



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**FELIPE GUIMARÃES FERREIRA**

**TEORIA DOS JOGOS: OS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO LEGADO DE  
JOHN NASH**

**FORTALEZA – CEARÁ**

**2023**

FELIPE GUIMARÃES FERREIRA

TEORIA DOS JOGOS: OS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO LEGADO DE  
JOHN NASH.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade.

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Estadual do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

---

Ferreira, Felipe Guimaraes.

Teoria dos jogos: os fundamentos matemáticos do legado de John Nash [recurso eletrônico] / Felipe Guimaraes Ferreira. - 2023.

62 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade..

1. teoria dos jogos. 2. fundamentos matemáticos. 3. equilíbrio de nash.. I. Título.

---

FELIPE GUIMARÃES FERREIRA

TEORIA DOS JOGOS: OS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO LEGADO DE  
JOHN NASH

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 25 de setembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Nícolás Alcântara de Andrade

Prof. Dr. Nícolás Alcântara de Andrade (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE

José Danuso Rocha de Oliveira

Prof. Dr. José Danuso Rocha de Oliveira

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Rosa Tayane de Vasconcelos

Profa. Dra. Rosa Tayane de Vasconcelos

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Dedicado aos que tornaram essa jornada possível: familiares, amigos e professores.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, que me capacita, me dá ânimo e coragem para nunca desistir. Que Teu nome seja louvado, meu Senhor, hoje e sempre.

Aos meus pais, Raimundo Ferreira Herculano e Maria Barbosa Guimarães, por todo investimento que fizeram nos meus estudos, pelos valores que me transmitiram e me fizeram crer que a educação transforma a vida das pessoas e que a integridade humana é um valor inegociável. Se eu sou uma pessoa realizada profissionalmente, devo tudo isso a vocês.

Aos meus colegas de PROFMAT, Artur Teixeira, Danilo Magalhães, Júnior Sampaio, Mardney Castro, Rafael Abreu, Rafael Mendonça, Sérgio Monteiro e Tiago Nobre, pelo companheirismo e ajuda nos momentos de aflição durante essa difícil trajetória.

Aos meus amigos e familiares, que sempre acreditaram que eu seria capaz, mesmo quando nem eu mesmo acreditava. Alguns, mesmo distantes, foram essenciais, com suas orações e palavras de motivação.

Aos meus colegas de trabalho, que tornam o meu dia mais alegre e fazem da escola um lugar saudável para se trabalhar. Minha profissão é um dos principais motivos de ter encarado o desafio de ingressar no PROFMAT.

Ao grupo de pesquisa GEPEMAC, na pessoa do professor Odécio, que desde nosso primeiro dia como mestrandos nos deu toda a orientação sobre o funcionamento do curso.

Aos professores do curso PROFMAT-UECE, Léo Ivo, Nicolas Alcântara e Tiago Caula, por todos os conhecimentos transmitidos sempre com muita qualidade. Vocês deram contribuições imensuráveis para o nosso crescimento como matemáticos.

Ao meu orientador, professor doutor Nicolas Alcântara, pelas brilhantes contribuições, pelas correções e, acima de tudo, pela paciência comigo.

À banca examinadora, pelas valiosas colaborações e sugestões que me fazem crescer profissionalmente.

“Ter fé é acreditar naquilo que você não vê;  
a recompensa por essa fé é ver aquilo que  
você acredita”.

(Santo Agostinho)

## RESUMO

Ao longo dos séculos, surgiram vários matemáticos que deixaram legados para o avanço da Matemática, fazendo com que ela se subdividisse em vários ramos, como a Álgebra, a Geometria, o Cálculo, entre outros. A Teoria dos Jogos conquistou seu espaço como área de estudo da Matemática após importantes contribuições durante séculos. Dentre seus principais estudiosos, destacam-se John von Neumann e Oskar Morgenstern, os primeiros a formalizarem esse novo ramo matemático através da obra Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico; e John Nash, do qual saíram as maiores e mais significantes contribuições da Teoria dos Jogos, que hoje têm grande aplicabilidade em outras áreas do conhecimento. Seu trabalho refutou ideias de autores importantes da área da Economia. Diante da relevância de John Nash e dos desafios pessoais que enfrentou durante sua vida, faz-se necessário abordar, neste trabalho, os principais fundamentos teóricos que culminaram na elaboração do famoso e revolucionário Teorema do Equilíbrio de Nash.

**Palavras-chave:** teoria dos jogos; fundamentos matemáticos; equilíbrio de nash.



## ABSTRACT

For a long centuries, many mathematicians emerged who left legacies for the growth of Mathematics, causing it to be subdivided into several subgroups, such as Algebra, Geometry, Calculus, etc. Game Theory conquered its space as an area of study of Mathematics after important contributions for centuries. Among its leded scholars, John von Neumann and Oskar Morgenstern stand out, the first ones to formalize this new mathematical area through the work Theory of Games and Economic Behavior; and John Nash, from whom came the greatest and most significant contributions to Game Theory, which today have great applicability in other areas of knowledge. His work refuted the ideas of important authors of Economic Sciences. For relevance of John Nash and the personal challenges he faced during his life, it is necessary to talk about, in this work, the main theoretical foundations that culminated in the formulation of the famous and revolutionary Nash Equilibrium Theorem.

**Keywords:** game theory; theoretical foundations; nash equilibrium.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	John von Neumann.....	16
Figura 2 –	John Forbes Nash Jr.....	17
Figura 3 –	Árvore de decisões .....	22
Figura 4 –	Bola aberta .....	31
Figura 5 –	Bola fechada .....	31
Figura 6 –	Esfera .....	32
Figura 7 –	Conjuntos convexos e não-convexos .....	39
Figura 8 –	Divisão simplicial de $\Delta_2$ .....	41
Figura 9 –	Célula completamente rotulada em $L_1$ .....	42
Figura 10 –	Triângulo $W$ .....	48
Figura 11 –	Exemplo de rotulagem própria em $W$ .....	49

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 – Matriz de payoffs – Par ou Ímpar .....</b>	<b>20</b>
<b>Tabela 2 – Par ou Ímpar – Estratégias mistas .....</b>	<b>27</b>
<b>Tabela 3 – Matriz de payoffs – O Dilema do Prisioneiro .....</b>	<b>28</b>
<b>Tabela 4 – Rotulagens do exemplo 4.11 .....</b>	<b>42</b>
<b>Tabela 5 – Par ou Ímpar – Resposta ótima .....</b>	<b>50</b>
<b>Tabela 6 – Condições de vitória do Jogador 1 .....</b>	<b>57</b>
<b>Tabela 7 – Política de comércio – EUA e Japão .....</b>	<b>59</b>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A TEORIA DOS JOGOS.....</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Primeiras contribuições.....</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>A contribuição de John von Neumann e Oskar Morgenstern .....</b>	<b>15</b>
<b>2.3</b>	<b>John Nash .....</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>Jogo .....</b>	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>Solução de um jogo .....</b>	<b>19</b>
<b>3.3</b>	<b>Tipos de jogos .....</b>	<b>20</b>
3.3.1	Jogos simultâneos .....	20
3.3.2	Jogos sequenciais .....	21
3.3.3	Jogos de soma zero .....	23
3.3.4	Jogos em Forma Normal .....	24
<b>3.4</b>	<b>Estratégia .....</b>	<b>25</b>
<b>3.5</b>	<b>Modelagem inicial de um jogo .....</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....</b>	<b>30</b>
<b>4.1</b>	<b>Espaços Métricos .....</b>	<b>30</b>
<b>4.2</b>	<b>Função Contínua .....</b>	<b>32</b>
<b>4.3</b>	<b>Homeomorfismo .....</b>	<b>35</b>
<b>4.4</b>	<b>Conjunto Compacto .....</b>	<b>38</b>
<b>4.5</b>	<b>Conjunto Convexo .....</b>	<b>39</b>
<b>4.6</b>	<b>O Lema de Sperner .....</b>	<b>46</b>
<b>4.7</b>	<b>O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer .....</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>O TEOREMA DO EQUILÍBRIO DE NASH .....</b>	<b>50</b>
<b>5.1</b>	<b>O Equilíbrio de Nash .....</b>	<b>50</b>
<b>5.2</b>	<b>Propriedades da função <math>U_i</math> .....</b>	<b>51</b>
<b>5.3</b>	<b>O legado de John Nash .....</b>	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>A TEORIA DOS JOGOS NO ENSINO MÉDIO .....</b>	<b>56</b>
<b>6.1</b>	<b>Proposta de atividade 1 .....</b>	<b>56</b>
<b>6.2</b>	<b>Proposta de atividade 2 .....</b>	<b>58</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>60</b>

<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>61</b>
--------------------------	-----------

## 1 INTRODUÇÃO

Os matemáticos de várias épocas sempre tiveram muita curiosidade para desvendar e quantificar os resultados dos mais diversos jogos (cartas, jogos de azar, etc). Os primeiros estudiosos atribuíam ao acaso todo e qualquer resultado de jogos de azar. Com o passar do tempo e após diversas análises, toda uma teoria foi criada com a finalidade de desvendar a existência de outros fatores que poderiam determinar as probabilidades de sucesso ou fracasso num jogo.

Do esforço de vários matemáticos e outros pesquisadores (principalmente da área da Economia) surgiu a Teoria dos Jogos, que passou inclusive a dar um novo sentido à terminologia *jogo*. Antes uma área de pesquisa que tinha terreno fértil principalmente na Economia, a Teoria dos Jogos passou a ser um ramo da Matemática com inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Neste trabalho será feita uma breve análise da Teoria dos Jogos, destacando a contribuição de John Nash e os fundamentos matemáticos utilizados por ele para desenvolver sua teoria.

No capítulo 2 falaremos um pouco da história da Teoria dos Jogos e as primeiras contribuições para a consolidação desta área da Matemática.

No capítulo 3 iremos familiarizar o leitor com conceitos importantes que serão utilizados durante todo nosso percurso, como jogo, *payoff*, estratégia, tipos de jogos, etc. O entendimento desses conceitos facilitará a compreensão do trabalho.

No capítulo 4 falaremos sobre conceitos matemáticos, dos quais os principais pesquisadores da Teoria dos Jogos, em especial John Nash, fizeram uso para elaborar suas contribuições.

No capítulo 5 apresentamos a demonstração do Teorema do Equilíbrio de Nash.

No capítulo 6 disponibilizamos ao leitor uma proposta pedagógica de aplicação dos conceitos básicos de Teoria dos Números a turmas do Ensino Médio.

No capítulo 7 finalizamos o trabalho com as considerações finais.

## 2 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A TEORIA DOS JOGOS

Neste primeiro capítulo, mostraremos de forma sucinta o desenvolvimento da Teoria dos Jogos ao longo do tempo, desde seus primeiros pesquisadores até as contribuições de John von Neumann, Oskar Morgenstern e John Nash, que possibilitaram a variedade de aplicações que se tem hoje.

### 2.1 Primeiras contribuições

O interesse no estudo de jogos de uma perspectiva da Matemática foi despertado por volta do século XVII, quando Blaise Pascal e Pierre de Fermat começaram a trocar correspondências com a finalidade de resolver problemas relacionados com os jogos de azar, principalmente a questão de divisão de apostas (CALABRIA e CAVALARI, 2013, p.11). A constante comunicação entre os dois matemáticos resultou no desenvolvimento do trabalho intitulado *A Teoria das Probabilidades*. Esse trabalho serviu de norte para o desenvolvimento de outras áreas, como a Física, a Engenharia e a Economia.

No século XVIII, James Waldegrave começou a analisar um jogo de cartas chamado *Le Her* e encontrou uma maneira lógica de vencer o jogo a partir de métodos da Teoria dos Jogos. No entanto, Waldegrave não estendeu sua abordagem para uma teoria geral.

No início do século XIX, o filósofo, matemático e economista francês Antoine Augustin Cournot desenvolve um importante trabalho sobre duopólio<sup>1</sup>. Para Silva e Fenille, a contribuição de Cournot

“(...) propõe uma análise sobre o comportamento de duas empresas que praticam o mesmo preço e precisam decidir simultaneamente quanto produzir para maximizar seus ganhos. (...)”

Em 1913, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da Teoria dos Jogos baseado no jogo de xadrez. Segundo Sartini et al., tal teorema afirma que

---

<sup>1</sup> Um duopólio é uma situação em que duas empresas juntas possuem todo, ou quase todo, o mercado de um produto ou serviço.

“(...) o jogo de xadrez é estritamente determinado, ou seja, em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia em mão que lhe dará a vitória ou conduzirá o jogo ao empate. (...)”

Em 1921, o matemático francês Émile Borel começou a desenvolver as primeiras ideias que fariam a Teoria dos Jogos tomar um caminho diferente da Teoria de Jogos Probabilísticos. Ele começou a observar as estratégias utilizadas por jogadores de pôquer, focando especialmente no blefe. Borel viu que existem outros fatores além do acaso que podem favorecer um jogador na obtenção da vitória, destacando principalmente as tomadas de decisão baseadas nas possibilidades de sucesso do oponente. Em seguida, Borel procurou desenvolver métodos matemáticos que possibilitassem encontrar a estratégia perfeita para vencer um jogo, chamada de estratégia ótima.

Ao mesmo tempo que fazia suas pesquisas, Borel introduzia (inconscientemente ou não) um novo conceito de *jogo*, que seria o principal instrumento de estudo da Teoria dos Jogos, aplicável a diversas situações que envolveriam tomadas de decisão. No capítulo seguinte, abordaremos com mais detalhes esse conceito de jogo.

Mesmo com a percepção pioneira de diversos elementos conceituais, Émile Borel não é considerado o pai da Teoria dos Jogos, como explica Almeida:

“(...) Apesar de ter sido o primeiro matemático a vislumbrar o sistema sobre o qual se consolidou a Teoria dos Jogos, Borel não é considerado o pai da teoria, por não ter desenvolvido com profundidade suas ideias. (...)”

A formalidade dessas ideias da Teoria dos Jogos seria desenvolvida mais tarde por outros dois estudiosos, os quais apresentaremos na próxima seção.

## **2.2 A contribuição de John von Neumann e Oskar Morgenstern**

A Teoria dos Jogos começou a se tornar realmente objeto de estudo da Matemática a partir da década de 1930, quando o matemático John von Neumann e o economista Oskar Morgenstern perceberam que alguns princípios matemáticos aplicados a jogos de estratégia poderiam ser associados a problemas típicos de comportamento econômico (NASCIMENTO, 2014).



Como resultado de seus estudos, os dois pesquisadores lançaram em 1944 o livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, considerado um marco na história da Teoria dos Jogos. Nele os autores desenvolveram a análise de um tipo de jogo chamado de *soma zero* (conceito que será visto mais adiante) e pode-se encontrar ainda diversas aplicações de tal assunto na área da Economia.

Devido à relevância do trabalho de von Neumann e Morgenstern, a Teoria dos Jogos ganhou espaço em diversas outras áreas de conhecimento que convivem com tomadas de decisão, como explica Francez:

“(...) Vivemos em uma sociedade na qual os conflitos e interesses são inerentes às relações humanas. É por conta disso que a aplicação desta teoria consegue ser tão vasta e abranger áreas tão distintas das Exatas, como Psicologia, Ciências Sociais, Política, Biologia, Sociologia, entre outras. (...)”

### Figura 1 – John von Neumann



Fonte: <https://www.somatematica.com.br/biograf/vonneumann.php>

### 2.3 John Nash

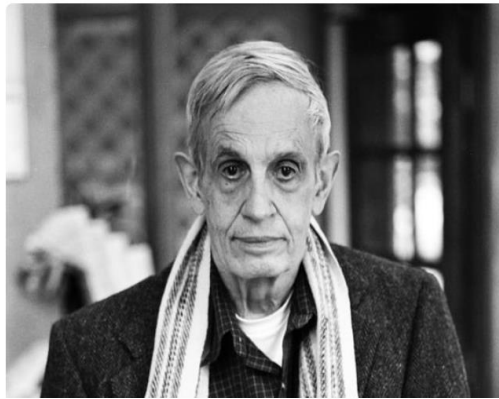
Nenhum outro matemático representa tão bem a Teoria dos Jogos como o americano John Forbes Nash Jr. (1928 - 2015). Sua contribuição para a Matemática, e especialmente para a Economia, foi tão importante e definitiva que lhe renderam, entre diversos prêmios, o Nobel de Economia, em 1994.

O trabalho de John Nash começa a ser elaborado quando ele passa a estudar resultados da teoria de von Neumann e percebe que alguns jogos não se

enquadram nas características de soma zero (Francez, 2017). Nash focou exatamente nesses tipos de jogos para elaborar sua teoria.

Como resultado de longos anos de estudo, em 1950 Nash publicou quatro artigos importantes, nos quais provava a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos, que mais tarde ficou conhecido como *Equilíbrio de Nash* (Sartini et al. 2004).

**Figura 2 – John Forbes Nash Jr**



Fonte: <https://www.suno.com.br/tudo-sobre/john-nash/>

Em homenagem a John Nash, e inspirado em sua biografia, em 2001 foi lançado o filme *Uma Mente Brilhante*, que retrata todo o percurso traçado pelo jovem matemático até chegar ao ápice de sua carreira, destacando o fato de Nash sofrer de esquizofrenia e seus sintomas terem sido atenuados durante a elaboração de seus trabalhos. O filme foi vencedor de quatro Oscars.

### 3 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos da Teoria dos Jogos, visando uma melhor compreensão da sequência deste trabalho. Começamos com o principal objeto de estudo dessa teoria: o jogo.

#### 3.1 Jogo

Antes de explicarmos o sentido desta palavra para o desenvolvimento deste trabalho, vale destacar o significado desta palavra na Língua Portuguesa. De acordo com o dicionário online Houaiss, uma das inúmeras definições nos diz que um jogo é uma atividade:

“(...) submetida a regras que estabelecem quem vence e quem perde; competição física ou mental sujeita a uma regra, com participantes que disputam entre si por uma premiação ou por simples prazer (...)”.

Talvez essa seja a definição que mais se aproxima do significado que usaremos aqui. De fato, durante nossa análise estaremos sempre em busca de expor o pensamento dos matemáticos que resultaram em encontrar situações ótimas, garantindo assim a vitória.

Em Teoria dos Jogos, o que se pode dizer sobre este conceito é que ele foi sendo construído ao mesmo tempo que sua teoria. Hoje, diversos autores conseguem transmitir bem a ideia de jogo, além de explicar os vários tipos de jogos (o que faremos aqui também). Para Fiani, por exemplo,

“(...) situações que envolvam interações entre agentes racionais que se comportam estrategicamente podem ser analisadas formalmente como um jogo (...)”.

Diante dessa definição, é fácil perceber que diversas situações da vida cabem nesse conceito e podem ser matematicamente modeladas de acordo com as bases teóricas que esta área possibilita, desde um simples jogo de par ou ímpar até a disputa de duas empresas por um controle de mercado. Neste último exemplo, os agentes racionais mencionados por Fiani seriam as duas empresas, que chamaremos simplesmente de *jogadores*.

Matematicamente, vamos definir um jogo da seguinte forma:

**Definição 3.1** (Jogo): Um *jogo* é um conjunto finito  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , onde cada  $g_i \in G$ , com  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ , representa um jogador.

**Exemplo 3.1:** Três empresas que disputam no mercado de automóveis. A concorrência desse mercado seria o jogo  $G$ , com  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ .

Vale ressaltar também que um fator importante de um jogo é a possibilidade de obter resultados a partir da tomada de decisão de um jogador. Dessa forma, jogos em que se obtêm os resultados única e exclusivamente por conta do acaso não se encaixam no conceito de jogo aqui apresentado, sendo estes instrumentos de análise da Teoria dos Jogos Probabilísticos.

### 3.2 Solução de um jogo

**Definição 3.2** (Solução de um jogo): Dado um jogo, uma *solução* é um resultado que traz a maior recompensa possível para um ou mais jogadores.

Uma solução de um jogo é uma previsão sobre o resultado de um jogo, baseada na escolha pela melhor estratégia a ser adotada por um jogador (Moreira, 2017). Para a obtenção da melhor solução de um jogo de estratégias puras ou mistas existem conceitos que podem ajudar na modelagem do problema, tais como a *dominância* e o *equilíbrio de Nash*. Este último será comentado com mais detalhes posteriormente.

**Exemplo 3.2:** Num jogo de Par ou Ímpar, o jogador 1 escolhe Par. Se ele, hipoteticamente, sabe que o jogador 2 sempre joga um número par, basta jogar um número par para obter a vitória (recompensa), já que a soma de dois números pares dará o resultado esperado. Nesse caso, a estratégia {Par,Par} seria uma solução do jogo para a vitória do jogador 1.

### 3.3 Tipos de jogos

#### 3.3.1 Jogos simultâneos

**Definição 3.3** (Jogo Simultâneo): Um jogo é chamado de *simultâneo* quando os jogadores envolvidos podem tomar decisões ao mesmo tempo.

Para Câmara,

“(...) a principal implicação da simultaneidade para o jogo é o fato de que nenhum dos jogadores conhece previamente o que os outros irão de fato fazer. É claro que a questão da simultaneidade na prática é muito difícil de ocorrer (...)”.

Do ponto de vista prático, jogos simultâneos são mais raros. Por exemplo, uma empresa dificilmente toma a decisão de lançar um produto no mercado simultaneamente com sua concorrente.

**Exemplo 3.3** (Par ou Ímpar): Dois jogadores, J1 e J2 jogam Par ou Ímpar. O jogador 1 (J1) escolhe par e o jogador 2 (J2) escolhe ímpar. Como recompensa, o jogador vencedor ganha R\$ 10,00.

Uma forma comum de representar um jogo simultâneo é a *matriz de payoffs*.

**Definição 3.4** (Matriz de payoffs): Dado um jogo  $G = \{g_1, g_2\}$ . Se o jogador  $g_1$  tem  $m$  possíveis ações, o jogador  $g_2$  tem  $n$  possíveis ações e  $a_{ij}$  representa os ganhos de  $g_1$  e  $g_2$  quando adotam as ações  $i$  e  $j$ , respectivamente. Então definimos a *matriz de payoffs*  $(a_{ij})_{m \times n}$ , onde  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ , com  $i, j \in \mathbb{N}$ .

A representação gráfica para esse jogo, através da matriz de payoffs, seria:

**Tabela 1 – Matriz de payoffs – Par ou Ímpar**

		J2 (ímpar)	
		Par	Ímpar
J1 (par)	Par	(10; 0)	(0; 10)
	Ímpar	(0; 10)	(10; 0)

Fonte: Elaborada pelo autor

Como convenção, em uma matriz de payoffs, o jogador 1 sempre se posiciona na linha e o jogador 2, na coluna. Os ganhos (payoffs) são as células da matriz, colocados entre parênteses, onde o primeiro valor representa o ganho de J1 e o segundo, o ganho de J2 para cada estratégia escolhida.

Repare que o jogo de Par ou Ímpar só faz sentido se for um jogo simultâneo. Do contrário, o primeiro jogador a tomar a decisão sempre teria desvantagem, já que a estratégia ótima seria facilmente identificada pelo jogador seguinte.

### 3.3.2 Jogos sequenciais

**Definição 3.5** (Jogo Sequencial): Um jogo é chamado de *sequencial* quando os jogadores envolvidos não tomam decisões ao mesmo tempo, ou seja, um jogador toma uma primeira decisão, depois outro jogador toma uma nova decisão baseado na anterior e assim por diante.

Nesse caso, não existe uma clara vantagem em decidir primeiro. De acordo com Câmara,

“(...) o mais importante não é a ordem da decisão, mesmo porque, na prática, quase nunca as decisões são tomadas exatamente ao mesmo tempo. Assim, o efeito da cronologia representa menos a ordem da decisão e mais o conhecimento da decisão de um jogador pelo outro (...)”.

**Exemplo 3.4** Um jogo de xadrez é um tipo de jogo sequencial. A estratégia de um jogador se baseia na escolha prévia do outro.

Nos jogos sequenciais normalmente se utiliza a representação gráfica por *árvore de decisões*.

**Definição 3.6** (Árvore de decisões): Dado um jogo sequencial  $G$ , tal que  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Se o jogador  $g_1$  tem  $k_1$  possíveis ações e escolhe a ação  $k_{i_1}$ , com  $i_1 \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ , então o jogador  $g_2$  tem  $k_2$  possíveis ações e escolhe a ação  $k_{i_2}$ , com  $i_2 \in \{1, 2, \dots, k_2\}$ , então o jogador  $g_3$  tem  $k_3$  possíveis ações, e assim sucessivamente

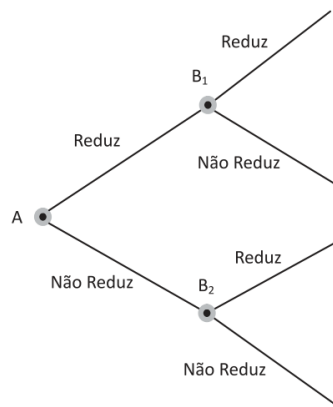
até o jogador  $g_n$ . Então definimos uma *árvore de decisões* com  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  possibilidades.

Vejamos o exemplo a seguir:

**Exemplo 3.5** Duas lanchonetes, A e B, elaboram novas campanhas publicitárias para o Natal e, para atrair seus clientes, devem decidir se reduzem ou não o valor de seus sanduíches durante este período.

Graficamente, podemos pensar esse jogo da seguinte maneira:

**Figura 3 – Árvore de decisões**



Fonte: CÂMARA, S. F. (2011, p.32)

Com esse esboço, ficam claras as interações entre os jogadores e como as decisões de um podem implicar nas decisões de outro jogador. Cada ponto (nó) representa um jogador e cada segmento de reta, uma tomada de decisão. O primeiro nó, representado pelo jogador A, indica que este tomará a primeira decisão. B<sub>1</sub> e B<sub>2</sub> representam as ações tomadas pelo jogador B, desde que sejam escolhidas as decisões 1 ou 2, e assim por diante.

Jogos sequenciais são mais comuns e com diversas aplicações, como a que citamos, de uma disputa de mercado. Ao longo deste trabalho, veremos outros exemplos desse tipo de jogo.

### 3.3.3 Jogos de soma zero

Uma importante classificação de jogos foi apresentada por John von Neumann e Oskar Morgenstern no seu famoso livro *The Theory of Games and Economic Behavior*. Nele, os autores levam em consideração as recompensas obtidas por cada jogador ao fim do jogo. Segundo von Neumann e Morgenstern

“(...) Um importante ponto de vista na classificação de jogos é essa: a soma de todas as recompensas recebidas pelos jogadores é sempre zero; ou esse não é o caso? Se for zero, então pode-se dizer que os jogadores pagam apenas uns aos outros e que nenhuma produção ou destruição de bens está envolvida. (...)”

A esse tipo de jogo, os autores denominaram jogo de *soma zero*. Eles ressaltam ainda que jogos que visam apenas entretenimento são sempre classificados como de soma zero. Porém, alguns jogos na área da Economia não se encaixam nesse modelo.

**Definição 3.7** (Jogo de soma zero): Dado um jogo  $G$ , tal que  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Seja  $P_i = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik_i}\}$  o conjunto de payoffs para o jogador  $g_i$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dizemos que  $G$  é um *jogo de soma zero*, se para todo jogador  $g_i \in G$  temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} p_{ij} = 0.$$

Para ilustrar melhor esse conceito, pensemos no seguinte exemplo:

**Exemplo 3.6:** Dois jogadores, A e B, decidem jogar 10 partidas de dominó. A cada partida, cada jogador deverá apostar R\$ 5,00.

Podemos perceber inicialmente que cada jogador apostará, no total, R\$ 50,00. Logo o valor máximo em jogo é R\$ 100,00. Supondo que o jogador A vença oito das dez partidas, ele terminará o jogo com R\$ 90,00 (ou seja, lucro de R\$ 40,00); enquanto o jogador 2, que venceu apenas duas das dez partidas, terminará o jogo com apenas R\$ 10,00 (ou seja, prejuízo de R\$ 40,00). Se resumirmos as recompensas



de A e B, teremos, respectivamente, + R\$ 40,00 e - R\$ 40,00, onde os sinais de + e - simbolizam, respectivamente, lucro e prejuízo. Dessa forma, é fácil ver que a soma dos ganhos resulta em zero. Logo, trata-se de um jogo de soma zero.

Uma outra maneira de analisar um jogo de soma zero é verificando que o valor total envolvido no jogo sempre se mantém constante. No nosso exemplo, se somarmos os valores totais de A e B ao final do jogo, veremos que são o mesmo valor máximo do início (R\$ 90,00 + R\$ 10,00 = R\$ 100,00).

### 3.3.4 Jogos em Forma Normal

**Definição 3.8** (Jogo em Forma Normal): Um jogo na forma normal consiste nas seguintes características:

- a. Um conjunto  $N := \{1, 2, \dots, n\}$  de jogadores;
- b. Um conjunto finito  $A_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in N$ , chamado de *conjunto de ações de i*;
- c. Uma função  $u_i: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $i \in N$ , que chamaremos de *função recompensa de i*.

Usaremos a notação  $(N, A, R)$  para nos referirmos a um jogo em forma normal, onde  $A := A_1 \times \dots \times A_n$  e  $R := (u_1, \dots, u_n)$ . Cada elemento  $a := (a_1, \dots, a_n) \in A$  é chamado de *perfil de ações*.

**Exemplo 3.7:** No jogo Pedra, Papel e Tesoura, dois jogadores escolhem um dos três objetos (pedra, papel e tesoura). As seguintes regras devem ser respeitadas:

- Pedra supera tesoura;
- Tesoura supera papel;
- Papel supera pedra;
- Objetos iguais geram empate.

Nesse caso, temos um jogo em forma normal, com  $N = \{1, 2\}$ , um conjunto finito de ações para cada jogador, com  $A_1 = A_2 = \{\text{pedra, papel, tesoura}\}$ , e uma função  $u_i: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $i \in N$ .

### 3.4 Estratégia

Dada uma certa informação, temos que uma *estratégia* corresponde ao conjunto de ações que são tomadas por um jogador durante um jogo. Tais ações podem levar, ou não, o jogador à recompensa esperada.

Cada jogador pode ter um conjunto de estratégias a serem aplicadas durante o jogo. Tais estratégias podem ser escolhidas com base em decisões determinísticas ou probabilísticas. Uma decisão por uma estratégia é dita *determinística* quando se baseia em uma dedução racional. Dizemos então que a estratégia é *pura* (Moreira, 2017). Matematicamente, podemos definir uma estratégia pura da seguinte forma:

**Definição 3.9** (Estratégia pura): Seja  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  um jogo. Para todo  $g_i \in G$  existe um conjunto finito  $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\}$  de ações. Cada  $s_{ij} \in S_i$ , com  $j = \{1, 2, \dots, m\}$ , é chamada de *estratégia pura*.

**Exemplo 3.8:** No jogo Pedra, Papel e Tesoura, do Exemplo 3.6, as estratégias puras para os dois jogadores seriam {pedra, papel, tesoura}, com 9 perfis de estratégia possíveis.

Uma decisão por uma estratégia é dita probabilística quando ela é escolhida com base no cálculo das probabilidades de ganho ou perda de cada uma. Nesse caso, dizemos que a estratégia é *mista* (Moreira, 2017). Para entendermos melhor do que se trata uma estratégia mista, seguimos com as definições:

**Definição 3.10** (Distribuição de probabilidade): Dado um conjunto finito  $\Omega$ , chamamos de *distribuição de probabilidade sobre  $\Omega$*  uma função  $f: \Omega \rightarrow [0,1]$  tal que

$$\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1$$

O conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre  $\Omega$  será denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definição 3.11** (Estratégia mista): Dado um jogo na forma normal  $(N, A, R)$ . Seja  $A := A_1 \times \dots \times A_n$ . O conjunto de estratégias mistas para um certo jogador  $i$  é dado por  $S_i := \mathfrak{D}(A_i)$ .

O conjunto de perfis de estratégias mistas é denotado por  $S := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .

**Exemplo 3.9:** No jogo Pedra, Papel e Tesoura, do Exemplo 3.6, poderíamos supor que o jogador 1 apresenta as seguintes distribuições de probabilidade para cada estratégia pura:

$$\text{para } s_{11} = \{\text{pedra}\}, \text{ temos } f(s_{11}) = \frac{1}{2};$$

$$\text{para } s_{12} = \{\text{papel}\}, \text{ temos } f(s_{12}) = \frac{1}{4};$$

$$\text{para } s_{13} = \{\text{tesoura}\}, \text{ temos } f(s_{13}) = \frac{1}{4};$$

O objetivo maior da Teoria dos Jogos, desde seus primeiros estudiosos, sempre foi a busca por maximizar os ganhos de um jogo. Quando um jogador consegue fazer a escolha pela recompensa máxima (ou mais vantajosa), dizemos que ele utilizou uma *estratégia ótima*. As recompensas, ou ganhos, são normalmente chamadas de *payoffs* de um jogo. Em alguns casos é possível construirmos uma *matriz de payoffs* para facilitar a análise dos jogos.

**Definição 3.12** (Ganho esperado de uma estratégia mista): Dado um jogo na forma normal  $(N, A, R)$  e  $i \in N$ . Definimos a função  $U_i: S \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$U_i[(s_1, \dots, s_n)] := \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j).$$

Chamamos  $U_i(s)$  de *função utilidade esperada* ou *ganho esperado por  $i$*  com o perfil  $s$ .

Ou seja,  $U_i(s)$  representa a média ponderada de todas as retribuições ao jogador  $i$ , sendo que o peso de cada ganho é dado pela probabilidade do perfil associado a ele ocorrer segundo  $s$ .

**Exemplo 3.10:** No jogo de Par ou Ímpar, descrito no Exemplo 3.4, suponha que o jogador 1 jogue Par em 70% das vezes e Ímpar em 30% das vezes, enquanto o jogador 2 joga Par em 40% das vezes e Ímpar em 60% das vezes.

**Tabela 2 – Par ou Ímpar – Estratégias mistas**

		J2 (ímpar)	
		Par (40%)	Ímpar (60%)
J1 (par)	Par (70%)	(10; 0)	(0; 10)
	Ímpar (30%)	(0; 10)	(10; 0)

Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com as informações da Tabela 2, podemos calcular o ganho esperado de J1 e J2:

$$U_1 = 10 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 4,6.$$

$$U_2 = 0 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 5,4.$$

Nessas circunstâncias, o ganho esperado do jogador 2 é maior que o do jogador 1.

**Notação 3.1:** Dados um perfil de estratégias mistas  $s := (s_1, \dots, s_n)$  e a distribuição de probabilidade  $t_i \in S_i$ , pomos

$$s_{-i} := (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \text{ e } (t_i, s_{-i}) := (s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

### 3.5 Modelagem inicial de um jogo

Após apresentarmos os principais conceitos que serão utilizados nesse trabalho, vamos nos deter agora à modelagem matemática de um jogo clássico da Teoria dos Jogos.

**Exemplo 3.11** (O Dilema do Prisioneiro): Dois ladrões, A e B, são capturados e acusados de um mesmo crime. Os dois são colocados em celas separadas, sem comunicação entre eles. Para solucionar o caso, o delegado faz a seguinte proposta: cada um dos acusados pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum dos dois confessar o crime, ambos pegam 1 ano de

cadeia; se os dois confessarem, ambos pegam 5 anos de cadeia; se um confessar e o outro negar, o que confessou será liberado e o que negou pegará 10 anos de reclusão.

Para iniciar a modelagem desse jogo, devemos perceber que se trata de um jogo na forma normal. Portanto, temos o conjunto de jogadores  $N = \{A, B\}$ . Além disso, para cada jogador, temos um conjunto de ações, que se resume a confessar ou negar o crime. Os dois jogadores tomam as mesmas decisões (ações). Desse modo, temos os conjuntos  $A_A = \{confessar, negar\}$  e  $A_B = \{confessar, negar\}$ . Além disso, podemos definir as funções recompensa  $R = (u_A, u_B)$ .

Pelo enunciado do jogo, também podemos deduzir que o Dilema do Prisioneiro é um jogo simultâneo, já que cada preso não tem acesso à decisão do outro.

Agora podemos representar graficamente os perfis de ações desse jogo por uma matriz de payoffs:

**Tabela 3 – Matriz de payoffs – O Dilema do Prisioneiro**

		B	
		Confessar	Negar
A	Confessar	(-5; -5)	(0; -10)
	Negar	(-10; 0)	(-1; -1)

Fonte: Elaborada pelo autor

Os valores com sinais negativos têm a intenção de indicar o prejuízo para os jogadores e cada valor entre parênteses representa, respectivamente, a recompensa de A e B.

Devemos perceber que, mesmo numa situação em que não há comunicação entre os prisioneiros, é possível encontrar uma saída que seja vantajosa (ou com menor prejuízo) para os dois. Suponha que o prisioneiro A sabe da escolha de B. Se B escolher negar, então a melhor alternativa para A é confessar, já que este seria liberado, enquanto o prisioneiro B teria uma pena de 10 anos; no entanto, se B escolher confessar, a melhor opção para A também seria confessar, pois assim ambos teriam uma pena de 5 anos. Ou seja, a ação de

confessar sempre é mais vantajosa para A. De modo análogo, confessar também seria a melhor ação para B. Concluimos que o perfil de ação mais vantajoso para os dois jogadores seria (Confessar, Confessar). Chamamos esse perfil de ação de *equilíbrio puro*.

**Definição 3.13** (Equilíbrio puro): Dado um jogo na forma normal  $(N, A, R)$ . Dizemos que  $a := (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$  é um *equilíbrio puro* se, para qualquer  $i \in N$ ,

$$u_i(a) \geq u_i(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

para todo  $x_i \in A_i$ .

**Exemplo 3.12** Observando o Dilema do Prisioneiro, podemos perceber que a função recompensa retorna um melhor payoff aos prisioneiros quando estes escolhem o perfil (Confessar, Confessar), que representa um equilíbrio puro.

A definição de equilíbrio puro<sup>2</sup> nos leva a uma ideia preliminar do que viria a ser o equilíbrio de Nash, que definiremos no capítulo 5.

---

<sup>2</sup> Para alguns autores, um equilíbrio puro é chamado de *equilíbrio de Nash em estratégias puras*. Iremos manter essa diferenciação, atribuindo a notação equilíbrio de Nash apenas para estratégias mistas.

## 4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo iremos apresentar noções sobre alguns tópicos que foram extremamente importantes para sustentar as ideias do Teorema do Equilíbrio de Nash, tais como espaços métricos, limite e continuidade, conjuntos compactos, conjuntos convexos, Lema de Sperner, Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, entre outros.

### 4.1 Espaços Métricos

**Definição 4.1** (Métrica ou distância): Dado um conjunto  $M$ , definimos a função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par de pontos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , que chamaremos de *distância* do ponto  $x$  ao ponto  $y$ , de tal modo que:

- 1)  $d(x, x) = 0$ ,  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ;
- 2) satisfaz a comutatividade, ou seja,  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in M$ .

Em 3) temos a chamada *desigualdade triangular*, que nos diz que um lado de um triângulo qualquer não pode ser maior que a soma dos outros dois.

Chamaremos de *espaço métrico* o par  $(M, d)$  formado por um conjunto  $M$  e uma métrica  $d$  em  $M$ .

Como exemplos de espaços métricos, temos:

- a reta real, munida da métrica  $d(x, y) = |x - y|$ , chamada de módulo ou valor absoluto;
- os espaços euclidianos, designados por  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , munidos com a distância

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Para evitar ambiguidades de leitura, vale esclarecer que iremos nos referir a um espaço métrico simplesmente pelo conjunto  $M$ , deixando implícito sua métrica  $d$ .

**Definição 4.2** (Bola aberta): Seja  $M$  um espaço métrico. Dado um ponto  $a \in M$  e um número real  $r > 0$ , definimos como *bola aberta* de centro  $a$  e raio  $r$ , o conjunto de pontos  $x \in M$ , para os quais a distância de  $x$  ao ponto  $a$  é menor que  $r$ . Indicaremos este conjunto pela notação  $B(a, r)$ . Ou seja:

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}$$

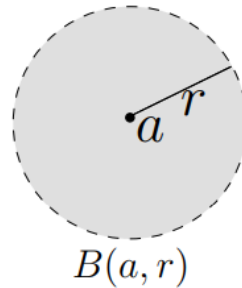
Analogamente, podemos definir uma bola fechada e uma esfera de centro  $a$  e raio  $r$ , respectivamente, como:

$$B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}$$

$$S[a, r] = \{x \in M; d(x, a) = r\}$$

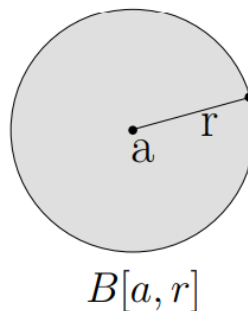
A representação geométrica desses conjuntos é mostrada a seguir:

**Figura 4 – Bola aberta**



Fonte: RAMTHUN, C. S. (2019, p.34)

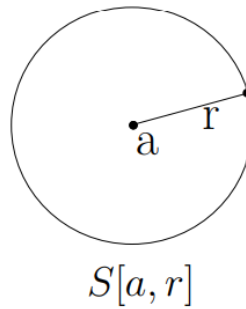
**Figura 5 – Bola fechada**



Fonte: RAMTHUN, C. S. (2019, p.35)



**Figura 6 – Esfera**



Fonte: RAMTHUN, C. S. (2019, p.35)

## 4.2 Função contínua

**Definição 4.3** (Limite de uma função): Seja  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação de um espaço métrico  $M$  num espaço métrico  $N$ . Dado um ponto  $a \in M$ , diz-se que o ponto  $b \in N$  é o *limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$* , e denotamos por  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$ , de tal modo que  $0 < d(x, a) < \delta$  implique que  $d(f(x), b) < \varepsilon$ .

**Definição 4.4** (Função contínua num ponto): Seja  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação de um espaço métrico  $M$  num espaço métrico  $N$  e  $a \in M$ . Dizemos que  $f$  é *contínua no ponto  $a$*  quando, dado arbitrariamente um número  $\varepsilon > 0$ , sempre pudermos determinar um  $\delta > 0$ , de tal modo que  $d(x, a) < \delta$  implique que  $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

**Definição 4.5** (Função contínua): Seja  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação de um espaço métrico  $M$  num espaço métrico  $N$ . Dizemos que  $f$  é contínua se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \forall a \in M$$

A seguir apresentamos algumas propriedades conhecidas dos limites para funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . As demonstrações dessas propriedades podem ser encontradas em alguns livros de Cálculo, entre eles a obra Fundamentos do Cálculo, Antônio Caminha Muniz Neto, da coleção PROFMAT. Em seguida apresentaremos alguns exemplos de funções contínuas:

- 1) Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$  então  $A = B$ ;
- 2) Se  $f(x) = k$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k$ ;
- 3) Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , então
 
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B;$$
- 4) Seja  $k$  uma constante e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , temos
 
$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot A;$$
- 5) Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , então
 
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B;$$
- 6) Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , com  $B \neq 0$ , então
 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Como exemplos de funções contínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  temos as funções constantes, as funções seno e cosseno, a função modular, entre outras.

**Proposição 4.1:** As funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , do tipo  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , são contínuas.

**Demonstração:**

Vamos usar indução finita sobre  $n$ .

- i) Suponha  $n = 1$ . Temos então a função  $f(x) = x$ . Calculando o limite de  $f$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x$$

Como o limite de  $f$  existe, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a).$$

Logo,  $f$  é contínua.

- ii) Vamos supor agora que a propriedade é válida para  $n$ . Devemos mostrar que ela também é válida para  $n + 1$ . Ou seja:

Se  $f(x) = x^n$  é contínua  $\Rightarrow f(x) = x^{n+1}$  também é contínua.

Dado  $f(x) = x^{n+1}$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^{n+1} = \lim_{x \rightarrow a} x^n \cdot x.$$

Pela propriedade 5) de limites, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n \cdot x = \lim_{x \rightarrow a} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow a} x$$

Do resultado de i) e da hipótese indutiva de ii), temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{n+1} = a^n \cdot a = a^{n+1} = f(a).$$

Logo,  $f(x) = x^{n+1}$  é contínua.

Concluimos que toda função da forma  $f(x) = x^n$  é contínua. ■

**Proposição 4.2:** Toda função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  do tipo  $f(x) = cx^n$ , com  $c$  constante, é contínua.

***Demonstração:***

Pela propriedade 4) de limites, podemos observar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} cx^n = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^n$$

Pelo resultado da proposição 3.1, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} cx^n = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^n = ca^n = f(a).$$

Concluimos que toda função da forma  $f(x) = cx^n$  é contínua. ■

**Teorema 4.1:** Toda função polinomial é contínua.

***Demonstração:***

Dada a função polinomial,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n]$$

Usando as propriedades 3) e 4) de limites, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c_0 + c_1 \lim_{x \rightarrow a} x + c_2 \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \dots + c_n \lim_{x \rightarrow a} x^n$$

Pelos resultados das proposições 4.1 e 4.2, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_n a^n = f(a).$$

Portanto, toda função polinomial é contínua. ■

### 4.3 Homeomorfismo

**Definição 4.6** (Homeomorfismo): Seja  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação contínua e biunívoca de um espaço métrico  $M$  sobre um espaço métrico  $N$  e  $a \in M$ . Dizemos que  $f$  é um homeomorfismo se sua inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também for contínua. Simbolizamos por  $M \simeq N$  ( $M$  e  $N$  são homeomorfos).

Como exemplos de homeomorfismos de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , temos:

- A função identidade  $f(x) = x$ , cuja inversa seria  $f^{-1}(y) = y$ . Como vimos, toda função polinomial é contínua. Assim,  $f$  e  $f^{-1}$  são homeomorfismos;
- As funções  $f(x) = 3x + 1$  e sua inversa  $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$  são homeomorfismos;
- As translações  $f(x) = x + a$  também são homeomorfismos, já que elas e suas inversas  $f^{-1}(y) = y - a$  são funções polinomiais, logo contínuas.

### 4.4 Conjunto compacto

Nesta seção apresentaremos o conceito de conjunto compacto, trabalhando particularmente com o espaço métrico  $\mathbb{R}^n$ . Antes disso, veremos algumas definições importantes.

**Definição 4.7** (Ponto interior): Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $a$  um ponto de  $X$ . Dizemos que  $a$  é ponto interior ao conjunto  $X$  se existir um número  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a, \varepsilon) \subset X$ .

O conjunto formado por todos os pontos interiores de  $X$  é chamado de *interior de  $X$*  e denotamos por  $\text{int}X$ .

**Definição 4.8** (Conjunto aberto): Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $A$  é *aberto* se  $A = \text{int}A$ , ou seja, todos os seus pontos são interiores.

A definição apresentada equivale a dizer que, para todo  $a \in A$ , sempre vai existir um certo  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a, \varepsilon) \subset A$ .

**Exemplo 4.1:** Todo intervalo aberto é um conjunto aberto. De fato, dado um intervalo  $A = (a, b)$ , temos que para todo ponto  $c \in A$  é ponto interior de  $A$ . Para comprovar esse fato, podemos inicialmente afirmar, sem perda de generalidade, que  $d(a, c) < d(c, b)$ . Desse modo, tomando  $\varepsilon = \frac{d(a, c)}{2}$  temos que  $B(c, \varepsilon) \subset A$ . Portanto,  $A = \text{int}A$ , logo  $A$  é um conjunto aberto.

**Definição 4.9** (Ponto de acumulação): Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $P \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $P$  é ponto de acumulação de  $X$  se  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$(B(P, \varepsilon) - \{P\}) \cap X \neq \emptyset$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de  $X$  é indicado por  $X'$ .

**Definição 4.10** (Fecho): Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $X'$  o conjunto dos pontos de acumulação de  $X$ . Chamamos o conjunto  $\bar{X}$  de *fecho* de  $X$  e definimos como:

$$\bar{X} := X \cup X'$$

**Definição 4.11** (Conjunto fechado): Dizemos que  $X \subset \mathbb{R}^n$  é fechado se

$$\bar{X} = X$$

**Exemplo 4.2:** Todo intervalo fechado é um conjunto fechado. De fato, dado um intervalo  $X = [a, b]$ , temos que todo ponto de  $X$  é ponto de acumulação, logo  $X' = X \Rightarrow X \cup X' = X \therefore X = \bar{X}$ .

**Definição 4.12** (Conjunto limitado): Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $X$  é um conjunto *limitado* se existir um  $r > 0$ , tal que  $X \subset B(p, r)$ , com  $p \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 4.3:** O intervalo  $(0, 1)$  é um conjunto limitado. Basta tomarmos  $p = 0$  e  $r = 2$  e teremos  $(0, 1) \subset B(0, 2) = (-2, 2)$ .

**Definição 4.13** (Cobertura): Seja  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Dada uma família  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ , para  $L = \{1, 2, \dots\}$ , de conjuntos  $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ . Dizemos que  $C$  é uma *cobertura* de  $X$ .

**Exemplo 4.4:** Dados os conjuntos  $C_1 = (0, \frac{1}{2})$  e  $C_2 = (\frac{1}{4}, 1)$  e  $X = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ . Como  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ , com  $L = \{1, 2\}$ , dizemos que  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma cobertura para  $X$ .

Podemos ainda definir uma *subcobertura* como uma família  $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ , com  $L' \subset L$ , tal que ainda seja possível verificar que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$ .

**Exemplo 4.5:** Dados os conjuntos  $C_1 = (1, \frac{5}{2})$ ,  $C_2 = (\frac{1}{2}, 4)$ ,  $C_3 = (3, 5)$  e  $X = [2, 3]$ . Como  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ , com  $L = \{1, 2, 3\}$ , logo  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma cobertura para  $X$ . No entanto, se tomarmos  $L' = \{1, 2\}$ , teremos uma família  $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$  e percebemos que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$ , portanto  $C'$  é uma subcobertura de  $C$ .

Dizemos que uma cobertura é *aberta* se todos os  $C_\lambda$ , com  $\lambda \in L$ , são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}$ ; quando  $L$  é um conjunto finito, dizemos que a cobertura é *finita*.

**Definição 4.14** (Conjunto compacto): Seja  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $X$  é um *conjunto compacto* se toda cobertura aberta de  $X$  possuir uma subcobertura finita.

**Teorema 4.2** (Conjunto compacto): Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $X$  é um conjunto *compacto* se  $X$  for limitado e fechado.

A demonstração desse teorema não será apresentado nesse trabalho. Ela pode ser encontrada no livro Curso de Análise vol. 1, Elon Lages Lima. Também é possível verificar a equivalência entre a definição 4.14 e o Teorema 4.2 através do Teorema de Borel-Lebesgue.

**Exemplo 4.6:** Um intervalo fechado  $X = [a, b]$  é um conjunto compacto. De fato, pelo exemplo 4.2, vimos que todo intervalo fechado é um conjunto fechado. Para mostrar que  $X$  é limitado, basta tomarmos  $p = a$  e  $r = d(a, b) + 1$ . Assim teremos  $X \subset B(a, r)$ , o que mostra que  $X$  é limitado.

## 4.5 Conjuntos convexos

**Definição 4.15** (Combinação convexa): Um vetor  $v$  é chamado combinação convexa de  $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  se  $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ , onde  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  e  $\alpha_i \geq 0$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Exemplo 4.7:** O vetor  $v = \left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  é combinação convexa dos vetores  $v_1 = (-2, 4, 0)$  e  $v_2 = (0, 3, -1)$ , pois podemos escrever

$$v = \frac{1}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2.$$

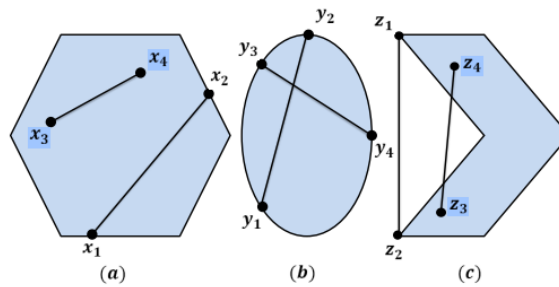
**Definição 4.16** (Segmento de reta): Sejam  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ . O *segmento de reta* que une  $v_1$  e  $v_2$  é o conjunto de todas as combinações convexas desses vetores.

**Exemplo 4.8:** Dados os vetores  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ , tais que  $v_1 = (3, 0)$  e  $v_2 = (6, 0)$ . Para um vetor genérico  $v = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2$ , podemos encontrar todas as combinações convexas de  $v_1$  e  $v_2$  variando  $\alpha$  entre 0 e 1. Desse modo teremos o segmento de reta com extremos em 3 e 6 sobre o eixo-x.

**Definição 4.17** (Conjunto convexo): Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $C$  é um conjunto convexo se, dados  $v_1, v_2 \in C$ , tivermos um vetor genérico  $v = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2$  tal que  $v \in C$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Falando numa linguagem mais geométrica, podemos dizer que um conjunto é convexo quando tomamos dois pontos  $x, y \in C$  de tal modo que o segmento de reta que une  $x$  e  $y$  está inteiramente contido em  $C$ .

**Figura 7 – Conjuntos convexos e não-convexos**



Fonte: AMORIM, R.G. (2013, p. 31)

Podemos observar na figura 7 que os conjuntos (a) e (b) são convexos, pois para quaisquer dois pontos arbitrários pertencentes a esses conjuntos, sempre é possível traçar um segmento de reta contido totalmente neles; o mesmo fato não pode ser verificado em (c), já que existe uma região do conjunto em que pode-se traçar um segmento de reta que não está totalmente contido no conjunto. Logo, nesse caso, o conjunto não é convexo.

**Definição 4.18** (Conjunto afim independente): Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ , de tal modo que  $A := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  seja um conjunto finito. Dizemos que  $A$  é *afim independente* se  $|A| = 1$  (cardinalidade de  $A$ ) ou se  $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_n - v_1\}$  é linearmente independente. Caso contrário,  $A$  é afim dependente.

**Exemplo 4.9:** Os vetores  $v_1 = (0,1,0)$ ,  $v_2 = (1,1,0)$  e  $v_3 = (0,1,1)$  são afim independentes. De fato, fazendo  $v_2 - v_1$  obtemos um vetor  $u = (1,0,0)$ . Da mesma forma, fazendo  $v_3 - v_1$  obtemos um vetor  $w = (0,0,1)$ . Como  $u$  e  $w$  são l.i. temos que  $v_1, v_2, v_3$  são afim independentes.

#### 4.6 O Lema de Sperner

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos que culminam na demonstração do Lema de Sperner, resultado importante para as nossas pretensões com este trabalho.

**Definição 4.19** ( $k$ -simplexo): Seja  $A := \{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$  um conjunto de vetores afim independentes. Chamamos de  *$k$ -simplexo determinado por  $A$*  o



conjunto  $\langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  de todas as combinações convexas de vetores de  $A$ , ou seja,

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i v_i; \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k+1\} \right\}.$$

Nesse  $k$ -simplexo, cada vetor é chamado de vértice. No caso de termos apenas um vetor em  $A$ , teríamos apenas um ponto como representação do 0-simplexo; no caso de dois vetores, um segmento de reta, onde cada vértice seria um vetor do 1-simplexo; e assim por diante.

**Exemplo 4.10:** Dados os vetores  $v_1 = (1,0,0)$ ,  $v_2 = (0,1,0)$  e  $v_3 = (0,0,1)$ . O 2-simplexo  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  é descrito geometricamente como o triângulo de vértices  $v_1, v_2$  e  $v_3$ , contido no plano  $\pi: x + y + z = 1$ .

No exemplo 4.10 usamos três vetores que formam uma base do  $\mathbb{R}^3$ . Todo  $k$ -simplexo formado por vetores que formam uma base canônica de  $\mathbb{R}^k$  é chamado de *k-simplexo canônico* e simbolizado por  $\Delta_k$ . Um fato importante sobre o  $k$ -simplexo canônico é que ele é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

**Definição 4.20** (Divisão simplicial): Dado um  $k$ -simplexo  $S$ , uma divisão simplicial de  $S$  é um conjunto finito de  $k$ -simplexos  $C_i$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tal que

$$\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} C_i = S.$$

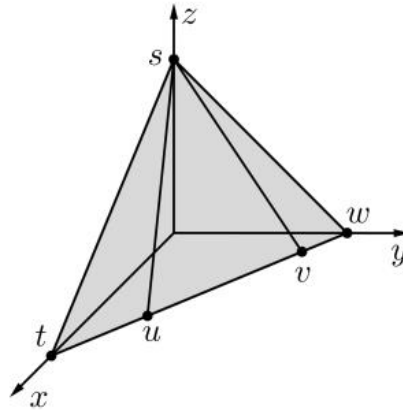
Da definição 4.20, vale destacar que, para quaisquer  $j, l \in \{1, 2, \dots, m\}$ , temos que  $C_j \cap C_l = \emptyset$  ou  $C_j$  e  $C_l$  têm uma face<sup>3</sup> em comum, no caso desses  $k$ -simplexos serem adjacentes. Nesse caso, dizemos que  $S$  está *simplicialmente dividido* e cada  $C_i$  é uma *célula* de  $S$ .

---

<sup>3</sup> O conceito de *face* apresentado aqui se difere da definição conhecida da Geometria Espacial euclidiana. Um  $k$ -simplexo pode ter  $k + 1$  tipos de faces. Por exemplo: se os vetores  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  formam um 2-simplexo, então existe uma 2-face (o próprio 2-simplexo), três 1-faces (os segmentos de reta) e três 0-faces (os vetores dos vértices).

**Exemplo 4.11:** Dados os vetores  $t = (1,0,0)$ ,  $w = (0,1,0)$ ,  $s = (0,0,1)$ ,  $u = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$  e  $v = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ . Fazendo  $C_1 = \langle s, t, u \rangle$ ,  $C_2 = \langle s, u, v \rangle$  e  $C_3 = \langle s, v, w \rangle$ , vemos que  $\{C_1, C_2, C_3\}$  é uma divisão simplicial de  $\Delta_2$ . Geometricamente, teríamos:

**Figura 8 – Divisão simplicial de  $\Delta_2$**



Fonte: Melo (2017, p. 23)

**Notação 4.1:** Dado um  $k$ -simplexo  $\langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  e  $y := \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i v_i$  um de seus elementos. Denotamos o conjunto

$$i^+(y) := \{i; \alpha_i > 0\}.$$

**Definição 4.21** (Rotulagem própria): Seja  $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  um simplexo simplicialmente dividido e  $V$  o conjunto de todos os vértices das células que compõem a divisão. Uma função  $L: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\}$  é uma *rotulagem própria* dessa divisão se  $L(v) \in i^+(v)$  para todo  $v \in V$ . Dizemos então, que  $L(v)$  é um rótulo de  $v$  por  $L$ .

**Exemplo 4.12:** Na divisão simplicial do Exemplo 4.11, podemos rotular os vetores  $s$ ,  $t$  e  $w$  de acordo com os índices de suas coordenadas não-nulas, ou seja, teríamos  $L(s) = 3$ ,  $L(t) = 1$  e  $L(w) = 2$ . Teríamos ainda duas possibilidades de rotulação para os vetores  $u$  e  $v$ , que pertencem ao segmento de reta com vértices em  $t$  e  $w$ . Portanto, essa divisão simplicial admite 4 possibilidades de rotulagem própria.

Tabela 4 – Rotulagens do exemplo 4.11

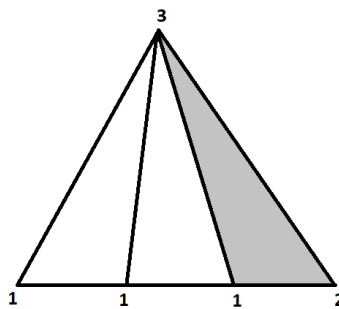
	$L(s)$	$L(t)$	$L(u)$	$L(v)$	$L(w)$
$L_1$	3	1	1	1	2
$L_2$	3	1	1	2	2
$L_3$	3	1	2	1	2
$L_4$	3	1	2	2	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso de um 2-simplexo, como no Exemplo 4.11, chamamos a rotulagem própria de *triangulação*.

**Definição 4.22** (Célula completamente rotulada): Seja  $L$  uma rotulagem própria para a divisão simplicial  $\{C_i; i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$  de  $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  e  $V_p$  um conjunto de vértices da célula  $C_p$ . Dizemos que  $C_p$  é completamente rotulada se  $\{L(v); v \in V_p\} = \{1, 2, \dots, k + 1\}$ .

**Exemplo 4.13:** Na divisão do Exemplo 4.11, a rotulagem  $L_1$  apresenta apenas uma célula completamente rotulada, como podemos ver destacada na figura abaixo:

Figura 9 – Célula completamente rotulada em  $L_1$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos perceber ainda que todas as rotulagens do Exemplo 4.11 apresentam células completamente rotuladas. De modo geral, veremos adiante que toda rotulagem própria apresenta pelo menos uma célula completamente

rotulada. Rotulagens próprias são também chamadas por alguns autores de *rotulagem de Sperner* ou *nomeação Sperner*.

**Definição 4.23** (Borda) Dado um  $k$ -simplexo  $S$ , a união de todas as  $(k-1)$ -faces de  $S$  é chamada de *borda de  $S$* , e representamos por  $\partial S$ .

**Lema 4.1:** Sejam  $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  simplicialmente dividido e  $L$  uma rotulagem própria da divisão. Além disso, seja  $C$  uma célula e  $F$  uma  $(k-1)$ -face de  $C$  contida em  $\partial S$ . Se o conjunto de rótulos para os vértices de  $F$  é igual a  $\{1, 2, \dots, k\}$ , então  $F \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ .

**Demonstração:** Sabemos, por hipótese, que  $F$  é um  $(k-1)$ -simplexo, daí possui  $k$  rótulos. Tomando o vértice de rótulo 1, podemos escrevê-lo da forma

$$\alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^k \alpha_i v_i.$$

Como  $C \subset \partial S$ , logo  $\alpha_1 > 0$ . Logo o vértice de rótulo 1 deve estar contido em alguma  $(k-1)$ -face de  $S$  que contém  $v_1$ . Argumentando de forma análoga para os vértices de  $v_2, \dots, v_k$ , concluímos que  $F \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ . ■

**Lema 4.2:** Sejam  $S$  um  $k$ -simplexo simplicialmente dividido e  $F$  uma  $(k-1)$ -face de uma célula  $C$ . Então,  $F \subseteq \partial S$  ou  $F = C \cap D$ , para alguma célula  $D \neq C$ .

**Demonstração:** Vamos supor que  $F = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  e consideremos a função  $g: S \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que  $g$  é definida por  $g(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) := (x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Podemos perceber que

$$w := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i$$

está em  $F$ . Se tomarmos, respectivamente,  $S'$ ,  $C'$ ,  $\partial F'$  e  $w'$  como imagens de  $S$ ,  $C$ ,  $\partial F$  e  $w$  por  $g$ , então, podemos escolher  $\delta > 0$  de tal modo que  $B(w', \delta) \cap \partial F' = \emptyset$ . Desse modo, há duas situações a analisar: primeiramente, se  $[B(w', \delta) \setminus C'] \cap S' = \emptyset$ , devemos ter  $F \subseteq \partial S$ ; caso contrário, tomando  $\varepsilon \leq \delta$  de tal modo que

$B(w', \varepsilon) \setminus C'$  pertença a  $g(D)$ , para alguma célula  $D$ . Desse modo, temos que  $C \cap D = F$ .

■

**Lema 4.3:** Sejam  $S := \langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  e  $C_i$  uma divisão simplicial de  $S$ , onde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Então, os elementos de  $C_i \cap F$  diferentes de  $\emptyset$ , formam uma divisão simplicial de  $F := \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ .

**Demonstração:** Com efeito, temos

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} (C_i \cap F) = \left( \bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} C_i \right) \cap F.$$

Mas temos

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} C_i = S.$$

Ou seja,

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} (C_i \cap F) = S \cap F = F.$$

Escolhendo duas células quaisquer de  $S$ , digamos  $C_1 := \langle a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \rangle$  e  $C_2 := \langle b_1, b_2, \dots, b_{k+1} \rangle$ , de modo que intersectem  $F$ . Então,  $(C_1 \cap F) \cap (C_2 \cap F) = (C_1 \cap C_2) \cap F$ . Se  $C_1$  e  $C_2$  forem disjuntas, também teremos  $(C_1 \cap F)$  e  $(C_2 \cap F)$  disjuntas. Caso contrário, podemos escrever  $(C_1 \cap F) \cap (C_2 \cap F) := \langle c_1, c_2, \dots, c_l \rangle$ , onde  $c_1, c_2, \dots, c_l$  são, ao mesmo tempo, vértices de  $C_1$  contidos em  $F$  e vértices de  $C_2$  contidos em  $F$ . Portanto, o simplexo formado por eles é uma face tanto de  $(C_1 \cap F)$  quanto de  $(C_2 \cap F)$ .

■

**Teorema 4.3:** (Lema de Sperner) Dado  $S_k := \langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  um simplexo simplicialmente dividido e  $L$  uma rotulagem própria da divisão. Então  $S_k$  apresenta um número ímpar de células completamente rotuladas.

**Demonstração:** Antes da prova por indução, verifiquemos alguns casos particulares, para  $k = \{0,1,2\}$ .

- (i) Para  $k = 0$ : Temos o simplexo  $S_0 := \langle v_1 \rangle$ , representado por um único ponto  $v_1$ . Logo, temos uma única possibilidade de divisão simplicial, cuja rotulagem é  $L(v_1) = 1$ . Portanto, temos uma única célula completamente rotulada.
- (ii) Para  $k = 1$ : Temos o simplexo  $S_1 := \langle v_1, v_2 \rangle$ , representado por um segmento de reta com vértices em  $v_1$  e  $v_2$ . Podemos fazer uma divisão simplicial com uma família  $C_i$  de  $m$  células (segmentos) com  $i \in \{1, \dots, m\}$ , onde  $C_p$  e  $C_{p+1}$  são adjacentes, para todo  $p \in \{1, \dots, m-1\}$ . Temos então  $L(v_1) = 1$  e  $L(v_2) = 2$  como possíveis rótulos para qualquer rotulagem própria. Iniciando no sentido de  $v_1$  para  $v_2$ , observamos que há um número ímpar de maneiras de alternar os rótulos de cada segmento até o rótulo de  $v_2$ . Cada uma dessas alternâncias gera uma célula completamente rotulada. Logo esse valor é ímpar.
- (iii) Para  $k = 2$ : Tomando agora o simplexo  $S_2 := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  e uma rotulagem própria  $L$ . Chamaremos de  $D$  o número de células cujos rótulos são  $\{1,1,2\}$  ou  $\{1,2,2\}$ ; chamaremos de  $C$  as células completamente rotuladas. Nestas células, chamaremos de  $B$  o número de 1-faces com vértices de rótulos  $\{1,2\}$  contidas na borda de  $S_2$  e chamaremos de  $I$  as demais 1-faces com vértices de rótulos  $\{1,2\}$ . Pelo lema 4.1, as 1-faces de  $B$  estão contidas não apenas em  $\partial S_2$ , mas também em  $\langle v_1, v_2 \rangle$ . Além disso, podemos perceber que a cada um dos  $D$  elementos definidos, temos duas 1-faces de rótulo  $\{1,2\}$ , assim como a cada um dos  $C$  elementos, temos apenas uma 1-face de rótulo  $\{1,2\}$ . Desse modo, quando contamos as 1-faces de rótulo  $\{1,2\}$  que estão contidas em  $\partial S_2$ , o fazemos apenas uma vez; já para as demais, fazemos a contagem duas vezes, pois são 1-faces de duas células distintas. Assim, concluímos que  $2D + C = B + 2I$ .
- Pelo Lema 4.3, temos que as 1-faces dos subsimplexos contidos em  $\langle v_1, v_2 \rangle$  formam uma divisão simplicial  $F$  desse 1-simplexo. Restringindo  $L$  aos vértices dessa 1-face, temos claramente uma rotulagem própria para  $F$ . Como analisado anteriormente para o caso  $k = 1$ , o número de elementos de  $B$  é ímpar. Assim, na equação  $2D + C = B + 2I$  temos  $2D$  e

$2I$  números naturais pares e  $B$  ímpar, o que nos leva a conclusão de que  $C$  é ímpar.

- (iv) Vamos agora supor que a hipótese seja válida para todo  $q < k$  e tomemos  $S_k := \langle v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \rangle$  simplicialmente dividido, com uma rotulagem própria  $L$ . Usando a mesma estratégia de (iii), chamaremos de  $D$  o número de células de  $S_k$  cujos vértices têm rótulos  $\{1, 2, \dots, i-1, i, i, i+1, \dots, k\}$ , com  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Chamaremos de  $C$  o número de células completamente rotuladas de  $S_k$ . No conjunto das  $(k-1)$ -faces das células, tomemos aquelas cujos vértices possuem rótulos  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Nesse subconjunto, chamamos de  $B$  o número de  $(k-1)$ -faces contidas em  $\partial S_k$ . E chamemos de  $I$  a quantidade das demais  $(k-1)$ -faces desse subconjunto. Pelo Lema 4.1, as  $(k-1)$ -faces de  $B$  estão contidas em  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ . Além disso, podemos perceber que a cada um dos  $D$  elementos definidos, temos duas  $(k-1)$ -faces de rótulo  $\{1, 2, \dots, k\}$ , assim como a cada um dos  $C$  elementos, temos apenas uma  $(k-1)$ -face de rótulo  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Desse modo, quando contamos as  $(k-1)$ -faces de rótulo  $\{1, 2, \dots, k\}$  que estão contidas em  $\partial S_k$ , o fazemos apenas uma vez; já para as demais, fazemos a contagem duas vezes, pois são  $(k-1)$ -faces de duas células distintas. Assim, concluímos que  $2D + C = B + 2I$ .

Pelo Lema 4.3, temos que as  $(k-1)$ -faces dos subsimplexos contidos em  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  formam uma divisão simplicial  $F$  desse  $(k-1)$ -simplexo. Restringindo  $L$  aos vértices dessa  $(k-1)$ -face, temos claramente uma rotulagem própria para  $F$ . Pela hipótese de indução, temos que  $B$  é ímpar. Assim, na equação  $2D + C = B + 2I$  temos  $2D$  e  $2I$  números naturais pares e  $B$  ímpar, o que nos leva a conclusão de que  $C$  é ímpar. ■

#### 4.7O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Para finalizar este capítulo, apresentamos uma simples demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a qual se utiliza do Lema de Sperner.

**Definição 4.25** (Ponto fixo): Seja  $f: A \rightarrow A$  uma função. Dizemos que  $a \in A$  é um *ponto fixo* de  $f$  se  $f(a) = a$ .

**Exemplo 4.14:** O exemplo mais claro de função que admite ponto fixo é a função identidade  $f(x) = x$ . Nela, todos os valores reais de  $x$  são pontos fixos de  $f$ .

**Definição 4.26** (Campo vetorial): Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $V$  uma função. Dizemos que  $V: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um *campo vetorial* que associa cada ponto  $P \in D$  a um vetor  $V(P)$ .

**Teorema 4.4:** (Teorema do Valor Intermediário) Dada uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua, tal que  $f(a) < f(b)$ . Então, para qualquer  $c \in [f(a), f(b)]$ , existe um  $x_0$  tal que  $f(x_0) = c$ .

A demonstração do TVI não será feita nesse trabalho, podendo o leitor encontrar facilmente tal demonstração em livros de Análise, como a obra Curso de Análise vol. 1, Elon Lages Lima.

Para a demonstração do próximo teorema, consideremos o seguinte conjunto:

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$$

**Teorema 4.5:** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Seja  $f: D_n \rightarrow D_n$  uma função contínua. Então  $f$  admite um ponto fixo.

**Demonstração:** Iremos mostrar dois casos:

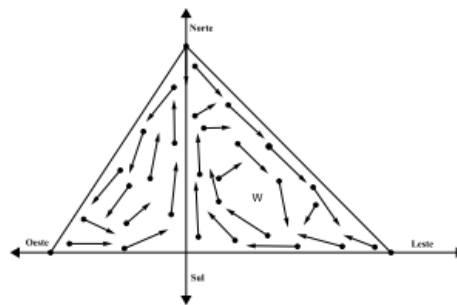
- (i) Para  $n = 1$ : Neste caso temos a função  $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ . Vamos definir uma função auxiliar  $g(x) = x - f(x)$ . Observemos que, calculando  $g(1) = 1 - f(1)$  concluímos que  $g(1) \geq 0$ . E calculando  $g(-1) = -1 - f(-1)$  concluímos que  $g(-1) \leq 0$ . Pelo Teorema 4.4, deve existir algum  $x_0$  tal que  $g(x_0) = 0$ , com  $g(-1) < 0 < g(1)$ . Por conveniência, tomamos  $c = 0$  e teremos  $0 = x_0 - f(x_0)$  e concluímos que  $f(x_0) = x_0$ . Portanto  $f$  tem um ponto fixo.
- (ii) Para  $n = 2$ : Consideremos  $W$  um triângulo qualquer, de modo que  $W \subseteq [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Devemos mostrar que  $W$  tem a propriedade do ponto fixo.



Definimos a função contínua  $f: W \rightarrow W$  e  $V$  o seu correspondente campo vetorial. Devemos encontrar em  $W$  um ponto  $P$  tal que  $V(P) = 0$ , pois sendo  $f(P) = P + V(P)$ , tem-se que  $P$  é ponto fixo de  $f$ . Podemos inicialmente perceber que, como  $f$  é uma aplicação de  $W$  em si mesmo, é de se esperar que todos os vetores de  $V$  estejam em  $W$ .

A figura abaixo ilustra o triângulo  $W$ :

**Figura 10 – Triângulo  $W$**



Fonte: SILVA, M.V. (2011, p. 24).

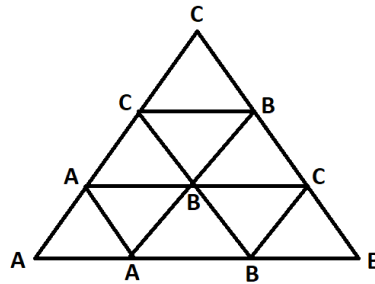
Faremos uma triangulação em  $W$  rotulando cada vértice de acordo com a direção do vetor naquele vértice:

- rótulo A para vetores apontando para nordeste;
- rótulo B para vetores apontando para noroeste;
- rótulo C para vetores apontando para sul;
- para vetores com direções ambíguas, como norte, leste ou oeste, colocaremos rótulo A nos dois primeiros casos e rótulo B no último.

Diante dessas regras, fazendo subdivisões nos lados de  $W$  podemos observar que:

- no lado  $\overline{AB}$  teremos sempre vetores apontando para as direções definidas com rótulos A e B;
- no lado  $\overline{BC}$  teremos sempre vetores apontando para as direções definidas com rótulos B e C;
- no lado  $\overline{CA}$  teremos sempre vetores apontando para as direções definidas com rótulos C e A.

**Figura 11 – Exemplo de rotulagem própria em  $W$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto temos em  $W$  uma rotulagem própria, na qual observamos, pelo Teorema 4.3, que existe ao menos uma célula completamente rotulada (ou seja, com rótulos ABC). Nesta célula temos a garantia de que os vetores de seus vértices apontam nas três direções anteriormente descritas. Portanto podemos repetir todo o processo.

Devemos observar também que, a cada repetição do processo de triangulação, os lados das células completamente rotuladas ficam cada vez menores, fazendo com que os triângulos tenham tamanho cada vez menores e tendendo a zero. Assim, podemos dizer que cada um dos vértices A, B e C das células completamente rotuladas formam sequências convergentes de vértices, que chamaremos, respectivamente, de  $A = \{A_n\}$ ,  $B = \{B_n\}$  e  $C = \{C_n\}$ . Os vértices da sequência  $A_n$  sempre apontam para a direção nordeste; os vértices da sequência  $B_n$  sempre apontam para a direção noroeste; e os vértices da sequência  $C_n$  sempre apontam para a direção sul. Pela compacidade de  $W$ , podemos afirmar que existe um ponto  $P \in W$  muito próximo de A. Mas como as células completamente rotuladas têm seus lados tendendo a zero, concluímos que  $P$  também está muito próximo de B e C. Consequentemente, o vetor  $V(P)$  está muito próximo à sequência de vetores  $V(A)$ , assim como está muito próximo das sequências  $V(B)$  e  $V(C)$ . Todos os vetores  $V(A)$  apontam para o nordeste, logo  $V(P)$  também aponta para o nordeste; todos os vetores  $V(B)$  apontam para o noroeste, logo  $V(P)$  também aponta para o noroeste; todos os vetores  $V(C)$  apontam para o sul, logo  $V(P)$  também aponta para o sul. Mas o único vetor que aponta simultaneamente para essas três direções é o vetor nulo. Logo,  $V(P) = 0$  e concluímos que  $f(P) = P$ , ou seja,  $f$  possui a propriedade do ponto fixo.

■

## 5 O TEOREMA DO EQUILÍBRIO DE NASH

Diante dos conceitos e fundamentos teóricos apresentados nos últimos dois capítulos, chegamos à demonstração do Teorema do Equilíbrio de Nash. Mas antes disso, se faz necessário abordar o conceito de Equilíbrio de Nash, bem como algumas propriedades da função *ganho esperado*.

### 5.1 O Equilíbrio de Nash

Apresentaremos nessa seção a definição de Equilíbrio de Nash para estratégias mistas.

**Definição 5.1** (Resposta ótima): Uma resposta ótima do jogador  $i$  à combinação de estratégias  $s_{-i}$  é uma estratégia mista  $t_i \in S_i$  tal que

$$U_i(t_i, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i})$$

qualquer que seja  $s_i \in S_i$ .

**Exemplo 5.1:** Retomando o jogo do Par ou Ímpar, descrito no Exemplo 3.10, vamos imaginar agora uma distribuição de probabilidade qualquer, como descrita na tabela abaixo:

**Tabela 5 – Par ou Ímpar – Resposta ótima**

		J2 (ímpar)	
		Par (q)	Ímpar (1 – q)
J1 (par)	Par (p)	(10; 0)	(0; 10)
	Ímpar (1 – p)	(0; 10)	(10; 0)

Fonte: Elaborada pelo autor

Calculando o ganho esperado para o jogador 1, teremos:

$$U_1 = 10pq + 0p(1 - q) + 0(1 - p)q + 10(1 - p)(1 - q)$$

$$U_1 = 10pq + 10(1 - q - p + pq)$$

$$U_1 = 10 - 10q - 10p + 20pq$$

$$U_1 = 10 - 10q - p(10 - 20q)$$

Daí podemos fazer a seguinte análise:

- Se  $10 - 20q > 0$ , então  $q < \frac{1}{2}$ , ou seja, J2 irá escolher mais Ímpar do que Par. Sabendo disso, o jogador irá zerar a probabilidade de escolher Par ( $p = 0$ ) para obter o maior ganho possível;
- Se  $10 - 20q < 0$ , então  $q > \frac{1}{2}$ , ou seja, J2 irá escolher mais Par do que Ímpar. Sabendo disso, o jogador irá maximizar a probabilidade de escolher Par ( $p = 1$ ) para obter o maior ganho possível;
- Se  $10 - 20q = 0$ , então  $q = \frac{1}{2}$ , ou seja, J2 irá escolher Par e Ímpar uma mesma quantidade de vezes, o que se torna a escolha mais vantajosa para J2.

Logo, o perfil de estratégia  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  é uma resposta ótima para J2.

**Definição 5.2** (Equilíbrio de Nash): Um perfil de estratégias mistas  $s := (s_1, \dots, s_n)$  é um equilíbrio de Nash se, para cada jogador  $i$ ,  $s_i$  é uma resposta ótima a  $s_{-i}$ .

**Exemplo 5.2:** Do Exemplo 5.1 vemos que o perfil de estratégia  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  é uma resposta ótima para J2. Se calcularmos o ganho esperado de J2, iremos analogamente encontrar um perfil de estratégia  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  para J1. Portanto, podemos dizer que  $[(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$  é um equilíbrio de Nash.

## 5.2 Propriedades da função $U_i$

Vimos no capítulo 3 que a função  $U_i$ , citada na definição 5.1, representa o ganho esperado em uma estratégia mista. Citaremos a seguir algumas propriedades desta aplicação, que serão úteis para a demonstração do Teorema do Equilíbrio de Nash.

**Lema 5.1:** Dado um jogo na forma normal  $(N, A, R)$ , a função  $U_i$  é contínua, qualquer que seja  $i \in N$ .

**Demonstração:** De fato, se definirmos  $k := \sum_{i=1}^n |A_i|$ , temos que  $U_i$  seria uma função de  $k$  variáveis definida em um subconjunto de intervalo  $[0,1]^k$ . Escolhendo um certo  $s \in S$ ,  $U_i(s)$  seria uma soma finita na qual cada parcela seria o produtório composto por um coeficiente seguido de  $n$  dentre as  $k$  variáveis. Ou seja,  $U_i(s)$  seria um polinômio de  $k$  variáveis. Desse modo,  $U_i$  é contínua. ■

**Lema 5.2:** Dado um jogo na forma normal  $(N, A, R)$ , se fixarmos  $i \in N$  e  $r_i \in S_i$ , a função  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(s) := U_i(r_i, s_{-i})$  é contínua.

**Demonstração:** Para a demonstração desse lema, argumentamos de modo análogo ao lema 5.1, chegando a uma função polinomial, que é contínua. ■

**Lema 5.3:** Se  $c$  é combinação convexa dos reais  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , então  $c \geq r_i$  para algum  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Demonstração:** Vamos supor, por absurdo, que  $c < r_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Como  $c$  é combinação convexa de  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , então temos

$$c = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i.$$

Vamos definir  $m := \min \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ . Então,

$$c = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i m > c,$$

que é uma contradição. ■

**Definição 5.3 (Suporte):** O suporte de uma estratégia mista  $s_i \in S_i$  é o conjunto

$$\{a_i \in A_i; s_i(a_i) > 0\}.$$

**Notação 5.1:** Seja  $a_i \in A_i$  uma ação disponível ao jogador  $i$  de um jogo em forma normal. Notamos por  $\bar{a}_i$  o elemento de  $\mathfrak{D}(A_i)$  que associa  $a_i$  a 1.

**Lema 5.4:** Seja  $s := (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  um perfil de estratégias mistas num jogo em forma normal  $(N, A, R)$ . Então, para cada jogador  $i$ , existe uma ação  $a_i \in A_i$  no suporte de  $s_i$  tal que  $U_i(\bar{a}_i, s_{-i}) \leq U_i(s)$ .

**Demonstração:** Faremos a demonstração para  $i = 1$  e seguimos de forma análoga para os demais casos. Seja o conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  o suporte de  $s_1$ . Então,

$$\begin{aligned} U_1(s) &:= \sum_{a \in A} u_1(a) s_1(a) \prod_{j=2}^n s_j(a_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_k}} u_1(a) s_1(x_k) \prod_{j=2}^n s_j(a_j) \\ &= \sum_{k=1}^m s_1(x_k) \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_k}} u_1(a) \prod_{j=2}^n s_j(a_j). \end{aligned}$$

Pelo resultado do lema 5.3, temos que

$$U_1(s) \geq \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_k}} u_1(a) \prod_{j=2}^n s_j(a_j) = U_1(\bar{x}_k, s_{-1})$$

para algum  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . ■

**Lema 5.5:** Seja  $t := (t_1, t_2, \dots, t_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  um perfil de estratégias mistas num jogo em forma normal  $(N, A, R)$ . Se para todo  $i \in N$  e para todo  $a_i \in A_i$  temos  $U_i(\bar{a}_i, t_{-i}) \leq U_i(t)$ , então  $t$  é um equilíbrio de Nash.

**Demonstração:** Usaremos a mesma estratégia de demonstração do lema anterior, fixando  $i = 1$  e seguindo de forma análoga para os demais casos. Vamos definir  $A_1 := \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  e vamos escolher qualquer  $s_1 \in S_1$ . Então,

$$U_1(s_1, t_{-1}) := \sum_{a \in A} u_1(a) s_1(a) \prod_{j=2}^n t_j(a_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_k}} u_1(a) s_1(x_k) \prod_{j=2}^n t_j(a_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m s_1(x_k) \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_k}} u_1(a) \prod_{j=2}^n t_j(a_j) \\
&= \sum_{k=1}^m s_1(x_k) U_i(\bar{x}_k, t_{-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^m s_1(x_k) U_1(t) = U_1(t).
\end{aligned}$$

Pela definição 5.1, temos que  $t_1$  é uma resposta ótima a  $t_{-1}$ . Seguindo o processo para os demais jogadores, temos que  $t$  representa um equilíbrio de Nash. ■

### 5.3 O legado de John Nash

Apresentaremos a seguir o objeto central deste trabalho. Como comentado anteriormente, o teorema a seguir rendeu a John Nash o prêmio Nobel de Ciências Econômicas, colocando-o na história da Matemática, e mais especificamente, da Teoria dos Jogos. O reconhecimento de sua contribuição fez com que sua história fosse contada através do filme *Uma Mente Brilhante*, de 2001, e vencedor de 4 Oscars.

**Teorema 5.1:** (Teorema do Equilíbrio de Nash) Todo jogo na forma normal  $(N, A, R)$  possui um equilíbrio de Nash.

**Demonstração:** Vamos definir, para quaisquer  $i \in N$  e  $a_i \in A_i$ , a função  $\varphi_{i,a_i}: S \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\varphi_{i,a_i}(s) := \max\{0, U_i(\bar{a}_i, s_{-i}) - U_i(s)\}.$$

De acordo com os lemas 5.1 e 5.2, a função  $\varphi_{i,a_i}$  é definida como o máximo de duas funções contínuas, logo ela também é contínua.

Vamos também definir a função  $\psi: S \rightarrow S$  como  $\psi(s) := s'$ , onde

$$s'_i(a_i) := \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s)},$$

com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Por ser contínua,  $\psi$  possui um ponto fixo, de acordo com o teorema 4.4. A ideia dessa demonstração é comprovar que  $t$  é um ponto fixo de  $\psi$  se, e somente se,  $t$  é um equilíbrio de Nash.

( $\Rightarrow$ ) Vamos considerar que  $t := (t_1, t_2, \dots, t_n)$  seja um equilíbrio de Nash. Então, dado  $i \in N$ ,  $t_i$  é uma resposta ótima a  $t_{-i}$ . Dessa forma, temos  $U_i(t_i, t_{-i}) \geq U_i(s_i, t_{-i})$  para qualquer  $s_i \in S_i$ . Logo, temos  $\varphi_{i,a_i}(t) = 0$ , para quaisquer  $i \in N$  e  $a_i \in A_i$ . Portanto,  $\psi(t) = t'$  é tal que  $t'_i(a_i) = t_i(a_i)$ , ou seja,  $\psi(t) = t$ , logo  $t$  é ponto fixo de  $\psi$ .

( $\Leftarrow$ ) Agora vamos supor que  $t$  seja ponto fixo de  $\psi$ . Ou seja,  $\psi(t) = t$ , com  $t := (t_1, t_2, \dots, t_n)$ . De acordo com o lema 5.4, para cada jogador  $i$ , existe uma ação  $c_i$  de tal modo que  $t(c_i) > 0$  e  $U_i(\bar{c}_i, t_{-i}) \leq U_i(t)$ . Portanto,  $\varphi_{i,c_i}(t) = 0$ . Como  $\psi(t) = t$  e pela definição da função  $\psi$ , temos:

$$t_i(c_i) = t'_i(c_i) := \frac{t_i(c_i) + \varphi_{i,c_i}(t)}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(t)}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Logo,  $\sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(t) = 0$ . Devemos perceber que todos os elementos do somatório são reais não negativos. Ou seja,  $\varphi_{i,b}(t) = 0$  para quaisquer  $i \in N$  e  $b \in A_i$ . Segue que, para todo  $i \in N$  e para todo  $b \in A_i$  temos  $U_i(\bar{b}, t_{-i}) \leq U_i(t)$ . Pelo lema 5.5,  $t$  é um equilíbrio de Nash.

■



## 6 A TEORIA DOS JOGOS NO ENSINO MÉDIO

Encerramos este trabalho apresentando propostas de aplicações de Teoria dos Jogos em turmas do Ensino Médio.

A motivação para a realização dessas atividades encontra justificativa nos novos modelos de proposta pedagógica da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Fica claro nesse documento que a educação financeira e o conhecimento amplo sobre Macroeconomia vêm ganhando cada vez mais espaço nas salas de aula. Na Competência específica 1 da área Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio, a BNCC pretende

“(…) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (...)”

Dessa forma, tendo em vista a relevância na área de Economia, faz-se importante apresentar a alunos do Ensino Médio algumas noções de Teoria dos Jogos e levar à prática de situações que não exigem tanto aprofundamento nessa área.

### 6.1 Proposta de atividade 1

A seguinte proposta pedagógica introduz de maneira lúdica os conceitos de jogo, jogador e estratégia, deixando em segundo plano o aspecto teórico (que pode também ser trabalhado, a critério do professor). Um pré-requisito importante para a eficácia da atividade seria o conhecimento em Probabilidade, por isso aconselha-se que essa prática seja realizada em turmas do 2º ano.

**Atividade 1:** Primeiramente o professor deve convidar dois alunos para uma rápida disputa do jogo Par ou Ímpar. Diante de toda a turma os alunos decidem quem escolhe Par e quem escolhe Ímpar.

Em seguida, o professor deve orientar o Aluno 1 a estender a mão indicando a numeração escolhida por ele para tentar vencer o jogo. Sabendo previamente da escolha do Aluno 1, é de se esperar que o Aluno 2 estenda a mão com a numeração que lhe é favorável para vencer o jogo. Nesse momento,

provavelmente os alunos envolvidos no jogo e os demais que estavam assistindo a disputa “injusta” farão intervenções sobre o modo usual de se jogar Par ou Ímpar. Diante dessa situação, o professor pode apresentar o conceito de jogo e citar a disputa de Par ou Ímpar como um jogo simultâneo e que não faz sentido jogá-lo em formato sequencial, como foi realizado.

Após esse momento, o professor pode lançar a seguinte pergunta: “*Numa disputa de Par ou Ímpar, qual a probabilidade que cada jogador tem para vencer o jogo?*” Certamente alguns alunos responderão “50%”. Em seguida, o professor pode propor que algum aluno apresente o cálculo para determinar as chances de vitória de um jogador, usando Probabilidade. A tabela a seguir mostra uma possível maneira de exibir todas as possibilidades de resultados e os resultados favoráveis a um suposto Jogador 1 que escolhe Par para vencer.

**Tabela 6 – Condições de vitória do Jogador 1**

<b>Escolha de J1</b>	<b>Escolha de J2</b>	<b>Resultado</b>	<b>Vitória</b>
Par	Par	Par	<b>J1</b>
Par	Ímpar	Ímpar	J2
Ímpar	Par	Ímpar	J2
Ímpar	Ímpar	Par	<b>J1</b>

Fonte: Elaborada pelo autor

Daí temos que a probabilidade de vitória do Jogador 1 é igual a  $\frac{2}{4} = 0,5 = 50\%$ .

O professor pode apresentar o jogo Par ou Ímpar com os ganhos de cada jogador numa matriz de payoffs, como descrito na Tabela 1, e fazer a seguinte pergunta: “*Existe alguma estratégia que faça com que um jogador sempre vença?*” Analisando os dados da matriz, a turma deve chegar à conclusão de que nenhum dos perfis de estratégia se sobrepõe aos demais, ou seja, não existe um equilíbrio puro. Nesse momento, o professor pode fazer uma breve explanação sobre o tal conceito.

Depois disso, deve-se propor que o jogo seja repetido uma quantidade finita de vezes, com uma distribuição de probabilidade para cada estratégia adotada pelo jogador, como descrito na Tabela 5. Então o professor repete a pergunta: “*Existe alguma estratégia que faça com que um jogador sempre vença?*”. Deve-se

refletir junto com os alunos sobre a percepção de um jogador quanto às escolhas do outro. E que essas decisões seriam percebidas pelo jogador em desvantagem, que logo mudaria sua estratégia para vencer. Assim, o professor pode apresentar brevemente alguns conceitos sobre Teoria dos Jogos, como o de ganho esperado e equilíbrio de Nash, e que estes são utilizados quando se tem uma distribuição de probabilidade para cada estratégia adotada. Os cálculos realizados nos exemplos 5.1 e 5.2, que determinam o melhor perfil de estratégias mistas a ser adotado, devem ser desenvolvidos juntamente com os alunos.

Após determinar a melhor estratégia dos jogadores, o professor pode falar sobre a importância da Teoria dos Jogos em várias áreas do conhecimento, destacando a Economia e sua utilização nas dinâmicas de mercado, na relação entre empresas que competem entre si por um determinado produto, etc.

## 6.2 Proposta de atividade 2

Essa atividade pode ser feita na mesma aula da Atividade 1, ou numa aula posterior, de acordo com o grau de interação das turmas. Nessa proposta, o professor deve trabalhar um jogo que analisa a política de abertura de mercado de dois países (Japão e EUA, por exemplo).

**Atividade 2:** Imagine que as políticas de comércio dos EUA e do Japão estão num dilema: os dois países consideram a possibilidade de empregar medidas econômicas que devem abrir ou fechar seus respectivos mercados à importação. Dadas as particularidades e graus de competitividade desses países no mercado, sugere-se a seguinte matriz de payoffs:

**Tabela 7 – Política de comércio – EUA e Japão**

		Japão	
		Abre	Fecha
EUA	Abre	(10; 10)	(5; 5)
	Fecha	(-100; 5)	(1; 1)

Fonte: Elaborada pelo autor

Após apresentar o problema aos alunos, o professor pode fazer o seguinte questionamento: “*Existe uma estratégia que sempre seja favorável a um dos jogadores?*”. Diante das respostas dos alunos, o professor deve intervir enfatizando que esse problema não apresenta um resultado que seja absolutamente bom para um ou outro jogador, mas que existe uma situação de equilíbrio, vantajosa para os dois jogadores.

Para facilitar a compreensão da resolução do problema, o professor pode fazer uma comparação desta atividade com o Dilema do Prisioneiro, apresentado no exemplo 3.11. Depois disso, a resolução pode ser apresentada:

- Supondo que o Japão sabe que os EUA vão optar por abrir o mercado, para ele é mais vantajoso também abrir o mercado;
- Agora, se os EUA sabem que o Japão vai abrir o mercado, para os norte-americanos é mais vantajoso também abrir o mercado.

Portanto, o perfil de estratégia (Abre, Abre) representa um equilíbrio puro.

O professor pode encerrar a atividade ressaltando a relevância que a Teoria dos Números tem em questões econômicas e até mesmo propor mais exercícios que possibilitem um conhecimento mais amplo nessa área.

## 7 CONCLUSÃO

A Teoria dos Jogos tem um vasto leque de aplicações em diversas áreas. E sua utilidade se dá principalmente pelas contribuições dos matemáticos que apresentamos neste trabalho, especialmente John Nash.

Os resultados de John Nash refutaram ideias de grandes estudiosos, como o economista Adam Smith. Em suas pesquisas, Nash evidenciou que a cooperação dos jogadores era a melhor forma de obter o ganho máximo para todos, trazendo um novo conceito econômico, chamado *equilíbrio*. Suas ideias ultrapassaram o campo da Economia e ganharam versões nas Ciências Sociais, no Direito, etc.

## REFERÊNCIAS

- AMORIM, R. G. de. **Introdução à análise convexa: conjuntos e funções convexas**. 2013. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. *In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.; SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA*, 10., 2013. Campinas, **Anais...** Campinas: [s.n.], 2013.
- CÂMARA, S. F. **Teoria dos Jogos**. 2011. 92f. Trabalho de Conclusão de curso (Graduação em Administração) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- FIANI, R. **Teoria dos Jogos: com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- FONSECA, J.C.S. **O Lema de Sperner como ferramenta para realizar divisões**. 2017. 38f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.
- FORMA combinatória do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. **Hipertexto Pitágoras**. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/hp/hp512/hp512001/hp512001.html> . Acesso em: 18 jun. 2023.
- FRANCEZ, D. J. **Uma introdução à Teoria dos Jogos**. 2017. 92f. (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.
- JOGO. *In: Houaiss*. UOL, 2023. Disponível em: [https://houaiss.uol.com.br/corporativo/apps/uol\\_www/v6-1/html/index.php#2](https://houaiss.uol.com.br/corporativo/apps/uol_www/v6-1/html/index.php#2) . Acesso em 12 jan. 2023.
- JOHN Nash: a história do matemático ganhador do Nobel de Economia. **Suno**, Disponível em: <https://www.suno.com.br/tudo-sobre/john-nash/> . Acesso em 10 jan. 2023.
- LIMA, E.L.; **Análise Real vol.1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- LIMA, E.L. **Curso de Análise vol.1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LIMA, E.L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: IMPA, 1970.
- LUZ, S.M. **Conjuntos Compactos**. 2000. 48f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

MOREIRA, T.A. **Uma introdução à Teoria dos Jogos**. 2017. 45f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal De São Carlos, Sorocaba, 2017.

NASCIMENTO, T. O. **Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio: Introdução ao Equilíbrio de Nash**. 2014. 67f. Dissertação (mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. [S.l.]: Princeton University Press, 1953.

RAMTHUN, C.S. **Topologia dos Espaços Métricos**. 2019. 114f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2019.

SARTINI, B. A. et al. Uma introdução à Teoria dos Jogos. *In*: BIENAL DA SBM, 2., 2004. Salvador. **Anais...** Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2004.

SBARAI, Nathalia. **Teoria dos Jogos Parte 1**. YouTube, 11 abr. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ZY3GvK1sQ2w>. Acesso em: 31 ago. 2023.

SILVA, A. F.; FENILLE, M. C. Equilíbrios de Nash-Cournot em duopólios com prática de sobrepreço. **A Economia em Revista**, v. 26, 2018.

SILVA, M.V. **Os Teoremas de Índice de Poincaré**. 2011. 59 f. Dissertação (mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.