UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLAUDIO CESAR BARBOSA PEREIRA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NO ENSINO MÉDIO

QUIXADÁ - CEARÁ
2023

CLAUDIO CESAR BARBOSA PEREIRA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador(a): Dr. Diego da Silva Pinheiro.

QUIXADÁ - CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Pereira, Claudio Cesar Barbosa.
Proposta de Sequências Didáticas para o Ensino de Geometria Euclidiana Plana no Ensino Médio [recurso eletrônico] / Claudio Cesar Barbosa Pereira. - 2023.
143 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Quixadá, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro.
1. geometria euclidiana plana. 2. sequências didáticas. 3. detalhamento. I. Título.

CLAUDIO CESAR BARBOSA PEREIRA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado em 20 de setembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

DIEGO DA SILVA PINHEIRO

Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Jobson de Q Ol

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará - UECE

José Danuso Rocha de Oliveira

Prof. Dr. José Danuso Rocha de Oliveira
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Aos meus pais que sempre me deram as condições necessárias para eu focar nos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e da persistência, pois foram muitos anos de tentativas até eu conseguir ingressar no mestrado pelo PROFMAT.

Aos meus pais, Maria Lúcia Barbosa Feitosa e Raimundo Antonio Luis Pereira, por terem me dado as condições necessárias para progredir nos meus estudos e por me amarem incondicionalmente e torcerem por meu sucesso.

A minha irmã, Ana Lúcia Barbosa Feitosa, minha grande amiga e apoiadora dos meus projetos.

A minha família que sempre me apoiou e acreditou no meu potencial.

Aos meus amigos, Delan Silva e Jhonata Castro, por todo o apoio, compreensão e companheirismo, e por terem sido meus companheiros de viagem em quase todas as aulas do mestrado.

Ao professor e coordenador do curso, Jobson Oliveira, por todas as contribuições feitas nesses dois anos de curso.

Ao professor do curso, Diego Sousa Rodrigues, que se tornou para mim uma inspiração sobre que tipo de profissional eu quero me tornar, amando e dominando divinamente o que faz.

Ao meu orientador, Diego Pinheiro, pelo apoio, suporte e orientações.

Aos meus colegas de curso pelos momentos compartilhados, os estudos realizados e o companheirismo.

A 7ª CREDE (Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação) por ter dado todas as condições que eu precisava para fazer o meu mestrado.

A SEDUC (Secretaria de Educação do Ceará) por investir na formação acadêmica de seus professores, firmando uma parceria com a SBM para realizar um ENA (Exame Nacional de Acesso) do PROFMAT só para docentes do estado do Ceará.

“A matemática é o alfabeto com o qual

Deus escreveu o universo”.

(Galileu Galilei)

RESUMO

Esse trabalho tem por finalidade auxiliar o professor de matemática em relação ao ensino dos principais assuntos de geometria euclidiana plana que precisam estar consolidados na mente dos alunos do ensino médio, possibilitando que os conteúdos de geometria espacial sejam bem assimilados. Esse auxílio se apresenta através da proposta de sequências didáticas bem detalhadas que buscam promover um ensino qualificado que seja capaz de alcançar um aprendizado significativo utilizando como estratégias a construção do conhecimento através do contato com material concreto e de uma linguagem acessível ao estudante. Essa pesquisa começa com um breve histórico da geometria euclidiana, passando pela explanação dos conceitos e proposições primitivas de geometria e indo até os tópicos relevantes sobre o estudo de ângulos. Prossegue com o detalhamento dos conteúdos e procedimentos mais importantes sobre figuras planas, que são os quadriláteros notáveis, triângulos e círculo, explicando seus elementos, classificações, cálculo de perímetro e área. Por fim, faz uma breve contextualização sobre o que são sequências didáticas e propõe onze produções desse tipo, que são planos de aula com detalhamento e previsão de duração de cada procedimento metodológico e com materiais concretos a serem impressos e utilizados nessas aulas.

Palavras-chave: geometria euclidiana plana; sequências didáticas; detalhamento.

ABSTRACT

This work aims to help the mathematics teacher in relation to teaching the main subjects of flat Euclidean geometry that need to be consolidated in the minds of high school students, allowing the contents of spatial geometry to be well assimilated. This aid is presented through the proposal of very detailed didactic sequences that seek to promote a qualified teaching that is capable of achieving meaningful learning using as strategies the construction of knowledge through contact with concrete material and a language accessible to the student. This research begins with a brief history of Euclidean geometry, passing through the explanation of the concepts and primitive propositions of geometry and going to the relevant topics about the study of angles. It continues with the detailing of the most important contents and procedures on plane figures, which are the notable quadrilaterals, triangles and circle, explaining their elements, classifications, calculation of perimeter and area. Finally, it briefly contextualizes what are didactic sequences and proposes eleven productions of this type, which are lesson plans with details and estimated duration of each methodological procedure and with concrete materials to be printed and used in these classes.

Keywords: plane Euclidean geometry; didactic sequences; detailing.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria está presente na vida das pessoas de formas variadas, práticas e facilmente perceptíveis. Por exemplo, no formato das coisas, na maneira de medir seus comprimentos, superfícies e/ou capacidades. Geometria uma área da matemática que, na educação básica (ensino fundamental e médio), se divide em Geometria Euclidiana Plana, Geometria Euclidiana Espacial e Geometria Analítica Plana. A Geometria Analítica Espacial está presente em cursos de nível superior apenas.

Entretanto, historicamente, o ensino de geometria se mostra um fator bastante desafiador, onde, com base em relatos de professores atuantes em sala de aula, à medida que se vai avançando nas séries do ensino fundamental e, posteriormente, do ensino médio, o nível de compreensão que os estudantes demonstram ter nessa área vem diminuindo gradativamente. Esse fato é observado através do desempenho dos alunos nas avaliações externas, ou seja, no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e no SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) a nível nacional, e no SPAECE (Sistema Permanente de Avaliação da Educação do Ceará) e na Avaliação Diagnóstica Institucional a nível estadual.

LOBATO (2019, p. 2) afirma que:

> Muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com dificuldades no aprendizado em geometria, isso acontece porque muitos professores e nem a escola estão preparados para trabalhar com esse grupo de alunos que requerem uma atenção diferenciada e necessitam de atividades que aprimorem e desenvolvam os conhecimentos, desobstruindo as barreiras existentes entre o ensino e aprendizagem.

Desse modo, faz-se necessário que os professores busquem estratégias para trabalhar a geometria de uma forma prática, permitindo que os estudantes tenham contato com os entes geométricos, indo muito além dos conceitos e do trabalho com o livro didático. Com isso, aumentam-se as possibilidades para que os alunos, ao verem sentido no que está sendo trabalhado, compreendam de fato a geometria, partindo do princípio que o interesse foi despertado.

No ensino médio, em relação ao estudo de geometria, de acordo com a BNCC, espera-se que os alunos construam e ampliem a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtenham expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos (BRASIL, 2018, p. 527).

Para que os estudantes sejam capazes de desenvolver essas habilidades, é extremamente importante que eles tenham desenvolvido outras no ensino fundamental. Se o estudante não consegue compreender como trabalhar com os entes geométricos interligados à geometria plana, não adquirirá sequer as noções básicas do estudo de geometria espacial.

Nesse contexto, o principal objetivo desse estudo é propor 11 (onze) sequências didáticas que abordem de uma forma prática, palpável e bem detalhada os principais conteúdos de geometria euclidiana plana para que os professores trabalharem no ensino médio, que darão condições para que os estudantes possam compreender e, consequentemente, desenvolver as habilidades indispensáveis para o estudo de geometria espacial, buscando fazer sentido em cada conceito e definição.

Com o intuito de apresentar um percurso lógico e subsidiar o professor sobre quais aspectos e em qual ordem ele deve se atentar ao ensinar geometria euclidiana, o presente trabalho está estruturado em três capítulos.

O primeiro capítulo é a Fundamentação Teórica, que começa fazendo um breve histórico da geometria euclidiana, traçando uma linha histórica de estudiosos que contribuíram para o surgimento desse tipo de geometria, e segue com a explicação das noções e proposições primitivas indispensáveis ao estudo da geometria citada, fechando com todos os aspectos relevantes do estudo de ângulos, partindo do princípio que é o primeiro ente geométrico na ordem proposta que combinam as noções e proposições relatadas.

O segundo capítulo traz todos os aspectos importantes no estudo de Figuras Planas que se tornam necessários para que os estudantes desenvolvam suas habilidades ao estudarem a geometria espacial. Esses aspectos partem das definições, elementos, classificações, nomenclaturas e formas de medir, e vão até os polígonos específicos (quadriláteros notáveis e triângulos), circunferência e círculo, perpassando por suas peculiaridades, como classificações e propriedades, indo até seus perímetros e áreas. Vale ressaltar que as demonstrações de todas as proposições feitas no decorrer dos tópicos foram colocadas para comprová-las de forma técnica, cabendo ao professor optar por trabalhá-las ou não em sua sala de aula.

O terceiro capítulo começa com um contexto sobre o que são sequências didáticas e como cada proposta está estruturada, enfatizando o fato de ajudar o professor no controle do tempo que ele tem disponível para trabalhar cada aula. Após isso, são apresentadas as propostas de uma forma bem detalhada, que sugerem a utilização de algumas imagens e definições presentes no primeiro e segundo capítulos e dos materiais e exercícios presentes nos anexos. É relevante salientar que a lógica dessas sequências parte do princípio que os alunos precisam ter um contato físico de forma lúdica com as figuras geométricas de modo a compreender de fato as propriedades e procedimentos, e que os professores possam promover isso sem ter muito trabalho no planejamento das aulas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Breve histórico da Geometria Euclidiana

A palavra “geometria” vem do grego *geometrein* (*geo*, “terra”, e *metrein*, “medida”), etimologicamente significando a ciência de medição da terra. Segundo GORODSKI (2009, p. 15):

> Apesar do historiador grego Heródotus (século V a.C.) ter relatado que a geometria nasceu no antigo Egito, os registros mais antigos existentes de atividades humanas nessa área dão conta de que as antigas civilizações (mesopotâmica, babilônica, hindu e chinesa) também possuíam muito conhecimento acerca dela.

Cita ainda que nos papiros, tabletes e outros documentos deixados por essas civilizações são encontradas algumas importantes relações geométricas, noções básicas sobre semelhança de triângulos e fórmulas para áreas ou volumes de várias figuras geométricas. Como esses documentos revelam casos especiais e problemas específicos, sem formulações gerais, não se sabe se essas civilizações antigas realmente tinham noção dos princípios unificadores subjacentes, pois as questões de princípios lógicos e justificativas não são mencionados e não há distinções entre resultados exatos e aproximados.

GORODSKI (2009, p. 15) relata que o filósofo, matemático e astrônomo Tales de Mileto (624 a.C. - 547 a.C.) foi considerado por fontes antigas o introdutor da geometria na Grécia e o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. Além disso, relata também que Pitágoras de Samos (569 a.C. - 475 a.C.) provavelmente encontrou Tales em suas andanças e sofreu influência dele. Por volta de 540 a. C., Pitágoras fundou, na cidade de Crotona (sul da península italiana), a Escola Pitagórica, também conhecida como Irmandade Pitagórica, que reuniu muitos discípulos interessados no estudo da aritmética, da geometria, da astronomia e da música. Pitágoras buscava compreender o universo através da aritmética e da geometria e devido às suas convicções, é considerado o primeiro matemático puro da história. Platão (427 a.C. - 347 a.C.) nasceu em Atenas, mas teve contato com a Escola Pitagórica em suas viagens. Ao retornar para Atenas, por volta de 389 a.C., fundou sua Academia e dedicou o resto da sua vida a escrever e a ensinar. Segundo uma lenda, em sua porta estava escrito: “Que ao ignorante em geometria seja proibido entrar aqui”. Platão fez pouco trabalho original em matemática, mas fez importantes contribuições que promoveram grandes aperfeiçoamentos na lógica e nos métodos geométricos.

Por fim, GORODSKI (2009, p. 16) afirma que o matemático grego Euclides (325 a.C. - 265 a.C.) provavelmente estudou na Academia de Platão e foi o fundador da escola matemática de Alexandria. SANTOS e VIGLIONI (2011, p.14) afirmam que por volta do ano 300 a.C. Euclides escreveu sua principal obra intitulada os “Elementos”, um tratado matemático e geométrico que consiste de 13 livros, que sintetizava toda a geometria conhecida até então. No livro 1 de os “Elementos” de Euclides inicia-se o estudo da geometria plana, hoje conhecida como Geometria Euclidiana Plana em sua homenagem. Inicialmente ele define os objetos geométricos cujas propriedades deseja-se estudar, totalizando 23 definições e *axiomas*, entre os quais estão as definições de ponto, reta, círculo, triângulo, ângulo, paralelismo e perpendicularidade.

Com apenas 5 *postulados* Euclides foi capaz de deduzir 465 proposições, muitas complicadas e não intuitivas, o que deu destaque ao seu trabalho, construindo axiomaticamente a geometria plana, através do método axiomático. Seguem esses 5 postulados:

Postulado 1: Existe um único segmento de reta conectando dois pontos dados.

Postulado 2: Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em ambas as direções.

Postulado 3: Existe um círculo com quaisquer centro e raio dados.

Postulado 4: Todos os ângulos retos são iguais entre si.

Postulado 5: Se uma reta corta outras duas retas formando ângulos internos do mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se suficientemente prolongadas, irão se encontrar do lado em que estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Entretanto, SANTOS e VIGLIONI (2011, p. 19) relatam que esses postulados não são suficientes para demonstrar todos os resultados de geometria plana, ou seja, existem lacunas que não são possíveis preenche-las apenas com o que há em “Elementos”. Apesar disso, nenhum outro tratado matemático alcançou a mesma fama, sendo o livro mais bem sucedido e influente jamais escrito.

2.2 Noções e proposições primitivas de geometria

2.2.1 Noções primitivas

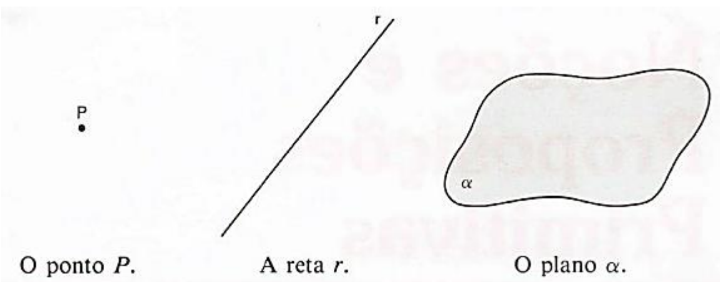
As noções primitivas da geometria representam a forma como os elementos matemáticos podem ser compreendidos, dando base para a construção dos conhecimentos geométricos. Ou seja, são elementos que não possuem definição. São eles, ponto, reta e plano.

Ponto: O ponto é um objeto que não possui definição, dimensão e forma. Por isso, é impossível encontrar qualquer medida nele, como comprimento, largura, altura, área, volume etc. O ponto é a base de toda a Geometria, pois é a partir de conjuntos deles que são formadas as figuras geométricas. Normalmente, a notação de ponto é dada por letras maiúsculas latinas.

Reta: Retas são conjuntos de pontos compreendidos como linhas infinitas que não fazem curvas. Embora sejam formadas por pontos, também não possuem definição, apenas essa característica. Trata-se de um objeto unidimensional, ou seja, que possui uma única dimensão. A notação de uma reta é dada por letras minúsculas latinas.

Plano: Objeto formado pelo enfileiramento de infinitas retas de modo que não haja espaços entre essas retas. É uma figura bidimensional, ou seja, possui apenas duas dimensões, largura e comprimento. A notação de um plano é dada por letras gregas minúsculas.

Figura 1 - Notações gráficas de ponto, reta e plano



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

2.2.2 Proposições primitivas

Proposições em geometria são propriedades ou afirmações geométricas que são aceitas mediante demonstrações. Por outro lado, as proposições primitivas ou postulados ou axiomas são aceitos sem demonstração. O estudo de geometria plana começa com alguns postulados relacionando o ponto, a reta e o plano.

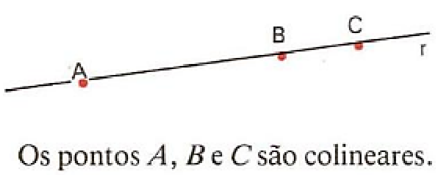
2.2.2.1 Postulado da existência

a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
b) Num plano há infinitos pontos.

Vale ressaltar que a expressão “infinitos pontos” significa “tantos pontos quanto quisermos.

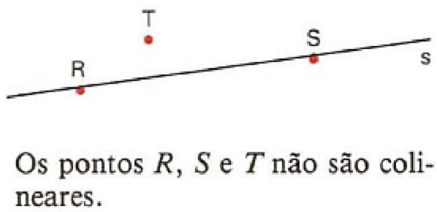
Quando pontos pertencem a uma mesma reta, ou seja, estão sobre a mesma reta, são ditos colineares.

Figura 2 - Pontos Colineares



Fonte Dolce e Pompeo, 2006.

Figura 3 - Pontos Não Colineares

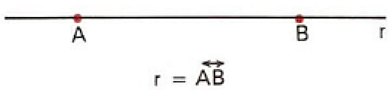


Fonte Dolce e Pompeo, 2006

2.2.2.2 Postulado da determinação

a) Da reta: Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

Figura 4 - A reta r

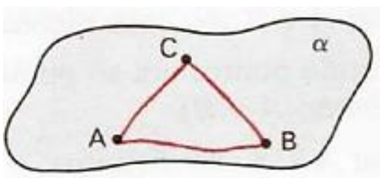


Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Os pontos A e B distintos determinam a reta e que indicamos por $\overleftrightarrow{AB}$.

b) Do plano: Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Figura 5 - O plano α



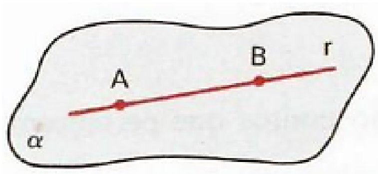
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Os pontos A, B e C não colineares determinam um plano α que indicamos por (A, B, C). O plano α é o único plano que passa por A, B e C.

2.2.2.3 Postulado da inclusão

Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

Figura 6 - A reta r no plano α



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Dados dois pontos distintos A e B de um plano α, a reta r = $\overleftrightarrow{AB}$ tem todos os pontos no plano.

Pontos *coplanares* são pontos que pertencem a um mesmo plano. Desse modo, na figura 6, os pontos A e B são coplanares.

2.2.3 Segmento de reta e semirreta

2.2.3.1 Segmento de Reta

Segmento de reta é parte de uma reta que tem origem num ponto dado e fim em outro ponto dado distinto do ponto de origem. Logo, não é infinito. A figura 7 representa o segmento de reta que inicia no ponto A e termina no ponto B, cuja notação é $\overline{AB}$.

Figura 7 - Segmento de reta AB ($\overline{AB}$)

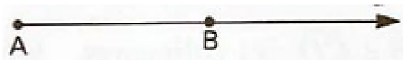
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

A medida de um segmento $\overline{AB}$ será indicada por m($\overline{AB}$) ou simplesmente por AB. A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo associado ao segmento, chamado de comprimento do segmento, cuja unidade usual é o metro (m). Seus múltiplos - decâmetro (*dam*), hectômetro (*hm*) e quilômetro (*km*) - ou submúltiplos - decímetro (*dm*), centímetro (*cm*) e milímetro (*mm*) - também são utilizados.

2.2.3.2 Semirreta

Semirreta é o segmento que parte de um ponto dado e se prolonga indefinidamente. A figura 8 representa a semirreta que se origina no ponto A e se prolonga indefinidamente no sentido de B, cuja notação é $\overrightarrow{AB}$.

Figura 8 - Semirreta AB ($\overrightarrow{AB}$)



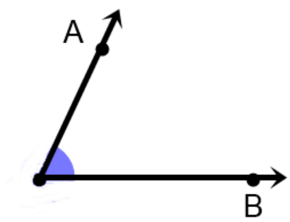
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

2.3 Ângulo

Chama-se ângulo a reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares), ou seja, é uma região limitada por duas semirretas que partem de um mesmo ponto.

Podem ser usadas três letras, por exemplo AOB ou AÔB para representar um ângulo, sendo que a letra do meio O representa o vértice, a primeira letra A representa um ponto do primeiro segmento de reta (ou semirreta) e a terceira letra B representa um ponto do segundo segmento de reta (ou semirreta), conforme mostra a figura 9.

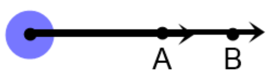
Figura 9 - Ângulo AÔB



Fonte: Próprio autor

De um modo particular, usamos a unidade de medida de ângulo com graus. Dessa forma, observando a figura 9, se considerarmos a semirreta $\overrightarrow{OB}$, num movimento de rotação partindo da mesma posição da semirreta $\overrightarrow{OA}$, ao completar uma volta completa terá percorrido ou formado um ângulo de 360 graus, ou 360º, conforme a figura 10.

Figura 10 - Ângulo de 360º



Fonte: Próprio autor

2.3.1 Alguns ângulos especiais

Com relação às suas medidas, os ângulos podem ser classificados como: *raso, reto*, *agudo*, *obtuso*.

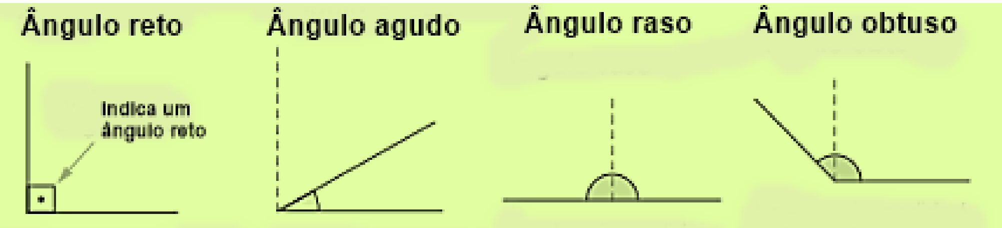
a) Ângulo raso: ângulo que mede exatamente 180º, os seus lados são semirretas opostas. Desse modo, o ângulo raso representa meia volta em torno do vértice.

b) Ângulo reto: é um ângulo cuja medida é exatamente 90º, ou seja, exatamente 1/4 (um quarto) de uma volta em torno do vértice.

c) Ângulo agudo: ângulo cuja medida é maior do que 0º e menor do que 90º. Desse modo, sendo α um ângulo agudo, então 0º < α < 90º.

d) Ângulo obtuso: Um ângulo cuja medida é maior que 90º e menor que 180º. Assim, sendo α um ângulo obtuso, então 90º < α < 180º.

Figura 11 - Ângulos reto, agudo, raso e obtuso



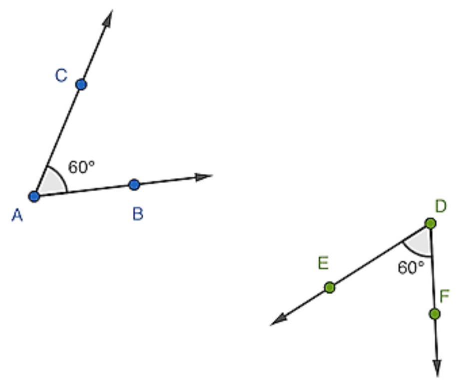
Fonte: https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/eaja/matematica-classificacao-dos-triangulos-em-relacao-as-medidas-dos-lados-e-dos-angulos/

2.3.2 Ângulos congruentes

A congruência (símbolo ≡) entre ângulos existe quando suas medidas são iguais. Vale ressaltar que não é geometricamente correto afirmar que ângulos congruentes são iguais, pois seus lados e vértices não são coincidentes, ou seja, não apresentam posições iguais no plano.

Na figura 12 temos $B\hat{A}C$ = 60º e $E\hat{D}F$ = 60º. Portanto, $B\hat{A}C$ e $E\hat{D}F$ são congruentes, ou seja $B\hat{A}C \equiv E\hat{D}F$.

Figura 12 - Ângulos congruentes

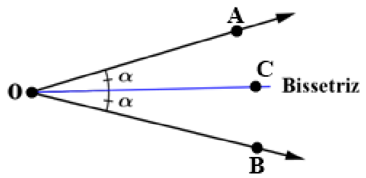


Fonte: https://pt.khanacademy.org/math/pt-5-ano/geometria-5ano/congruncia-de-angulos-e-a-proporcionalidade-entre-os-lados/a/angulos-congruentes

2.3.3 Bissetriz de um ângulo

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo que parte no vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes.

Figura 13 - Bissetriz de um ângulo



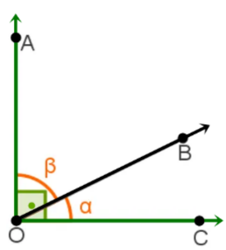
Fonte: Adaptado de https://www.centralexatas.com.br/matematica/conceitos-iniciais-de-geometria/235329

Na figura 13, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$. Como $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$, então $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

2.3.4 Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos são *complementares* se, e somente se, a soma de suas medidas é 90º. Logo, um deles é o complemento do outro. Na figura 14 os ângulos α e β são complementares.

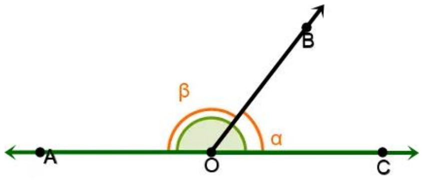
Figura 14 - Ângulos complementares



Fonte: Adaptado de https://brasilescola.uol.com.br/matematica/angulos-complementares-angulos-suplementares-angulos-.htm

Dois ângulos são *suplementares* se, e somente se, a soma de suas medidas é 180º. Logo, um deles é suplemento do outro. Na figura 15 os ângulos α e β são suplementares.

Figura 15 - Ângulos suplementares

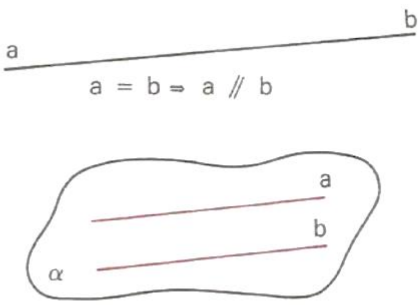


Fonte: Adaptado de https://brasilescola.uol.com.br/matematica/angulos-complementares-angulos-suplementares-angulos-.htm

2.3.5 Paralelismo e perpendicularidade entre retas

Duas retas são *paralelas* (símbolo: //) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares (pertencem a um mesmo plano) e não têm nenhum ponto comum. Logo, o ângulo entre ela é de 0º.

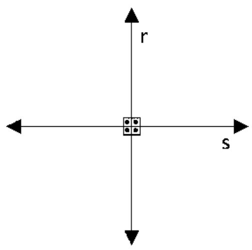
Figura 16 - Retas paralelas



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Duas retas são *perpendiculares* (símbolo: ⊥) se, e somente se, são concorrentes (possuem um único ponto em comum) e formam ângulos retos entre si.

Figura 17 - Retas perpendiculares

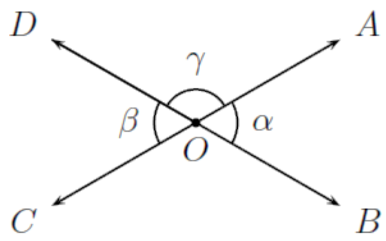


Fonte: https://www.todamateria.com.br/retas/

2.3.6 Ângulos opostos pelo vértice (o. p. v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

Figura 18 - Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Caminha, 2013

Desse modo, nota-se que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

Proposição 1: Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.

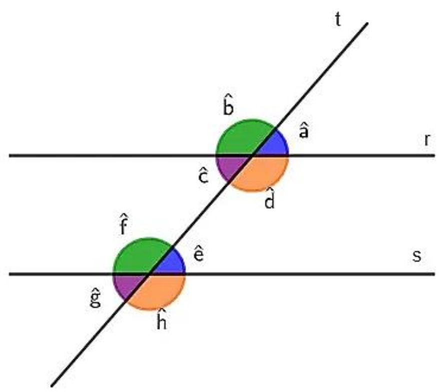
Demonstração:

Partindo da figura 18, como $\overrightarrow{OB}$ *e* $\overrightarrow{OD}$ *são semirretas opostas, segue que* $\alpha + \gamma = 180º$*. Analogamente,* $\beta + \gamma = 180º$*. Portanto, como* $\alpha = 180º - \gamma$ *e* $\beta = 180º - \gamma$*, então,* $\boldsymbol{\alpha = \beta}$*.*

2.3.7 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Retas paralelas são aquelas que não se interceptam em nenhum ponto. Uma reta é transversal à outra se ambas apresentam apenas um ponto em comum. Ao traçarmos duas retas r e s, tal que r // s e também uma reta transversal t que intercepte r e s, haverá a formação de oito ângulos (figura 19).

Figura 19 - Retas paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/duas-retas-paralelas-cortadas-por-uma-transversal.htm

Dos oito ângulos formados, chamam-se ângulos:

a) **alternos**, os ângulos que estão em lados opostos da reta transversal;
b) **colaterais**, os ângulos que estão no mesmo lado da reta transversal;
c) **internos**, os ângulos que estão entre as retas paralelas;
d) **externos**, os ângulos que não estão entre as retas paralelas;
e) **correspondentes**, os ângulos que estão da mesma posição de uma paralela em relação à outra.

Desse modo, na figura 19, temos:

a) ângulos alternos internos: $\hat{c}$ e $\hat{e}$, $\hat{d}$ e $\hat{f}$.
b) ângulos alternos externos: $\hat{b}$ e $\hat{h}$, $\hat{a}$ e $\hat{g}$.
c) ângulos colaterais internos: $\hat{c}$ e $\hat{f}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$.
d) ângulos colaterais externos: $\hat{a}$ e $\hat{h}$, $\hat{b}$ e $\hat{g}$.
e) ângulos correspondentes: $\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{b}$ e $\hat{f}$, $\hat{c}$ e $\hat{g}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$.

Proposição 2: Ângulos alternos internos ou ângulos alternos externos são congruentes. Ou seja, na figura 19, temos $\hat{c} \equiv \hat{e}$, $\hat{d} \equiv \hat{f}$, $\hat{b} \equiv \hat{h}$ e $\hat{a} \equiv \hat{g}$.

Demonstração:

De acordo com o quinto postulado de Euclides, r // s $\Rightarrow \hat{c} + \hat{f}$ = 180º, portanto $\hat{c}$ = 180º − $\hat{f}$. Como $\hat{e} + \hat{f}$ = 180º, então $\hat{e}$ = 180º − $\hat{f}$. Logo, $\boldsymbol{\hat{c} \equiv \hat{e}}$. De forma análoga, temos $\boldsymbol{\hat{d} \equiv \hat{f}}$, $\boldsymbol{\hat{b} \equiv \hat{h}}$ e $\boldsymbol{\hat{a} \equiv \hat{g}}$.

Proposição 3: Ângulos colaterais internos ou ângulos colaterais externos são suplementares. Ou seja, na figura 19, temos $\hat{c} + \hat{f}$ = 180º, $\hat{d} + \hat{e}$ = 180º, $\hat{a} + \hat{h}$ = 180º e $\hat{b} + \hat{g}$ = 180º.

Demonstração:

*Pelo quinto postulado de Euclides, r // s $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\hat{c} + \hat{f}}$ **= 180º** e $\boldsymbol{\hat{d} + \hat{e}}$ **= 180º**.*

Como $\hat{f} + \hat{g}$ = 180º $\Rightarrow \hat{f}$ = 180º − $\hat{g}$; e $\hat{b} + \hat{c}$ = 180º $\Rightarrow \hat{c}$ = 180º − $\hat{b}$.

*Aplicando em $\hat{c} + \hat{f}$ = 180º, temos 180º − $\hat{g}$ + 180º − $\hat{b}$ = 180º $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\hat{b} + \hat{g}}$ **= 180º**.*

*De forma análoga, temos $\boldsymbol{\hat{a} + \hat{h}}$ **= 180º**.*

Proposição 4: Ângulos correspondentes são congruentes. Ou seja, na figura 19, temos $\hat{a} \equiv \hat{e}$, $\hat{b} \equiv \hat{f}$, $\hat{c} \equiv \hat{g}$, $\hat{d} \equiv \hat{h}$.

Demonstração:

De acordo com o quinto postulado de Euclides, r // s $\Rightarrow \hat{d} + \hat{e} = 180°$. *Logo,* $\hat{e} = 180° - \hat{d}$. *Por outro lado, sabe-se que* $\hat{a} + \hat{d} = 180°$. *Logo,* $\hat{a} = 180° - \hat{d}$. *Portanto,* $\boldsymbol{\hat{a} \equiv \hat{e}}$. *De forma análoga, temos* $\boldsymbol{\hat{b} \equiv \hat{f}}$, $\boldsymbol{\hat{c} \equiv \hat{g}}$ *e* $\boldsymbol{\hat{d} \equiv \hat{h}}$.

3 FIGURAS PLANAS

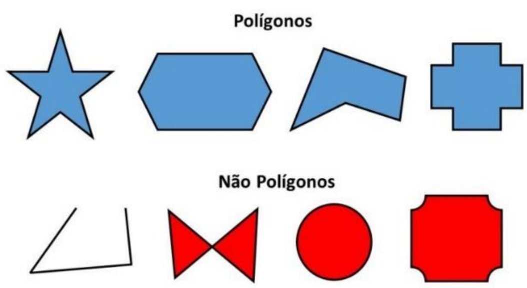
Figura é qualquer conjunto de pontos e figura plana é uma figura que tem todos os seus pontos num mesmo plano. No ensino médio, o estudo de geometria plana se direciona a duas categorias especiais de figuras planas: polígonos e círculo.

3.1 Polígonos

Dada uma sequência de três ou mais pontos de um plano, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, chama-se *polígono* a reunião de todos os segmentos formados por esses pontos consecutivos tomados dois a dois. Dessa forma, podemos considerar que polígono é uma figura plana limitada por segmentos de reta. A palavra "polígono" advém do grego e constitui a união de dois termos "*poly*" e "*gon*" que significa "muitos ângulos". Para ser chamado de polígono, a figura deve ter as seguintes características:

a) Ser formada por uma linha fechada;
b) Não possuir nenhum ponto de cruzamento nessa linha;
c) Não possuir nenhum tipo de curvatura, os lados da figura devem ser apenas segmentos de reta.

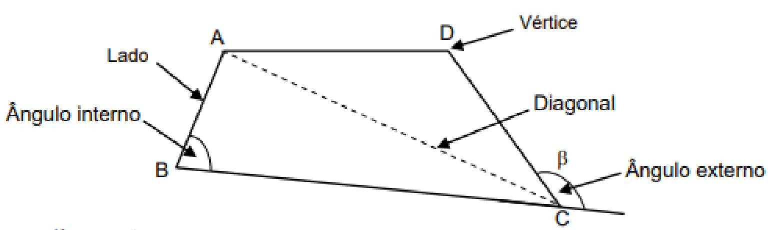
Figura 20 - Polígonos e Não Polígonos



Fonte: https://lereaprender.com.br/poligonos/

3.1.1 Elementos do polígono

Figura 21 - Elementos do polígono



Fonte: http://www.cp2.g12.br/blog/re2desenho/files/2019/10/9-Capitulo_VII_6o-Ano-GABARITO3.pdf

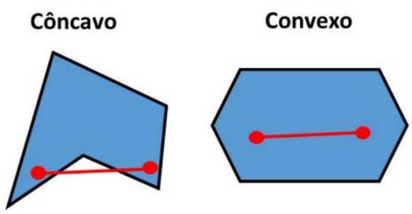
Os elementos de um polígono são:

a) **Vértice:** Ponto de interseção entre dois segmentos de retas consecutivos. Na figura 21 os vértices são A, B, C e D.
b) **Lado**: Segmento de reta que une dois vértices consecutivos. Na figura 21 os lados são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.
c) **Diagonal:** Segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Na figura 21 as diagonais são $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.
d) **Ângulo Interno:** Região interna formada por dois lados consecutivos. Na figura 21 os ângulos internos são $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $A\hat{D}C$ ou simplesmente, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.
e) **Ângulo Externo:** Região externa formada por um lado e o prolongamento do lado consecutivo. Na figura 21, β é um dos ângulos externos.

3.1.2 Polígono côncavo e polígono convexo

Polígonos côncavos são aqueles onde é possível traçar um segmento de reta cujos extremos estão no interior da figura e passa pela parte exterior, ou seja, a figura possui uma concavidade, e *polígonos convexos* são aqueles que não são côncavos.

Figura 22 - Polígono côncavo e polígono convexo



Fonte: https://lereaprender.com.br/poligonos/

3.1.3 Nomenclatura dos polígonos

De acordo com o número *n* de lados, os polígonos recebem nomes especiais, conforme a figura 23.

Figura 23 - Nomenclatura dos polígonos

n = 3	triângulo ou trilátero	3 lados
n = 4	quadrângulo ou quadrilátero	4 lados
n = 5	pentágono	5 lados
n = 6	hexágono	6 lados
n = 7	heptágono	7 lados
n = 8	octógono	8 lados
n = 9	eneágono	9 lados
n = 10	decágono	10 lados
n = 11	undecágono	11 lados
n = 12	dodecágono	12 lados
n = 15	pentadecágono	15 lados
n = 20	icoságono	20 lados

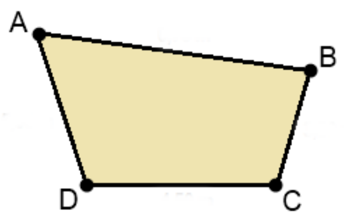
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Em geral, para um número *n* ($n \geq 3$), qualquer de lados dizemos que o polígono é um *n-látero*.

3.1.4 Perímetro

Perímetro é o comprimento do contorno de um polígono, portanto, para calcular o perímetro basta somar a medida de todos os lados desse polígono.

Figura 24 - Perímetro



O perímetro desse polígono
é dado por AB + BC + CD + DA

Fonte: Próprio autor

Desse modo, o perímetro é uma medida linear, ou seja, com uma só dimensão, e por ser um comprimento, sua medida tem como unidade fundamental o metro, podendo ser escrito também como um múltiplo ou um submúltiplo do metro.

Figura 25 - O metro, seus múltiplos e submúltiplos

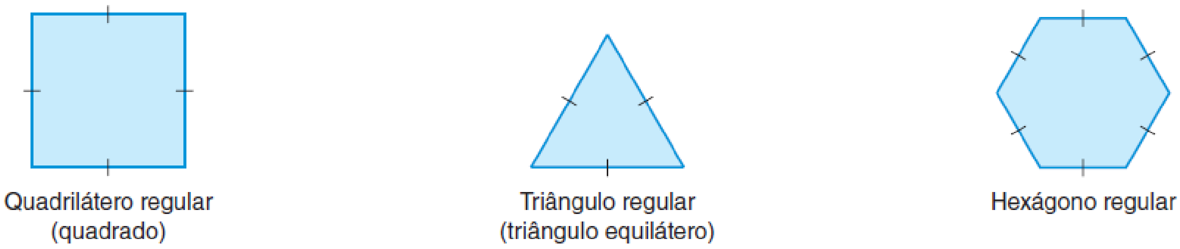
Múltiplos			Unidade fundamental	Submúltiplos		
quilômetro	hectômetro	decâmetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/20848768

3.1.5 Polígono Regular

Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes (de mesma medida) entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si é chamado de *polígono regular*.

Figura 26 - Alguns polígonos regulares

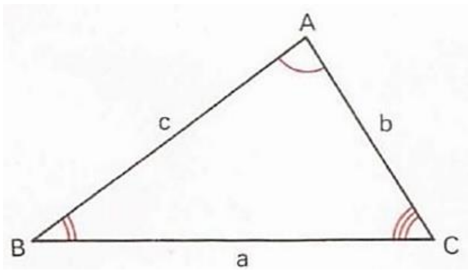


Fonte: Paiva, 2010

3.2 Triângulos

Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ chama-se triângulo ABC. Indicação: triângulo ABC = $\triangle$ ABC. Logo, é um polígono de três lados e três ângulos internos.

Figura 27 - Triângulo ABC



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

3.2.1 Classificação dos triângulos

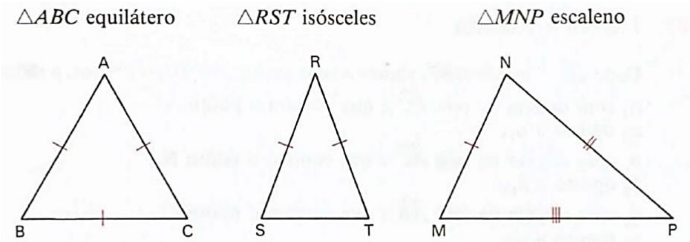
Quanto às medidas dos seus lados, um triângulo pode se classificar em:

a) **equilátero**, se, e somente se, tem os três lados congruentes;

b) **isósceles**, se, e somente se, tem dois lados congruentes;

c) **escaleno**, se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes, ou seja, os três lados têm medidas diferentes.

Figura 28 - Classificação de triângulos quanto às medidas dos seus lados



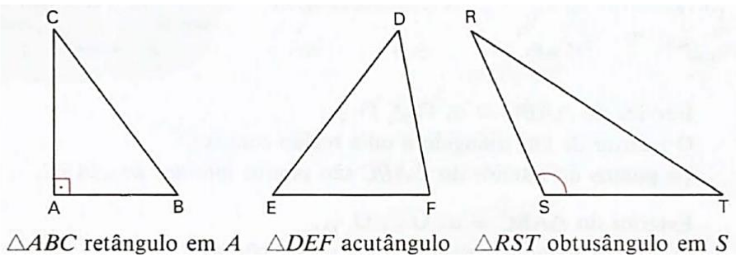
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Em um triângulo isósceles, dois lados são congruentes e outro lado é chamado de *base* e o ângulo oposto a base é o *ângulo do vértice*. Notemos que todo triângulo equilátero é também triângulo isósceles.

Quanto às medidas dos seus ângulos internos, um triângulo pode se classificar em:

a) **retângulo**, se, e somente se, tem um ângulo reto;
b) **acutângulo**, se, e somente se, tem os três ângulos agudos;
c) **obtusângulo**, se, e somente se, tem um ângulo obtuso.

Figura 29 - Classificação de triângulos quanto às medidas dos seus lados



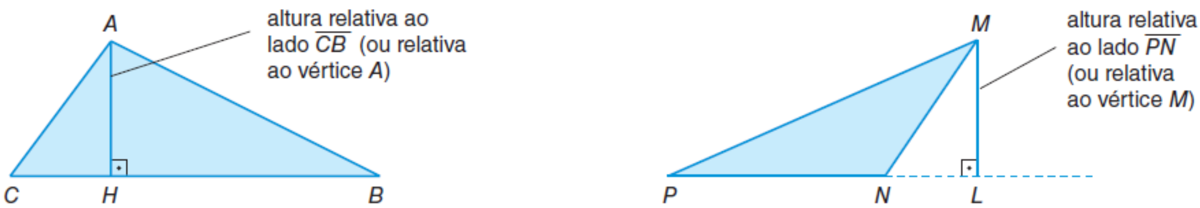
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

3.2.2 Elementos de um triângulo

3.2.2.1 Altura

A altura de um triângulo é o segmento de reta que liga, perpendicularmente, um vértice ao lado oposto a esse vértice.

Figura 30 - Altura de um triângulo



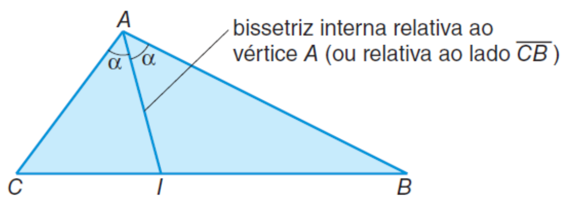
Fonte: Paiva, 2010

Dizer que um segmento de reta liga dois pontos significa que os extremos do segmento são esses pontos.

3.2.2.2 Bissetriz interna

A bissetriz interna de um triângulo é o segmento de reta que está contido na bissetriz de um ângulo interno e liga um vértice ao lado oposto.

Figura 31 - Bissetriz interna de um triângulo

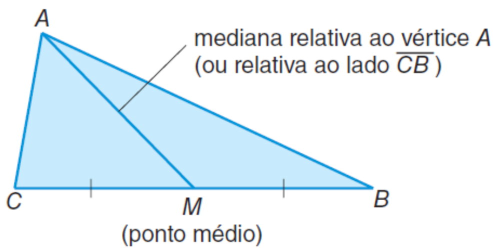


Fonte: Paiva, 2010

3.2.2.3 Mediana

A mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. O ponto médio de um segmento de reta é o ponto que se localiza exatamente no centro desse segmento de reta, ou seja, que divide-o em duas partes iguais.

Figura 32 - Mediana de um triângulo

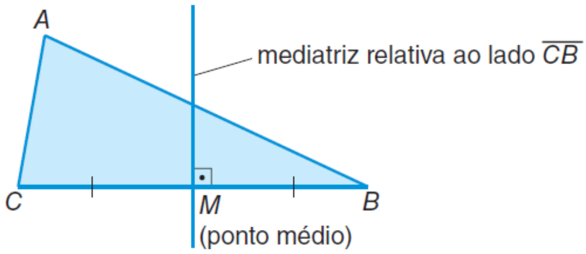


Fonte: Paiva, 2010

3.2.2.4 Mediatriz

A mediatriz de um triângulo é a reta perpendicular a um dos lados que passa pelo ponto médio desse lado.

Figura 33 - Mediatriz de um triângulo



Fonte: Paiva, 2010

3.2.3 Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Proposição 5: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer, cujos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas iguais a α, β e θ, respectivamente (figura 30.a). Traçando por B a reta $\overleftrightarrow{DE}$, paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, são determinados ângulos alternos internos, cujas medidas são congruentes (figura 30.b).

Figura 34 - Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

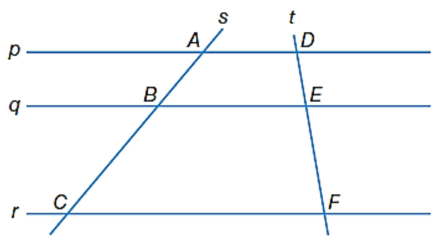
Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

Como o ângulo $D\hat{B}E$ é raso, então $\boldsymbol{\alpha + \beta + \theta = 180º}$.

3.2.4 Teorema de Tales

Consideremos três retas paralelas (p, q, r) “cortadas” por duas transversais, s e t (figura 35).

Figura 35 - Teorema de Tales



Fonte: Paiva, 2010

Dizemos que dois segmentos das transversais s e t são *correspondentes* quando seus extremos pertencem às mesmas paralelas. Tales demonstrou que a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes na outra transversal, isto é:

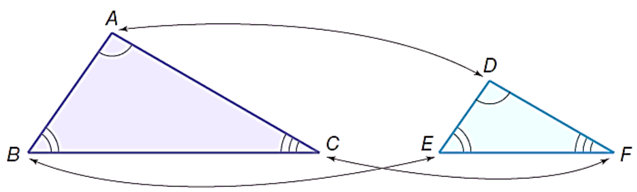
$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF};\ \frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF};\ \frac{CB}{CA}=\frac{FE}{FD};$$

Vale ressaltar que esse teorema pode ser generalizado para mais de três paralelas.

3.2.5 Semelhança de triângulos

Intuitivamente, duas figuras planas são *semelhantes* quando têm a mesma forma, não importando se têm ou não o mesmo tamanho. Formalizando esse conceito em triângulos, temos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Figura 36 - Semelhança de triângulos



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \iff \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k$$

Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

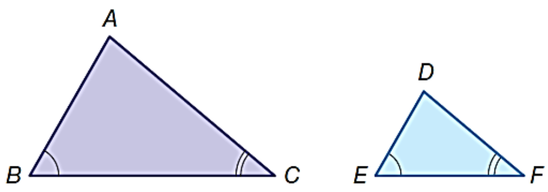
Na figura 36, o número k representa a razão de semelhança do triângulo ABC para DEF. Adota-se o símbolo ~ para representar a semelhança e ≡ para representar congruência. Além disso, usa-se o símbolo ⇔ para representar o conectivo lógico bicondicional.

De acordo com a definição de semelhança de triângulos, é necessário que sejam obedecidas três congruências entre os ângulos internos e três proporcionalidades entre os lados. Entretanto, se escolhermos de forma adequada algumas dessas condições, se forem obedecidas, as outras também serão. São os chamados casos de semelhança.

3.2.5.1 Caso A.A. (ângulo-ângulo)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos internos respectivamente congruentes.

Figura 37 - Caso de semelhança A.A.



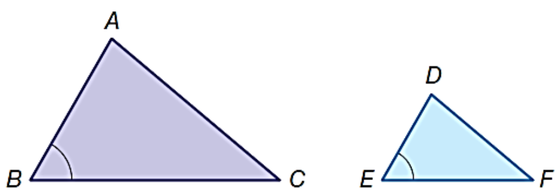
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

3.2.5.2 Caso L.A.L. (lado-ângulo-lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes.

Figura 38 - Caso de semelhança L.A.L.



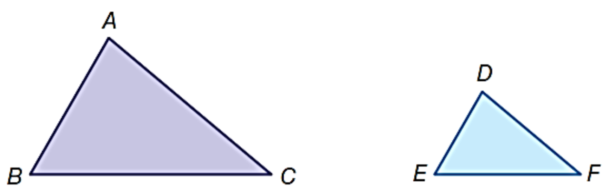
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} \\ \hat{B} \equiv \hat{E}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

3.2.5.3 Caso L.L.L. (lado-lado-lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados respectivamente proporcionais.

Figura 39 - Caso de semelhança L.L.L.



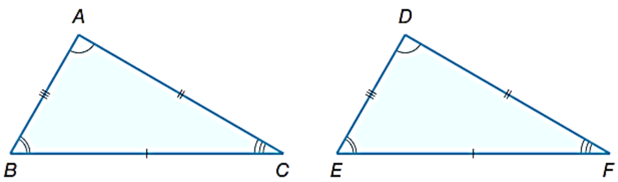
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Fonte: Paiva, 2010

3.2.6 Congruência de triângulos

Dois triângulos são congruentes (símbolo $\equiv$) quando suas medidas equivalentes são iguais, ou seja, os ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo para outro são os mesmos. Desse modo, a congruência é um caso específico de semelhança.

Figura 40 - Congruência de triângulos



$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F}\end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{matrix}\overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF}\end{matrix}$$

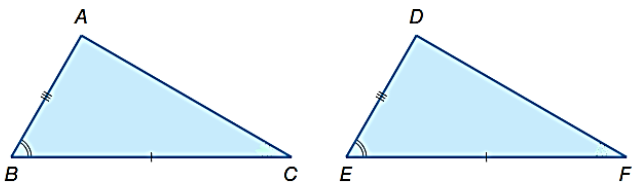
Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

Qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a congruência entre dois triângulos é chamado de caso de congruência.

3.2.6.1 Caso L.A.L. (lado-ângulo-lado)

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm dois lados e o ângulo formado por eles respectivamente congruentes.

Figura 41 - Caso de congruência L.A.L.



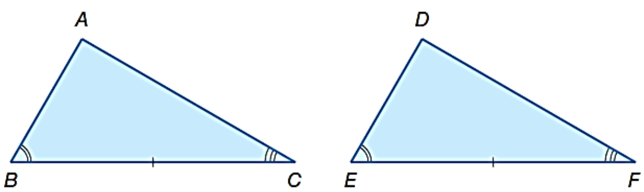
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF}\end{cases}$$

Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

3.2.6.2 Caso A.L.A. (ângulo-lado-ângulo)

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm um lado e os ângulos adjacentes a ele, respectivamente, congruentes.

Figura 42 - Caso de congruência L.A.L.



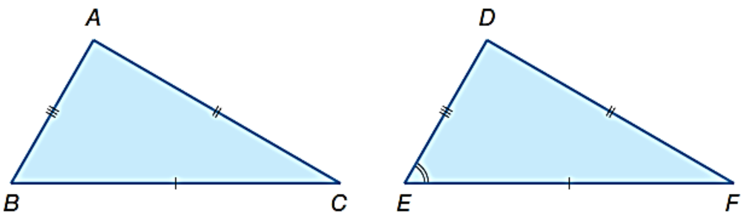
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{B} \equiv \hat{E} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \\ \hat{C} \equiv \hat{F}\end{cases}$$

Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

3.2.6.3 Caso L.L.L. (lado-lado-lado)

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente, congruentes.

Figura 43 - Caso de congruência L.L.L.



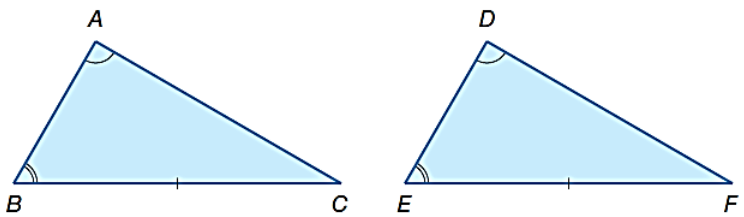
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \end{cases}$$

Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

3.2.6.4 Caso L.A.A$_o$. (lado-ângulo-ângulo oposto)

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm um lado, um ângulo adjacente a ele e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.

Figura 44 - Caso de congruência L.A.A$_o$.



$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{BC} \equiv \overline{EF} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{A} \equiv \hat{D} \end{cases}$$

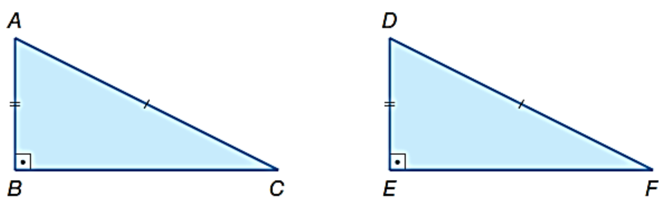
Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

3.2.6.5 Caso R.H.C. (ângulo reto-hipotenusa-cateto)

Os lados do triângulo retângulo que foram o ângulo reto são chamados de *catetos* e o terceiro lado, ou lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa*.

Dois triângulos retângulos são congruentes se, e somente se, têm a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes.

Figura 45 - Caso de congruência R.H.C.



$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{B} \text{ e } \hat{E} \text{ são retos} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \overline{AB} \equiv \overline{DE} \end{cases}$$

Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

3.2.7 Propriedades dos triângulos

3.2.7.1 Triângulo isósceles

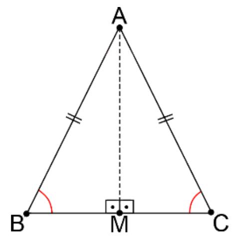
Proposição 6: Se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ *(figura 46), pretende mostrar que se* $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$*, então* $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

Traçando a mediana $\overline{AM}$*, obtemos os triângulos retângulos ABM e ACM, onde* $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ *(hipotenusas) e* $\overline{AM}$ *é lado comum aos dois (cateto). Desse modo, pelo caso R.H.C., ABM ≡ ACM. Portanto,* $\boldsymbol{\hat{B} \equiv \hat{C}}$.

Figura 46 - Triângulo isósceles (propriedade)



Fonte: Próprio autor.

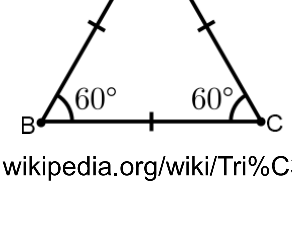
3.2.7.2 Triângulo equilátero

Proposição 7: Cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60º. Ou seja, os ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes.

Demonstração:

Sendo ABC um triângulo equilátero, como ele é isósceles, com base na proposição 6, temos $\hat{B} \equiv \hat{C}$*. De forma análoga, traçando a mediana referente ao lado* $\overline{AB}$*, como* $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$*, então* $\hat{A} \equiv \hat{B}$*. Logo,* $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$*. Como* $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ *= 180º, então* $\boldsymbol{\hat{A}}$ ***= 60º,*** $\boldsymbol{\hat{B}}$ ***= 60º e*** $\boldsymbol{\hat{C}}$ ***= 60º****.*

Figura 47 - Triângulo equilátero (propriedade)



Fonte: Adaptado de https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_equil%C3%A1tero

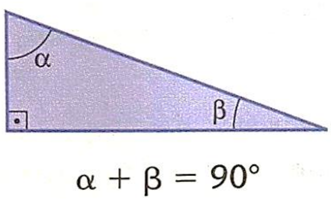
3.2.7.3 Triângulo retângulo

Proposição 8: Os ângulos internos de um triângulo retângulo distintos do ângulo reto são agudos e complementares.

Demonstração:

Sendo 180º a soma dos ângulos internos de um triângulo e 90º a medida de um dos ângulos internos de um triângulo retângulo, então os outros dois ângulos são complementares, ou seja, somam juntos 90º, logo, sempre serão agudos.

Figura 48 - Triângulo retângulo (propriedade)



Fonte: Paiva, 2010

3.2.7.3.1 O teorema de Pitágoras

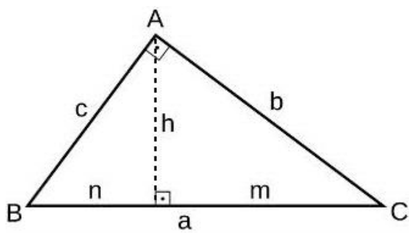
O teorema de Pitágoras é uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo (catetos e hipotenusa).

Proposição 9 (Teorema de Pitágoras): O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração:

Considere o triângulo retângulo ABC da figura 49, cuja hipotenusa mede a e os catetos medem b e c.

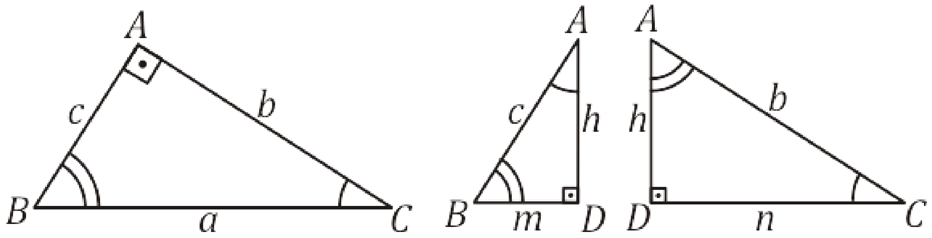
Figura 49 - Triângulo retângulo



Fonte: Adaptado de https://www.ime.unicamp.br/~apmat/5-demonstracoes-do-teorema-de-pitagoras/

Sejam h a altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$, n a medida do segmento que parte de B até o ponto que a altura toca $\overline{BC}$ (projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$) e m a medida do segmento que parte de C até o ponto que a altura toca $\overline{BC}$ (projeção *ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$), de modo que m + n = a. Assim, podemos considerar os triângulos ABC, ABD e ACD, conforme a figura 50.*

Figura 50 - Triângulos retângulos (subdivisões)



Fonte: https://www.ime.unicamp.br/~apmat/5-demonstracoes-do-teorema-de-pitagoras/

Observa-se que, pelo caso A.A., os três triângulos são semelhantes. Desse modo, temos:

I) ABC ~ ABD $\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow a \cdot m = c^2$

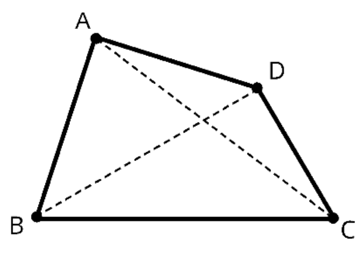
II) ABC ~ ACD $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow a \cdot n = b^2$

Somando I e II, temos: $(a \cdot m) + (a \cdot n) = b^2 + c^2 \Rightarrow a \cdot (m + n) = b^2 + c^2$. *Como* $m + n = a$, *então* $a \cdot a = b^2 + c^2 \therefore \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

3.3 Quadriláteros

Sejam A, B, C e D quatro pontos pertencentes a um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. O *quadrilátero* ABCD é a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Resumidamente, quadrilátero é um polígono simples de quatro lados.

Figura 51 - Quadrilátero



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Um quadrilátero tem 2 diagonais. Na figura 45, as diagonais são os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

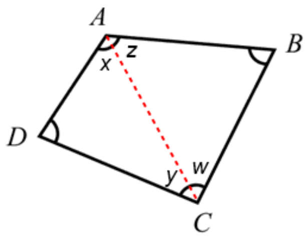
3.3.1 Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero

Proposição 10: A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º.

Demonstração:

Seja ABCD um quadrilátero qualquer e traça-se a diagonal $\overline{AC}$*, obtendo os triângulos ACD e ABC (figura 52).*

Figura 52 - Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero (demonstração)



Fonte: Adaptado de https://querobolsa.com.br/enem/matematica/quadrilatero

Sendo $C\hat{A}D$ *= x,* $A\hat{C}D$ *= y,* $B\hat{A}C$ *= z e* $A\hat{C}B$ *= w, então* $\hat{A}$ *= x + z e* $\hat{C}$ *= y + w. Pela Proposição 5 temos I) x + y +* $\hat{D}$ *= 180º e II) z + w +* $\hat{B}$ *= 180º. Somando I e II temos: x + z + y + w +* $\hat{B}$ *+* $\hat{D}$ *= 180º + 180º ⇒* $\boldsymbol{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}$ ***= 360º****.*

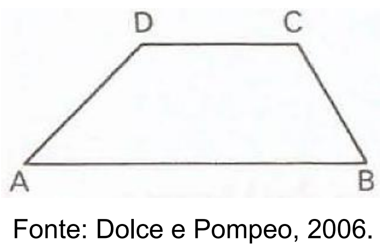
3.3.2 Quadriláteros notáveis

Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

3.3.2.1 Trapézio

É um quadrilátero plano convexo que possui dois lados paralelos. Desse modo, ABCD é trapézio se, e somente se, $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{CD}}$ são paralelos ou $\overline{\mathrm{AD}}$ e $\overline{\mathrm{BC}}$ são paralelos, ou seja, ABCD é trapézio ⇔ ($\overline{\mathrm{AB}}$ // $\overline{\mathrm{CD}}$ ou $\overline{\mathrm{AD}}$ // $\overline{\mathrm{BC}}$).

Figura 53 - Trapézio



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Os lados paralelos são as *bases* do trapézio. Desse modo, na figura 53 as bases são os segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{CD}}$.

Um trapézio pode se classificar como:

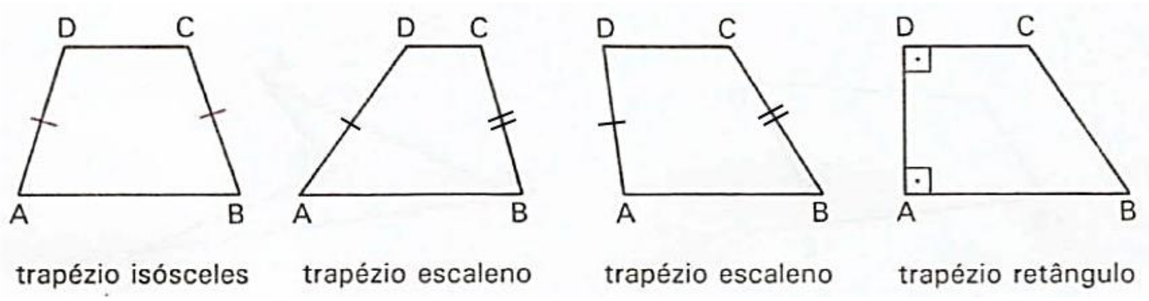
a) **trapézio isósceles**, se os lados que não bases são congruentes entre si;

b) **trapézio escaleno**, se os lados que não bases não são congruentes entre si;

c) **trapézio retângulo** (ou bi-retângulo), se tem dois ângulos internos retos (90º).

Na figura 54 a seguir, considere que em todos os trapézios, $\overline{\mathrm{AB}}$ // $\overline{\mathrm{CD}}$.

Figura 54 - Classificação de um trapézio



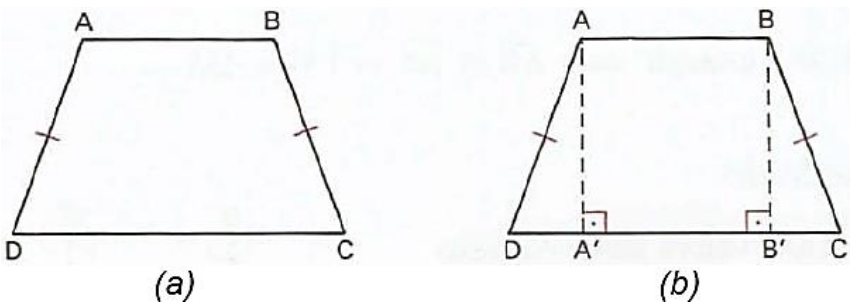
Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo, 2006.

Proposição 11: Em um *trapézio isósceles*, os ângulos de cada base são congruentes.

Demonstração:

Sendo ABCD um trapézio isósceles (figura 55.a), pretende-se mostrar que se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases desse trapézio, então $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

Figura 55 - Trapézio isósceles (ângulos congruentes)



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo, 2006.

Tracemos as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A' e B' na base maior $\overline{CD}$ (figura 55.b). Sabe-se que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, pois são as distâncias entre retas paralelas.

Por outro lado, os triângulos retângulos AA'D e BB'C são congruentes pelo caso R.H.C., pois $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ (cateto) e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ (hipotenusa). Portanto, $\boldsymbol{\hat{C} \equiv \hat{D}}$.

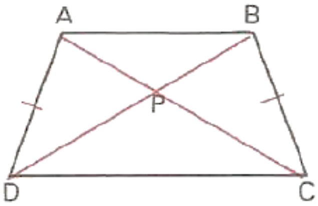
Como $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são colaterais internos, logo, suplementares, e $\hat{B}$ e $\hat{C}$ também, então $\boldsymbol{\hat{A} \equiv \hat{B}}$.

Proposição 12: As diagonais de um *trapézio isósceles* são congruentes.

Demonstração:

Seja ABCD um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, então $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Pretende-se mostrar que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Figura 56 - Trapézio isósceles (diagonais congruentes)



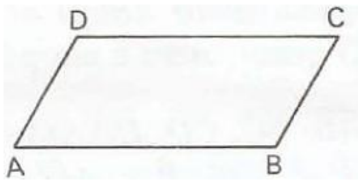
Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo, 2006.

Traçando as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, obtemos os triângulos ACD e BCD, respectivamente (figura 56). De acordo com a Proposição 12, temos $\hat{C} \equiv \hat{D}$. Como $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ é lado comum aos dois triângulos, pelo caso L.A.L., temos ACD ≡ BCD. Portanto, $\boldsymbol{\overline{AC} \equiv \overline{BD}}$.

3.3.2.2 Paralelogramo

É um quadrilátero plano convexo que possui os lados opostos paralelos. Desse modo, ABCD é paralelogramo se, e somente se, $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{CD}}$ são paralelos e $\overline{\mathrm{AD}}$ e $\overline{\mathrm{BC}}$ são paralelos, ou seja, ABCD é paralelogramo ⇔ ($\overline{\mathrm{AB}}$ // $\overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{AD}}$ // $\overline{\mathrm{BC}}$).

Figura 57 - Paralelogramo



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Proposição 13: Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Demonstração:

Sendo ABCD um paralelogramo, pretende-se mostrar que $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

Sabe-se que $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$, então $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são colaterais internos. Logo, $\hat{A} + \hat{D}$ = 180º. Assim, $\hat{D}$ = 180º − $\hat{A}$ (I).

Sendo $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$, então $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são colaterais internos. Logo, $\hat{A} + \hat{B}$ = 180º. Assim, $\hat{B}$ = 180º − $\hat{A}$ (II).

Portanto, de I e II temos $\boldsymbol{\hat{B} \equiv \hat{D}}$.

De forma análoga, temos $\boldsymbol{\hat{A} \equiv \hat{C}}$.

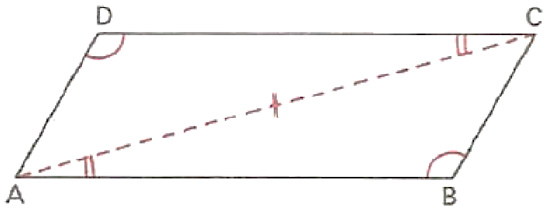
Proposição 14: Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Demonstração:

Sendo ABCD um paralelogramo, pretende-se mostrar que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$.

Traçando a diagonal $\overline{AC}$, obtemos os triângulos ACD e ABC, conforme a figura 58.

Figura 58 - Paralelogramo divido em triângulos



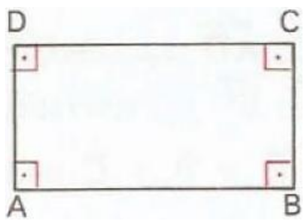
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Sendo $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$, então $B\hat{A}C \equiv A\hat{C}D$. Pela Proposição 13, temos $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$. Como $\overline{AC}$ é lado comum aos dois triângulos, então, pelo caso L.A.A_o., temos ACD ≡ ABC. Dessa forma, $\overline{\boldsymbol{AB}} \equiv \overline{\boldsymbol{CD}}$ e $\overline{\boldsymbol{BC}} \equiv \overline{\boldsymbol{AD}}$.

3.3.2.3 Retângulo

É um quadrilátero plano convexo que possui os quatro ângulos internos congruentes. Desse modo, ABCD é retângulo se, e somente se, $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\mathrm{C}}$ e $\widehat{\mathrm{D}}$ são congruentes, ou seja, ABCD é retângulo ⇔ $(\widehat{\mathrm{A}} \equiv \widehat{\mathrm{B}} \equiv \widehat{\mathrm{C}} \equiv \widehat{\mathrm{D}})$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, então o retângulo tem todos os ângulos internos retos (90º).

Figura 59 - Retângulo



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Proposição 15: Todo retângulo é um paralelogramo.

Demonstração:

Na figura 59, como $\hat{A}$ + $\widehat{D}$ = 180º, então, pelo quinto postulado de Euclides, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. De forma análoga, sendo $\hat{A}$ + $\hat{B}$ = 180º, então $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Portanto, ABCD (figura 59) é um paralelogramo.

Proposição 16: Os lados paralelos de um retângulo possuem medidas iguais.

Demonstração:

Ainda na figura 57 e Proposição 14, sendo $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, então $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Do mesmo modo, sendo $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$, então $\boldsymbol{\overline{AB} \equiv \overline{CD}}$.

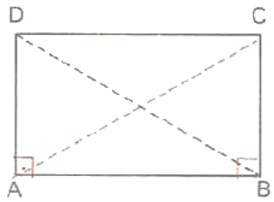
Proposição 17: Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Demonstração:

Sendo ABCD um retângulo, pretende-se mostrar que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Traçando a diagonal $\overline{AC}$ obtém-se o triângulo ABC e traçando a diagonal $\overline{BD}$ obtêm-se o triângulo ABD, conforme a figura 60.

Figura 60 - Retângulo dividido em triângulos



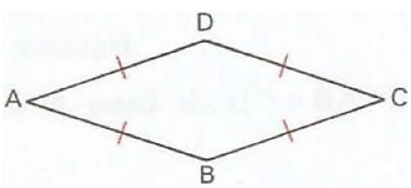
Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Pela Proposição 16, tem-se $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Além disso, sabe-se que $D\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$. Como $\overline{AD}$ é lado comum aos dois triângulos, então, pelo caso R.H.C., ABD ≡ ABC. Portanto, $\boldsymbol{\overline{AC} \equiv \overline{BD}}$.

3.3.2.4 Losango

É um quadrilátero plano convexo que possui os quatro lados congruentes. Desse modo, ABCD é losango se, e somente se, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são congruentes, ou seja, ABCD é losango ⇔ ($\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$).

Figura 61 - Losango



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

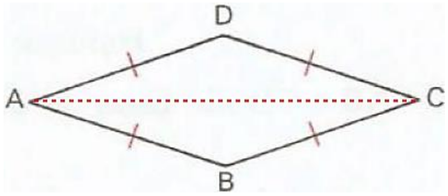
Proposição 18: Todo losango é paralelogramo.

Demonstração:

Seja ABCD um losango. Pretende-se mostrar que $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$.

Traçando a diagonal $\overline{AC}$ obtêm-se os triângulos ABC e ACD (figura 62).

Figura 62 - Losango dividido em triângulos



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo, 2006.

Sendo $\overline{AC}$ lado comum aos dois triângulos e $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$, então, pelo caso L.L.L., tem-se ABC ≡ ACD.

Desse modo, $B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$. Então, $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$. Da mesma forma, $B\hat{C}A \equiv D\hat{A}C$. Logo, $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$. Portanto, ***ABCD é paralelogramo****.*

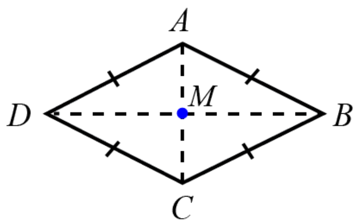
Proposição 19: Todo losango tem diagonais perpendiculares.

Demonstração:

Seja ABCD um losango. Pretende-se mostrar que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Traçam-se as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ interceptando-se no ponto M, obtendo-se os triângulos AMB, AMD, CMB e CMD (figura 63).

Figura 63 - Diagonais do losango



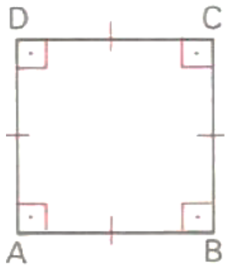
Fonte: Adaptado de https://querobolsa.com.br/enem/matematica/losango

De acordo com a Proposição 18, tem-se $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$. Logo, $M\hat{B}A \equiv C\hat{D}M$. Como $A\widehat{M}B$ e $C\widehat{M}D$ são opostos pelo vértice M, então $A\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}D$. Desse modo, pelo caso L.A.A$_o$. tem-se AMB ≡ CMD. De forma análoga, temos AMD ≡ CMB. E, por consequência, AMB ≡ AMD ≡ CMB ≡ CMD. Portanto, $A\widehat{M}B \equiv A\widehat{M}D \equiv C\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}D$. Como $A\widehat{M}B + A\widehat{M}D + C\widehat{M}B + C\widehat{M}D$ = 360º, então cada ângulo mede 90º. Logo, $\boldsymbol{\overline{AC}} \perp \boldsymbol{\overline{BD}}$.

3.3.2.5 Quadrado

É um quadrilátero plano convexo que possui todos os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Portanto, sendo ABCD um quadrado, então $\widehat{\mathrm{A}} \equiv \widehat{\mathrm{B}} \equiv \widehat{\mathrm{C}} \equiv \widehat{\mathrm{D}}$ e $\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{BC}} \equiv \overline{\mathrm{CD}} \equiv \overline{\mathrm{DA}}$.

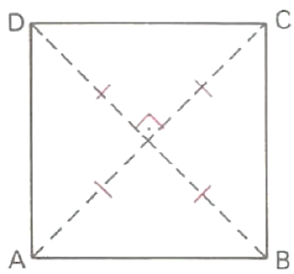
Figura 64 - Quadrado



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Pelas definições, podemos concluir que: Todo quadrado é retângulo e também é losango. Ou seja, o quadrado tem as propriedades características do retângulo ($\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ pela Proposição 17) e do losango ($\overline{AC} \perp \overline{BD}$ pela Proposição 19).

Figura 65 - Diagonais do quadrado

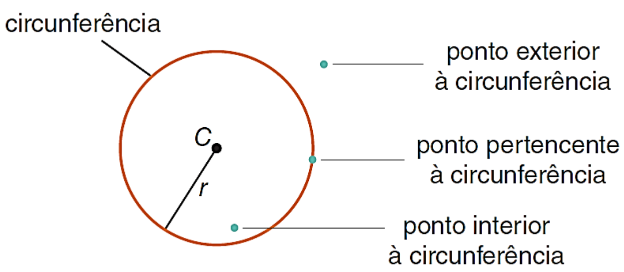


Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

3.4 Circunferência e círculo

Sendo O um ponto de um plano e r uma distância não nula, chama-se *circunferência* de centro O e raio r o conjunto dos pontos desse plano cuja distância ao ponto O é igual a r.

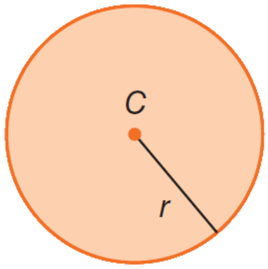
Figura 66 - Circunferência



Fonte: Paiva, 2010

Círculo (ou disco) é uma superfície plana limitada por uma circunferência.

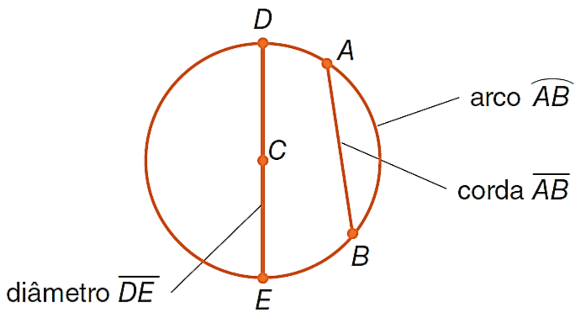
Figura 67 - Círculo



Fonte: Paiva, 2010

3.4.1 Elementos da circunferência

Figura 68 - Elementos da circunferência



Fonte: Paiva, 2010

a) **Raio:** é a distância entre o centro de uma circunferência e um ponto qualquer pertencente a ela. Na figura 68, $\overline{CD}$ é um dos segmentos que representam representa o raio.

b) **Arco:** é uma parte da circunferência limitada por dois pontos pertencentes a ela. Para evitar ambiguidade, podemos tomar um ponto intermediário no arco $\overset{\frown}{AB}$, pois há dois arcos limitados por A e B, o maior e menor na figura 68.

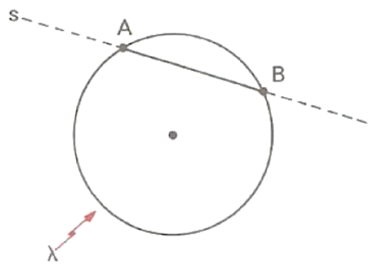
c) **Corda:** é um segmento de reta que liga dois pontos pertencentes a uma circunferência. Na figura 68, temos a corda $\overline{AB}$.

d) **Diâmetro**: é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Na figura 68, o segmento $\overline{DE}$ representa o diâmetro dessa circunferência. Desse modo, observa-se que a medida do diâmetro d de uma circunferência equivale ao dobro do seu raio r, ou seja, $d = 2 \cdot r$.

3.4.2 Posições relativas entre reta e circunferência

a) **Secante:** Uma reta *s* é secante a uma circunferência λ (lambda) quando *s* intercepta λ em dois pontos distintos.

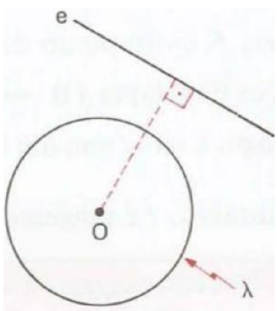
Figura 69 - Reta secante a circunferência



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

b) **Exterior:** Uma reta *e* é exterior a uma circunferência *λ* quando *e* e *λ* não têm ponto em comum.

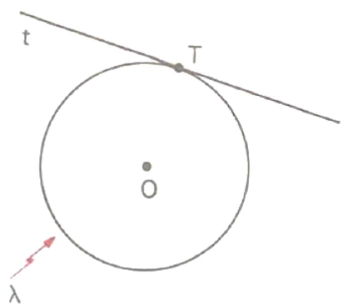
Figura 70 - Reta exterior a circunferência



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

c) **Tangente:** Uma reta *t* é tangente a uma circunferência *λ* quando *t* e *λ* têm um único ponto em comum, chamado de ponto de tangência.

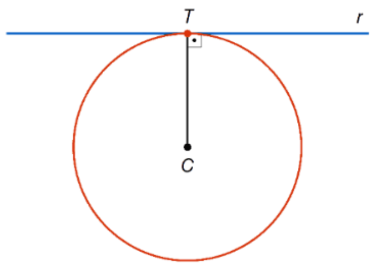
Figura 71 - Reta tangente a circunferência



Fonte: Dolce e Pompeo, 2006.

Proposição 20: Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Figura 72 - Reta tangente perpendicular ao raio



Fonte: Paiva, 2010

Demonstração:

Seja C o centro de uma circunferência, r uma reta tangente a ela e T o ponto de tangência, pretende-se mostrar que $\overline{CT} \perp r$ *(figura 72).*

Suponha, por absurdo, que $\overline{CT}$ *não é perpendicular a r.*

Então, seja A um ponto de r tal que $\overline{CA}$ *é perpendicular a r.*

Sabendo que existe um ponto B na reta r tal que $\overline{AT} \equiv \overline{AB}$*, obtemos os triângulos ACT e ABC retângulos em* $\hat{A}$*. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:*

I) $\overline{CT}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{AC}^2$ *e II)* $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$*. Como* $\overline{AT} \equiv \overline{AB}$*, então, de I e II temos* $\overline{CT} \equiv \overline{BC}$*. Desse modo, sendo* $\overline{CT}$ *raio da circunferência, então* $\overline{BC}$ *também é, logo, B também pertence à circunferência. Isso implica que r não é tangente a ela. Absurdo!*

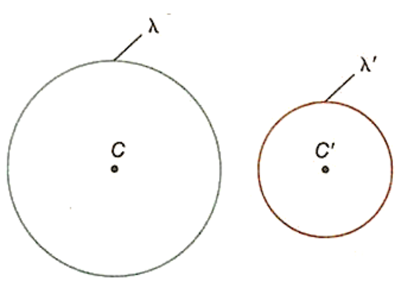
Portanto, $\boldsymbol{\overline{CT}}$ ***é perpendicular a r (*** $\boldsymbol{\overline{CT} \perp r}$ ***)****.*

3.4.3 Posições relativas entre duas circunferências

Duas circunferências λ e λ', contidas em um mesmo plano, admitem as seguintes posições relativas:

a) **Externas:** quando todos os pontos de qualquer uma delas são externos à outra.

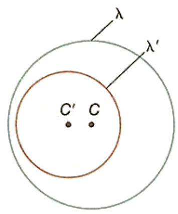
Figura 73 - Circunferências externas



Fonte: Paiva, 2015

b) **Uma interna à outra:** quando todos os pontos de uma delas são internos à outra.

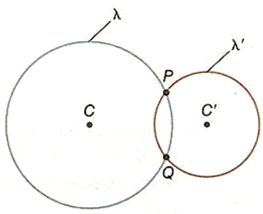
Figura 74 - Circunferência interna à outra



Fonte: Paiva, 2015

c) **Secantes:** quando têm exatamente dois pontos distintos em comum.

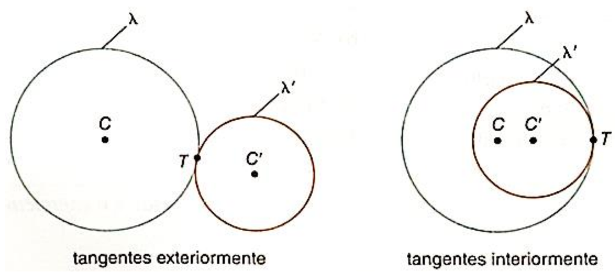
Figura 75 - Circunferências secantes



Fonte: Paiva, 2015

d) **Tangentes:** quando têm um único ponto em comum.

Figura 76 - Circunferências tangentes



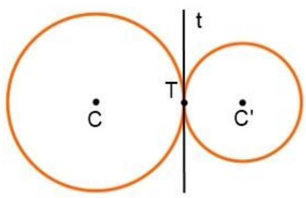
Fonte: Paiva, 2015

Proposição 21: Em duas circunferências tangentes, os centros C e C' e o ponto de tangência T são colineares.

Demonstração:

Traçando a reta t tangente a λ e a λ' simultaneamente, obtemos a figura 77.

Figura 77 - Circunferências tangentes (propriedade)



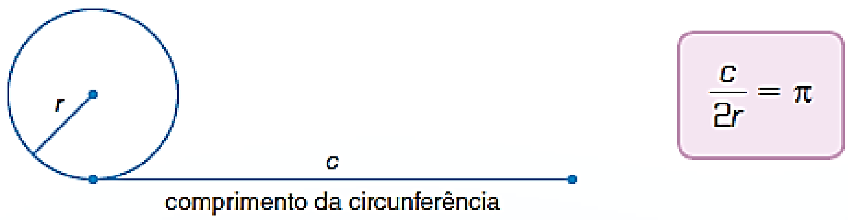
Fonte: Adaptado de https://escolakids.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-entre-circunferencias.htm#

Pela Proposição 20, temos $\overline{CT} \perp t$ *e* $\overline{C'T} \perp t$*. Desse modo, sendo P um ponto pertencente a t distinto de T, temos* $C\hat{T}P$ *= 90º e* $C'\hat{T}P$ *= 90º. Logo, como* $C\hat{T}P + C'\hat{T}P$ *= 180º, então **C, T e C' são colineares**.*

3.4.4 Comprimento da circunferência

Duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes. Logo, em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento (ou perímetro) c e a medida 2r de seu diâmetro é constante. Essa constante é representada pela letra grega π (pi).

Figura 78 - Comprimento da circunferência



Fonte: Paiva, 2010

Desse modo, sendo $\frac{c}{2r}$ = π, então, o comprimento c de uma circunferência é dado por $\boldsymbol{c = 2\pi r}$.

Atualmente, sabe-se que a constante π é um número irracional e, com a ajuda de computadores, é possível calcular aproximações com bilhões de casas decimais. Segue um exemplo com a aproximação para o número π com vinte casas decimais:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846$$

3.5 Área de superfícies planas

Intuitivamente, a área de uma superfície limitada no plano é um número real positivo associado à mesma e que serve para quantificar o espaço ocupado por ela.

3.5.1 Área de polígonos

Para que possa ser utilizado um conceito qualquer de área para polígonos, devem ser consideradas válidas, intuitivamente, as seguintes propriedades:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.

2. Se um polígono convexo é dividido em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm^2.

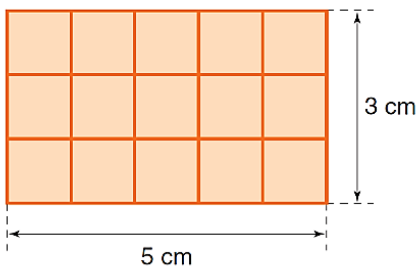
A unidade fundamental de área é o metro quadrado (m^2), que é uma superfície S quadrada com 1 m de lado. De forma análoga, pode ser feito o mesmo com os múltiplos e submúltiplos do metro.

3.5.1.1 Área do retângulo

Seja o retângulo ABCD. Os segmentos horizontais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam a base e os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam a altura desse retângulo. Considere que a altura de um polígono qualquer é o segmento que liga, perpendicularmente, o ponto mais alto desse polígono à sua base.

Consideremos um retângulo cuja base mede 5 cm e a altura mede 3 cm. Para calcular a área do retângulo, em centímetros quadrados, o mesmo será dividido em quadrados de lado 1 cm (figura 79).

Figura 79 - Divisão do retângulo em quadrados

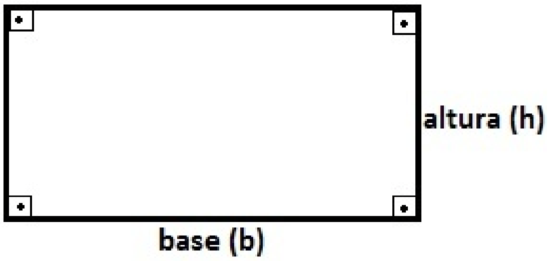


Fonte: Paiva, 2010

Foram obtidas 5 colunas com 3 quadrados em cada uma. Logo, o número de quadrados é $5 \cdot 3$. Como cada quadrado tem área 1 cm^2, então a área A do retângulo é 15 cm^2.

Generalizando, se a base de um retângulo tem medida b e a altura tem medida h, ambas na mesma unidade de comprimento, então a área A de um retângulo é dada por $\boldsymbol{A = b \cdot h}$.

Figura 80 - Área do retângulo

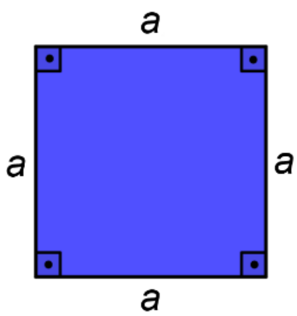


Fonte: https://calculareconverter.com.br/calcular-perimetro-do-retangulo/

3.5.1.2 Área do quadrado

Sabendo que todo quadrado é um retângulo, logo sua área S é o produto da medida da base pela medida da altura. Como as medidas dos lados de um quadrado são congruentes, então. se a base mede a, a altura também mede a. Portanto, a área A de um quadrado é dada por $A = b \cdot h \Rightarrow A = a \cdot a \Rightarrow \mathbf{A = a^2}$.

Figura 81 - Área do quadrado



Fonte: https://calculareconverter.com.br/calcular-perimetro-do-retangulo/

3.5.1.3 Área do paralelogramo

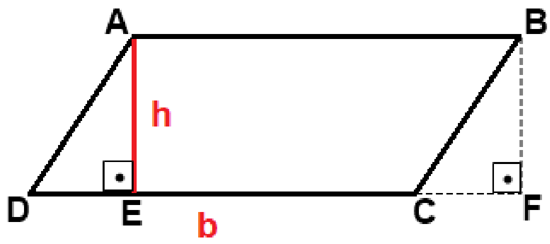
A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual à área de um retângulo de base b e altura h.

Proposição 22: A área A de um paralelogramo é dada por $A = b \cdot h$.

Demonstração:

Seja ABCD um paralelogramo de base $\overline{CD} = b$ *e altura* $\overline{AE} = h$. *Traça-se a altura referente a B, que toca o ponto F. Sendo* $\hat{E} \equiv \hat{F}$, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AE} \equiv \overline{BF}$, *pelo caso R.H.C., temos ADE ≡ BCF. Desse modo, a área do triângulo ADE é congruente à área do triângulo BCF. Portanto, a área do paralelogramo ABCD é congruente à área do retângulo ABFE.*

Figura 82 - Área do paralelogramo



Fonte: Adaptado de https://escolaeducacao.com.br/area-do-paralelogramo/

3.5.1.4 Área do triângulo

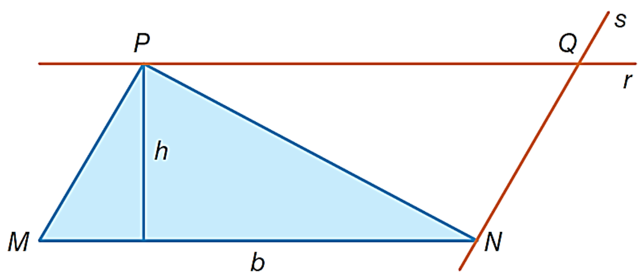
A área de um triângulo de base *b* e altura *h* é a metade da área de um paralelogramo de base *b* e altura *h*.

Proposição 23: A área *A* de um triângulo é dada por *A* = $\frac{b \cdot h}{2}$.

Demonstração:

Seja MNP um triângulo cuja base $\overline{MN}$ *mede b e a altura relativa a essa base mede h. Traçando por P a reta r paralela à base e por N a reta s paralela ao lado* $\overline{MP}$*, obtém-se o paralelogramo NMPQ de base b e altura h (figura 83).*

Figura 83 - Área do triângulo



Fonte: Paiva, 2010

Observa-se que $\overline{PM} \equiv \overline{QN}$, $\overline{PQ} \equiv \overline{MN}$ *e* $\overline{PN}$ *é lado comum. Logo, pelo caso L.L.L, temos MNP ≡ QPN. Daí, MNP e QPN tem áreas congruentes. Como o paralelogramo NMPQ é formado pela junção dos triângulos MNP e QPN, então a área do triângulo MNP equivale à metade da área do paralelogramo NMPQ.*

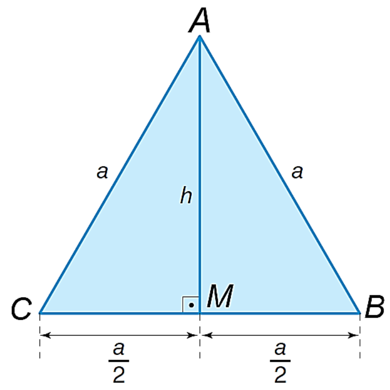
3.5.1.4.1 Área do triângulo equilátero

Proposição 24: A área *A* de um triângulo equilátero de lado *a* é dada por *A* = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo equilátero. Traça-se a altura h, que parte do ponto A e toca a base no ponto M. Como $M\hat{C}A$ *= 60º, então* $M\hat{A}C$ *= 30º. Logo,* $M\hat{A}B$ *= 30º. Sendo* $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ *e* $\overline{AM}$ *lado comum, então, pelo caso L.A.L, temos AMC ≡ AMB. Desse modo, M é o ponto médio de* $\overline{BC}$*, conforme a figura 84 a seguir.*

Figura 84 - Área do triângulo equilátero



Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

Sendo AMC retângulo em M, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 \Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Desse modo, sendo a *a medida da base e* $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ *a medida da altura do triângulo equilátero, então, aplicando em A =* $\frac{b \cdot h}{2}$ *temos:*

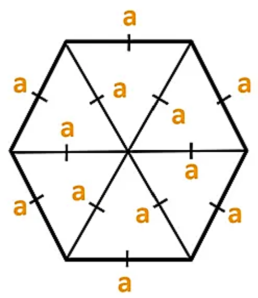
$$A = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}.$$

3.5.1.4.2 Área do hexágono regular

Proposição 25: A área *A* de um hexágono regular é dada por *A* = $3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Demonstração: Sendo o hexágono regular de lado a a reunião de 6 triângulos equiláteros de lado a, então sua área A é dada por $\boldsymbol{A = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \boldsymbol{A = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}}$.

Figura 85 - Área do hexágono regular



Fonte: https://www.tutorela.es/matematicas/como-calcular-el-area-de-un-hexagono-regular

3.5.1.5 Área do trapézio

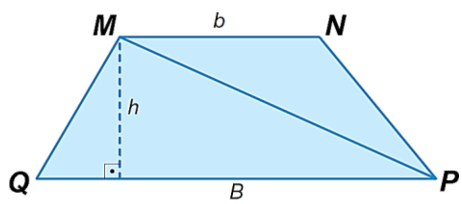
Sendo o trapézio um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos chamados de bases, esses lados sempre terão medidas diferentes, onde se convencionou chamá-los de base maior e base menor.

Proposição 26: A área *A* de um trapézio que tem base maior *B*, base menor *b* e altura *h*, é dada por *A* = $\frac{(B+b)\cdot h}{2}$.

Demonstração:

Seja MNPQ um trapézio de base menor $\overline{MN}$ e base maior $\overline{PQ}$. Traçando a diagonal $\overline{MP}$, divide-se o trapézio em dois triângulos, o triângulo MPQ de altura h e base B e o triângulo MNP de altura h e base b (figura 86).

Figura 86 - Área do trapézio



Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

Desse modo, a área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos. Logo, temos:

$$A = \frac{B\cdot h}{2} + \frac{b\cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{B\cdot h + b\cdot h}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{(B+b)\cdot h}}{\boldsymbol{2}}.$$

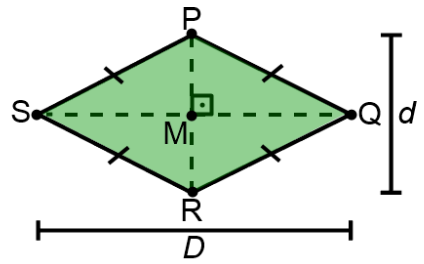
3.5.1.6 Área do losango

Proposição 27: A área *A* de um losango que tem diagonais medindo *D* e *d* é dada por: ***A*** = $\boldsymbol{\frac{D\cdot d}{2}}$.

Demonstração:

Seja PQRS um losango de diagonais $\overline{PR}$ *= d e* $\overline{QS}$ *= D (figura 87).*

Figura 87 - Área do losango



Fonte: Próprio autor

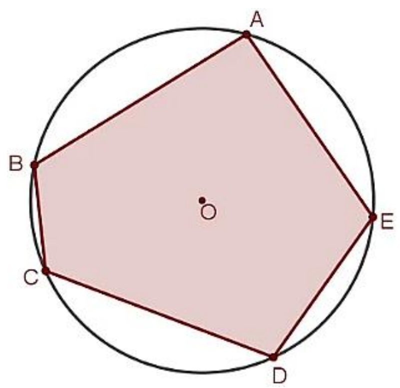
Sabe-se que as diagonais do losango se interceptam perpendicularmente no ponto M, tornando os triângulos MSP, QMP, QRM e RSM congruentes entre si. Desse modo, M é ponto médio de $\overline{PR}$ *e* $\overline{QS}$*. Desse modo, temos QSP ≡ QRS. Portanto, a área do losango PQRS de diagonais D e d equivale ao dobro da área do triângulo QSP de base D e altura d/2. Logo,*

$$A = 2 \cdot \frac{\left(D \cdot \frac{d}{2}\right)}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{2}}.$$

3.5.2 Área do círculo

Um polígono inscrito numa circunferência é um polígono que está no interior de uma circunferência de modo que todos os seus vértices pertencem a ela.

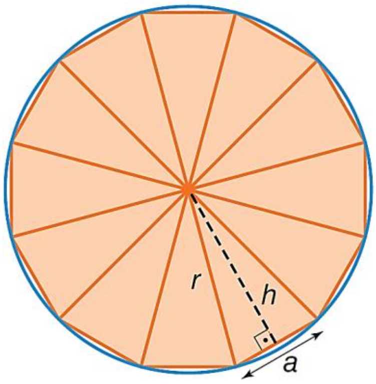
Figura 88 - Polígono inscrito numa circunferência



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/construcao-poligonos-inscritos.htm

Considere um polígono regular de *n* lados inscrito em uma circunferência de raio *r*.

Figura 89 - Polígono regular de n lados inscrito numa circunferência



Fonte: Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

As diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-no em *n* triângulos isósceles de base *a* e altura *h*. Logo, a área desse polígono é $A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$ e o seu perímetro é $n \cdot a.$

Essa área é menor que a área do círculo, porém, se aumentarmos o número *n* de lados indefinidamente (*n* tender para o infinito), notamos que:

a) o perímetro $(n \cdot a)$ do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência $(2\pi r)$;
b) a altura *h* de cada triângulo tende a se igualar ao raio *r* da circunferência;
c) a área desse polígono tende a se igualar à área *A* do círculo.

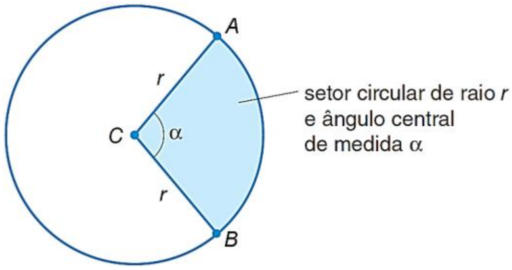
Desse modo, a expressão $A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow A = (n \cdot a) \cdot \frac{h}{2}$ *tende a* $A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área do círculo.

Dessa forma, a área *A* de um círculo de raio *r* é dada por $\boldsymbol{A = \pi r^2}$.

3.5.2.1 Área do setor circular

Consideremos um círculo de centro *C* e raio *r*. Sejam *A* e *B* dois pontos distintos pertencentes à circunferência que limita esse círculo. Os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ formam entre si o ângulo $A\hat{C}B = \alpha$, chamado de ângulo central. A região limitada pelos lados de um ângulo central é chamada de *setor circular*.

Figura 90 - Setor circular



Fonte: Fonte: Adaptado de Paiva, 2010

Sabe-se que 360º representa um ângulo que deu uma volta completa em torno de seu vértice. Logo, o ângulo de 360º tem relação direta com a área de um círculo de raio *r*. Portanto, para calcular a área de um setor circular (A_{setor}) de raio *r* e ângulo central α pode ser utilizada a seguinte regra de três:

Ângulo central		**Área**
360º	————	πr^2
α	————	A_{setor}

4 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Antes de propor as sequências didáticas para subsidiar os professores no ensino de geometria plana no ensino médio, faz-se necessário compreender o que são sequências didáticas e quais as suas premissas.

De acordo com PERETTI e TONIN DA COSTA (2013, p. 6):

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano.

Completam afirmando que é uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido.

Desse modo, uma sequência didática pode ser entendida também como um plano de aula bem detalhado, contendo uma sequência de passos metodológicos levando em consideração cada momento da aula, onde cada passo está interligado, permitindo que o professor administre melhor o tempo de sua aula e principalmente, que ele faça com que o(s) conteúdo(s) trabalhado(s) faça(m) sentido para os estudantes, sendo esse último um dos maiores desafios para o professor de matemática/geometria, que é o público que se quer atingir com esse trabalho.

Para Duval (*apud* FERREIRA, 2008, p. 8),

> A Geometria envolve três processos cognitivos, sinergicamente imbricados: a visualização, a construção e o raciocínio e, estes, são indispensáveis para a sua aprendizagem. Um dos maiores problemas relacionados à aprendizagem da Geometria são as formas de apreender e registrar as figuras geométricas [...]

Portanto, faz-se necessário que os estudantes compreendam primeiramente os conceitos primitivos de geometria seguidos dos elementos essenciais para entender o estudo de figuras planas no que diz respeito às suas composições e características. Estando consolidado esse estudo, torna-se possível o entendimento dos estudantes acerca dos procedimentos e as interpretações corretas referentes ao cálculo de área de figuras planas. Ou seja, passa a fazer sentido para o aluno o resultado que ele encontra ao calcular um perímetro e/ou uma área, não representando algo feito automaticamente, e sim, conscientemente.

Além disso, é extremamente importante que os estudantes saibam utilizar o sistema métrico, uma vez que as unidades de medida de comprimento e área são elementos indispensáveis para o estudo de geometria plana.

Assim, propõe-se que a sequência lógica de trabalho com a geometria plana comece com a explicação dos conceitos primitivos (ponto, reta e plano), seguido da construção de conceitos formados através desses conceitos primitivos (semirreta e segmento de reta, ângulo, figuras planas), depois a visualização da representação gráfica deles, e por fim, a construção dos mesmos por parte dos alunos.

Em cada sequência didática proposta a seguir estão especificados os conteúdos a serem trabalhados, a metodologia a ser aplicada, o tempo previsto da execução da aula, o público alvo, os recursos a serem utilizados, as habilidades da BNCC que estão sendo desenvolvidas, os objetivos da aula, os procedimentos metodológicos, a proposta de avaliação da aula e as referências bibliográficas utilizadas na construção da sequência. Vale destacar que os procedimentos metodológicos representam o passo-a-passo da aula de uma forma bem detalhada e com a estimativa de duração de cada passo, permitindo ao professor organizar-se melhor dentro do tempo que ele tem disponível para aplicar a sequência didática.

É válido ressaltar que por ser uma proposta, o professor tem a liberdade de fazer as adequações que achar necessárias de acordo com a sua realidade, servindo-lhe assim, de inspiração.

Ao todo foram produzidas 11 (onze) propostas de sequências didáticas, cujos conteúdos estão distribuídos na seguinte ordem:

- **Proposta 01:** Conceitos e Proposições Primitivas de Geometria.
- **Proposta 02:** Ângulos.
- **Proposta 03:** Figuras Planas - Introdução ao estudo de polígonos.
- **Proposta 04:** Triângulos - Classificação e Soma dos ângulos internos.
- **Proposta 05:** Teorema de Tales, Semelhança de triângulos e Congruência de triângulos.
- **Proposta 06:** Conversão de unidades de medida de comprimento.

- **Proposta 07:** Raiz quadrada de um número real e Teorema de Pitágoras.
- **Proposta 08:** Quadriláteros: elementos e características.
- **Proposta 09:** Circunferência e círculo: elementos e comprimento da circunferência.
- **Proposta 10:** Perímetro de polígonos, Área de triângulos e de quadriláteros notáveis.
- **Proposta 11:** Área do círculo e do setor circular.

4.1 Proposta de Sequência Didática 01

Essa sequência didática propõe ao professor uma forma de trabalhar os conceitos e proposições primitivas de geometria a fim de recapitular com os estudantes o que eles já estudaram, averiguar o que eles têm de aprendizado consolidado e dar uma base sólida para a compreensão do estudo de geometria euclidiana.

Conteúdos: Conceitos e Proposições Primitivas de Geometria
Metodologia: Aula expositiva e participativa
Tempo de aula: 50 min.
Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio
Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias
Habilidades BNCC:
Os conceitos a serem trabalhados serão a base para que as habilidades da BNCC voltadas para a geometria sejam desenvolvidas.
Objetivos:

- Conhecer a origem da palavra geometria e como se relaciona com o que ela se propõe a estudar;
- Compreender o que são conceitos primitivos em geometria, quais são e suas características;
- Assimilar a proposições primitivas originadas dos conceitos primitivos de ponto, reta e plano;
- Entender os conceitos de segmento de reta e semirreta.

Procedimentos Metodológicos:

1. Professor começa a aula perguntando se os estudantes sabem o que é a geometria, sobre o que ela estuda e o que eles lembram da última vez que estudaram. Depois, explica o significado etimológico da palavra geometria.

(4 min.)

2. Professor explica sobre os conceitos primitivos de geometria, o que significam e quais são, deixando claro que tudo o que vai ser estudado em geometria plana parte desses conceitos (ponto, reta e plano). Professor utiliza o quadro branco para representar os elementos primitivos à medida que vai explicando cada conceito. Começa explicando o que é um ponto. Depois, o professor desenha uma linha reta, afirma que ela é infinita para ambos os lados, representando com uma seta para cada lado e pergunta aos estudantes o que ele desenhou, esperando-se a resposta uma reta. Após isso, o professor pergunta quantos pontos podemos localizar sobre ela, deixando claro a relação de pertinência entre os pontos e a reta. Professor direciona para e resposta infinitos, deixando claro que se uma reta é infinita, então existem infinitos pontos pertencentes a ela.

   (5 min.)

3. Quando chegar no conceito de plano, para que os alunos entendam o conceito de dimensão, o professor desenha um retângulo no quadro e pergunta quantas dimensões que os alunos acham que tem a figura desenhada. Espera-se que muitos respondam 4 erroneamente. A partir daí, o professor explica o conceito de dimensão, diferenciando de lado, afirmando que a figura desenhada tem 2 dimensões e completa dizendo que um plano tem duas dimensões.

   (5 min.)

4. Uma vez consolidados os conceitos primitivos, o professor começa a construir com os estudantes todas as nuances que compõem as proposições primitivas. O professor desenha uma reta no quadro e pergunta quantos pontos são possíveis localizar sobre essa reta. Faz o mesmo com um plano. Dependendo das respostas, o professor vai direcionando o raciocínio para a resposta infinitos. Professor aproveita para explicar os conceitos de pontos colineares e não-colineares. Como isso, explica-se o postulado da existência.

   (5 min.)

5. O professor desenha agora um ponto e pergunta quantas retas podem passar por esse ponto. Dependendo das respostas, o professor vai direcionando o raciocínio para a resposta infinitas. Professor desenha agora dois pontos e afirma que são distintos, aproveitando para explicar o conceito de distintos na geometria. Professor pergunta quantas retas distintas é possível passar por esses dois pontos. Espera-se que respondam uma. Depois, o professor desenha três pontos

não colineares e pergunta quantos planos distintos passam por esses três pontos simultaneamente. Para melhorar o raciocínio dos estudantes, o professor pede para que eles enxerguem o quadro branco como um plano. Dessa forma, após ouvir as respostas, o professor vai direcionando para a resposta um plano. Dessa forma, explica-se o postulado da determinação.

(5 min.)

6. O professor desenha novamente dois pontos no quadro e afirma, com base no passo anterior, que esses pontos estão no mesmo plano. Recapitula o que acabou de explicar perguntando quantas retas passam pelos dois pontos ao mesmo tempo. Completa afirmando que, de forma lógica, todos os pontos pertencentes à reta pertencem ao plano. Assim, explica-se o postulado da inclusão.

   (3 min.)

7. O professor desenha uma reta no quadro e direciona: "*Já que, por ser infinita, uma reta possui infinitos pontos, destaquemos dois pontos quaisquer que pertencem a essa reta. Quando fazemos isso, entre esses dois pontos o que podemos ver que existe?.*" Dependendo das respostas, que podem ser uma reta menor, ou o pedaço da reta, o professor vai construindo o conceito de segmento de reta. Após isso, o professor direciona: "*Destaquemos agora apenas um ponto pertencente a essa reta. Observemos que, como a reta é infinita para ambos os lados, esse ponto pode estar no centro dessa reta, logo, quando destacamos o ponto e consideramos só um lado da reta a partir dele, temos a metade de uma reta, ou se preferir, uma parte de uma reta que tem ponto de início, mas não tem fim.*" Com isso, o professor vai construindo o conceito de semirreta, explicando o significado do prefixo *semi*, que quer dizer metade ou quase e, especificamente em geometria, significa metade.

   (5 min.)

8. Professor conclui com uma revisão do que foi explicado na aula, fazendo perguntas de tudo o que foi explorado e aplica um exercício para que os estudantes julguem como verdadeira ou falsa cada afirmação feita acerca dos conceitos e proposições primitivas trabalhados. As questões são retiradas do livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, Volume 9, Capítulo I (questões 1, 2, 3, 4 e 5) e Capítulo II (questão 13) que pode ser acessado pelo link https://drive.google.com/file/d/1ZoKUNMDOUiaYlPD-8zqkubOVteCE-cJI/view?usp=sharing.

(16 min.)

9. Após a resolução do exercício, o professor entrega para os estudantes uma folha que contém o resumo conceitual trabalhado na aula. Esse resumo é o ponto 2.2 (p. 24) desse trabalho.

   (2 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes e através da resolução do exercício proposto.

Referências:

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, Volume 9, 8ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005.

4.2 Proposta de Sequência Didática 02

Essa sequência didática se propõe a recapitular o estudo introdutório de ângulos, suas classificações e suas ramificações, partindo dos conceitos básicos até o ponto ao qual se relaciona o quinto postulado de Euclides, ou seja, das relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal.

Conteúdos: Ângulos

Metodologia: Aula expositiva, atividades em dupla.

Tempo de aula: 100 minutos.

Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias coloridas e monocromáticas, lápis, palitos de picolés, tachinhas.

Habilidades BNCC:

(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.

(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.

Objetivos:

- Compreender a definição de ângulo;
- Revisar ou aprender como se utiliza um transferidor para traçar ângulos;
- Assimilar, na prática, o que é um ângulo agudo, obtuso, reto e raso;

- Entender e diferenciar os conceitos de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares;
- Compreender e aplicar a relação existente entre ângulos opostos pelo vértice;
- Aprender todas as características peculiares dos ângulos formados por duas retas paralelas cortados por uma transversal, identificando os pares de ângulos que são congruentes e os que são suplementares.

Procedimentos Metodológicos:

1. Professor organiza os estudantes em duplas e inicia a aula perguntando se eles sabem definir o que é ângulo. Após ouvir as respostas, o professor pede que os alunos observem o "canto" do quadro, ou da porta. Professor afirma que essas aberturas são chamadas de ângulos, definindo-os de maneira informal.
   (2 min.)
2. O professor marca um ponto no quadro e a partir dele traça uma semirreta, e antes de dizer, pergunta para os estudantes o que ele acaba de desenhar. Após ouvir as respostas, o professor desenha outra semirreta partindo do mesmo ponto, distinta da primeira. Pergunta quantos ângulos eles estão vendo. Espera-se que respondam dois e afirma que é um maior e outro menor, ou um interno e outro externo. Dessa forma, define formalmente ângulo.
   (3 min.)
3. O professor pergunta aos estudantes se eles sabem quais as unidades utilizadas para medir ângulos. Espera-se que respondam graus e radianos, os dois mais comuns e afirma que vão trabalhar com o grau. Dessa forma, pergunta quantos graus tem o ângulo formado no canto do quadro, da porta ou entre a parede e o piso da sala. Com isso, relembra o que é um ângulo reto. Após isso, entrega um transferidor para cada estudante nas duplas e faz um breve resumo das características desse instrumento, o tamanho de 1° e de como se traça um ângulo utilizando-o. Depois, solicita que os alunos tracem os ângulos 60°, 90°, 135° e 180°.
   (15 min.)
4. O professor entrega dois palitos de picolé e uma tachinha para cada dupla, pede para que unam os dois palitos de modo que a tachinha seja o vértice e os palitos sejam as semirretas que formam um ângulo. Assim, utilizando a mesa da carteira como plano, pede para representar um ângulo de 90°, depois um menor que 90º, outro maior que 90° e outro igual a 180°, conceituando assim os ângulos especiais

reto, agudo, obtuso e raso. Explica também que, mesmo em posições diferentes, se os ângulos tiverem a mesma abertura, são chamados de congruentes. Além disso, explica também, usando um terceiro palito de picolé, o que são ângulos complementares e suplementares.

(10 min.)

5. Aproveitando a temática ângulo, o professor utiliza os palitos de picolé, sem as tachinhas para explicar o conceito de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares. Inicia perguntando se sabem o significado desses termos e afirma que retas paralelas são retas que não se cruzam, retas concorrentes são o inverso de retas paralelas e perpendiculares são retas concorrentes que formam 90° entre si. Além disso, pede para observar os ângulos formados num par de retas concorrentes quaisquer formadas pelos palitos de picolés. Com isso, explica o que são ângulos opostos pelo vértice e qual a relação entre eles.

   (12 min.)

6. O professor desenha duas retas paralelas no quadro e depois traça uma reta cortando essas duas retas e pergunta aos estudantes quantos ângulos eles podem ver. Após as respostas, o professor entrega para cada estudante uma imagem colorida idêntica a figura 19 (p. 31) desse trabalho. Pede para irem identificando os pares de ângulos opostos pelo vértice. Depois, pede para irem identificando os pares de ângulos suplementares para ir reforçando o que foi trabalhado no início da aula.

   (15 min.)

7. Após isso, pede para citarem quais os ângulos que estão no mesmo lado da reta transversal, trabalhando assim o conceito de ângulos colaterais. Em seguida, pede para citarem os ângulos que estão em lados opostos da reta transversal, trabalhando assim o conceito de ângulos alternos.

   (6 min.)

8. Logo depois, pede para anotarem os pares de ângulos que são colaterais e estão entre as retas paralelas, os pares de ângulos que são colaterais e não estão entre as retas paralelas, os pares de ângulos que são alternos e estão entre as retas paralelas e por fim, os ângulos que são alternos e não estão entre as retas paralelas. Quando terminarem de anotar, o professor vai dando as devidas nomenclaturas: colaterais internos, colaterais externos, alternos internos e alternos externos. Essas anotações serão feitas numa folha a parte com as

identificações de acordo com o especificado nos passos 6, 7 e 8 (Anexo I - questão 1, p. 120).

(14 min.)

9. Depois de identificados os ângulos em seus devidos pares, o professor explica as relações existentes entre os pares de ângulos colaterais internos, colaterais externos, alternos internos e alternos externos utilizando as cores da imagem para facilitar a visualização. Com isso, o professor pode para identificarem os pares de ângulos congruentes e os pares de ângulos suplementares, sendo um referente a uma reta paralela e outro referente à outra reta paralela, em cada par (Anexo I - questão 2, p. 121).

   (15 min.)

10. O professor entrega uma outra imagem de retas paralelas cortadas por uma transversal, distinta da figura 19, e pede para os alunos julgarem como verdadeiras ou falsas as afirmações sobre os pares de ângulos citados em cada uma delas, fixando assim o que foi trabalhado na aula (Anexo I - questão 3, p. 121).

    (8 min.)

Observação: Importante entregar uma questão por vez.

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em dupla, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula.

Referências:

OLIVEIRA, Raul Rodrigues. Retas paralelas cortadas por uma transversal. Mundo Educação. Disponível em https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/duas-retas-paralelas-cortadas-por-uma-transversal.htm, acessado em 18 de julho de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.3 Proposta de Sequência Didática 03

A presente sequência didática se propõe a sugerir um percurso que o professor pode fazer para tornar claros todos os aspectos relevantes na introdução ao estudo de figuras planas, começando pelos polígonos, promovendo um estudo mais prático e minucioso para os estudantes.

Conteúdos: Figuras Planas - Introdução ao estudo de polígonos

Metodologia: Aula expositiva, atividades em dupla.

Tempo de aula: 90 minutos.

Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias coloridas ou monocromáticas, lápis, projetor.

Habilidades BNCC:

(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

Objetivos:

- Compreender o conceito de polígono e suas características;
- Diferenciar polígonos côncavos de polígonos convexos;
- Entender como se nomeia um polígono;
- Identificar todos os elementos de um polígono;
- Apreender o conceito de polígonos regulares;
- Identificar através de imagens as figuras planas que são polígonos, dentre eles, os que são côncavos e os que são convexos e quais são regulares.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor inicia a aula pedindo para os estudantes olharem em torno da sala e para identificarem figuras geométricas. Das figuras que foram sendo identificadas, pergunta quais delas são planas. Depois de ouvir as respostas, o professor explica ou recapitula que figuras planas são figuras que se localizam num único plano, ou seja, têm duas dimensões, que são diferentes de lados. O professor usa o exemplo do retângulo, que tem quatro lados, mas só duas dimensões, largura e comprimento, ou largura e altura.

   (3 min.)

2. Após essa conversa introdutória, o professor pergunta se os alunos sabem o que é um polígono, se sabem definir esse tipo de figura plana. Antes de definir, o professor pergunta quais as figuras identificadas no passo anterior são polígonos, e vai dizendo o que é e o que não é sem dar a definição, a fim dos estudantes identificarem de forma lógica as características.

   (3 min.)

3. O professor explica a etimologia e a definição de polígono com as três características expostas do tópico 3.1 (p. 34) desse trabalho. Logo após, expõe imagens como a figura 20 (p. 34) desse trabalho utilizando o projetor para que os estudantes identifiquem o que é o que não é polígono com base no que foi explicado. Importante expor uma figura plana por vez sem deixar explícito se é ou não polígono.
   (10 min.)
4. O professor explica que, independentemente do formato, um polígono possui sempre os mesmos elementos: vértice, lado, diagonal, ângulos internos e ângulos externos. O professor expõe o quadrilátero da figura 21 (p. 34) desse trabalho com o auxílio de um projetor para explicar os elementos e suas definições. As definições estão no tópico 3.1.1 (p. 34) desse trabalho também. Após isso, pergunta: "*Quantos vértices têm esse polígono? Quantos lados? Quantos ângulos internos? Quantos ângulos externos? E quantas diagonais?*" Essas perguntas são cruciais para reforçar e verificar se os alunos entenderam.
   (10 min.)
5. O professor explica agora o que são polígonos côncavos e polígonos convexos, utilizando a definição no tópico 3.1.2 (p. 35) e a figura 22 (p. 35) desse trabalho. Após isso, retoma as imagens utilizadas no passo 3 que são polígonos para os alunos irem identificando quais são côncavos e quais são convexos.
   (10 min.)
6. O professor relembra as nomenclaturas que os polígonos recebem de acordo com o número de lados. Pode utilizar a figura 23 (p. 36) desse trabalho projetada para fazer essa recapitulação. Logo após, retoma as imagens utilizadas no passo anterior e pede para que os alunos anotem o nome de cada uma delas no caderno de acordo com o que acabou de explicar.
   (10 min.)
7. Por fim, o professor expõe no projetor os polígonos da figura 26 (p. 37) sem as identificações por escrito, só as imagens e pergunta: "*São polígonos? São côncavos ou convexos? Qual o nome de cada um de acordo com o que foi explicado no passo anterior?*". Depois disso, faz a pergunta principal: "*Além do que foi dito antes, o que esses polígonos tem em comum?*". Espera-se que respondam que têm lados iguais. O professor explica que os riscos em cada lado são usados para identificar se os lados tem a mesma medida ou não. Conclui

explicando a definição de polígonos regulares, deixando bem claro que para ser regular, um polígono precisa ser primeiramente convexo.

(14 min.)

8. O professor organiza a sala em duplas para responder uma atividade para fixar o que foi revisado/explicado. Mesmo estando em duplas, é interessante que cada estudante receba uma cópia da atividade. O professor trabalha com a imagem (Anexo II, p. 122) adaptada de https://www.storyboardthat.com/pt/lesson-plans/introdu%C3%A7%C3%A3o-%C3%A0-geometria/pol%C3%ADgonos. A atividade (Anexo II, p. 122 e 123) consiste no professor entregar a imagem e dar os comandos gradativamente, um de cada vez, através do projetor, a fim de fazer os alunos praticarem o que foi explanado. Quando os alunos estiverem respondendo cada comando, o professor circula pela sala verificando a produtividade e se os estudantes têm alguma dúvida.

   (20 min.)

9. O professor corrige as questões e entrega uma cópia do resumo do que foi explicado retirado dos tópicos 3.1, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.5 (p. 34 a 37) desse trabalho.

   (10 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em dupla, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula.

Referências:

PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva. Volume 1 (Ensino Médio), 2. ed., São Paulo, Editora Moderna, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.4 Proposta de Sequência Didática 04

Essa sequência didática propõe uma introdução ao estudo de triângulos, buscando fixar a base desse assunto, pois é primordial para o estudo da geometria euclidiana no ensino médio. Nessa proposta serão abordadas as classificações dos triângulos, que serão fixadas através de várias atividades práticas e de observação, e a soma dos ângulos internos, que será demonstrada de uma forma lúdica e simples.

Conteúdos: Triângulos - Classificação e Soma dos ângulos internos.

Metodologia: Aula expositiva, atividade em trios, aprendizagem cooperativa.

Tempo de aula: 100 minutos.

Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias coloridas ou monocromáticas, lápis, projetor, transferidor de plástico, transferidor maior de madeira, régua e tesoura sem ponta.

Habilidades BNCC:

(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Objetivos:

- Recapitular as classificações dos ângulos e como se mede um ângulo com o auxílio de um transferidor;
- Identificar um triângulo através de suas características;
- Compreender e pôr em prática a classificação de um triângulo de acordo com as medidas de seus lados e de acordo com as medidas dos ângulos internos;
- Apreender de forma prática que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor organiza a sala em trios, de modo a ter sempre um aluno com menos dificuldade em matemática em cada trio.
   (5 min.)
2. Professor inicia a aula perguntando se os alunos lembram da classificação dos ângulos, quando ele é agudo, obtuso, reto ou raso, partindo do princípio de que a sequência didática 02 foi aplicada. Depois de ouvir as respostas, o professor projeta a imagem da figura 11 (p. 28) desse trabalho e recapitula as classificações.
   (4 min.)
3. O professor entrega a imagem da primeira questão da atividade (Anexo III, p. 124) para cada estudante e pede para escreverem nos retângulos a classificação de cada ângulo.
   (8 min.)

4. O professor faz a correção comentada com a imagem projetada no quadro.
   (8 min.)
5. O professor entrega um transferidor para cada aluno e explica como mede um ângulo usando esse instrumento, fazendo inicialmente uma breve apresentação dele, depois medindo um dos ângulos projetados anteriormente utilizando seu transferidor maior de madeira. Após isso, pede para cada trio medir os ângulos da imagem entregue e registrar as medidas nos círculos indicados.
   (10 min.)
6. O professor faz a correção comentada com a imagem projetada no quadro.
   (8 min.)
7. Após isso, o professor projeta imagens de triângulos de formatos variados e pergunta o que essas figuras têm em comum. Após ouvir que são triângulos, o professor confirma e complementa que são polígonos de três lados, por consequência de três ângulos internos, recebendo daí o nome de triângulos.
   (2 min.)
8. Professor explica que os triângulos recebem classificações observando as medidas dos seus lados e dos seus ângulos internos e pergunta se os alunos lembram dessas classificações. Utiliza as definições do tópico 3.2.1 (p. 37) e a figura 28 (p. 38) desse trabalho projetadas no quadro para explicar a classificação de acordo com as medidas dos lados. Reforça que a classificação de triângulo isósceles permite afirmar que todo triângulo equilátero é isósceles.
   (4 min.)
9. Professor entrega a imagem da segunda questão da atividade (Anexo III, p. 125) e pede para que os alunos meçam, com o auxílio de uma régua entregue por ele as medidas dos triângulos indicados e preencham a primeira coluna de classificação dos triângulos.
   (5 min.)
10. Professor utiliza as definições do tópico 3.2.2 (p. 38) e a figura 29 (p. 38) desse trabalho projetadas no quadro para explicar a classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos.
    (4 min.)
11. Ainda na segunda questão da atividade, professor pede para que os alunos meçam, com o auxílio do transferidor as medidas dos ângulos internos dos

triângulos indicados e preencham a segunda coluna de classificação dos triângulos.

(5 min.)

12. O professor corrige a questão preenchendo a tabela projetada no quadro.

    (10 min.)

13. O professor entrega uma folha em branco para cada estudante, pede para eles desenharem com o auxílio da régua um triângulo qualquer e pede para que eles desenhem os ângulos internos colocando a sua identificação gráfica. Depois, pede para que recortem com régua ou tesoura sem ponta entregue por ele o triângulo desenhado (opcionalmente, o professor pode entregar o triângulo já recortado). Após isso, pede para que eles destaquem os três ângulos, cortando as pontas dos triângulos e juntem eles. Daí, pergunta qual a medida do ângulo formado fazendo a junção dos três ângulos internos. Após responderem 180°, o professor conclui afirmando e expondo no quadro que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.

    (10 min.)

14. O professor solicita que respondam à questão 3 da atividade (Anexo III, p. 126).

    (7 min.)

15. O professor corrige e aproveita para retomar as classificações ao fazer a correção.

    (10 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em trios, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula.

Referências:

LUIZ, Robson. Classificação de triângulos. Mundo Educação. Disponível em https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm, acessado em 17 de julho de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.5 Proposta de Sequência Didática 05

A proposta dessa sequência didática é sugerir uma forma de trabalhar o Teorema de Tales a partir de uma situação-problema, utilizando a mesma linha de raciocínio para relatar fatos históricos relevantes sobre o assunto, de modo que esse teorema possibilite um entendimento maior sobre a semelhança e congruência de triângulos, partindo das definições e características até os casos específicos que permitem concluir que dois triângulos são semelhantes ou congruentes.

Conteúdos: Teorema de Tales, Semelhança de triângulos e Congruência de triângulos.

Metodologia: Aula expositiva, atividade em dupla, aprendizagem cooperativa

Tempo de aula: 100 minutos.

Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias coloridas ou monocromáticas, lápis, projetor, triângulos recortados.

Habilidades BNCC:

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

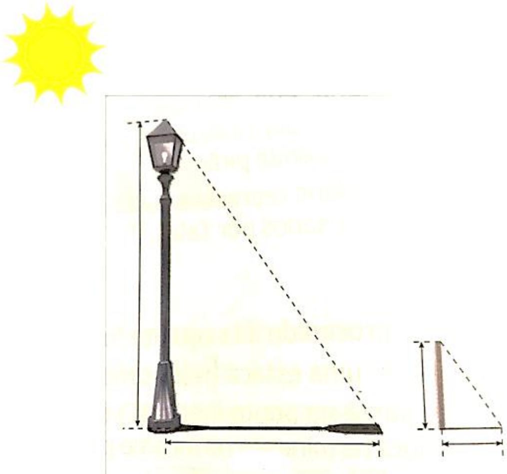
Objetivos:

- Compreender e aplicar o Teorema de Tales através de uma situação-problema e de demonstrações formais.
- Reconhecer quando dois triângulos são semelhantes;
- Utilizar o Teorema de Tales em triângulos semelhantes, compreendendo que suas medidas são proporcionais;
- Entender o que são triângulos congruentes;
- Reconhecer e identificar os casos de semelhança e de congruência de triângulos.

Procedimentos Metodológicos:

1. Professor inicia a aula perguntando se os alunos lembram do Teorema de Tales. Depois de ouvir as respostas, pergunta como os alunos fariam para medir a altura de um poste sem precisar subir nele. Ao ouvir as respostas, o professor complementa que é algo melhor de fazer durante o dia, com a luz do sol. E pergunta novamente como fariam. Depois de ouvir as respostas, o professor projeta a seguinte imagem:

Figura 91 - Introdução ao Teorema de Tales - Altura de um poste



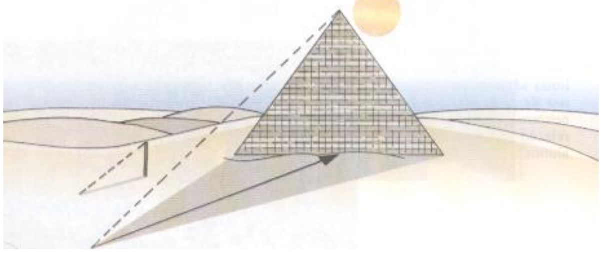
Fonte: Adaptado de https://brainly.com.br/tarefa/21420249

e explica que a sombra que o poste faz permite calcular sua altura. Entretanto, é indispensável ter um outro instrumento, nesse caso uma estaca, para possibilitar que essa medição seja feita, usando o mesmo raciocínio. O professor pergunta o que o poste e a estaca têm em comum. Espera-se que respondam estão em pé, ou na vertical e o professor vai direcionando para que percebam que estão em paralelo.

(5 min.)

2. O professor explica que os elementos apresentados que permitem calcular a altura do poste compõem o Teorema de Tales. Após fazer um breve relato histórico, que é possível encontrar em https://infoenem.com.br/saiba-tudo-sobre-o-teorema-de-tales/, o professor explica como Tales fez para calcular a altura de uma pirâmide, que foi utilizando os mesmos princípios introduzidos na situação anterior e projeta a seguinte imagem, utilizando a sombra dela, um graveto e sua sombra:

Figura 92 - Introdução ao Teorema de Tales - Altura de uma pirâmide



Fonte: https://infoenem.com.br/saiba-tudo-sobre-o-teorema-de-tales/

e explica que a equação utilizada foi:

$$\frac{\text{Altura da pirâmide}}{\text{Sombra da pirâmide}} = \frac{\text{Altura do graveto}}{\text{Sombra do graveto}}$$

e pede para observarem que os elementos semelhantes estão na mesma posição. Conclui falando que a relação entre altura e sombra do mesmo elemento é uma razão e quando há uma igualdade entre duas razões, há uma relação de proporcionalidade, ou seja, as alturas reais são proporcionais aos respectivos comprimentos de sombra.

(8 min.)

3. O professor explica formalmente o Teorema de Tales utilizando o tópico 3.2.4 (p. 40) desse trabalho, projetando a figura 35 (p. 40).

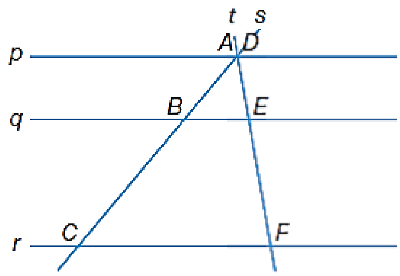
(8 min.)

4. Após isso, projeta a figura 91 (p. 84), atribui 2 m para a altura da estaca, 1 m para o comprimento da sua sombra e 3 m para o comprimento da sombra do poste e mostra como calcular a altura do poste. Depois, projeta a figura 91, atribui 2 m para a altura do graveto, 4 m para o comprimento de sua sombra e 50 m para o comprimento da sombra da pirâmide e pede para calcularem a altura da pirâmide.

(10 min.)

5. Utilizando a figura 35 (p. 40) desse trabalho, o professor pede para os alunos imaginarem a reta transversal t sendo movimentada para a esquerda sem mudar a sua inclinação até o ponto D ficar sobre o ponto A e pergunta que figura seria formada. Espera-se que a resposta seja um triângulo. Logo, o professor projeta a imagem formada a seguir:

Figura 93 - Teorema de Tales - Semelhança de Triângulos



Fonte: Adaptada de Paiva, 2010

O professor pede para observarem que são dois triângulos, um maior e outro menor e vai direcionando para que percebam que o maior é como uma ampliação do triângulo menor, logo podemos dizer que são semelhantes. Dessa forma, o professor introduz o conceito de semelhança de triângulos.

(7 min.)

6. O professor comenta que o esquema da figura 93 possibilita utilizar o Teorema de Tales e utiliza o tópico 3.2.5 (p. 41) para explicar formalmente a semelhança de triângulos.
   (6 min.)
7. O professor explica os casos de semelhança deixando claro que de acordo com a definição de semelhança de triângulos, é necessário que sejam obedecidas três congruências entre os ângulos internos e três proporcionalidades entre os lados. Entretanto, se escolhermos de forma adequada algumas dessas condições, se forem obedecidas, as outras também serão. São os chamados casos de semelhança. O professor utiliza os tópicos 3.2.5.1, 3.2.5.2 e 3.2.5.3 (p. 42) para isso.
   (10 min.)
8. O professor organiza a sala em duplas e pede para resolverem a questão 1 do exercício (Anexo IV, p. 127).
   (10 min.)
9. O professor entrega para cada dupla os triângulos da questão 1 recortados e pede para verificarem se acertaram ao identificarem as duplas de triângulos semelhantes, colocando um dentro do outro. Pede para observarem os lados que ficam em paralelo, utilizando as condições do Teorema de Tales para reforçar que há uma proporcionalidade entre os lados e segmentos, e concluir que são semelhantes.
   (7 min.)
10. O professor explica agora o conceito de congruência, depois explica o que são triângulos congruentes, utilizando o tópico 3.2.6 (p. 43) desse trabalho. Além disso, explica os casos de congruência utilizando os tópicos 3.2.6.1, 3.2.6.2, 3.2.6.3 e 3.2.6.4 (p. 43 e 44) desse trabalho.
    (14 min.)
11. Professor solicita que resolvam a questão 2 do exercício (Anexo IV, p. 128), disponível em http://maniadecalcular.blogspot.com/2019/09/exercicios-sobre-congruencia-de.html.
    (9 min.)
12. Professor corrige a questão e encerra a aula.
    (6 min.)

Avaliação:
A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em trios, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula.

Referências:
BUGLIA, Fernando. Saiba Tudo Sobre o Teorema de Tales. 2016. Info ENEM. Disponível em https://infoenem.com.br/saiba-tudo-sobre-o-teorema-de-tales/, acessado em 18 de julho de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.6 Proposta de Sequência Didática 06

Partindo do princípio que os estudantes precisam compreender as unidades de medida, inicialmente de comprimento, para entenderem a geometria, essa sequência didática propõe uma forma de trabalhar com os alunos de modo a deixar claro quais são as unidades de medida de comprimento, qual delas é melhor utilizada para determinada situação e como realizar conversões entre elas.

Conteúdos: Conversão de unidades de medida de comprimento.
Metodologia: Aula expositiva, atividade em dupla, aprendizagem cooperativa.
Tempo de aula: 80 minutos.
Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio
Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias, lápis, projetor, régua grande de madeira.
Habilidades BNCC:
(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.
Objetivos:
- Compreender a utilização da tabela de conversão de unidades;
- Entender o que são múltiplos e submúltiplos de uma unidade e as relações matemáticas entre eles;
- Converter unidades de medida de comprimento.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor organiza a sala em duplas, sendo sempre um com uma proficiência maior e outro com uma menor e inicia a aula perguntando: De que forma dizemos a largura do quadro branco? E o tamanho de uma caneta? E a distância da sua casa à escola?

   (7 min.)

2. Com base nas respostas, o professor explica que em 1960 surgiu o Sistema Internacional de Unidades (SI) com o objetivo de padronizar no mundo todo as unidades de medida (comprimento, área, volume, velocidade, etc.) e que a unidade de medida de comprimento padrão é o metro. Depois, o professor desenha um segmento de reta no quadro de 1 m de comprimento com o auxílio de uma régua grande de madeira e mostra o tamanho que tem um metro.

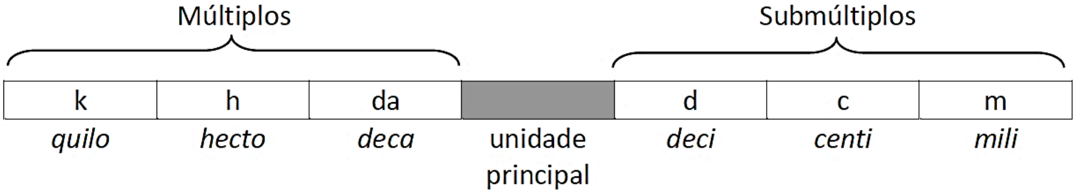
   (5 min.)

3. O professor explica que para dizer a largura do quadro branco ou da sala de aula, por exemplo, é mais comum em metros. No entanto, para dizer o tamanho da caneta, em metros não faz muito sentido, em centímetros é mais comum, por ser algo menor que o metro. Assim como a distância da casa à escola, o mais comum é em quilômetros, por ser algo muito maior que o metro. Desse modo, surgem os múltiplos e submúltiplos do metro. O professor pergunta se os alunos sabem quais são os múltiplos e submúltiplos do metro. Além disso, pergunta e posteriormente explica o significado de "ser múltiplo de" e de "ser submúltiplo de".

   (5 min.)

4. O professor apresenta a figura 94 a seguir para explicar o sistema de conversão de unidades.

Figura 94 - Sistema de Conversão de Unidades



Fonte: Próprio autor

O professor explica que cada quadro representa 10 vezes a casa do lado direito e a décima parte da casa do lado esquerdo. Por exemplo, o deca (da) é 10 vezes a unidade principal, o deci (d) é 1/10 da unidade principal. Assim, tomando por base a unidade principal, temos a seguinte relação:

Tabela 1 - Relação entre múltiplos e submúltiplos com a unidade principal

	Prefixo	Nome	Potência de base 10 em relação à unidade principal
Múltiplos	k	quilo	10^3 = 1000 vezes a unidade principal
	h	hecto	10^2 = 100 vezes a unidade principal
	da	deca	10 = 10 vezes a unidade principal
Submúltiplos	d	deci	10^{-1} = unidade principal dividida por 10
	c	centi	10^{-2} = unidade principal dividida por 100
	m	mili	10^{-3} = unidade principal dividida por 1000

Fonte: Próprio autor

(8 min.)

5. O professor deixa claro que essa tabela se refere a toda unidade de medida, seja comprimento, volume, massa, etc. Associando a comprimento, como a unidade principal é o metro, então basta colocar o m (metro) ao lado de cada prefixo e fica:

Tabela 2 - Relação entre múltiplos e submúltiplos com o metro

	Unidade	Nome	Potência de base 10 em relação ao metro
Múltiplos	k**m**	quilô**metro**	10^3 = 1000 vezes o metro
	h**m**	hectô**metro**	10^2 = 100 vezes o metro
	da**m**	decâ**metro**	10 = 10 vezes o metro
Submúltiplos	d**m**	decí**metro**	10^{-1} = o metro dividido por 10
	c**m**	centí**metro**	10^{-2} = o metro dividido por 100
	m**m**	milí**metro**	10^{-3} = o metro dividido por 1000

Fonte: Próprio autor

O professor retoma o segmento de reta de 1 m desenhado no quadro e reforça explicando que, por exemplo, ao dividir esse segmento em 10 partes iguais, cada parte equivale a 1 decímetro, ao dividir em 100 partes iguais, cada parte equivale a 1 centímetro, como podem ver o tamanho numa régua. Por outro lado, se pegar esse segmento em multiplicar o seu comprimento por 10, o que se obtém é o tamanho de um decâmetro e se multiplicar por 1000 temos um quilômetro.

(10 min.)

6. O professor projeta novamente a figura 94, acrescenta o metro (m) em cada prefixo e pergunta como faria para converter um metro em milímetros usando só essa tabela. Depois de ouvir as respostas, o professor mostra como faz, onde cada salto dado de uma casa para a outra equivale à vírgula do número a ser convertido se movimentando no mesmo sentido.

(5 min.)

7. O professor explica que para fazer uma conversão, não é obrigatório ser da principal para algum múltiplo ou submúltiplo ou vice-versa. Por exemplo, o professor pergunta quantos decímetros cabem dentro de um decâmetro. Depois de ouvir as respostas, o professor reforça que basta observar o sentido que é feito o movimento na tabela. Como nesse exemplo pretende-se converter 1 dam em dm, então basta multiplicar por $10^2 = 100$, pois o dam é maior que o dm e há um deslocamento de 2 casas para a direita. Se fosse de 1 cm para 1 hm, por exemplo, bastava dividir por 10 000 ou se preferir, multiplicar por 10^{-4}, pois o cm é menor que o hm e há o deslocamento de 4 casas para a esquerda.
   (5 min.)
8. O professor retoma os exemplos iniciais, afirma que a largura do quadro é 3 m, o tamanho da caneta é 15 cm e a distância da casa à escola é 34 km e pede para que os alunos escrevam:
   - A largura do quadro em centímetros;
   - O tamanho da caneta em milímetros;
   - A distância da casa à escola em decâmetros;
   - A largura do quadro em hectômetros;
   - O tamanho da caneta em decímetros;
   - A distância da casa à escola em metros.

   (8 min.)
9. O professor corrige os itens e pede para que os alunos observem o porquê de ser mais comum dar a medidas dos exemplos nas unidades iniciais;
   (6 min.)
10. Professor pede para que os alunos respondam à questão 1 do exercício (Anexo V, p. 129).
    (5 min.)
11. O professor corrige a questão 1.
    (5 min.)
12. Professor pede para que os alunos respondam à questão 2 do exercício (Anexo V, p. 129).
    (6 min.)
13. O professor corrige a questão 2 e encerra a aula.
    (6 min.)

Avaliação:
A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em duplas, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula.

Referências:

CRUZADO, Fábio Leandro. Plano de aula: Conversão de Medidas de Comprimento em Metro. Nova Escola. Disponível em https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/conversao-de-medidas-de-comprimento-em-metro/1657, acessado em 19 de julho de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.7 Proposta de Sequência Didática 07

O Teorema de Pitágoras é um dos conteúdos de geometria que está presente no currículo de todas as séries do ensino médio como um dos principais pré-requisitos. Desse modo, essa sequência didática propõe um percurso que pode ser seguido até chegar no referido teorema, começando de fatoração de um número inteiro, perpassando pelo cálculo de raiz quadrada. Para a demonstração do teorema, parte-se do princípio que os alunos entendem que a área de um quadrado de lado 1 cm, por exemplo, é 1 cm^2.

Conteúdos: Raiz quadrada de um número real e Teorema de Pitágoras.
Metodologia: Aula expositiva, atividade em dupla e em grupo, aprendizagem cooperativa.
Tempo de aula: 100 minutos.
Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio
Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias, lápis, projetor, papel duplex em três cores.
Habilidades BNCC:
(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Objetivos:

- Revisar o processo de fatoração de um número inteiro para dar base para a definição da raiz quadrada de um número;
- Recapitular que a uma raiz pode ser expressa na forma de uma potência com expoente fracionário;
- Identificar um triângulo retângulo e seus lados;
- Assimilar na prática o enunciado do Teorema de Pitágoras;
- Aplicar o Teorema de Pitágoras e todos os seus pré-requisitos na resolução de questões.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor organiza a sala em duplas, sendo sempre um com uma proficiência maior e outro com uma menor e inicia a aula perguntando o que são números primos. Após ouvir as respostas, o professor explica que números primos são números que possuem apenas dois divisores, o 1 e ele próprio e dá exemplos de números primos e números que não são primos (compostos), mostrado os seus divisores. Depois disso, o professor explica que qualquer número composto pode ser expresso na forma de produto entre números primos. Por exemplo, $6 = 2 \cdot 3$, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ e explica que esse procedimento se chama fatoração, uma vez que os números que se multiplicam são chamados de fatores. Daí, o professor pergunta se eles lembram de como faz a fatoração de um número. Muitos alunos chamam o de m.m.c. o procedimento de fatoração, pois geralmente no ensino fundamental a fatoração foi explicada como método para se definir o mínimo múltiplo comum entre números.

   (5 min.)

2. O professor revisa esse procedimento fatorando os números: 30, 12 e 45.

   (5 min.)

3. O professor pede para os alunos fatorarem os seguintes números: 24, 50 e 36 e corrige posteriormente.

   (10 min.)

4. O professor pergunta se os estudantes sabem o que é uma raiz quadrada. Após ouvir as respostas, o professor explica que definir a raiz quadrada de um número é encontrar alguém cujo quadrado é esse número, ou seja, alguém multiplicado por ele mesmo. Em seguida, o professor pergunta a raiz quadrada de 25 e justifica

que é 5 pois $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$. Ou seja, $\sqrt{25} = 5$. O professor aproveita e explica a propriedade de escrever uma raiz em formato de potência com expoente fracionário, justificando o surgimento do expoente 1. O professor prossegue alegando que alguns números já temos mentalizados o valor de sua raiz quadrada, e complementa que quando tem raiz quadrada exata, é dito quadrado perfeito. Por exemplos, sabemos que $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, etc. No entanto, alguns números não temos de prontidão na mente o valor de sua raiz quadrada, justificando assim que o método mais eficiente para definir o valor de uma raiz de um número, seja quadrada ou não, é a fatoração.

(3 min.)

5. O professor utiliza a fatoração para de definir os valores de $\sqrt{64}$ e $\sqrt{144}$. Depois utiliza a $\sqrt{20}$ para explicar através da fatoração quando o número não é quadrado perfeito e como faz a simplificação.

   (5 min.)

6. O professor pede para os alunos calcularem as seguintes raízes: $\sqrt{256}$, $\sqrt{324}$ e $\sqrt{45}$ e $\sqrt{120}$ e corrige posteriormente.

   (13 min.)

7. O professor parte agora para a geometria, desenhando um triângulo retângulo no quadro. Pergunta aos alunos se sabem a classificação do triângulo que acaba de desenhar (pode ser projetado no quadro). Após responderem, o professor explica que os lados de um triângulo retângulo possuem nomes, sendo os lados que formam o ângulo reto os catetos e o lado oposto ao ângulo reto a hipotenusa, aproveitando para explicar que ela é o lado maior do triângulo retângulo. O professor desenha ou projeta triângulos retângulos em várias posições e vai identificando com os alunos os catetos e a hipotenusa de cada um deles.

   (5 min.)

8. O professor pergunta se eles lembram do Teorema de Pitágoras e o que ele diz. Com base nas respostas, o professor reforça que esse teorema só pode ser aplicado em triângulos retângulos e começa a realizar uma atividade prática para demonstrar o que ele diz.

   (2 min.)

9. O professor pede para formarem quartetos, juntado uma dupla com outra, que podem ser vizinhas para agilizar. O professor entrega para cada quarteto um

material feito com papel duplex. Esse material é composto por um triângulo retângulo amarelo de medidas 9 cm, 12 cm e 15 cm, 9 quadrados verdes de lado 3 cm e 16 quadrados vermelhos de lado 3 cm e vai seguindo os seguintes passos:

- O professor pede para que os alunos considerem que cada quadrado tem lado medindo 1 unidade e pergunta a área de cada quadrado.
- O professor pede para que preencham o cateto menor com quadrados verdes e o cateto maior com quadrados vermelhos, de modo a fazer uma fileira de quadrados junto de cada cateto.
- Depois, o professor pede para irem fazendo novas fileiras com os quadrados de mesma cor de modo até acabarem e sem passar da medida dos catetos.
- O professor pergunta que figura foi formada com os quadrados verdes e com os quadrados vermelhos. Ao responderem um quadrado maior, o professor pergunta: Qual a medida do lado do quadrado verde? Qual a medida do lado do quadrado vermelho? Qual a área do quadrado verde formado? Qual a área do quadrado vermelho formado?
- O professor pede para que os alunos façam o mesmo procedimento agora na hipotenusa, primeiro usando os quadrados vermelhos, depois preenchendo com os verdes.
- Ao concluírem, o professor pergunta se sobrou algum quadradinho e depois, que figura foi formada com todos eles. Ao responderem um quadrado maior, o professor pergunta: Qual a medida do lado do quadrado formado? Qual a área desse quadrado?
- O professor dá os seguintes comandos: consideremos que *a* é a medida da hipotenusa desse triângulo e *b* e *c* as medidas dos catetos menor e maior, respectivamente. Dessa forma, o quadrado verde formado ao lado do cateto *b* tem lado *b,* o quadrado vermelho formado ao lado do cateto *c* tem lado *c* e o quadrado formado ao lado da hipotenusa *a* tem lado *a*. Assim, qual seria a área do quadrado verde em temos de *b*? E a área do quadrado vermelho em termos de *c*? E a área do quadrado formado ao lado da hipotenusa em temos de a? Espera-se que respondam b^2, c^2 e a^2 respectivamente.
- O professor pede para observarem que juntando os quadrados que formaram o verde maior com os quadrados que formaram o vermelho menor foi obtido

exatamente o quadrado formado junto da hipotenusa. Logo, $b^2 + c^2 = a^2$, ou seja, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

(10 min.)

10. O professor utiliza o exemplo da atividade prática para revisar a aplicação do Teorema de Pitágoras, usando catetos 3 cm e 4 cm para calcular a hipotenusa.

    (2 min.)

11. O professor explica um exemplo para calcular a medida de um cateto tendo o outro cateto e a hipotenusa usando cateto 8 cm e hipotenusa 10 cm.

    (2 min.)

12. Após isso, o professor pede para que os alunos respondam à questão 1 do exercício (Anexo VI, p. 130). Sugere-se que o professor libere item a item. O professor utiliza a dificuldade que encontrarão no item d para explicar como se calcula o quadrado de números com radicais.

    (20 min.)

13. O professor corrige a questão 1.

    (8 min.)

14. O professor pede para que os alunos respondam às questões 2 e 3 (Anexo VI, p. 130), trabalhando a condição necessária para um triângulo ser retângulo.

    (7 min.)

15. O professor corrige as questões 2 e 3 e encerra a aula.

    (3 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente, em duplas e em quartetos, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula.

Referências:

NOÉ, Marcos. Ensinando o Teorema de Pitágoras. Brasil Escola. Disponível em https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/ensinando-teorema-pitagoras.htm, acessado em 20 de junho de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.8 Proposta de Sequência Didática 08

A sequência didática que segue sugere uma aula sobre quadriláteros, partindo da sua definição e soma dos ângulos internos, indo até os quadriláteros notáveis, buscando mostrar de forma prática e palpável todas as características relevantes de cada polígono trabalhado.

Conteúdos: Quadriláteros: elementos e características.

Metodologia: Aula expositiva, atividade em dupla, aprendizagem cooperativa.

Tempo de aula: 100 minutos.

Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, cópias, lápis, projetor, papel duplex, régua e transferidor.

Habilidades BNCC:

(EF08MA12) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

Objetivos:

- Reconhecer as principais características dos quadriláteros;
- Entender a classificação dos trapézios;
- Identificar um quadrilátero notável através de suas características.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor organiza a sala em duplas, sendo sempre um com uma proficiência maior e outro com uma menor e inicia a aula projetando a figura 95 a seguir e pergunta o que essas imagens têm em comum.

Figura 95 - Quadriláteros

Fonte: https://escolaeducacao.com.br/quadrilatero/

Espera-se as respostas: são polígonos, são quadriláteros, são figuras de quatro lados, etc. Depois de definir quadrilátero formalmente usando o tópico 3.3 desse trabalho, o professor pergunta se os alunos sabem o que são diagonais. O professor define diagonal como um segmento de reta que liga dois vértices não adjacentes de um polígono. Após essa explicação, pergunta quantas diagonais tem um quadrilátero. Depois de ouvir as respostas, o professor demonstra utilizando a figura 95 que um quadrilátero tem duas diagonais. Utiliza ela também para recapitular o conceito de polígono côncavo e convexo.

(5 min.)

2. O professor entrega uma folha em branco para cada estudante, pede para eles desenharem com o auxílio de uma régua um quadrilátero qualquer e pede para que eles desenhem os ângulos internos colocando a sua identificação gráfica. Depois, pede para que recortem com régua ou tesoura sem ponta entregue por ele o quadrilátero desenhado (opcionalmente, o professor pode entregar o quadrilátero já recortado). Após isso, pede para que eles destaquem os quatro ângulos, cortando as pontas do quadrilátero e juntem eles. Daí, pergunta qual a medida do ângulo formado fazendo a junção dos quatro ângulos internos. O professor faz a observação de o ângulo formado representa uma volta completa. Após responderem 360°, o professor conclui afirmando e expondo no quadro que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360°.
   (6 min.)
3. O professor prossegue a aula falando que existem alguns quadriláteros específicos, que possuem nomes próprios, chamados de quadriláteros notáveis. O professor pede que os alunos citem esses quadriláteros.
   (2 min.)
4. Após as respostas, o professor projeta a figura 96 a seguir.

Figura 96 - Trapézios

Fonte: Adaptado de https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-trapezio.htm

   e pergunta o que esses quadriláteros têm em comum. Após ouvir as respostas, o professor pede para observarem que os três quadriláteros possuem, cada um, dois lados paralelos e, com isso, define trapézio, utilizando o tópico 3.3.2.1 (p. 48) desse trabalho.
   (5 min.)
5. O professor fala que os trapézios podem se classificar de três formas e utiliza o tópico 3.3.2.1 (p. 48) e a figura 54 (p. 49) para explicar as classificações.
   (6 min.)
6. O professor entrega para cada dupla dois trapézios isósceles recortados sem dar essa informação e segue os seguintes passos:

- Pergunta qual a classificação deles e depois de ouvir as respostas, pede para comprovarem medindo com a régua.
- Após isso, pede para dobrar um deles na direção oposta das bases de modo que um ângulo da base fique sobre o outro e pergunta o que observam. Espera-se que respondam que os ângulos das bases são congruentes. Assim, o professor explica que em todo trapézio isósceles, os ângulos de cada base são congruentes.
- Pede para desenharem as diagonais do outro trapézio e medirem o comprimento delas. O professor pergunta o que observaram e após a respostas, o professor explica que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

(8 min.)

7. O professor projeta a figura 57 (p. 50) desse trabalho e pergunta o que os alunos podem dizer de características do quadrilátero exposto. Depois de ouvir as respostas, o professor utiliza o tópico 3.3.2.2 (p. 50) desse trabalho para definir um paralelogramo.

   (5 min.)

8. O professor entrega dois paralelogramos recortados para cada dupla, pede para cortarem um deles ao meio na vertical e o outro da horizontal e pergunta:
   - O que vocês observam sobre os lados opostos desses paralelogramos, colocando um sobre outro? Espera-se que respondam que têm medidas iguais. Assim explica que em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.
   - O que vocês observam sobre os ângulos opostos desses paralelogramos, colocando um sobre outro? Espera-se que respondam que têm medidas iguais. Assim explica que em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

   (6 min.)

9. O professor projeta a figura 59 (p. 51) desse trabalho e pergunta que figura é. Espera-se que todos respondam um retângulo. Após isso, pergunta quais são as características do retângulo que os alunos conhecem. Depois de ouvir as respostas, o professor explica a definição de retângulo utilizando o tópico 3.3.2.3 (p. 51) desse trabalho e deixa claro que o nome retângulo vem de ângulo reto.

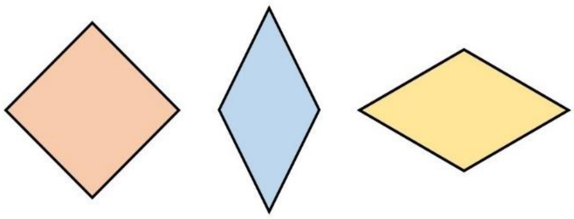
(5 min.)

10. Após entregar um retângulo recortado para cada aluno, o professor segue os seguintes passos:
    - Pergunta qual a posição dos lados opostos de um retângulo. Espera-se que respondam paralelos. Logo, pede para verificarem a definição de paralelogramo e pergunta o que concluem. Dessa forma, o professor explica que todo retângulo é um paralelogramo.
    - Pergunta o que os lados opostos de um retângulo têm em comum. Espera-se que respondam que têm medidas iguais. Logo, o professor explica que os lados paralelos de um retângulo possuem medidas iguais
    - Pede para que desenhem as diagonais e pergunta o que elas têm em comum. Espera-se que, com o auxílio de uma régua, respondam que têm tamanhos iguais. Logo, o professor explica que em todo retângulo as diagonais são congruentes.

(6 min.)

11. O professor projeta a figura 97 a seguir

Figura 97 - Losangos



Fonte: https://lereaprender.com.br/area-do-losango/

e pergunta o que esses quadriláteros têm em comum. Após responderem, entrega essa mesma imagem impressa a cada estudante e pergunta:

- O que vocês podem dizer sobre as medidas dos lados em cada um deles? Espera-se que respondam que são iguais.
- O que vocês podem dizer sobre a posição dos lados opostos em cada um deles? Espera-se que respondam que são paralelos, explicando assim que todo losango é um paralelogramo.

O professor concluir que essas duas características definem um losango.

(6 min.)

12. O professor utiliza o tópico 3.3.2.4 (p. 52) desse trabalho para explicar a definição de losango e deixa claro que basta ser um quadrilátero com lados iguais para ser losango.
    (4 min.)
13. O professor pede para desenharem as diagonais dos losangos entregues no passo 11, medirem com transferidor os ângulos formados entre elas e pergunta o que podem concluir sobre a posição das diagonais. Espera-se que respondam que são perpendiculares. O professor aproveita para recapitular o conceito de retas perpendiculares.
    (5 min.)
14. Por fim, o professor projeta um quadrado no quadro e pergunta quais as características. Espera-se que observem que os quatro lados são iguais e paralelos, fazendo assim concluírem que:
    - Todo quadrado é um paralelogramo, por possui lados opostos paralelos;
    - Todo quadrado é um retângulo, por conter todos os ângulos internos retos;
    - Todo quadrado é um losango, por possuir os quatro lados iguais.

    (5 min.)
15. O professor pede para os alunos resolverem a questão 1 do exercício (Anexo VII, p. 131).
    (6 min.)
16. O professor pede para os alunos resolverem a questão 2 do exercício (Anexo VII, p. 132).
    (5 min.)
17. O professor pede para os alunos resolverem a questão 3 do exercício (Anexo VII, p. 132).
    (5 min.)
18. O professor corrige as questões e encerra a aula.
    (10 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente, em duplas e em quartetos, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula.

Referências:

CASADEI, Marcelo Aparecido. Plano de aula: Quadriláteros. Nova Escola. Disponível em https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/6ano/matematica/quadrilateros/773, acessado em 20 de junho de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.9 Proposta de Sequência Didática 09

Partindo do princípio que os estudantes tenham estudado algo sobre círculo e circunferência no ensino fundamental, essa sequência didática propõe uma aula que parte das definições formais desses dois entes geométricos e de seus elementos até a dedução prática e construída da fórmula que permite calcular o comprimento de uma circunferência.

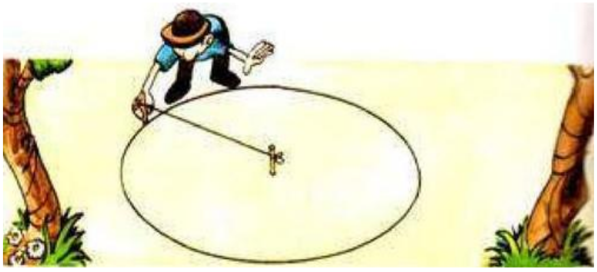
Conteúdos: Circunferência e círculo: elementos e comprimento da circunferência.
Metodologia: Aula expositiva, atividade em dupla ou em grupos, aprendizagem cooperativa.
Tempo de aula: 50 minutos.
Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio
Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, lápis, projetor, objetos cilíndricos de tamanhos variados, régua (grande de madeira para o professor e de plástico para os alunos), transferidor ou esquadro (grande de madeira para o professor e de plástico para os alunos), barbante.
Habilidades BNCC:
(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
Objetivos:

- Diferenciar uma circunferência de um círculo através de seus conceitos;
- Identificar todos os elementos de uma circunferência;
- Localizar o centro de uma circunferência através da interseção das perpendiculares de duas cordas;
- Deduzir e aplicar a fórmula que permite calcular o comprimento da circunferência.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor organiza a sala em duplas (ou em grupos, dependendo da quantidade de alunos), sendo sempre um com uma proficiência maior e outro com uma menor, e começa a aula perguntando o que eles sabem sobre círculo e circunferência. Após as respostas, o professor explica, usando o tópico 3.4 (p. 54) e as figuras 66 e 67 (p. 54 e 55) desse trabalho para explicar formalmente o que é circunferência e o que é círculo. Além disso, o professor utiliza o tópico 3.4.1 (p. 55) e a figura 68 (p. 55) para explicar seus elementos. Ao explicar o centro e o raio, o professor pode pedir para os estudantes imaginarem a situação da figura 98 a seguir

Figura 98 - Desenhando uma circunferência



Fonte: https://docplayer.com.br/16677099-Circunferencia-e-circulo.html

e explica que o centro é onde a estaca fixa se localiza e o raio é a corda esticada. ***(10 min.)***

2. O professor entrega vários objetos cilíndricos diferentes, um para cada dupla ou grupo, uma régua, um transferidor ou um esquadro e um pedaço de barbante e uma folha em branco para cada estudante. Após isso, o professor irá explicar como localizar o centro de uma circunferência:
   - O professor projeta uma circunferência no quadro, com o auxílio de uma régua grande de madeira, desenha uma corda dela em qualquer posição e marca o seu ponto médio. Depois pede para os alunos pegarem o objeto que receberam e desenharem uma circunferência contornando-o na folha em branco.
   - O professor traça uma reta perpendicular à corda passando pelo seu ponto médio com o auxílio do transferidor ou esquadro grande de madeira, e pede para os alunos fazerem o mesmo na folha.
   - O professor faz o mesmo procedimento com outra corda na mesma circunferência e pede para os alunos fazerem na folha.
   - O professor explica que o centro se localiza na interseção das duas perpendiculares.

Obs.: Esse passo-a-passo com as devidas ilustrações está disponível em: https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/rqwXkJsGzWJQpYY3gWX2GaQyhJsMuKaPWwhg2TGQYNCbAfWm8Vz7Z44WWeNM/material-comp-mat7-17geo02.pdf

(12 min.)

3. O professor pede para que, com o auxílio do barbante e depois da régua, cada dupla ou grupo meça o comprimento da circunferência de cada objeto. Depois, pede para que os alunos meçam com a régua o comprimento do diâmetro, reforçando que ele mede o dobro do raio e, por consequência, precisa passar pelo centro da circunferência. À medida que forem medindo, o professor monta uma tabela no quadro, onde na primeira coluna serão registrados os comprimentos de cada circunferência e na segunda coluna os comprimentos dos seus respectivos diâmetros. O professor vai colhendo os dados de cada dupla ou grupo e vai registrando na tabela. Não é necessário ser tão rigoroso com as medidas, basta usar uma casa após a vírgula.

   (5 min.)

4. Com os dados preenchidos, o professor pergunta o que eles podem observar em comum na relação entre o comprimento e o diâmetro de cada circunferência. O professor dá um tempo para cada dupla ou grupo pensarem e irem fazendo as suas deduções.

   (5 min.)

5. Partindo do que cada um foi dizendo, o professor vai direcionando para o fato de que a razão entre o comprimento C e o diâmetro d sempre está sendo uma constante k, que de acordo com os dados está entre 3 e 3,2, ou seja:

$$\frac{C}{d} = k$$

   Como o diâmetro d vale o dobro do raio r, ou seja, d = 2 · r, então:

$$\frac{C}{2r} = k \Rightarrow C = k \cdot 2 \cdot r$$

   O professor explica que essa constante k é o número irracional π, cuja aproximação mais conhecida do seu valor é 3,14, no entanto, como é irracional, seu valor é uma dízima não periódica. Logo, o comprimento C de uma circunferência é dado por $\boldsymbol{C = 2 \cdot \pi \cdot r}$.

Com isso, é deduzida a fórmula para calcular o comprimento da circunferência, onde basta conhecer a medida do seu raio.

(5 min.)

6. O professor pede para que cada dupla ou grupo verifique o valor do comprimento de suas circunferências, utilizando o raio delas e a fórmula que acaba de ser deduzida. Além disso, pede para que façam três cálculos, um usando 3, outro usando 3,1 e outro usando 3,14 como valor de π. Com isso, o professor explica que, quanto mais arredondar o valor de π, mais o valor do comprimento se distancia do real.

   (10 min.)

7. O professor mede o comprimento do diâmetro ou o raio da circunferência que ele fez no quadro e pede para que os alunos calculem o seu comprimento, utilizando 3,14 como valor aproximado para π.

   (3 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente, em duplas ou em grupos, e através da realização dos cálculos solicitados no decorrer de toda a aula.

Referências:

SOARES, Paula Vieira. Plano de aula: Circunferência, comprimento e diâmetro. Nova Escola. Disponível em https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/circunferencia-comprimento-e-diametro/1380#section-materiaisDeApoio-3, acessado em 21 de junho de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.10 Proposta de Sequência Didática 10

A seguinte sequência didática propõe um conjunto de passos que podem auxiliar o professor a conseguir que os estudantes entendam na prática, com material concreto, a origem e quais os procedimentos utilizados para calcular a área de triângulos e dos quadriláteros notáveis. Além disso, reforça de uma forma sutil o cálculo de perímetro de polígonos.

Conteúdos: Perímetro de polígonos, Área de triângulos e de quadriláteros notáveis.

Metodologia: Aula expositiva, atividade em dupla, aprendizagem cooperativa.

Tempo de aula: 100 minutos.

Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4 (normal e 60 kg), lápis, projetor, objetos cilíndricos de tamanhos variados, réguas, esquadros, cópias monocromáticas e coloridas, tesouras sem ponta.

Habilidades BNCC:

(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

Objetivos:

- Entender o que significa calcular uma área;
- Compreender através de demonstrações com material concreto como se calcula a área de triângulos e dos quadriláteros notáveis;
- Identificar o tipo de triângulo ou quadrilátero, saber quais as medidas necessárias para calcular sua área e de fato calcular utilizando as fórmulas demonstradas.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor organiza a sala em duplas sendo sempre um com uma proficiência maior e outro com uma menor, e começa a aula perguntando se eles sabem o que é o perímetro de um polígono. Com base nas respostas, o professor explica que é a soma das medidas de todos os lados de um polígono e resolve um exemplo.
   (1 min.)
2. Depois, pergunta se sabem o que significa calcular uma área. Após ouvir as respostas, o professor explica que a área de uma figura plana é o quanto que essa figura ocupa no plano. Como o plano têm duas dimensões, para o cálculo de área sempre serão necessárias o valor das duas, direta ou indiretamente. O professor explica as 4 propriedades que estão no tópico 3.5.1 (p. 59) desse trabalho com ilustrações ou desenhando no quadro. Explica também como é dada uma unidade de medida de área, utilizando a propriedade 4 que diz: *A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm*^{2}.
   (5 min.)
3. O professor pergunta:
   - Como fazemos para calcular a nossa altura?
   - Em que sentido tem que ficar o nosso corpo em relação ao solo para medir a nossa altura?

Assim, explica que a altura de uma figura plana ou espacial é um segmento de reta perpendicular à base dessa figura.

(2 min.)

4. Sobre o retângulo, o professor segue esses passos:
   - Pergunta como faz para calcular a área de um retângulo.
   - Depois de ouvir as respostas, o professor desenha um retângulo no quadro e pergunta quantas dimensões ele possui. Alguns irão responder 4, por misturar com o conceito de lados e outros podem responder corretamente 2. O professor pergunta sobre quais são essas dimensões.
   - Depois, o professor usa o exemplo do tópico 3.5.1.1 (p. 60) para imaginarem um retângulo de base 5 cm e altura 3 cm, dividindo-o em vários quadrados de lado 1 cm. Desse modo, ficam 5 colunas de 3 quadrados em cada uma delas, totalizando 15 quadrados, pois $5 \cdot 3 = 15$. Como a unidade de medida é o cm, então temos $A = 5\ cm \cdot 3\ cm = 15\ cm^2$, recapitulado que qualquer coisa vezes ela mesma é ela ao quadrado, e explicando de onde veio o termo quadrado para o expoente 2.
   - Assim, se mostra que a área de um retângulo de base *b* e altura *h* é dada por $\boldsymbol{A = b \cdot h}$.
   - Após isso, o professor pergunta como fariam para medir a área do chão da sala de aula. Com base nas respostas, o professor supõe quais são as dimensões e calcula sua área, dessa vez em m^2.

   (5 min.)
5. O professor explica a área do quadrado, afirmando que, como ele é um retângulo com todos os lados iguais, se sua base mede *a*, sua altura também mede *a*. Assim, aplicando a área do retângulo, temos que a área do quadrado é dada por $\boldsymbol{A = a^2}$.

   (2 min.)
6. Sobre o paralelogramo o professor segue os passos:
   - O professor projeta a imagem de um paralelogramo e pergunta que figura é e como fazemos para calcular sua área.
   - Depois de ouvir as respostas, o professor entrega para cada dupla um paralelogramo recortado (Anexo VIII, p. 133) em folha 60 kg. Pede para observarem que a base mede *b* e altura mede *h* pois forma 90° com a base.

Assim como $\overline{CD}$ = *b*, então $\overline{AB}$ = *b* pois os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

- O professor pode para recortarem o triângulo ADE e colocarem sobre o triângulo BCF externo ao paralelogramo. Pergunta que figura foi formada. Espera-se que respondam um retângulo. O professor pergunta qual a medida da base e qual a medida da altura desse retângulo.
- Ao responderem, o professor pede para observarem que a figura mudou de formato, mas nada foi retirado ou colocado. Dessa forma, a área não sofreu mudanças. Assim, a área de paralelogramo é dada pela fórmula da área de um retângulo de mesma base e mesma altura, ou seja, ***A = b · h***.
- O professor resolve um exemplo.

(10 min.)

7. Sobre o triângulo, o professor segue os passos:
   - O professor entrega para cada dupla dois triângulos congruentes (Anexo VIII, p. 132) em folha 60 kg, de base *b* e altura *h*.
   - O professor pede para juntarem os dois triângulos de modo a formar um quadrilátero.
   - Ao juntarem, o professor pergunta qual foi o quadrilátero encontrado. Espera-se que respondam um paralelogramo.
   - Assim, o professor explica que o paralelogramo foi formado por dois triângulos congruentes, logo, de áreas iguais. Como a área de um paralelogramo é dada por A = b · h, então cada triângulo tem área sendo a metade da área do paralelogramo, ou seja, ***A =*** $\boldsymbol{\frac{b \cdot h}{2}}$. O professor resolve um exemplo de área de um triângulo qualquer.

(10 min.)

8. Sobre o triângulo equilátero, o professor segue os passos:
   - O professor entrega um triângulo equilátero (Anexo VIII, p. 134) recortado em folha 60 kg para cada dupla, pede para traçarem sua altura e utiliza a demonstração do tópico 3.5.1.4.1 (p. 62) usando o Teorema de Pitágoras para demonstrar a área de um triângulo equilátero de lado *a* que é dada por ***A =*** $\boldsymbol{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$.
   - O professor resolve um exemplo de área de um triângulo equilátero.

(10 min.)

9. Sobre o hexágono regular, o professor segue os passos:
    - O professor entrega um hexágono regular (Anexo VIII, p. 134) com lado igual ao do triângulo equilátero em folha 60 kg, e pede para traçarem três diagonais, partindo de um vértice a outro, saltando dois deles.
    - O professor pergunta em quais figuras o hexágono foi dividido. Espera-se que respondam em 6 triângulos. O professor pergunta o que esses triângulos têm em comum com o triângulo do passo anterior.
    - Depois de responderem, o professor explica que a área de um hexágono regular é 6 vezes a área de um triângulo equilátero de mesmo lado, ou seja, é dada por $\boldsymbol{A = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$.
    - O professor resolve um exemplo de área de um hexágono regular.

(5 min.)

10. Sobre o trapézio, o professor segue os passos:
    - O professor entrega um trapézio (Anexo VIII, p. 134) recortado em folha 60 kg para cada dupla e pergunta qual o nome do quadrilátero entregue. Após ouvir as respostas, diz para observarem que um trapézio tem duas bases paralelas, sempre uma maior que a outra. Pede para chamarem de *B* a base maior e *b* a base menor e *h* a sua altura.
    - O professor pode para traçarem uma de duas diagonais com o auxílio de uma régua entregue pelo professor, fazerem um corte sobre essa diagonal e pergunta em quais figuras o trapézio foi dividido. Espera-se que respondam em dois triângulos. O professor diz que a área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos.
    - O professor recapitula que para calcular a área de um triângulo qualquer precisa só da medida da sua base e de sua altura.
    - O professor pergunta qual a medida da base do triângulo maior e de sua altura. Espera-se que respondam *B* e *h* respectivamente. Então sua área é $A = \frac{B \cdot h}{2}$.

- O professor pergunta qual a medida da base do triângulo menor e de sua altura. Espera-se que respondam *b* e *h* respectivamente. Então sua área é $A = \frac{b \cdot h}{2}$.
- Dessa forma, a área do trapézio é

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}.$$

- O professor resolve um exemplo de área de um trapézio.

(10 min.)

11. Sobre o losango, o professor segue os passos:
    - O professor entrega um losango (Anexo VIII, p. 134) recortado para cada dupla e pergunta qual o nome do quadrilátero entregue. Após ouvir as respostas, pede para traçarem as duas diagonais e nomear de *D* a diagonal maior e de *d* a diagonal menor.
    - Pergunta em quais e quantas figuras o losango foi dividido. Espera-se que respondam em 4 triângulos.
    - Pergunta ainda o que esses triângulos têm em comum. Espera-se que respondam que são retângulos e congruentes.
    - Professor pede para recortarem sobre essas diagonais e obterem os quatro triângulos. Após recortados, junta-se eles formando o losango originalmente.
    - O professor pede para pegarem os dois triângulos de baixo e mover para cima formando um retângulo. Pergunta qual a medida da base do retângulo. Espera-se que respondam *D*. Depois o professor pergunta a medida da altura do retângulo e vai direcionando para perceberem que é a metade de *d*, ou seja, *d/2*. Dessa forma, a área do losango é a área de um retângulo de base *D* e altura *d/2*, ou seja,

$$A = D \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{2}}.$$

    - O professor resolve um exemplo de área de um losango.

(10 min.)

12. O professor entrega os polígonos da atividade (Anexo IX, p. 135 e 136) e pede para responderem ao solicitado. Importante imprimir a própria página do anexo respeitando as dimensões originais das figuras. As medidas sugeridas para impressão de cada item do exercício são: a) base: 7,5 cm e altura: 4, b) lado: 4,5

cm, c) base: 6 cm e altura: 3,5 cm, d) base: 8 cm e altura: 5 cm, e) lado: 6 cm f) lado: 4 cm, g) base maior: 7 cm, base menor: 5 cm e altura: 4 cm, h) diagonal maior: 9 cm e diagonal menor: 6 cm.
(20 min.)

13. O professor corrige as questões e encerra a aula.
(10 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em duplas, e através da resolução dos itens propostos.

Referências:

PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva. Volume 1 (Ensino Médio), 2. ed., São Paulo, Editora Moderna, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

4.11 Proposta de Sequência Didática 11

Fechando a temática cálculo de área, a presente sequência didática propõe um percurso para demonstrar de forma prática e dedutiva a fórmula que permite calcular a área de um círculo e de um setor circular a partir de polígonos inscritos numa circunferência.

Conteúdos: Área do círculo e do setor circular.
Metodologia: Aula expositiva, atividade em dupla, aprendizagem cooperativa.
Tempo de aula: 100 minutos.
Público alvo: 1ª Série - Ensino Médio
Recursos: Pincel, quadro branco, folhas A4, lápis, projetor, réguas, transferidores e cópias coloridas.

Habilidades BNCC:

(EF08MA16) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Objetivos:

- Entender o que são polígonos inscritos numa circunferência;
- Compreender e aplicar o cálculo da área de um círculo utilizando uma expressão obtida a partir da aproximação por áreas de polígonos inscritos;

- Entender e aplicar o cálculo de área de um setor circular através de uma regra de três simples que envolve as medidas do círculo ao qual ele pertence.

Procedimentos Metodológicos:

1. O professor organiza a sala em duplas sendo sempre um com uma proficiência maior e outro com uma menor, e começa a aula perguntando se lembram a fórmula que permite calcular a área de um círculo. Após ouvir as respostas, o professor explica que vai explicar a fórmula da área do círculo de forma prática e dedutiva.

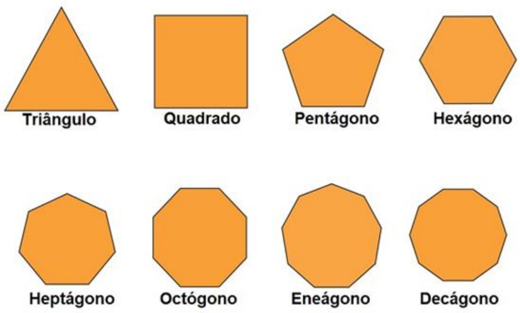
   (2 min.)

2. O professor começa explicando o que é um polígono inscrito numa circunferência, utilizando a figura 88 (p. 65) desse trabalho.

   (2 min.)

3. O professor pergunta o que são polígonos regulares, e com base nas respostas, explica que são polígonos que possuem todos os lados com mesma medida e projeta a Figura 99:

Figura 99 - Polígonos Regulares (figuras e nomenclaturas)



Fonte: https://rodriguesdorea.wordpress.com/2020/12/30/poligonos-regulares/

   (2 min.)

4. O professor entrega uma régua e a imagem impressa de um quadrado inscrito numa circunferência (Anexo X, p. 137) para cada dupla e segue os passos:
   - Diz que é um polígono regular inscrito numa circunferência;
   - Pergunta qual o nome do polígono;
   - Pede para ligarem com segmentos de reta cada vértice do polígono ao centro da circunferência com lápis ou grafite;
   - Pergunta o que esses segmentos representam em relação à circunferência. Espera-se que respondam que todos representam o raio.
   - Pergunta quais e quantas figuras foram obtidas.

- Pergunta o que essas figuras têm em comum. Com base nas respostas, o professor vai direcionando para que percebam que são triângulos isósceles congruentes;
- O professor pergunta se o lado do quadrado for *a*, como é dado o perímetro? Espera-se que respondam $4 \cdot a$, pois são 4 lados iguais.
- O professor pergunta como fariam para calcular área de cada triângulo. Depois de ouvir as respostas, o professor pergunta se o lado do polígono for *a*, então o que *a* é do triângulo? Espera-se que respondam a base.
- O professor pede para traçarem a altura de um dos triângulos com caneta vermelha ou azul e chamarem de *h*. Aproveita para reforçar que a altura tem que formar 90° com a base.
- Sendo assim, como é dada a área do triângulo? Espera-se que respondam $\frac{a \cdot h}{2}$.
- E como seria a área do quadrado a partir da área de cada triângulo? Como são 4 triângulos congruentes, então é $4 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$.

(10 min.)

5. O professor entrega agora a imagem impressa de um hexágono regular inscrito numa circunferência (Anexo X, p. 138) para cada dupla e segue os passos:
   - Diz que é também é um polígono regular inscrito numa circunferência;
   - Pergunta qual o nome do polígono;
   - Pede para ligarem com segmentos de reta cada vértice do polígono ao centro da circunferência com lápis ou grafite e pede para observarem que os segmentos também representam o raio da circunferência;
   - Pergunta quais e quantas figuras foram obtidas. Pede para observarem que também são triângulos isósceles congruentes. O professor vai direcionando para que percebam que a quantidade de triângulos é sempre a mesma quantidade de lados do polígono inscrito.
   - Com base no que foi feito com o quadrado, o professor pede para observar que o perímetro do hexágono é dado por $6 \cdot a$ área do hexágono a partir da área dos triângulos é dada por $6 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$.

(8 min.)

6. O professor entrega agora a imagem impressa de um octógono regular inscrito numa circunferência (Anexo X, p. 139) para cada dupla e segue os passos:
   - Diz que é também é um polígono regular inscrito numa circunferência;
   - Pergunta qual o nome do polígono;
   - Pede para ligarem com segmentos de reta cada vértice do polígono ao centro da circunferência com lápis ou grafite e pede para observarem que os segmentos também representam o raio da circunferência;
   - Pergunta quais e quantas figuras foram obtidas. Pede para observarem que também são triângulos isósceles congruentes.
   - Com base no que foi feito com o quadrado e o hexágono, o professor pede para observar que o perímetro do octógono é dado por $8 \cdot a$ área do octógono a partir da área dos triângulos é dada por $8 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$.

   (6 min.)
7. Com isso, o professor entrega a imagem impressa de um dodecágono regular e de um icoságono inscrito numa circunferência (Anexo X, p. 140 e 141) para cada dupla e segue os passos:
   - O professor pergunta se seguirmos os mesmos passos, um padrão vai se repetindo e começa a montar no quadro uma tabela onde vai relacionando o número de lados do polígono regular, seu perímetro e sua área em função da área dos triângulos, conforme a tabela a seguir:

Tabela 3 - Relação entre o número de lados, o perímetro e a área de um polígono regular

Polígono regular inscrito	Número de lados	Perímetro	Área
Quadrado	4	$4 \cdot a$	$4 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$
Hexágono	6	$6 \cdot a$	$6 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$
Octógono	8	$8 \cdot a$	$8 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$
Dodecágono	12	$12 \cdot a$	$12 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$
Icoságono	20	$20 \cdot a$	$20 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$

Fonte: Próprio autor

- Observando a tabela montada, o professor pergunta qual é o padrão que se repete. Com base nas respostas, vai explicando que quanto maior for a quantidade de lados do polígono inscrito, mais o perímetro do polígono vai se aproximando do comprimento da circunferência, a altura de cada triângulo vai se aproximando do raio da circunferência e, por consequência, a área do polígono inscrito vai se aproximando da área do círculo.

(10 min.)

8. Com isso, o professor pergunta:
   - Se o polígono regular inscrito tem *n* lados, como ficaria na tabela? E preenche mais uma linha da tabela com o número de lados sendo n, ou seja, o perímetro será $(n \cdot a)$ e a área será $n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$.
   - O perímetro $(n \cdot a)$ do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência $(2 \cdot \pi \cdot r)$;
   - A altura *h* de cada triângulo tende a se igualar ao raio *r* da circunferência;
   - A área desse polígono tende a se igualar à área *A* do círculo.
   - Desse modo, a expressão $A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow A = (n \cdot a) \cdot \frac{h}{2}$ *tende a* $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área do círculo.
   - Dessa forma, a área *A* de um círculo de raio *r* é dada por $A = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} \Rightarrow$ $\boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}$.
   - O professor resolve um exemplo, fornecendo raio r = 6 cm e usando 3,14 como valor de π.

(15 min.)

9. Sobre o setor circular, o professor segue esses passos:
   - O professor pede para imaginarem uma pizza, que tem formato circular, com tamanho M, com 8 fatias, e projeta a figura 100:

Figura 100 - Setor Circular (Pizza)

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/49911011

- O professor explica que cada fatia é uma parte do círculo e todas tem origem no centro. A essa fatia se dá o nome de setor circular.
- O professor utiliza o tópico 3.5.2.1 (p. 66) e a figura 90 (p. 67) desse trabalho para explicar formalmente o que é um setor circular e seus elementos.
- Voltando para a figura 98, o professor pergunta quanto é que dá a soma dos ângulos de todos os setores circulares dessa pizza. Espera-se que respondam 360°, por ser uma volta completa em torno do centro.
- O professor pede para suporem que todas as fatias são congruentes e pergunta quanto mede o ângulo central de cada fatia. Direciona para que percebam que basta dividir 360° por 8, que dá 45°.
- O professor pergunta como fariam para calcular a área de cada setor circular da pizza. O professor direciona para que percebam que é só dividir a área do círculo por 8.
- Com isso, o professor direciona o raciocínio para que os estudantes percebam que para calcular a área do setor circular precisa da área do círculo ao qual ele pertence.
- Assim, o professor pergunta: num círculo, qual a fórmula da área? E qual a medida do ângulo central?
- Daí, estabelecendo essa relação, como fazemos para calcular a área do setor circular referente a esse círculo? Que medida precisamos dele? Assim, o professor direciona para perceberem que são medidas proporcionais, logo, basta aplicar uma regra de três dessa forma:

Ângulo central		**Área**
360º	————	πr^2
α	————	A_{setor}

- O professor volta na figura 100, supõe 15 cm como raio do círculo (pizza) e mostra como calcula a área do círculo e depois do setor circular utilizando a regra de três.

(15 min.)

10. O professor entrega o exercício (Anexo XI, p. 142 e 143) e pede para cada dupla responder. Importante não modificar as dimensões das imagens da questão 2, mantendo 4 cm como raio do primeiro círculo e 6 cm como raio do segundo. O professor deve entregar um transferidor para medirem os ângulos da questão 2.

(18 min.)

11. O professor corrige as questões, enfatiza a questão de quanto maior for o arredondamento de π, mais distante do valor real fica. Aconselha também a substituir o valor de π só no final do cálculo.

    (10 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em duplas, e através da resolução dos itens propostos.

Referências:

PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva. Volume 1 (Ensino Médio), 2. ed., São Paulo, Editora Moderna, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo o ensino de geometria euclidiana representando um enorme desafio para os professores, mais ainda para os que lecionam no ensino médio, é possível superá-lo e diminuir as dificuldades que os estudantes enfrentam para aprender os conceitos geométricos e aplicar na prática.

Esse trabalho teve como propósito auxiliar os professores na tarefa de fazer com que os alunos vejam sentido no que estão estudando em geometria euclidiana plana, tirando esse estudo do campo abstrato através do desenvolvimento de procedimentos e atividades que permitem que eles percebam com materiais concretos todas as definições e propriedades dos elementos geométricos, construindo-os e fazendo medições.

Com a apresentação da estrutura das sequências didáticas propostas, objetivou-se também mostrar para o professor que ele precisa ir além de definir os conteúdos a serem trabalhados ao elaborar o seu plano de aula, pois pensar e registrar os procedimentos e o tempo necessário para executar cada um deles é um fator que se mostra muito importante na definição de uma aula que tenha uma introdução, um desenvolvimento e um desfecho, dando a noção sobre até qual ponto ele pode ir para que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados com sucesso.

Desse modo, o presente trabalho se mostra uma ferramenta didática importante e diferenciada, pois o detalhamento e a mensuração da duração de cada procedimento metodológico é a principal peculiaridade, acompanhada da proposta dos alunos construírem seus conhecimentos, partindo do que já têm consolidado, sendo o professor um mediador e orientador que vai direcionando o raciocínio dos mesmos através de perguntas norteadoras que os levam a perceber todos os conceitos inerentes ao estudo de geometria euclidiana plana.

Portanto, espera-se que essa pesquisa possa auxiliar os professores na elaboração e execução de aulas que promovam uma consolidação de todos os assuntos indispensáveis para o estudo de geometria espacial e também de outros componentes ligados à matemática. Além disso, que possa instigar o desenvolvimento de estudos e a produção de materiais que realmente auxiliem o professor diante do que ele encontra em sala de aula, propondo elementos exequíveis e intrinsicamente ligados à realidade dos alunos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana**. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.v.9.

FERREIRA, Fernanda Aparecida. **Demonstrações em Geometria Euclidiana:** o uso da sequência didática como recurso metodológico para seu ensino. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2008.

GORODSKI, Claudio. **Um breve panorama histórico da geometria**. Revista **Matemática Universitária**, n. 44, p. 14-29, 2009. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n44_Artigo02.pdf. Acesso em: 07 maio 2023.

LOBATO, Lydia Fernandes. **Desafios do ensino de geometria no ensino médio**. 2019. 13 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em docência do ensino de Matemática) - Instituto Federal do Piauí - Campus Corrente, Corrente, 2019.

MARCIANO, Elainy. **Polígonos**. Ler e Aprender. Disponível em: https://lereaprender.com.br/poligonos/. Acesso em: 22 maio 2023.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** Paiva. Volume 1 (Ensino Médio), 2. ed., São Paulo, Editora Moderna, 2010.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele M. **Sequência didática na matemática**. Revista de Educação do IDEAU, Getúlio Vargas, RS, v. 8, n. 17, 2013. ISSN 1809-6220.

SANTOS, Almir Rogério Silva; VIGLIONI, Humberto Henrique de Barros. **Geometria Euclidiana Plana**. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Noções primitivas de Geometria:** ponto, reta, plano e espaço. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/nocoes-primitivas-geometria-ponto-reta-plano-espaco.htm. Acesso em: 18 maio 2023.

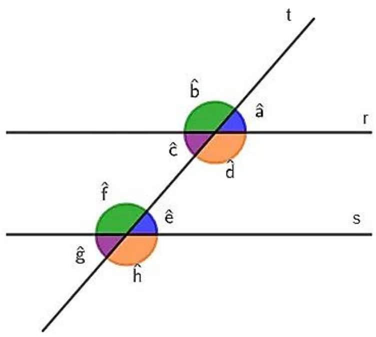
VIANA, Giovana K. A. M.; TOFFOLI, Sônia F. L.; SODRÉ, Ulysses. **Matemática Essencial - Geometria:** ângulos. Local: UEL, 2020. Disponível em: https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/angulos.html. Acesso em: 21 maio 2023.

ANEXO I

Exercícios da Sequência Didática 02

Conteúdo: Ângulos

1. Considere que na imagem a seguir, r // s (r e s são retas paralelas) e t é uma reta transversal a r e s.



Desse modo, identifique:

a) os pares de ângulos que estão do mesmo lado da reta transversal (colaterais) e entre as retas paralelas.

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

b) os pares de ângulos que estão do mesmo lado da reta transversal (colaterais) e que não estão entre as retas paralelas.

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

c) os pares de ângulos que estão em lados opostos da reta transversal (alternos) e entre as retas paralelas.

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

d) os pares de ângulos que estão em lados opostos da reta transversal (alternos) e que não estão entre as retas paralelas.

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

→ _____ e _____

Escreva no retângulo de cada item a classificação dos pares de ângulos.

2. Observando ainda a imagem da questão anterior, identifique:

a) os pares de ângulos (um referente à reta r e outro referente à reta s) que são **congruentes**.

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

b) os pares de ângulos (um referente à reta r e outro referente à reta s) que são **suplementares**.

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

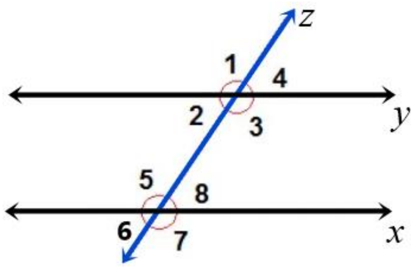
→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

→ ____ e ____

3. Na figura a seguir, temos as retas x e y paralelas e z transversal. Os ângulos formados estão identificados com números de 1 a 8.



Escreva V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas referentes a essa figura.

a) (   ) Os ângulos 1 e 6 são colaterais externos.

b) (   ) Os ângulos 2 e 8 são alternos internos.

c) (   ) Os ângulos 3 e 8 são colaterais internos.

d) (   ) Os ângulos 4 e 6 são alternos externos.

e) (   ) Os ângulos 1 e 5 são colaterais externos.

f) (   ) Os ângulos 3 e 5 são congruentes.

g) (   ) Os ângulos 4 e 7 são suplementares.

h) (   ) Os ângulos 1 e 7 são congruentes.

i) (   ) Os ângulos 2 e 5 são suplementares.

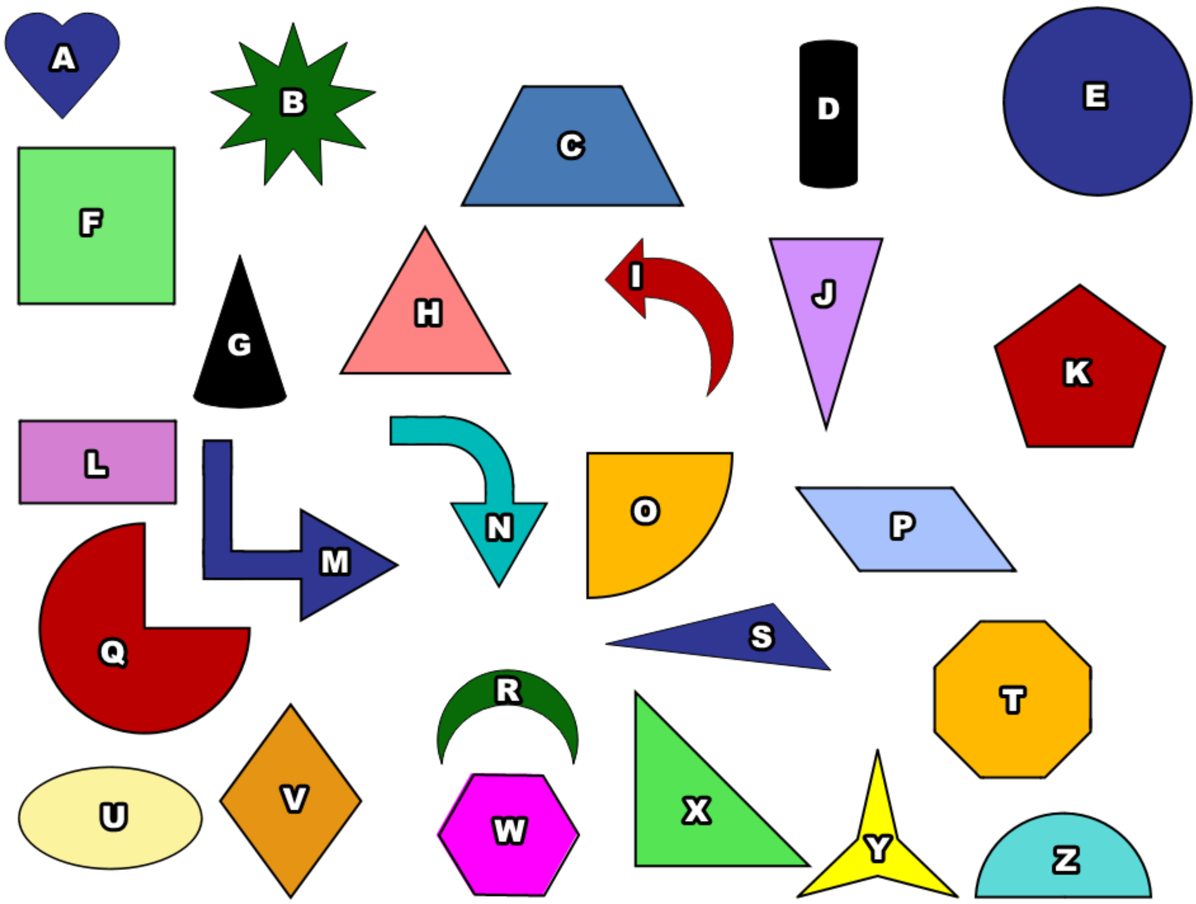
j) (   ) Os ângulos 4 e 8 são congruentes.

ANEXO II

Exercícios da Sequência Didática 03

Conteúdo: Figuras Planas - Polígonos

Observe as figuras planas a seguir identificadas com as letras de A a Z.



1. Quais letras representam as figuras planas que são **polígonos**?

____

2. Quais letras representam polígonos que são **côncavos**?

____

3. Quais letras representam polígonos que são **convexos**?

____

4. Quais letras representam polígonos que são **triângulos**?

____

5. Quais letras representam polígonos que são **quadriláteros**?

____

6. Quais letras representam polígonos que são **pentágonos**?

____

7. Quais letras representam polígonos que são **hexágonos**?

____

8. Qual o nome do polígono representado pela letra **T**?

____

9. Qual o nome do polígono representado pela letra **M**?

____

10. Quais letram representam **polígonos regulares**?

____

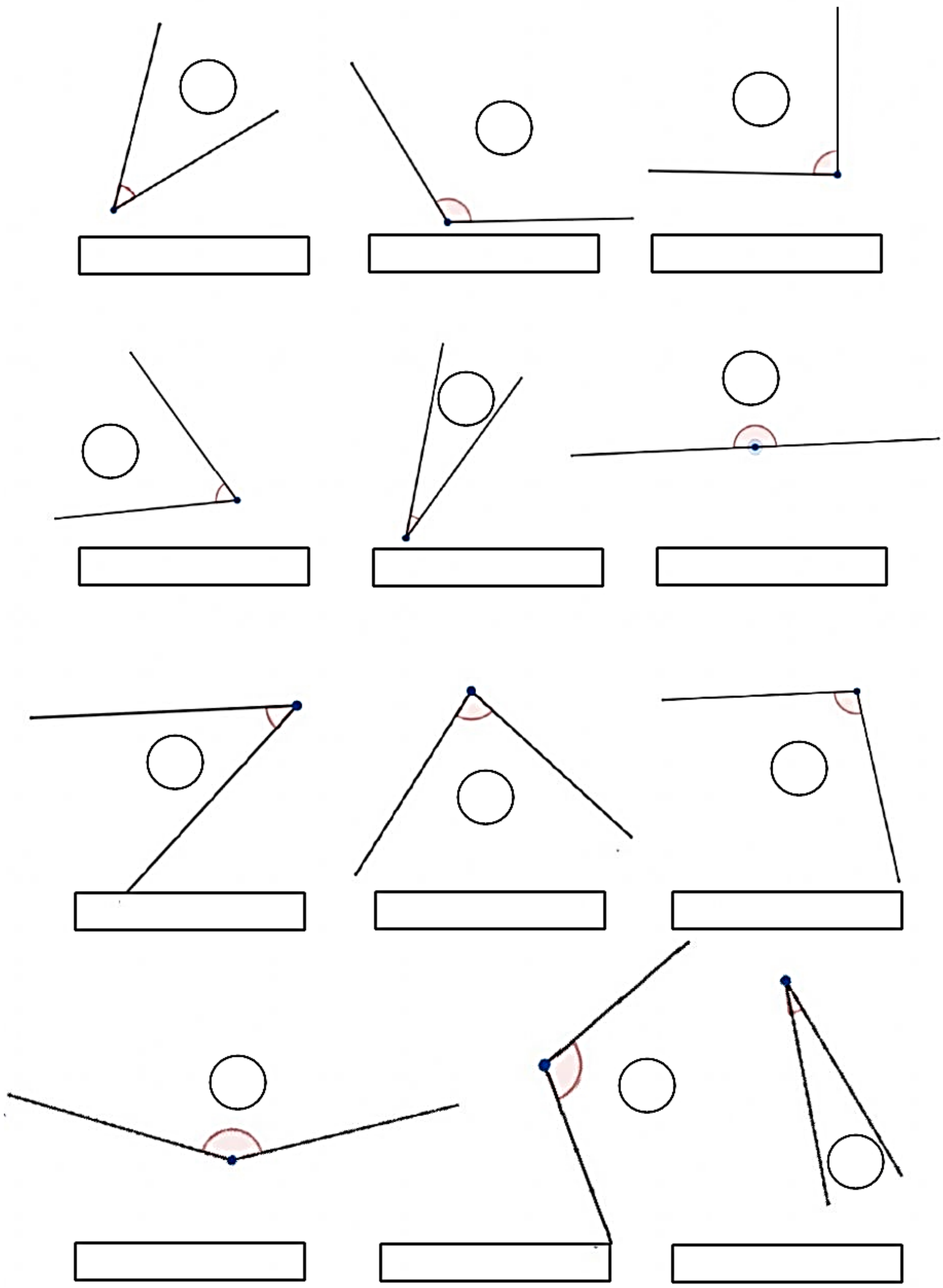
Extra: Pesquise e registre o nome do polígono representado pela letra **B**.

ANEXO III

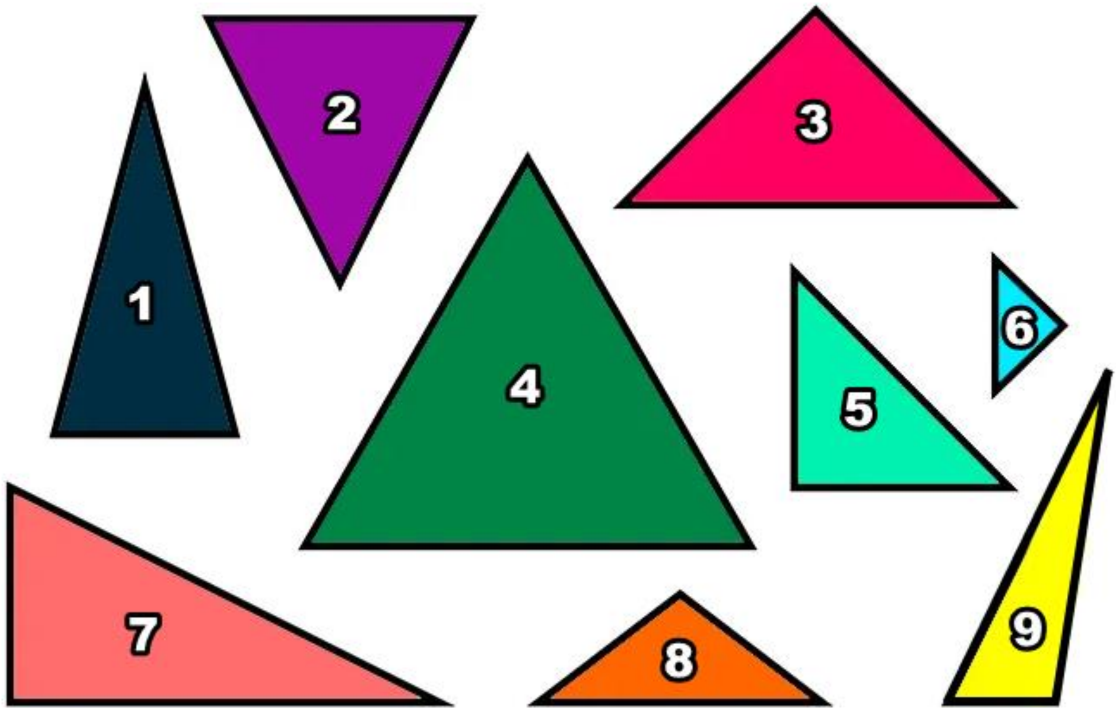
Exercícios da Sequência Didática 04

Conteúdo: Triângulos - Classificação e Soma dos ângulos internos.

1. Sem usar o transferidor, classifique cada ângulo em agudo, reto, obtuso ou raso r e registre nos retângulos. Depois, meça com o transferidor e registre a medida de cada um deles nos círculos.

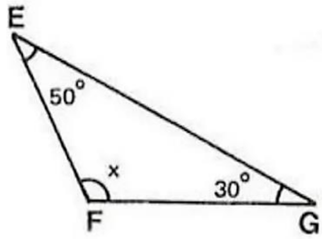


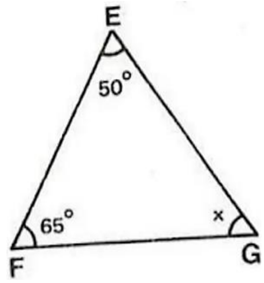
2. Observe os triângulos a seguir, meça seus lados com régua e seus ângulos internos com transferidor e preencha a tabela subsequente com as devidas classificações.

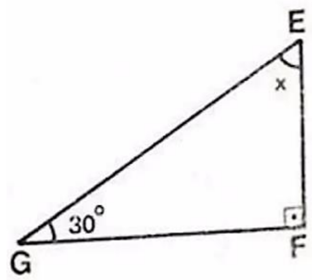


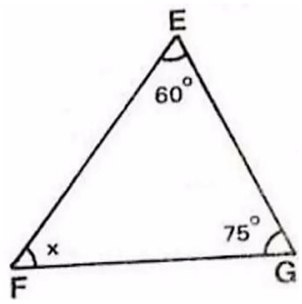
	Classificação dos Triângulos	
	Em relação às medidas dos **lados**	Em relação às medidas dos **ângulos internos**
Triângulo 1		
Triângulo 2		
Triângulo 3		
Triângulo 4		
Triângulo 5		
Triângulo 6		
Triângulo 7		
Triângulo 8		
Triângulo 9		

3. Calcule a medida do ângulo desconhecido x em cada triângulo:







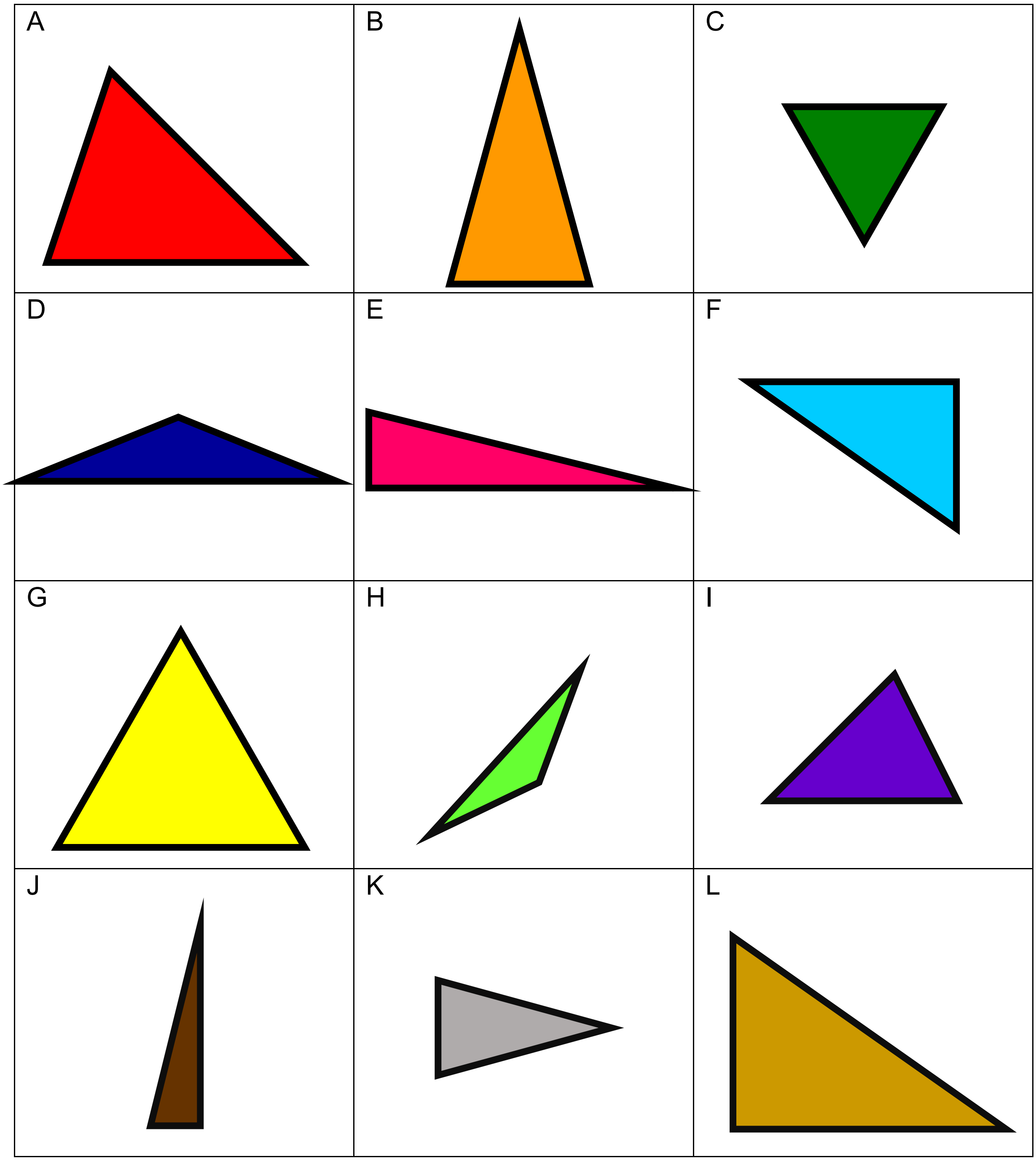


ANEXO IV

Exercícios da Sequência Didática 05

Conteúdo: Teorema de Tales, Semelhança de triângulos e Congruência de triângulos.

1. Observe os triângulos a seguir:

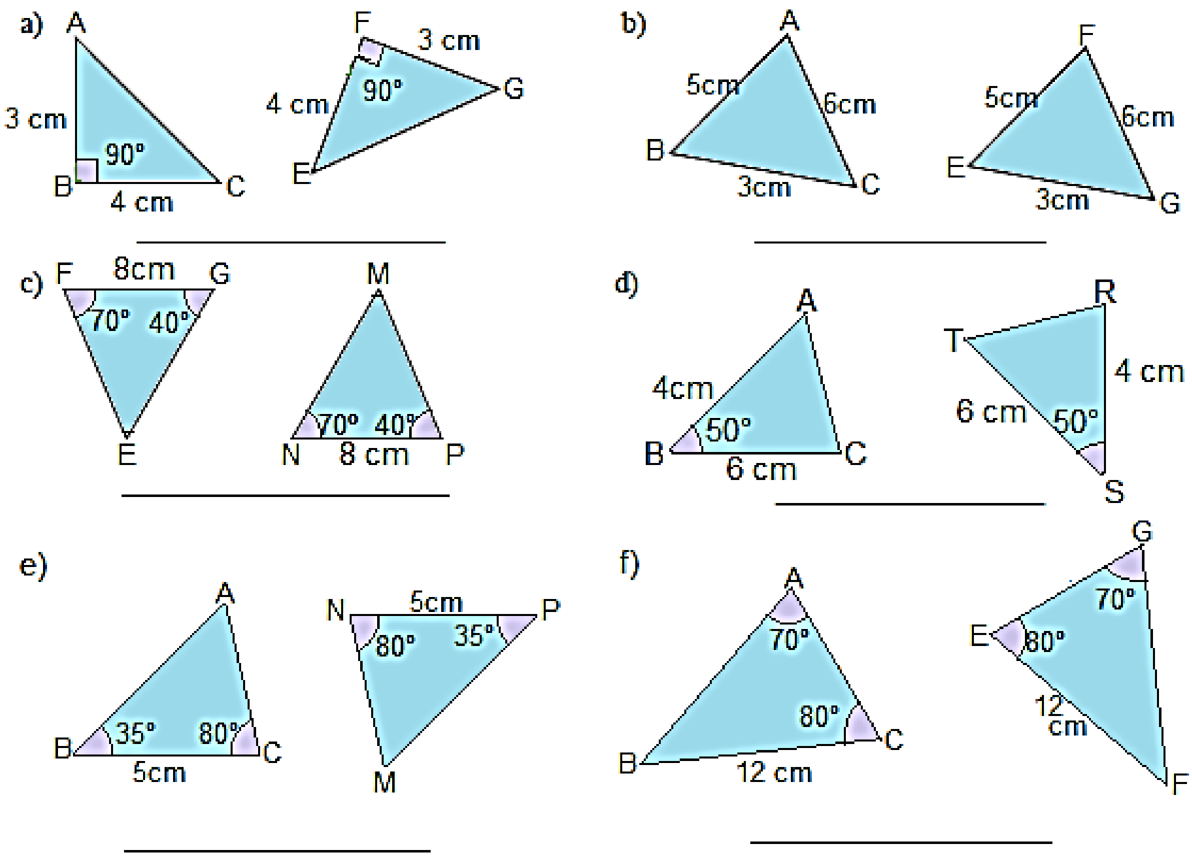


Apenas observando, identifique e escreva os pares de triângulos semelhantes.

1º par: ____________ 3º par: ____________ 5º par: ____________

2º par: ____________ 4º par: ____________ 6º par: ____________

2. Cite em cada item o caso de congruência de triângulos.



ANEXO V

Exercícios da Sequência Didática 06

Conteúdos: Conversão de unidades de medida de comprimento.

1. Realize as seguintes conversões:
   a) 15 km em m
   b) 841 dm em hm
   c) 2,97 dam em mm
   d) 92,6 cm em dam
   e) 0,38 hm em cm

2. Responda cada uma das perguntas:
   a) Uma sala de aula tem 5 m de largura por 7,5 m de comprimento. Qual a largura e o comprimento dessa sala em decímetros?

   b) Uma régua de plástico tem convencionalmente 30 cm de comprimento. Qual o comprimento dessa régua em decâmetros?

   c) A distância de Fortaleza a Quixadá é 168,7 km via BR-116 e BR-122, de acordo com o google. Qual é essa distância em metros?

   d) O piolho adulto tem cerca de 2 a 3 mm (tamanho de um grão de gergelim). Logo, um piolho adulto tem cerca de quantos centímetros?

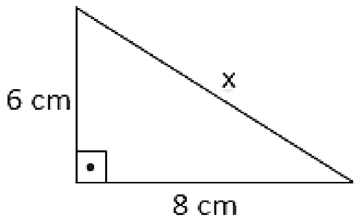
   e) A jarda é uma unidade de medida utilizada nos EUA, sendo comum no futebol americano. Uma jarda corresponde a 0,9144 m. Quantos milímetros tem uma jarda?

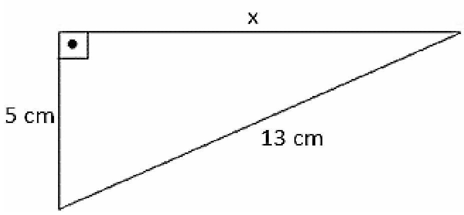
ANEXO VI

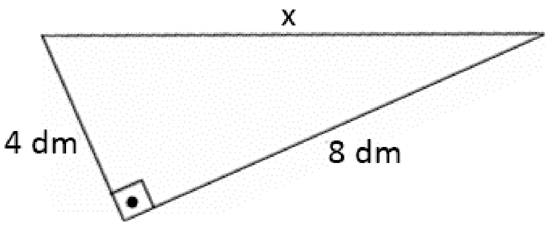
Exercícios da Sequência Didática 07

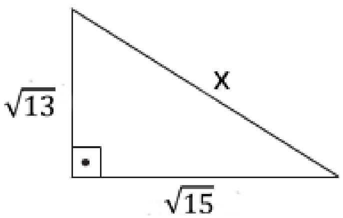
Conteúdos: Raiz quadrada de um número real e Teorema de Pitágoras.

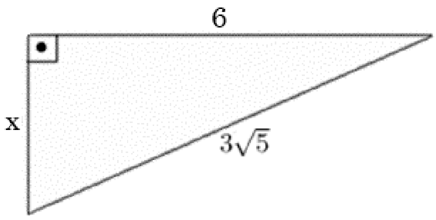
1. Calcule o valor desconhecido de x em cada triângulo retângulo:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2. Os lados de um triângulo ABC medem 12 cm, 16 cm e 20 cm.
   a) Você pode afirmar que esse triângulo é retângulo? Demonstre.
   b) Se ele for um triângulo retângulo, qual seria a medida da hipotenusa?

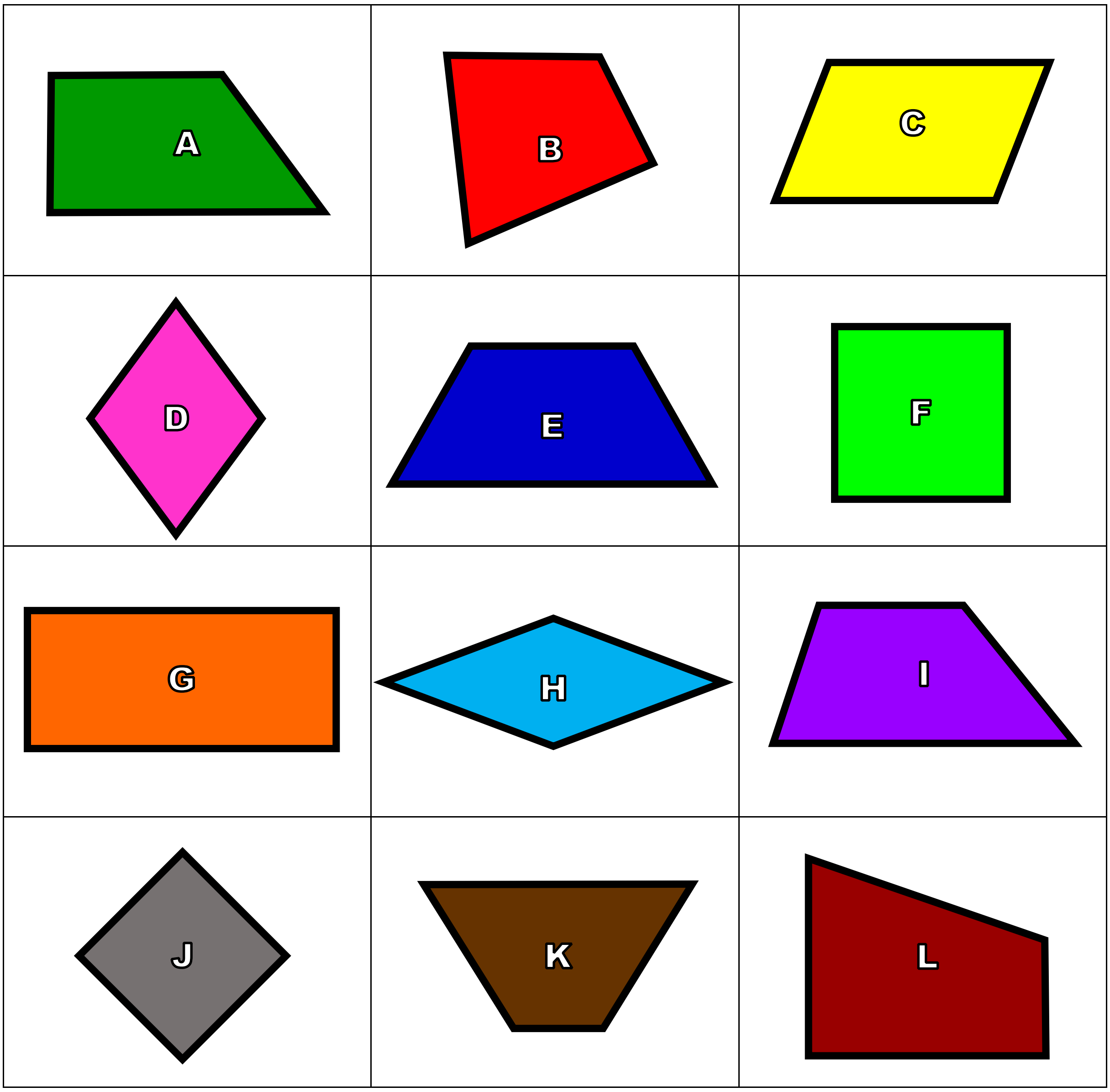
3. Sem utilizar o Teorema de Pitágoras ou fazer qualquer cálculo, um triângulo retângulo pode ter medidas 10 m, 15 m e 15 m? Justifique.

ANEXO VII

Exercícios da Sequência Didática 08

Conteúdos: Quadriláteros: elementos e características.

1. Observe os quadriláteros a seguir:



Utilizando régua e transferidor quando necessário, identifique e escreva as letras dos quadriláteros que são:

a) trapézios ______________________________
b) paralelogramos ______________________________
c) retângulos ______________________________
d) losangos ______________________________
e) quadrados ______________________________

2. Dos trapézios identificados na questão anterior, identifique e escreva as letras dos que são:
   a) trapézios isósceles ____________________________
   b) trapézios retângulos ____________________________
   c) trapézios escalenos ____________________________

3. Analise as afirmações e identifique com V as que forem verdadeiras e com F as que forem falsas:
   a) ( ) Num *trapézio isósceles*, os ângulos de cada base são congruentes.
   b) ( ) As diagonais de um *trapézio isósceles* são congruentes.
   c) ( ) Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.
   d) ( ) Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.
   e) ( ) Todo quadrado é um trapézio.
   f) ( ) Todo retângulo é um paralelogramo.
   g) ( ) Os lados paralelos de um retângulo possuem medidas iguais.
   h) ( ) As diagonais de qualquer paralelogramo são congruentes.
   i) ( ) Em todo retângulo as diagonais são congruentes.
   j) ( ) Todo losango é paralelogramo.
   k) ( ) Todo losango tem diagonais perpendiculares.

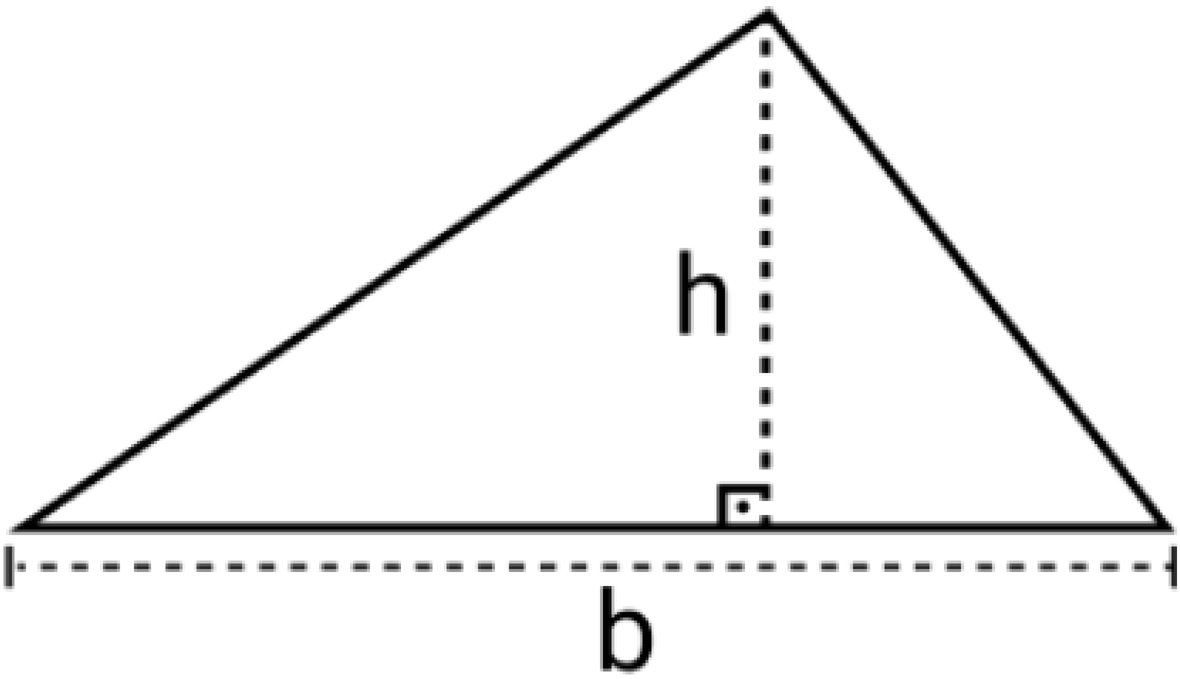
ANEXO VIII

Imagens da Sequência Didática 10

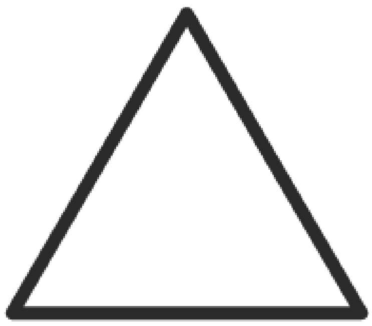
Conteúdos: Perímetro de polígonos, Área de triângulos e quadriláteros notáveis.

Imagem referente ao passo 6:

Imagem referente ao passo 7 (imprimir duas para cada dupla):



Imagens referente aos passos 8 e 9:



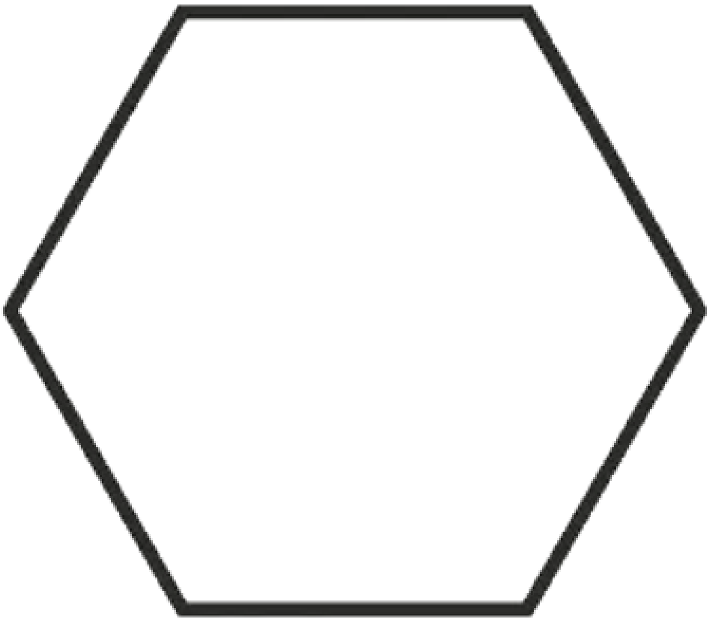
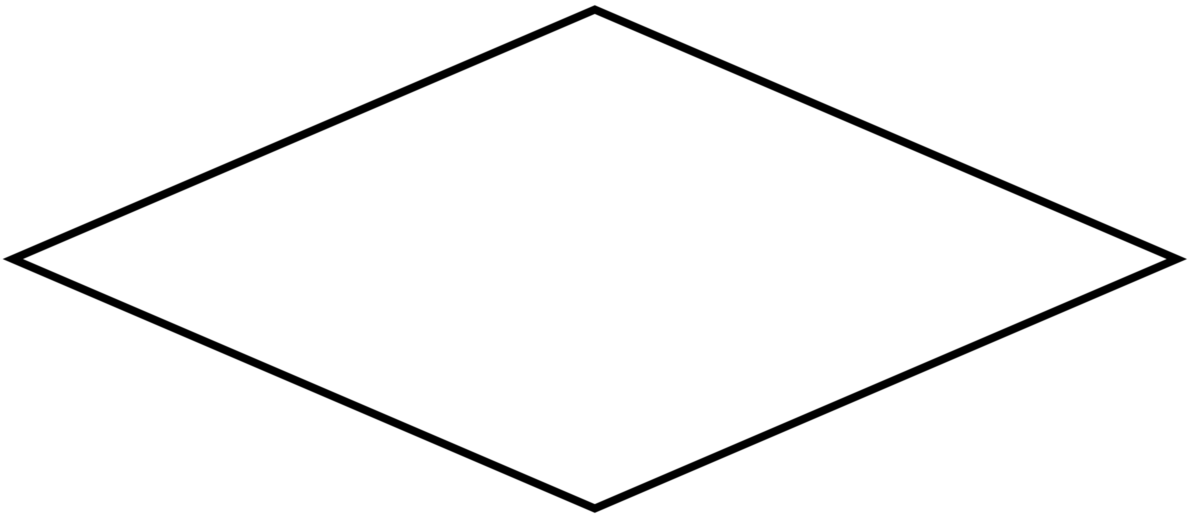


Imagem referente ao passo 10:

Imagem referente ao passo 11:

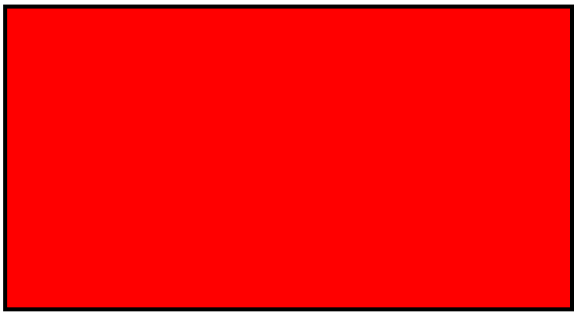


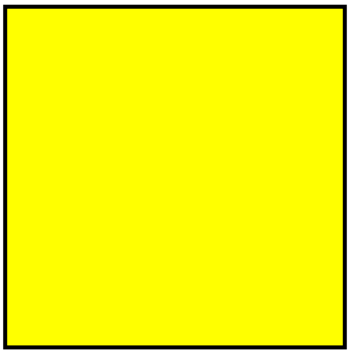
ANEXO IX

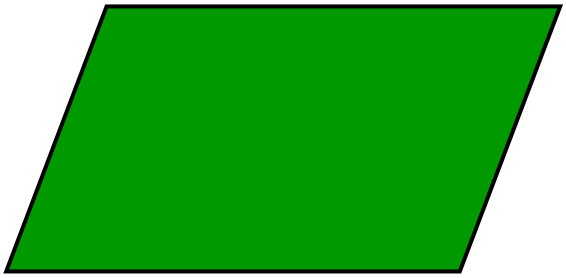
Exercícios da Sequência Didática 10

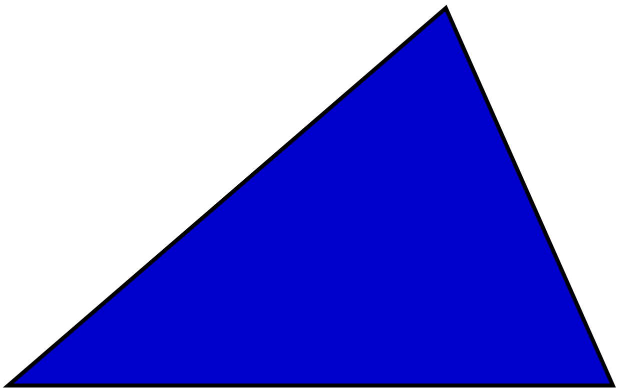
Conteúdos: Perímetro de polígonos, Área de triângulos e quadriláteros notáveis.

Calcule o perímetro e a área de cada polígono medindo primeiramente com régua e transferidor as dimensões necessárias para isso:

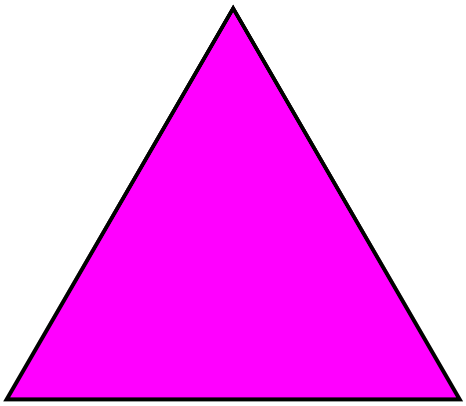
a) 

b) 

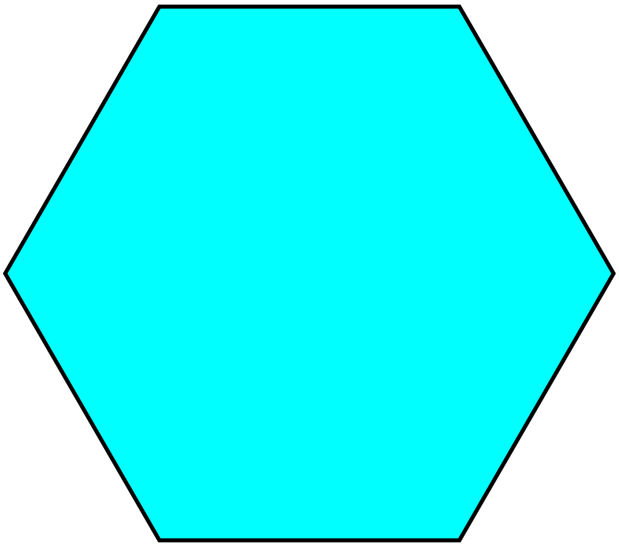
c) 

d) 

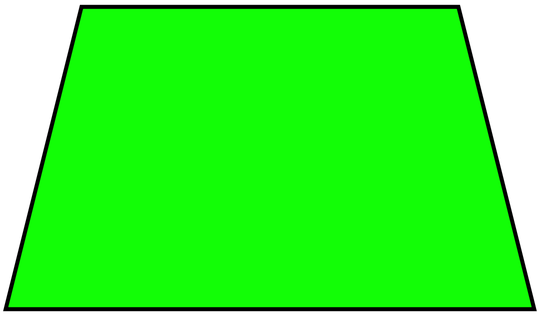
e)



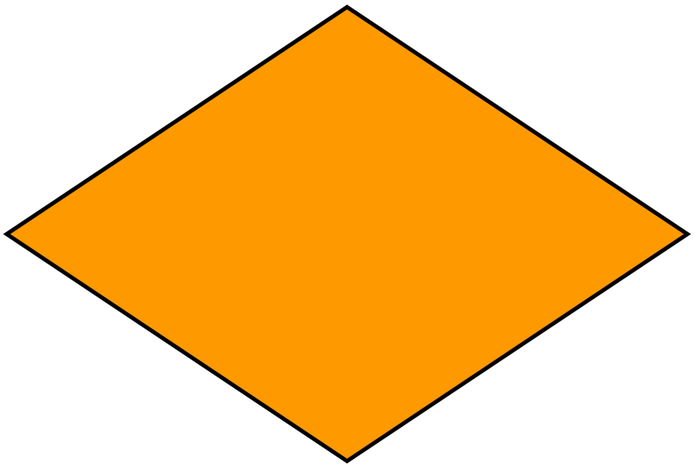
f)



g)



h)

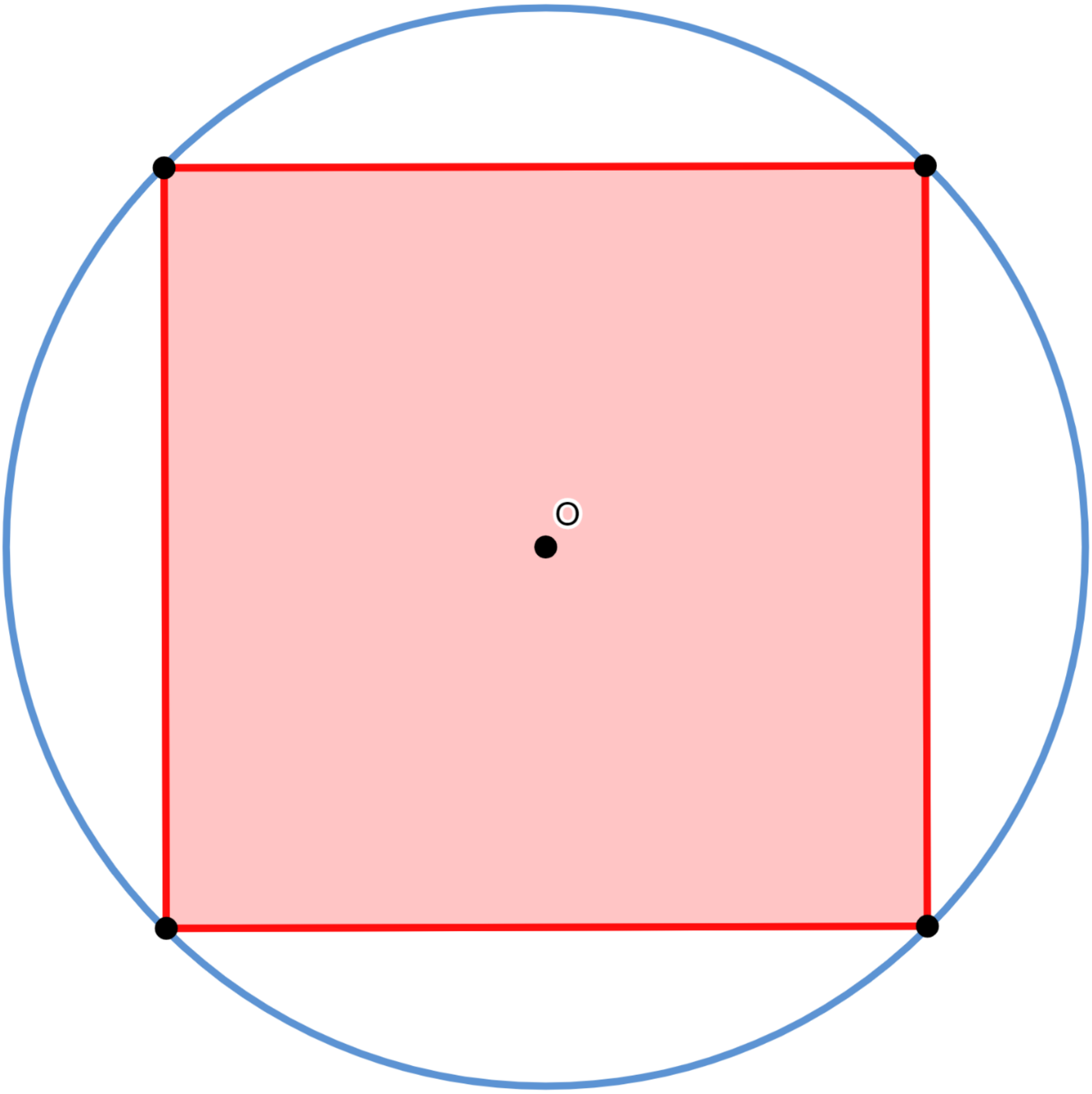


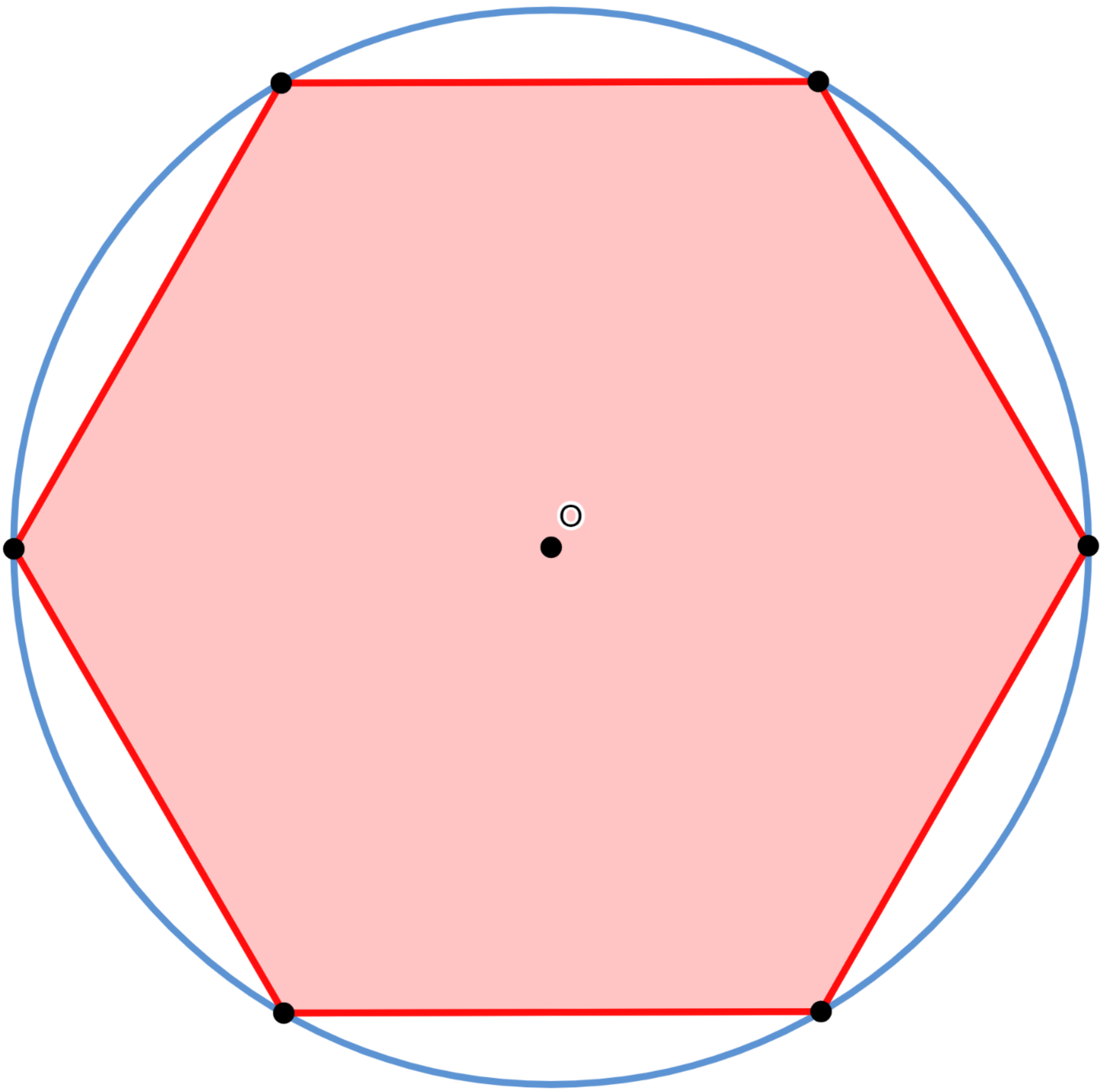
ANEXO X

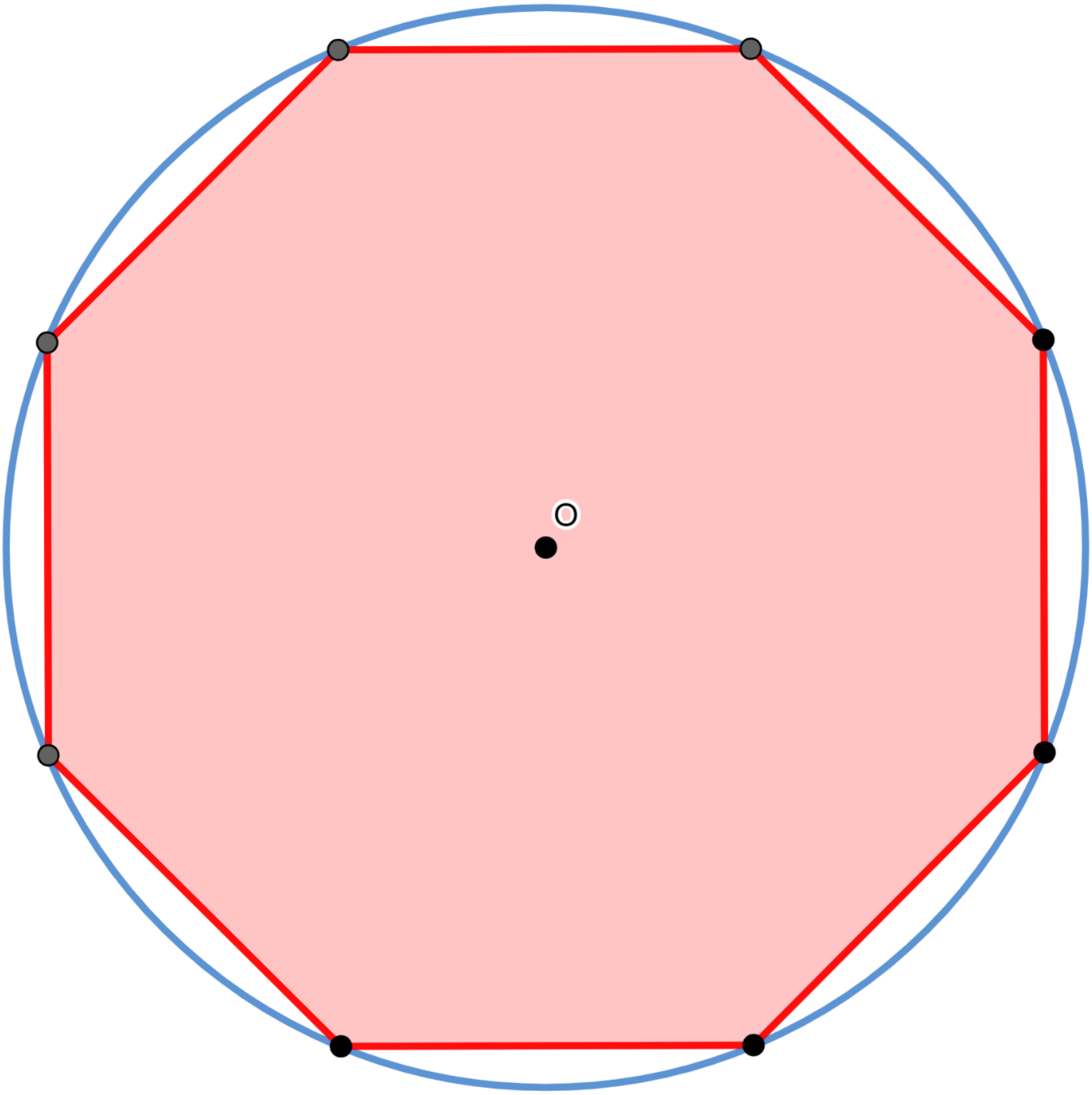
Imagens para a Sequência Didática 11

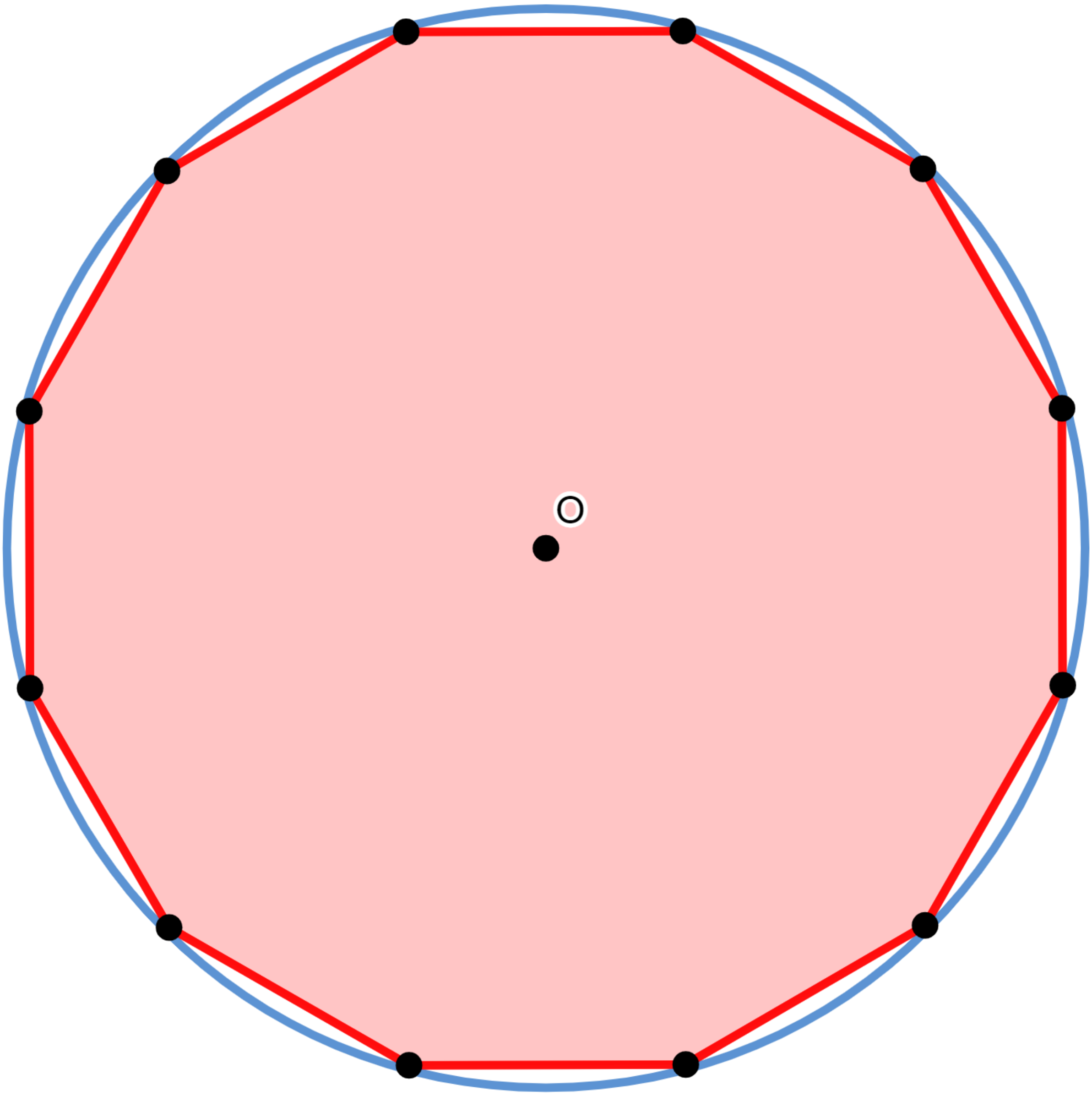
Conteúdos: Área do círculo e do setor circular.

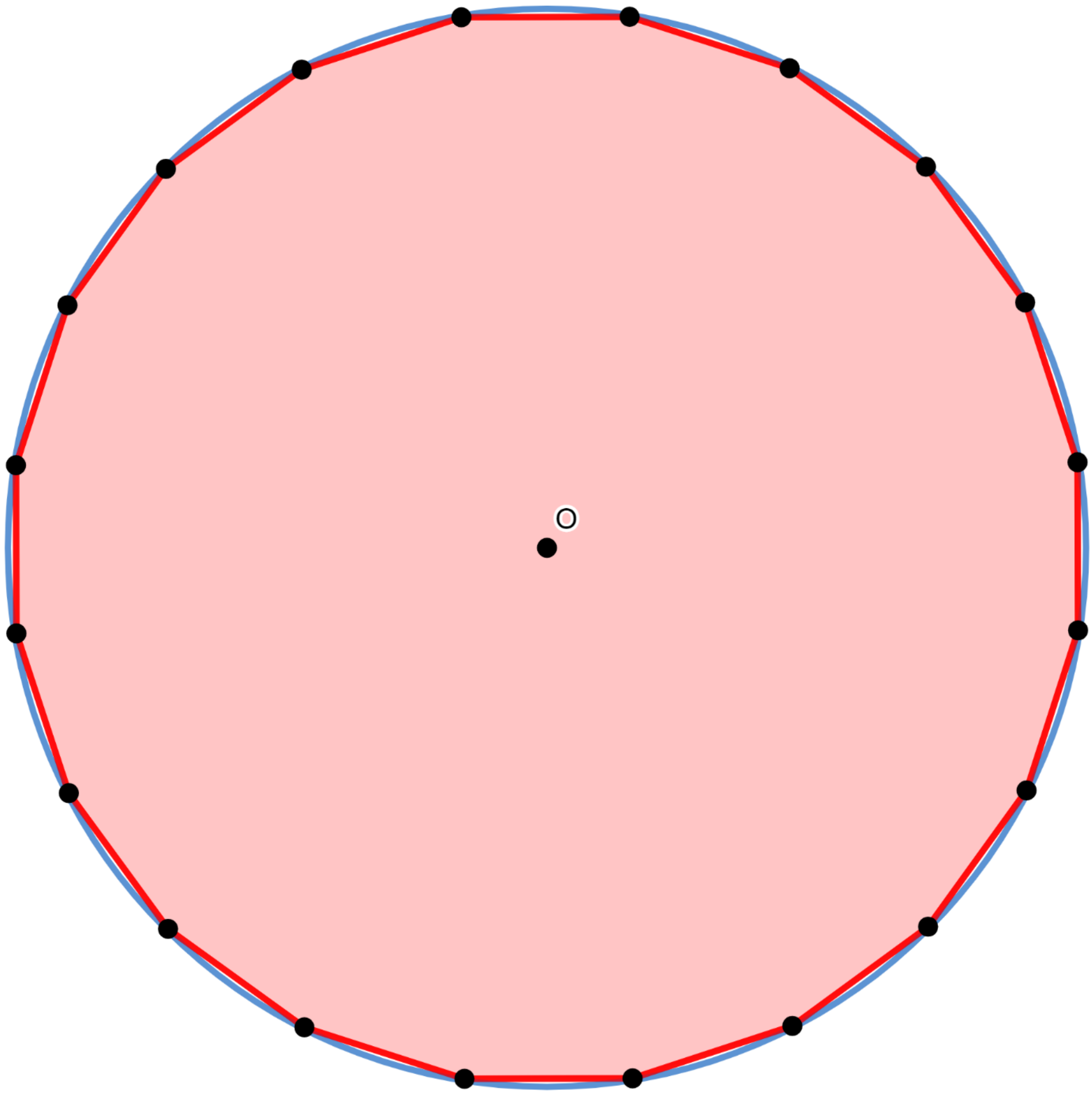
Obs.: Importante imprimir todas as circunferências do mesmo tamanho.




O


O


O

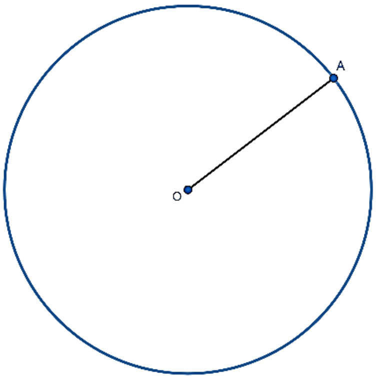

O

ANEXO XI

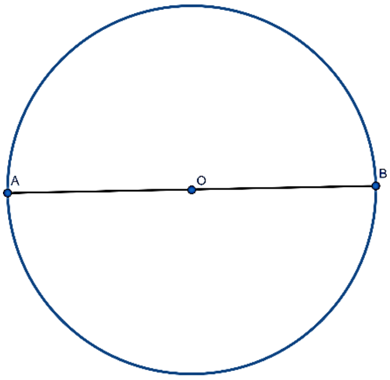
Exercícios da Sequência Didática 11

Conteúdos: Área do círculo e do setor circular.

1. Calcule a área de cada círculo de centro O, utilizando $\pi = 3$, $\pi = 3{,}1$ e $\pi = 3{,}14$ e as medidas dos segmentos fornecidas:

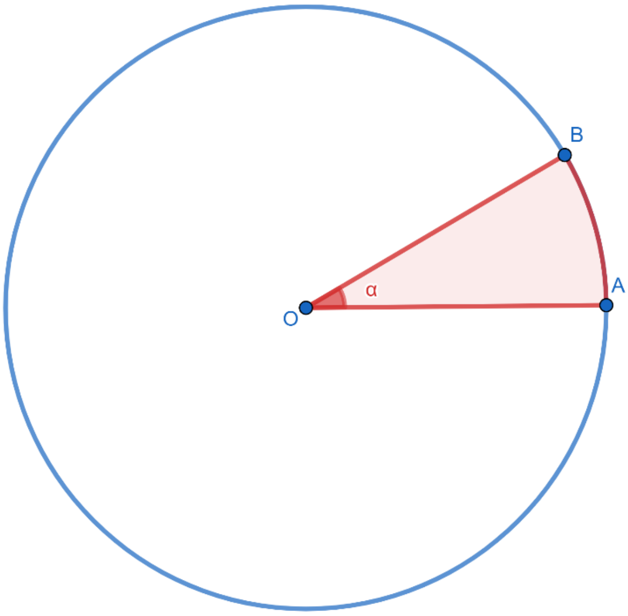
a) 

$\overline{OA} = 5$ m

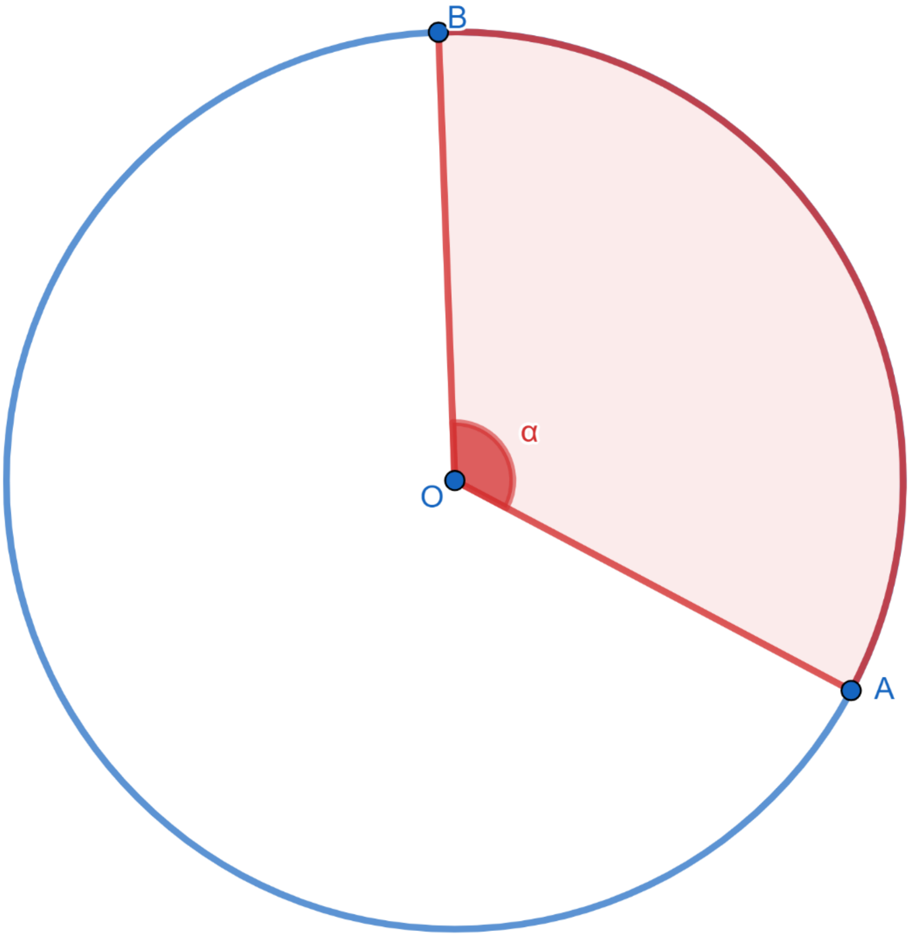
b) 

$\overline{AB} = 16$ cm

2. Calcule a área de cada setor circular destacado, medindo com transferidor seu ângulo central e com régua o seu raio. Utilize $\pi = 3$, $\pi = 3,1$ e $\pi = 3,14$.



a)



b)