Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

O Ensino de trigonometria por meio de Situações-Problemas subsidiado pela teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Claudio de Sousa Galvão

Teresina - 2013

Claudio de Sousa Galvão

Dissertação de Mestrado:

O Ensino de trigonometria por meio de Situações-Problemas subsidiado pela teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Prof^{a}. Dr^{a}. Liane Mendes Feitosa Soares

Teresina - 2013

G182e Galvão, Claudio de Sousa

O Ensino de trigonometria por meio de Situações-Problemas subsidiado pela teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud/ Claudio de Sousa Galvão. - 2013.

55f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, 2013.

"Orientadora: Profª. Drª. Liane Mendes Feitosa Soares".

1. Matemática - Estudo e Ensino. 2. Trigonometria. 3. Topografia. 4. Psicopedagogia. I. Título.

CDD 510.7

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por todas as bênçãos que Ele tem me dado a graça de conquistar para Sua honra e glória.

Agradeço à minha esposa Juçara Kelly Coelho Sobrinho Galvão, pelo companheirismo, pelo apoio, pela compreensão, por ser minha ajudadora, pois a palavra do senhor afirma que aquele que encontra uma esposa, encontra a benevolência do Senhor, e eu posso dizer que encontrei tal benevolência.

Agradeço às minhas filhas: Maria Eduarda, Maria Cláudia e Maria Clara; por darem um significado especial a esta conquista, por me motivarem e por serem também motivo de determinação e persistência.

Agradeço à minha mãe, Josefina de Sousa Lima, ao meu irmão Carlos Eduardo, ao meu irmão Carlos Luiz Lima, à minha tia Maria do Socorro Lima e seu esposo Luiz Carlos, ao meu avô Raimundo Nonato, ao meu sogro João Batista Sobrinho, à minha sogra querida Maria Aparecida Coêlho Sobrinho, ao meu cunhado José do Egito e sua esposa Lorena Porto, a minha cunhada Juciara Kalinne, juntamente com seu esposo André Gustavo e a minha cunhada Jainne Manuela; Agradeço de forma especial à Maria Aprecida Sobrinho, juntamente com seus filhos: Jakson André, Adriana Sobrinho e Laila Raquel, por terem aberto as portas de sua casa para mim, facilitando asim minha estadia em Teresina, e tambem por juntamente com demais citados anteriormente comporem minha família e por serem minha fortaleza, sem eles nada disso teria sentido bem como nenhuma das minhas vitórias teriam acontecido.

Agradeço aos meus amigos: Samuel Costa, Beijiumon melo, Dorian Lima, Raimundo Rodrigues, Rômulo Trapia, Rômulo André, Ramásio Melo, Anselmo Coelho, Thiago Guimarães, Vilson Soares, Abraão Gama, Adauto Gama; agradeço aos meus amigos de graduação em especial Davi Reis, Jorge Rodrigues, Antônio José Rodrigues, Nilmar Almeida.

Agradeço a todos os meus colegas do PROFMAT, em particular ao professor Helder Borges, que para mim é mais que um amigo, é um exemplo a ser seguido, tanto pela sua competência quanto pela seriedade que enfrenta os desafios. Agradeço de modo mais que especial ao meu grande amigo André Luiz Ferreira de Melo, que é simplesmente o maior prodígio que eu tive a honra de conhecer, não somente no ensino de matemática como tambem se destaca pela solidariedade ao próximo.

Agradeço a todos os professores que tive ao longo de minha vida estudantil e acadêmica, a começar pelos do Educandário Santa Joana D'arc, em especial à Irmã Felicidade, aos professores do Colegio Industrial são Fancisco de Assis em especial à Professora Rubenita Ferreira, esta coluna na educação florianense; aos professores do IFPI em especial ao professor Odimógenes Soares Lopes , por ser um ícone na educação matemática brasileira e pela sua importância na minha formação.

Agradeço de modo especial a Francisco Gonçalves Miranda Salvador e Marcos Aurélio Oliveira, por terem dado a mim, a primeira oportunidade como docente em 2001, sem eles eu não teria hoje o privilégio de fazer parte desta força que pode transformar o mundo em um lugar melhor: a educação.

Agradeço aos meus colegas matemáticos de trabalho: professor Cleofan Guimarães, Henrique Almeida, Cassiano Henrique, Fredson Vasconcelos e a professora Núbia Vilas Boas.

Agradeço a todos do IFTO - Campus Araguatins, em especial ao Décio Dias dos Reis e ao Paulo Hernandes Gonçalves pelo apoio a mim estendido para que podesse ser possível a realização desta nova conquista na minha vida.

Agradeço ao meu mentor espiritual, Pastor João de Deus juntamente com sua esposa, Pastora Talíta.

Agradeço de forma especial aos alunos do 2º C: Bianca, Camila, Elias, Fabiana, Gabriel, Gardênia, Isabella, João Paulo, Letícia, Luís Paulo, Rafael, Rayele, Rodrigo, Rômulo, Thaislane, Victor, do curso técnico em Agropecuária integrado ao médio, do IFTO - Campus Araguatins.

Agradeço à minha orientadora a Drª Liane Mendes Feitosa Soares, pela paciência que teve em dedicar o seu tempo a me orientar na construção deste trabalho.

“Um professor sempre afeta a eternidade. Ele nunca saberá onde sua influência termina”.

Henry Adams

Resumo

Este trabalho de pesquisa está fundamentado teoricamente pela Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, e tem como principal objetivo propor uma metodologia para o ensino de trigonometria que pode contribuir para uma construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria, tal metodologia poderá ser utilizada principalmente em escolas técnicas onde a disciplina de Topografia faz parte da grade curricular dos cursos técnicos, para que a mesma seja utilizada como estimulo, como é o caso dos alunos do segundo ano do curso técnico em agropecuária integrado ao ensino médio do Instituto Federal do Tocantins, campus Araguatins.

Esta pesquisa surgiu devido a dificuldade para o ensino de trigonometria associado a dificuldade que os alunos enfrentam na disciplina de topografia, devido ao fato de não terem domínio sobre os campos conceituais da trigonometria e pelo fato do PCN [9] afirmar que: "...especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos...", portanto este trabalho tem o objetivo de apresentar uma metodologia para que o aluno ao final consiga realizar o cálculo de distâncias inacessíveis e entendimentos de fenômenos periodicos.

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud salienta que a situação-problema é que dá sentido aos conceitos, e o professor como mediador deve construir situações problemas, que estejam dentro da zona de desenvolvimento proximal dos alunos, para isto é importante que o mesmo realize uma verificação de conhecimentos prévios para que consiga obter êxito no processo ensino aprendizagem. E é através dela que o aluno tem condições de explicitar os seus conceitos-em-ação e transformá-los em conceitos científicos. Sendo assim, para que o processo de pesquisa ocorresse, foi planejada e executada a verificação dos conceitos prévios dos alunos por meio de um questionário, que serviu de base para a

construção e elaboração de situações problemas, nas quais os alunos, de forma individual poderiam explicitar os invariantes operatórios e invariantes do conceito e construir novos conhecimentos.

Com esta pesquisa pode ser observado ao final, a importância da verificação dos conhecimentos prévios que os alunos carregam em sua estrutura cognitiva para que o professor saiba como desenvolver situações problemas dentro da zona de desenvolvimento proximal dos alunos e também pode ser verificada a importância do papel do professor como mediador dos processos de ensino e de aprendizagem, promovendo o aluno por meio de situações problemas, as mais variadas possíveis, que simulem a realidade para que ganhem sentido estes conteúdos. Por fim, pode ser verificada uma considerável aprendizagem significativa e ampliação dos conhecimentos relacionados ao campo conceituais da trigonometria por parte dos alunos, em especial ao cálculo de distâncias inacessíveis e ao entendimento de fenômenos periódicos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Trigonometria, Topografia, Campos Conceituais de Vergnaud.

Abstract

This research is grounded in theory by the Conceptual Fields Theory Gerard Vergnaud, and has as main objective to propose a methodology for teaching trigonometry that can contribute to a significant construction of the concepts involved in the conceptual field of trigonometry, this methodology can be used especially in technical schools where discipline Topography is part of the curriculum of technical courses, for it to be used as a stimulus, as is the case of the second year students of the technical course in agriculture integrated into the school's Institute of Tocantins, campus Araguatins.

This research arose from one difficulty for teaching trigonometry associated with the difficulty faced by students in the discipline of topography, because the fact of not having mastery over the conceptual fields of trigonometry and because the PCN state that: "... especially for the individual who will not continue their studies in careers so-called exact, which should be assured are the applications of trigonometry to solve problems involving measurements, in particular the calculation of distances inaccessible, and the construction of models which correspond to periodic phenomena ... ", so this work aims to present a methodology for the student at the end can perform the calculation of distances inaccessible and understandings of phenomena periodicals.

The theory of conceptual fields of Vergnaud stresses that the problem situation is what gives meaning to the concepts, and the teacher as mediator must build situations - problems that are within the zone of proximal development of the students, for it is important that the same conduct an check prior knowledge so you can succeed in the learning process. And it is through her that the student is able to explain their concepts-in-action and turn them into scientific concepts. Thus, for the research process occurred, was planned and executed to verify the preconceptions of students through a questionnaire, which was the basis for the construction and development of situations - problems in which students individually could explain the operational invariants and invariant concept and

build new knowledge.

This research can be seen at the end, the importance of verification of prior knowledge that students carry in their cognitive structure so that the teacher knows how to develop problem situations within the zone of proximal development of the students and can also be seen the important role the teacher as a mediator of teaching and learning, promoting student through problem situations, the most varied possible that simulate reality to gain meaning these contents. Finally we can see a considerable meaningful learning and expanding knowledge related the field concept of trigonometry by the students, especially the calculation of distances and inaccessible to the understanding of periodic phenomena.

Keywords: Teaching Mathematic, Trigonometry, Surveying, Vergnaud's Conceptual Fields.

Sumário

Introdução

Devido aos baixos números apresentados na aprendizagem de trigonometria e baseado nas propostas do PCN [9] Matemática, que enfatiza a importância de se aprender trigonometria, faz a seguinte ressalva: desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Associando a importância que há em aprender trigonometria, juntamente com a dificuldade que os alunos apresentam em topografia relacionada a falta de conhecimentos trigonometricos com isso existe a necessidade de desenvolver uma nova metodologia para o ensino de trigonometria.

Conforme [9], "...especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos". Baseado nesta perspectiva podemos incluir o estudo da topografia como estimulo para os alunos de trigonometria, apresentando a eles situações cotidianas onde eles deverão fazer medidas que sem o uso da trigonometria seriam impossíveis de serem realizadas.

Em virtude da dificuldade apresentada no estudo da trigonometria, pois a mesma envolve inúmeras leis trigonométricas, sendo assim responsável pelo desinteresse de boa parte dos alunos, tal desinteresse é agravado por alguns profissionais que não dão a devida atenção ao ensino dos conteúdos trigonométricos, colocando-a em seus planejamentos apenas o método tradicional de ministrar a trigonometria.

Diante dessa perspectiva, a escola, juntamente com o professor de Matemática, precisa criar metodologias alternativas capazes de reverter esta situação. O ideal seria que ainda no ensino fundamental no 9º ano os alunos tivessem a oportunidade de terem o primeiro contato com a trigonometria, trabalhando os conceitos básicos, sobre seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e, se possível, no círculo trigonométrico. No Ensino Médio, procurar estabelecer uma sequência de estudos, caso os alunos do ensino médio não tenham tido o primeiro contato com a trigonometria, então o professor deverá usar uma metodologia de modo que o aluno tenha este primeiro contato com os conceitos básicos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e, se possível, no círculo trigonométrico, antes de apresentar a eles as leis trigonométricas.

Sendo que o aluno deve ser estimulado ao estudo da trigonometria e sendo que estes conceitos devem ganhar sentido para o aluno; foi dentro desta perspectiva que este trabalho foi desenvolvido, tendo como finalidade fazer uso da necessidade de aprender trigonometria, fazendo uso de situações problemas de topografia em especial conceitos relacionados a semelhança de triangulo, teorema de Pitágoras , relações métricas no triangulo retângulo, trigonometria no triangulo retângulo e em um triangulo qualquer(lei dos senos e lei dos cossenos), ciclo trigonométrico, conceito de radiano, representação dos elementos trigonométricos no ciclo e demonstrações das relações importantes retiradas do ciclo trigonométrico, como é o caso da relação fundamental da trigonometria e derivadas.

O trabalho foi dividido em 6(seis) capítulos, no primeiro foi apresentada a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, mostrando sua relação com a Teoria da Aprendizagem Significatica de David Ausubel. No segundo Capítulo foram apresentados tópicos relacionados a Geometria Plana, em especial , semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo. No terceiro capítulo foram apresentados tópicos de trigonometria. No quarto capítulo foi descrita a metodologia da pesquisa. No quinto capítulo foram apresentados os resultados e por fim, no sexto capítulo, foi feita a conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

1.1 Campos Conceituais e Piaget

Embora o doutorado de Vergnaud tenha sido orientado por Piaget, a sua teoria dos campos conceituais muda o foco dos de Piaget, pois enquanto esta buscava uma generalização das estruturas lógicas aquele busca em sua teoria um estudo sobre o funcionamento cognitivo do sujeito-em-situação, pois para Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 7) Piaget não se deu conta de quanto o desenvolvimento cognitivo depende de situações e de conceitualizações específicas, necessárias para lidar com elas. Não que Vergnaud não tenha dado importância para os estudos de Piaget, pois o próprio Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 8) reconhece a importância da teoria de Piaget, destacando as idéias de adaptação, desequilibração e reequilibração como pedras angulares para a investigação em didática das Ciências e da Matemática. Embora o próprio Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 8) tenha defendido que a grande pedra angular colocada por Piaget foi o conceito de esquema.

1.2 Definição de Campo Conceitual

Como definia Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 8) campo conceitual é, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. Ora, se as estruturas lógicas gerais não são o suficiente para descrever o desenvolvimento cognitivo e o uso de representações deve ser levado em conta, então o foco de estudo deve ser o campo conceitual, que pode ser entendido como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados.

O foco principal da teoria dos campos conceituais pode ser tomado como a investigação do conhecimento implícito, sendo que a psicologia cognitiva enfrenta certa dificuldade para reconstruir os conhecimentos implícitos em ação, ou seja, o de transformar os conhecimentos implícitos em explícitos.

O motivo pelo qual devemos falar em campo conceitual e não em conceito de forma isolada é o fato de um conceito por mais simples que seja não se formar dentro de um tipo só de situação, da mesma forma que uma situação por mais simples que seja não será analisada com um só conceito. Essa construção do campo conceitual não se dá de modo instantâneo e sim ao longo dos anos por analogias e mal-entendidos entre situações e concepções, pois como já afirmava Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 8) "de nada serve tentar contornar as dificuldades conceituais; elas são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas, mas isso não ocorre de um só golpe."

Para Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 8) a teoria dos campos conceituais supõe que o âmago do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização. Sendo que o principal ingrediente para a cognição, é a conceitualização, ele não podia deixar de trazer em sua teoria uma idéia de conceito, pois Vergnaud [1] (apud MOREIRA 2004, p. 10), já definia conceito como um tripleto de três conjuntos, C=(S, I, R), onde: S é um conjunto de situações, I é um conjunto de invariantes operatórios e R um conjunto de representações simbólicas.

Situação é essencialmente uma tarefa que o sujeito irá fazer. As situações são muito importante na teoria dos campos conceituais pois são elas que dão significado ao conceito, e quanto mais situações mais amplo o significado desse conceito, pois como afirmava Barais e Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 11) as situações é que dão sentido ao conceito; as situações é que são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito. Embora como ressaltava Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 12) o sentido não está nas situações em si mesma, assim como não está nas palavras nem nos símbolos. O sentido está na relação do sujeito com a situação e é por esse motivo que a teoria dos campos conceituais propõe estudar a relação sujeito-situação.

Os invariantes operatórios são propriedades que definem o objeto e os procedimentos adotados pelos alunos para analisar e resolver as situações. Estes invariantes operatórios são conhecimentos implícitos designados como sendo os conceito-em-ação e teorema-em-ação que como conceitua o próprio Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 15), esquema é a organização da conduta para uma certa classe de situações; teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operacionais, logo, são componentes essenciais dos esquemas.

Sendo assim teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real. Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente relevante, pois como já afirmava Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 15) que "sendo assim teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira acerca do real, mas não é e conceito em ação é uma categoria de pensamento a respeito da situação que é tida como pertinente, mas nenhum dos dois pode ser considerado cientifico, porque são ingredientes de invariantes operatórios e, portanto, implícitos, e para serem considerados como científicos eles devem ser explicitados."

Como foi citado anteriormente, Vergnaud [1] acredita que a grande pedra angular colocada por Piaget foi o conceito de esquema, pois para Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 12) dever-se-ia falar em interação esquema-situação ao invés de interação sujeito-objeto da qual falava Piaget. As competências e concepções dos estudantes vão se desenvolvendo ao longo do tempo, através de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Em geral, quando defrontados com uma nova situação eles usam o conhecimento desenvolvido através de experiência em situações anteriores, e tentam adaptá-lo a esta nova situação. Portanto, a aquisição do conhecimento se dá, em geral, por meio de situações e problemas com os quais o aluno tem alguma familiaridade, o que implica em dizer que a origem do conhecimento tem características locais.

Assim, ao se deparar com uma situação, o sujeito evoca um conjunto de esquemas para lidar com a situação, usando estes esquemas para resolver esta situação problema ou então criar novos esquemas para então resolver a tal situação. O esquema pode ser definido como uma organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações. Para Vergnaud [1] (apud MOREIRA, 2004, p. 14) "do ponto de vista teórico, o conceito de esquema proporciona o indispensável vínculo entre a conduta e a representação". Por outro lado, como já sublinhava Vergnaud [1] (apud, MOREIRA, 2004, p. 14) são os invariantes operatórios que fazem a articulação essencial entre teoria e prática, pois a percepção, a busca e a seleção de informação baseiam-se inteiramente no sistema de conceitos-em-ação disponíveis para o sujeito.

O desenvolvimento cognitivo é o desenvolvimento de um vasto conjunto de esquemas para lidar com um conjunto mais vasto de situações, para isso precisamos de fazer representações simbólicas.

O conjunto de representações simbólicas são usadas para indicar e representar os invariantes operatórios e as situações, sendo assim, como foi citado anteriormente, o conceito só pode ser definido a partir de situações relacionadas com representações simbólicas através de invariantes operatórios. Para Moreira [1] (2004, p. 26) Vergnaud usava o termo representação como sendo um sistema simbólico que significaria algo para um sujeito.

As representações simbólicas permitem que o aluno se expresse sobre o conceito relacionando o significado com as propriedades do objeto. O conhecimento dos estudantes tanto pode ser explícito, no sentido de que eles podem expressá-lo de forma simbólica, quanto implícito, no sentido de que os estudantes podem usá-lo na sua ação, escolhendo operações adequadas, sem, contudo conseguirem expressar as razões dessa adequação.

1.3 Relação com a Teoria da aprendizagem significativa de Ausubel

Tanto a teoria dos campos conceituais quanto a teoria de Ausubel, são teorias da aprendizagem significativa que trabalham com a cognição, então qual a importância de se estudar a teoria dos campos conceituais se essa outra teoria é bem mais conhecida e aceita.

> "... a teoria de Ausubel, é uma teoria de aprendizagem em sala de aula, de aquisição de corpos organizados de conhecimento em situação formal de ensino, enquanto que a teoria de Vergnaud é uma teoria psicológica do processo de conceituação do real que se propõe a localizar e estudar continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual. A teoria de Vergnaud não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, embora tenha subjacente a idéia de que os conhecimentos-em-ação (largamente implícitos) podem evoluir, ao longo do tempo, para conhecimentos científicos (explícitos). A teoria de Ausubel, por outro lado, se ocupa exatamente da aquisição de conceitos explícitos e formalizados, chegando inclusive a propor princípios programáticos como a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação para a organização do ensino."[1] (MOREIRA, 2004, p. 22)

O professor que faz uso da teoria de Ausubel apresenta ao aluno conceitos explícitos e formalizados, o professor que faz uso da teoria dos campos conceituais de Vergnaud, ele primeiro apresenta a situação-problema, para só depois de esta ser elaborada pelos alunos ser possível então começar a discussão sobre as possíveis estratégias para resolvê-las, nesse processo o aluno vai construindo seus próprios conceitos. É importante ressaltar que segundo Moreira [1] (2004, p. 22) o que para Ausubel são campos organizados de conhecimento, para Vergnaud são campos conceituais.

A teoria dos campos conceituais remete a idéia de que não há sentido em separar o aprendizado das operações, mas sim aproveitar as relações estabelecidas para avançar no estudo da matemática, por mais que uma criança não domine de imediato ela vai gradualmente tecendo as relações entre os conceitos das operações e o posterior aprendizado do algoritmo ganhará significado. Desse modo, o algoritmo não deve ser desprezado, mas é crucial que a criança compreenda o que é cada elemento de uma operação, sem a ideia de que seja simplesmente um dos elementos dos quais não pode deixar de fazer uso para poder executar algum algoritmo.

Capítulo 2

Geometria Plana

Nesta parte do trabalho serão expostos alguns conceitos de geometria plana, baseados em [2], [3], [4] e [5] , em particular a geometria do triângulo, sendo que são de extrema importância para o desenvolvimeno da trigonometria, e serão utilizados neste trabalho para fazer medições inacessíveis, como também nas demonstrações das relações trigonométricas.

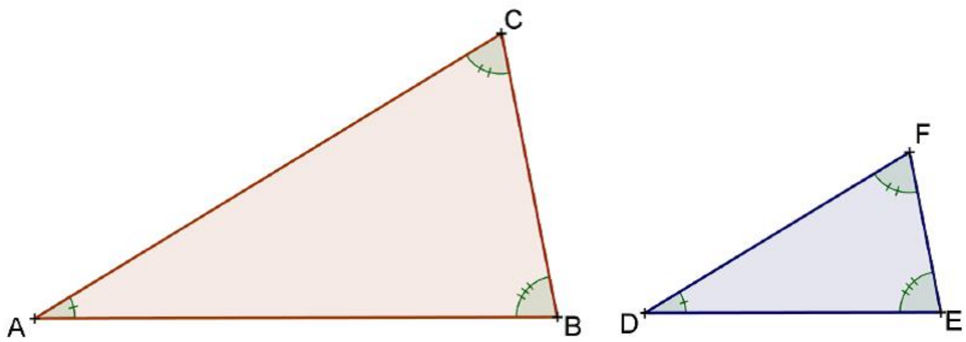
2.1 Semelhança de Triângulos

Esse tópico trata em especial dos conhecimentos relativos a semelhança de traiângulos, um dos tópicos mais importantes da geometria euclidiana plana. Como motivação deste estudo a seguir será apresentado uma situação problema apresentada pelo Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM - 2006), que pode ser resolvido fazendo uso dos conhecimentos de semelhança de triângulos.

Problema 1. *A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. Qual a distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa?*

Prossegindo serão apresentados os conhecimentos necessários para a resolução do problema supracitado.

Diz-se que dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.



Ou seja, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{E}$, $\mathsf{B} \Leftrightarrow \mathsf{F}$ e $\mathsf{C} \Leftrightarrow \mathsf{G}$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades:

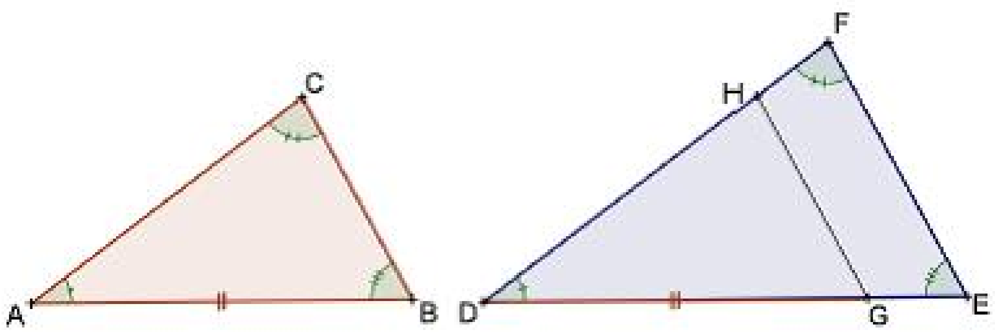
$$\hat{\mathsf{A}} = \hat{\mathsf{D}},\ \hat{\mathsf{B}} = \hat{\mathsf{F}},\ \hat{\mathsf{C}} = \hat{\mathsf{G}} \text{ e}$$
$$\overline{\mathsf{AB}}/\overline{\mathsf{EF}} = \overline{\mathsf{BC}}/\overline{\mathsf{FG}} = \overline{\mathsf{CA}}/\overline{\mathsf{GE}}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos. Observe que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um; inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um, são congruentes.

O teorema seguinte será referido como "segundo caso de semelhança de triângulos"a fim de que os casos de semelhança e os casos de congruência se correspondam de uma forma natural.

Teorema 1. *Dados dois triângulos ABC e DEF, se* $\hat{\mathsf{A}} = \hat{\mathsf{D}}$ *e* $\hat{\mathsf{B}} = \hat{\mathsf{E}}$ *então os triângulos são semelhantes.*

Prova 1. *Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, então a congruência dos ângulos* $\hat{\mathsf{A}}$ *e* $\hat{\mathsf{D}}$ *e dos ângulos* $\hat{\mathsf{B}}$ *e* $\hat{\mathsf{E}}$ *acarreta na congruência dos ângulos* $\hat{\mathsf{C}}$ *e* $\hat{\mathsf{F}}$*, então as igualdades* $\hat{\mathsf{A}} = \hat{\mathsf{D}}$, $\hat{\mathsf{B}} = \hat{\mathsf{E}}$, $\hat{\mathsf{C}} = \hat{\mathsf{F}}$. *Resta provar que os lados correspondentes são proporcionais. Para isto, tome na semi reta DE o ponto G de modo que DG = AB. Pelo ponto G trace uma reta paralela a FE.*



Esta corta a semi reta SDF *num ponto H, formando um triângulo DGH que é congruente ao triângulo ABC, já que* $\hat{\mathsf{A}} = \hat{\mathsf{D}}$*, AB = DG e* $\hat{\mathsf{B}} = \hat{\mathsf{E}} = \mathsf{D\hat{G}H}$*. Esta última congruência deve-se ao paralelismo de HG e FE. Como DG = AB e DH = AC então, da igualdade acima obtém-se:*

$$(\overline{\mathsf{AB}}/\overline{\mathsf{DE}}) = (\overline{\mathsf{AC}}/\overline{\mathsf{DF}})$$

De maneira análoga demonstra-se que $(\overline{\mathsf{AB}}/\overline{\mathsf{DE}}) = (\overline{\mathsf{BC}}/\overline{\mathsf{EF}})$. Fica assim demonstrado o teorema.

O teorema seguinte será referido como "primeiro caso de semelhança de triângulos"(Lado - Ângulo - Lado)(LAL).

Teorema 2. *Se, em dois triângulos ABC e DEF tem-se* $\hat{\mathsf{A}}$*=D e* $(\overline{\mathsf{AB}}/\overline{\mathsf{DE}}) = (\overline{\mathsf{AC}}/\overline{\mathsf{DF}})$*, então os triângulos são semelhantes.*

Prova 2. *Construa um triângulo GHI tal que* $\overline{\mathsf{GH}}=\overline{\mathsf{DE}}$ *,* $\hat{\mathsf{G}} = \hat{\mathsf{A}}$ *e* $\hat{\mathsf{H}} = \hat{\mathsf{B}}$*. Logo por AAA temos que triângulo ABC e o triângulo GHI são semelhantes. Portanto, os lados correspondentes são proporcionais:*

$$(\overline{\mathsf{AB}}/\overline{\mathsf{GH}}) = (\overline{\mathsf{AC}}/\overline{\mathsf{GI}}).$$

Como $\overline{\mathsf{GH}}=\overline{\mathsf{DE}}$*, então:*

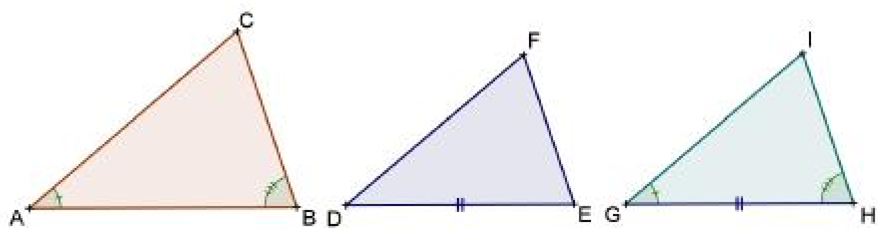
$$(\overline{\mathsf{AB}}/\overline{\mathsf{EF}}) = (\overline{\mathsf{AC}}/\overline{\mathsf{GI}}).$$

Porém pela hipóteses sabemos que:

$$(\overline{\mathsf{AB}}/\overline{\mathsf{DE}}) = (\overline{\mathsf{AC}}/\overline{\mathsf{DF}}),$$

e podemos concluir que:

$$(\overline{\mathsf{GI}} = \overline{\mathsf{DF}}).$$



Como por construção, GH = DE e $\hat{G}=\hat{A}=\hat{D}$, *podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos(ALA), que os triângulos DEF e GHI são congruentes. Como já sabiamos que ABC e GHI eram semelhantes, podemos concluir facilmente que ABC e DEF, também são semelhantes.*

O terceiro caso de semelhança é o seguinte.

Teorema 3. *Se em dois triângulos ABC e DEF, tem-se*

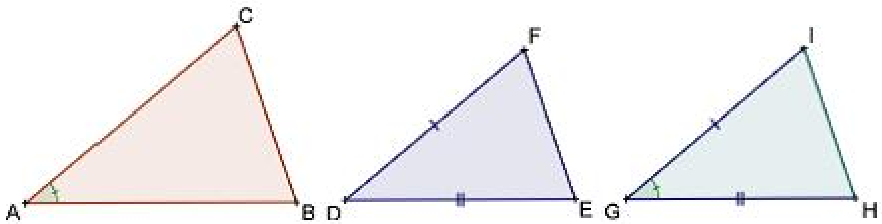
$$(\overline{AB}/\overline{DE}) = (\overline{BC}/\overline{EF}) = (\overline{CA}/\overline{FD}),$$

então os dois triângulos são semelhantes.

Prova 3. *Construa um triângulo GHI que tenha,* $\hat{G}=\hat{A}$, *GH=DE e GI = DF. Segue-se então que*

$$(\overline{AB}/\overline{GH}) = (\overline{AC}/\overline{GI}).$$

Portanto, de acordo com o teorema 2, os triângulos ABC e GHI são semelhantes.



Decorre daí que, além da igualdade acima, também ocorre

$$(\overline{AB}/\overline{GH}) = (\overline{BC}/\overline{HI}).$$

Segue-se daí e da hipótese do teorema que HI = EF. Como já tínhamos que GH = DE e GI = DF(por construção) então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, GHI e DEF são congruentes. Como GHI e ABC são semelhantes. Isto conclui a prova do teorema.

Sendo que já foi visto os casos de semelhança de triângulos, então pode ser retomado a situação problema que deu início a esta secção.

Resolução 1. *A situação problema citada acima pode ser resolvida com base nos teoremas de semelhança de triângulos visto acima, onde:*

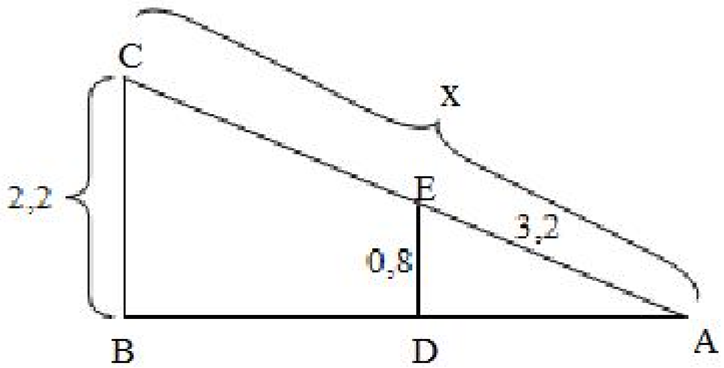
- a hipotenusa do triângulo maior é o comprimento total da rampa do hospital (x);

- 3,2 m é a hipotenusa do triângulo menor;

- 2,2 é um dos catetos do triângulo maior (altura);

- 0,8 é um dos catetos do triângulo menor (altura).

fazendo uma representação geométrica ficaria assim:



Daí temos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE pelo caso AAA, visto que as alturas são paralelas, então podemos concluir que = e =. Sendo assim podemos calcular o valor de x, utilizando a seguinte relação.

$$(\overline{BC}/\overline{DE}) = (\overline{AC}/\overline{AE})$$

$$2,2/0,8 = x/3,2$$

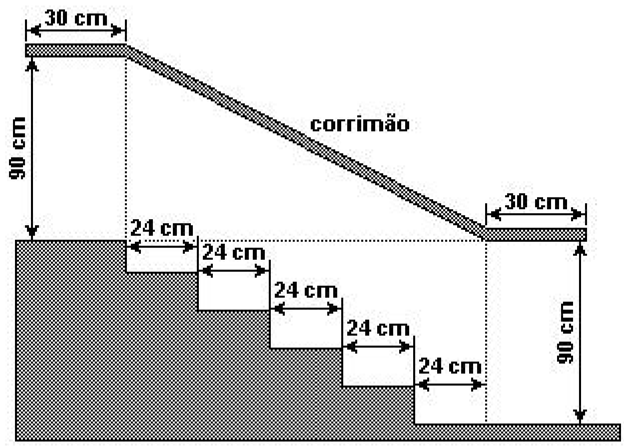
$$0,8.x{=}2,2.3,2$$

$$x{=}8,8$$

2.2 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Neste tópico será feito uso dos conhecimentos de semelhança de triângulos mostrados acima, para serem demonstradas as relações métricas nos triângulos retângulos. Para motivar tal estudo será feito uso de uma situação problema que foi apresentada pelo Exame Nacional do Ensino Médio/(ENEM - 2009) que pode ser resolvido fazendo uso dos conhecimentos das relações métricas no triângulo retângulo.

Problema 2. *Na figura a seguir, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, qual o comprimento total do corrimão?*



Prossegindo serão apresentados os conhecimentos necessários para a resolução do problema acima apresentado.

Seja ABC um triângulo retângulo com um ângulo reto no vétice A. Trace a altura AD do vértice A ao lado BC. No que se segue vamos fazer uso da seguinte notação $a = \overline{\mathsf{BC}}$, $b = \overline{\mathsf{AC}}$, $c = \overline{\mathsf{AB}}$, $h = \overline{\mathsf{AD}}$, $m = \overline{\mathsf{BD}}$ e $n = \overline{\mathsf{DC}}$.

Como AD é perpendicular a BC, então os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{\mathsf{B}} + \hat{\mathsf{C}} = 90°$ e $\mathsf{B\hat{A}D}$ $+\hat{\mathsf{B}}= 90°$ então

$$\mathsf{B\hat{A}D} = \hat{\mathsf{C}}.$$

Como também $\mathsf{D\hat{A}C}$ $+\hat{\mathsf{C}}= 90°$ então

$$\mathsf{D\hat{A}C} = \hat{\mathsf{B}}.$$

Os triângulos ADB e CDA são portanto ambos semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si. Destas semelhanças podemos deduzir várias relações entre as medidas a, b, c, h, m e n acima mencionadas. Por exemplo, a semelhança entre ADB e CDA é a que leva A em C. B em A e D em D. Como conseqüência desta semelhança tem-se

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}.$$

Da última igualdade deduz-se que

Teorema 4. *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Em termos de notação estabelecida acima o Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 = b^2 + c^2$.

Prova 4. *A prova do Teorema de Pitágoras é uma conseqüência da semelhança de triângulos ADB, CDA e ABC. Da semelhança de ADB e ABC* $(A \rightarrow C, B \rightarrow B e D \rightarrow A)$ *conclui-se que:*

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}.$$

Da semelhança dos triângulos CDA e ABC conlui-se que:

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$$

Logo, $am = c^2$ *e* $an = b^2$*. Portanto* $a\ (m+n) = c^2 + b^2$*. Como* $m + n = a$*, então* $a^2 = b^2 + c^2$.

A sequinte proposição é a inversa do Teorema de Pitágoras.

Proposição 1. *Um triângulo possui lados medindo a, b e c. Se* $a^2 = b^2 + c^2$*, então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a.*

Prova 5. *Construa um triângulo retângulo cujos catetos meçam exatamente b e c. Neste novo triângulo, de acordo com o Teorema de Pitágoras, a hipotenusa mede* $\sqrt{b^2 + c^2} = a$*. Portanto este novo triângulo (que é retângulo) tem lados medindo a, b e c. Pelo terceiro caso de congruência, ele é portanto congruênte ao triângulo original. Logo o triângulo original é retângulo e sua hipotenusa mede a.*

Resolução 2. *Retomando a situação problema apresentada no início da secção, pode ser observado que o trata-se de um triângulo retângulo então com base na figura, pode ser concluido que o comprimento total do corrimão equivale a 30 cm somado com a região central (x), que representa a hipotenusa, somado de mais 30 cm. A região central do corrimão é a hipotenusa do triangulo retângulo acima, sendo que um cateto é 24 vezes 5 cm e o outro cateto é igual a 90 cm. Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:*

$$(hipotenusa)^2 = (\mathsf{catetooposto})^2 + (\mathsf{catetoadjacente})^2$$

$$x^2 = (24.5)^2 + 90^2$$

$$x^2 = 1202 + 8100$$

$$x^2 = 14400 + 8100$$

$$x^2 = 22500$$

$$x^2 = 150\mathsf{cm}$$

O comprimento total é igual a 30 + x + 30.

Comprimento total = 30 + 150 + 30 = 210 cm = 2,1 m.

Capítulo 3

Trigonometria

Nesta parte do trabalho serão expostos alguns conceitos de trigonometria, baseados em [4], [2], [5], [3], [8] e o contexto histórico baseado em [6] e [7].

3.1 Um Pouco de História

Embora seja incerto o início o desenvolvimento da trigonometria, pode-se afirmar que tal desenvolvimento se deu principalmente com o objetivo de solucionar os problemas relacionados à Astronomia, Agrimensura e às Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. O início da Trigonometria está relacionado ao periodo em que se acreditava que os planetas descreviam orbitas circulares ao redor da Terra, daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subentendido, tais estudos surgiram pela primeira vez com os gregos.

Boyer [6] comenta que a Trigonometria, assim como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas entre as razões, entre lados dos triângulos semelhantes, tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Se c é o comprimento de uma corda, α é o ângulo e r é o raio da circunferência então $c = 2r.\sin(\alpha/2)$.

Segundo Garbi, esta é a origem da palavra seno, que provem de uma tradução equivocada do árabe para o latim feita por Geraldo de Cremona, quando se confundiu o termo $jiba$(corda) com $jaib$(dobra, cavidade, $sinus$ em latim).

O objeto inicial da trigonometria era a resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elemetos do triângulo (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um lado. Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e da Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real.

Nas obras de Euclides citadas em Boyer[6] não há Trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fôrmulas trigonométricas específicas. Uma grande dificuldade que existia tanto entre os gregos, quanto entre os hindus para elaboração e utilização das tabelas era a falta de um sistema adequado de numeração. O primeiro trabalho que se tem real conhecimento esta contido no "Almagest", um trabalho de Ptolomeu de Alexandria escrito na metade do segundo século sobre Astronomia contendo 13 volumes. Em um destes capítulos ele traz uma sequência de ângulos, distantes em meio grau um do outro, e seus valores estão corretos pelo menos até a quinta casa decimal. Um outro capítulo destinado à solução de triângulos.

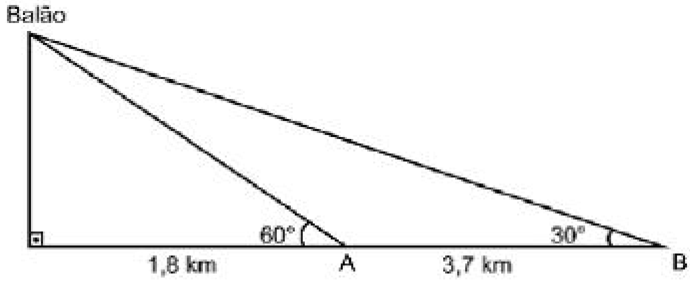
Vários teoremas relativos a cordas são demonstrados. No entanto, os escritores gregos do quarto século, refere-se ao astrônomo Hiparco de Nicéia, que viveu no Século II a.C. como originador da trigonometria, o qual ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria", pela reputação de ter um tratado em doze volumes em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia, sobre sua origem pouco se sabe. Também destaca Eves [8] que Aristarco sabia que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de $180°$ para $0°$, aproximando-se do limite. No entanto, parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos. Foi sugerido, no entanto, que Apolônio pode ter-se antecipado a Hiparco quanto a isto, e que a contribuição deste último à Trigonometria foi apenas a de calcular um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores.

Mas a necessidade de resolver problemas com representações trigonométricas no triângulo retângulo é ainda mais antiga.

3.2 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Nesta seção será dado início à trigonometria, em especial à trigonometria no triângulo retângulo; para motivar tal estudo, será utilizado uma situação problema que foi apresentada no ENEM de 2010.

Problema 3. *Um balão atmosférico, lançado em Bauru(343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.*

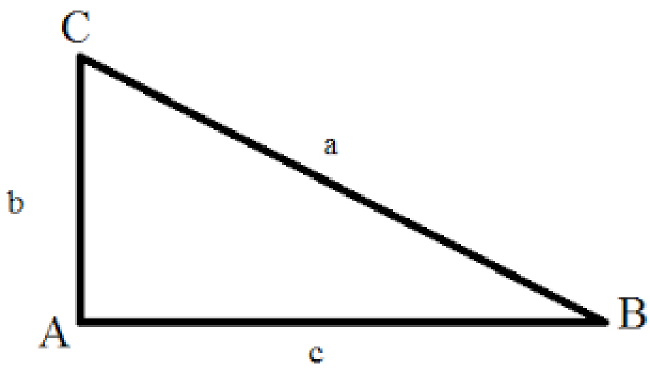


Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

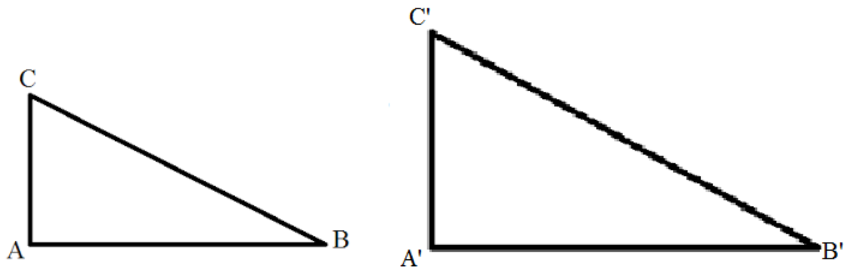
Proseguindo será apresentado os conceitos relacionados à trigonometria no triângulo retângulo, que permitirá que o problema acima possa ser ressolvido.

Num triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos e , opostos respectivamente aos catetos b e c, têm-se as definições a seguir:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \text{(cateto adjacente)} \div \text{(hipotenusa)}$$
$$\text{sen}\hat{C} = \frac{b}{a} = \text{(cateto oposto)} \div \text{(hipotenusa)}$$
$$\text{e analogamente, } \cos \hat{C} = \frac{c}{a} \text{ e sen}\hat{B} = \frac{b}{a}.$$



Estas relações definem o seno e o cosseno de um ângulo agudo qualquer pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo. É fundamental observar que $\cos\hat{\mathrm{B}}$ e sen$\hat{\mathrm{B}}$ dependem apenas do ângulo $\hat{\mathrm{B}}$ mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\hat{\mathrm{B}}$ é um dos ângulos agudos. Com efeito, dois quaisquer triângulos que tenham um ângulo agudo igual a $\hat{\mathrm{B}}$ são semelhantes.



Se esses triângulos são *ABC* e *A'B'C'*, com $\hat{\mathrm{B}}' = \hat{\mathrm{B}}$. Então a semelhança nos dá

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \text{ e}$$
$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}, \text{ logo}$$
$$\text{sen}\hat{\mathrm{B}}' = \text{sen}\hat{\mathrm{B}} \text{ e } \cos\hat{\mathrm{B}}' = \cos\hat{\mathrm{B}}$$

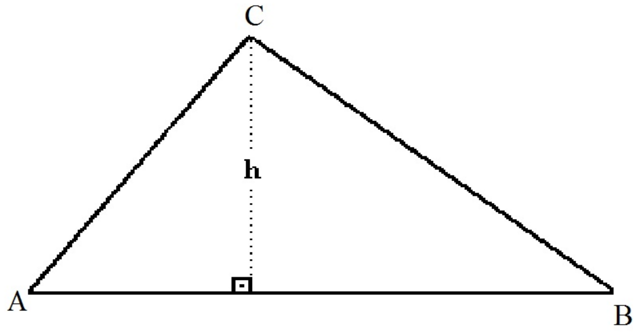
Portanto o seno e o cosseno pertencem ao ângulo, e não ao eventual triângulo que o contém.

Assim, a semelhança de triângulos é a base de sustentação da Trigonometria. Se for organizado uma tabela com os valores de $\cos\hat{\mathrm{B}}$ para todos os ângulos agudos $\hat{\mathrm{B}}$, a relação $c = a.\ \cos\hat{\mathrm{B}}$ e o Teorema de Pitágoras

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

permitirá determinar os catetos *b*,*c* de um triângulo retângulo, uma vez conhecida a hipotenusa *a* e um dos ângulos agudos.

Mais geralmente, num triângulo *ABC* qualquer, a altura *h*, baixada do vértice *C* sobre o lado *AB*, tem a expressão $h = \overline{BC} * \text{sen}\hat{\mathrm{B}}$. Esta simples fórmula exibe a eficiência da Trigonometria como instrumento de cálculo na Geometria, permitindo relacionar ãngulos com comprimentos de segmentos.



O Teorema de Pitágoras

$$a^2 = \mathsf{b}^2 + \mathsf{c}^2$$

aplicado ao triângulo retângulo ABC, com $AB = \mathsf{c}$, $AC = \mathsf{b}$ e $BC = \mathsf{a}$, nos mostra imediatamente que

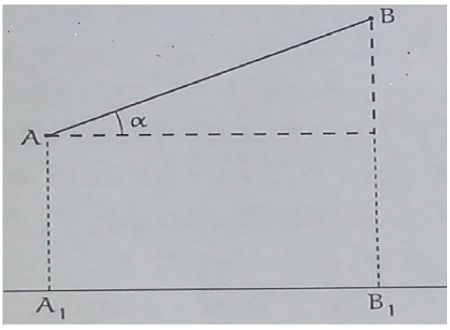
$$(\cos \hat{\mathsf{B}})^2 + (\mathrm{sen}\hat{\mathsf{B}})^2 = \frac{\mathsf{c}^2}{\mathsf{a}^2} + \frac{\mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2} = \frac{\mathsf{c}^2 + \mathsf{b}^2}{\mathsf{a}^2} = \frac{\mathsf{a}^2}{\mathsf{a}^2} = 1.$$

É um costume tradicional, que convém adotar, escrever $\cos^2 \hat{\mathsf{B}}$ e $\mathrm{sen}^2\hat{\mathsf{B}}$ em vez de $(\cos \hat{\mathsf{B}})^2$ e $(\mathrm{sen}\hat{\mathsf{B}})^2$. A relação fundamental da trigonometria que fica assim

$$\cos^2 \hat{\mathsf{B}} + \mathrm{sen}^2\hat{\mathsf{B}} = 1$$

mostra que, a rigor, basta construir uma tabela de senos para ter a de cossenos e vice-versa.

Pode-se demonstrar, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra "cosseno"(seno do complemento). É claro que o seno e o cosseno de um ângulo são números compreendidos entre 0 e 1. Por fim, pode ser observado que $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1$ é a projeção ortogonal de um segmento de reta AB sobre um eixo então os comprimentos de AB e $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1$ são relacionados pela fórmula $\overline{\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1} = \overline{\mathsf{AB}}.\cos\alpha$, onde α é um ângulo de AB com o referido eixo.



Outras relações importantes que podem ser determinadas apartir do seno e do cosseno de um ângulo, são:

Tangente

$$\mathrm{tg}\hat{\mathrm{B}} = \frac{\mathit{catetooposto}}{\mathit{catetoadjacente}} = \frac{\mathrm{sen}\hat{\mathrm{B}}}{\cos\hat{\mathrm{B}}}.$$

Cotangente(Tangente do Complemento)

$$\cot\hat{\mathrm{B}} = \frac{\mathit{catetoadjacente}}{\mathit{catetooposto}} = \frac{\cos\hat{\mathrm{B}}}{\mathrm{sen}\hat{\mathrm{B}}}.$$

Secante

$$\sec\hat{\mathrm{B}} = \frac{\mathit{hipotenusa}}{\mathit{catetoadjacente}} = \frac{1}{\cos\hat{\mathrm{B}}}.$$

Cossecante

$$\csc\hat{\mathrm{B}} = \frac{\mathit{hipotenusa}}{\mathit{catetooposto}} = \frac{1}{\mathrm{sen}\hat{\mathrm{B}}}.$$

Fazendo uso da Relação Fundamental da trigonometria e das relações acima descritas pode ser obtidas outras relações importantes, que serão apresentadas a seguir:

$$\cos^2\hat{\mathrm{B}} + \sin^2\hat{\mathrm{B}} = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2\hat{\mathrm{B}}}{\cos^2\hat{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{sen}^2\hat{\mathrm{B}}}{\cos^2\hat{\mathrm{B}}} = \frac{1}{\cos^2\hat{\mathrm{B}}} \Rightarrow 1 + \tan^2\hat{\mathrm{B}} = \sec^2\hat{\mathrm{B}}.$$

Outra relação importante pode ser demonstrada de forma semelhante a esta

$$\cos^2\hat{\mathrm{B}} + \mathrm{sen}^2\hat{\mathrm{B}} = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2\hat{\mathrm{B}}}{\mathrm{sen}^2\hat{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{sen}^2\hat{\mathrm{B}}}{\mathrm{sen}^2\hat{\mathrm{B}}} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\hat{\mathrm{B}}} \Rightarrow \cot^2\hat{\mathrm{B}} + 1 = \csc^2\hat{\mathrm{B}}.$$

Com isto pode ser resolvido o problema que deu início ao estudo de trigonometria no triângulo retângulo.

Resolução 3. *Para ser resolvida esta situação-problema, será feito uso dos conhecimentos das relações trigonometricas em um triângulo retângulo, em particular a tangente de um ângulo como a seguir,*

$$\tan 30° = \frac{h}{5,5} \Rightarrow h = 5,5.\tan 30° \Rightarrow h = 5,5.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h \cong 3,1.$$

Ou então poderia ter sido utilizado o ângulo de 60°

$$\text{tg}60° = \frac{h}{1,8} \Rightarrow h = 1,8.\text{tg}60° \Rightarrow h = 1,8.\sqrt{3} \Rightarrow h \cong 3,1.$$

3.3 Trigonometria em um Triângulo Qualquer

Nesta secção será apresentado a trigonometria em um triângulo qualquer, em especial a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, para demonstrar tais leis, será utilizado os conceitos apresentados até agora, utilizados em triângulos retângulos.

3.3.1 Lei dos Senos

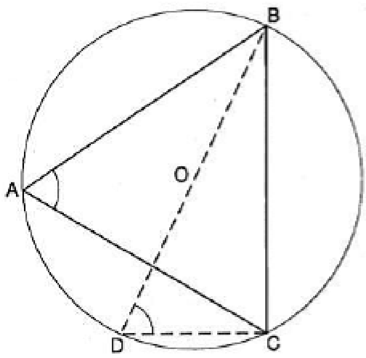
Nesta subsecção será apresentado a lei dos Senos, assim como sua demonstração e aplicações, e para motivar tal estudo, será utilizado uma situação-problema.

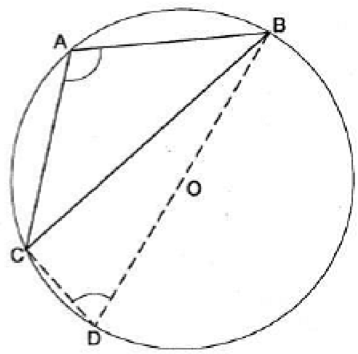
Problema 4. *A figura mostra o trecho de um rio onde se deseja construir uma ponte AB. De um ponto P, a 100m de B, mediu-se o ângulo APB = 45º e do ponto A, mediu-se o ângulo PAB = 30º. Calcular o comprimento da ponte.*

Qualquer que seja o triângulo ABC, têm-se:

$$\frac{\text{sen}\hat{A}}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen}\hat{C}}{\overline{AB}}.$$

Prova 6. *Considere o círculo que circunscreve o triângulo ABC. Seja 0 o seu centro e R o seu raio. Considere o diâmetro que tem B como extremidade.*





Seja D a sua outra extremidade. Se os pontos A e D estiverem de um mesmo lado da reta BC, então os ângulos $\mathsf{B\hat{D}C}$ *e* $\mathsf{B\hat{A}C}$ *são iguais por serem ângulos inscritos correspondentes a um mesmo arco. Se os pontos A e D estiverem em lados distintos da reta BC então os ângulos* $\mathsf{B\hat{D}C}$ *e* $\mathsf{B\hat{A}C}$ *são suplementares já que correspondem a arcos que se completam para formar o círculo. Em ambos os casos tem-se que*

$$sen\hat{\mathsf{D}} = sen\hat{\mathsf{A}}.$$

Conseqüentemente

$$\overline{\mathsf{BC}} = 2Rsen\hat{\mathsf{A}}.$$

(Observe que aqui utilizamos o fato de que o triângulo BCD é retângulo). De forma análoga demonstra-se que

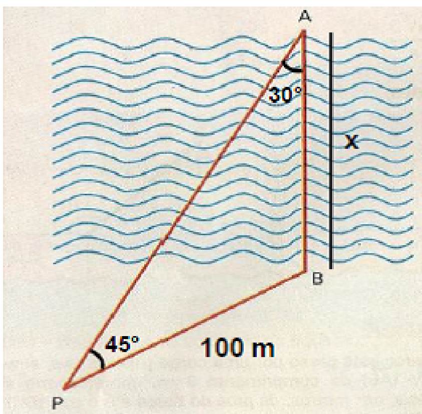
$$\overline{\mathsf{AB}} = 2R.sen\hat{\mathsf{C}} \ e \ \overline{\mathsf{AC}} = 2R.sen\hat{\mathsf{B}}.$$

Comparando-se as três fórmulas obtidas conclui-se que

$$\frac{\mathrm{sen}\hat{\mathsf{A}}}{\overline{\mathsf{BC}}} = \frac{\mathrm{sen}\hat{\mathsf{B}}}{\overline{\mathsf{AC}}} = \frac{\mathrm{sen}\hat{\mathsf{C}}}{\overline{\mathsf{AB}}} = \frac{1}{2R}.$$

Fica assim demonstrado este teorema.

ção Inicialmente, vamos colocar os dados no triângulo e identificar o que se pretende calcular.



Aplicando a Lei dos senos, temos:
$\dfrac{x}{\mathrm{sen}45°} = \dfrac{100}{\mathrm{sen}30°} \Rightarrow x\mathrm{sen}30° = 100\mathrm{sen}45° \Rightarrow x\dfrac{1}{2} = 100\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 100\sqrt{2}$. O comprimento da ponte é $100\sqrt{2}$.

3.3.2 Lei dos Cossenos

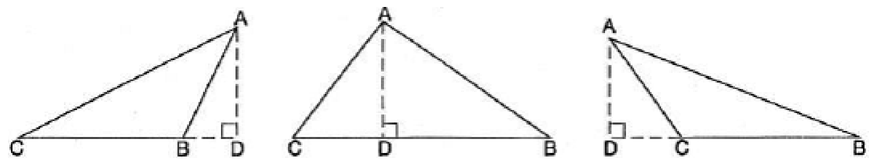
Problema 5. *A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-dágua a 50m de distância. A casa está a 80m de distância da caixa-dágua e o ângulo formado pelas direções caixa-dágua-bomba e caixa-dágua casa é de 60. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários?*

Em um triângulo ABC temos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\ \overline{BC}\cos\hat{C}.$$

Prova 7. *Se o ângulo $\hat{C}$ for reto então a afirmação acima é exatamente o teorema de Pitágoras. Podendo portanto supor que $\hat{C}$ não é um ângulo reto. Tracemos a altura do vértice A. Como $\hat{C}$ não é um ângulo reto então o pé desta altura, que designaremos por D, não coincide com o ponto C. Se D coincidir com o ponto B então o triângulo ABC é um retângulo tendo $\hat{B}$ como ângulo reto. Nesta caso, $\overline{AC}\cos\hat{C} = \overline{BC}$ e o resultado acima é uma decorrência imediata do teorema de Pitágoras. Assim podemos supor que B, C e D são pontos distintos. Como ADB e ADC são triângulos retângulos tem-se*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \text{ e } \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2.$$



Logo subtraindo-se estas duas equações obtém-se

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2$$

Agora iremos substituir o termo $\overline{BD}^2$ desta equação. Para isso teremos que considerar três possibilidades.

a) C esta entre B e D, neste caso tem-se $\overline{DC} + \overline{BC} = \overline{BD}$. Substituindo-se $\overline{BD}$ por $\overline{DC} + \overline{BC}$

desenvolvendo-se o quadrado e simplificando-se os termos, a equação acima torna-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\ \overline{BC}\ \overline{DC}$$

Observe que $\overline{DC} = \overline{AC}cos(A\hat{C}D)$ *e que* $cos(180° - A\hat{C}D) = -cos(A\hat{C}B)$. *Como* $A\hat{C}B$ *é exatamente o ângulo* $\hat{C}$ *do triângulo ABC, o resultado fica demonstrado neste caso.*

b) D está entre C e B, neste caso tem-se $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ *e, portanto* $\overline{BD} = \overline{DC} - \overline{BC}$. *Substituindo-se como no caso anterior este valor de BD, obtém-se*

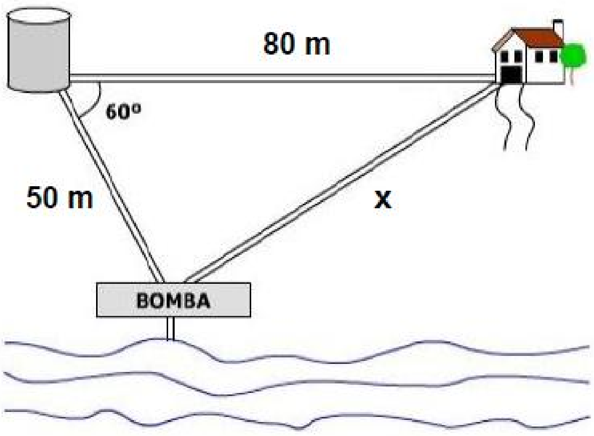
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\ \overline{BCDC}$$

Observando-se que $\overline{DC} = \overline{AC}cos\hat{C}$ *obtém-se o resultado.*

c) B esta entre C e D, este caso é tratado de forma semelhante e é deixado a cargo do leitor complementar a demonstração.

Retomando a situação problema inicial para que a mesma possa ser resolvida fazendo uso do que foi apresentado sobre a Lei dos Cossenos.

Resolução 4. *A situação pode ser representada pelo esquema:*



Pela lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2.50.80.\cos 60°$$
$$x^2 = 2500 + 6400 - 8000.0,5$$
$$x^2 = 4900$$
$$x = 70m$$

São necessários 70 metros de encanamento para bombear água diretamente do rio até a casa.

3.4 Trigonometria no Círculo

Considere um Círculo de Centro $\hat{O}$ e nele um diâmetro AB. Fixamos nossa atenção em um dos semicírculos determinados por AB. Tome um ponto qualquer C deste semicírculo e indique por α o ângulo $C\hat{O}B$. Trace a partir de $\hat{C}$, uma perpendicular à reta AB. Seja $\hat{D}$ o pé desta perpendicular.

Chama-se de Seno do ângulo α ao quociente $\overline{CD}/\overline{OC}$. O seno do ângulo α é presentada por: senα. Observe que, de acordo com esta definição tem-se que:

$$\text{sen}0° = 0, \text{ sen}90° = 1 \text{ e sen}180° = 0$$

Define-se o cosseno do ângulo α como o quociente $\overline{OD}/\overline{OC}$ quando o ângulo α é agudo. Se o ângulo α é obtuso, o cosseno é definido como o valor negativo deste quociente, isto é -$\overline{OD}/\overline{OC}$. Representa-se o cosseno do ângulo α por: cosα. Com a definição tem-se que:

$$\cos 0° = 1, \cos 90° = 0 \text{ e } \cos 180° = -1.$$

Chama-se de tangente do ângulo α ao quociente

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

não sendo esta função definida se $\alpha = 90°$.

Proposição 2. *Os valores do seno e do cosseno de um ângulo independem do semicírculo utilizado para definí-los.*

Prova 8. *considerando um outro círculo de centro O' e neste um diâmetro A'B'. Considerando um ponto C' sobre o círculo de modo que o ângulo C'ÔB' seja igual ao ângulo* α *e portanto igual a CÔB. Considere o ângulo COD e C'O'D' onde D e D' são os pés das perpendiculares baixadas às retas AB e A'B', respectivamente a partir dos pontos C e C'. Como* $C\hat{D}O$ *e* $C'\hat{D}'O'$ *são ângulos retos e já sabemos que* $C\hat{O}B = C'O'B'$*, enquanto que os triângulos considerados são semelhantes. Portante teremos*

$$\frac{\overline{C'O'}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{OD}}.$$

Como consequência,

$$sen\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O'}} \text{ e } cos\alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{C'D'}}.$$

Isto prova a afirmação.

Teorema 5. *Qualquer que seja o ângulo* α *tem-se:*

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Prova 9. *para* α *igual a* $0°$, $90°$ *e* $180°$, *a afirmação a cima é comprovada pela substituição direta dos valores do seno e do cosseno correspondente. Nos outros casos, considere o triângulo* $O\hat{C}B$ *da figura acima. Tem-se então:*

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = \left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}\right)^2 = \frac{\overline{OD}^2 + \overline{CD}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OC}^2} = 1.$$

Onde fez-se o uso do Teorema de Pitágoras na penúltima igualdade.

(Fórmulas de Redução) Se α é um ângulo agudo, então

a) sen(90° - α) = cosα

b) cos(90° - α) = senα

c) tg(90° - α) = 1/tg

Prova 10. *Sejam C e C' pontos de um semicírculo de extremidades A e B, tais que* $\mathsf{C\hat{O}B}=\alpha$ *e* $\mathsf{C'\hat{O}B}=90°-\alpha$. *Sejam D' e D' os pés das perpendiculares baixadas à reta AB a partir de C e C', respectivamente. Observe que, como* $\mathsf{C'\hat{O}B} = 90° - \alpha$, *então* $\mathsf{O\hat{C'}D'} = \alpha$. *Logo os triângulos COD e OD'C' são congruentes (OC=OC',* $\mathsf{C\hat{D}O}=90°$ *e* $\mathsf{C\hat{O}D}=\mathsf{O\hat{C'}D'}=\alpha$*)e portanto,*

$$\frac{\overline{C'D'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}.$$

Segue-se que:

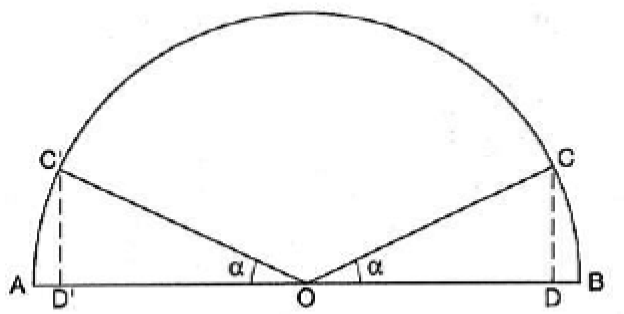
$$sen(90° - \alpha) = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = cos\ \alpha,$$
$$cos(90° - \alpha) = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = sen\ \alpha.$$

Teorema 6. *Qualquer que seja* α *tem-se:*

a) $sen(180° - \alpha) = sen\alpha.$

b) $cos(180° - \alpha) = -cos\alpha.$

Prova 11. *Quando* α *é igual a 0°, 90° ou 180° a afirmação acima é comprovada por substituição direta dos valores do seno e cosseno correspondentes. Nos outros casos, considere pontos C e C' no semicírculo, de sorte que* $\mathsf{C\hat{O}B} = \alpha$ *e* $\mathsf{C'\hat{O}B}$ *= 180° -* α. *Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas dos pontos C e C' à reta AB.*



A congruência dos triângulos OCD e OC'D' nos fornece

$$CD = C'D' \text{ e } DO = D'O,$$

como consequência imediata tem-se que

$$sen(180° - \alpha) = \frac{\overline{\mathsf{C'D'}}}{\overline{\mathsf{C'O}}} = \frac{\overline{\mathsf{CD}}}{\overline{\mathsf{CO}}} = sen\alpha$$
$$e\ cos(90° - \alpha) = \frac{\overline{\mathsf{DO'}}}{\overline{\mathsf{C'D}}} = \frac{\overline{\mathsf{DO}}}{\overline{\mathsf{CO}}} = cos\alpha.$$

Como $\alpha \neq 90°$ *então* α *ou (180° -* α*) é obtuso e o outro é agudo. Por isso cos*α *e cos(180° -* α*) têm sinais opostos. Logo cos(180° -* α*) = -cos*α.

As definições de seno, cosseno e tangente dadas no inicio do capítulo permitem concluir imediatamente as seguintes fórmulas relacionando os lados de um triângulo e os seus ângulos agudos.

Proposição 3. *Em um triângulo retângulo ABC, de ângulo reto* $\hat{\mathsf{C}}$*, têm-se*

$$\overline{\mathsf{BC}} = \overline{\mathsf{AB}} sen\hat{\mathsf{A}},\ \overline{\mathsf{AC}} = \overline{\mathsf{AB}} cos\hat{\mathsf{A}} \text{ e } \overline{\mathsf{BC}} = \overline{\mathsf{AC}} tg\hat{\mathsf{A}}.$$

Uma conseqüência desta proposição é que, se for conhecido um ângulo e um lado de um triângulo retângulo é possivel calcular a medida de seus outros dois lados, supondo-se que sejam conhecidos como calcular as funções seno, cosseno e tangente de um ângulo. Atualmente, uma máquina de calcular razoavelmente simples, possui círculos que calculam estas funções com aproximação correta até a quarta ou quinta casa decimal, o que é mais do que suficiente para a grande maioria dos cálculos. Pode-se, no entanto, fazer uso de uma tabela de funções trigonoméricas obtida facilmente em qualquer compêndio sobre trigonometria.

Proposição 4.

a) $\operatorname{sen}45° = 1/\sqrt{2}$, $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}45° = 1$

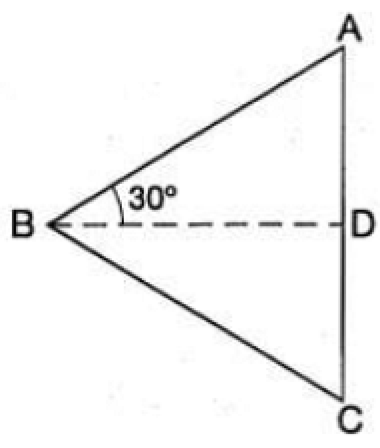
b) $\operatorname{sen}30° = 1/2$, $\cos 30° = \sqrt{3}/2$ e $\operatorname{tg}30° = 1/\sqrt{3}$

Prova 12.

(a) Construa um triângulo retângulo ABC tendo ângulo reto $\hat{C}$, *e tendo AC = BC. Têm-se então que* $\hat{A} = \hat{B} = 45°$ *e, utilizando-se o teorema de Pitágoras,* $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}/\sqrt{2}$. *Logo* $\operatorname{sen}45° = \dfrac{\overline{AB}/\sqrt{2}}{\overline{AB}} = 1/\sqrt{2}$

Da mesma forma obtém-se o valor de cos45°. O valor da tangente é obtido pela simples divisão dos valores do seno e cosseno.

(b) Construa um triângulo equilátero ABC. Todos os seus ângulos medem 60° e todos os seus lados têm o mesmo comprimento α.



Considera a altura baizada do vértice B ao lado AC e seja D o pé desta altura. Os dois triângulos formados são congruentes e $\overline{DA} = \overline{DC} = \alpha/2$ *Aplicando o teorema de Pitágoras ao ângulo ABC concluimos que* $\overline{BD} = \alpha\sqrt{3}/2$. *Observe que o ângulo* $A\hat{B}D$ *mede 30°, logo*

$$\begin{aligned} sen30^\circ &= \frac{\alpha/2}{\alpha} = 1/2 \\ cos30^\circ &= \frac{\alpha\sqrt{3}/2}{\alpha} = \sqrt{3}/2 \\ tg30^\circ &= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Com esta proprosição os resultados podem agora facilmente determinar os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 60°, 120°, 135° e 150°.

3.5 Função Trigonométrica

Nesta secção será apresentado as funções trigonométricas, porém será limitado a apresentação apenas das funções seno e cosseno, onde serão estudadas suas aplicações como modelo de fenômenos periódicos, levando em conta sua periodicidade e sua imagem. Para motivar será apresentada uma situação problema que faz uso dos conceitos de funções trigonométricas para ser resolvida.

Sendo que já é conhecido como se obter valores de senos e cossenos para números reais, podem ser definidos agora como funções trigonométricas. Essencialmente, é apenas uma formalização maior em torno do que foi visto nas secções anteriores, agora sob o ponto de vista de funções. Assim, será estudado a função seno e a função cosseno. Historicamente, o primeiro indício do tratamento funcional da trigonometria surgiu em 1635, quando Gilles Personne Roberval(1602-1675) fez pela primeira vez um esboço de uma senoide. Porém essa área só avançou efetivamente no século XIX, com Jean-Baptiste Joseph Fourier(1768-1830) e seus estudos sobre os movimentos periódicos.

Problema 6. *Suponha que a expressão $P = 100 + 20x\text{sen}(2\pi x t)$, descreve de maneira aproximada a pressão sanguínea P, em milímetros de mercúrio, de uma certa pessoa durante um teste. Nessa expressão, t representa o tempo em segundos. A pressão oscila entre 20 milímetros de mercúrio acima e abaixo dos 100 milímetros de mercúrio, indicando que a pressão sanguínea da pessoa é 120 por 80.Determine:*

a) A frequência cardíaca desta pessoa.

b) Dê o valor da pressão sanguínea dessa pessoa em t = 0s; t = 0,75s.

c) Em que momento, durante o primeiro periodo, a pressão sanguínea atingiu seu mínimo e qual foi este mínimo.

d) Em que momento, durante o primeiro periodo, a pressão sanguínea atingiu seu máximo e qual foi este máximo.

3.5.1 A Função Seno e Função Cosseno

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se o período da função f. As funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π. Diz-se ainda que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se se tem $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, a função f chama-se ímpar.

Para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$E(t) = (\cos t; \mathrm{sen} t)$$

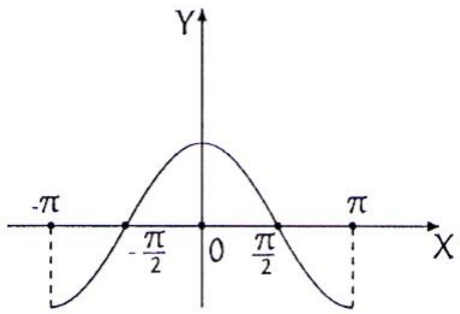
e

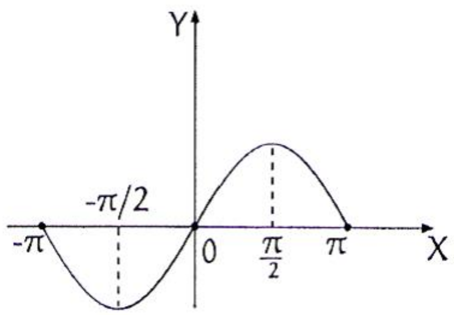
$$E(-t) = E(\cos(-t); \mathrm{sen}(-t)).$$

Mas, como já foi visto, quando $E(t) = (x; y)$ tem-se $E(-t) = (x; -y)$. Isto significíca que $\cos(-t) = \cos t$ e $\mathrm{sen}(-t) = -\mathrm{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar. De modo análogo, as outras quatro relações estabelecidas anteriormente mostram que, para todo $t \in \mathbb{R}$, valem:

$$\cos(t+\pi) = -\cos t;\ \mathrm{sen}(t+\pi) = -\mathrm{sen} t;$$
$$\cos(t+\pi/2) = -\mathrm{sen} t;\ \mathrm{sen}(t+\pi/2) = \cos t;$$
$$\cos(\pi/2-t) = \mathrm{sen} t;\ \mathrm{sen}(\pi/2-t) = \cos t;$$
$$\cos(\pi-t) = -\cos t;\ \mathrm{sen}(t+\pi) = \mathrm{sen} t.$$

As figuras mostram os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \mathrm{sen} x$





Alguns valores particulares das funções seno e cosseno podem ser obtidos mediante argumentos geométricos, alguns dos quais são interessantes exercícios, especialmente quando se usam as fórmulas de adição, que estabeleceremos a seguir. Do ponto de vista numérico, entretanto, é claro que o modo mais eficiente de obter os valores dessas funções é usar uma calculadora, principalmente uma que opere com radianos e com graus.

Independentemente de calculadoras, é muito conveniente que se saiba, sem pensar muito, quais os valores de t que satisfazem as equações:

$$\begin{gathered}\operatorname{sen} t = 0; \cos t = 0;\\ \operatorname{sen} t = 1; \cos t = 1;\\ \operatorname{sen} t = -1; \cos t = -1;\\ \operatorname{sen} t = \cos t;\\ \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}; \cos t = \frac{1}{2}\end{gathered}$$

e outras semelhantes.

3.5.2 Período e Imagem de uma Função Trigonométrica

Dada Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, do tipo $f(x) = a + b\operatorname{sen}(m.x + n)$ ou do tipo $f(x) = a + b\cos(m.x + n)$, Sendo que elas são periódicas pode ser calculado o periodo da função encontrando o menor valor a ser somado com x afim de que, $f(x + T) = f(x)$, daí segue que:

$$\begin{gathered}f(x+T) = f(x)\\ a + b.\operatorname{sen}[m.(x+T)+n] = a + b.\operatorname{sen}(m.x+n)\\ sen[m.(x+T)+n] = sen(m.x+n)\\ m.x + m.T + n = m.x + n + 2.k.\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\end{gathered}$$

sendo que deve ser encontrado o menor valor de T, então deve ser utilizado o menor valor de k, logo substituindo, $K = 1$, temos,

$$T = \frac{2.\pi}{|m|}.$$

A função cosseno possui o mesmo periodo e a demonstração é análoga.

Para o cálculo da Imagem, será feito uso de informações que foram apresentadas nas secções anteriores, pois sendo que:

$$-1 \leqslant \text{sen}(x) \leqslant +1;$$
$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant +1$$

então, substituindo convenientemente os valores mínimo e máximo assumidos pelo sen(x) e pelo $\cos(x)$, segue que,

$$I = [(a - b); (a + b)]$$

Agora retornaremos à situação-problema que nos motivou a tal estudo.

Resolução 5. *a) Para o cálculo da frequência cardiaca, basta saber qual o periodo da função, tempo necessário para cada batimento, e a seguir calcular quantos batimentos são realizados em 1(hum) min.*

$$T = \frac{2.\pi}{|m|} \Rightarrow T = \frac{2.\pi}{2.\pi} \Rightarrow T = 1s,$$

logo a frequência cardiaca é de 60bpm(batimentos por minuto.

b)

$$f(0) = 100 + 20.\text{sen}(2.\pi.0) \Rightarrow f(0) = 100 + 20.\text{sen}(0)$$
$$\Rightarrow f(0) = 100 + 0 \Rightarrow f(0) = 100mmhg$$
$$f(0,75) = 100 + 20.\text{sen}(2.\pi.0,75) \Rightarrow f(0,75) = 100 + 20.\text{sen}(\frac{3}{2}.\pi)$$
$$\Rightarrow f(0,75) = 100 + 20.(-1) \Rightarrow f(0,75) = 80mmhg.$$

c) O valor mínimo atingido pela pressão sanguinea pode ser encontrado calculando o limite inferior da imagem.

$$a - b = 100 - 20 = 80mmhg$$

e a função assumirá este valor quando,

$$\text{sen}(2.\pi.x) = -1 \Rightarrow 2.\pi.x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0,75s.$$

d) O valor máximo atingido pela pressão sanguínea pode ser encontrado calculando o limite superior da imagem.

$$a + b = 100 + 20 = 120mmhg$$

e a função assumirá este valor quando,

$$\text{sen}(2.\pi.x) = +1 \Rightarrow 2.\pi.x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0,25s.$$

Capítulo 4

Metodologia

0,6Nesta parte do trabalho será exposta a metodologia utilizada na pesquisa, sendo descritos o Campo da Pesquisa, o instrumento da pesquisa e o método de análise dos dados.

4.1 Descrição do Campo de Pesquisa

0,6O trabalho consistiu de uma pesquisa de campo, de cunho experimental, feita através de um estudo de caso com 16 alunos do segundo ano do Curso Tecnico em Agropecuária Integrado ao Médio do IFTO - Campus Araguatins. Esta pesquisa tem caracter qualitativa e quantitativa e subsidiada pela teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

4.2 Descrição dos Instrumentos de Pesquisa

0,6Primeiramente foi realizada uma pesquisa com o professor da disciplina de Topografia, para verificar quais as dificuldades que os alunos tinham na disciplina de topografia, pelo fato de não possuirem em sua estrutura cognitiva, invariantes operatórios, suficientes para o entendimento da topografia, ou seja, campos conceituais da trigonometria.

Em um segundo momento, foi realizada uma verificação de conhecimentos prévios através de um teste contendo 10(dez) questões, para verificar realmente quais eram os conceitos que os alunos traziam em sua estrutura cognitiva, foi verificado a existência de conceitos relacionados à: semelhança de Triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria no triângulo retângulo e em um triângulo qualquer, lei dos senos e lei dos cossenos, trigonometria no circulo, construção de gráficos trigonométricos e entendimento de modelos de fenômenos periódicos.

Em seguida os alunos foram submetidos a uma oficina sobre Trigonometria, onde foi necessário incluir alguns tópicos de geometria que seriam necessários para um bom entendimento dos campos conceituais da trigonomatria, a começar por semelhança de triângulos, que por si só já é uma ferramenta importante para o calculo de distâncias inacessíveis como propões os PCN -Matemática.

No 2º dia foram demonstradas as relações metricas no triângulo retângulo, as quais foram demonstradas com uso das semelhanças de triângulos; sempre fazendo com que os alunos explicitem os invariantes operatórios.

No 3º dia foram trabalhados com os alunos a trigonometria no trângulo retângulo, neste momento é muito importante para o professor, dar a oportunidade dos alunos explicitarem seus invariantes operatórios, e incluir na sua estrutura cognitiva alguns esquemas que antes não tinham e construção de outros apartir de outros já existentes. Importante lembrar que neste momento os alunos tiveram seu primeiro contato com a definição de seno, cosseno e tangente, que neste momento ainda não fora uma definição que ganhasse sentido ainda para eles, mesmo que eles soubessem usá-lo em situações - problemas.

No 4º dia, como complemento do 3º dia foi apresentado aos alunos como encontrar as relações trigonometricas fundamentais dos ângulos notáveis, a saber: $0°$,$30°$,$45°$,$60°$,$90°$. O método para que os alunos tivessem o melhor entendimeto dos valores das relações trigonometricasdas relações citadas anteriormente, foram a contrução de uma reta horizontal para o angulo $0°$, mostrando assim que o cateto oposto é 0(zero) e o cateto adjacente tem a mesma medida da hipotenusa; a construção de um triângulo equilátero dividido pela sua bissetriz, convenientemente formando dois triangulos retângulos congruentes, contendo além do angulo reto, um ângulo de $30°$ e outro de $60°$; e o uso de um quadrado dividido pela sua diagonal, dando origem a dois triângulos retângulos congruentes, que além do ângulo reto possui dois angulos $45°$ e o uso de uma reta vertical, mostrando que o cateto adjacente é 0(zero), e a medida do cateto oposto é igual a medida da hipotenusa. Por fim foram apresentados aos alunos algumas situações-problemas que envolviam trigonometria no triângulo retângulo em cálculos de distâncias inacessíveis, para que os alunos tivessem a oportunidade de colocarem em prática seus invariantes operatórios.

No 5º dia foi apresentado a RFT(Relação Fundamental da Trigonometria), fazendo uso da trigonometria no triângulo retângulo e relações métricas no triangulo retângulo.

No 6º dia foi utilizado os conceitos relacionados a trigonometria no triângulo retângulo, em particular o conceito de cosseno, para ser demonstrado a lei dos cossenos e trigonometria no triângulo retângulo, em particular o conceito de seno e conceito de medida de arco em um circulo, para demonstrar a lei dos senos, que são conceitos aplicados em um triângulo quaisquer, ampliando assim o campo conceitual da trigonometria relacionado à medidade de distâncias, sendo que agora não precisam que o triângulo seja retângulo.

No 7º dia foi apresentado aos alunos a função de Euller, mostrando a representação geométrica das relações trigonométricas no circulo, a saber: seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, cotangente. Foi utilizado o circulo para apresentar aos alunos a definição de radiano, para mostrar que a RFT é valido em todo o círculo trigonométrico, para mostrar os sinais das relações trigonométricas em cada quadrante e para mostrar aos alunos a reduçaõ dos ângulos ao 1º quadrante.

No 8º dia foi mostrado aos alunos, os fenômenos periódicos, fazendo com que eles observassem o periodo de cada fenômeno, assim como o comportamento dos valores máximo e mínimo de cada um desses fenômenos.

No 9º dia foi generalizado modelos de fenômenos periódicos, fazendo uso de funções trigonométricas, limitando apenas à função seno e função cosseno.

No 10º dia foi mostrado várias aplicações das funções trigonométricas, que eles sequer imaginavam que seriam capaz de existir.

Por fim, foi feita a verificação de conhecimentos após a oficina, através da aplicação um teste que verificou a aprendizagem dos alunos após a oficina de trigonometria e foi realizada uma entrevista com cada um deles colhendo informações sobre a opinião deles sobre o uso de situações-problemas no ensino de trigonometria, sobre a importância da trigonometria para o ensino de topografia, em particular sobre o cálculo de distâncias inacessíveis e sobre o entendimento de fenêmenos periódicos.

4.3 Descrição da Análise dos Dados

0,6A Análise dos dados se deu através da quantificação de acertos e erros das questões dos testes em forma de gráficos e tabelas, sendo as questões classificadas e divididas em quantidade de Corretas, Parcialmente Corretas e Erradas, e de uma análise qualitativa baseada nas entrevistas realizadas com cada um dos alunos onde eles expresarão suas opiniões acerca da oficina de trigonometria e suas aplicações.

Capítulo 5

Apresentação dos Resultados

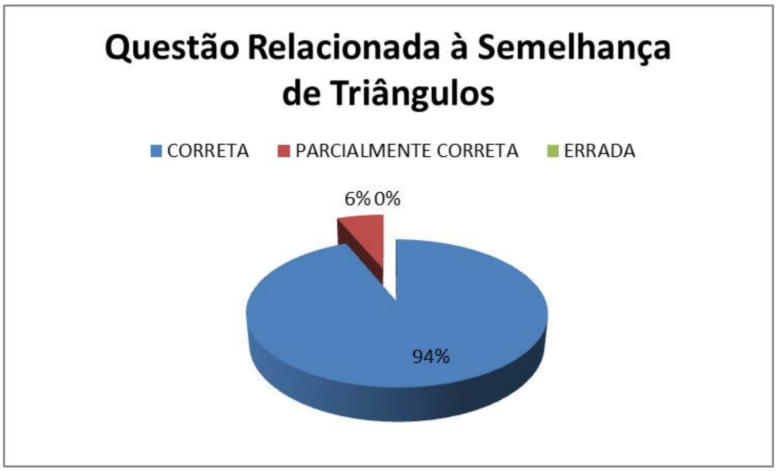
5.1 Análise da Verificação de Conhecimentos Prévios

0,6Na análise da verificação de conhecimentos prévios foi apresentada ao grupo de controle 10(dez) questões e foi verificado a existência de rupturas na estrutura cognitiva relacionado a semelhança de triângulo e teorema de pitágoras, e ausência de conhecimentos trigonométricos em todos os alunos.

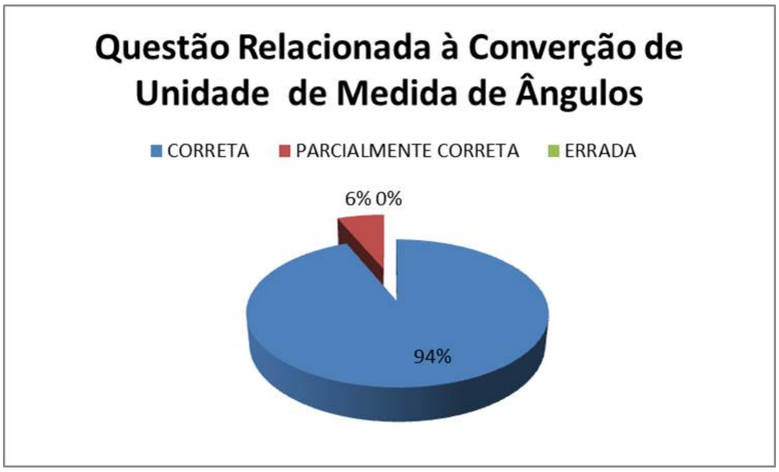
5.2 Análise dos conhecimentos após a oficina

0,6Após a Oficina de trigonometria, os alunos foram novamente submetidos à uma análise, que verificou-se o conhecimento adquirido pelos alunos e verificou-se a opinião deles acerca da oficina de trigonometria e suas aplicações.

A primeira questão, teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionado à semelhança de triângulos, foi notória o avanço, pois mostrou que nenhum aluno errou a questão e que apenas um aluno, respondeu a questão parcialmente correta, pois o aluno 9 tentou fazer uso do conceito de seno, porém o utilizou de forma errada.



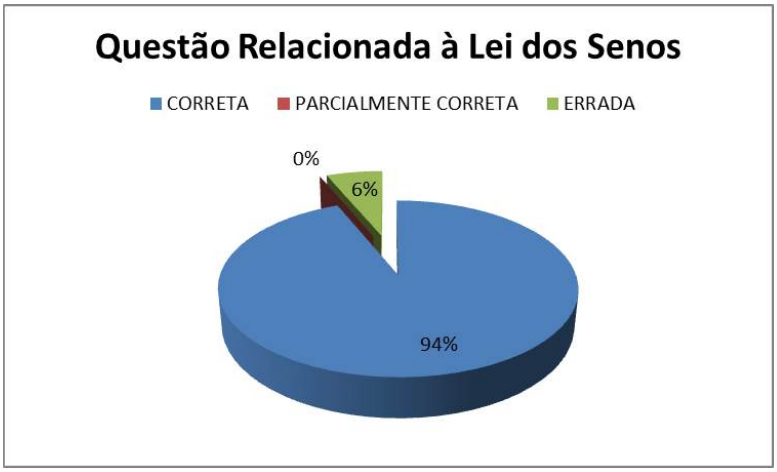
A segunda questão, teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionado à conversão de unidade de medida de ângulos, e houve um avanço significativo, visto que nenhum aluno errou a questão e que apenas o aluno 5, respondeu a questão parcialmente correta, pois teve dificuldade em considerar o π como um número.



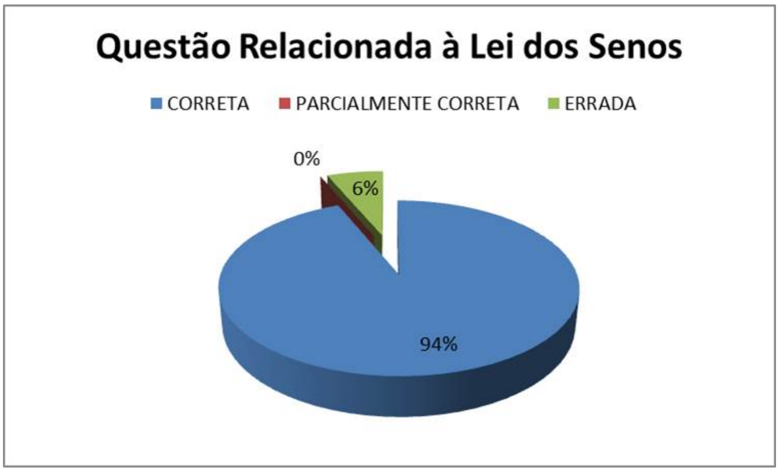
A terceira questão, teve o objetivo de verificar a aprendizagem relacionado às relações métricas no triângulo retângulo, foi gratificante pois todos os alunos acertaram a questão.

A quarta questão teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à trigonometria no triângulo retângulo, houve um avanço significativo, visto que 15 alunos acertaram totalmente a questão e que apenas 1(hum) aluno, acertou parcialmente a questão; vale a pena citar que o aluno 3 e o aluno 8, fizeram a questão pela lei dos senos.

A quinta questão teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à Lei dos senos e foi verificado um avanço significativo, visto que 15 alunos acertaram totalmente a questão e que apenas 1(hum) aluno errou a questão



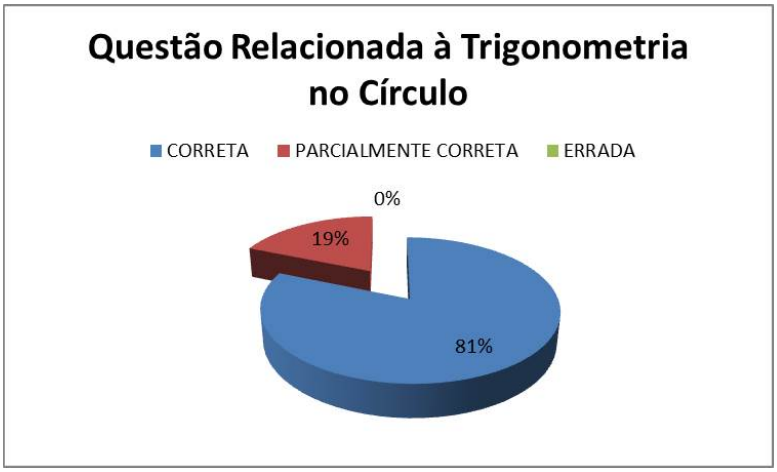
A sexta questão também teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à Lei dos senos e também foi verificado o mesmo avanço que foi verificado na quinta questão com 15 alunos acertando totalmente a questão e que apenas 1(hum) aluno errando a questão; vale a pena citar que o o aluno que errou a quinta questão foi o mesmo que errou a sexta questão, a saber, o aluno 9.



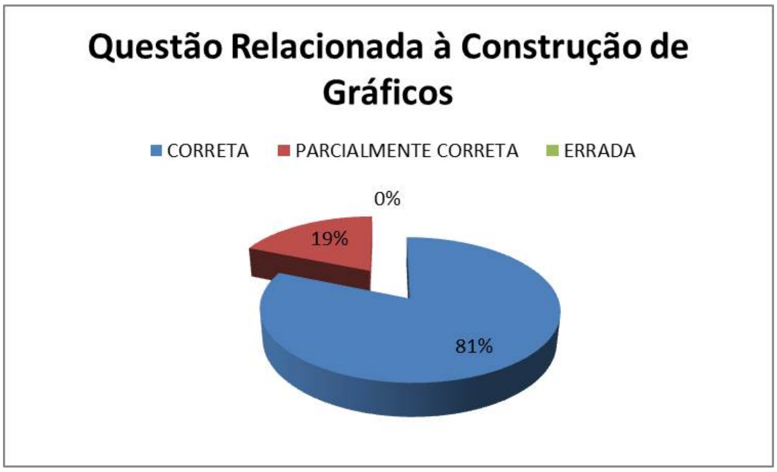
A sétima questão teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à Lei dos cossenos e foi gratificante a aprendizagem apresentada visto que todos os 16 alunos, acertaram a questão.

A oitava questão também teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à Lei dos cossenos e também foi verificado o mesmo avanço que foi verificado na sétima questão com todos os 16 alunos acertando totalmente a questão; foi muito gratificante ver que os alunos tiveram o mesmo aproveitamento, tanto em uma questão que simula uma situação problema como foi com a sétima questão quanto em uma questão mais algébrica como foi a oitava questão.

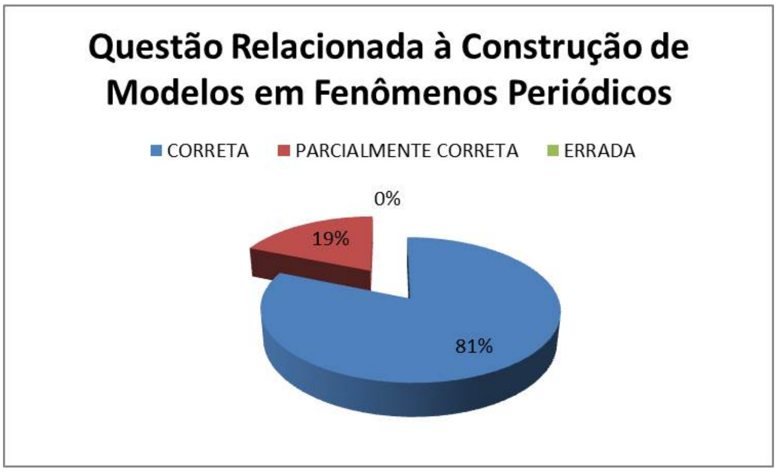
A nona questão teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à trigonometria no círculo, e foi observada uma aprendizagem significativa visto que nenhum aluno errou a questão e que 3 acertaram parcialmente a questão, sendo assim 13 alunos acertaram totalmente a questão.



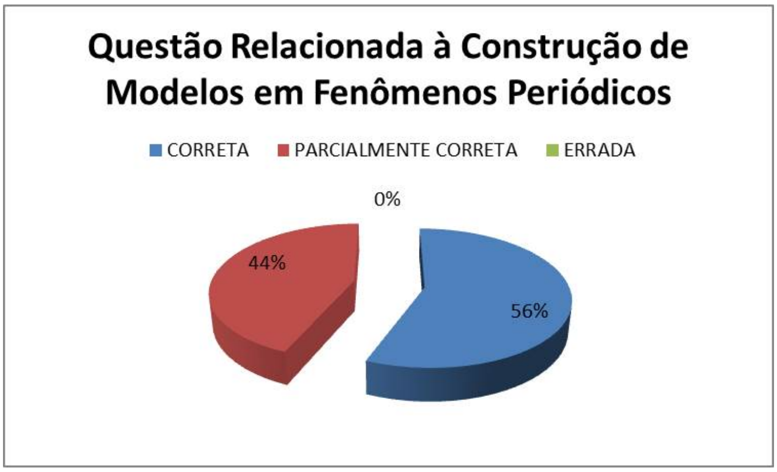
A décima questão teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à contrução de gráficos, em particular a função seno e a função cosseno, e também foi observada uma aprendizagem significativa, visto que nenhum aluno errou a questão e apenas 3 alunos acertaram parcialmente a questão, sendo assim 13 alunos acertaram totalmente a questão; os alunos que acertaram parcialmente a questão, acertaram o mínimo e o máximo , porém tiveram dificuldade no período.



A décima primeira questão teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à construção de modelos em fenômenos periódicos e foi observada uma aprendizagem significativa, visto que nenhum aluno errou a questão e apenas 3 alunos acertaram parcialmente a questão, sendo assim 13 alunos acertaram totalmente a questão; vale a pena citar que os 16 alunos conseguiram identificar o máximo e o mínimo, porém a dificuldade que foi observada, o que fez com que os 3 alunos citados anteriormente acertassem a questão parcialmente foi o cálculo dos meses em que este máximo e este mínimo ocorreram.



A décima segunda questão questão também teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à construção de modelos em fenômenos periódicos, porém acrescentava um diferencial que foi o esboço do gráfico, embora o resultado apresentendo não tenha sido tão expressivo com a das questões anteriores, sendo que 9 alunos acertaram totalmente a questão e os outros 7 alunos acertaram parcialmente a questão; foi observada uma coerência com o resultado da pesquisa, visto que os 7 alunos foram os mesmos que acertaram parcialmente as questões 10 e 11.



A décima terceira questão teve por objetivo verificar a aprendizagem relacionada à representação das relações trigonométricas no círculo e também não teve um resultado tão expressivo quanto as questões anteriores, visto que 6 alunos acertaram totalmente a questão, 4 erraram a questão e 6 acertaram parcialmente a questão; os que acertaram parcielmente a questão, consiguiram identificar a cotangente e o seno, porém tiveram dificuldade em expresar a altura do triângulo.

Quando indagado sobre sua opinião a respeito da oficina de trigonometria ele respondeu:

Aluno 1. *Primeiramente, a oficina de trigonometria foi muito esclarecedora no que se diz aos assuntos de trigonometria. Nas aulas ministradas, fora nos ensinados formas de responder certos problemas que antes nos pareciam grandes obstáculos.*

Outro aluno, quando indagado se ele acreditava que após esta oficina ele teria mais facilidade com a disciplina topografia, ele afirmou que:

Aluno 2. *Sim, antes da oficina de trigonometria eu ficava bastante perdido nas aulas de topografia, pois eu ainda não conhecia nada sobre trigonometria, e o professor de topografia ministrava as aulas como se os alunos soubessem trigonometria, por isso essa oficina de trigonometria foi de grande importância para a minha compreensão dos conteúdos de topografia.*

Um outro aluno expressando sua opinião pelo curso afirmou:

Aluno 3. *Utilizar situações problemas na trigonometria, me pareceu uma ótima forma de aprender a lógica trigonométrica, já que assim estudamos trigonometria de uma forma não mais abstrata , mais aplicamos essa ciência em problemas , o que dá mais sentido a matemática. Eu sempre tive dificuldade de estudar matemática de uma forma abstrata, ou seja sem aplicação pratica, e com a trigonometria não foi diferente até o momento em que as situações problemas apareceram, com a possibilidade de resolver problemas usando esses conhecimentos eu tive mais facilidade de compreender a utilidade da trigonometria.*

Vale a pena citar uma fala do mesmo aluno citado acima, quando indagado se ele tinha idéia das aplicações da trigonometria ele respondeu:

Aluno 4. *Eu nunca imaginei isso! Antes na minha visão, a matemática podia ser aplicada na área financeira, para se fazer cálculos de química, física ou ate mesmo para se estudar a área de terrenos e em alguns outros meios, na medicina eu imaginei que matemática também pudesse ser útil, mas medir o pôr do sol, a altura de uma onda ou volume de água em uma bomba, não eram possibilidades que eu fizesse idéia de serem possíveis. Quando soube que saber de tudo isso era possível através da trigonometria, eu fiquei com medo, pois achei que para isso era necessário muitos cálculos e de um raciocínio muito aguçado, mais no decorrer das aulas vi que era mais simples do que eu imaginava.*

Algo que foi observado durante a oficina, foi a cara de surpresa, quando pela primeira vez foi demonstrado a RFT e demais relações trigonométricas, pois eles não tinham idéia da relação entre as razões trigonométricas. Quando um Quinto aluno quando foi indagado sobre sua opinião sobre esta possibilidade que ele sequer imaginavam que existia, ele respondeu que:

Aluno 5. *Eu apreciei muito a idéia de que com uma única relação trigonométrica e seu quadrante é possível se obter as outras relações de um determinado ângulo, pois na aplicação prática de topografia por exemplo, nos encontramos em algumas situações com poucos dados para resolver alguns problemas, e sabendo que com pouca informação é possível resolver diversos problemas, por exemplo, eu quero fazer uso da lei dos cossenos, mas só conheço o seno daquele ângulo, eu aprendo que o trabalho pode se tornar bem mais simples do que parece.*

As falas dos alunos mostram quanto gratificante foi esta oficina, visto que mostram a importância do ensino de trigonometria no ensino médio por meio de situações-problemas, pois assim a trigonometria ganha sentido para os alunos.

Capítulo 6

Conclusão

Foi observado que a oficina de trigonometria que fez uso de situações-problemas subsidada pela teoria dos campos conceituais, mostrou um avanço significativo na estrutura cognitiva dos alunos, visto que foi observado que os alunos consequiram desenvolver uma boa quantidade de esquemas além da facilidade de explicitarem seus invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) fazendo uso de representações simbólicas.

De modo geral esta pesquisa nos permite concluir que a importância de se ensinar a trigonometria por meio de situações problemas e não apenas por meio de um algoritmo, ou seja por meio de uma sequência de operações, não que a teoria dos campos conceituais seja contra o uso de algoritmos, mas enfatiza que estes algoritmos devem ganhar sentido para os alunos.

Também pode ser observado que um dos fatores para os baixo rendimento na disciplina de topografia citado anteriormente, se deve ao fato de os alunos não possuirem conhecimento da trigonometria suficiente para compreender a topografia. Assim este trabalho propõe o ensino de topografia posterior ao ensino de trigonometria, para que haja melhor compreensão da mesma.

Com base nos fatos acima citados, este trabalho de pesquisa propõe o ensino de trigonometria por meio do uso de situações-problemas subsidiado pela teoria dos campos conceituais, como metodologia eficaz para cumprir o que é proposto pelos PCN-matemática, que se trata da trigonometria para o calculo de distâncias inacessíveis e para o criação de modelos de fenômenos periódicos.

Referências Bibliográficas

[1] MOREIRA, Marco Antônio,*A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, O Ensino de Ciências e a Investigação Nesta Ârea/ ANPEd*. Impressos Portão, São Leopoldo, RS, Brasil, 2004.

[2] LIMA, E.L. - *Medida e Forma em Geometria.* Coleção Professor de Matemática. Quarta edição, Rio de Janeiro-RJ, 2009.

[3] LIMA, E. L., CARVALHO, P.C.P. , WAGNER, E., MORGADO, A.C., *A Matemática do Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática, nona edição, SBM, Rio de Janeiro - RJ, Vol.01, 2006.

[4] BARBOSA, J. L., MARQUES, *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, nona edição, SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2006.

[5] LIMA, E. L., CARLHO, P.C.P. , WAGNER, E., MORGADO, A.C., *Temas e Problemas Elementares*. Coleção do Professor de Matemática, segunda edição, SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2006.

[6] BOYER, Carl B., *História da Matemática*. 2ª edição, Editora Edgard Blücher, São Paulo - SP, 1996.

[7] GARBI, Gilberto G., *A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 2ª ed. rev. e ampl., São Paulo, Editora Livraria da Física, 2007.

[8] EVES, Howard - *Introdução a História da Matemática*. 5ª ed., Campinas - SP, Editora Unicamp, 2011.

[9] BRASIL. MEC. SEF.- *Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* Brasília-1999.

Capítulo 7

Apêndices

7.1 Verificação de Conhecimentos Prévios

1- (SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS) Um obelisco de 12 m de altura projeta, num certo momento, uma sombra de 4,8 m de extensão. Calcule a distância máxima que uma pessoa de 1,80 m de altura poderá se afastar do centro da base do obelisco, ao longo da sombra, para, em pé, continuar totalmente na sombra. Faça a representação geométrica.

2- (CONVERSÃO DE UNIDADE DE MEDIDAS DE ÂNGULOS) Faça o que se pede:

a) Conversão $225°$ em radianos

b) Converta $3\pi/4$ rad em graus

3- (RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO) Dado um triângulo retângulo com catetos medem 9 e 12, determine para este triângulo. Obs: faça a representação geométrica.

a) Medida da Hipotenusa.

b) Altura do triângulo relativa à hipotenusa.

c) Projejão dos catetos sobre a hipotenusa.

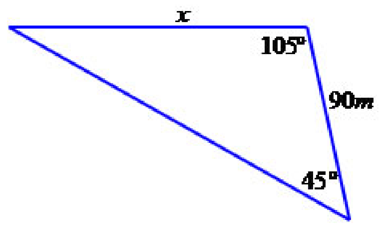
4- (TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO) Uma escada de 2 m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Sabendo que a escada faz $30°$ com a horizontal, faça o que se pede:

a) Faça a representação geométrica.

b) Determine a distância do topo da escada ao chão.

c) Determine a distância da base da escada à parede

5- (LEI DOS SENOS) No triângulo a seguir temos dois ângulos, um medindo 45º, outro medindo 105º, e um dos lados medindo 90 metros. Com base nesses valores determine a medida de x.



6- (LEI DOS COSSENOS)Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O co-seno do maior ângulo de T é:

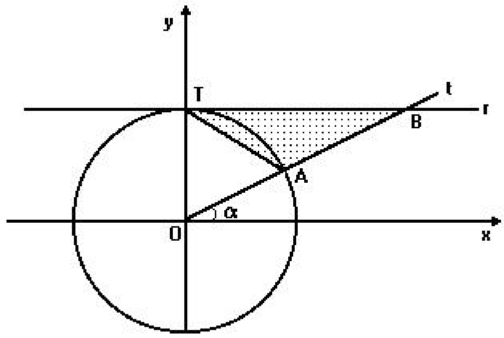
7- (TRIGONOMETRIA NO CÍRCULO)Sabendo que sen x = 0,6 e que 90º ¡ x ¡ 180º, determine o cos x, tg x, sec x, cosec x e a cotag x.

8- (CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS)Construa o gráfico das funções a seguir, determinando a seguir: o domínio, a imagem e o período de cada uma delas.

a) f(x) = 2+ 3sin(2x) b) f(x) = 1+ 2cos(x)

9- (CONSTRUÇÃO DE MODELOS EM FENÔMENOS PERIÓDICOS)Uma bomba de água aspira e expira água a cada três segundos. O volume de água da bomba varia entre um mínimo de 2 litros e um máximo de 4 litros. Determine a função do tipo y = a + b sen (m.t) que represente o volume (y) de água na bomba, em função do tempo (t). obs: faça um esboço do gráfico.

10- (REPRESENTAÇÃO DAS RELAÇÕES TRIGONOMETRICAS NO CÍRCULO)Na figura a seguir, a reta r passa pelo ponto T = (0, 1) e é paralela ao eixo Ox. A semi-reta Ot forma um ângulo α com o semi-eixo Ox ($0° < \alpha < 90°$) e intercepta a circunferência trigonométrica e a reta r nos pontos A e B, respectivamente A área do ΔTAB, como função de α, é dada por:



a) (1-sin α).(cos α)/2

b) (1-cos α).(sin α)/2

c) (1-sin α).(tan α)/2

d) (1-sin α).(cot α)/2

e) (1-cos α).(cot α)/2

7.2 Verificação de Conhecimentos Após o Curso

1- (SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS) Um prédio projeta, num certo momento, uma sombra de 6 m de extensão, no mesmo instante que uma pessoa de 1,8m projeta uma sombra de 0,6m. Calcule a altura do prédio. Faça a representação geométrica.

2- (CONVERSÃO DE UNIDADE DE MEDIDAS DE ÂNGULOS) Faça o que se pede:

a) Conversão 315° em radianos

b) Converta $11\pi/12$ rad em graus

3- (RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO) Dado um triângulo retângulo com hipotenusa medindo 25cm e um dos catetos medindo 20cm,determine para este triângulo. Obs: faça a representação geométrica

a) Determine a medida do outro cateto.

b) Altura do triângulo relativa à hipotenusa.

c) Projejão dos catetos sobre a hipotenusa.

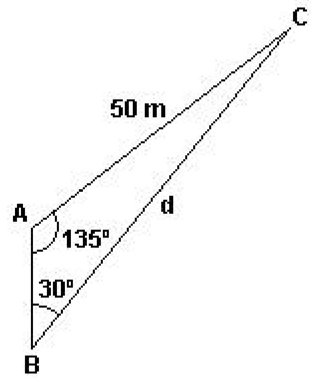
4- (TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO) Uma escada está apoiada no chão e em uma parede vertical, sabendo que a distância to topo da escada ao chão é de 2m e que a escada faz 30° com a vertical, faça o que se pede:

a) Faça a representação geométrica.

b) Determine o comprimento da escada.

c) Determine a distância da base da escada à parede.

5- (LEI DOS SENOS) Na instalação das lâmpadas de uma praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura. Assim, a distância "d" é:



a)$50\sqrt{2}$m

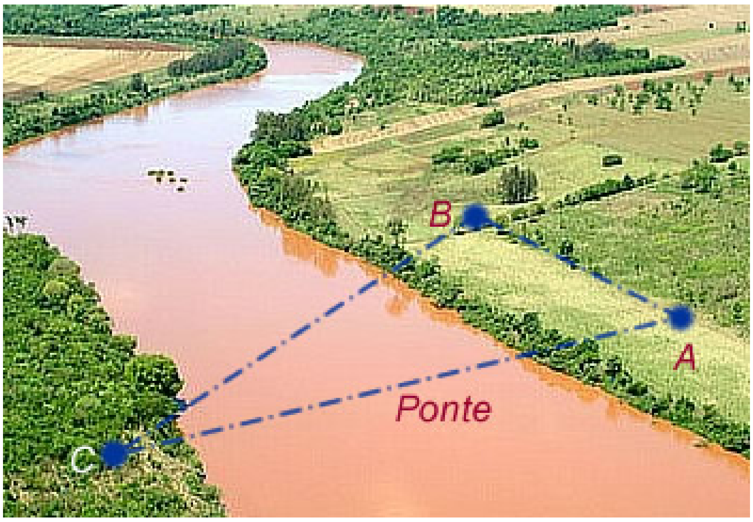
b)$50\sqrt{6}/3$m

c)$50\sqrt{3}$m

d)$25\sqrt{6}$m

e)$50\sqrt{6}$m

6- (LEI DOS SENOS)O construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos onde a ponte será construída, entretanto ele não possui nenhuma ferramenta que meça essa distância, mas ele conhece de matemática e teve a seguinte ideia. Como eu possuo uma ferramenta que calcula ângulos, conseguirei determinar o comprimento desta ponte. Com isso ele marcou um ponto A, calculou o ângulo $B\hat{A}C$ que foi igual a 85°, caminhou até o ponto B, uma distância de 2km, e calculou o ângulo ABC obtendo um ângulo de 65°. O construtor acredita que com essas informações será possível calcular o comprimento da ponte. Mostre se você também seria capaz de determinar o comprimento da ponte com estas informações.



7- (LEI DOS COSSENOS)O construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos onde a ponte será construída, entretanto, com a ferramenta que ele possui só foi possível calcular as medidas dos segmentos AB e BC, no qual o segmento AB é igual a 2km e o segmento BC 3,99km. Utilizou novamente a ferramenta de medir ângulos e obteve que o ângulo do vértice B é igual a 65°. Mostre se você também seria capaz de determinar o comprimento da ponte com estas informações.

8- (LEI DOS COSSENOS)Um triângulo T tem lados iguais a 5, 7 e 9. O co-seno do menor ângulo de T é:

9- (TRIGONOMETRIA NO CÍRCULO)Dado cos α = - 0,8 e sabendo que: $180° < \alpha < 270°$ cos α = - 0,8, determine o $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ e a $\cot\alpha$.

10- (CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS)Construa o gráfico das funções a seguir, determinando a seguir: o domínio, a imagem e o período de cada uma delas.

a) f(x) = 3+ sin(4x)

b) f(x) = 2+ cos(2x)

11- (CONSTRUÇÃO DE MODELOS EM FENÔMENOS PERIÓDICOS)Suponha que o horário do pôr do sol na cidade de Araguatins - TO, durante o ano de 2011, possa ser descrito pela função f(t)=18,5+0,75sin($2\pi/365t$) sendo t o tempo dado em dias e t =0 o dia 1ºde janeiro. Com base nessas informações, determine:

a) O período da função acima

b) O horário que o por do sol ocorreu mais cedo, e em qual mês isso ocorreu.

c) O horário que o por do sol ocorreu mais tarde, e em qual mês isso ocorreu.

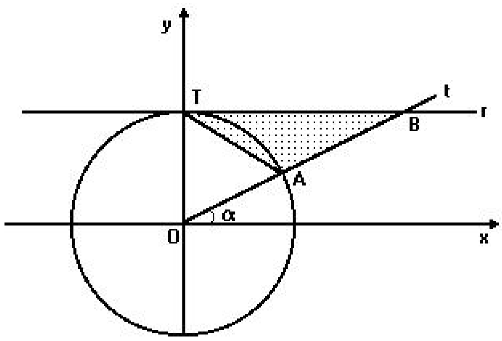
12 - (CONSTRUÇÃO DE MODELOS EM FENÔMENOS PERIÓDICOS)Suponha que a expressão P= 100 + 20 sin(2π.t), descreve de maneira aproximada a pressão sanguínea P, em milímetros de mercúrio, de uma certa pessoa durante um teste. Nessa expressão, t representa o tempo em segundos. A pressão oscila entre 20 milímetros de mercúrio acima e abaixo dos 100 milímetros de mercúrio, indicando que a pressão sanguínea da pessoa é 120 por 80. Como essa função tem um período de 1 segundo, o coração da pessoa bate 60 vezes por minuto durante o teste.

a) Dê o valor da pressão sanguínea dessa pessoa em t = 0 s; t = 0,75 s.

b) Em que momento, durante o primeiro segundo, a pressão sanguínea atingiu seu mínimo e qual foi este mínimo.

c) Esboce o gráfico

13- (REPRESENTAÇÃO DAS RELAÇÕES TRIGONOMETRICAS NO CÍRCULO)Na figura a seguir, a reta r passa pelo ponto T = (0, 1) e é paralela ao eixo Ox. A semi-reta Ot forma um ângulo α com o semi-eixo Ox ($0° < \alpha < 90°$) e intercepta a circunferência trigonométrica e a reta r nos pontos A e B, respectivamente A área do ΔTAB, como função de α, é dada por:



a) (1-sin α).(cos α)/2

b) (1-cos α).(sin α)/2

c) (1-sin α).(tan α)/2

d) (1-sin α).(cot α)/2

e) (1-cos α).(cot α)/2