)} - \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{cos}(\beta)}$ , com  $\operatorname{cos}(\alpha) \neq 0$  e  $\operatorname{cos}(\beta) \neq 0$ , isto é, para  $\alpha \neq \pi + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e para  $\beta \neq \pi + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , segue que

$$\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{cos}(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{cos}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha) \operatorname{cos}(\beta)},$$

resultando em

$$\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos}(\alpha) \operatorname{cos}(\beta)}. \quad (4.24)$$



## 5 Aplicações com foco na história da matemática

Neste capítulo, apresentamos como sugestão, uma sequência de atividades sobre as razões, relações e transformações trigonométricas, tendo como recurso didático a história da matemática, que visa contextualizar, justificar e mostrar aos estudante como se deu a construção deste conteúdo e porque ele é tão importante.

Antes disso, vamos passar pelo currículo paulista, que é o documento oficial para a educação no estado de São Paulo que afirma,

é necessário que os processos de ensino e aprendizagem tenham como foco o desenvolvimento de ações que visem superar a fragmentação disciplinar do conhecimento, estimulando a sua contextualização e aplicação na vida real, para dar sentido ao que se aprende. (SÃO PAULO, 2020, p.32).

Vemos aqui uma possibilidade da nossa proposta de se trabalhar com a história da matemática e contemplar as ações previstas no currículo.

O currículo paulista apresenta a Matemática como área de conhecimento, pois além de ser componente curricular e área de conhecimento, é primordialmente uma ciência. O currículo paulista tem como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e é pautado pelo desenvolvimento de competências, que é definida como

a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.8).

O Quadro 1 apresenta a competência e demais informações referentes ao nosso tema de pesquisa que são as razões, relações e transformações trigonométricas.

Quadro 1 – Organizador curricular da área de Matemática e suas Tecnologias.

Competência	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Habilidades	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
Unidade temática	Geometria e medidas.
Objetos de conhecimento	Trigonometria no triângulo retângulo (principais razões trigonométricas). Trigonometria no ciclo trigonométrico. Unidades de medidas de ângulos (radianos). Funções trigonométricas (função seno e função cosseno).

Fonte: São Paulo (2020, p.124).

A seguir, vamos pesquisar em alguns livros didáticos utilizados no ensino médio, como os objetos de conhecimento referentes a nossa pesquisa são abordados e verificar como a nossa pesquisa pode contribuir para um melhor aproveitamento destes.

## 5.1 Considerações sobre o tratamento das razões e relações trigonométricas em alguns livros didáticos utilizados no ensino médio

Atualmente os livros didáticos da área de matemática e suas tecnologias para o chamado novo ensino médio, são publicados em coleções, contendo volumes específicos sobre determinados objetos de conhecimento.

O livro de Dante e Viana (2020), apresenta os objetos de conhecimento referentes à trigonometria, vamos verificar se e como o fator histórico está presente na abordagem desses objetos de conhecimento.

Dante e Viana (2020) ao trabalhar o conceito de semelhança de triângulos apresenta nessa seção uma parte chamada *um pouco da história da trigonometria*, em que brevemente relata que Aristarco de Samos (310 AEC – 230 AEC) usou semelhança de triângulos para comparar as distâncias entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua, além disso destacou os feitos de Tales de Mileto (624 AEC – 547 AEC), como o método de comparação de sombras que hoje conhecemos como o Teorema de Tales, em que ele calculou a altura de uma pirâmide.

Ao tratar das razões trigonométricas, Dante e Viana (2020), apresentam nessa seção

uma parte chamada *leitura e compreensão*, no qual com mais detalhes e cálculos, mostra como Aristarco fez para comparar as distâncias entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua, além de aplicar, com dados mais atualizados, o mesmo raciocínio para calcular essas distâncias e propõe uma pesquisa para os estudante sobre quais seriam de fato as distâncias entre esses astros.

Dante e Viana (2020) apresentam um seção chamada *conexão* em que mostra historicamente como Eratóstenes (276 AEC – 194 AEC), fez para medir o comprimento da circunferência da Terra. Os autores deixam como proposta para o professor, explorar essa situação na forma de resolução de problemas.

Vemos nessas situações uma tentativa de introduzir os aspectos históricos, porém de forma breve e isolada sem continuidade, não explorando o potencial que a história da matemática pode oferecer. Ainda assim vemos com bons olhos essas situações, pois o professor pode dar continuidade, justificar historicamente o seu uso e propor exercícios com esse viés histórico.

De forma geral em Dante e Viana (2020), os objetos de conhecimento são abordados a partir de suas definições, seguidas das demonstrações, explicação de alguns exemplos e com aplicação de exercícios contextualizados. Em alguns momentos há sugestões de trabalhar com recursos tecnológicos como o GeoGebra.

Agora vamos verificar o livro de Bonjorno, Junior e Sousa (2020) que trata dos objetos de conhecimento referentes à trigonometria e está presente na coleção Prisma Matemática.

Este livro apresenta logo na introdução alguns aspectos históricos referentes à trigonometria, como o significado da palavra trigonometria, aponta ainda que as origens da trigonometria são incertas, cita também que a evolução dessa área se deu devido às necessidade geradas pela navegação e astronomia e destaca que ao longo dos séculos, diversos estudiosos, como Eratóstenes (276 AEC – 195 AEC), Hiparco de Rodas (190 AEC – 120 AEC) e Johann Müller (1436 – 1476), também conhecido como Regiomontanus, dedicaram-se ao estudo da Trigonometria e que eles deram importantes contribuições para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento da trigonometria.

Bonjorno, Junior e Sousa (2020) ao iniciar o tema razões trigonométricas na circunferência fazem um breve relato histórico sobre a necessidade de construir instrumentos para a medição de distâncias inacessíveis pois os navegadores dos séculos XV e XVI se guiavam pelas posições dos astros, alguns desses instrumentos desenvolvidos foram o sextante e astrolábio.

Bonjorno, Junior e Sousa (2020) apresentam uma seção chamada história da matemática, em que relatam que rudimentos da trigonometria podem ser observados no antigo Egito, pois no Papiro de Ahmes quatro problemas fazem menção ao *seqt* de um ângulo, destacando que na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de *seqt*, que representava a razão entre o

afastamento horizontal e a elevação vertical.

Os objetos de conhecimento referentes à trigonometria são abordados em Bonjorno, Junior e Sousa (2020), com foco no uso de recursos tecnológicos como o GeoGebra e a planilha eletrônica, apresenta vários exemplos e exercícios de aplicações contextualizados. O fator histórico é usado apenas como introdução, não sendo explorado efetivamente.

Agora, conforme as competências, as habilidades e os objetos de conhecimento, vamos propor nossa sequência de atividades.

## 5.2 Propostas de atividades

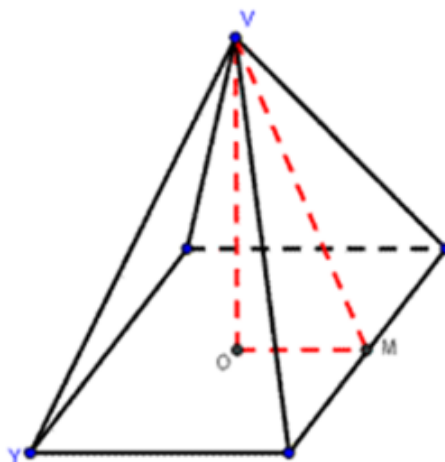
As atividades propostas a seguir são destinadas aos professores de matemática, que poderão reproduzir e aplicar em sala de aula. As atividades são precedidas de um pequeno texto histórico como introdução e contextualização da atividade.

Além disso, o professor avaliará os alunos conforme as realizações das atividades, considerando a participação ativa dos alunos e suas contribuições para o desenvolvimento da atividade.

### 5.2.1 O *seqt* de uma pirâmide

Os egípcios tinham particular interesse em deixar constante a inclinação das faces nas construções de suas pirâmides, estabelecendo uma razão entre o seu afastamento horizontal  $OM$  e a altura da pirâmide  $OV$ , que era chamado de *seqt*. Além disso, a unidade de medida era o cúbito.

Figura 49 – Representação do *seqt*.



Vale destacar que o Problema 56 encontrado no papiro de Ahmes, é justamente sobre determinar o *seqt* de uma pirâmide, então adaptamos duas atividades sobre o uso e o cálculo do *seqt* de uma pirâmide de base quadrada.

Essa atividade é destinada para estudantes do 9º ano do ensino fundamental em diante, os objetos de conhecimento trabalhados são as razões, ela tem por objetivo, desenvolver o raciocínio lógico, estimular a curiosidade. Pretende também levar os estudantes a perceberem a presença da matemática em tudo que fazemos, bem como desenvolver e resolver situações problemas.

As Atividades 1 e 2 podem ser trabalhadas em conjunto e a duração da atividade será de uma aula de 45 minutos, contemplando a introdução e o fechamento por parte do professor.

**Atividade 1** *A altura de uma pirâmide de base quadrada é 80 cúbitos e a medida da base é 120 cúbitos. Qual é o seqt dessa pirâmide?*

*Solução:* Precisamos escrever uma razão, um dos valores é a altura indicada por *OV* e a outra é a metade da medida da base, indicada por *OM*, deste modo,  $seqt = \frac{OM}{OV} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ .

Com a ideia do *seqt*, segue mais uma atividade destinada para alunos do 9º ano do ensino fundamental em diante, com o objetivo de aplicação dessa razão, visando a resolução de problema contextualizado.

**Atividade 2** *O seqt de uma pirâmide base quadrada é  $\frac{4}{5}$  e a base é 140 cúbitos. Qual é a altura dessa pirâmide?*

*Solução:* Como a razão  $\frac{OM}{OV}$ , que indica o *seqt* é constante, podemos determinar a altura indicada aqui por *OV*, basta para isso fazer  $\frac{70}{OV} = \frac{4}{5}$ , segue que  $4.OV = 350$ , que resulta em  $OV = 87,5$  cúbitos.

### 5.2.2 Calculando a distância entre o Sol e a Terra

Aristarco de Samos (310 AEC – 230 AEC), foi o primeiro a propor o Sol como centro do sistema solar 1700 anos antes de Copérnico. Um dos seus trabalhos consiste em determinar qual é a distância entre a Terra e o Sol tendo como unidade de medida a distância entre a Terra e a Lua. Aristarco afirmou que a distância do Sol à Terra é maior que dezoito vezes, mas menos de vinte vezes, a distância da Lua à Terra.

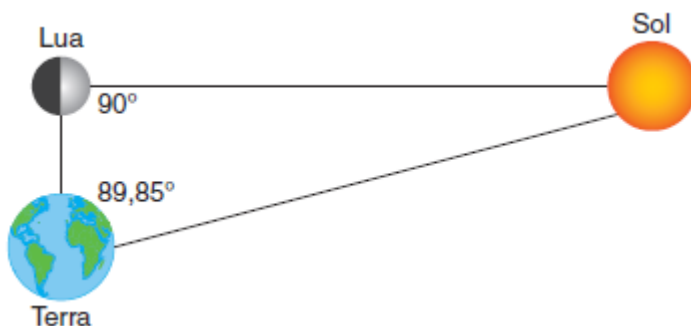
Ele chegou nessa conclusão pois sabia que a Lua brilha pela luz solar refletida, então quando um observador vê a Lua meio iluminada, o ângulo Sol-Lua-Terra é um ângulo reto e o ângulo Lua-Terra-Sol pode ser considerado um ângulo "menor que um quadrante por um trigésimo de um quadrante" (BRUMMELEN, 2009, p.22, tradução livre), portanto igual a  $87^\circ$ , pois um quadrante possui  $90^\circ$  e um trigésimo de um quadrante equivale a  $3^\circ$ .

Considerando valores atualizados para os ângulos e para a distância entre a Terra e a Lua, vamos determinar a distância entre o Sol e a Terra.

Essa atividade é destinada para estudantes do 2º ano do ensino médio, o objeto de conhecimento trabalhado é a trigonometria no triângulo retângulo, e tem o objetivo de estabelecer algumas relações, bem como desenvolver o raciocínio lógico e estimular a curiosidade.

A Atividade 3 pode ser trabalhada com os alunos em duplas e a duração da atividade será de uma aula de 45 minutos, contemplando a introdução e o fechamento por parte do professor.

**Atividade 3** *Aristarco de Samos, querendo calcular as distâncias relativas da Terra ao Sol e da Terra à Lua, utilizou o seguinte raciocínio: “No momento em que a Lua se encontra exatamente à meia-lua, os três astros formam um triângulo retângulo, com a Lua ocupando o vértice do ângulo reto. Sabendo a medida do ângulo que a visão da Lua forma com a visão do Sol, será possível determinar a relação entre as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol”. Sabe-se que o ângulo formado pelas direções Terra–Lua e Terra–Sol, na situação de meia-lua, é de, aproximadamente,  $89,85^\circ$  e que a distância da Terra à Lua é de, aproximadamente, 384 000 km.*



Fonte: Paiva (2010, p.120).

*Para ângulos de medidas inferiores a  $1^\circ$  (um grau), uma boa aproximação para o seno do ângulo é a medida do mesmo ângulo em radiano. Utilizando esses dados e o raciocínio de Aristarco, qual é aproximadamente a distância da Terra ao Sol?*

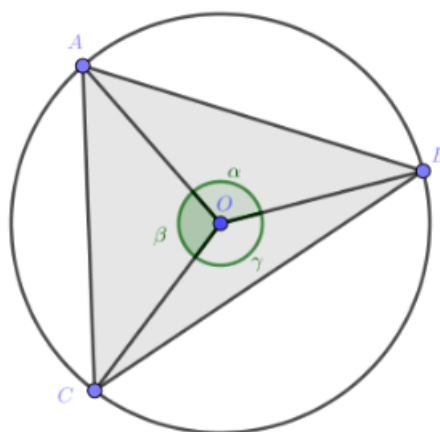
**Solução:** Nessa atividade o objetivo é trabalhar com a ideia de que para ângulos de medidas inferiores a  $1^\circ$  (um grau), uma boa aproximação para o seno do ângulo é a medida do mesmo ângulo em radiano, para isso vamos fazer uma regra de três e determinar o equivalente em radianos para  $0,15^\circ$  que é o ângulo correspondente ao Sol como vértice. Deste modo temos  $\frac{180^\circ}{0,15^\circ} = \frac{\pi}{x}$ , daí  $180x = 0,15\pi$ , então  $x = \frac{0,15\pi}{180} = \frac{15\pi}{18000} = \frac{\pi}{1200}$ , como  $\frac{\pi}{1200}$  é o correspondente em radianos para  $0,15^\circ$  este valor também será uma aproximação para  $\text{sen}(0,15^\circ)$ . Agora podemos calcular a distância aproximada entre a Terra e o Sol.

Seja  $TS$  a distância entre a terra e o Sol e  $TL$  a distância entre a Terra e a Lua, no triângulo retângulo formado pelos três astros, temos a razão  $\sin(0,15^\circ) = \frac{TL}{TS}$ , daí segue  $\frac{\pi}{1200} = \frac{384\,000}{TS}$ , então  $TS = \frac{1\,200 \cdot 384\,000}{\pi}$ , logo,  $TS = 146\,751\,592$  km, aproximadamente para  $\pi = 3,14$ .

### 5.2.3 Determinando as medidas das cordas

Como vimos, se deve a Hiparco de Rodas (190 AEC – 120 AEC), que era considerado o grande astrônomo da antiguidade, a ideia de razão trigonométrica, já que para poder fazer os seus cálculos era necessária uma tabela de razões trigonométricas. Ele considerava um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência de modo que cada lado fosse uma corda. Para Hiparco, o lado de todo triângulo inscrito é a corda de um ângulo central e dado que o ângulo central era conhecido, era possível determinar as medidas das cordas.

Figura 50 – Ângulo central e corda.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Considerando o aspecto geométrico, o cálculo das medidas das cordas subtendidas por ângulos centrais, foram importantes para se chegar as razões trigonométricas que conhecemos hoje.

Essa atividade se justifica na medida que queremos mostrar aos estudantes que para cada ângulo central temos uma medida para a corda subtendida.

Essa proposta é sugerida para alunos a partir do 9º ano e tem por objetivo reconhecer e utilizar arcos, ângulos centrais e inscritos em uma circunferência, estabelecendo algumas relações, bem como desenvolver o raciocínio lógico e estimular a curiosidade.

A Atividade 4 pode ser trabalhada com os alunos em duplas e a duração da atividade será de uma aula de 45 minutos, contemplando a introdução e o fechamento por parte do

professor.

**Atividade 4** De acordo com as ideias de Hiparco, isto é, para ele o lado de todo triângulo inscrito é a corda de um ângulo central e dado que o ângulo central era conhecido, era possível determinar as medidas das cordas. Complete o quadro de cordas para alguns valores específicos para o ângulo central ( $\alpha$ ), considere o raio da circunferência que contém as cordas com valor de  $r = 3438$  e consulte a Tabela 4.

Quadro 2 – Quadro de cordas

ângulo central $\alpha$	corda ( $\alpha$ )
105°	
120°	
135°	
150°	

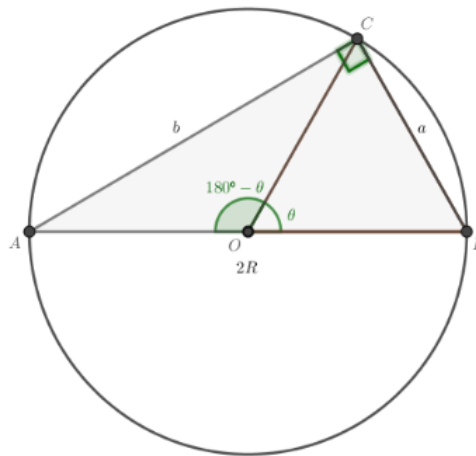
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 4 – Tabela Hiparco.

ângulo central $\alpha$	corda ( $\alpha$ )
$7\frac{1}{2}^\circ$	449,71
15°	897,50
$22\frac{1}{2}^\circ$	1341,44
30°	1779,64
$37\frac{1}{2}^\circ$	2210,22
45°	2631,33
$52\frac{1}{2}^\circ$	3041,18
60°	3438
$67\frac{1}{2}^\circ$	3820,10
75°	4185,84
$82\frac{1}{2}^\circ$	4533,66
90°	4862,07

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).



Figura 51 – Corda de  $(180^\circ - \theta)$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

*Solução:* Nessa atividade vamos trabalhar com a ideia de determinar a corda do ângulo central  $(180^\circ - \alpha)$  como fez Hiparco, para isso devemos saber o valor da *corda*  $(\alpha)$ , que vamos consultar na Tabela 4. Temos que a medida da corda  $(180^\circ - \alpha)$  é dada, segundo Hiparco, por  $corda(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2R)^2 - corda(\alpha)^2}$ .

- Para o cálculo da corda de  $105^\circ$  devemos saber *corda*  $(75^\circ)$ , pois  $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ , deste modo temos,

$$corda(105^\circ) = \sqrt{(2 \cdot 3438)^2 - 4185,84^2} = 5455,10$$

- Para o cálculo da corda de  $120^\circ$  devemos saber *corda*  $(60^\circ)$ , pois  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , deste modo temos,

$$corda(120^\circ) = \sqrt{(2 \cdot 3438)^2 - 3438^2} = 5954,79$$

- Para o cálculo da corda de  $135^\circ$  devemos saber *corda*  $(45^\circ)$ , pois  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ , deste modo temos,

$$corda(135^\circ) = \sqrt{(2 \cdot 3438)^2 - 2631,33^2} = 6352,60$$

- Para o cálculo da corda de  $150^\circ$  devemos saber *corda*  $(30^\circ)$ , pois  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ , deste modo temos,

$$corda(150^\circ) = \sqrt{(2 \cdot 3438)^2 - 1779,64^2} = 6641,70$$

Tabela 5 – Tabela de cordas – respostas.

ângulo central $\alpha$	corda ( $\alpha$ )
105°	5455,10
120°	5954,79
135°	6352,60
150°	6641,70

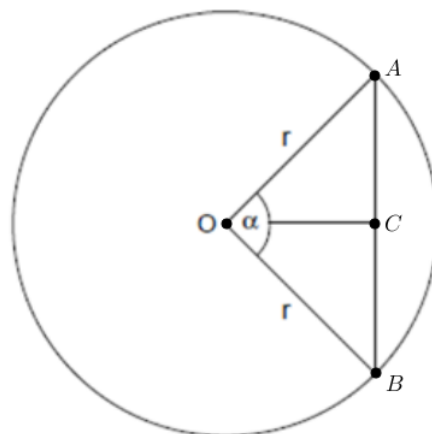
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com essa atividade queremos que os estudantes vejam que existe uma relação entre o ângulo central e a medida da corda correspondente, isto é, para cada medida do ângulo central temos uma medida diferente para a corda subtendida por esse ângulo.

#### 5.2.4 Relacionando cordas e senos

Cláudio Ptolomeu (85 – 165) trabalhava com astronomia, ele precisava de conhecimentos trigonométricos, pois precisava relacionar medidas angulares e medidas lineares para atingir seu objetivo. No primeiro dos treze livros do *Almagesto* há uma tabela de comprimentos de cordas em um círculo. Podemos inferir atualmente que se trata de uma tabela de senos, deste modo temos uma forma de relacionar medidas angulares com medidas lineares. Sendo  $r$  o raio da circunferência e  $\alpha$  o ângulo central, o comprimento da corda  $AB$  será  $AB = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , usando a notação atual.

Figura 52 – Relação entre a corda ( $\alpha$ ) e  $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .



Fonte: Adaptado de Maor (1998, p.26).

Essa atividade é destinada para estudantes do 2° ano do ensino médio, o objeto de conhecimento trabalhado é a trigonometria no triângulo retângulo, e tem o objetivo

de estabelecer algumas relações, bem como desenvolver o raciocínio lógico e estimular a curiosidade.

As Atividades 5 e 6 podem ser trabalhadas em conjunto, com os alunos em duplas e a duração será de duas aulas de 45 minutos cada uma, contemplando a introdução e o fechamento por parte do professor.

**Atividade 5** Sendo  $r$  o raio da circunferência,  $\alpha$  o ângulo central e  $AB = corda(\alpha)$ , mostre que  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{corda(\alpha)}{2r}$ .

*Solução:* Nessa atividade a ideia principal é estabelecer a relação que existe entre a  $corda(\alpha)$  e o  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , essa relação será feita de forma geométrica. Temos  $AB = corda(\alpha)$ , além disso, o triângulo  $\triangle AOB$  é um triângulo isósceles, pois  $OA = OB$ . Seja  $OC$  uma bissetriz por construção, deste modo os triângulos  $\triangle AOC$  e  $\triangle COB$  são congruentes pelo caso LAL. Então  $AC = CB$ , logo o segmento  $OC$  é a altura do triângulo  $\triangle AOB$  e portanto é perpendicular ao segmento  $AB$ . No triângulo retângulo  $\triangle AOC$  temos  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AC}{r}$ , daí  $AC = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , no triângulo retângulo  $\triangle COB$  temos  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CB}{r}$ , daí  $CB = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Como  $AB = AC + CB$  temos,  $AB = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , logo  $AB = 2r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , assim  $\frac{AB}{2r} = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Mas  $AB = corda(\alpha)$ , segue que  $\frac{corda(\alpha)}{2r} = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

### 5.2.5 Obtendo os valores de seno a partir do conhecimento das cordas de ângulos centrais.

Sabendo que para cada ângulo central temos uma medida para a corda subtendida, podemos de acordo com a Atividade 5, obter o seno de alguns ângulos.

Essa atividade é destinada para estudantes do 9º ano do ensino fundamental em diante, os objetos de conhecimento trabalhados são as razões, ela tem por objetivo, desenvolver o raciocínio lógico, estimular a curiosidade, bem como desenvolver e resolver situações problemas.

**Atividade 6** Complete o quadro abaixo indicando o seno de cada um dos ângulos, use a relação e a Tabela 5 obtida na Atividade 5 e a Tabela 4 disponível na Atividade 4, considere o raio da circunferência que contém as cordas com valor de  $r = 3438$ .

Quadro 3 – Quadro de senos de alguns ângulos específicos.

ângulo $\alpha$	sen ( $\alpha$ )
15°	
22,5°	
30°	
37,5°	
60°	
75°	

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

*Solução:* O objetivo dessa atividade é partir de uma tabela de cordas e determinar valores de senos de alguns ângulos, conhecendo a relação  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{corda}(\alpha)}{2r}$ , devemos pesquisar na Tabela 4, as cordas cujos ângulos centrais são iguais ao dobro do ângulo  $\alpha$  indicado na tabela de senos que queremos encontrar e assim estabelecer a relação indicada. Deste modo temos:

- $\text{sen } 15^\circ = \frac{\text{corda } 30^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{\text{corda } 30^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{1779,64}{6876} = 0,2588$
- $\text{sen } 22,5^\circ = \frac{\text{corda } 45^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{\text{corda } 45^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{2631,33}{6876} = 0,3827$
- $\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{corda } 60^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{\text{corda } 60^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{3438}{6876} = 0,5$
- $\text{sen } 37,5^\circ = \frac{\text{corda } 75^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{\text{corda } 75^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{4185,84}{6876} = 0,6088$
- $\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{corda } 120^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{\text{corda } 120^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{5954,79}{6876} = 0,866$
- $\text{sen } 75^\circ = \frac{\text{corda } 150^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{\text{corda } 150^\circ}{2 \cdot 3438} = \frac{6641,70}{6876} = 0,9659$

Tabela 6 – Tabela de senos de alguns ângulos específicos – respostas.

ângulo $\alpha$	sen ( $\alpha$ )
15°	0,2588
22,5°	0,3827
30°	0,5
37,5°	0,6088
60°	0,8660
75°	0,9659

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

### 5.2.6 Obtendo a fórmula do seno do arco duplo

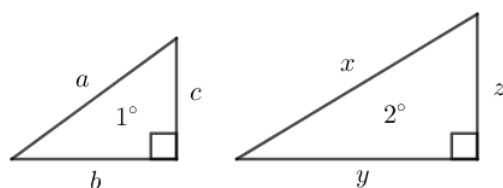
Com François Viète (1540 – 1603), a trigonometria assume uma característica analítica, pois temos o desenvolvimento simbólico algébrico. Em seu tratado *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores* (Notas Preliminares em Logística Especiosa), Viète mostra como usar sua álgebra, apresentando algumas proposições algébricas e também proposições que combinam álgebra e geometria. Além disso, esse tratado tem um capítulo chamado “Gênese dos triângulos”, que apresenta proposições sobre como obter um triângulo retângulo a partir de outros dois triângulos retângulos, sejam eles semelhantes ou não. Ainda é possível aplicar as proposições na obtenção do seno do ângulo duplo, seno do ângulo triplo, seno do ângulo quádruplo, entre outros, já que essas construções possibilitam tirar essas conclusões trigonométricas.

Essa atividade é destinada para estudantes do 2º ano do ensino médio, ela tem o objetivo de desenvolver a autonomia intelectual, o pensamento crítico e também o aprimoramento de habilidades e competências dos estudantes, para assim continuar seu aprendizado, a partir da aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

As Atividades 7, 8 e 9 podem ser trabalhadas com os alunos em duplas e a duração será de duas aulas de 45 minutos cada uma, contemplando a introdução e o fechamento por parte do professor.

Com o objetivo de determinar o seno do arco duplo, segue uma sequência de atividades, para uma melhor compreensão.

**Atividade 7** *Dados dois triângulos retângulos quaisquer, determine um terceiro triângulo retângulo cuja hipotenusa seja igual ao produto da hipotenusa desses dois triângulos retângulos dados. Para esse propósito resolva cada um dos itens a seguir:*



- (a) Obtenha relações, aplicando o Teorema de Pitágoras em ambos os triângulos.

*Solução:*

Com o primeiro triângulo retângulo obtemos  $a^2 = b^2 + c^2$  e com o segundo triângulo retângulo obtemos  $x^2 = y^2 + z^2$ .

- (b) Escreva a medida da hipotenusa do terceiro triângulo retângulo.

*Solução:*

A hipotenusa será igual ao produto da hipotenusa desses dois triângulos retângulos dados, então terá medida igual a  $ax$ .

(c) Agora eleve ao quadrado a medida da hipotenusa do terceiro triângulo retângulo. Então escreva uma igualdade usando as relações encontradas no item (a).

*Solução:*

Temos  $(ax)^2 = a^2x^2$ , substituindo as relações, segue que  $a^2x^2 = (b^2 + c^2)(y^2 + z^2)$ .

(d) Desenvolva o produto encontrado na igualdade do item anterior.

*Solução:*

Temos que  $a^2x^2 = (b^2 + c^2)(y^2 + z^2)$ , daí  $a^2x^2 = c^2y^2 + b^2z^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ .

(e) Reescreva o produto do item anterior da seguinte forma:

$$a^2x^2 = c^2y^2 + b^2z^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

Agora adicionando  $2bcyz$  e subtraindo  $2bcyz$ , na expressão obtida anteriormente a igualdade não se altera e isso pode ser feito de duas formas:

I- acrescente  $2bcyz$  entre  $c^2y^2$  e  $b^2z^2$  em seguida acrescente  $-2bcyz$  entre  $b^2y^2$  e  $c^2z^2$ ;

II- acrescente  $-2bcyz$  entre  $c^2y^2$  e  $b^2z^2$  em seguida acrescente  $2bcyz$  entre  $b^2y^2$  e  $c^2z^2$ .

*Solução:*

Acrescentando como indicado na forma (I) obtemos

$$a^2x^2 = c^2y^2 + 2bcyz + b^2z^2 + b^2y^2 - 2bcyz + c^2z^2 \quad (\text{I})$$

e acrescentando como indicado na forma (II) obtemos

$$a^2x^2 = c^2y^2 - 2bcyz + b^2z^2 + b^2y^2 + 2bcyz + c^2z^2. \quad (\text{II})$$

(f) Agora faça a fatoração dos trinômios presentes nas expressões encontradas.

*Solução:*

Fazendo a fatoração na expressão (I) obtemos

$$a^2x^2 = (cy + bz)^2 + (by - cz)^2 \quad (\text{III})$$

e fazendo fatoração na expressão (II) obtemos

$$a^2x^2 = (cy - bz)^2 + (by + cz)^2. \quad (\text{IV})$$

(g) As igualdades obtidas indicam a aplicação do Teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é  $ax$ , pois  $\sqrt{a^2x^2} = ax$ , como temos duas expressões, obtemos dois triângulos retângulos como soluções. Determine as medidas das

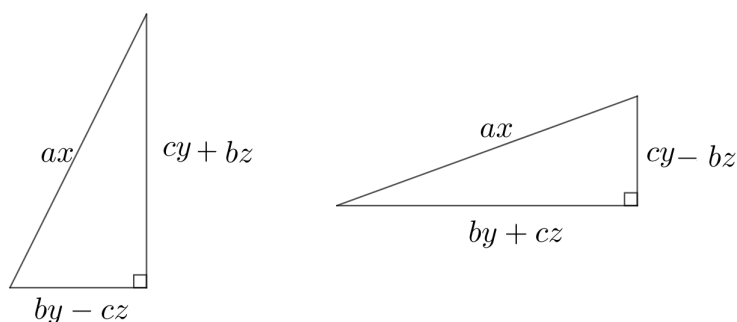
alturas e das bases em cada caso, para isso faça a raiz quadrada em cada um dos termos das igualdades, em que no segundo membro das igualdades a raiz quadrada deve ser tomada em cada parcela.

*Solução:*

Fazendo a raiz quadrada em ambos os termos da igualdade (III) e no 2º membro de cada parcela, obtemos a hipotenusa igual a  $ax$ , altura igual a  $cy + bz$  e base igual a  $by - cz$ . Fazendo a raiz quadrada em ambos os termos da igualdade (IV) e no 2º membro de cada parcela, obtemos a hipotenusa igual a  $ax$ , altura igual a  $cy - bz$  e base igual a  $by + cz$ .

(h) Desenhe dois triângulos retângulos e escreva as medidas obtidas respectivamente na hipotenusa, na altura e na base.

*Solução:*



(i) Comparando os triângulos obtidos com os dois triângulos retângulos iniciais, temos que a hipotenusa é dada pelo produto das hipotenusas dos dois triângulos e considerando a distinção entre base e altura, podemos separar essa construção em dois casos:

No primeiro caso a altura é proporcional à soma do produto da altura do primeiro com a base do segundo mais o produto da base do primeiro com a altura do segundo e a base é proporcional à diferença entre o produto das bases pelo produto das alturas dos dois triângulos.

Nesse primeiro caso o triângulo retângulo chama-se triângulo sinerésico.

Escreva a conclusão do segundo caso.

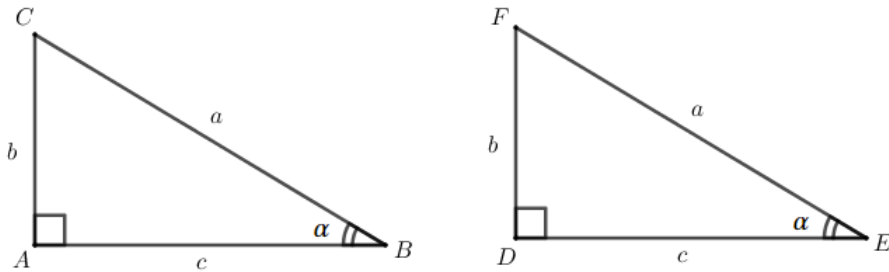
*Solução:* No segundo caso, a altura é proporcional à diferença do produto da altura do primeiro com a base do segundo e o produto da base do primeiro com a altura do segundo e a base é proporcional à soma do produto das bases com o produto das alturas dos respectivos triângulos.

Nesse segundo método o triângulo retângulo é chamado triângulo dierésico.

Para a continuidade de se determinar o seno do arco duplo, vale a seguinte observação: “o ângulo agudo de um triângulo retângulo derivado de dois triângulos retângulos por sinérese

é igual à soma dos ângulos agudos desses triângulos.” (WITMER, 2006, p.72, tradução livre.)<sup>1</sup>

**Atividade 8** Dados dois triângulos retângulos congruentes, podemos determinar um terceiro triângulo retângulo que possui um ângulo duplo. Para este propósito, resolva os itens a seguir:



(a) Aplique as conclusões do item (i) da Atividade 7, nesse caso vamos usar o primeiro método, pois o segundo caso, a altura é proporcional à diferença do produto da altura do primeiro com a base do segundo e o produto da base do primeiro com a altura do segundo assim temos um resultado nulo para a altura, pois vamos subtrair valores iguais.

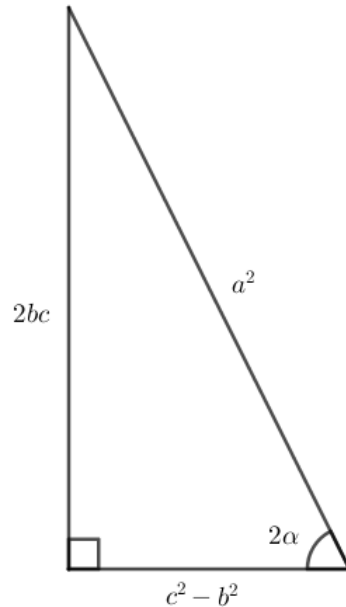
*Solução:* Aplicando então o primeiro caso a altura é proporcional à soma do produto da altura do primeiro com a base do segundo mais o produto da base do primeiro com a altura do segundo e a base é proporcional à diferença entre o produto das bases pelo produto das alturas dos dois triângulos, assim temos hipotenusa igual  $a^2$ , altura igual a  $bc + cb = 2bc$  e base igual a  $c^2 - b^2$ .

(b) Desenhe um triângulo retângulo e escreva as medidas obtidas respectivamente na hipotenusa, na altura e na base.

*Solução:*

<sup>1</sup> the acute angle of a right triangle derived from two right triangles by synaeresis is equal to the sum of the acute angles of those triangles.





(c) Aplique a razão seno no triângulo obtido considerando o ângulo duplo, isto é, determine  $\text{sen}(2\alpha)$ .

*Solução:* Temos que o seno é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa, então,  $\text{sen}(2\alpha) = \frac{2bc}{a^2}$ .

(d) Escreva a razão obtida na forma de produto de três fatores, de modo que  $a$  seja o denominador das partes algébricas.

*Solução:*  $\text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}$ .

(e) Considerando o triângulo retângulo  $\triangle ABC$  do início da Atividade 8, podemos concluir que  $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{a}$  e  $\text{cos}(\alpha) = \frac{c}{a}$ , substitua esses valores na igualdade obtida anteriormente, então obtenha a expressão do seno do arco duplo.

*Solução:* Fazendo as substituições obtemos  $\text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha)$ .

(f) Aplique a razão cosseno no triângulo obtido considerando o ângulo duplo, isto é, determine  $\text{cos}(2\alpha)$ .

*Solução:* Temos que o cosseno é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa, então,  $\text{cos}(2\alpha) = \frac{c^2 - b^2}{a^2}$ .

(g) Escreva a razão obtida na forma de uma subtração de produtos, de modo que  $a$  seja o denominador das partes algébricas.

*Solução:*  $\text{cos}(2\alpha) = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a}$ .

(h) Considerando novamente o triângulo retângulo  $\triangle ABC$  do início da Atividade 8, temos  $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{a}$  e  $\text{cos}(\alpha) = \frac{c}{a}$ , substitua esses valores na igualdade obtida anteriormente, então obtenha a expressão do cosseno do arco duplo.

*Solução:* Fazendo as substituições indicadas obtemos  $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$ , que resulta em  $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ .

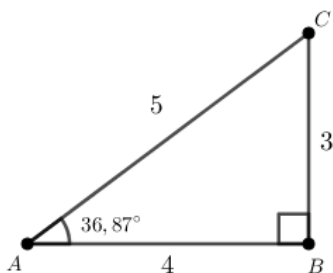
### 5.2.7 Obtendo o seno, o cosseno e a tangente do arco duplo

Vamos a partir dessas discussões obter o seno, o cosseno e a tangente do ângulo duplo.

Os objetos de conhecimento trabalhados são a trigonometria no triângulo retângulo (principais razões trigonométricas).

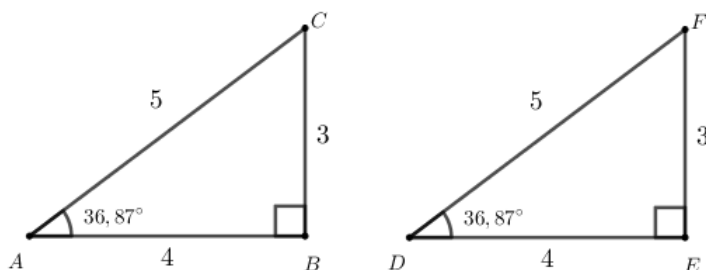
Para atingir esses objetivos utilizaremos as conclusões obtidas nas Atividades 7 e 8, para resolver a seguinte atividade:

**Atividade 9** Dado um triângulo retângulo  $ABC$  de modo que a hipotenusa é  $AC = 5$ , a base é  $AB = 4$ , a altura é  $BC = 3$  e o ângulo  $\widehat{CAB} = 36,87^\circ$ , determine o seno, o cosseno e a tangente de  $73,74^\circ$ .



*Solução:* Observe que  $73,74^\circ$  é o dobro de  $36,87^\circ$ , como já temos o triângulo retângulo de ângulo simples, que é justamente o triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , vamos então determinar um triângulo retângulo de ângulo duplo.

Para isso, precisamos de dois triângulos retângulos congruentes, vamos então considerar o triângulo retângulo  $\triangle ABC$  e um outro triângulo retângulo congruente  $\triangle DEF$ .

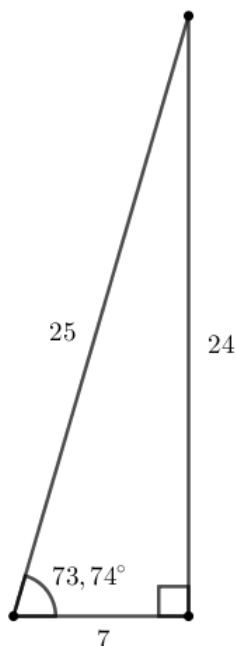


Agora vamos calcular a hipotenusa, a base e a altura do triângulo retângulo de ângulo duplo.

A hipotenusa do novo triângulo de arco duplo é igual ao produto das hipotenusas dos triângulos congruentes, logo igual a  $5 \cdot 5 = 25$ .

A base do novo triângulo é igual à diferença entre o produto das bases pelo produto das perpendiculares dos dois triângulos, logo igual a  $4.4 - 3.3 = 16 - 9 = 7$ .

A altura do novo triângulo é igual à soma do produto da perpendicular do primeiro com a base do segundo mais o produto da base do primeiro com a perpendicular do segundo, logo igual a  $3.4 + 4.3 = 24$ .



Obtemos, assim, um triângulo retângulo cujo um dos ângulos agudos é  $73,74$  graus. Podemos, agora, determinar o seno, o cosseno e a tangente de  $73,74^\circ$ , que é o dobro de  $36,87^\circ$ .

$$\text{sen } 73,74^\circ = \frac{24}{25} = 0,96.$$

$$\text{cos } 73,74^\circ = \frac{7}{25} = 0,28.$$

$$\text{tg } 73,74^\circ = \frac{24}{7} = 3,428.$$

Com essa atividade foi possível determinar as razões referentes aos arcos duplos, aplicando apenas razões trigonométricas, de uma forma simples e prática, pois trabalhamos apenas com triângulos retângulos.

Ao aplicar essas atividades esperamos passar e superar grandes dúvidas relativas às razões trigonométricas, como por exemplo entender que estamos falando inicialmente de cordas e meia cordas dadas em uma circunferência, em seguida temos as razões estabelecidas em um triângulo retângulo, bem como compreender o que significa cada valor presente nas tabelas de cordas e de senos, além disso entender e aplicar as razões trigonométricas de forma adequada na resolução de problemas.



## 6 Considerações Finais

Procuramos mostrar que história da matemática como recurso didático é uma boa estratégia para se trabalhar as razões e relações trigonométricas, pois possibilita a contextualização, o entendimento, a evolução e os motivos que justificam esses objetos de conhecimento.

O levantamento dos fatos históricos mostrou, de fato, a contextualização, o desenvolvimento e a evolução das razões e relações trigonométricas, além de dar sentido aos motivos pelos quais podemos estudar tais objetos de conhecimento.

O desenvolvimento algébrico e simbólico dado por Viète possibilitou obter transformações trigonométricas a partir da geometria com o uso dos seus métodos para determinar triângulos planos, ajudando assim a melhorar o entendimento.

Além disso destacamos a resolução da equação cúbica por meio da geometria, de tal forma que a equação cúbica se relacionava com a transformação trigonométrica do seno do arco triplo, mostrando assim a relevância da conexão entre a trigonometria e a resolução de equações algébricas.

A sequência de atividades proposta teve a intenção de ajudar na contextualização, no entendimento e compreensão das razões e relações trigonométricas de forma não mecânica, com a história da matemática como recurso didático. Infelizmente não teremos como saber se as atividades elaboradas realmente foram eficientes, mas fica aqui o registro para uma futura pesquisa e quem sabe, algum leitor possa contribuir com a pesquisa e aplicar as atividades comparando com uma abordagem diferente e constatar se de fato a nossa proposta foi eficiente.

A proposta inicial do nosso projeto era o estudo histórico das funções periódicas, mas ao iniciarmos os estudos e nos aprofundarmos nas razões e relações trigonométricas, nos faltou tempo para uma abordagem histórica das funções trigonométricas, acreditamos que a continuidade de nossa pesquisa possa apresentar bons resultados colaborando com o ensino e a aprendizagem do conceito de funções trigonométricas.

Diante do exposto, relato que a realização desse trabalho contribuiu muito na minha formação, na medida que devemos ter cuidado ao trabalhar cada objeto de conhecimento, criando estratégias de abordagem, desenvolvendo sequências de atividades e aprofundando o seu entendimento.



# Referências

- BICUDO, I. **Os elementos/Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009. Tradução e introdução de Irineu Bicudo.
- BONJORNO, J. R.; JUNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma matemática : geometria e trigonometria**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática**. Brasília: MEC, 1998.
- BRASIL. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BROLEZZI, A. C. **A arte de contar: Uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.
- BRUMMELEN, G. V. **The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry**. Reino Unido: Princeton University Press, 2009.
- BRUMMELEN, G. V. **The doctrine of triangles: a history of modern trigonometry**. Reino Unido: Princeton University Press, 2021.
- CHAQUIAM, M. **Ensaio temáticos: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.
- DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- D'AMBROSIO, U. A interface entre história e matemática uma visão histórico-pedagógica. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 7, n. 1, p. 41–64, 2021. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/67>. Acesso em: 10 out. 2023.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2009.
- HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
- KATZ, V. J. **History of mathematics**. New York: Person, 2008.
- LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- MAOR, E. **Trigonometric delights**. Princeton: Princeton University Press, 1998.
- MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.
- MUNDY-CASTLE, C. **Regiomontanus and Trigonometry**. 2004. Disponível em: <https://www.math.utep.edu/faculty/cmmundy/Math%201508/teaching%20module.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2023.
- PAIVA, M. R. **Matemática (Ensino médio)**. São Paulo: Moderna, 2010.

PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. B. Traços de uma história: Um primeiro olhar da influência de Johann Müller Regiomontanus nas obras do matemático português Pedro Nunes. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 18, n. 35, p. 23–38, 2018.

SAITO, F.; DIAS, M. da S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século xvi. **Ciência Educação**, v. 19, n. 1, p. 89–111, 2013.

SÃO PAULO. **Currículo Paulista: Etapa ensino médio**. São Paulo: SEDUC/SP, 2020.

WITMER, T. R. **The Analytic Art**. New York: Dover Publications, 2006. Disponível em: <https://www.yumpu.com/en/document/read/18112483/zetetic-v>. Acesso em: 12 mar. 2023.