



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO HEVIO DE SOUZA ALMEIDA

LADRILHANDO O PLANO COM POLÍGONOS REGULARES

QUIXADÁ - CEARÁ

2023

FRANCISCO HEVIO DE SOUZA ALMEIDA

LADRILHANDO O PLANO COM POLÍGONOS REGULARES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós – Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Almeida, Francisco Hevio de Souza.

Ladrilhando o plano com polígonos regulares [recurso eletrônico] / Francisco Hevio de Souza Almeida. - 2023.
73 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Quixadá, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira.

1. Ladrilhamento. 2. Polígonos. 3. Padrões. I. Título.

FRANCISCO HEVIO DE SOUZA ALMEIDA

LADRILHANDO O PLANO COM POLÍGONOS REGULARES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós – Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 20 de setembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira (Orientador)
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Me. José Danuso Rocha de Oliveira
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Dedico esse trabalho primeiramente à Deus por toda força e sabedoria concedida.

A minha esposa Aurenice e ao meu filho Victor pela paciência e dedicação que tiveram na concretização desse sonho.

Aos meus pais, Benilde e Juvêncio por me ajudar a ser quem eu sou e pelas orações constantes.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais por permitirem que eu concluísse meus objetivos e à minha família.

Agradeço ao Professor Dr. Jobson de Queiroz Oliveira por aceitar de prontidão, participar desta empreitada, sempre com seus conselhos, paciência e insistência, muito obrigado por tudo.

Agradeço ao meu diretor Auci Maia e às minhas coordenadoras Ana Moreno e Dvandy Pedrosa pelo apoio e paciência nas horas de correria, na escola em que leciono.

Agradeço imensamente aos amigos que fiz, no Mestrado, pela parceria. Sem esse apoio, seria muito difícil seguir a caminhada para a conclusão este trabalho.

“O coração do homem pode fazer planos, mas
a resposta certa dos lábios vem do Senhor.”

(Provérbios 16:1)

RESUMO

A presente dissertação de mestrado aborda o tema do ladrilhamento do plano, explorando sua teoria, princípios e aplicações. O ladrilhamento consiste em preencher uma superfície plana com um padrão repetitivo de formas geométricas, criando padrões estéticos e visualmente agradáveis. No decorrer desta dissertação, foram estudados os fundamentos teóricos do ladrilhamento, incluindo a análise dos ângulos que compõe um polígono regular e os principais grupos de ladrilhamento. Exploramos os diferentes tipos de ladrilhamentos, regulares e semirregulares, com uma análise tanto algébrica como geométrica das condições que possibilitam sua construção. Ao longo dessa dissertação, foram consultadas diversas fontes bibliográficas, incluindo livros, artigos científicos e trabalhos de pesquisa anteriores. O estudo do ladrilhamento do plano revelou um campo de pesquisa fascinante e complexo, proporcionando uma compreensão mais profunda dos padrões geométricos e sua aplicação em várias áreas do conhecimento. Por fim, foi apresentada uma estrutura detalhada para aplicação de uma oficina, onde todos os conceitos vistos ao longo dessa dissertação possam ser apreendidos de forma prática e interativa pelos alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Ladrilhamento; Polígono; Padrões

ABSTRACT

This master's thesis deals with the subject of plane tiling, exploring its theory, principles and applications. Tiling consists of filling a flat surface with a repetitive pattern of geometric shapes, creating aesthetic and visually pleasing patterns. In the course of this dissertation, we studied the theoretical foundations of tiling, including the analysis of the angles that make up a regular polygon and the main tiling groups. We explored the different types of tiling, regular and semi-regular, with both an algebraic and geometric analysis of the conditions that make their construction possible. Throughout this dissertation, various bibliographical sources were consulted, including books, scientific articles and previous research work. The study of plane tiling has revealed a fascinating and complex field of research, providing a deeper understanding of geometric patterns and their application in various areas of knowledge. Finally, a detailed structure was presented for the application of a workshop, where all the concepts seen throughout this dissertation can be grasped in a practical and interactive way by high school students.

Keywords: Tiling; Polygons; Patterns

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Linha poligonal aberta $A_1A_2A_3A_4A_5$.....	13
Figura 2 - Linha poligonal fechada $A_1A_2A_3A_4A_5$.....	13
Figura 3 - Polígono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5$.....	14
Figura 4 - Polígono não convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.....	14
Figura 5 - Polígono convexo $A_1A_2A_3...A_{n-6}A_{n-7}$.....	15
Figura 6 - Quadrilátero Equilátero.....	17
Figura 7 - Quadrilátero Equilátero.....	17
Figura 8 - O Triângulo regular é o equilátero.....	18
Figura 9 - Hexágono regular.....	18
Figura 10 - Piso ladrilhado por Hexágonos.....	20
Figura 11 - Piso ladrilhado por Hexágonos.....	20
Figura 12 - Hexágonos em favo de mel.....	20
Figura 13 - Pinhas.....	20
Figura 14 - Ladrilhamento com octógonos e quadrados.....	21
Figura 15 - Ladrilhamento com quadrados.....	21
Figura 16 - Ladrilhamento Regular.....	22
Figura 17 - Ladrilhamento com triângulos.....	22
Figura 18 - Ladrilhamento regular com triângulos equiláteros.....	24
Figura 19 - Ladrilhamento regular com triângulos equiláteros.....	24
Figura 20 - Ladrilhamento regular com quadrados.....	24
Figura 21 - Ladrilhamento regular com quadrados.....	24
Figura 22 - Ladrilhamento com pentágonos regulares.....	26
Figura 23 - Ladrilhamento regular com hexágonos.....	27
Figura 24 - Ladrilhamento regular com hexágonos.....	28
Figura 25 - Ladrilhamento regular com heptágonos.....	29
Figura 26 - Ladrilhamento semirregular.....	32
Figura 27 - Ladrilhamento semirregular (6, 3, 6, 3)	33
Figura 28 - Ladrilhamento semirregular (t, l, m)	36
Figura 29 - Combinação do tipo (3, l, m)	39
Figura 30 - Combinação do tipo (3, l, m)	40
Figura 31 - Combinação do tipo (3, l, m)	40
Figura 32 - Combinação do tipo (3, l, m)	40

Figura 33 - Padrão de ladrilhamento (3, 12, 12)	41
Figura 34 - Combinações do tipo (4, l, m)	42
Figura 35 - Ladrilhamento de Padrão (4, 12, 6)	44
Figura 36 - Ladrilhamento de Padrão (4, 12, 6)	45
Figura 37 - Ladrilhamentos de Padrão (5, l, m)	45
Figura 38 - Ladrilhamento de Padrão (6, l, m)	46
Figura 39 - Ladrilhamento de Padrão (6, l, m)	49
Figura 40 - Ladrilhamento de Padrão (6, l, m)	53
Figura 41 - Ladrilhamentos de Padrão (3, l, m, n)	55
Figura 42 - Ladrilhamento de Padrão (3, 4, 6, 4)	57
Figura 43 - Ladrilhamento de Padrão (3, 6, 3, 6)	57
Figura 44 - Ladrilhamento de Padrão (t, l, m, n, p)	58
Figura 45 - Ladrilhamentos de Padrão (3, l, m, n, p)	62
Figura 46 - Padrão (3, 3, 4, 4, 3)	64
Figura 47 - Padrão (3, 3, 3, 6, 3)	64
Figura 48 - Padrão (3, 4, 3, 3, 4)	65
Figura 49 - Padrão (t, l, m, n, p, q)	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Nomenclatura dos polígonos	16
Tabela 2 - Ângulos em polígonos	19
Tabela 3 - Padrões de ladrilhamentos para n lados	31
Tabela 4 - Padrões de ladrilhamento $(3, l, m)$	37
Tabela 5 - Padrão de ladrilhamento $(4, l, m)$	38
Tabela 6 - Padrão de ladrilhamento $(5, l, m)$	38
Tabela 7 - Padrões de ladrilhamento $(6, l, m)$	38
Tabela 8 - Padrões de ladrilhamento (t, l, m)	39
Tabela 9 - Padrões de ladrilhamento $(4, l, m)$	44
Tabela 10 - Padrões de ladrilhamento $(4, l, m)$	48
Tabela 11 - Padrões ladrilhamento $(3, l, m, n)$	51
Tabela 12 - Padrões de ladrilhamento $(3, l, m, n)$	52
Tabela 13 – Padrões de ladrilhamento $(4, l, m, n)$	54
Tabela 14 - Padrões de ladrilhamento $(3, l, m, n)$	54
Tabela 15 - Padrões de ladrilhamento $(3, l, m, n, p)$	61
Tabela 16 - Ângulos internos	64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONHECIMENTO PRELIMINARES	13
2.1	Polígonos	13
2.1.1	Elementos de um polígono	13
2.1.2	Polígono Convexo e Polígono Concavo	14
2.1.3	Soma dos S_i ângulos internos e Soma dos S_e ângulos externos de um polígono convexo	22
2.1.4	Nomes dos principais polígonos	23
2.2	Polígono Regular	24
2.2.4	Expressão do ângulo interno (a_i) de um polígono regular	24
2.2.5	Expressão do ângulo externo (a_e) de um polígono regular	25
3	LADRILHAMENTO	30
3.1	Ladrilhamentos com polígonos regulares	31
4	LADRILHAMENTOS REGULARES	32
4.1	Triângulo Equilátero	33
4.2	Quadrado	34
4.3	Pentágono Regular	35
4.4	Hexágono Regular	36
4.5	Heptágono regular e demais polígonos regulares	37
4.5.4	Ladrilhando com polígonos de n lados	38
5	LADRILHAMENTOS SEMIRREGULARES OU QUASE REGULARES ..	40
5.1	Analisando os ladrilhamentos e seus padrões	41
5.1.4	Padrão (t, l, m)	42
5.1.4.1	<i>Combinações do tipo $(3, l, m)$</i>	43
5.1.4.2	<i>Combinações do tipo $(4, l, m)$</i>	44
5.1.4.3	<i>Combinações do tipo $(5, l, m)$</i>	45
5.1.4.4	<i>Combinações do tipo $(6, l, m)$</i>	46
5.1.5	Padrão (t, l, m, n)	47
5.1.5.1	<i>Analisando o padrão (t, l, m, n)</i>	48
5.1.6	Padrão (t, l, m, n, p)	50
5.1.6.1	<i>Analisando o padrão (t, l, m, n)</i>	51

5.1.7	Padrão (t, l, m, n, p, q)	52
6	ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA	59
6.1	Proposta de oficina	59
6.2	Oficina de Matemática: Explorando Polígonos Regulares e Ladrilhamentos	59
7	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina fundamental no currículo escolar, desempenhando um papel essencial no desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos. No contexto do ensino médio, a matemática assume uma importância ainda maior, à medida que os estudantes se preparam para sua jornada acadêmica e profissional futura.

Dentro do vasto campo da matemática, a geometria ocupa um lugar de destaque, pois é a área que estuda as formas, as estruturas e as relações espaciais dos objetos. Ela fornece aos alunos uma compreensão fundamental da visualização e da manipulação de figuras geométricas no espaço, promovendo habilidades de raciocínio espacial e abstração.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes para o ensino de geometria no ensino médio, buscando fornecer aos alunos uma formação sólida nessa área. Nela destaca-se a importância de abordar conteúdos que promovam a compreensão da estrutura do espaço e a capacidade de analisar e representar objetos geométricos de diversas formas, também enfatiza a importância da interdisciplinaridade no ensino de geometria, incentivando a conexão entre os conceitos matemáticos e suas aplicações em outras áreas do conhecimento.

Neste cenário, essa dissertação aborda o ladrilhamento do plano, um tema clássico e fascinante da matemática que tem atraído a atenção de matemáticos, artistas e arquitetos ao longo da história. Preencher uma superfície plana com um padrão repetitivo de formas geométricas básicas, como triângulos, quadrados e hexágonos, é um desafio matemático que combina beleza e estética com rigor matemático.

Nessa perspectiva, esse trabalho traz o ensino de conhecimentos básicos e importantes da geometria para os alunos do ensino médio por meio do estudo dos ladrilhamentos. Os ladrilhamentos, ou pavimentações envolvem o preenchimento do plano com formas geométricas regulares ou irregulares, de maneira que não haja sobreposição ou lacunas. Ao explorar os ladrilhamentos, os alunos entram em contato direto com conceitos geométricos fundamentais, como congruência, polígonos regulares, ângulos internos e externos e áreas. Eles são desafiados a observar e a analisar padrões e estruturas, a identificar as propriedades dos polígonos utilizados e a compreender as relações entre eles. Dessa forma, o estudo dos ladrilhamentos proporciona uma oportunidade prática e visual para a aplicação e a consolidação desses conceitos.

Além disso, é discutido os diferentes tipos de ladrilhamento, incluindo os regulares e semirregulares, bem como propostas pedagógicas para o ensino de geometria utilizando os ladrilhamentos como ferramenta de aprendizado.

No segundo capítulo desta dissertação, a abordagem é feita nos polígonos regulares como base para o estudo dos ladrilhamentos. Exploraremos as características dos polígonos regulares, como seus ângulos internos e externos. Além disso, analisaremos as relações entre os polígonos regulares e como eles se encaixam perfeitamente uns nos outros para formar padrões repetitivos.

No terceiro capítulo, a atenção é concentrada nas características dos ladrilhamentos regulares. É discutido os critérios para que um padrão de ladrilhamento seja considerado regular para a cobertura completa do plano e serão exploradas as propriedades essenciais dos ladrilhamentos regulares, como a congruência dos azulejos e a repetição periódica dos padrões.

O quarto capítulo desta dissertação fornecerá demonstrações dos ladrilhamentos regulares, utilizando um único polígono e também envolvendo mais de um polígono. Serão apresentadas demonstrações matemáticas detalhadas, que mostram como esses ladrilhamentos podem ser construídos bem como as condições necessárias para sua existência. Além disso, investigaremos exemplos concretos de ladrilhamentos regulares com triângulos, quadrados, hexágonos e outros polígonos, a fim de ilustrar as diferentes possibilidades de configurações regulares.

No quinto capítulo, é abordado os ladrilhamentos semirregulares, que são padrões de ladrilhamentos que envolvem diferentes polígonos regulares. É explorado a estrutura dos ladrilhamentos semirregulares, analisando os tipos de polígonos que podem ser combinados, serão apresentados exemplos de ladrilhamentos semirregulares, destacando a beleza e a complexidade dessas composições geométricas.

No sexto e último capítulo, é apresentada uma proposta de aplicabilidade do assunto através de uma oficina. Nela diversos conceitos geométricos abordados nessa dissertação serão abordados de forma prática, levando o aluno a se apropriar de conceitos extremamente importantes para seus estudos.

2 CONHECIMENTO PRELIMINARES

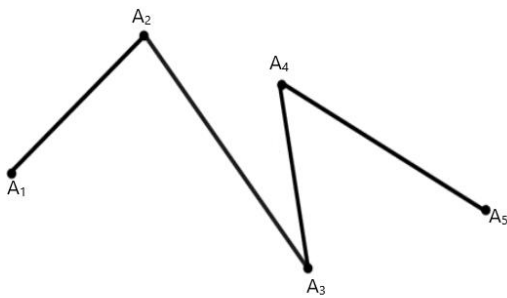
2.1 Polígonos

Uma linha formada por segmentos de retas sucessivas não-colineares é chamada de linha poligonal.

Polígono é uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos e não colineares. A região plana limitada por uma linha poligonal fechada é denominada de região poligonal. Um polígono é denominado de forma análoga a uma linha poligonal, ou seja, pela sequência dos pontos extremos dos segmentos que o formam.

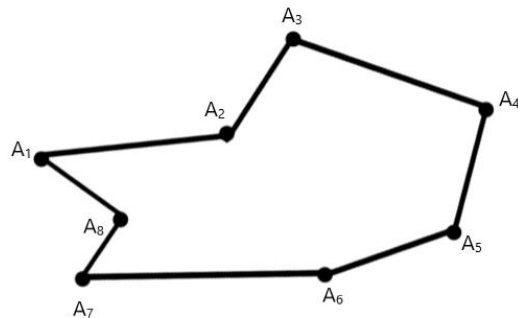
A reunião de um polígono com o seu interior é uma região poligonal ou superfície poligonal.

Figura 1 – Linha poligonal aberta $A_1A_2A_3A_4A_5$



Fonte: Próprio autor

Figura 2 – Linha poligonal fechada $A_1A_2A_3A_4A_5$



Fonte: Próprio autor

2.1.1 Elementos de um polígono

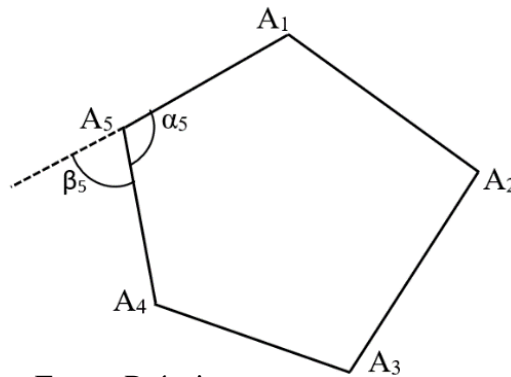
- **Vértice:** extremo de cada segmento que forma o polígono, ou seja, os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$;
- **Lado:** cada segmento de reta que forma o polígono, isto é $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}$;
- **Ângulo interno:** ângulo formado, no interior da região poligonal, por dois lados consecutivos;
- **Diagonal:** segmento de reta com extremidades em vértices não consecutivos;
- **Ângulo externo:** ângulo formado por um lado e o prolongamento de outro lado adjacente. No caso de um ângulo interno menor que 180° , o ângulo externo é

suplementar ao ângulo interno e possui medida positiva. Caso o ângulo interno seja maior que 180° , o ângulo externo ainda é suplementar ao interno, porém sua medida é negativa, ou seja, ele é medido no sentido horário do ciclo trigonométrico.

2.1.2 Polígono convexo e polígono côncavo

Um polígono é convexo se a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n - 2)$ vértices em um mesmo semiplano dos dois que ela determina. Se um polígono não é polígono convexo, diremos que ele é um polígono côncavo.

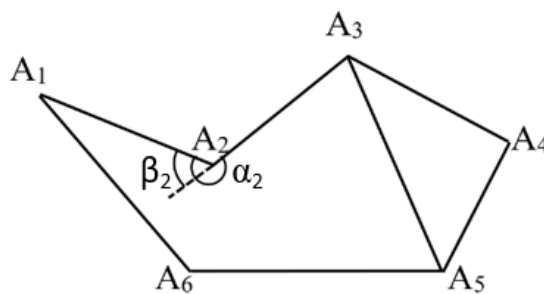
Figura 3 – Polígono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5$



Fonte: Próprio autor

- A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são os vértices.
- $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}$ e $\overline{A_5A_1}$ são os lados
- α_5 é um ângulo interno, associado ao vértice A_5
- β_5 é um ângulo externo, associado ao vértice A_5
- Note que $\beta_5 = 180^\circ - \alpha_5 > 0$

Figura 4 – Polígono não convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$



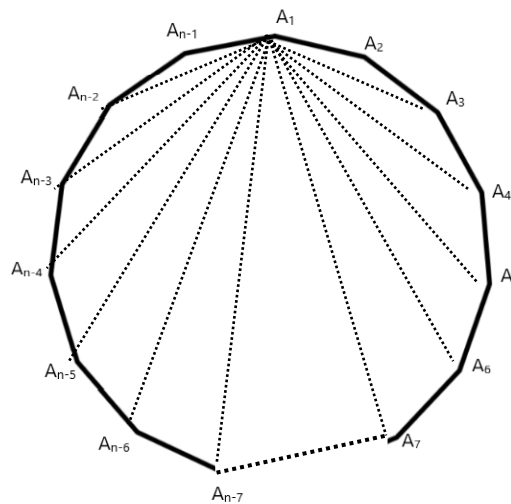
Fonte: Próprio autor

- A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 são os vértices
- $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \overline{A_5A_6}$ e $\overline{A_6A_1}$ são os lados
- α_2 é um ângulo interno, associado ao vértice A_2 . Devemos observar que $\alpha_2 > 180^\circ$
- β_5 é um ângulo externo, associado ao vértice A_2
- Note que $\beta_5 = 180^\circ - \alpha_2 < 0$

2.1.3 Soma dos S_i ângulos internos e dos S_e ângulos externos de um polígono convexo.

Seja $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ um polígono convexo de n lados.

Figura 5 – Polígono convexo $A_1A_2A_3\dots A_{n-6}A_{n-7}$



Fonte: Próprio autor

Escolhendo um vértice qualquer e traçando, a partir deste vértice, todas as diagonais possíveis, fazemos com que o polígono fique dividido em $n - 2$ triângulos. Note que a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos de todos os $n - 2$ triângulos. Assim, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Um ângulo externo de um polígono convexo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo (interno) do polígono, ou seja, sua soma vale 180° .

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ os ângulos internos de um polígono convexo e $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ os ângulos externos de um polígono convexo. Sabemos que $\beta_1 = 180^\circ - \alpha_1, 1 \leq i \leq n$. Portanto:

$$S_e = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n$$

$$S_e = 180^0 - \alpha_1 + 180^0 - \alpha_2 + 180^0 - \alpha_3 + \dots + 180^0 - \alpha_n$$

$$S_e = 180^0 \cdot n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)$$

$$S_e = 180^0 \cdot n - S_i$$

$$S_e = 180^0 \cdot n - (n - 2) \cdot 180^0$$

$$S_e = 180^0 \cdot n - 180^0 \cdot n + 360^0$$

$$S_e = 360^0$$

Isso significa que, se você partir de um vértice qualquer do polígono e percorrer ao longo de suas arestas, fazendo uma curva em cada vértice externo, você acabará retornando ao ponto de partida após um giro completo de 360 graus. Cada ângulo externo representa as mudanças de direção que ocorrem ao percorrer as arestas do polígono.

2.1.4 Nome dos principais polígonos

De acordo com o número n de lados, os polígonos recebem nomes especiais. Veja na tabela a seguir as correspondências:

Tabela 1 – Nomenclatura dos polígonos

Nº de lados	Nome do Polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono
25	Pentavintenágono
30	Trintenágono

Fonte: Próprio autor

Em geral, para um número n ($n \geq 3$) qualquer de n lados dizemos que o polígono é um n -látero.

2.2 Polígono Regular

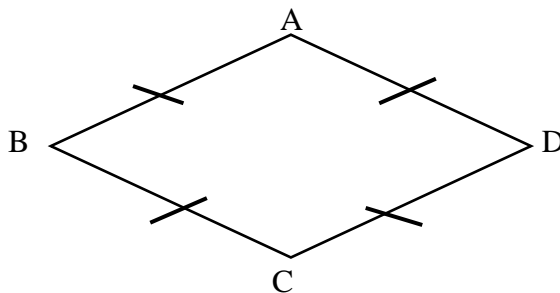
Um polígono regular é uma figura geométrica plana formada por um conjunto de lados iguais e ângulos internos congruentes (com a mesma medida). Exemplos comuns de polígonos regulares incluem o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular, o hexágono regular, o octógono regular, entre outros.

O polígono regular apresenta algumas propriedades únicas e interessantes. Por exemplo, todos os ângulos internos são iguais, o que significa que é possível calcular o valor de cada ângulo interno dividindo a soma dos ângulos internos pelo número de lados. Outra propriedade importante dos polígonos regulares é que eles apresentam um alto grau de simetria. Isso significa que é possível rotacionar ou refletir o polígono sem alterar sua forma ou tamanho. Os polígonos regulares assim como os irregulares, podem ser inscritos em uma circunferência, com cada vértice do polígono tocando a circunferência. Nesse caso, a circunferência é chamada de circunferência circunscrita ao polígono.

Os polígonos regulares são amplamente utilizados em muitas áreas da matemática e em outras disciplinas. Eles são frequentemente encontrados em estruturas cristalinas, em moléculas biológicas, na arte e na arquitetura. Além disso, os polígonos regulares são importantes em muitas aplicações práticas, como na construção de polígonos regulares para a criação de modelos matemáticos, na geometria da computação gráfica, na física e na engenharia.

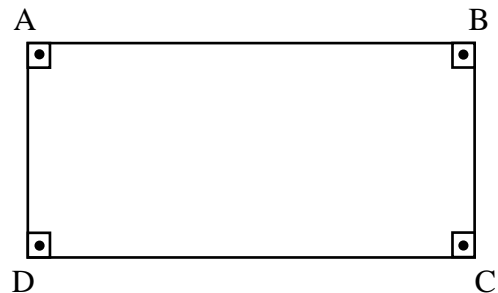
Um polígono que possui os lados congruentes é equilátero. Se possui os ângulos congruentes, é equiângulo.

Figura 6 – Quadrilátero Equilátero



Fonte: Próprio autor

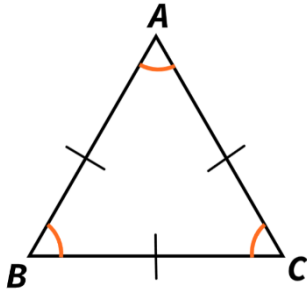
Figura 7 – Quadrilátero Equilátero



Fonte: Próprio autor

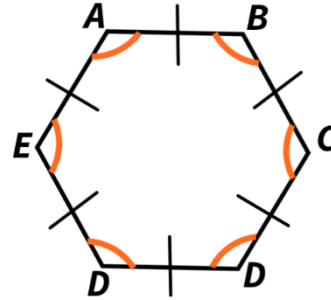
Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes (equilátero) e todos os ângulos congruentes (equiângulo).

Figura 8 – O Triângulo regular é o equilátero



Fonte: Próprio autor

Figura 9 – Hexágono regular



Fonte: Próprio autor

2.2.1 Expressão do ângulo interno (a_i) de um polígono regular.

Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes, com isso para calcular a soma de todos eles teremos:

$$n \cdot a_i = S_i$$

$$n \cdot a_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

2.2.2 Expressão do ângulo externo (a_e) de um polígono regular.

Os ângulos externos de um polígono regular são todos congruentes, logo teremos

$$n \cdot a_e = S_e$$

$$n \cdot a_e = 360^\circ$$

$$a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

Diante do exposto acima, veremos na tabela, a seguir, os principais polígonos regulares e seus respectivos ângulos internos, a soma de seus ângulos internos e a soma dos seus ângulos externos.

Tabela 2 – Ângulos em polígonos

Polígono Regular	Ângulo Interno (a_i)	S_i	S_e
Triângulo	60^0	180^0	120^0
Quadrilátero	90^0	360^0	90^0
Pentágono	108^0	540^0	72^0
Hexágono	120^0	720^0	60^0
Heptágono	$128,57^0$	900^0	$51,43^0$
Octógono	135^0	1.080^0	45^0
Eneágono	140^0	1.260^0	20^0
Decágono	144^0	1.440^0	36^0
Undecágono	$147,27^0$	1.620^0	$32,73^0$
Dodecágono	150^0	1.800^0	30^0
Tridecágono	$152,30^0$	$1.979,9^0$	$27,7^0$
Tetradecágono	$154,28^0$	$2.159,92^0$	$25,72^0$
Pentadecágono	156^0	2.340^0	24^0
Hexadecágono	$157,5^0$	2.520^0	$22,5^0$
Heptadecágono	$158,82^0$	$2.699,94^0$	$21,2^0$
Octadecágono	160^0	2.880^0	20^0
Eneadecágono	$161,05^0$	$3.059,95^0$	$18,95^0$
Icoságono	162^0	3240^0	18^0
Pentavinténágono	$165,5^0$	$4.137,5^0$	$14,5^0$
Trintenágono	168^0	5.040^0	12^0

Fonte: Próprio autor

3 LADRILHAMENTO

O ladrilhamento é uma arte que consiste em preencher um plano, por moldes, sem que haja sobreposição de figuras ou espaços vazios entre elas. Conforme Sallum (2016), as mais antigas peças de ladrilhos foram encontradas no Egito, há aproximadamente 5000 a.C. Além de outros povos, como os romanos e mediterrâneos, mouros, árabes e cristãos, que também retratavam as pessoas e a natureza através de figuras geométricas entrelaçadas. E ainda hoje, é possível encontrar essa técnica de ladrilhamento em vários objetos do dia a dia, como em pisos decorativos com cerâmicas ou pedras, papéis de parede, no empacotamento ou empilhamento de objetos iguais e estampas de tecido.

Figura 10 – Piso ladrilhado por Hexágonos



Imagem: bing.com

Figura 11 – Mosaico Árabe



Imagem: Clube da OBMEP

Além disso, o ladrilhamento não é encontrado apenas em criações humanas, mas na natureza, por exemplo em favos de mel, cascos de tartaruga, casca de abacaxi, escamas de peixe, entre outros (Imenes, 2002).

Figura 12 – Hexágonos em favo de mel



Fonte: studio2013

Figura 13 - Pinhas



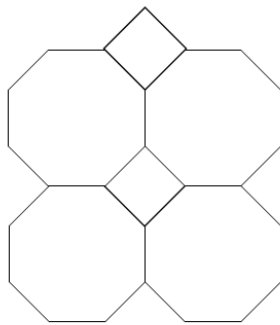
Fonte: bing.com

A arte de ladrilhar baseia-se em cobrir uma superfície do plano com regiões poligonais regulares ou irregulares, não havendo lacuna nem superposições entre elas. Essa cobertura pode ser chamada de pavimentação ou mosaico do plano. Nesse trabalho iremos analisar ladrilhamentos com polígonos regulares.

3.1 Ladrilhamentos com polígonos regulares

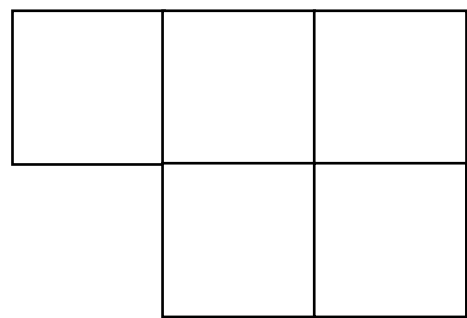
No nosso dia a dia é comum nos depararmos com diversas imagens, nas quais é possível identificar diversos polígonos regulares congruentes dispostos lado a lado, se encaixando perfeitamente. Esses ladrilhamentos feitos com polígonos regulares são chamados de ladrilhamentos bem comportados.

Figura 14 – Ladrilhamento com octógonos e quadrados



Fonte: Próprio autor

Figura 15 – Ladrilhamento com quadrados



Fonte: Próprio autor

Segundo Dias e Sampaio, tais ladrilhamentos seguem as seguintes condições:

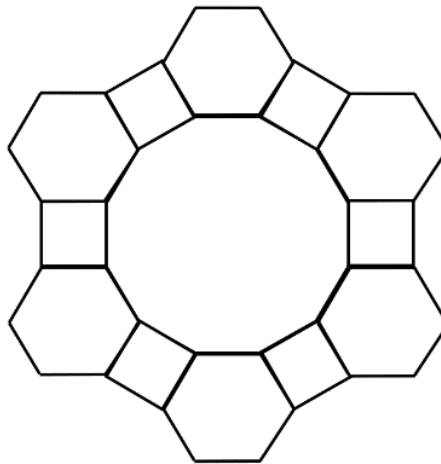
1. Os ladrilhos devem ser polígonos regulares de um ou mais tipos,
2. A intersecção entre os polígonos ocorre em um lado inteiro ou vértice,
3. O modelo em torno de cada um dos vértices do ladrilhamento é o mesmo.

A primeira condição deixa claro que é possível ter ladrilhos comportados com mais de um polígono regular. Observando a **figura 5**, vemos que ela é formada por octógonos e quadrados regulares de mesma medida, e a intersecção entre dois ladrilhos é sempre um lado inteiro, obedecendo assim a segunda condição. Como esse ladrilhamento usa mais de um polígono regular, ele é chamado de ladrilhamento semirregular ou quase regular. Na **figura 6**, temos um ladrilhamento só com quadrados se interceptando lado a lado, tal ladrilhamento chamaremos de ladrilhamento regular.

E a terceira condição como se explica?

Para explicar melhor essa terceira condição vamos imaginar dar uma rotação, no sentido horário ou anti-horário, em torno de qualquer vértice, encontraremos sempre o mesmo tipo de polígonos regulares, tendo uma mesma sequência na forma com que os polígonos aparecem. Por exemplo, no ladrilhamento abaixo, ao redor de cada vértice sempre estão dispostos um dodecágono, um quadrado e um hexágono.

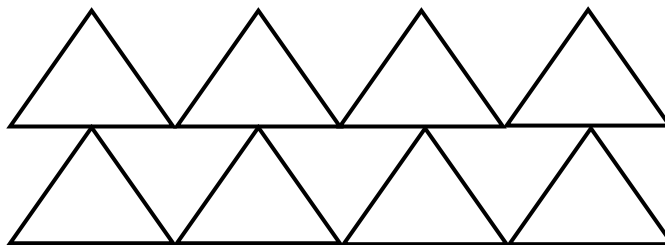
Figura 16 – Ladrilhamento Regular



Fonte: Próprio autor

Diante do que foi apresentado acima, pode estar surgindo a seguinte pergunta: como que seria então um ladrilhamento não comportado? A grosso modo, seria dizer que são ladrilhamentos que não obedecem a uma das três condições citadas acima. A imagem a seguir exemplificará isso.

Figura 17 – Ladrilhamento com triângulos



Fonte: Próprio autor

Observe que esse ladrilho é formado só por polígonos regulares, no caso o triângulo e ao redor de cada vértice temos um mesmo número de polígonos ou seja, sempre quatro triângulos, obedecendo a primeira e a terceira condições citadas acima, porém, a intersecção

entre os polígonos não ocorre pelo um lado inteiro ou pelo vértice, anulando a segunda condição citada acima para ladrilhamentos bem comportados.

Em nosso estudo, aqui, abordaremos dois tipos de ladrilhamentos bem comportados: os ladrilhamentos regulares e os ladrilhamentos quase regulares ou semirregulares.

4 Ladrilhamentos Regulares

Conforme visto no tópico anterior, os ladrilhamento bem comportados que são formados partir de um único tipo de polígonos regulares são chamados de ladrilhamento regular. Para obter tal ladrilhamento, posicionaremos os polígonos regulares ao redor de um ponto fixo colocando-os lado a lado. Com isso, ao final de tal procedimento teremos duas possibilidades:

- 1º) ao completarmos a volta de preenchimento, os polígonos estarão perfeitamente ajustados;
- 2º) no final da volta, não ficará com preenchimento completo e se colocarmos mais um, haverá uma superposição.

Devemos observar que uma volta completa sempre medirá 360^0 . Com isso sempre que for obedecida a possibilidade 1, teremos polígonos regulares dispostos de tal maneira que a soma de seus ângulos internos ao redor do ponto seja sempre 360^0 . Ou seja, se considerarmos um ponto fixo P rodeado de k polígonos regulares congruentes, cada um com ângulo interno medindo i , teremos que $k \cdot i = 360^0$. No caso da possibilidade 2 não ficará preenchido, não completando a volta, logo $k \cdot i < 360^0$ e se houver justaposição teremos $(k+1) \cdot i > 360^0$ com isso não formando o ladrilho.

Para a pavimentação do plano com tais ladrilhos, devemos colocar novos polígonos regulares do mesmo tipo ao redor dos já colocados por meio de seus vértices exteriores definindo-os como pontos fixos, chamaremos esse procedimento de anéis circundantes. Se for obtido êxito, a pavimentação será possível para esse tipo de ladrilho.

Mas a pergunta que surge é a seguinte: Será que qualquer polígono regular é capaz de ladrilhar sozinho um plano? Para responder tal pergunta faremos alguns estudos utilizando polígonos regulares.

4.1 Triângulo Equilátero

Os triângulos regulares (equiláteros) possuem ângulos internos $\hat{i} = 60^\circ$. Definindo um ponto fixo P no plano, podemos dispor seis triângulos equiláteros ao redor desse ponto fixo P da seguinte maneira:

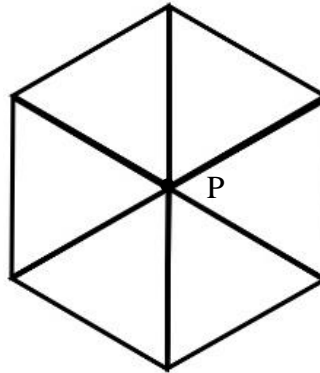
Figura 18 – Ladrilhamento regular com triângulos equiláteros

Temos que

$$k = 6$$

$$i = 60^\circ \text{ logo}$$

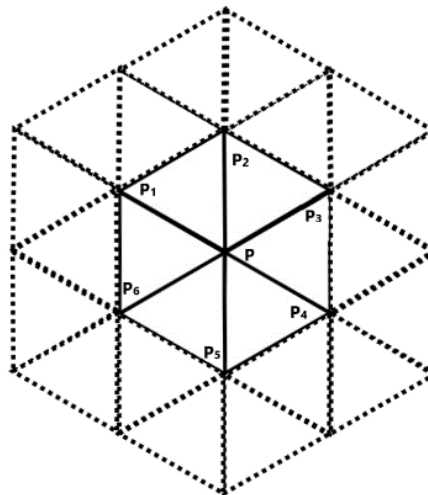
$$k \cdot i = 6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$$



Fonte: Próprio autor

Para estender essa pavimentação, chamaremos os vértices exteriores da imagem obtida anteriormente de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 conforme a figura abaixo.

Figura 19 – Ladrilhamento regular com triângulos equiláteros



Fonte: Próprio autor

Observe que em P_1 tínhamos dois triângulos e foi acrescentado mais quatro, da mesma forma em P_2 porém nesse foi acrescentado mais três triângulos, em P_3 temos a mesma

situação de P_2 , tínhamos dois triângulos e foi acrescentado mais três, tal procedimento se sucede até o último vértice P_6 . Dessa forma, se completa o anel circundante. Como tal procedimento pode ser repetido infinitas vezes, concluímos, assim, que podemos ladrilhar o plano com triângulos equiláteros.

Podemos classificar um ladrilho, de acordo com o tipo de polígonos que o circunda, anotando sequencialmente o número de lados dos polígonos regulares que se agrupam ao redor de cada vértice. Por exemplo, no ladrilhamento anterior, cada vértice dos triângulos equiláteros foi circundado pelo mesmo número de polígonos regulares, sendo todos do mesmo tipo por se tratar de um ladrilhamento regular, no caso todos triângulos. Então podemos classificar esse ladrilhamento de padrão $(3,3,3,3,3,3)$ pois temos em torno de cada vértice seis triângulos equiláteros.

4.2 Quadrado

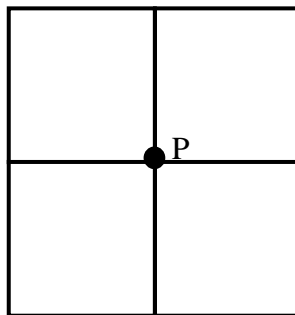
No quadrado temos, que seu ângulo interno $i = 90^0$ e considerando P como o ponto central teremos:

Figura 20 – Ladrilhamento regular com quadrados

$$k = 4$$

$$\hat{i} = 90^0$$

$$k \cdot i = 4 \cdot 90^0 = 360^0$$

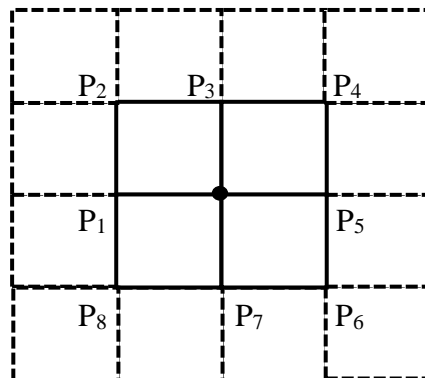


Fonte: Próprio autor

Vamos estender a pavimentação com quadrados da seguinte maneira:

Considerando $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ e P_8 os vértices exteriores da figura abaixo. Observamos que em P_1 temos dois quadrados nos possibilitando acrescentamos mais dois, conforme visto no procedimento anterior. Em P_2 ficamos agora com dois quadrados, nos possibilitando acrescentar mais dois, em P_3 ficaremos com três quadrados, com isso acrescentaremos mais um, a mesma coisa para P_4, P_5, P_6, P_7 e por fim P_8 . Dessa forma, completamos a volta. Tal procedimento pode ser repetido sucessivamente.

Figura 21 – Ladrilhamento regular com quadrados



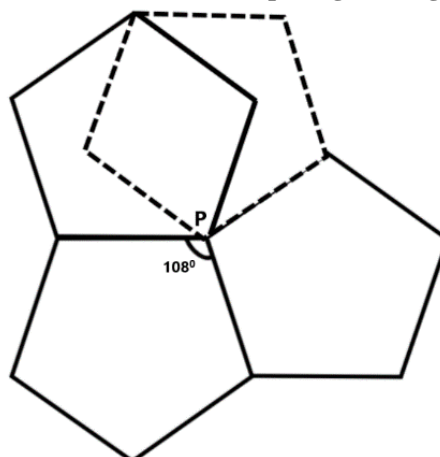
Fonte: Próprio autor

Com tal procedimento, concluímos que é possível ladrilhar o plano com quadrados. Como em torno de cada vértice, temos quadrado, quadrado, quadrado e quadrado, ou seja, quatro quadrados, tal pavimentação será um ladrilhamento de padrão (4, 4, 4, 4).

4.3 Pentágono Regular

Sabemos que um pentágono regular possui ângulo interno $i=108^\circ$, logo se definirmos um ponto fixo P no plano e rodearmos tal ponto com inicialmente três pentágonos teremos $k = 3$ e $i = 108^\circ$ então $k \cdot i = 3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ não completando assim a volta, ou seja, apresentaria “buracos” no ladrilhamento. Se acrescentarmos mais um pentágono regular, teremos $k = 4$ e $i = 108^\circ$ então $k \cdot i = 4 \cdot 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$ nesse caso completariamos a volta, porém, haverá uma superposição de ladrilhos. Exemplificaremos tal situação na figura a seguir.

Figura 22 – Ladrilhamento com pentágonos regulares



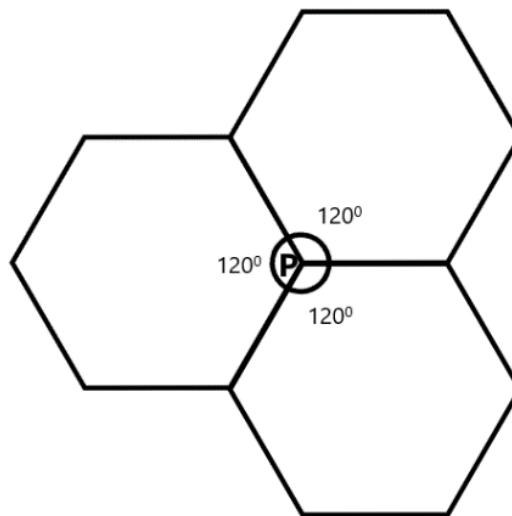
Fonte: Próprio autor

Observa-se na figura, que a intersecção entre os polígonos não está acontecendo entre os vértices ou entre os lados e conseqüentemente a distribuição dos polígonos em cada vértice não é a mesma, dessa forma ao tentarmos ladrilhar o plano com pentágonos regulares, não atendemos as duas últimas condições para ladrilhamentos bem-comportados. Concluimos então, que não é possível ladrilhar o plano com pentágonos regulares.

4.4 Hexágono Regular

Conforme estudado anteriormente, nos hexágonos regulares cada ângulo interno mede 120° . Diante disso, se definirmos um ponto P no plano e o rodearmos com hexágonos regulares, caberá exatamente três desses hexágonos, pois teremos $k = 3$ e $i = 120^{\circ}$ logo $k \cdot i = 3 \cdot 120^{\circ} = 360^{\circ}$. Isso pode ser perfeitamente comprovado na imagem a seguir.

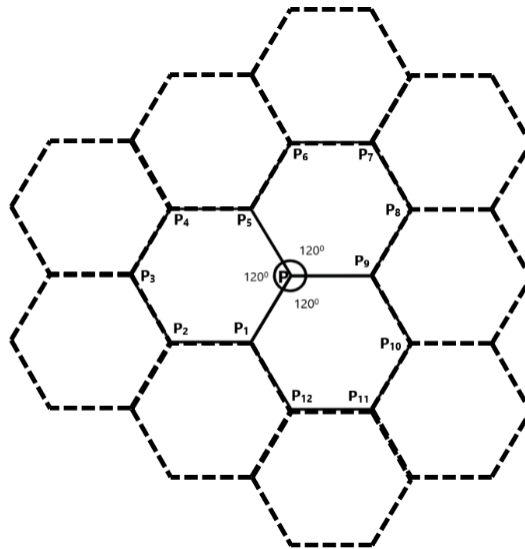
Figura 23 – Ladrilhamento regular com hexágonos



Fonte: Próprio autor

Vamos agora estender a pavimentação para os demais vértices dos hexágonos regulares. Dessa forma, vamos denotá-los por $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_{10}, P_{11}$ e P_{12} e envolvê-los a partir de cada um com outros hexágonos regulares, tal procedimento será descrito na imagem a seguir.

Figura 24 – Ladrilhamento regular com hexágonos



Fonte: Próprio autor

Note que o vértice P_1 possuía dois hexágonos e foi acrescentado mais um, esse por sua vez passou a fazer parte também do vértice P_2 , que agora passou a ser vértice de dois hexágonos, que em seguida foi acrescentado mais um hexágono passando o vértice P_2 a ter três hexágonos. O vértice que foi acrescentado em P_2 atingirá P_3 e este passará a ter dois hexágonos e assim sucessivamente para os demais vértices completando assim a volta em P_{12} . Com isso é formado um padrão, que poderá ser repetido infinitas vezes, pois o anel circundante foi perfeitamente formado. Concluímos então que o plano pode ser ladrilhado perfeitamente com hexágonos regulares. E como em torno de cada vértice temos três hexágonos regulares, chamaremos esse tipo de ladrilhamento de padrão (6, 6, 6).

4.5 Heptágono regular e demais polígonos regulares

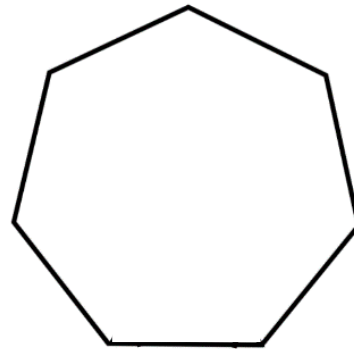
Para verificar se é possível ladrilhar o plano com heptágonos regulares, devemos proceder da mesma forma dos demais polígonos regulares, analisados anteriormente. Sendo i o valor de seu ângulo interno, o mesmo pode ser facilmente calculado conforme visto em tópico anterior da seguinte maneira:

Figura 25 – Ladrilhamento regular com heptágonos

$$i = \frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n}$$

$$i = \frac{(7-2) \cdot 180^{\circ}}{7}$$

$$i = \frac{5 \cdot 180^{\circ}}{7} = \frac{900}{7} = 128,58^{\circ}$$



Fonte: Próprio autor

Para planificarmos o plano com heptágonos regulares, vamos determinar um ponto fixo P no plano e rodearmos tal ponto com esses heptágonos. Logo é perceptível que se $k = 2$, temos então que $k \cdot i = 2 \cdot 128,58^{\circ} = 257,16^{\circ} < 360^{\circ}$ ou seja, não é possível completar a volta em torno de P. Se acrescentarmos mais um polígono teremos $k = 3$, então $k \cdot i = 3 \cdot 128,58^{\circ} = 385,740 > 360^{\circ}$ completando assim a volta, porém com superposição de polígonos. Com isso, concluímos que assim como ocorreu com os pentágonos regulares, que a intersecção entre os polígonos não está acontecendo entre os vértices ou entre os lados e conseqüentemente a distribuição dos polígonos em cada vértice não é a mesma, ocorre com os heptágonos regulares. Dizemos então que heptágonos regulares ladrilham o plano.

Diante do que foi apresentado até aqui, surge o seguinte questionamento: ainda existe polígonos regulares que ladrilham o plano? Se continuarmos tal procedimento adotado até aqui, conseguiremos outro polígono que possa ladrilhar o plano? Serão triângulo, quadrado e hexágono os únicos polígonos regulares, que sozinhos conseguem ladrilhar o plano? Tais perguntas serão respondidas no próximo tópico.

4.5.1 Ladrilhando com polígonos de n lados

Para responder às perguntas apresentadas no capítulo anterior, vamos usar os procedimentos tomados anteriormente para ladrilhamento, somente com polígonos regulares. Para isso vamos determinar um polígono qualquer de n lados, com ângulo interno medindo i e usaremos k desses polígonos para circundar o ponto fixo P do plano.

Sabemos de estudos anteriores, que o ângulo interno i de um polígono regular pode ser facilmente encontrado através de seu número de lados da seguinte maneira:

$$S_i = (n-2) \cdot 180^{\circ}$$

pelo fato de o polígono ser regular temos que

$$S_i = n \cdot i$$

logo

$$n \cdot i = (n - 2) \cdot 180^0$$

isolando o valor i na equação teremos $i = \frac{(n - 2) \cdot 180^0}{n}$

podemos expressar i por $i = 180^0 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ (I)

Sabemos que para a realização do ladrilhamento acontecer, é necessário que a quantidade k de polígonos regulares congruentes se ajustem ao redor do ponto fixo P de maneira, que aconteça uma justaposição destes, isso ocorre quando $k \cdot i = 360^0$ ou $k = \frac{360^0}{i}$.

Como k deve ser sempre um número inteiro por se tratar da quantidade de polígonos regulares, que circundam o ponto P, conclui-se então que i sempre será um divisor de 360^0 .

Seja $i = \frac{360^0}{k}$. Substituindo em (I) teremos:

$$\frac{360^0}{k} = 180^0 \left(1 - \frac{2}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{k} = 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$k = \frac{2n}{n - 2} \Rightarrow$$

$$k - 2 = \frac{4}{n - 2}$$

Como $k - 2$ é um número inteiro, então $n - 2$ tem que ser um divisor de quatro, mas isso só é possível para $n = 3$, $n = 4$ e $n = 6$. Logo, as únicas possibilidades para ladrilharmos o plano com polígonos regulares congruentes são:

Tabela 3 – Padrões de ladrilhamentos para n lados

n (nº de lados)	k (nº de polígonos por vértice)	Padrão do ladrilhamento
3	6	(3,3,3,3,3,3)
4	4	(4,4,4,4)
6	3	(6,6,6)

Fonte: Próprio autor

Percebe-se, aqui, que o número de polígonos regulares que rodeia cada vértice, será de no mínimo três e no máximo seis, e a solução apresentada aqui nos dão exatamente os ladrilhamentos apresentados anteriormente, que são os *ladrilhos regulares do plano*.

5 LADRILHAMENTOS SEMIRREGULARES OU QUASE REGULARES

Estudamos no capítulo anterior, que é possível ladrilhar o plano com polígonos regulares do mesmo tipo, de três formas diferentes usando triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular. Mas será possível ladrilhar o plano com polígonos regulares, não necessariamente congruentes entre si? Caso seja possível, de quais maneiras poderemos ladrilhar plano? Tais perguntas serão respondidas a seguir.

Os ladrilhamentos semirregulares, assim como os regulares devem obedecer às condições dos ladrilhamentos bem comportados, vistos anteriormente, que são:

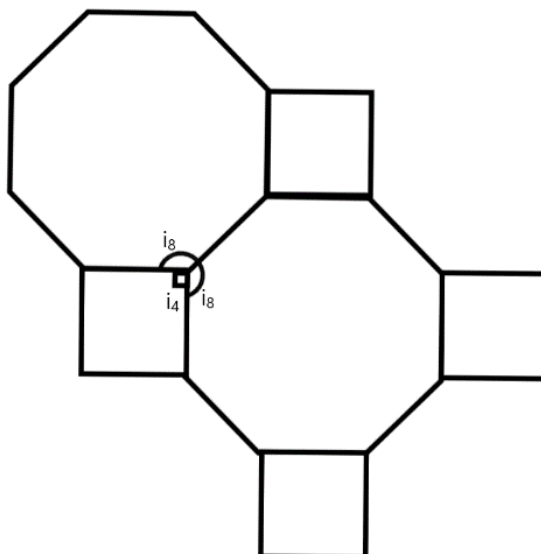
1. Os ladrilhos devem ser polígonos regulares de um ou mais tipos,
2. A intersecção entre os polígonos ocorre em um lado inteiro ou vértice,
3. O modelo em torno de cada um dos vértices do ladrilhamento é o mesmo.

Cabe ressaltar aqui, que para a segunda condição dos ladrilhamentos ser obedecida, é necessário que todos os polígonos regulares envolvidos, tenham lados de mesma medida.

Para responder tais perguntas, vamos usar os mesmos procedimentos vistos para ladrilhamentos regulares congruentes, ou seja, que a soma dos ângulos ao redor de um vértice em comum seja 360° .

Inicialmente, vamos analisar no exemplo, a seguir, a possibilidade de ladrilhamento com um octógono regular e um quadrado.

Figura 26 – Ladrilhamento semirregular



Fonte: Próprio autor

Na figura, os dois octógonos e o quadrado estão dispostos de tal forma, que possam rodear o mesmo ponto. Sabemos que por se tratar de octógonos e quadrado, seus ângulos internos i podem ser facilmente calculados da seguinte maneira:

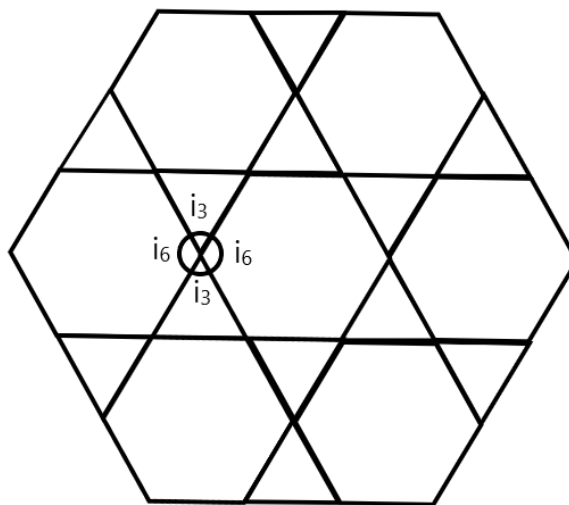
$$i_8 = \frac{(8-2)180^0}{8} = \frac{1080^0}{8} = 135^0$$

$$i_4 = \frac{(4-2)180^0}{4} = \frac{360^0}{4} = 90^0$$

Logo é possível perceber, que ao redor de cada vértice desse ladrilho a soma dos ângulos internos dos polígonos regulares aplicados valem $135^0 + 135^0 + 90^0 = 360^0$. Isso nos garante, que os polígonos regulares cubram o plano sem deixar lacunas ou que aja uma superposição. Cabe reforçar aqui, que em cada vértice teremos dois polígonos de oito lados e um de quatro lados, em que tal padrão se repete indefinidamente independentemente do sentido de percurso, que fazemos em torno dele, ou ainda de qual polígono em torno dele iniciamos o percurso. Vértices como $(8, 8, 4)$, $(8, 4, 8)$ ou $(4, 8, 8)$ são considerados do mesmo tipo, ou seja, do mesmo padrão.

Um outro exemplo que podemos apresentar, é a formação de ladrilho usando dois hexágonos regulares e dois triângulos, arranjados em um mesmo ponto do plano, como segue na figura abaixo.

Figura 27 – Ladrilhamento semirregular (6, 3, 6, 3)



Fonte: Próprio autor

O vértice destacado está rodeado pelos ângulos internos i_6 , i_3 , i_6 e i_3 , e como já sabemos de exemplos anteriores que $i_3 = 60^\circ$ e $i_6 = 120^\circ$, logo ao redor de cada vértice temos $i_6 + i_3 + i_6 + i_3 = 120^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 60^\circ = 360^\circ$ temos então um ladrilhamento semirregular de padrão (6, 3, 6, 3).

Nos dois exemplos apresentados acima, temos ladrilhamentos bem comportados com polígonos regulares de vários tipos. No primeiro, usamos três tipos de polígonos para rodear cada vértice e no segundo exemplo quatro tipos de polígonos rodeando cada vértice. Será que é possível ladrilhar o plano rodeando cada vértice com mais polígonos regulares? Será que em um ladrilhamento bem-comportado, há um número máximo e mínimo de polígonos regulares ao redor de cada vértice? Para responder tais perguntas vamos analisar primeiro qual seria a maior quantidade de polígonos regulares, que poderiam ter circundando cada vértice. Para obter a maior quantidade de polígonos possíveis, tais polígonos devem ter ângulos internos de menor valor possível, pois assim precisaríamos de uma quantidade maior para sua soma ser de 360° . Isso ocorre quando utilizamos triângulos equiláteros, cujo valor do ângulo interno mede 60° , logo para circundar um vértice com tal polígono precisaríamos de $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, ou seja, 6 triângulos. Assim, em um ladrilhamento teremos no máximo seis polígonos regulares, rodeando cada vértice. E quanto a quantidade mínima? Para a resposta de tal pergunta, devemos usar uma análise parecida com o que utilizamos a pouco.

Vamos começar tal análise ressaltando que os polígonos, que utilizamos nos ladrilhamentos para rodear um vértice, são sempre polígonos convexos e conforme estudado anteriormente, tais polígonos possuem ângulos internos menores que 180° , logo esse número mínimo de polígonos utilizados não poderia ser dois, pois $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$, porém não se trataria de polígonos regulares, portando precisaríamos de no mínimo a utilização de três polígonos pois $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$.

Diante do que foi proposto, se considerarmos k como número de polígonos regulares ao redor de um vértice, concluimos então $3 \leq k \leq 6$, ou seja, em torno de cada vértice de um ladrilhamento bem comportado, teremos sempre, no mínimo, três polígonos e, no máximo, seis. Tal conclusão chamaremos de regra delimitadora.

Para o número máximo de polígonos utilizados em um ladrilhamento, ficou claro que isso só é possível para triângulos equiláteros, ou seja, temos sempre um ladrilhamento de padrão único (3, 3, 3, 3, 3, 3). Diferentemente, no caso da quantidade mínima de polígonos usados, podemos ter várias combinações de três polígonos regulares em torno do vértice, nesse caso não temos um padrão único para esse tipo de ladrilhamento bem comportado. Por exemplo,

podemos ter três hexágonos regulares em torno do vértice ou dois octógonos e um quadrado conforme visto no exemplo da figura 17 ou mesmo um dodecágono regular, um hexágono regular e um quadrado, obtendo assim ladrilhamentos de padrões (6, 6, 6), (8, 8, 4) e (12, 6, 4) respectivamente. Em todos os casos, a soma de tais ângulos internos ao redor do mesmo vértice resulta em 360° .

Fazendo uma análise, percebe-se que ladrilhamentos bem comportados podem apresentar diversos tipos de padrões, de acordo com a quantidade mínima e máxima de polígonos regulares utilizados em sua formação. Representaremos tais padrões de acordo com os polígonos, que rodeiam cada vértice da seguinte maneira: (t, l, m) ; (t, l, m, n) , (t, l, m, n, p) e (t, l, m, n, p, q) , com um mínimo de três e um máximo de seis polígonos ao redor de cada vértice. Mas uma nova pergunta surge agora: quais são os polígonos que compõem cada vértice? Em cada padrão, quantos tipos diferentes de ladrilhamentos podemos ter? Diante disso, é possível saber quantos ladrilhamentos bem comportados são possíveis formar? As respostas a tais perguntas serão metodicamente obtidas a seguir.

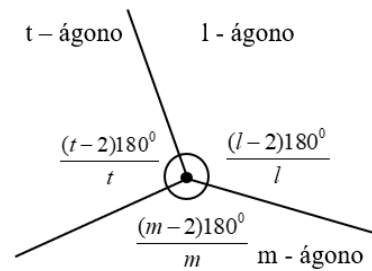
5.1 Analisando os ladrilhamentos e seus padrões

Conforme analisado anteriormente, os vértices de um ladrilhamento bem comportado, seja ele regular ou semirregular, podem apresentar quatro tipos diferentes de padrões conforme os polígonos regulares que o rodeiam, são eles (t, l, m) ; (t, l, m, n) , (t, l, m, n, p) e (t, l, m, n, p, q) . Vamos, nesse tópico, analisar quais polígonos podem ser utilizados e quantos ladrilhamentos diferentes podem ser formados em cada padrão.

5.1.1 Padrão (t, l, m)

Para esse tipo de ladrilhamento teremos $k = 3$, ou seja, usaremos três tipos de polígonos regulares arranjados ao redor de cada vértice, de tal forma que não haja lacunas nem superposição entre eles, sendo que o primeiro terá t lados, o segundo l lados e o terceiro m lados conforme representado na figura abaixo.

Figura 28 – Ladrilhamento semirregular (t, l, m)



Fonte: Próprio autor

A soma dos ângulos internos ao redor do ponto é dada por:

$$\frac{(t-2)180^\circ}{t} + \frac{(l-2)180^\circ}{l} + \frac{(m-2)180^\circ}{m} = 360^\circ, \text{ logo obtemos}$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$$

para acharmos as soluções inteiras e positivas dessa equação, supomos sem perda de generalidade, que $t \leq l \leq m$. Logo teremos $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{t}$ e $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{t}$, portanto

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{3}{t}$$

ou seja
$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{t}$$

logo
$$t \leq 6$$

porém conforme visto, o menor valor de t se verifica para triângulos equiláteros, ou supondo que $t \geq 3$, temos então que

$$3 \leq t \leq 6$$

- Para $t = 3$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \Rightarrow \\ \frac{1}{l} + \frac{1}{m} &= \frac{1}{6} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{6} - \frac{1}{l} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} = \frac{l-6}{6l}$$

que nos dá

$$l \geq 7$$

por outro lado, como $l \leq m$ teremos

$$\frac{l-6}{6l} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{l}$$

teremos então que $l \leq 12$ resultando no intervalo $7 \leq l \leq 12$.

Substituindo os possíveis valores de l e lembrando que m é um número inteiro, obteremos as seguintes ternas como soluções apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 4 – Padrões de ladrilhamento (3, l, m)

t	l	m
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12

Fonte: Próprio autor

- Para $t = 4$, ou seja, quando um dos polígonos que circunda o vértice for um quadrado, teremos:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} = \frac{l-4}{4l} \Rightarrow$$

o que nos dá

$$l \geq 5$$

por outro lado, como $l \leq m$ teremos

$$\frac{l-4}{4l} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{l}$$

teremos então que $l \leq 8$ resultando no intervalo $5 \leq l \leq 8$.

Da mesma forma, substituindo os possíveis valores de l e lembrando que m é um número inteiro, obteremos as seguintes ternas como soluções apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 5 – Padrão de ladrilhamento (4, l, m)

t	l	m
4	5	20
4	6	12
4	8	8

Fonte: Próprio autor

- Para $t = 5$, ou seja, quando um dos polígonos que circunda o vértice ser um pentágono regular, teremos:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$$

procedendo de forma análoga aos anteriores, obteremos $l \geq 4$, porém como suposto no início que $t \leq l \leq m$ então procede dizer que $l \geq 5$ resultando no intervalo $5 \leq l \leq 6$, obtendo assim a seguinte solução como única

Tabela 6 – Padrão de ladrilhamento (5, l, m)

t	l	m
5	5	10

Fonte: Próprio autor

- Para $t = 6$, cujo o polígono usado é um hexágono regular teremos:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$$

Procedendo da mesma forma que as demonstrações anteriores, teremos $l \geq 3$, como $t \leq l$ prevalece então $l \geq 6$, logo conforme visto anteriormente, tal ladrilho só é possível para $m = 6$ obtendo assim a solução única

Tabela 7 – Padrões de ladrilhamento (6, l, m)

t	l	m
6	6	6

Fonte: Próprio autor

Conforme visto acima, podemos obter dez combinações diferentes com a distribuição de polígonos regulares, ao redor de um mesmo vértice. Abaixo apresentamos um resumo dessas combinações.

Tabela 8 – Padrões de ladrilhamento (t, l, m)

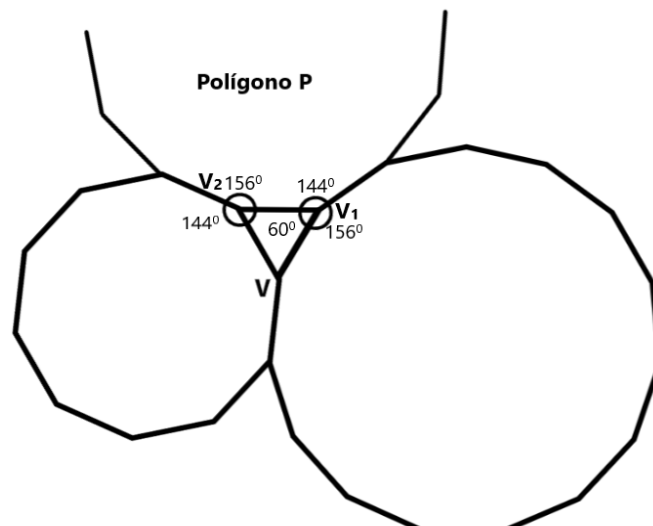
t	l	m
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10
6	6	6

Fonte: Próprio autor

5.1.1.1 Combinações do tipo (3, l, m)

A questão crucial agora é sabermos se tais combinações podem ser estendidas de modo, que seja possível pavimentar o plano com cada uma delas. Por exemplo, considere a combinação (3, 10, 15) ao redor de um vértice V. Se tentarmos estender essa configuração em torno do vértice V é perceptível que tal configuração não se repete em torno do vértice V_1 e também do vértice V_2 conforme imagem abaixo. Fica visível que $V_1 \neq V_2$ nos mostra que o polígono P não é regular, ou seja, mais uma confirmação que tal combinação não representa um padrão de ladrilhamento.

Figura 29 – Combinação do tipo (3, l, m)

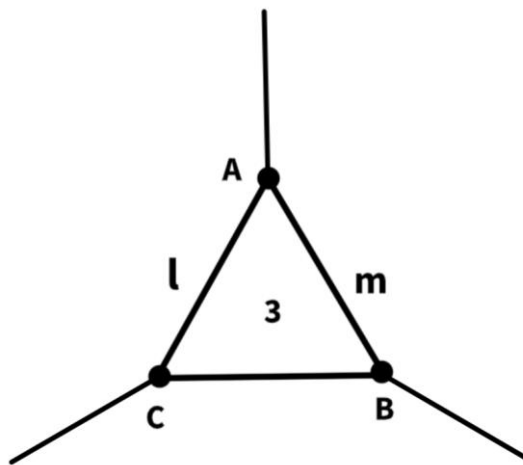


Fonte: Próprio autor

Então qual das combinações apresentadas representam padrões de ladrilhamentos bem comportados? Para respondermos tal pergunta, faremos uma análise geométrica se tais combinações representam ladrilhamentos. Começaremos analisando os ladrilhamentos de padrão $(3, 1, m)$.

Conforme já estudado anteriormente, os ladrilhamentos do tipo $(3, 1, m)$ tem, pelo menos, um triângulo ao redor de cada um dos vértices, conforme apresentado na imagem abaixo.

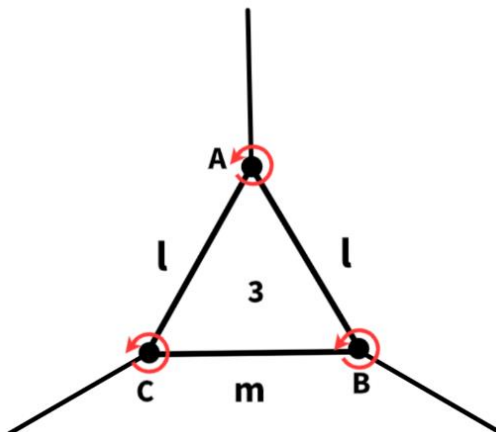
Figura 30 – Combinação do tipo $(3, 1, m)$



Fonte: Próprio autor

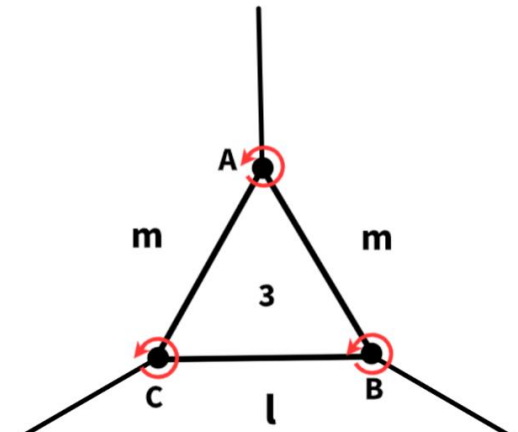
Observamos que cada vértice A, B e C tem pelo menos um triângulo ao seu redor. Devemos lembrar que estamos analisando padrões do tipo $(3, 1, m)$ que são equivalentes aos padrões $(3, m, 1)$, $(1, 3, m)$, $(1, m, 3)$, $(m, 3, 1)$ e $(m, 1, 3)$. Ora, mas isso só é possível se tivermos $l = m$. Tal conclusão pode ser facilmente entendida nas imagens abaixo.

Figura 31 – Combinação do tipo $(3, 1, m)$



Fonte: Próprio autor

Figura 32 – Combinação do tipo $(3, 1, m)$



Fonte: Próprio autor

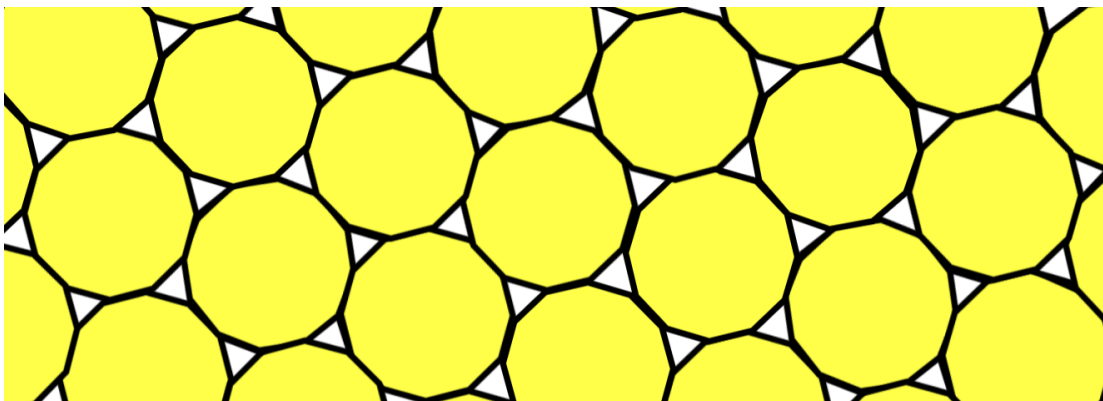
Conforme visto nas imagens o vértice B é rodeado por um triângulo, por um l – ágono (polígono de l lados) regular e por um m – ágono (polígono de m lados) regular. Observando a imagem 1 percebemos que para o padrão do ladrilhamento acontecer nos demais vértices A e C devemos ter padrões do tipo $(3, m, 1)$ sobre C e $(3, 1, 1)$ sobre A, mas como estamos falando do ladrilhamento bem comportados, cada vértice deve obedecer a terceira condição do bom comportamento de um ladrilhamento, que diz que todos os vértices devem ser do mesmo tipo, logo isso só é possível para $l = m$. Analogamente se aplicarmos tal princípio para o vértice A da imagem 2 concluímos que $m = 1$. Isto significa que a única situação em que os três vértices são equivalentes, em um ladrilhamento do tipo $(3, l, m)$, é aquela na qual os dois polígonos são iguais e, portanto, $l = m$.

Assim, acabamos de estabelecer segundo Dias e Sampaio, a seguinte condição de existência:

“Se um ladrilhamento tem um padrão $(3, l, m)$, então $l = m$, ou seja, tem um padrão da forma $(3, l, m)$; logo, não existe nenhum ladrilhamento de padrão $(3, m, m)$ quando $l \neq m$ ” (DIAS e SAMPAIO, 2010; Pag 55).

Concluímos que um padrão bem-comportado do tipo $(3, l, m)$ se tivermos $l = m$, ou seja, das combinações apresentadas na tabela 8 a única que satisfaz tal condição é $(3, 12, 12)$ e será composto por um triângulo e dois dodecágonos ao redor de cada vértice, o que faz com que seja classificado como semirregular. Tal ladrilhamento está representado na imagem a seguir.

Figura 33 – Padrão de ladrilhamento $(3, 12, 12)$



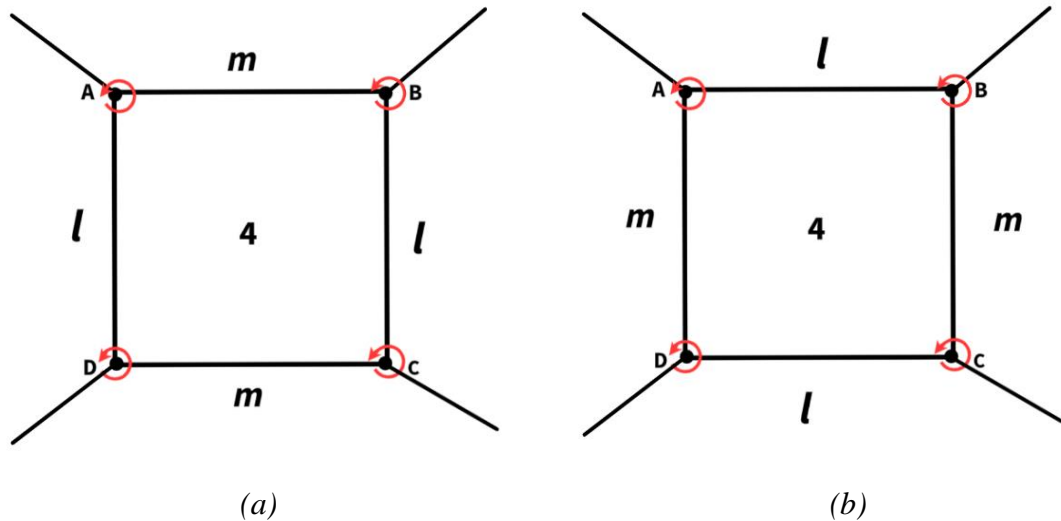
Fonte: Próprio autor

5.1.1.2 Combinações do tipo $(4, l, m)$

Para começarmos, faremos mais uma vez uma abordagem geométrica, porém, de forma um pouco diferente daqui usamos para as combinações do tipo $(3, l, m)$.

Para darmos início, vamos ressaltar que os padrões $(4, l, m)$, $(l, m, 4)$ e $(l, 4, m)$ são todos equivalentes e vamos notar que diferentemente do que aconteceu no padrão analisado anteriormente, podemos ter nesse caso $l \neq m$. Tal conclusão pode ser facilmente observado nas imagens a seguir.

Figura 34 – Combinações do tipo $(4, l, m)$



Fonte: Próprio autor

A figura mostra os quatro vértices A, B, C e D, de um quadrado integrante do ladrilhamento $(4, l, m)$. Fica perfeitamente visível que sobre os vértices A, B e C temos rodeando-os um quadrado, um l – *ágono* regular e um m – *ágono* regular com $l \neq m$. Se seguirmos o sentido das setas indicadas nas figuras, veremos que tanto na imagem *a* como na imagem *b*, os vértices A, B C e D formam padrões equivalentes, pois temos respectivamente $(4, m, l)$, $(4, l, m)$, $(4, m, l)$ e $(4, l, m)$ finalizando a rotação. Diante disso surge a seguinte pergunta: qual seria então os valores de m e l ? Para chegar a tal resposta consideremos l e m pares para a análise a seguir.

Conforme visto anteriormente, a soma dos ângulos adjacentes ao redor de cada vértice, sempre valerá 360° , logo para cada vértice teremos:

$$\alpha_4 + \alpha_l + \alpha_m = 360^\circ$$

como $\alpha_4 = 90^\circ$, teremos então que $\alpha_l + \alpha_m = 270^\circ$

para encontrarmos quais são os polígonos l -*ágono* regular e um m -*ágono* regular envolvidos na situação, devemos lembrar que cada ângulo interno vale respectivamente

$$\alpha_l = \frac{(l-2) \cdot 180^0}{l} \quad \text{e} \quad \alpha_m = \frac{(m-2) \cdot 180^0}{m}$$

como $\alpha_l + \alpha_m = 270^0$, teremos então

$$\frac{(l-2) \cdot 180^0}{l} + \frac{(m-2) \cdot 180^0}{m} = 270^0$$

desenvolvendo a equação acima temos as seguintes expressões:

$$\left[\frac{(l-2)}{l} + \frac{(m-2)}{m} \right] \cdot 180^0 = 270^0$$

$$\left[\frac{(l-2)}{l} + \frac{(m-2)}{m} \right] = \frac{270^0}{180^0} = \frac{3}{2}$$

$$\left(1 - \frac{2}{l} \right) + \left(1 - \frac{2}{m} \right) = \frac{3}{2}$$

o que nos leva a

$$\frac{2}{l} + \frac{2}{m} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

ou seja

$$\frac{2}{l} + \frac{2}{m} = \frac{1}{2}$$

como l e m são inteiros e pares, ambos são múltiplos de 2. Iremos representa-los por $l = 2r$ e $m = 2s$ com r e $s \in \mathbb{Z}$. Substituindo a equação anterior temos:

$$\frac{2}{2r} + \frac{2}{2s} = \frac{1}{2}$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

isolando a variável r temos:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{s} = \frac{s-2}{2s}$$

chegamos então
$$r = \frac{s-2}{2s}$$

para r permanecer positivo devemos ter $s \geq 3$ com isso temos

$$r = \frac{s-2}{2s} = \frac{2(s-2)+4}{s-2} = 2 + \frac{4}{s-2}$$

como r é um número positivo, então $s - 2$ deverá ser um divisor de 4, logo r atingirá seu valor máximo quando $s - 2 = 4$, ou seja, quando $s = 6$. Concluimos então que $3 \leq s \leq 6$ e como

$r = \frac{s-2}{2s}$, podemos concluir que através da tabela, a seguir, os possíveis valores de l e m

consequentemente as possíveis existência para padrões $(4, l, m)$.

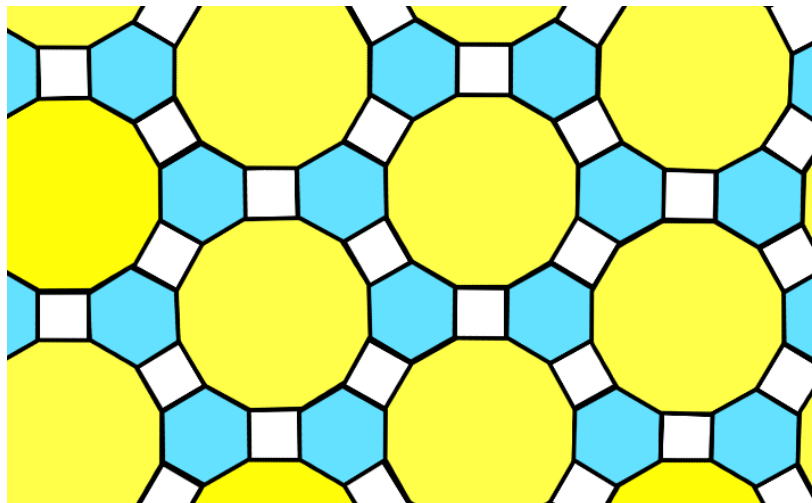
Tabela 9 – Padrões de ladrilhamento $(4, l, m)$

s	r	$l = 2r$	$m = 2s$	Padrão $(4, l, m)$
3	6	12	6	$(4, 12, 6)$
4	4	8	8	$(4, 8, 8)$
5	10/3	20/3	10	Não é possível
6	3	6	12	$(4, 6, 12)$

Fonte: (Dias e Sampaio, 2010, p 66)

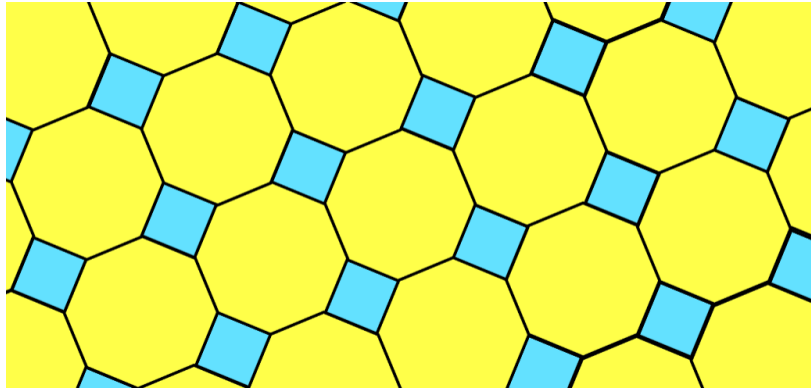
Conforme já visto, os padrões $(4, 12, 6)$ e $(4, 6, 12)$ são equivalentes, logo os únicos ladrilhamentos possíveis são os de padrão $(4, 12, 6)$ e $(4, 8, 8)$. Tais ladrilhamentos estão representados abaixo.

Figura 35 – Ladrilhamento de Padrão $(4, 12, 6)$



Fonte: Próprio autor

Figura 36 – Ladrilhamento de Padrão (4, 12, 6)



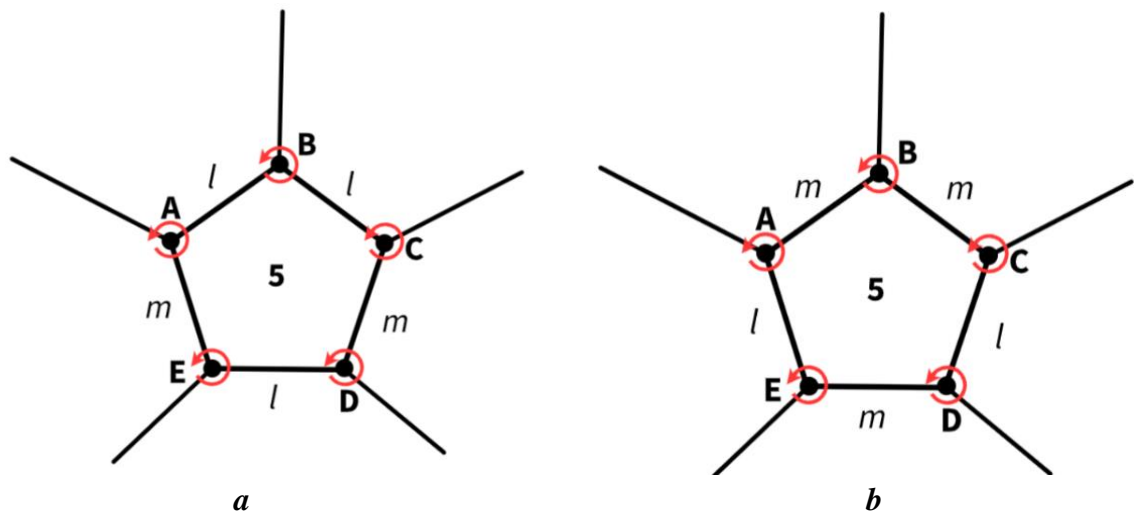
Fonte: Próprio autor

5.1.1.3 Combinações do tipo $(5, l, m)$

Para começarmos nosso estudo sobre a análise do padrão (t, l, m) para $t = 5$, vamos utilizar o mesmo princípio visto no padrão $(3, l, m)$ em que $t = 3$ ímpar no qual obtivemos $l = m$. Para o padrão que iremos analisar, utilizaremos pentágonos regulares na construção do ladrilhamento. Devemos ressaltar que para nosso estudo os padrões $(5, l, m)$, $(l, 5, m)$ e $(l, m, 5)$ são todos equivalentes.

Vamos agora geometricamente descobrir qual ladrilhamento bem comportado podem utilizar três polígonos ao redor de cada vértice, em que um deles é um pentágono regular. Observemos os vértices A, B, C, D e E do pentágono regular abaixo, onde ao redor de cada vértice teremos o pentágono regular, um l – ágono (polígono de l lados) regular e um m – ágono (polígono de m lados) regular.

Figura 37 – Ladrilhamentos de Padrão $(5, l, m)$



Fonte: Próprio autor

Realizando os percursos destacados nas imagens acima, temos nos vértices A (5, 1, m), E (5, m, 1), D (5, 1, m), C (5, m, 1) e B (5, 1, 1) na *figura a* e B (5, m, m) na *figura b*. E sabemos que para atender a terceira lei do bom comportamento entre ladrilhos, em ambas as imagens no vértice B, temos que ter $l = m$. Tal princípio foi visto também, quando estávamos ladrilhando com triângulos equiláteros que também tem um número ímpar de lados.

Para os ladrilhamentos (5, 1, m) concluímos então que $l = m$, ou seja, teremos (5, 1, 1) equivalente a (5, m, m) com isso para tal padrão não haverá nenhuma combinação com $l \neq m$.

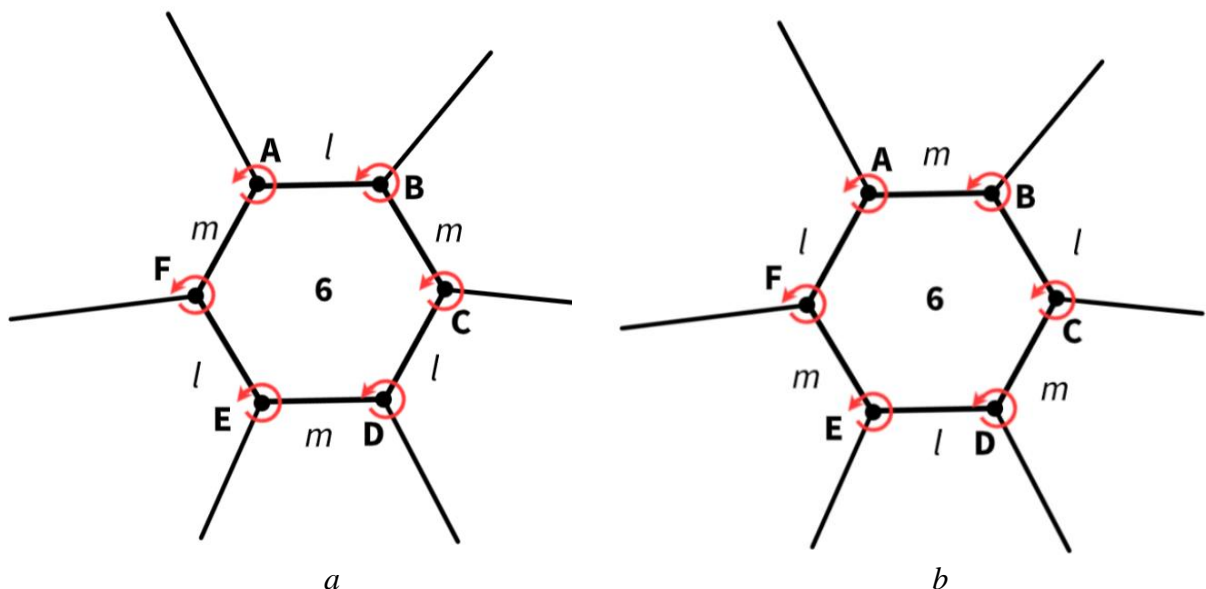
Conclusão: Não há nenhum ladrilhamento bem-comportado com padrão da forma (5, 1, m), ou seja, não há nenhum ladrilhamento bem-comportado, com três polígonos em torno de cada vértice, que faça uso de algum pentágono regular.

5.1.1.4 Combinações do tipo (6, l, m)

Para a análise dos padrões do tipo (6, l, m), vamos utilizar o mesmo princípio que foi utilizado para o padrão (4, 1, m). E mais uma vez destacamos aqui que (6, 1, m), (l, 6, m) e (l, m, 6) são padrões equivalentes entre si.

Geometricamente tal ladrilhamento formado por um hexágono regular, um l – ágono (polígono de l lados) regular e um m – ágono (polígono de m lados) regular pode ser representado conforme a figura abaixo.

Figura 38 – Ladrilhamento de Padrão (6, l, m)



Fonte: Próprio autor

Nas figuras a e b , temos cada vértice A, B, C, D, E e F rodeados por um hexágono regular, um l -ágono regular e um m -ágono regular $l \neq m$ e assim como no padrão para $t = 4$, consideraremos l e m pares. Se seguirmos o sentido das setas indicadas nas figuras, veremos que tanto na figura a como na figura b , os vértices A, B, C e D formam padrões equivalentes a $(6, m, l)$ conforme a rotação. Considerando as condições de um ladrilhamento bem comportado e que a soma dos ângulos que rodeia cada vértice é 360° , temos então que:

$$\alpha_6 + \alpha_l + \alpha_m = 360^\circ$$

como sabemos que $\alpha_6 = 120^\circ$ por se tratar de ângulo interno de um hexágono regular, logo

$$\alpha_l + \alpha_m = 240^\circ$$

usando a fórmula para o cálculo do ângulo interno de um polígono regular, encontraremos α_l e α_m , substituindo na equação anterior da seguinte maneira

$$\frac{(l-2) \cdot 180^\circ}{l} + \frac{(m-2) \cdot 180^\circ}{m} = 240^\circ$$

$$\left[\frac{(l-2)}{l} + \frac{(m-2)}{m} \right] = \frac{240^\circ}{180^\circ} = \frac{4}{3}$$

$$\left(1 - \frac{2}{l} \right) + \left(1 - \frac{2}{m} \right) = \frac{4}{3}$$

o que nos leva a

$$\frac{2}{l} + \frac{2}{m} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

ou seja

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$$

Como l e m são pares, consideraremos $l = 2r$ e $m = 2s$ com r e $s \in \mathbb{Z}$.

Substituindo tais valores na equação anterior, teremos então:

$$\frac{1}{2r} + \frac{1}{2s} = \frac{1}{3}$$

isolando a variável r temos

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2s} = \frac{2s-3}{6s}$$

logo temos
$$r = \frac{3s}{2s-3}$$

Sabemos que $r > 0$ pois l é positivo, com isso no denominador da equação anterior teremos $s \geq 2$. Devemos perceber também, que analisando $l = 2r$ temos que ter $r \geq 2$, pois se adotarmos $r = 1$, teríamos $l = 2$ que não formaria polígono. Com isso teríamos:

$$r = \frac{3s}{2s-3} \geq 2$$

da desigualdade temos
$$4s - 6 \leq 3s$$

o que resulta em
$$s \leq 6$$

Concluimos então que $2 \leq s \leq 6$ e como $r = \frac{3s}{2s-3}$, podemos concluir que através da tabela, a seguir, os possíveis valores de l e m , conseqüentemente as possíveis existência para padrões $(6, l, m)$.

Tabela 10 – Padrões de ladrilhamento $(4, l, m)$

s	r	$l = 2r$	$m = 2s$	Padrão $(4, l, m)$
2	6	12	4	(6,12,4)
3	3	6	6	(6,6,6)
4	12/5	24/5	8	Não é possível
5	15/7	30/7	10	Não é possível
6	2	4	6	(6,4,12)

Fonte: Próprio autor

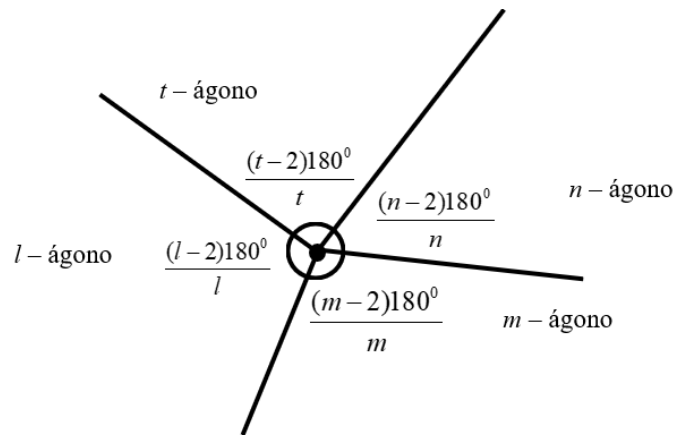
Os resultados apresentados na tabela nos permitem concluir, que para o padrão $(6, l, m)$ existem dois resultados possíveis, são $(6, 12, 4)$ e $(6, 6, 6)$, porém conforme estudado o $(6, 12, 4)$ é o único semirregular, pois utiliza três tipos diferentes de polígonos regulares ao redor de cada vértice e esse já foi descoberto no padrão $(4, l, m)$ anteriormente. Já o padrão $(6, 6, 6)$ possui três polígonos regulares iguais, e tal padrão já foi estudado anteriormente por se tratar de ladrilhamentos regulares.

Com todas as análises feitas a respeito dos padrões (t, l, m) , descobrimos que os únicos ladrilhos bem comportados, que podemos formar com três polígonos ao redor de cada vértice, são os ladrilhamentos semirregulares de padrões $(3, 12, 12)$, $(4, 8, 8)$ e $(4, 6, 12)$ e o ladrilhamento regular $(6, 6, 6)$.

5.1.2 Padrão (t, l, m, n)

Para esse tipo de ladrilhamento teremos $k = 4$, ou seja, usaremos quatro tipos de polígonos regulares arranjados ao redor de cada vértice, de tal forma que não haja lacunas nem superposição entre eles, sendo que o primeiro terá t lados, o segundo l lados, o terceiro m lados e o quarto n lados, conforme representado na figura abaixo.

Figura 39 – Ladrilhamento de Padrão (6, 1, m)



Fonte: Próprio autor

A classificação para as possíveis combinações de quatro polígonos regulares ao redor de um ponto fixo, no plano, corresponde às soluções inteiras e positivas da equação representada abaixo.

$$\frac{(t-2)180^\circ}{t} + \frac{(l-2)180^\circ}{l} + \frac{(m-2)180^\circ}{m} + \frac{(n-2)180^\circ}{n} = 360^\circ, \text{ que é equivalente a}$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

para acharmos as soluções inteiras e positivas dessa equação, supomos sem perda de generalidade, que $t \leq l \leq m \leq n$. Logo teremos $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{t}$ e $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{t}$, portanto

$$1 = \frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{4}{t}$$

ou seja, $1 \leq \frac{4}{t}$

logo $t \leq 4$

porém conforme visto, o menor valor de t se verifica para triângulos equiláteros, ou supondo que $t \geq 3$, temos então

$$3 \leq t \leq 4$$

- Para $t = 3$, temos

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

como $l \leq m \leq n$ e substituindo os valores de m e n por l teremos:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} \leq \frac{3}{l}$$

que nos dá

$$l \leq 4$$

por outro lado, como $l \geq t$ teremos então $l = 3$ ou $l = 4$.

Substituindo os valores de $t = 3$ e $l = 3$, e retomando $\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ temos que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} = \frac{m-3}{3m}$$

para que o numerador permaneça sempre positivo teremos $m \geq 4$. Sabemos também que $m \leq n$ então trocando n por m teremos:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$$

logo teremos

$$\frac{2}{m} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$m \leq 6$$

concluimos então que

$$4 \leq m \leq 6$$

Substituindo $l = 3$ e os possíveis valores de m e lembrando que n é um número inteiro, obteremos as seguintes quadras como soluções apresentadas, na tabela a seguir:

Tabela 11 – Padrões de ladrilhamento (3, 1, m, n)

t	l	m	n
3	3	4	12
3	3	6	6

Fonte: Próprio autor

Vamos agora analisar para os possíveis valores de m e n para $l = 4$. Para isso substituiremos os valores conhecidos de t e l na equação $\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$, com isso teremos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} = \frac{5m - 12}{12m}$$

para que o numerador permaneça sempre positivo, teremos $m \geq 3$, mas devemos lembrar que $m \geq l$ o que prevalece que tenhamos $m \geq 4$. Conforme visto anteriormente sabemos que $m \leq n$ então trocando n por m teremos:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$$

teremos então

$$\frac{2}{m} \geq \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$m \leq 4$$

concluimos então que para $l = 4$ teremos $m = 4$.

Substituindo então $l = 4$ e $m = 4$ e lembrando, conforme anteriormente, que n é um número inteiro, obteremos a seguinte quadra como solução apresentada na tabela a seguir:

Tabela 12 – Padrões de ladrilhamento (3, l, m, n)

t	l	m	n
3	4	4	6

Fonte: Próprio autor

- Para $t = 4$, temos

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

como $l \leq m \leq n$ e substituindo os valores de m e n por l , teremos:

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} \leq \frac{3}{l}$$

que nos dá

$$l \leq 4$$

por outro lado, como $l \geq t$, teremos então $l = 4$.

Substituindo os valores de $t = 4$ e $l = 4$, e retomando $\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ temos que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} = \frac{m-2}{2m}$$

para que o numerador permaneça sempre positivo, teremos $m \geq 4$. Sabemos também que $m \leq n$ então trocando n por m teremos:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$$

logo teremos

$$\frac{2}{m} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$m \leq 4$$

teremos então

$$3 \leq m \leq 4$$

porém como sabemos que $m \geq l$ concluímos que $m = 4$. Com isso sendo $t = l = m = 4$ teremos $n = 4$. Logo obteremos a seguinte quadra como solução apresentada.

Tabela 13– Padrões de ladrilhamento (4, l, m, n)

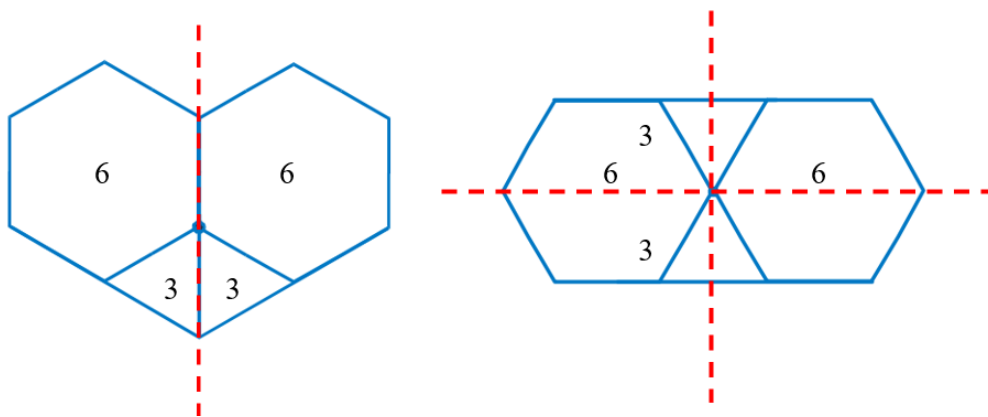
t	l	m	n
4	4	4	4

Fonte: Próprio autor

Tal solução já foi apresentada anteriormente para ladrilhamentos regulares.

Estudamos em páginas anteriores, que os ladrilhamentos de padrão (t, l, m) e (t, m, l) são equivalentes, será que tal equivalência acontece para as combinações encontradas aqui? Ou seja, as combinações $(3, 3, 6, 6)$ e $(3, 6, 3, 6)$ por exemplo são iguais? Segundo Alves, 1999 para obter tal resposta vamos analisar geometricamente essas combinações na imagem a seguir.

Figura 40 – Ladrilhamento de Padrão (6, l, m)



Fonte: Adaptação de Alves, 1999

Observa-se que a imagem da esquerda possui um eixo de simetria enquanto a da direita apresenta dois eixos de simetria, vamos considerá-los como distintos, ou seja, a solução (3, 3, 6, 6) admite uma segunda interpretação, que é (3, 6, 3, 6). Da mesma forma podemos ter as soluções (3, 3, 4, 12) e (3, 4, 6, 4) que admitem uma segunda interpretação de solução que são respectivamente (3, 4, 3, 12) e (3, 4, 6, 4). Diante disso, temos no total sete maneiras de combinar quatro polígonos, ao redor de um único vértice. Apresentaremos tais combinações na tabela a seguir:

Tabela 14 – Padrões de ladrilhamento (3, l, m, n)

t	l	m	n
3	3	4	12
3	3	6	6
3	6	3	6
3	4	3	12
3	4	6	4
3	4	4	6
4	4	4	4

Fonte: Próprio autor

Diante de tais combinações, quais delas representam um ladrilhamento bem comportado? Ou seja, representam um ladrilhamento semirregular? Conforme feito anteriormente, faremos uma análise geométrica para chegar a tal conclusão.

5.1.2.1 Analisando o padrão (t, l, m, n)

Para investigar os ladrilhamentos bem-comportados de padrão (t, l, m, n), vamos dividir segundo Dias e Sampaio, 2010, pag70, nosso estudo em dois casos:

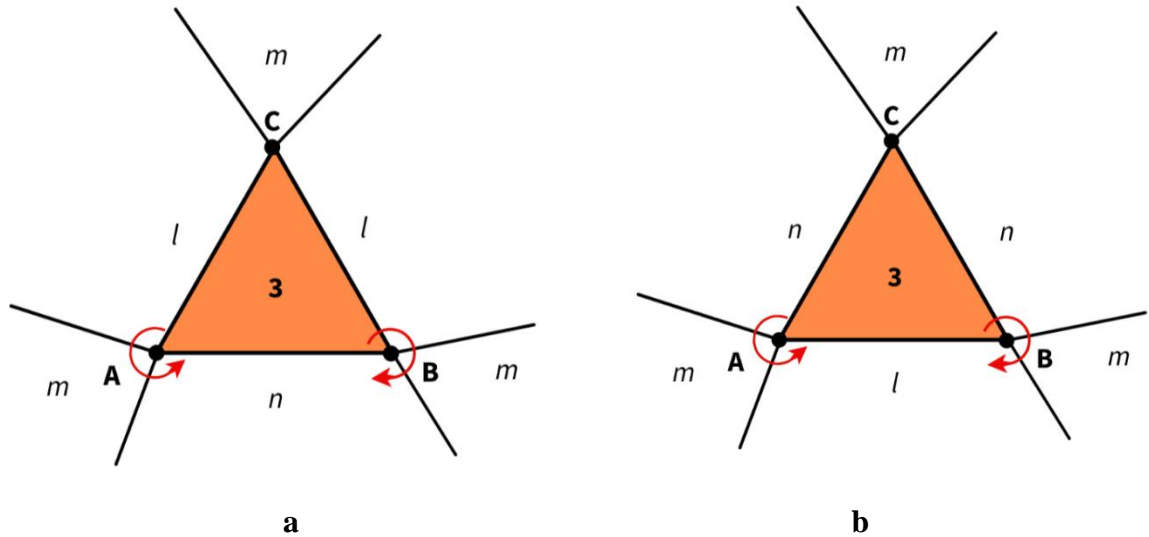
- 1- ladrilhamentos de padrão (3, l, m, n) ou seja, que possuem triângulos equiláteros.
- 2 - ladrilhamentos de padrão (t, l, m, n) que não fazem uso de triângulos equiláteros.

Os dois casos que iremos estudar, são excludentes entre si, ou seja, sua análise nos garante concluir todos os casos possíveis, que tal padrão pode apresentar.

Repetindo o procedimento geométrico já utilizado anteriormente, começaremos nossa análise pelo primeiro caso, examinando um ladrilhamento de padrão (3, l, m, n) que é um ladrilhamento triangular e a disposição cíclica de outros ladrilhos (polígonos), que compartilham de seus vértices. Lembrando novamente que um padrão de ladrilhamento (3, l,

m, n) é equivalente aos ladrilhamentos de padrões $(n, 3, l, m)$, $(m, n, 3, l)$ e $(l, m, n, 3)$, conforme detalhada na imagem abaixo.

Figura 41 – Ladrilhamentos de Padrão $(3, l, m, n)$



Fonte: Próprio autor

Nas imagens (a) e (b) temos o triângulo equilátero de vértices A, B e C, em que os vértices A e B são rodeados por um l – ágono (polígono de l lados) regular, um m – ágono (polígono de m lados) regular e um n – ágono (polígono de n lados) regular, em que se observa em ambos os vértices o padrão $(3, l, m, n)$. Observando a imagem (a) é possível ver claramente que o vértice C possui padrão $(3, l, m, l)$ e na imagem (b) o mesmo vértice possui padrão $(3, n, m, n)$. Sabemos, porém, que para tal ladrilhamento acontecer, deve obedecer à terceira condição de um bom comportamento, ou seja, o vértice C tem que ser do mesmo tipo dos demais vértices A e B, logo concluímos que necessariamente $l = n$.

Assim, acabamos de estabelecer segundo Dias e Sampaio, 2010 a seguinte condição de existência:

“Se um ladrilhamento tem um padrão $(3, l, m, n)$, então $l = n$, ou seja, o ladrilhamento tem um padrão da forma $(3, n, m, n)$. Assim, não existe nenhum ladrilhamento de padrão $(3, l, m, n)$ quando $l \neq n$ ”.

Diante de tal condição, podemos agora procurar definir, quais polígonos devem compor o ladrilhamento $(3, n, m, n)$, ou seja, quais seriam os possíveis valores para m e n , para

isso devemos lembrar, que como o ladrilhamento é bem comportado, a soma dos valores dos ângulos que rodeiam cada vértice deve ser 360^0 . Com isso temos:

$$i_3 + 2i_n + i_m = 360^0$$

ou seja

$$60^0 + 2i_n + i_m = 360^0$$

temos então que

$$2i_n + i_m = 300^0$$

Na equação encontrada, vamos atribuir os possíveis valores para n e encontrar os possíveis valores correspondentes de m .

Se $n = 3$, teremos então $i_3 = 60^0$, logo $i_m = 300^0 - 120^0 = 180^0$ o que é impossível, pois o polígono m - ágono é convexo, logo seus ângulos internos i_m são todos menores que 180^0 .

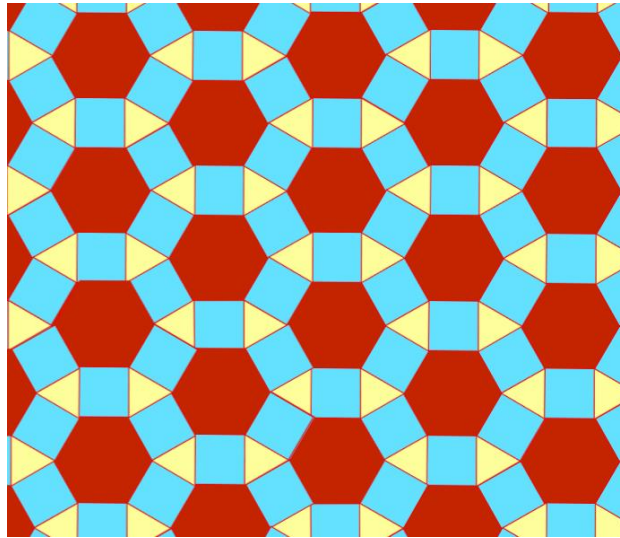
Se $n = 4$, teremos então $i_4 = 90^0$, logo $i_m = 300^0 - 180^0 = 120^0$, logo esse seria um ângulo interno de um hexágono regular. Teríamos então a seguinte configuração (3, 4, 6, 4) para o padrão procurado.

Se $n = 5$, teremos então $i_5 = 108^0$, logo $i_m = 300^0 - 216^0 = 84^0$ o que é impossível, pois conforme estudado anteriormente, não existe polígonos regulares com tal ângulo interno.

Se $n = 6$, teremos então $i_6 = 120^0$, logo $i_m = 300^0 - 240^0 = 60^0$, logo esse seria um ângulo interno de um triângulo equilátero. Teríamos então a seguinte configuração (3, 6, 3, 6) para o padrão procurado.

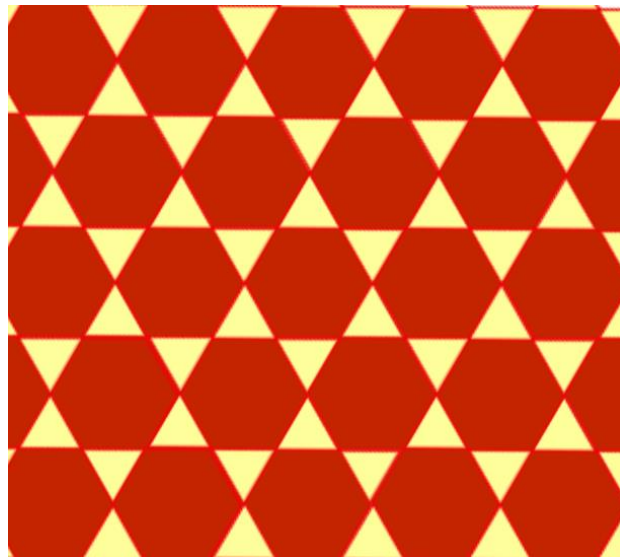
Se $n = 7$, teremos então $i_7 = 128,57^0$, logo $i_m = 300^0 - 257,14^0 = 42,86^0$ o que é impossível, pois o menor ângulo interno de um polígono regular é 60^0 , que é ângulo interno de um triângulo equilátero. Com isso, se continuarmos com $n > 7$ teremos $i_n > 128,57^0$ e consequentemente $i_m < 42,86^0$, ou seja, continuaríamos obtendo valores impossíveis. Assim, concluímos que os ladrilhamentos bem-comportados, que possuem padrão da forma (3, 1, m, n) são (3,4,6,4) e (3,6,3,6).

Figura 42 - Ladrilhamento de Padrão (3, 4, 6, 4)



Fonte: Próprio autor

Figura 43 - Ladrilhamento de Padrão (3, 6, 3, 6)



Fonte: Próprio autor

Faremos agora a análise do segundo caso de nosso estudo sobre o padrão $(t, 1, m, n)$, os padrões que não fazem uso de triângulos equiláteros. Vamos começar utilizando o quadrado para compor o ladrilhamento. Sabemos que teremos nesse caso $i_4 = 90^\circ$. Como o ladrilhamento é bem comportado, sabemos que a soma dos ângulos que rodeiam cada vértice valerá 360° . Caso os polígonos sejam todos quadrados teremos:

$$i_4 + i_4 + i_4 + i_4 = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

comprovando que o padrão (4, 4, 4, 4) é possível. Vale ressaltar, que esse padrão já foi estudado nos ladrilhamentos regulares anteriormente. Mas será esse o único padrão composto sem o uso de triângulos equiláteros? Para obter tal resposta vamos analisar o padrão (4, n, m, n). Se para o m - ágono regular tivermos $m = 5$, teremos $i_5 = 108^\circ$, logo para tal ladrilhamento ser bem comportado teríamos

$$i_4 + i_4 + i_5 + i_4 = 90^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 90^\circ = 378^\circ > 360^\circ$$

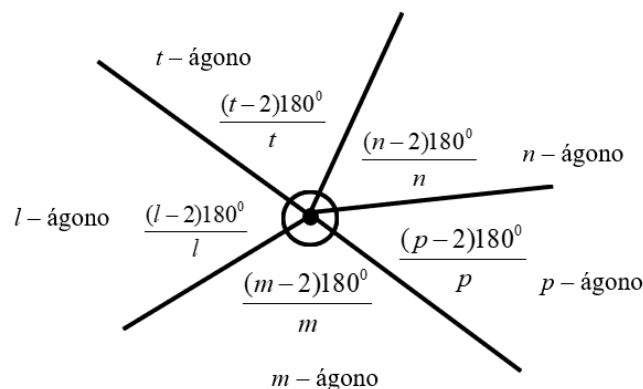
o que não é possível. Ou seja, se no padrão (4, n, m, n) tivermos n e m maiores que quatro tal padrão não obedecerá às condições para formar um ladrilhamento bem comportado, então para padrões que não utilizam triângulos, o único que se pode formar, será o padrão (4, 4, 4, 4).

Logo, concluímos que os únicos ladrilhamentos bem-comportados de padrões (t, l, m, n), isto é, com quatro polígonos regulares em torno de cada vértice, são os ladrilhamentos semirregulares de padrões (3,4,6,4) e (3,6,3,6) e o ladrilhamento regular (4, 4, 4, 4).

5.1.3 Padrão (t, l, m, n, p)

Para esse tipo de ladrilhamento teremos $k = 5$, ou seja, usaremos cinco tipos de polígonos regulares, arranjados ao redor de cada vértice, de tal forma que não haja lacunas nem superposição entre eles, sendo que o primeiro terá t lados, o segundo l lados, o terceiro m lados, o quarto n lados e o quinto p lados, conforme está sendo representado na figura abaixo.

Figura 44 - Ladrilhamento de Padrão (t, l, m, n, p)



Fonte: Próprio autor

A classificação para as possíveis combinações de cinco polígonos regulares ao redor de um ponto fixo no plano segue o mesmo procedimento adotado anteriormente.

$$\frac{(t-2)180^0}{t} + \frac{(l-2)180^0}{t} + \frac{(m-2)180^0}{m} + \frac{(n-2)180^0}{n} + \frac{(p-2)180^0}{p} = 360^0,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$$

para acharmos as soluções inteiras e positivas dessa equação, iremos novamente supor sem perda de generalidade, que $t \leq l \leq m \leq n \leq p$. Logo teremos $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{t}$; $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{t}$; $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{t}$ e $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{t}$,

portanto

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{5}{t}$$

ou seja

$$\frac{3}{2} \leq \frac{4}{t}$$

logo

$$t \leq 3$$

porém conforme visto, o menor valor de t se verifica para triângulos equiláteros, ou supondo que $t \geq 3$, temos então que o único valor possível será $t = 3$.

Vamos agora substituir o valor de $t = 3$ em $\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$ no qual obteremos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$$

e como conclusão temos

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{7}{6}$$

substituindo m, n e p por l , teremos mais uma vez sem perda de generalidade

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l} = \frac{4}{l}$$

teremos então

$$\frac{7}{6} \leq \frac{4}{l}$$

logo

$$l \leq 3$$

dessa forma novamente teremos um único valor para l , ou seja, $l = 3$. Substituindo l na equação

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{7}{6} \text{ teremos:}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{7}{6}$$

onde obteremos

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{5}{6}$$

A próxima etapa será substituir os valores de n e p por m , analogamente o que foi feito sem perda de generalidade da seguinte maneira:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m}$$

o que resulta
$$\frac{5}{6} \leq \frac{3}{m}$$

obtendo então
$$m \leq 3$$

e mais uma vez só poderemos ter como único valor $m = 3$.

Por fim, substituindo na equação $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{5}{6}$ o valor de $m = 3$ teremos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{5}{6}$$

obteremos
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

trocando p por n teremos
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

obteremos
$$n \leq 4$$

com isso teremos n pertencendo ao intervalo $[3, 4]$, ou seja, teremos como valores $n = 3$ ou $n = 4$.

- Para $n = 3$ temos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

o que resulta em

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

logo

$$p = 6$$

- Para $n = 4$ teremos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

em que teremos

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

com isso temos

$$p = 4$$

Com os resultados encontrados para t , l , m , n e p teremos como únicas soluções inteiras para a equação $\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$ descritas na tabela abaixo.

Tabela 15 – Padrões de ladrilhamento (3, l, m, n, p)

t	l	m	n	p
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4
3	3	4	3	4

Fonte: Próprio autor

Como (3, 3, 3, 4, 4) admite uma segunda interpretação (3, 3, 4, 3, 4), temos então, no total, três maneiras de combinar cinco polígonos regulares ao redor de um vértice comum.

5.1.3.1 Analisando o padrão (t, l, m, n, p)

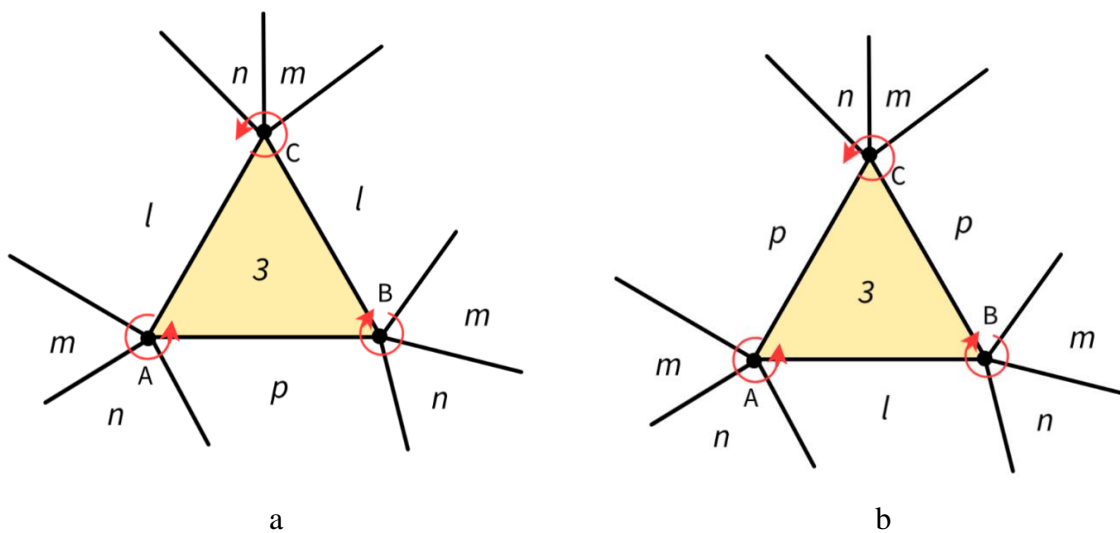
Mais uma vez, vamos fazer uma análise diferente, agora para o padrão (t, l, m, n, p) e descobrir quais das soluções, encontradas anteriormente, podem compor um padrão para o

ladrilhamento do plano. Vamos utilizar os mesmos procedimentos que tomamos anteriormente. Dividindo nosso estudo em dois casos para análise, teremos:

- 1 - Ladrilhamentos de padrão (t, l, m, n, p) que possuem triângulos equiláteros.
- 2 - Ladrilhamentos de padrão (t, l, m, n, p) que não fazem uso de triângulos equiláteros.

Conforme feito anteriormente, para começar a nossa análise pelo primeiro caso, assumiremos que $t = 3$.

Figura 45 - Ladrilhamentos de Padrão $(3, l, m, n, p)$



Fonte: Próprio autor

Devemos observar nas imagens acima, que a partir de dois vértices A e B, de um triângulo equilátero do ladrilhamento, fazemos “leituras circulares” dos tipos de polígonos regulares que os contornam, considerando que ambos os vértices têm o tipo $(3, l, m, n, p)$. Segundo Dias e Sampaio, 2010, pag74, nota-se que, se A e B têm ambos esses tipos, então o vértice C deverá ter o tipo $(3, l, m, n, p)$, como mostra a figura (a), ou o tipo $(3, p, m, n, p)$, conforme a figura (b). Para que a terceira condição de bom comportamento seja atendida, os vértices A, B e C precisam ter todos o mesmo tipo. Concluímos que, necessariamente, deveremos ter $l = p$. Assim, se um ladrilhamento tem um padrão $(3, l, m, n, p)$, então necessariamente $l = p$, ou seja, o ladrilhamento deverá ter um padrão $(3, l, m, n, l)$. Em outras palavras, não pode haver nenhum ladrilhamento de padrão $(3, l, m, n, p)$ com $l \neq p$.

Devemos observar que em um ladrilhamento $(3, 1, m, n, p)$ entre os demais polígonos não houve um outro triângulo, ou seja, cada um deles terá no mínimo quatro lados, com isso se somarmos todos os ângulos internos adjacentes a cada vértice, teremos no mínimo

$$i_3 + i_4 + i_4 + i_4 + i_4 = 60^0 + 90^0 + 90^0 + 90^0 + 90^0 = 420^0$$

para termos um ladrilhamento bem comportado, a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice deve ter 360^0 o que não aconteceu, ou seja, tal ladrilhamento $(3, 1, m, n, p)$ com apenas um triângulo ao redor de cada vértice é impossível. E se ao invés de um forem dois triângulos será que tal ladrilhamento é possível? Ou seja, poderemos ter o padrão $(3, 3, m, n, p)$? Usando o mesmo princípio teremos no mínimo a soma dos ângulos adjacentes ao redor de cada vértice igual a

$$i_3 + i_3 + i_4 + i_4 + i_4 = 60^0 + 60^0 + 90^0 + 90^0 + 90^0 = 390^0$$

o que mais uma vez é impossível para um ladrilhamento bem comportado.

Percebemos até aqui, que o padrão $(3, 1, m, n, p)$ não é possível, se usarmos em sua composição somente dois triângulos e devemos ressaltar que conforme visto, que tal padrão também não é possível se tivermos $l \neq p$, ou seja, tal padrão só será possível se em sua composição houver no mínimo três triângulos.

Segundo Dias e Sampaio, 2010, não só não existe ladrilhamento de padrão $(t, 1, m, n, p)$ que não faça uso de triângulos equiláteros, como não existem ladrilhamentos desse padrão com apenas um ou dois triângulos equiláteros, em torno de cada vértice. Eles têm que ser pelo menos três! Ou seja, em um ladrilhamento de padrão $(3, 1, m, n, 1)$ devemos assumir $t = 3$ e que concluímos que $l = p$ teremos pelo menos três triângulos equiláteros, em torno de cada vértice, para que o nosso ladrilhamento seja bem-comportado.

Podemos concluir que no padrão $(3, 1, m, n, 1)$ será possível obter um dos dois padrões a seguir $(3, 3, m, n, 3)$ ou $(3, 1, 3, 3, 1)$. fazendo uma análise para cada padrão teremos:

- Padrão $(3, 3, m, n, 3)$

Nesse padrão a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice será $3 \cdot i_3 + i_m + i_n = 360^0$ com isso teremos

$$3 \cdot 60 + i_m + i_n = 360^0$$

$$180^0 + i_m + i_n = 360^0$$

$$i_m + i_n = 180^0$$

conforme visto na tabela da página (inserir página da tabela) os únicos valores possíveis para i_m e i_n e conseqüentemente para m e n são

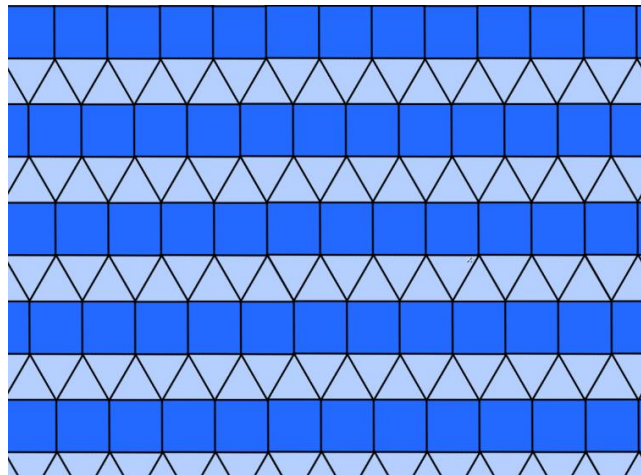
Tabela 16 – Ângulos internos

i_m	i_n	m	n
90^0	90^0	4	4
60^0	120^0	3	6
120^0	60^0	6	3

Fonte: Próprio autor

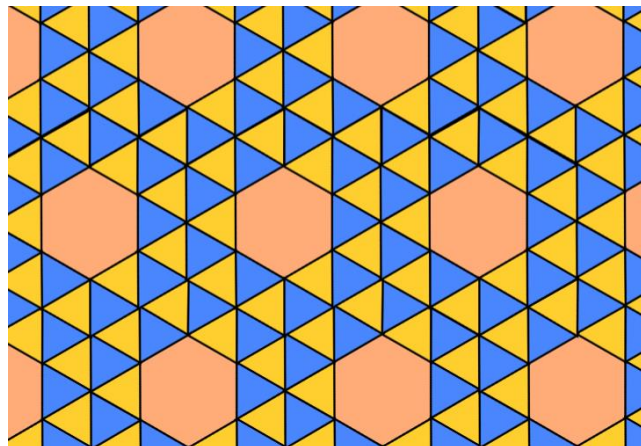
com isso concluímos que os padrões $(3, 3, m, n, 3)$ possíveis são $(3, 3, 4, 4, 3)$; $(3, 3, 3, 6, 3)$ e $(3, 3, 6, 3, 3)$ em que esses últimos são equivalentes.

Figura 46 - Padrão (3, 3, 4, 4, 3)



Fonte: Próprio autor

Figura 47 - Padrão (3, 3, 3, 6, 3)



Fonte: Próprio autor

- Padrão (3, 1, 3, 3, 1)

Nesse padrão, a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice será $3 \cdot i_3 + 3 \cdot i_1 = 360^\circ$ com isso teremos

$$3 \cdot 60 + 2i_1 = 360^\circ$$

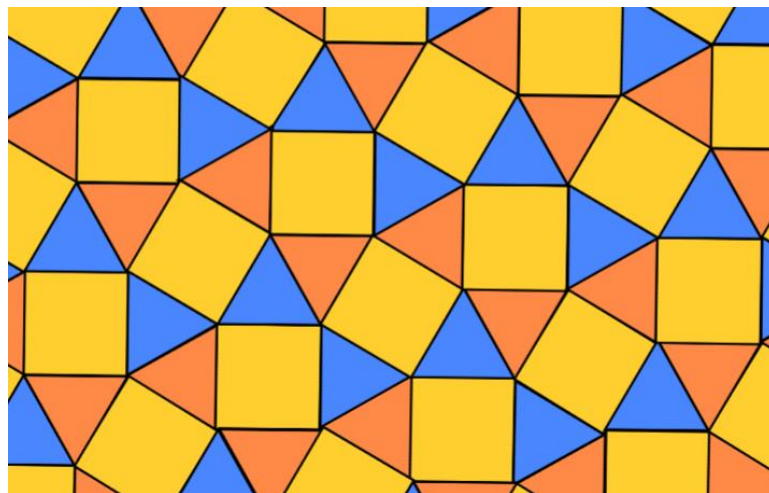
$$180^\circ + 2i_1 = 360^\circ$$

$$2i_1 = 180^\circ$$

$$i_1 = 90^\circ$$

isso nos mostra que o padrão (3, 1, 3, 3, 1) teremos (3, 4, 3, 3, 4) como único padrão possível.

Figura 48 - Padrão (3, 4, 3, 3, 4)

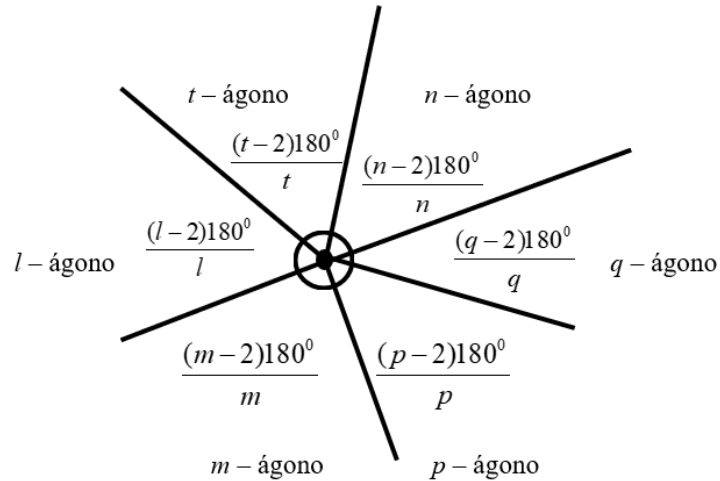


Fonte: Próprio autor

Concluimos então que os únicos ladrilhamentos bem-comportados com cinco polígonos, em torno de cada vértice, são os de padrões (3,3,3,4,4), (3,3,3,3,6) e (3,4,3,3,4).

5.1.4 Padrão (t, l, m, n, p, q)

Figura 49 - Padrão (t, l, m, n, p, q)



Fonte: Próprio autor

A classificação para as possíveis combinações de seis polígonos regulares ao redor de um ponto fixo no plano, segue o mesmo procedimento adotado para os outros padrões estudados.

$$\frac{(t-2)180^\circ}{t} + \frac{(l-2)180^\circ}{l} + \frac{(m-2)180^\circ}{m} + \frac{(n-2)180^\circ}{n} + \frac{(p-2)180^\circ}{p} + \frac{(q-2)180^\circ}{q} = 360^\circ,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$$

Logo, a única solução inteira e positiva possível para essa equação é (3, 3, 3, 3, 3, 3).

O padrão (t, l, m, n, p, q) não requer uma análise, pois descobrimos ao estudarmos os ladrilhamentos regulares, no início, que o único ladrilhamento que comporta seis polígonos regulares, em torno de cada vértice, é o ladrilhamento de padrão (3,3,3,3,3,3).

Com este último padrão de ladrilhamento, completamos o estudo dos ladrilhamentos regulares e semirregulares, que são possíveis para ladrilhar o plano.

Ao resumir o que foi estudado, analisamos e percebemos que:

- Nenhum ladrilhamento regular ou semirregular pode ter menos que três ou mais que seis polígonos regulares em torno de cada um de seus vértices.
- São três os padrões de ladrilhamento regular e apenas oito os padrões de ladrilhamento semirregular.
- Os ladrilhamentos regulares são os de padrões $(3,3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4)$ e $(6,6,6)$.
- Os semirregulares, com três polígonos em torno de cada vértice, são os de padrões $(3,12,12)$, $(4,8,8)$ e $(4,6,12)$.
- Os semirregulares, com quatro polígonos em torno de cada vértice são os de padrões $(3,4,6,4)$ e $(3,6,3,6)$.
- Finalmente, os com cinco polígonos regulares em torno de cada vértice são os de padrões $(3,3,3,4,4)$, $(3,3,3,3,6)$ e $(3,4,3,3,4)$.

6 ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA

O estudo da Geometria desempenha um papel fundamental no currículo das escolas de ensino médio, pois proporciona aos estudantes uma compreensão sólida dos fundamentos matemáticos e habilidades de raciocínio espacial. A Geometria estimula o pensamento crítico, promove a capacidade de visualizar e manipular objetos no espaço e desenvolve a intuição matemática dos alunos. Nesse contexto, a utilização de materiais concretos surge como uma aliada relevante e interessante para explorar os conceitos geométricos de forma atrativa e envolvente.

6.1 Proposta de oficina

A seguir será apresentada uma proposta de oficina, a ser aplicada com os alunos do 1º ano do Ensino Médio. O conteúdo dessa oficina tomou como referência os capítulos 2, 3, 4 e 5 dessa dissertação. A oficina será dividida em quatro encontros de duas aulas cada.

6.2 Oficina de Matemática: Explorando Polígonos Regulares e Ladrilhamentos

Encontro 1: Confeccção de Polígonos Regulares e a introdução para os Ladrilhamentos

Duração: Aproximadamente 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Confeccionar e discutir coletivamente sobre polígonos regulares e suas possibilidades na formação de ladrilhamentos;
- Compreender o conceito de polígonos regulares;
- Identificar os ângulos internos e externos dos polígonos regulares.

Habilidade da BNCC

- EF5MA17: Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

Atividades:

1. Introdução (20 minutos)
 - Apresentar o conceito de polígonos regulares, destacando a congruência de lados e ângulos;
 - Mostrar exemplos de polígonos regulares, como o quadrado, o pentágono regular, o hexágono regular, etc;
 - Dividir a turma em oito equipes.

2. Confeção dos polígonos regulares (30 minutos)
 - Entregar a cada equipe um molde (ANEXO 1) para a construção dos polígonos que serão os ladrilhos do nosso ladrilhamento. O material para confecção pode ser papel cartão ou EVA;
 - Os moldes deverão ser riscados e, em seguida, recortados do papel cartão. Usaremos papel cartão de cores variadas, porém, os polígonos congruentes deverão ser de mesma cor;
 - Cada equipe ficará responsável pela confecção de um tipo de polígono regular.

3. Utilizar os polígonos na tentativa da formação de ladrilhamentos (30 minutos)
 - Pedir para cada equipe tentar com os ladrilhos confeccionados formar ladrilhamentos;
 - Cada ação desenvolvida deve ser registrada pela equipe, pois no final devem ser socializadas;
 - Em seguida cada equipe deverá trocar todos os seus polígonos com outras equipes e na sequência tentariam montar ladrilhamentos com outros polígonos regulares;
 - Na próxima etapa o desafio será tentar ladrilhar com polígonos diferentes, ou seja, usar mais de um tipo de polígono no ladrilhamento. Nessa etapa, as equipes deverão compartilhar seus ladrilhos.

4. Discussão e conclusão (20 minutos)
 - Promover uma discussão em grupo, em que cada equipe irá apresentar quais ladrilhamentos foram possíveis e quais polígonos foram utilizados e quais não foram possíveis;

- Fazer apresentação breve sobre os conceitos usados no ladrilhamentos, como prévia do próximo encontro.

Encontro 2: Polígonos Regulares e seus ângulos internos e externos

Duração: Aproximadamente 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Compreender o conceito de polígonos regulares;
- Identificar os ângulos internos e externos dos polígonos regulares;
- Explorar as propriedades e relações entre os ângulos internos e externos dos polígonos regulares.

Habilidade da BNCC

- (EF07MA22) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos, à confecção de ferramentas e peças mecânicas, entre outras.

Atividades:

1. Introdução (20 minutos)

- Apresentar o conceito de polígonos regulares, destacando a congruência de lados e ângulos;
- Identificar os ângulos internos e externos de um polígono regular relacionando-os com os lados.

2. Ângulos Internos dos Polígonos Regulares (30 minutos)

- Explicar a fórmula para calcular a medida dos ângulos internos de um polígono regular: $\frac{(n-2) \cdot 180^0}{n}$, no qual n é o número de lados do polígono;
- Realizar exercícios práticos com diferentes polígonos regulares, permitindo que os participantes calculem os ângulos internos.

3. Ângulos Externos dos Polígonos Regulares (30 minutos)

- Explicar a relação entre os ângulos internos e externos de um polígono regular: $\frac{360^0}{n}$, e que n é o número de lados do polígono;
- Realizar exercícios práticos para calcular os ângulos externos dos polígonos regulares.

4. Discussão e conclusão (20 minutos)

- Promover uma discussão em grupo sobre as propriedades e relações dos ângulos internos e externos dos polígonos regulares;
- Fazer uma revisão geral dos conceitos aprendidos e esclarecer quaisquer dúvidas.

Encontro 3: Ladrilhamentos Regulares

Duração: Aproximadamente 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Introduzir o conceito de ladrilhamentos bem comportado e ladrilhamentos regulares;
- Identificar padrões e propriedades dos ladrilhamentos regulares;
- Explorar diferentes tipos de ladrilhamentos regulares.

Atividades:

1. Introdução aos Ladrilhamentos Regulares (15 minutos)
 - Apresentar o conceito de ladrilhamento regular, explicando que é a técnica de preencher um plano com formas poligonais regulares, sem sobreposição ou lacunas, apresentando as características de um ladrilhamento bem comportado;
 - Mostrar exemplos de ladrilhamentos regulares, como por exemplo, os ladrilhamentos hexagonais e quadrados.
2. Padrões e Propriedades dos Ladrilhamentos Regulares (35 minutos)
 - Discutir as propriedades dos ladrilhamentos regulares, como a repetição de padrões e a utilização de polígonos regulares;
 - Explicar as regras para criar ladrilhamentos regulares, usando diferentes polígonos regulares.
3. Explorando Ladrilhamentos Regulares (30 minutos)

- Dividir os participantes em grupos e forneça os ladrilhamentos utilizados anteriormente. Os grupos serão compostos por alunos diferentes dos grupos formados no encontro 1;
- Pedir para que os grupos criem seus próprios ladrilhamentos regulares, usando polígonos regulares e explorem diferentes padrões.

4. Apresentação e Discussão (20 minutos)

- Pedir que cada grupo apresente seu ladrilhamento regular criado e explique as estratégias utilizadas;
- Promover uma discussão, em grupo, sobre os diferentes ladrilhamentos apresentados, destacando os padrões e propriedades encontrados.

Encontro 4: Ladrilhamentos Semirregulares

Duração: Aproximadamente 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Introduzir o conceito de ladrilhamentos semirregulares;
- Identificar padrões e propriedades dos ladrilhamentos semirregulares;
- Explorar técnicas de construção de ladrilhamentos semirregulares;
- Realizar atividades práticas de construção de ladrilhamentos.

Habilidade da BNCC

- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos, que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Atividades:

1. Introdução aos Ladrilhamentos Semirregulares (20 minutos)
 - Explicar o conceito de ladrilhamentos semirregulares, destacando que são compostos por mais de um tipo de polígono regular;
 - Mostrar exemplos de ladrilhamentos semirregulares.
2. Padrões e Propriedades dos Ladrilhamentos Semirregulares (30 minutos)

- Discutir as propriedades dos ladrilhamentos semirregulares, como a utilização de diferentes polígonos regulares e a repetição de padrões;
- Explicar como identificar e nomear os diferentes polígonos presentes nos ladrilhamentos semirregulares;
- Mostrar exemplos de construções de ladrilhamentos passo a passo.

3. Explorando Ladrilhamentos Semirregulares (30 minutos)

- Dividir os participantes em grupos e forneça folhas de papel, régua e lápis;
- Pedir que os grupos criem seus próprios ladrilhamentos semirregulares, usando diferentes polígonos regulares.

4. Apresentação e Discussão (20 minutos)

- Pedir que cada grupo apresente seu ladrilhamento semirregular criado e explique as estratégias utilizadas;
- Promover uma discussão em grupo sobre os diferentes ladrilhamentos apresentados, destacando os padrões e propriedades encontrados.

Essa oficina busca proporcionar aos participantes um estudo aprofundado dos polígonos regulares, seus ângulos internos e externos, além de explorar os ladrilhamentos regulares e semirregulares, culminando na construção prática desses padrões.

7 CONCLUSÃO

O ladrilhamento proporciona no aluno a capacidade de produzir a criatividade, analisar diversas possibilidades, desenvolver habilidades mentais e cognitivas, ter estratégias para as próximas jogadas, assim como socialização com o grupo em que vive. SOUZA (2009).

Ao estudar os ladrilhamentos do plano, os alunos do ensino médio serão desafiados a pensar criticamente, a visualizar e a compreender conceitos geométricos fundamentais. Além disso, a abordagem prática e envolvente dos ladrilhamentos pode despertar o interesse dos estudantes pela matemática e demonstrar a importância da geometria como ferramenta para a compreensão do mundo ao nosso redor.

REFERÊNCIAS

- ALVES, S; DALCIN, M. Mosaicos do plano, **Revista do Professor de Matemática**, V. 40, 1999.
- SALLUM, E. M. **Ladrilhamentos**. Matemática IME-USP, 2007.
- ALVES, S. **Ladrilhando o plano com quadriláteros**, R.P.M. n° 51, São Paulo: SBM, 2003.
- ALVES, S. **Mosaicos no plano**, R.P.M. n° 40, São Paulo: SBM, 1999
- BARBOSA, R. M. **Descobrimos padrões em mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.
- DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. **Desafio geométrico: módulo 1**. Cuiabá: Central de Texto, 2013.
- RUFINO, MARCELO; PINHEIRO, M.RO. **Elementos da Matemática: Vol2 – 3ª edição**, Belém, 2016.
- SOUZA, J. C. de M. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro/São Paulo, Editora Record, 2001.
- Brasil. Base Nacional Comum Curricular** – Disponível em:
<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 12 jul. 2023.