UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL

WELLINGTON SAMPAIO VIEIRA JUNIOR

PROPORÇÃO ÁUREA, NÚMERO DE OURO (PHI) E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA, APLICAÇÕES E ATIVIDADES DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA – CEARÁ
2023

WELLINGTON SAMPAIO VIEIRA JUNIOR

PROPORÇÃO ÁUREA, NÚMERO DE OURO (PHI) E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA, APLICAÇÕES E ATIVIDADES DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nícolas Alcântara de Andrade

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Vieira Junior, Wellington Sampaio.
Proporção áurea, número de ouro (phi) e sequência de fibonacci: contextualização histórica, aplicações e atividades didáticas no ensino médio [recurso eletrônico] / Wellington Sampaio Vieira Junior. - 2023.
102 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade.
1. atividades didáticas. 2. número de ouro. 3. razão áurea. 4. reflexão histórica. 5. sequência de fibonacci.. I. Título.

WELLINGTON SAMPAIO VIEIRA JUNIOR

PROPORÇÃO ÁUREA, NÚMERO DE OURO (PHI) E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA, APLICAÇÕES E ATIVIDADES DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 25 de setembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Nícolas Alcântara de Andrade

Prof. Dr. Nícolas Alcântara de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

José Danuso Rocha de Oliveira

Prof. Dr. José Danuso Rocha de Oliveira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Rosa Tayane de Vasconcelos

Profa. Dra. Rosa Tayane de Vasconcelos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Dedicado aos que tornaram essa jornada possível e contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado no âmbito das ações de formação continuada do Programa Cientista-chefe em Educação Básica (FUNCAP/UFC/SEDUC) que tem à frente o pesquisador responsável Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Ao Prof. Dr. Nícolas Alcântara de Andrade, pela relevante orientação, dedicação, paciência e ensinamentos passados enquanto docente e orientador.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. José Danuso Rocha de Oliveira e Profa. Dra. Rosa Tayane de Vasconcelos, pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões destinadas a melhoria deste trabalho.

Aos colegas de turma: Rafael de Abreu, Artur Teixeira, Danilo Magalhães, Felipe Guimarães, Mardney de Castro, Rafael Mendonça, Sérgio Monteiro e Tiago Nobre pelo convívio baseado na troca de conhecimento, motivação e companheirismo.

Aos meus pais, Márcia Freire Vieira e Wellington Sampaio Vieira, ao meu irmão, Willianderson Freire Vieira, e demais amigos e familiares que forneceram apoio durante todo o percurso acadêmico.

À minha namorada, Bárbara Sarah Lourenço Rodrigues, pelo companheirismo e apoio durante todo o curso.

Aos professores Leo Ivo da Silva Souza, Nícolas Alcântara de Andrade e Tiago Caúla Ribeiro pelos significativos conhecimentos repassados em suas aulas.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisa em Matemática do Ceará – GEPEMAC, representado pelos professores Allan Júnior, Annelise Maymone, Fábio Sampaio, Odécio Sales e Wesley Liberato, pelo incentivo, motivação e importante contribuição pedagógica.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

(Galileu Galilei)

RESUMO

A temática contemplada ao longo dessa dissertação é delimitada de modo a contemplar a: “proporção áurea, número de ouro (PHI) e sequência de Fibonacci: contextualização histórica, aplicações e atividades didáticas no ensino médio”. Tendo seu tema apresentado, especifica-se que o texto inicialmente apresenta uma contextualização histórica sobre o objeto de estudo, pontuando os fatores que corroboram um melhor entendimento a seu respeito. Feito isso, parte-se para o próximo capítulo que procura abarcar teoricamente assuntos que vão desde a média e extrema razão, contemplando a proporção ou a razão áurea e número de ouro, até espiral logarítmica. Em seguida, parte-se para uma análise específica da temática em discussão, avaliando do ponto de vista teórico a espiral áurea e apresentando sob um olhar científico a sequência de Fibonacci. Com essa abordagem, segue-se para o produto educacional e as atividades didáticas voltadas aos alunos do ensino médio, destacando os escopos de cada uma e sua viabilidade na promoção do aprendizado. Com a exposição do produto educacional, segue mostrado no decorrer do último capítulo a importância do tema proposto e apresentado ao longo dessa dissertação, enfatizando a compreensão de que o ensino de matemática tem como meta a reflexão de algo que é aplicado e que se encontra presente na rotina dos alunos. Avaliar os seus impactos históricos dentro do ensino de matemática como um todo, observando as muitas formas de aplicação de temáticas como o número de ouro PHI, a sequência de Fibonacci e a proporção áurea, é uma forma de deixar claro que o ensino desses temas pode estar relacionado de modo interdisciplinar em diferentes segmentos, e que a sua compreensão não pode ser vista como algo mecanizado e com um conceito vazio. Após a amostragem das atividades didáticas, parte-se para as considerações finais e encerra-se o presente trabalho.

Palavras-chave: atividades didáticas; número de ouro; razão áurea; reflexão histórica; sequência de fibonacci.

ABSTRACT

This theme was contemplated throughout this dissertation is delimited to contemplate: “golden proportion, golden number (PHI) and Fibonacci sequence: historical context, applications and didactic activities in high school.” Its theme, it is specified that the text initially presents a historical context about the object of study, punctuating the factors that corroborate a better understanding of it. Having done this, we move on to the next chapter, which seeks to theoretically cover subjects ranging from the average and extreme ratio, contemplating the proportion or the golden ratio and golden number, to the logarithmic spiral. After that, we move on to a specific analysis of the topic under discussion, evaluating the golden spiral from a theoretical point of view and presenting the Fibonacci sequence from a scientific point of view. With this approach, we move on to the educational product and didactic activities aimed at high school students, highlighting the scope of each one and its viability in promoting learning. With the exposition of the educational product, the importance of the theme proposed and presented throughout this dissertation is shown throughout the last chapter, emphasizing the understanding that the teaching of mathematics has as its goal the reflection of something that is applied and that is present in the routine of students. Evaluating its historical impacts within the teaching of mathematics as a whole, observing the many forms of application of themes such as the PHI gold number, the Fibonacci sequence and the golden ratio, is one way to make it clear that the teaching of these themes can be related in an interdisciplinary way in different segments, and that its understanding cannot be seen as something mechanized and with an empty concept. After sampling the didactic activities, the final considerations are made and the present work is closed.

Keywords: didactic activities; golden number; golden ratio; historical reflection; fibonacci sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O homem está em constante evolução e transformação, isso vem ocorrendo pelo seu poder de observar tudo aquilo que está ao seu redor.

Diante disso, inicia-se a sua procura em encontrar respostas e justificativas, a fim de compreender o meio em que se vive. Nesse sentido, pode-se observar, a partir das suas curiosidades, algo que está relacionado com a harmonia e a beleza apresentada pela natureza, por exemplo.

A partir dessa busca incessante, o homem começou a relacionar os números e as combinações, na intenção de explicar a perfeição que existe entre essa beleza presente na natureza, no corpo humano e na arte.

A partir desse contexto, chegou-se ao número de ouro, caracterizado pela letra grega Φ, Phi (lê-se Fi) e que também pode ser conhecido como número áureo, razão áurea e proporção áurea. Trata-se de um número irracional, representado pelo número 1,6180339887... (BELUSSI, et al., 2013).

Diante disso, a presente pesquisa tem como questão norteadora: Compreender como utilizar a proporção áurea, número de ouro (Phi) e a sequência de Fibonacci na aplicação de atividades didáticas para alunos do Ensino Médio e abordar seu conteúdo de forma a despertar o interesse do discente.

Para responder a esta indagação, definiu-se o objetivo geral desta pesquisa, que está centrado em apresentar como o número de ouro surgiu ao longo da história da matemática, por este motivo, inicia-se uma ampla contextualização histórica sobre esta temática, abordando personagens que contribuíram direta e indiretamente com fatos relevantes em diversos períodos da história.

A partir disso, os objetivos específicos estão centrados em reconhecer e apresentar como a proporção áurea e o número de ouro (Phi) podem ser utilizados para tornarem-se aplicáveis em atividades didáticas para alunos do Ensino Médio. Além disso, também buscou-se identificar a sequência e a relação de Fibonacci com a proporção áurea, resultando, por fim, em um produto educacional, com a finalidade de apresentar esta aplicabilidade nas atividades docentes.

Com isso, a metodologia utilizada para alcançar estes objetivos deu-se a partir das técnicas da pesquisa bibliográfica, onde utiliza-se de materiais já publicados em livros, revistas e teses com a finalidade de fundamentar esta pesquisa e relacionar com a questão norteadora.

Por este motivo, a pesquisa encontra-se dividida em sete seções que estão organizadas da seguinte maneira: Introdução, abordando de breve geral o que será apresentado nesta pesquisa; Contextualização histórica, da qual contemplará um estudo sobre os principais personagens e fatos históricos que possuem relação com a descoberta do número de ouro, onde o ponto crucial foi a Biblioteca de Alexandria, local de várias personalidades matemáticas, entre elas Euclides de Alexandria, peça chave do nosso trabalho e para isso retroagimos até Ciro, “O Grande” que dividiu época com Pitágoras, ponto de partida de todo o estudo.

Na terceira seção deste estudo, aborda-se o número de ouro, até então conhecido como média e extrema razão e estuda-se mais profundamente sobre seus conceitos. A quarta seção, apresenta-se a sequência de Fibonacci, cuja abordagem evidencia-se a relação desta sequência com a Proporção Áurea ou número de ouro.

Já na quinta seção, apresenta-se as ocorrências e aplicações dentro desses dois contextos discutidos. Seguido disso, na sexta seção apresentam-se as possíveis atividades didáticas para abordar estas temáticas em sala de aula para alunos do Ensino Médio e um caderno de atividades que pode servir como banco de questões para professores, e, por fim, apresenta-se algumas considerações finais, a partir do que foi elaborado.

Contudo, espera-se que esta pesquisa possa instruir acerca da abordagem de conteúdos matemáticos que estejam associados com o cotidiano dos alunos, a partir de suas próprias experiências, fortalezando assim o seu pensamento crítico a partir de elementos que são apresentados pelos professores, com a intenção de fazê-los pensar e investigar.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Inicia-se esta seção com a seguinte frase, elaborada por Pellegrini (2005, p. 01), onde afirma que:

> O universo pode ser caótico e imprevisível, mas ele é também um mundo físico altamente organizado e assentado com precisão nas leis da matemática. Um dos modos mais fundamentais através dos quais essas leis se manifestam é o da "proporção áurea", regida por um valor matemático conhecido desde a remota antiguidade como "número de ouro". Na natureza, a proporção aparece em toda a parte e cria formas de extraordinária beleza.

A partir desta afirmação, compreende-se que, para se estudar a respeito da existência do número de ouro, dentro da matemática, é necessário que haja uma investigação mais detalhada sobre a sua origem. Para isso, houve a necessidade de realizar uma contextualização histórica sobre quando esse termo começou a ser utilizado na matemática.

2.1 Ciro "o grande" (558-528 a.C.)

O governante persa Ciro "o grande" (558-528 a.C.) fundou o Império Persa, o qual foi destinado a se tornar a principal potência da época até ser conquistado, em 331 a.C., pelo monarca macedônio Alexandre Magno. Ciro era filho de Cambises, príncipe de Anshan pertencente à casa das Aquemênidas, e da princesa Meda Mandane, filha do rei dos medos Astiages, de quem Cambises era um vassalo fiel. No ano 559 a.C., Ciro sucedeu a seu pai em Pasárgada; em 550 a.C. liderou uma rebelião dos persas contra os medos, na qual triunfou graças à falta de fidelidade das tropas que seguiam o rei medo (SANT ANNA; PEIXOTO, 2016).

Esta vitória não significou a aniquilação dos medos, como o próprio Ciro assumiu a responsabilidade de demonstrar quando perdoou Astiages, a ascensão ao poder dos aquemênidas serviria para fortalecer a união de ambos os povos. Esta política de integração da Pérsia e da Média tornou-se um dos principais referentes do reinado de Ciro, "o grande" (550 a.C. - 530 a.C.), junto a sua tolerância religiosa (BECKER, 2019).

Assim que sua posição no planalto de Elam foi assegurada, Ciro, "o grande", partiu para continuar sua expansão territorial, marchando sobre o reino dos lídios na Anatólia, a quem derrotou em Pteria. Após perseguir o rei dos lídios, Creso, até a Anatólia Ocidental, derrotou no “Acampamento de Ciro” e o capturou quando conquistou Sardes, a capital da Lídia (SANTOS, 2021).

Logo que a Anatólia foi assegurada, Ciro voltou seus olhos para a Babilônia, governada pelo rei Nabonido. Aproveitando habilmente a situação de fragilidade dos neobabilônios e a crise religiosa que opunha o rei ao influente culto do deus Marduk, divindade da cidade, conseguiu realizar uma rápida campanha que terminou com a submissão da outrora poderosa cidade da Mesopotâmia (539 a.C.) (KRIWACZEK, 2018).

Entre as disposições de Ciro, é preciso destacar a libertação dos judeus e a ordem de reconstrução do templo de Jerusalém. O grande prestígio que essas conquistas lhe renderam fez com que a maioria dos reis da Síria, junto às cidades fenícias, lhe prestassem vassalagem, com a qual os persas obtinham os serviços de suas frotas. Em 530 a.C. Ciro empreendeu uma campanha contra os Masságetas no norte de seu reino, durante a qual encontrou a morte. Com seus sucessores Cambises II (530-522 a.C.), Dario I, o Grande (522-486 a.C.) e Xerxes I (486-465 a.C.), o Império Persa atingiu sua extensão máxima, embora nunca pudesse prevalecer em força das cidades-estados gregas, que derrotaram os persas nas Guerras Médicas (490-478 a.C.) (JUNIOR, 2015).

2.2 Dario I (550-478 a.C.)

Dario I foi rei da Pérsia (550-485 a.C.), era filho de Histaspe, de um ramo secundário da família real aquemênida. Pertencia à guarda real do imperador Cambises II quando morreu em 522 a.C.; com outros nobres, confrontou o usurpador Gaumata, que, se passando por irmão do imperador, Bardiya ou Smerdis (morto, na verdade), se proclamou rei (KIFFER, 2010).

Dario I tomou o poder por meio de um golpe em 521 a.C., embora tenha espalhado a lenda de que havia sido eleito rei por hipomancia ou adivinhação por cavalos; com a morte de Gaumata e o esmagamento de seus partidários, Dario subjugou a casta sacerdotal persa (KIFFER, 2010).

Até 518 a.C. Dario I dedicou-se a consolidar seu poder, eliminando nove concorrentes, além de subjugar as rebeliões na Babilônia, Susa e Egito. Logo retomou a dinâmica de expansão de seus predecessores: enviou expedições ao

Punjab e às costas do Golfo Pérsico (cerca de 512 a.C.). Sua guerra contra os citas permitiu-lhe anexar a Trácia e subjugar o rei da Macedônia; mas falhou em levar suas conquistas além do Dniester (MONTEIRO, 2012).

Estimuladas pelo relativo fracasso de Dario I contra os citas, as cidades gregas da Jônia se revoltaram contra a dominação persa e pediram ajuda a Atenas (499 a.C.). A revolta foi duramente reprimida, mas Dario I acreditou ser necessário prevenir novos surtos, levando a guerra ao coração da Grécia; a primeira tentativa falhou, devido ao naufrágio da frota persa durante uma tempestade (492 a.C.). A segunda tentativa parecia ter mais garantias de sucesso, já que o ouro persa garantia a neutralidade da maioria das cidades, deixando Atenas e Esparta isoladas; no entanto, os atenienses conseguiram derrotar o exército persa na batalha de Maratona (490 a.C.) (KIFFER, 2010).

Quando Dario morreu quatro anos depois, os ecos daquela derrota no extremo ocidental do Império encorajaram novas insurreições no Egito e na Babilônia, que seu filho e sucessor, Xerxes I, levaria tempo para suprimir. No entanto, junto a essas dificuldades militares, Dario legou um Império solidamente organizado do ponto de vista político e militar, em torno da figura do sátrapa, governador provincial com amplos poderes políticos e militares, supervisionado por um secretário régio; a monarquia absolutista que implantou foi acompanhada de um primoroso respeito pelos cultos religiosos dos povos conquistados (ALBUQUERQUE, 2022).

2.3 Xerxes I (518 a.C – 465 a.C)

O rei Xerxes I, também chamado de Assuero, nome pelo qual é designado na Bíblia; (519 a.C. - 465 a.C.), rei aquemênida da Pérsia cuja derrota na segunda guerra médica marcou o início do declínio do império persa e da supremacia de Atenas. Com a morte de seu pai, Dario I, ocorrida em 486 a.C., empreendeu a pacificação do Egito e conseguiu reprimir energicamente as revoltas na Babilônia. Instigado por seu primo Mardônio, tentou vingar a afronta que os gregos haviam causado a seu pai na batalha de Maratona (primeira guerra médica). Após derrotar o exército grego de Leônidas, que tentou defender o desfiladeiro das Termópilas, Xerxes I iniciou o saque da Ática à frente de seus homens e arrasou os santuários da Acrópole ateniense. Mas a frota grega se reagrupou no estreito entre a

Ática e a ilha de Salamina e derrotou os persas (480 a.C.). Xerxes I deixou Mardônio no comando do exército da Grécia e dedicou os últimos anos de seu reinado à construção de suntuosos edifícios em Persépolis (JUVARI, 2020).

Na época em que Xerxes I ascendeu ao trono, o fracasso da campanha contra a Grécia e a rebelião do Egito colocaram o império persa em crise. Para concretizar os grandes projetos de seu pai, Dario I, era necessário, a qualquer preço, recuperar o Egito e reduzir a Grécia. Xerxes I voltou sua atenção para o Egito: no segundo ano de seu reinado, ele esmagou os rebeldes. Uma guarnição de vinte mil homens foi colocada em Memphis, que teve de arcar com o custo de sua manutenção (MONTEIRO, 2012).

Mas a reincorporação do Egito era contrária aos interesses da Babilônia, que poderia esperar, sem o Egito como parte do império, uma retomada da atividade nas rotas comerciais continentais. Consequentemente, a Babilônia se ergueu por sua vez (483 a.C.), mas, desarranjada após sua revolução contra Dario, achou impossível resistir ao exército persa. A rebelião da Babilônia, o maior centro do império continental da Pérsia, ameaçava a própria existência do império, fundado no imenso poder de homens e dinheiro que os reis aquemênidas extraíam dos vastos territórios da Ásia (MARRIOTT, 2015).

Portanto, uma vez derrotada, a Babilônia foi tratada com muito mais severidade do que o Egito após sua insurreição. A prestigiosa metrópole foi barbaramente saqueada; o deus Marduk e grande parte da população foram deportados, e a Babilônia, que por tantos séculos foi o centro regulador do comércio internacional, nunca mais se recuperou (FERREIRA, 2011).

Uma vez que a rebelião babilônica foi reprimida, Xerxes I preparou uma nova expedição contra a Grécia que seria a suprema tentativa persa de criar um império universal. Xerxes I percebeu plenamente que a submissão da Grécia era uma condição da qual ele não poderia prescindir e organizou o maior exército já reunido. Depois de Cambises, as forças persas perderam seu caráter nacional e constituíram um exército imperial, formado por contingentes de todos os cantos do império, cada um comandado por seus líderes nacionais. Apenas os principais generais eram persas, diferentemente do exército grego, formado exclusivamente por cidadãos que seguiam princípios táticos únicos, Xerxes I alinhou uma multidão de contingentes e mercenários de várias nacionalidades, cada um armado de acordo com seus costumes locais (FERREIRA, 2011).

O exército persa era aparentemente composto de 360.000 homens, incluindo 24.000 persas e medos; A frota de apoio, que tinha a missão de abastecer o exército, contava com 300 navios fenícios tripulados por fenícios e sírios, 200 navios egípcios, 150 navios com cipriotas e outros 527 aportados por diferentes nações da Ásia Menor. Diante desse colossal exército, Esparta, Atenas e a Liga Panhelênica, que agrupava 31 cidades, colocaram em campo um exército de 75.000 homens e uma frota de 378 navios, dos quais Atenas havia fornecido 180 (MARRIOTT, 2015).

Apesar da defesa heroica de Leônidas I de Esparta, Xerxes I liberou a passagem das Termópilas; então caiu sobre a Ática e tomou Atenas. Xerxes I já se acreditava vitorioso; mas a frota grega decidiu o destino do império persa na batalha naval de Salamina. Leônidas I foi derrotado e na maioria destruído pela frota de Xerxes I, seu enorme exército, privado de seus meios de abastecimento e com as comunicações cortadas, não teve escolha a não ser recuar apressadamente para a Trácia (480 a.C.). Leônidas I ainda tentaria arrebatar a vitória na terra; mas, sem o comando do mar, ele sofreu uma nova derrota em Plataea (479 a.C.), e naquele mesmo ano o esquadrão ateniense terminou de destruir o poder marítimo persa (KIFFER, 2010).

As consequências da derrota de Xerxes I foram decisivas. Derrotado no mar, o rei da Pérsia não conseguiu manter a Jônia em seu poder, que uma vez libertada voltou a ocupar seu lugar de direito no mundo helênico. Atenas alcançou a supremacia marítima em poucos anos; A Liga Delian, fundada em 476 a.C., fez de Atenas uma grande potência. A vitória de Salamina terminou definitivamente com o grande projeto de império universal concebido por Dário I. Reduzida a um vasto estado territorial, a Pérsia ia encerrar-se numa política continental que provocaria uma atitude cada vez mais despótica no grande rei (KIFFER, 2010).

Tal evolução continental não foi resultado de uma decisão deliberada; após a perda da Jônia, Xerxes I não renunciou aos planos de expansão marítima de Dário I. Promoveu a tentativa de uma nova viagem à África que confiou a Sataspes, membro da família aquemênida, que, partindo do Egito, deveria chegar ao Golfo Pérsico. No entanto, a viagem falhou, Xerxes I pereceu com o filho numa conspiração palaciana e a regência foi exercida por Artaban, chefe da guarda e um dos assassinos do rei. A reação da nobreza persa provocou um movimento de desmembramento do império. Um dos filhos sobreviventes do monarca, Artaxerxes I

(464-424 a.C.), assumiu o trono, mas seu irmão Histaspes, fingindo ser um pretendente à coroa, provocou uma revolta na Báctria. A crise de poder veio assim juntar-se à crise econômica e social que o império enfrentava devido ao isolamento continental e à sua deriva para a feudalização e o despotismo (ARAUJO, 2023).

2.4 Phídias (480 a.C – 430 a.C)

Phídias foi escultor grego (490 a.C. - 431 a.C.), foi o artista mais famoso do mundo clássico e o mestre que levou a escultura aos mais altos níveis de perfeição e harmonia. A biografia de Phídias é amplamente desconhecida, quase nada se sabe sobre sua formação, embora se acredite que ele tenha experiência como escultor, pintor e escultor de relevo. Phídias viveu na época de Péricles, um estadista empenhado em fazer da Acrópole de Atenas um sinal majestoso da grandeza da cidade. Péricles tornou-se o principal protetor de Phídias, que basicamente trabalhava para Atenas (SILVA; ALMEIDA, 2020).

Phídias se destacou tanto em esculturas independentes quanto em relevos. A primeira obra conhecida dele é Athena Lemnia, uma estátua da deusa destinada à Acrópole de Atenas, da qual duas cópias parciais são preservadas: um busto no Museu Arqueológico de Bolonha e uma figura quase completa no Albertinum, de Dresden (CASSELA; ANDRÉ; CABRERA, 2021).

Em 438 a.C. a Atena Parthenos, a obra que lhe trouxe fama para Phídias, foi consagrada. A padroeira de Atenas é retratada nesta estátua de nove metros de altura como uma deusa guerreira, completa com escudo e capacete, pronta para defender a cidade. O trabalho perdido é conhecido por cópias muito menores. Além de Atena para o Partenon, Phídias fez outra estátua criselefantina, desta vez para o santuário de Olímpia: a efígie de Zeus, incluída pelos antigos entre as sete maravilhas do mundo. Era uma estátua do deus sentado, com doze metros de altura, exalando grandeza e majestade; é conhecido por meio de reproduções em moedas e joias (JUNIOR, 2013).

Mas o que tornou o nome do artista grande já em seu tempo e manteve sua fama inalterada ao longo dos séculos são as esculturas do Partenon. Concluída a construção do templo, Phidias e sua oficina cuidaram da decoração escultórica, que incluía um friso em baixo-relevo de cerca de cento e sessenta metros de comprimento, dois frontões decorados com figuras independentes e noventa e dois relevos em alto-relevo (LAGE, 2022).

Embora tenha desenhado todo o conjunto, acredita-se que Phídias tenha executado uma parte muito pequena, apesar de esta obra constituir uma amostra indiscutível de sua genialidade. As peças sobreviventes estão em sua maioria no Museu Britânico. Gozam de particular celebridade o grupo das Três Parcas e os fragmentos da Procissão dos Panatheneas, sobretudo o grupo dos deuses do Olimpo, onde se pode admirar o tratamento magistral dos tecidos, que aderem ao corpo e desenham os seus contornos, faceta criativa que contribuiu decisivamente para a fama da arte fidiaca; também os cavalos, poderosos e dinâmicos, e seus ferozes cavaleiros denotam a mestria do escultor (CELUQUE, 2004).

Os últimos anos da vida de Phídias estão envoltos em mistério. Com a queda de seu protetor, Péricles, o escultor foi acusado de desviar o ouro destinado à estátua de Atena e, apesar de provar sua inocência, foi preso sob pretexto de impiedade, por incluir seu retrato e o de Péricles no escudo da deusa Atena. Segundo alguns cronistas, Phídias morreu na prisão; segundo outros, ele conseguiu escapar e se exilou em Olímpia, enclave onde em 1954-1958 foram escavados os restos de sua oficina. A sua influência estendeu-se tanto à pintura de vasos contemporânea como à escultura dos séculos seguintes e ainda, sabe-se que Phídias tinha ciência do número áureo e o empregou em inúmeras obras autorais (SILVA; ALMEIDA, 2020).

2.5 Alexandre (356 a.C – 323 a.C)

Alexandre III da Macedônia; (Macedônia, 356 a.C. - Babilônia, 323 a.C.) rei da Macedônia cujas conquistas e extraordinárias habilidades militares lhe permitiram forjar, em menos de dez anos, um império que se estendia da Grécia e Egito até a Índia, assim início do chamado período helenístico (séculos IV-I a.C.) da Antiguidade (SANT ANNA, 2015).

O pai de Alexandre III, o rei Filipe II da Macedônia, transformou essa região, antes fronteiriça com a Grécia e pouco helenizada, em um poderoso reino que dominava as cidades-estados gregas. Filipe II havia preparado seu filho para governar, proporcionando-lhe experiência militar e confiando sua formação intelectual a Aristóteles, que despertou no jovem Alexandre sua admiração pela cultura grega e pelos épicos antigos, especialmente a Ilíada de Homero. Tendo já provado sua coragem e perícia no campo de batalha, Alexandre sucedeu a seu pai, assassinado em 336 a.C., com apenas vinte anos (SANTOS, 2019).

Alexandre III, o grande, passou os primeiros anos de seu reinado impondo sua autoridade aos povos súditos da Macedônia, que se aproveitaram da morte de Filipe II para se rebelar. E imediatamente (em 334 a.C.) Alexandre III lançou seu exército contra o poderoso e extenso Império Persa ou Aquemênida, fundado dois séculos antes por Ciro, o grande (579-530 a.C.), continuando assim o empreendimento que seu pai havia iniciado pouco antes de sua morte: uma guerra de vingança dos gregos (sob liderança macedônia) contra os persas (CHÂTELET; DUHAMEL; PISIER, 2018).

Com um pequeno exército (cerca de 30.000 de infantaria e 5.000 de cavalaria), Alexandre III, o grande, invariavelmente prevaleceu sobre seus inimigos, graças à sua excelente organização e treinamento, bem como à coragem e gênio estratégico que demonstrou; as inovações militares introduzidas por Filipe II (como a tática da linha oblíqua) forneceram vantagens adicionais (CHÂTELET; DUHAMEL; PISIER, 2018).

Alexandre III percorreu vitoriosamente a Ásia Menor (batalha de Granicus, 334), Síria (Issos, 333 a.C.), Fenícia (cerco de Tiro, 332 a.C.), Egito e Mesopotâmia (Gaugamela, 331 a.C.), até tomar as capitais persas de Susa (331 a.C.) e Persépolis (330 a.C.). O último imperador persa, Dario III, foi assassinado por um de seus sátrapas ou governadores provinciais, Bessos, para impedi-lo de se render, os Bessos continuaram a resistência contra Alexandre III no leste do Irã (KIFFER, 2013).

Conquistada a capital dos persas, Alexandre III dispensou as tropas gregas que o acompanharam durante a campanha e se proclamou imperador, sucedendo à dinastia aquemênida. Alexandre III imediatamente lançou novas campanhas de conquista para o leste: derrotou e matou Bessos e subjugou Parthia, Aria, Drangiana, Aracosia, Bactria e Sogdiana (KIFFER, 2013).

Dono da Ásia Central e atual Afeganistão, Alexandre III partiu para a conquista da Índia (327-325 a.C.), já abrigando um projeto de dominação mundial. Embora tenha incorporado a parte ocidental da Índia (vassalagem do rei Poros), teve que desistir de continuar avançando para o leste devido ao motim de suas tropas, esgotadas por tão longa sucessão de conquistas e batalhas (SILVA, 2020).

Com a conquista do Império Persa, Alexandre III descobriu o grau de civilização dos orientais, que antes considerava bárbaros. Então, Alexandre III concebeu a ideia de unificar os gregos com os persas em um único império no qual eles viveram juntos sob uma cultura de síntese (ano 324 a.C.). Para isso integrou um grande contingente de soldados persas em seu exército, organizou em Susa o "casamento do Oriente com o Ocidente" (casamento simultâneo de milhares de macedônios com mulheres persas) e ele próprio se casou com duas princesas orientais: uma princesa de Sogdiana e a filha de Dario (LEÃO, 2012).

A reorganização daquele grande Império começou com a unificação monetária, que abriu as portas para a criação de um imenso mercado; o desenvolvimento comercial foi promovido com expedições geográficas como a comandada por Nearcos, cuja frota desceu o Indo e subiu a costa persa do Oceano Índico e do Golfo Pérsico até a foz do Tigre e do Eufrates. Estradas e canais de irrigação também foram construídos. A fusão cultural se deu em torno da imposição do grego como língua comum (koiné). E cerca de setenta novas cidades foram fundadas, a maioria delas com o nome de Alexandria (a principal no Egito e outras na Síria, Mesopotâmia, Sogdiana, Báctria, Índia e Carmânia) (D'AMBROSIO, 2007).

A morte precoce de Alexandre III, aos 33 anos, vítima de malária, impediu-o de consolidar o império que havia criado e relançar suas conquistas; na verdade, o império de Alexandre III, o grande, mal sobreviveu à morte de seu criador. Desencadearam-se lutas sucessórias nas quais morreram as esposas e os filhos de Alexandre, até que o império foi dividido entre seus generais (os diadocos): Seleuco, Ptolomeu, Antígono, Lisímaco e Cassandro; Ptolomeu, autor de uma biografia dele, iniciou uma dinastia no Egito destinada a durar até os tempos da famosa Cleópatra. Os estados resultantes foram os chamados reinos helenísticos, que mantiveram nos séculos seguintes o ideal de Alexandre de transferir a cultura grega para o Oriente, enquanto permitiam imperceptivelmente que as culturas orientais penetrassem no Mediterrâneo (LEÃO, 2012).

2.6 Criação da Biblioteca de Alexandria (331 a.C.)

A biblioteca de Alexandria era a maior do mundo na época, e reunia todo o conhecimento da Antiguidade. Localizada na terra dos faraós, a Biblioteca de Alexandria chegou a abrigar até 900.000 manuscritos. Aparentemente, um incêndio causado pelas tropas romanas de Júlio César (em 48 a.C.) destruiu este templo do conhecimento. Embora outros especialistas apontem para o seu fim devido ao posterior saque de cristãos ou muçulmanos. Infelizmente, nenhum resto foi encontrado. Mais de 2.300 anos depois, o seu patrimônio ainda sobrevive na forma de um edifício renovado que recorda o legado do original (FLOWER, 2019).

Devemos a fundação da Biblioteca de Alexandria a Ptolomeu I, alguns anos após a fundação da cidade egípcia por Alexandre, o Grande, em 331 a.C. É uma questão para os especialistas se o Museu e a Biblioteca foram obra de Ptolomeu Sotér ou de seu filho Ptolomeu II Filadelfo. Seu objetivo era armazenar todas as obras do engenho humano até hoje, de todos os tempos e de todos os países, que deveriam ser 'incluídas' em uma espécie de coleção imortal para a posteridade (CABRAL, 2010).

Mais de dois mil anos atrás, foi feita uma tentativa de acumular todas as informações úteis encontradas no mundo, não importava quem o escreveu. O importante era preservá-lo e conectá-lo ao resto da informação. E seu resultado foi uma compilação de todo o conhecimento da humanidade até aquela data. A maioria dos livros, incorporada em papiro. Outros volumes, em pergaminho ou tabuletas de argila (CASAL, 2011).

Para ordenar todos os pergaminhos da biblioteca egípcia, foi criado um sistema, o precursor de nossos catálogos modernos. Os pergaminhos foram ordenados por gênero e nome do autor, mas não para encontrá-los, mas para registrá-los. Os pergaminhos não podiam ser colocados em prateleiras, então eram guardados em pilhas (MEDEIROS, 2019).

A Biblioteca de Alexandria foi a primeira universidade do mundo, um centro de pesquisa e diálogo, cujos estudiosos incluíam o matemático Arquimedes e o poeta Apolônio. Ali se debatiam princípios médicos e científicos, bem como questões de filosofia, literatura e administração política. Foi também aqui que foram desenhados os primeiros mapas do mundo (PIOVEVAN, 2022).

O desaparecimento da Biblioteca de Alexandria constitui um dos desastres culturais mais simbólicos da história. Há três personagens envolvidos nesses eventos: Júlio César, Teófilo de Alexandria e o califa Omar de Damasco. Ou seja, romanos, cristãos coptas, muçulmanos ou culpa pela devastação dos terremotos, ou todos eles sucessivamente (MANGUEL, 2019).

Júlio César foi quem causou mais estragos na Biblioteca de Alexandria, incendiando uma frota e fazendo com que o fogo se alastrasse. No século I a.C. O golpe de misericórdia para a galeria egípcia veio no ano 640 a.C., quando o Império Bizantino sofreu a invasão avassaladora dos árabes e o Egito foi totalmente perdido. Mas a maioria dos historiadores descrevem que é uma história sem precedentes (EVANGELISTA, 2008).

Em sua memória, desde outubro de 2002, uma novíssima biblioteca hipermoderna, construída sob os auspícios da Unesco, funciona em Alexandria. Ocupa uma área de 36.700 metros quadrados e está localizado em um edifício cujo desenho simboliza o sol egípcio que ilumina o mundo e a civilização. É aberto ao público, pode ser utilizado por qualquer pessoa que necessite de seus serviços e é o centro de uma rede bibliográfica que se estende a todas as fontes documentais locais, contendo um catálogo informatizado disponível em todas as universidades da região (SOUSA, 2009).

Outro dos notáveis edifícios do conhecimento antigo foi a Biblioteca de Celso, cujas ruínas permanecem naquela que foi a cidade de Éfeso (Turquia), uma monumental cidade greco-romana que no século IV a.C. sob o domínio romano, tornou-se o porto mais importante do Mar Egeu (PEREIRA, 2019).

2.7 Estudiosos da Biblioteca de Alexandria

A influência de Demétrio, ex-discípulo de Teofrasto, aguçou Ptolomeu Soter para a ciência. A coincidência do espírito aristotélico com a munificência lânguida garantiu a primazia de Alexandria em quase todas as disciplinas científicas até o fim da antiguidade (FLOWER, 2019).

Desse modo, a grande Biblioteca de Alexandria era um complemento indispensável do Museu. Foi descrito por Tito Livio como o mais belo dos monumentos. Tinha vários quartos com estantes para os livros – as armarias que os sábios consultavam – e salas para os escribas e artistas que copiavam e preparavam os pergaminhos, cobrando tanto por linha. Todos os Ptolomeus continuaram a coletar milhares de manuscritos gregos, judeus, egípcios, persas e indianos, até a época de Cleópatra (ROSA, 2012).

Os sábios reunidos no Museu devem ter chegado a mais de uma centena nos momentos mais brilhantes. Classificaram-se em duas categorias: filólogos e filósofos. Os primeiros, como o próprio nome indica, se interessavam por tudo relacionado a textos e gramática. Fundaram a filologia como ciência, sem descurar os estudos eruditos da historiografia e da mitografia. Os filósofos, de orientação peripatética ou aristotélicos, eram pensadores menos propícios à meditação moral ou metafísica do que cientistas versados nas ciências particulares: matemática, astronomia, geografia e medicina. De resto, alguns espíritos enciclopédicos, como Eratóstenes, brilharam como filólogos e filósofos ao mesmo tempo (CABRAL, 2010).

Então, o Museu era considerado a primeira Universidade que existiu no mundo desde que os membros do Museu, que poderiam ter alguns discípulos, não eram obrigados a seguir cursos regulares, dedicando assim todo o seu tempo à pesquisa ou discussão. Esses pesquisadores tinham salas de aula, instrumentos astronômicos, salas de dissecação, jardins botânicos e zoológicos. Seus salários vinham diretamente do rei. Os Ptolomeus participavam de banquetes, que eram um elemento da vida acadêmica em que se trocavam opiniões (simpósios) (PIOVEVAN, 2022).

Logo, os alexandrinos construíram máquinas a vapor, relógios muito sofisticados, projetados alavancas complicadas (Arquimedes estudou em Alexandria) e chegou a medir a altura das montanhas da Lua e o comprimento da circunferência da Terra, com precisão admirável. Chegaram a mais de cem participantes na época de maior esplendor. Os filólogos, por exemplo, estudaram profundamente os textos e a gramática. Os filósofos eram os demais, pensadores e cientistas (GAMAS, 2013).

Entre os grupos de estudiosos que ali trabalhavam e que passavam horas e horas estudando nesta sala estavam pessoas tão famosas como: Arquimedes, cidadão de Siracusa; Euclides que ali desenvolveu sua geometria; Hiparco que explicou a trigonometria e defendeu o geocentrismo visão do universo, ensinou que as estrelas têm vida, que nascem e depois se movem ao longo dos séculos e, por fim, morrem; Aristarco defendia o contrário, ou seja, o sistema heliocêntrico (movimento da Terra e dos planetas ao redor do Sol, muito antes de Galileu descobri-lo); Eratóstenes, que escreveu uma geografia e fez um mapa bastante preciso do mundo conhecido; Herophilus, um fisiologista que chegou à conclusão de que a inteligência não está no coração, mas no cérebro; os astrônomos Timocratis e Aristilo; Apolônio de Pérgamo, grande matemático; Heron de Alexandria, inventor de caixas de engrenagens e também de alguns incríveis dispositivos a vapor, é o autor de Autômatos, a primeira obra que conhecemos no mundo sobre robôs; e mais tarde, já no século II, o astrônomo e geógrafo Claudio Ptolomeu trabalhou e estudou; e também Galeno, que escreveu muitas obras sobre a arte de curar e sobre anatomia, seus ensinamentos e teorias sendo seguidos até o Renascimento. A última pessoa ilustre do Museu foi uma mulher: Hypatia de Alejandría, grande matemática e astrônoma, que teve uma morte atroz nas mãos de monges cristãos (FLOWER, 2019).

2.8 Euclides (século III a.C) aproximadamente (330 a.C. – 275 a.C.)

Euclides (330 a.C. - 275 a.C.) Matemático grego, com Arquimedes e Apolônio de Perga, depois dele, Euclides logo foi incluído na tríade dos grandes matemáticos da Antiguidade. Porém, pela imensa influência que sua obra exerceria ao longo da história, Euclides também deve ser considerado um dos mais ilustres de todos os tempos (FLOWER, 2019).

Apesar de ter feito importantes contribuições e correções, Euclides às vezes foi visto como um mero compilador do conhecimento matemático grego. Na verdade, o grande mérito de Euclides reside em seu trabalho de sistematização: a partir de uma série de definições, postulados e axiomas, estabeleceu por rigorosa dedução lógica todo o harmonioso edifício da geometria grega. Julgada não sem razão como um dos mais altos produtos da razão humana e admirada como um sistema acabado e perfeito, a geometria euclidiana manteria sua validade por mais de vinte séculos, até o surgimento, já no século XIX, das chamadas geometrias não euclidiana (DINIZ, 2020).

Pouco se sabe ao certo sobre a biografia de Euclides, apesar de ser o mais famoso matemático da Antiguidade. É provável ter sido educado em Atenas, o que explicaria seu bom conhecimento da geometria elaborada na escola de Platão, embora não pareça ter conhecimento das obras de Aristóteles.

Euclides lecionou em Alexandria, onde abriu uma escola que acabaria sendo a mais importante do mundo helênico, e alcançou grande prestígio no exercício de sua docência durante o reinado de Ptolomeu I Soter, fundador da dinastia ptolomaica que governaria o Egito. Desde a morte de Alexandre, o grande, até a ocupação romana. Diz-se que o rei exigiu que lhe mostrasse um procedimento abreviado para acessar o conhecimento da matemática, ao que Euclides respondeu que não havia caminho real para chegar à geometria. Esse epigrama, porém, também é atribuído ao matemático Menecmo, em resposta a uma demanda semelhante de Alexandre, o grande (LAGO, 2017).

A tradição preservou uma imagem de Euclides como um homem de notável bondade e modéstia, e transmitiu uma anedota sobre seus ensinamentos, registrada por John Stobaeus: um jovem iniciante no estudo da geometria perguntou-lhe o que ganharia com seu aprendizado. Euclides explicou a ele que a aquisição de conhecimento é sempre valiosa em si; e como o menino pretendia obter algum lucro com seus estudos, ordenou a um criado que lhe desse algumas moedas (SHAPIRO, 2018).

2.8.1 Elementos de Euclides

Euclides foi autor de vários tratados, mas o seu nome está principalmente associado a um deles, os Elementos, que rivaliza com as obras mais famosas da literatura universal, como a Bíblia ou Dom Quixote, na sua divulgação. Trata-se, no fundo, de uma compilação de obras de autores anteriores (entre os quais se destaca Hipócrates de Quios), que de imediato superou no seu plano geral e na magnitude da sua finalidade (BERLINSKI, 2018).

Dos treze livros que o compõem, os seis primeiros correspondem ao que ainda hoje se entende por geometria plana ou elementar. Neles Euclides coleta as técnicas geométricas usadas na escola de Pitágoras para resolver o que hoje são considerados exemplos de equações lineares e quadráticas; A teoria geral da proporção, tradicionalmente atribuída a Eudoxo, também está incluída (NASCIMENTO, 2023).

Os livros do sétimo ao décimo tratam de questões numéricas: as principais propriedades da teoria dos números (divisibilidade, números primos), os conceitos de comensurabilidade de segmentos a seus quadrados e questões relacionadas a transformações de radicais duplos. Os três restantes tratam da geometria dos sólidos, culminando na construção dos cinco poliedros regulares e suas esferas circunscritas, já estudados por Teeteto (SILVA FILHO, 2018).

Das outras obras de Euclides, temos apenas referências ou breves resumos de comentaristas posteriores. Os tratados sobre os Lugares Superficiais e as Cônicas já continham, aparentemente, alguns dos resultados expostos posteriormente por Apolônio de Perga. Nos Porismas são desenvolvidos os teoremas geométricos atualmente chamados de tipo projetivo; desta obra conservamos apenas o resumo elaborado por Pappo de Alejandría. Na Óptica e na Catóptrica estudam-se as leis da perspectiva, a propagação da luz e os fenômenos de reflexão e refracção (LAGO, 2017).

A influência posterior dos Elementos de Euclides foi decisiva; após o seu surgimento, foi imediatamente adotado como livro didático exemplar no ensino inicial da matemática, cumprindo assim o propósito que deve ter inspirado Euclides. Após a queda do Império Romano, sua obra foi preservada pelos árabes e novamente difundida após o Renascimento (SILVA, 2010).

Além do campo estritamente matemático, Euclides foi tomado como modelo, em seu método e exposição, por autores como Galeno, para a medicina, ou Spinoza, para a ética. Isso sem contar a multidão de filósofos e cientistas de todas as épocas que, em sua busca por sistemas explicativos universalmente válidos, tinham em mente o admirável rigor lógico da geometria de Euclides (BERLINSKI, 2018).

De fato, Euclides estabeleceu o que, a partir de sua contribuição, seria a forma clássica de uma proposição matemática: uma afirmação logicamente deduzida de princípios previamente aceitos. No caso dos Elementos, os princípios que se tomam como ponto de partida são vinte e três definições, cinco postulados e cinco axiomas ou noções comuns (ABRANTES, 2018).

A natureza e o alcance desses princípios têm sido objeto de frequentes discussões ao longo da história, principalmente no que diz respeito aos postulados e, em particular, ao quinto postulado, denominado de o postulado das paralelas. De acordo com este postulado, por um ponto fora de uma linha, apenas uma paralela a essa linha pode ser traçada. Sua condição diferente em relação aos outros postulados já era percebida desde a mesma Antiguidade, e houve várias tentativas de provar o quinto postulado como um teorema (CARVALHO, 2017).

Os esforços para encontrar uma prova foram infrutíferos e continuaram até o século XIX, quando alguns trabalhos inéditos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e as investigações do matemático russo Nikolai Lobachevsky (1792-1856) mostraram que era possível definir perfeitamente geometria consistente (geometria hiperbólica) em que o quinto postulado não foi cumprido. Assim começou o desenvolvimento das geometrias não euclidianas, dentre as quais se destaca a geometria elíptica do matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866), julgada por Albert Einstein como a que melhor representa o modelo relativístico do espaço-tempo (GALVÃO, 2017).

2.9 Leonardo Fibonacci (1170 – 1240)

Leonardo Bigollo, também chamado de Leonardo Fibonacci, Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci ou Fibonacci; nasceu em Pisa, atual Itália, (1175 - 1240). Ficou conhecido como Matemático italiano que difundiu o conhecimento científico do mundo árabe no Ocidente, que compilou no *Liber Abaci* (Livro do Ábaco). Ele popularizou o uso de algarismos arábicos e expôs os princípios da trigonometria em sua *Practica Geometriae* (Prática de Geometria) (LYONS, 2013).

Considerado o primeiro algebrista da Europa (cronologicamente falando) e o introdutor do sistema de numeração árabe, foi educado ainda criança na Argélia, onde seu pai era funcionário da alfândega, e onde aprendeu "o ábaco, no uso dos índios". Mais tarde conseguiu, por motivos de ordem comercial, aprender tudo sobre esta ciência que se ensinava no Egito, na Síria, na Sicília e na Provença (FERREIRA, 2016).

Fibonacci deu ao material assim reunido uma ordem, uma unidade de método e uma clareza de ensino no *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), que, como modelo para um texto universitário, também serviu, devido à sua riqueza de exemplos, para a compilação de manuais de aritmética para uso dos comerciantes. Escrito em 1202 e ampliado em uma segunda redação em 1228, a obra contém quinze capítulos. A primeira mostra a numeração dos nove algarismos que Fibonacci chama de "índio" e que, na verdade, são dez, porque é preciso somar o zero "*quod arabice zephirum apellatur*" (RAMOS, 2013).

Nos capítulos seguintes Leonardo expõe noções suficientes sobre cálculo digital, tabuada de adição e multiplicação, mostrando seu uso para realizar as quatro operações com algarismos de comprimento considerável, e dando a conhecer os critérios de divisibilidade por dois, por três e até treze, reunindo em tabelinhas de propósito os resultados das divisões por esses números de alguns inteiros não maiores que 200 (RAMOS, 2013).

Nos capítulos sexto e sétimo, Fibonacci trata de frações, o conceito e aplicações do mínimo múltiplo comum e uma "tabula desagregationis" que, mostrando a decomposição de inúmeras frações ordinárias em fundamentos, revela a persistência da logística egípcia. A segunda parte do livro, “Regra de Álgebra”, contém as fórmulas para reconhecer as equações de segundo grau, com as demonstrações à moda antiga, por meio de construções geométricas, e inúmeros problemas que podem ser resolvidos com equações ou com equações redutíveis sistemas para alunos da segunda série (SANTOS, 2019).

Este livro, que deve ser considerado um dos mais importantes da época pela influência que teve na então ressurgente consciência científica ocidental, trouxe grande fama ao autor e chamou a atenção do imperador Frederico II, que o convidou para sua corte. Em 1220 deu origem à Prática da Geometria, que contém uma introdução ligada às proposições fundamentais de Euclides, regras para a medição de comprimentos, áreas e volumes e divisão de figuras, e demonstrações de tais regras, com aplicações e cálculos concretos desenvolvimentos que constituem um útil complemento ao trabalho anterior (CUPAIOLI, 2016).

Seguindo o exemplo dos mestres gregos, Fibonacci modelou esta obra ao estilo dos Elementos de Euclides, ensinando os procedimentos a seguir quando se quer medir uma superfície ou um volume, ou dividir uma determinada figura em partes submetidas às condições propostas, acompanhado sempre seu ensino com demonstrações e cálculos devidamente desenvolvidos, a fim de evidenciar que havia realizado investigações semelhantes às contidas na Métrica de Heron de Alexandria (D’AMBROSIO, 2007).

Embora esta obra de Fibonacci tivesse um caráter exclusivamente didático, é preciso concordar que constitui um dos principais tratados geométricos da Idade Média. Por outro lado, há no mesmo trabalho uma parte intermediária dedicada a uma teoria aritmética sobre radicais quadrados e cúbicos, além de um método para a extração das raízes quadradas e cúbicas de um determinado número. Também vale a pena notar no livro de Fibonacci a exposição dos procedimentos desenvolvidos por Arquitas de Taranto, Platão e Heron de Alexandria para duplicar o cubo, um problema que com o da quadratura do círculo e a trissecção do ângulo, em vão seduziu gerações inteiras de estudiosos (JESUS, 2013).

Outros textos conhecidos de Fibonacci incluem um comentário sobre os Elementos de Euclides. Sabe-se também que ele compôs um Livro dos mercadores, também é famoso pela descoberta da chamada série de Fibonacci, cujas propriedades incluem sua recorrência em numerosas formações orgânicas naturais.

2.10 Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1517)

Luca di Borgo; Borgo San Sepolcro, (1445 - Roma, 1514) Matemático italiano, foi professor em várias cidades, entre elas Nápoles, Milão e Roma. Ele resumiu os conhecimentos matemáticos de sua época na obra Soma da aritmética, geometria, proporções e proporcionalidade (1494), que contém referências ao cálculo de probabilidades, ao método das partidas dobradas e a vários tópicos sobre livros contábeis. Em sua obra Da Divina Proporção (1509), ilustrada com desenhos de Leonardo da Vinci, estabelece uma relação entre a seção áurea, os princípios arquitetônicos e as proporções clássicas do corpo humano (PELEIAS, 2010).

De família humilde, Luca Pacioli foi para Veneza como professor quando jovem, depois ingressou na Ordem Franciscana e, concluída sua formação teológica e filosófica, dedicou-se ao ensino de matemática em várias cidades italianas (Perúsia, Veneza, Zara, Florença, Roma, Milão, Pisa e Bolonha), amigo de Leonardo da Vinci, foi uma das figuras mais características de seu tempo; Luca Pacioli não queria mais escrever em latim, como os matemáticos anteriores, mas na língua vulgar, que era, no entanto, bastante bárbara e cheia de palavras latinas, gregas e dialetais (AJZENBERG, 2019).

Mesmo sem fazer uso de uma simbologia algébrica análoga à atual, Luca Pacioli abriu caminho com interessantes abreviações de linguagem. Seus escritos oferecem uma preparação ideal para as novas investigações de álgebra do século XVI. Luca Pacioli não pode ser considerado um criador, mas o que extraiu dos escritos inéditos de Leonardo Fibonacci significou, sem dúvida, uma verdadeira revolução (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010).

A Summa de Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidade (1494) é uma obra enciclopédica que teve uma difusão muito ampla e influência notável, e contém muitas notícias autobiográficas e divagações não matemáticas. Compõe-se de duas partes: a primeira refere-se à aritmética e a segunda à geometria; cada parte é dividida em “distinções”, “tratados” e “artigos”. A parte especulativa da aritmética é inspirada em Nicomaco Geraseno e Theon de Smyrna. É digno de nota, do ponto de vista histórico, que os desenvolvimentos relacionados à dupla entrada, já amplamente utilizados na Itália desde o início do século XV, são aplicados nele, especialmente em Gênova e Veneza. Para a parte dedicada à geometria, Luca Pacioli inspirou-se, na Prática da Geometria de Fibonacci, bem como em Euclides; nele resolve, não sem originalidade, uma centena de problemas de planimetria e estereometria (SANTOS, 2010).

A *Summa* é antes de tudo uma grande obra de compilação, inspirada, como o próprio Pacioli admite, não apenas no Livro do Ábaco de Fibonacci, mas também nas obras de Euclides, Boécio, Giordano, Nemorario, Biagio da Parma, Sacrobosco, Regiomontano, Alberto de Sajonia e Prosdocimo de Beldomani, assim como os dos maiores algebristas árabes (AFEITOS, 2013).

Apesar da falta de originalidade, teve grande popularidade e difusão graças ao fato de o autor ter abandonado o latim, usado por todos os compiladores das disciplinas matemática e física, para escrever em vernáculo; no entanto, além das primeiras notícias do chamado método de entrada dupla, os primeiros exemplos do cálculo de probabilidades e um exemplo do logaritmo neperiano "*avant la lettre*" são encontrados na *Summa*. A obra também marcou o reconhecimento dos estudos matemáticos na Itália, antecipando com sua prática formular o simbolismo da álgebra moderna (AFEITOS, 2013).

O tratado *de la divina ratio* (concluída a composição em 1496 e publicada em Veneza em 1509), é dedicado a Ludovico Sforza, o Mouro, e contém ilustrações de Leonardo da Vinci. A proporção divina que dá título à obra não é outra senão a “seção áurea” de Euclides, bem conhecida dos artistas renascentistas a começar por Brunelleschi. O tratado, também escrito em linguagem vulgar latinizada como outras obras do mesmo gênero, é subdividido em numerosos capítulos e começa com um elogio às disciplinas matemáticas, fundamento de todas as ciências. Segue-se a exposição, segundo o princípio euclidiano, dos “efeitos” da proporção divina, a partir da qual Pacioli passa a estudar os poliedros regulares e a esfera, tratando de suas propriedades e de sua medida (ANDRADE, 2020).

Em relação à arquitetura, Pacioli, coerente com os princípios matemáticos já expressos, tenta determinar os primeiros elementos da arte de construir, examinando em particular os vários tipos de colunas; Luca Pacioli também trata da construção geométrica do corpo humano e das letras do alfabeto. São notáveis as referências a edifícios renascentistas, como o palácio ducal de Urbino (qualificado como modelo arquitetônico) e as construções de Bramante. À primeira edição da obra foi acrescentado um pequeno tratado em três partes, exposto com um método rigorosamente matemático, sobre corpos regulares; estudos recentes mostraram, no entanto, que o tratado em questão é retirado de cinco corpos regulares, obra do pintor Piero della Francesca, professor de Pacioli (CORREGIO, 2006).

Matemático além de humanista, Pacioli manifesta um forte interesse filosófico e religioso (já evidente no título de sua obra) pela pesquisa geométrica de corpos regulares, que platonicamente exalta em sua pureza ideal, como arquétipos dos outros corpos que a partir deles são derivados. Na literatura sobre as artes cênicas, a *proporção de la divina* tem particular importância devido às relações do autor com o meio cultural da corte milanesa de Ludovico el Moro e especialmente com Leonardo da Vinci, com quem Pacioli mantinha estreita relação. O livro reflete verdadeiramente sobre alguns pontos (como no elogio à pintura) do pensamento de Leonardo, e traz interessantes novidades sobre a obra do grande mestre, a quem, segundo declaração do próprio autor, também se devem as figuras dos poliedros em perspectiva e as letras do alfabeto reunidas em tabelas ao final do volume (CORREGIO, 2006).

2.11 Johannes Kepler (1571 − 1630)

Johannes Kepler nasceu em Württemburg, atual Alemanha, 1571 - Regensburg, 1630, astrônomo, matemático e físico alemão. Filho de um mercenário (que serviu por dinheiro nos exércitos do duque de Alba e desapareceu no exílio em 1589) e de uma mãe suspeita de praticar bruxaria, Johannes Kepler superou as sequelas de uma infância infeliz e sórdida graças à sua tenacidade e inteligência.

Após estudar nos seminários de Adelberg e Maulbronn, Kepler ingressou na Universidade de Tübingen (1588), onde estudou teologia e foi discípulo do astrônomo Michael Mästlin, seguidor de Copérnico. Em 1594, entretanto, ele interrompeu sua carreira teológica ao aceitar o cargo de professor de matemática no seminário protestante de Graz.

Quatro anos depois, alguns meses depois contrair um casamento de conveniência, o édito do arquiduque Fernando contra os professores protestantes o forçou a deixar a Áustria e, em 1600, mudou-se para Praga a convite de Tycho Brahe. Quando Brahe morreu repentinamente no ano seguinte, Kepler o substituiu como matemático imperial de Rudolf II, encarregado de completar as tabelas astronômicas iniciadas por Brahe e como conselheiro astrológico, um papel ao qual ele frequentemente recorria para viver.

Em 1611, sua esposa e um de seus três filhos morreram; pouco tempo depois, após a morte do imperador e a ascensão ao trono de seu irmão Matías de Habsburgo, foi nomeado professor de matemática em Linz. Ali viveu Kepler até que, em 1626, as dificuldades econômicas e o clima de instabilidade provocado pela Guerra dos Trinta Anos o levaram a Ulm, onde supervisionou a impressão das Tábuas Rudolfinas, iniciadas por Brahe e terminadas em 1624 por ele próprio utilizando as leis relativas aos movimentos planetários que ele estabeleceu.

Em 1628 foi para o serviço de Albrecht von Wallenstein, em Sagan (Silésia), que lhe prometeu, em vão, compensá-lo da dívida contraída com ele pela Coroa ao longo dos anos. Um mês antes de morrer, vítima de uma febre, Kepler deixara a Silésia em busca de um novo emprego.

2.11.1 Leis de Kepler

A primeira etapa do trabalho de Kepler, desenvolvida durante seus anos em Graz, concentrou-se nos problemas relacionados às órbitas planetárias, bem como às velocidades variáveis com que os planetas as percorrem, para o que partiu da antiga concepção de órbita, segundo a qual o mundo é governado com base em uma harmonia preestabelecida. Após tentar uma solução aritmética para a questão, ele acreditou ter encontrado uma resposta geométrica relacionando os intervalos entre as órbitas dos seis planetas então conhecidos com os cinco sólidos regulares. Julgava ter assim resolvido um “mistério cosmográfico” que expôs na sua primeira obra, Mysterium cosmographicum (O mistério cosmográfico, 1596), da qual enviou uma cópia a Brahe e outra a Galileu, com quem manteve uma correspondência epistolar esporádica relação e a quem se uniu na defesa da causa copernicana.

Durante sua estada em Praga, Kepler fez um trabalho notável no campo da óptica: ele enunciou uma primeira aproximação satisfatória da lei de refração, distinguiu pela primeira vez claramente entre os problemas físicos da visão e seus aspectos fisiológicos e analisou o aspecto geométrico de vários sistemas ópticos.

Mas o trabalho mais importante de Kepler foi a revisão dos esquemas cosmológicos conhecidos a partir do grande número de observações acumuladas por Brahe (especialmente as relativas a Marte), trabalho que levou à publicação, em

1609, de Astronomia nova, trabalho que continha as duas primeiras chamadas leis de Kepler, relativas à elipticidade das órbitas e à igualdade das áreas varridas, em tempos iguais, pelos raios vetoriais que unem os planetas ao Sol.

Ele culminou seu trabalho durante sua estada em Linz, onde enunciou a terceira de suas leis, que relaciona numericamente os períodos de revolução dos planetas com suas distâncias médias ao Sol; Publicou-o em 1619 em Harmonices mundi (Sobre a harmonia do mundo), como mais uma das harmonias da natureza, cujo segredo acreditava ter conseguido revelar graças a uma peculiar síntese entre astronomia, música e geometria.

3 MÉDIA E EXTREMA RAZÃO, PROPORÇÃO OU RAZÃO ÁUREA E NÚMERO DE OURO (PHI)

Inicia-se esta seção com o seguinte princípio, elaborado pelo matemático alemão Zeizing em 1855, que remete e converge com o pensamento de Euclides e é dividido por uma lacuna temporal de quase 2200 anos:

> "Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo".

Neste capítulo, explorar-se-á a média e extrema razão, proporção ou razão áurea ou número de ouro, desde o surgimento da sua primeira definição, passando por suas propriedades e representação geométrica.

3.1 Euclides e a razão extrema e média

Sabe-se que o homem sempre foi um ser em constante evolução e descobertas. A partir de algumas observações da natureza começou-se a indagação sobre a harmonia da beleza estética presente nela.

A matemática, por sua vez, está presente nessas grandes descobertas que o homem tem realizado. Um exemplo disso é na declaração de Kepler (1571 – 1630) citada por Lívio (2006, p. 79), onde ele afirma que:

> "A geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras. O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média. O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro. O segundo podemos chamar de uma joia preciosa".

Foi a partir dessas observações que grandes estudiosos matemáticos iniciaram seus estudos. Nesse sentido, "é preciso voltar a 300 anos a.C. na Grécia antiga e entender a definição de Euclides" (NAZARÉ, 2022, p. 12).

A "razão áurea", segundo pesquisas de Santos (2013), tornou-se conhecida por volta dos anos 300 a.C., quando Euclides de Alexandria, em seu livro *Os Elementos*, organizou, a partir de seus conhecimentos matemáticos, algumas teorias.

Segundo Lívio, a primeira definição clara, do que mais tarde se tornou conhecida como a Razão Áurea ou Proporção Áurea, foi dada por Euclides de Alexandria que a definiu como uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que ele chamou de sua “razão extrema e média”.

Portanto, entende-se que a definição da “razão áurea” foi apresentada, pela primeira vez, conforme documentos históricos, por Euclides de Alexandria (360 a.C. – 195 a.C.), que foi denominado como o fundador da geometria como sistema dedutivo formal.

Na matemática, o número de ouro é representado pela letra grega Φ (**Phi**), uma constante numérica infinita (1,618...) proveniente da razão áurea e que será tratado com mais profundidade no tópico 3.3 deste trabalho, em outras palavras trata-se do valor numérico ao se dividir um segmento em média e extrema razão.

Definição 3.1. Uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.

Figura 1 – Divisão de segmento em extrema e média razão

Fonte: elaborada pelo autor

Utilizando uma linguagem matemática atual, esta definição consiste no fato de que, dado um segmento de reta AB, o ponto C o divide em partes extrema e média se a razão entre todo o segmento AB (toda a linha) e o maior segmento AC for igual à razão entre o maior segmento AC e o menor segmento CB.

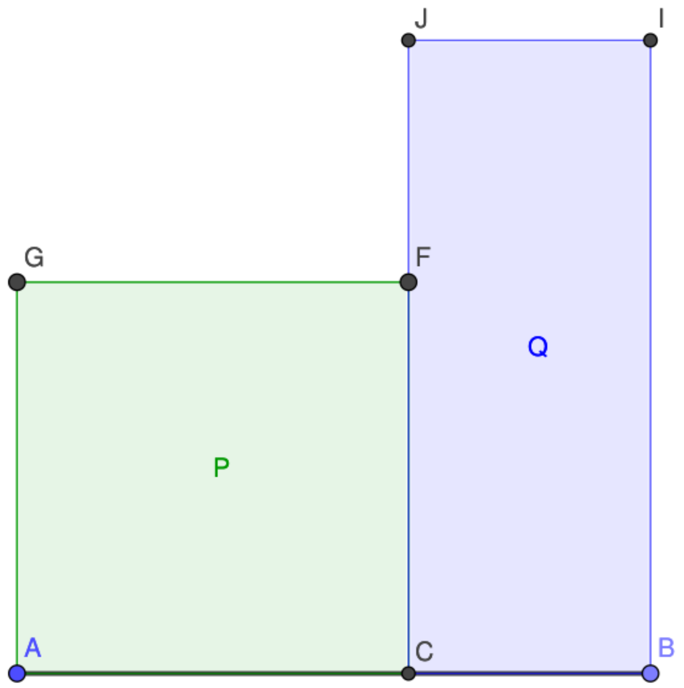
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi$$

A interpretação geométrica do problema nos leva à percepção na qual o retângulo construído com o todo e o segmento menor será igual, em área, ao quadrado construído com o lado maior. Conforme a Figura 2, temos:

a. O quadrado ACFG construído com o lado AC (segmento maior).
b. O retângulo CBIJ construído com os lados AB (segmento todo) e CB (segmento menor), onde AB = BI = CJ e CB = IJ.

Logo, pela definição, temos que a área do retângulo CBIJ, dada por (AB.CB) é igual à área do quadrado ACFG, dada por $(AC)^2$.

Figura 2 – Interpretação geométrica da razão áurea



Fonte: elaborada pelo autor

3.2 O pentágono, o pentagrama e os pitagóricos

Sabe-se, no entanto, que antes mesmo de ser demonstrado por Euclides, o número de ouro ou razão áurea já era utilizada pelos Pitagóricos, que até utilizavam a estrela de cinco pontas (Figura 3) como símbolo da sua irmandade.

Lívio (2011, p. 13) aponta alguns relatos históricos sobre a existência desse número de ouro, que é tão especial e pode ser encontrado em diversas formas de representação da arte, da natureza, no reino animal e vegetal e nas medidas do corpo humano.

Nesse sentido, Lívio (2011, p. 13) afirma que:

> Menos conhecido que o Pi é outro número, o PHI (Φ), que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que

> no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Secção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina”.

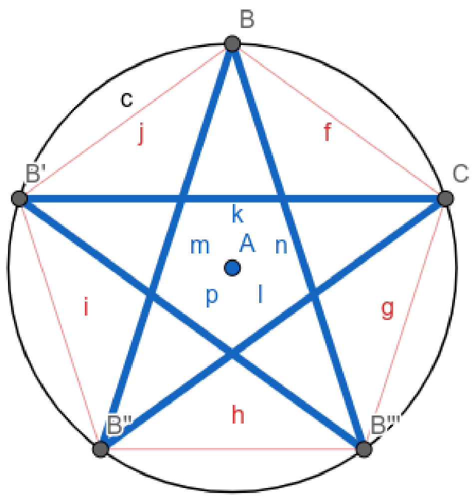
Ao longo da história da matemática pode-se observar que existem alguns números que são considerados como números especiais e que despertam a curiosidade e a atenção de vários matemáticos. Isso ocorre porque tal representação apresenta uma geometria harmoniosa e uma beleza incomparável.

De acordo com Santos (2020, p. 12):

> Muitos pesquisadores acreditam que os Pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade. Pitágoras de Samos foi um filósofo e matemático grego, fundador da escola Pitagórica. Segundo os Pitagóricos, o cosmo é regido por relações matemáticas. O símbolo de sua irmandade era o pentagrama – a estrela de cinco pontas e o nomeavam de Saúde.

A seguir apresenta-se a estrela de cinco pontas, que era utilizada como símbolo de irmandade pelos Pitagóricos.

Figura 3 – Pentagrama (azul), pentágono (vermelho) e circunferência (preto)



Fonte: elaborada pelo autor

O símbolo que caracterizava a irmandade entre os Pitagóricos era demonstrado pelo pentagrama, também conhecido como a estrela de cinco pontas (Figura 3).

De acordo com alguns estudiosos, a utilização do pentagrama estava associada à crença de alguns povos de civilizações antigas, como por exemplo, os egípcios, que acreditavam que após a morte de um rei ele acabava tornando-se uma estrela (MIGUEL, 1993).

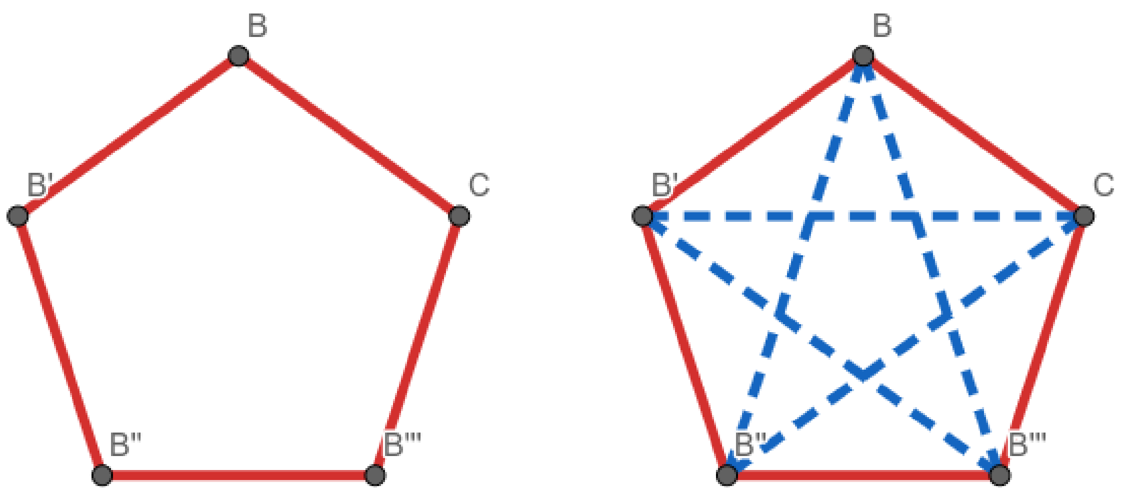
O pentagrama, assim como mostra na Figura 3, pode ser realizado após o ligamento dos vértices existentes no pentágono.

Assim como explicam Pereira; Lopes; Andrade (2009, p. 01):

> O pentagrama é uma figura que pode ser construída por uma linha única, linha fechada entrelaçada sendo considerado símbolo da perfeição. O pentagrama é conhecido também por laço infinito, pois é possível fazer outro pentagrama menor dentro do pentágono regular do pentagrama maior, e assim sucessivamente. A geometria do pentagrama também ficou conhecida como A Proporção Divina, pois é rica em razões áureas.

De acordo com apontamentos realizados Pereira; Lopes; Andrade (2009, p. 02) para se construir um pentagrama é necessário estender “as faces pentagonais até formar uma estrela. É a figura formada pela união das diagonais de um pentágono” (Figura 4).

Figura 4 – Construção de um pentagrama a partir de um pentágono regular



Fonte: elaborada pelo autor

3.3 Valor numérico de Φ

Sem perda de generalidade, vamos supor o valor unitário para o segmento AB. O segmento CB será denominado X, logo, o segmento AC será a diferença entre 1 e X, (1 – X). Assim, construímos a figura abaixo:

Figura 5 – Divisão de segmento em extrema e média razão

Fonte: elaborada pelo autor

Conforme a definição 3.1, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi$$

$$\frac{1}{1-X} = \frac{1-X}{X} = \Phi$$

$$\Phi = \frac{1}{1-X} = \frac{1-X+X}{1-X} = \frac{1-X}{1-X} + \frac{X}{1-X} = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

$$\text{Logo: } \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi.\Phi = 1.\Phi + \frac{1}{\Phi}.\Phi$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática, temos:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1)$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\Phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2.1}$$

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

$$\Phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\ 0{,}6180339887\ldots$$

Ao valor positivo dá-se o nome de número de ouro, razão áurea ou divina proporção. Conforme Lívio (2006, p.16), na literatura matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega tau (τ, do grego to-mi, que significa "o corte" ou "a seção"). Entretanto, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de Phi (Φ), a primeira letra grega no nome de Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C. E ao valor negativo, denomina-se conjugado de Φ ou $\overline{\Phi}$, que possui as mesmas casas decimais do número de ouro.

Desse modo, Φ (Phi) representa um número irracional, cuja incomensurabilidade está atribuída à sua relação com a $\sqrt{5}$, que pode ser obtido por meio da razão áurea.

3.4 Φ (Phi): Um número irracional algébrico ou transcendente?

De acordo com o periódico publicado na oficina “Números Irracionais, Transcendentes e Algébricos: a existência e a densidade dos números”:

> […] Porém, existe uma outra separação, muito mais recente, dos números reais, em duas categorias: os números algébricos e os números transcendentes. Um número real se diz algébrico se satisfizer uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Por exemplo, raiz quadrada de dois é

> um número algébrico porque satisfaz a equação “xis elevado ao quadrado menos dois é igual a zero”. Se um número não for algébrico, ele será transcendente. Com esta definição, não fica claro que existam números transcendentes, isto é, números não algébricos. Em 1851, o matemático francês Liouville estabeleceu a existência de números transcendentes. Ele fez exibindo certos números que provou serem não algébricos. Mais tarde, ainda no século XIX, provou-se que pi é um número transcendente. Um outro avanço, no século XIX, foi feito por Cantor, em contraste com o de Liouville, não exibir um número transcendente de forma explícita, tem a vantagem de demonstrar que, em certo sentido, há muito mais números transcendentes do que algébricos. Uma tal afirmação requer a comparação de classes infinitas, pois existem infinitos números transcendentes. […] (ACTA SCIENTIAE – v.4 – n.1 – p. 86/87 – jan./jun. 2002).

Diante do exposto, se torna necessário a inclusão de algumas definições a respeito dos conjuntos racionais e irracionais.

Definição 3.2. O conjunto dos números racionais, representado pela letra Q, é definido como sendo o conjunto dos números que podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$ onde p e q pertencem a Z, com q ≠ 0, ou seja:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, \text{ p e q} \in \text{Z, q} \neq 0\right\}$$

Definição 3.3. O conjunto dos números irracionais, representado pela letra I, é definido como sendo o conjunto dos números cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Intuitivamente, vemos que o número de ouro é irracional, de acordo com a definição, pois sua representação decimal não representa uma dízima periódica, bem como não pode ser representado por uma fração entre dois inteiros.

3.4.1 Demonstração da irracionalidade de Φ

Pode-se atribuir a irracionalidade do número de ouro pelo seu envolvimento com a $\sqrt{5}$, logo inicia-se com a demonstração de sua irracionalidade.

Teorema 1: $\sqrt{5}$ é irracional.

Demonstração por absurdo:

Suponhamos que $\sqrt{5}$ seja racional, ou seja, pode ser escrito por uma razão irredutível de números inteiros a e b.

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \text{ onde } a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{Z} - [0] \; e \text{ mdc (a,b)} = 1$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 5 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 5b^2 = a^2 \; (I)$$

De (I), temos que a^2 é múltiplo de 5, logo, a também será. (1). Portanto:

$$a = 5k_1, \text{ com } k_1 \in \mathbb{Z} \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I):

$$5b^2 = (5k)^2 \Rightarrow 5b^2 = 25k^2 \Rightarrow b^2 = 5k^2$$

Analogamente, temos que b é múltiplo de 5.

$$b = 5k_2, \text{ com } k_2 \in \mathbb{Z}$$

Chegamos a um absurdo, pois a e b são primos entre si e a fração a / b é irredutível.

Lema 1: a^2 é múltiplo de $5 \Rightarrow a$ é múltiplo de 5.

(Prova por absurdo)

Vamos supor que a não é múltiplo de 5:

$$a \neq 5q, \text{ com } q \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 \neq 25q^2 \Rightarrow a^2 \neq 5.(5q^2)$$

$$a^2 \neq 5q_1, \text{ com } q_1 \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, a^2 não é múltiplo de 5. (Absurdo).

Portanto, $\sqrt{5}$ é irracional.

Agora, também por absurdo, vamos supor que Φ é racional, logo:

$$\Phi = \frac{a}{b}\ , com\ a\ e\ b\ naturais\ \ e\ mdc\ (a; b) =\ 1$$

Assim, temos:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow\ b.\left(1+\ \sqrt{5}\right) = 2a \Rightarrow\ b + b\sqrt{5} = 2a \Rightarrow b\sqrt{5} = 2a - b \Rightarrow\ \sqrt{5} = \frac{2a-b}{b}$$

Pode-se garantir que $2a - b$ é natural, pois $a > b$ (uma vez que $\Phi = \frac{a}{b} > 1$). Com isso, temos $\frac{2a-b}{b}$ racional, o que seria um absurdo, pois foi provado anteriormente que $\sqrt{5}$ é irracional.

Definição 3.4. Um número é definido como *algébrico* quando satisfaz uma equação polinomial da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0 = 0$, onde os coeficientes são números inteiros e $a_n \neq 0$. Caso contrário, será chamado de *transcendente*.

Conforme visto anteriormente, o número de ouro pode ser representado na forma $\Phi = \frac{1+\ \sqrt{5}}{2}$ satisfazendo a equação $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Logo, será definido como um número irracional algébrico.

3.5 Divisão de um segmento na razão áurea

O número áureo, na geometria, é a razão áurea. Surgiu da série de Fibonacci como símbolo da constante relação harmônica entre diferentes magnitudes. O número áureo também representa a relação de proporções de tamanho, entre duas linhas de medição diferentes; entre duas figuras geométricas de tamanhos diferentes; entre dois corpos poliédricos de tamanhos diferentes. Essa proporcionalidade de diferentes medidas é perpétua e é chamada de proporção áurea, cujo símbolo é o número áureo Φ = 1,618... (LIVIO, 2021)

Além disso, qualquer uma das formas geométricas pode ser cortada, subdividida ou seccionada em proporções áureas. O espaço ou intervalo entre objetos também é capaz de suportar essa mesma ordenação (MELO, 2013). Baseado na série dos números naturais: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., cada uma delas tem uma unidade a mais que a anterior e uma a menos que a seguinte; estabelecendo uma relação igual e constante, de simetria simples. Isso significa que uma série aditiva, ou seja, cada termo é igual à soma dos dois anteriores, então se obterá uma série simétrica, mas harmônica, porque é proporcional. Por exemplo: 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21, 13 + 21 = 34, etc. Formando assim a série de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, etc.

Damos agora um exemplo simples: uma linha (para todos os elementos geométricos vale o mesmo raciocínio). Uma linha, de qualquer tamanho, pode ser dividida ou seccionada de diferentes maneiras:

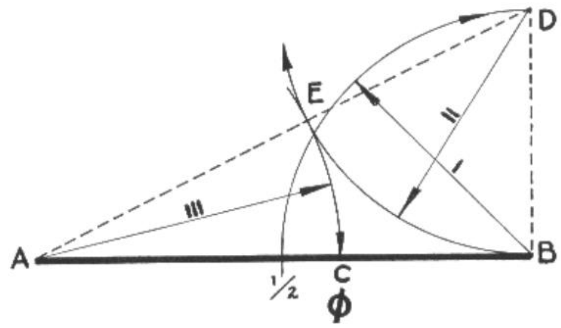
a. Se for cortada ao meio, em partes iguais, obtém-se uma simetria simples, de relação constante, de ritmo estático; efeito semelhante ao da série dos números naturais.
b. Se for dividida por qualquer parte, produz-se uma assimetria irracional, sem harmonia, ritmo ou lógica; produzindo um efeito de desequilíbrio instável e fadiga óptica.
c. Existe apenas uma maneira de seccioná-lo para que os dois segmentos resultantes tenham uma relação constante e proporcional, semelhante à série aditiva de Fibonacci, ligada a um ritmo dinâmico, recíproco e contínuo, de harmonia segura e equilibrada: na proporção áurea.

Então, esta é a razão áurea geométrica, cujo correspondente aritmético é o número áureo, portanto, a razão áurea e o número áureo são as duas formas “tangíveis” da proporcionalidade.

Por exemplo, na Figura 6, o segmento de reta AB mede 1000 milímetros; assim ao dividi-lo na seção áurea, do extremo B eleva-se uma perpendicular e depois com raio I medindo metade de AB ou 500 mm, traça-se um arco para estabelecer o ponto D, que se une a A por meio de uma linha tracejada. Logo, o raio

II que mede igual a BD, um arco é traçado até E, e finalmente, com centro em A e com raio III outro arco é traçado de E a C. Desta forma, o segmento AB foi dividido na proporção áurea, no ponto C.

Figura 6 – Divisão na proporção áurea da linha A B



Fonte: www.google.com (2023)

Assim, esta linha foi seccionada em "média e razão extrema", ou seja, em razão áurea, cujos segmentos chamaremos a partir de agora: segmento maior e segmento menor. A divisão deste segmento de linha criou duas medidas, sendo ambas proporcionais e relacionadas entre si e ao total, que neste caso é AB.

AB é o total e mede 1000 mm
AC é o segmento maior e mede aproximadamente 618 mm
CB é o segmento menor e mede aproximadamente 382 mm

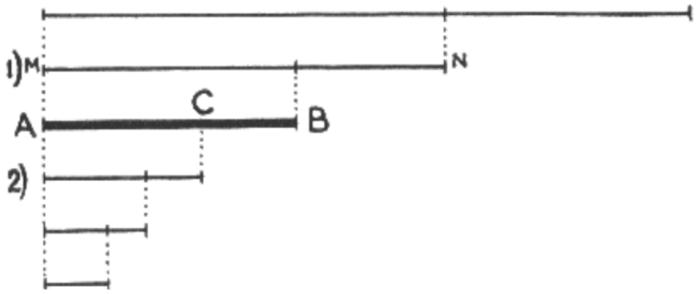
Ao verificar que, como consequência da seção áurea de AB, feita geometricamente, resultaram três números que também estão reciprocamente na proporção áurea, cujo expoente comum é o número áureo, onde:

1000 dividido por 618 = 1,618
618 dividido por 382 = 1,618

Essa igualdade de relações, de quantidades diferentes, é a proporção de ouro. Portanto, a proporção áurea e o número áureo mostram os mesmos resultados, ou seja, são iguais.

Um segundo exemplo é demonstrado na Figura 7, o segmento AB, com linha grossa, foi submetido a uma espécie de série geométrica de Fibonacci, formando uma escala ascendente e descendente de proporções áureas. AB foi dividido na proporção áurea em C corresponde: onde, AB = total, AC = segmento maior e CB = segmento menor.

Figura 7 – A reta A B submetida geometricamente à série de Fibonacci



Fonte: www.google.com (2023).

Onde, observamos na Figura 7 a reta 1 MN é formada por sua vez por AB da linha inferior que se torna seu segmento maior; o segmento menor é igual a AC, que também passa da linha inferior, reta 2. E ainda, na reta 2 a linha é formada por: o total, que é igual a AC, sendo o segmento menor de cima e como seu segmento maior CB, da linha também de cima. Assim pode ser seguido indefinidamente, e a relação entre os novos segmentos será sempre igual ao número 1,618, que os encadeia a um ritmo perpétuo. Além disso, todo o segmento maior e todo o segmento menor, reciprocamente, têm a mesma relação entre si.

3.6 Propriedades do número de ouro

Propriedade I:

De acordo com Ramos (2013), Φ é o único número real positivo tal que o seu quadrado é igual ao seu valor adicionado de uma unidade:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Verificação da propriedade:

$$\Phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1^2 + 2.1.\ \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{2^2}\right) = \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4}\right) = \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\Phi^2 = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1 + \sqrt{5} + 2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Confirmação da unicidade:

Suponha que exista um outro número real positivo k que possua tal propriedade, ou seja, $k^2 = k + 1 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0$.

Aplica-se a fórmula quadrática para resolução de equações de 2º grau:

$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, tem-se para esse caso específico, onde $\mathrm{a} = 1$; $\mathrm{b} = -1 \text{ e } \mathrm{c} = -1$:

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{como k é positivo, k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi \Rightarrow k = \Phi$$

Propriedade II:

Interessante notar que Φ também tem a propriedade de seu inverso ser igual ao seu valor subtraído de uma unidade:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

Verificação da propriedade:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\left(\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2}{1+\ \sqrt{5}} = \frac{2}{1+\ \sqrt{5}}.\frac{1-\ \sqrt{5}}{1-\ \sqrt{5}} = \frac{2.\left(1-\ \sqrt{5}\right)}{\left(1+\ \sqrt{5}\right).\left(1-\ \sqrt{5}\right)}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2.(1-\ \sqrt{5})}{1^2 - (\ \sqrt{5})^2} = \frac{2.(1-\ \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Phi - 1 = \left(\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \frac{1+\ \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1+\ \sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Propriedade III:

Outra relação interessante acerca do número de ouro é que a soma do quadrado do inverso de Φ com o inverso de Φ resulta em uma unidade:

$$\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 + \frac{1}{\Phi} = 1$$

Verificação da propriedade:

$$\left(\frac{1}{\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}} = 1$$

$$\left(\frac{2}{1+\ \sqrt{5}}\right)^2 + \frac{2}{1+\ \sqrt{5}} = 1 \Rightarrow \frac{4}{1+2\ \sqrt{5}+5} + \frac{2}{1+\ \sqrt{5}} = 1 \Rightarrow \frac{4}{6+2\ \sqrt{5}} + \frac{2}{1+\ \sqrt{5}} = 1$$

$$\frac{2}{3+\ \sqrt{5}} + \frac{2}{1+\ \sqrt{5}} = 1 \Rightarrow \frac{2.(1+\ \sqrt{5})}{(3+\ \sqrt{5}).(1+\ \sqrt{5})} + \frac{2.(3+\ \sqrt{5})}{(1+\ \sqrt{5}).(3+\ \sqrt{5})} = 1$$

$$\frac{2.(1+\ \sqrt{5}) + 2.(3+\ \sqrt{5})}{(3+\ \sqrt{5}).(1+\ \sqrt{5})} = 1 \Rightarrow \frac{2+2\ \sqrt{5}+6+2\ \sqrt{5}}{(3+3\ \sqrt{5}+\ \sqrt{5}+5)} = 1$$

$$\frac{8+4\ \sqrt{5}}{8+4\ \sqrt{5}} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

Propriedade IV:

Outra propriedade que pode ser observada é:

$$\Phi^3 = \frac{\Phi + 1}{\Phi - 1}$$

Verificação da propriedade:

$$\Phi^3 = \Phi.\Phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1.3 + 1.\ \sqrt{5} + 3.\ \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2}{2.2} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\frac{\Phi + 1}{\Phi - 1} = \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\left(3 + \sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5} + 1\right)}{\left(\sqrt{5} - 1\right).\left(\sqrt{5} + 1\right)} = \frac{\left(3.\ \sqrt{5} + 3.1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 1.\ \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2}$$

$$= \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}$$

Dessa forma, as potências da proporção áurea podem ser escritas em função de uma soma de potências de graus inferiores do mesmo número, estabelecendo uma verdadeira sucessão recorrente de potências. O caso mais simples é: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, qualquer que seja “n” inteiro positivo. Este caso é uma sequência recorrente de posição k = 2, pois são utilizadas duas potências anteriores (RAMOS, 2013).

Uma equação recursiva de posição “k” tem a forma $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n$, onde a_1 é qualquer número real ou complexo e “k” é um número natural menor ou igual a “n” e maior ou igual a 1. No caso acima é k = 2, $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$. Mas podemos “pular” a potência imediatamente anterior e escrever:

$$F_n = F_{n-2} + 2F_{n-3} + F_{n-4}$$

Onde k = 4, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ e $a_4 = 1$

Se saltarmos as duas potências imediatamente anteriores, há também uma fórmula recorrente para a posição 6:

$$F_n = F_{n-3} + 3F_{n-4} + 3F_{n-5} + F_{n-6}$$

Em geral:

$$\Phi^n = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{\frac{k}{2}}{i} \Phi^{n-(\frac{k}{2}+i)}; k\ natural\ par, n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}$$

Em resumo, qualquer potência da proporção áurea pode ser considerada o elemento de uma sequência recorrente de ordens 2, 4, 6, 8, …, 2n, onde n é um número natural. Na fórmula recursiva é possível aparecerem potências negativas de Φ, fato que é integralmente correto. Além disso, uma potência negativa de Φ corresponde a uma potência positiva de seu inverso, a seção áurea. Esse curioso conjunto de propriedades e o fato de os coeficientes significativos serem os do binômio parecem indicar que existe uma relação entre a proporção áurea e um número (SANTOS, 2010).

3.6.1 Representação por frações contínuas

A expressão que usa frações contínuas é:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Verificação da propriedade:

Inicia-se assumindo que a fração contínua é igual a k. Logo:

$$k = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$$

Nota-se que o denominador da fração contínua é precisamente o valor de k. Fazendo então a substituição, tem-se:

$$k = 1 + \frac{1}{k}$$

Multiplica-se ambos os termos por k:

$$k^2 = k + 1 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0$$

A resolução desta equação do segundo grau já é conhecida, através dela obtém-se as raízes:

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{como } k \text{ é positivo, temos } k = \Phi$$

Essa propriedade também significa que a proporção áurea é um número mal aproximado por racionais, que, na verdade atinge o pior grau possível de aproximabilidade por racionais (SILVA, 2021). É também a mais simples de todas as frações contínuas e aquela com a convergência mais lenta.

3.6.2 Representação por equações algébricas

$$\Phi.\frac{1}{\Phi} = 1 \Rightarrow \Phi.(\Phi - 1) = 1 \Rightarrow \Phi^2 - \Phi = 1 \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A proporção áurea $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e a seção áurea $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ são soluções das seguintes equações:

$$x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$$

$$x^3 - y^3 - 4 = 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 - x - 1).(x^2 + x - 1) = 0$$

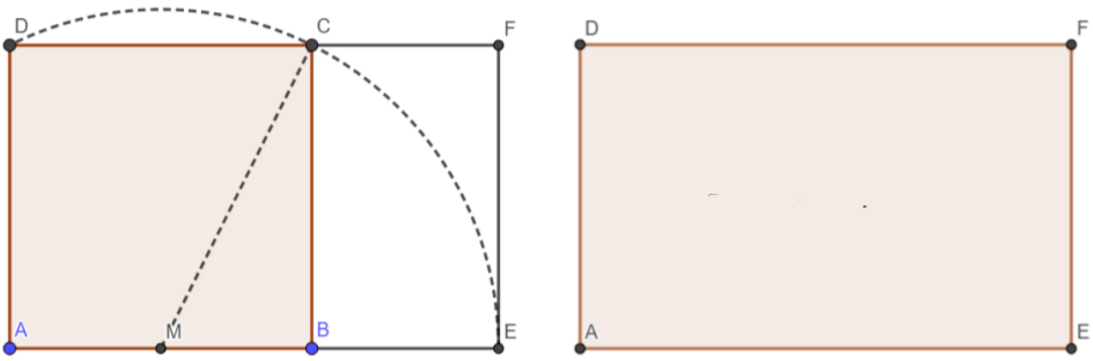
3.7 Retângulo, triângulo e espiral áureos

3.7.1 Retângulo áureo

Como definição, diremos que um retângulo áureo é aquele entre cujos lados existe uma proporcionalidade igual à proporção áurea. Se subtrairmos a imagem de um quadrado nele inscrito do lado menor do retângulo áureo, obteremos outro retângulo áureo de dimensões menores. Então, se tivermos vários retângulos de tamanhos diferentes, o dourado será considerado o mais agradável esteticamente (ANDRADE, 2020).

Então, o retângulo áureo pode ser construído da seguinte forma. A partir de um quadrado ABCD, um arco de circunferência é traçado com o centro no ponto médio de AB (ponto M) e raio MC, até cruzar a extensão do lado do quadrado AB no ponto E. O retângulo AEFD é um áureo retângulo (Figura 8). Podemos ver a construção na segunda forma: construir a seção áurea do ponto anterior.

Figura 8 – Construção do retângulo áureo



Fonte: elaborada pelo autor (2023)

Suponha que o lado do quadrado dado seja igual a 1, então podemos verificar a seguinte expressão:

$$AE = AM + ME = \frac{1}{2} + ME$$

Como o segmento *ME* é a hipotenusa do triângulo retângulo *MBC*, se aplicarmos o teorema de Pitágoras obtemos:

$$(ME)^2 = (MB)^2 + (BC)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$ME = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

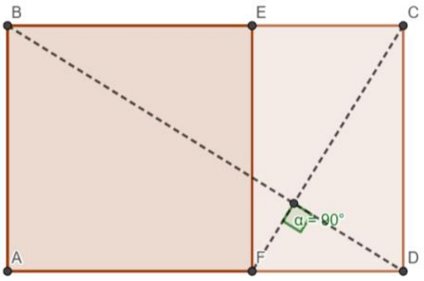
$$AE = AM + ME = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

Portanto, demonstra-se analiticamente que os lados do retângulo áureo AEFD que obtivemos graficamente são 1 e Φ, mantendo assim as proporções áureas.

3.7.1.1 Propriedades do retângulo áureo

Como vimos anteriormente, uma das propriedades do retângulo áureo ABCD é que, se eliminarmos de seu interior o quadrado ABEF com o menor lado do retângulo áureo, obteremos outro retângulo áureo menor FDCE. Além disso, as diagonais desses dois retângulos áureos ABCD e FDCE sempre se cruzam em ângulos retos, como podemos ver na Figura 9.

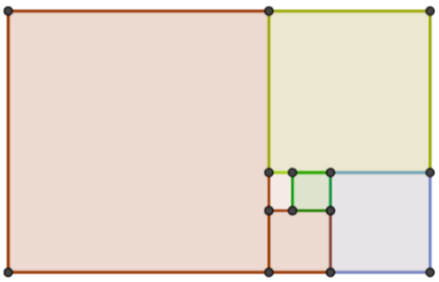
Figura 9 – Propriedades dos retângulos áureos



Fonte: elaborada pelo autor (2023)

Se for feito no retângulo áureo resultante a mesma operação sucessivamente, ou seja, subtrairmos o quadrado do menor lado do retângulo áureo infinitamente, obteremos a seguinte sequência de retângulos áureos conforme demonstrado na Figura 10.

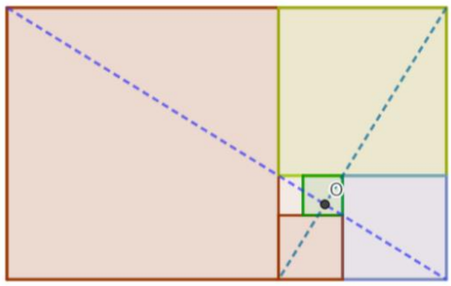
Figura 10 – Divisão do retângulo áureo em mais retângulos áureos



Fonte: elaborada pelo autor (2023)

A este ponto, onde as diagonais de todos os infinitos retângulos dourados resultantes convergem, é chamado de "o olho de Deus", demonstrado na Figura 11.

Figura 11 - Olho de Deus

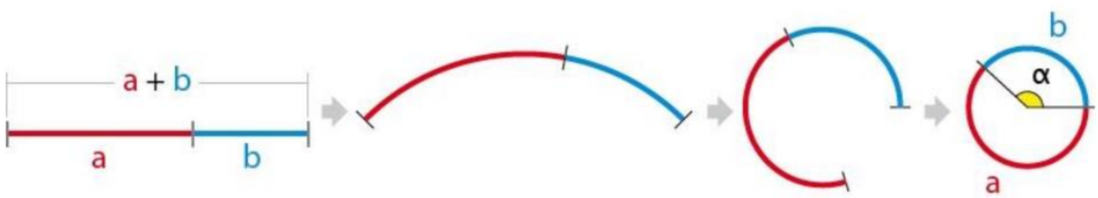


Fonte: elaborada pelo autor (2023).

3.7.1.2 O ângulo dourado

Se temos dois segmentos, *a* e *b*, que estão na proporção áurea e com eles traçamos um círculo, ou seja, o comprimento do círculo é (a + b), o valor do ângulo central que corresponde ao menor segmento é um número irracional que pode ser arredondado em duas casas decimais para 137,51º*.* Se dividirmos agora o ângulo correspondente ao segmento maior pelo correspondente ao segmento menor, obteremos o número áureo, conforme a Figura 12:

Figura 12 - Construção do ângulo dourado



Fonte: www.google.com (2023).

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi \Rightarrow \alpha = 360° - \frac{360°}{\Phi} = 360° - 222{,}49° \Rightarrow \alpha = 137{,}51° \Rightarrow \frac{222{,}49°}{137{,}51°} = \Phi$$

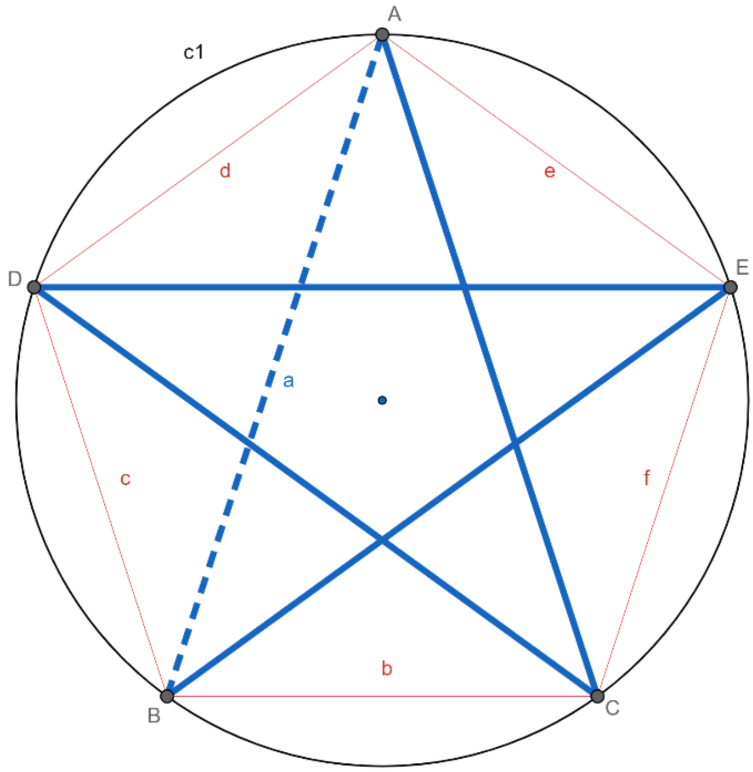
Esse ângulo tem grande importância na natureza, pois está presente na disposição das folhas no caule de uma planta, por exemplo, é o ângulo que maximiza a quantidade de luz solar recebida pelas folhas ao redor do caule. Além disso, também podemos encontrá-lo na disposição das sementes de um girassol, ou na disposição dos pinhões de um abacaxi, entre outros (SILVEIRA, 2018).

3.7.2 Triângulo áureo

As diagonais do pentágono regular formam dois tipos de triângulos isósceles cujas relações entre os lados maior e menor são o número áureo (FARIA, 2017). Portanto, esses triângulos são chamados de triângulos dourados, áureos ou de ouro.

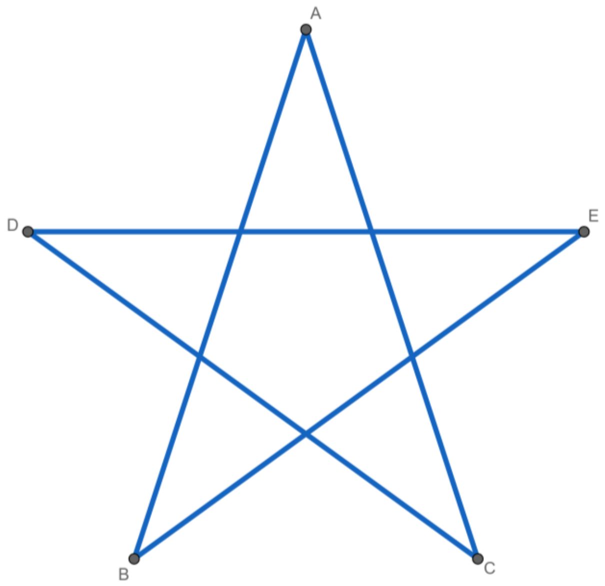
Por definição, o triângulo de ouro é um triângulo isósceles no qual a razão entre o lado longo dobrado (a) e o lado curto (b) é o número de ouro, como mostra a Figura 15 extraída das Figuras 13 e 14.

Figura 13 - Construção do pentagrama inscrito em uma circunferência



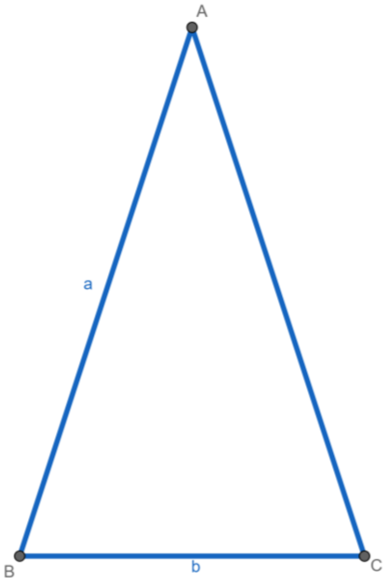
Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Figura 14 - Pentagrama



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Figura 15 - Triângulo Áureo

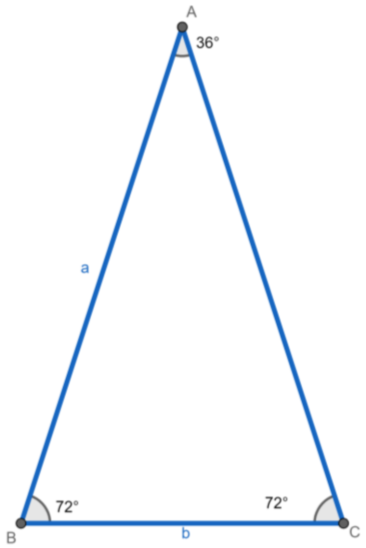


Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Demonstração de que a/b = Φ:

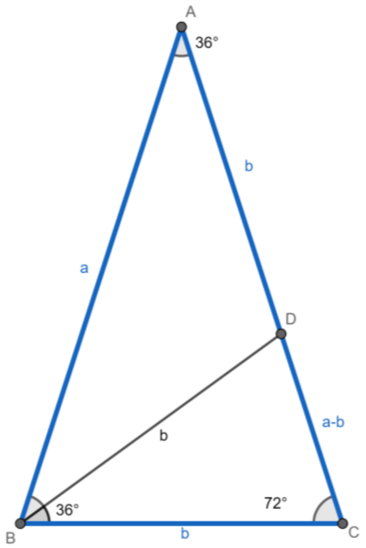
Partindo da figura 15, construímos a figura 16, onde são inseridos os valores de todos os ângulos do triângulo áureo em questão.

Figura 16 - Triângulo Áureo com ângulos



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Figura 17 - Triângulo Áureo com bissetriz



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

A partir disso, traça-se a bissetriz $\overline{BD}$ dando origem ao segundo triângulo BDC confirme Figura 17 e a algumas informações importantes como: $\overline{BC}$ = $\overline{BD}$ = b, uma vez que a novo triângulo CBD é isósceles de base (a – b) e lados duplos b; $\overline{DA}$ = $\overline{BC}$ = $\overline{BD}$ = b, pois o triângulo BDA também é isósceles e possui base a e lados duplos b. Com isso, faz-se a comparação por semelhança entre os triângulos BAC e CBD, de tal forma que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow b^2 = a.(a-b) \Rightarrow b^2 = a^2 - ab \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau na incógnita a e constante b, obtém-se:

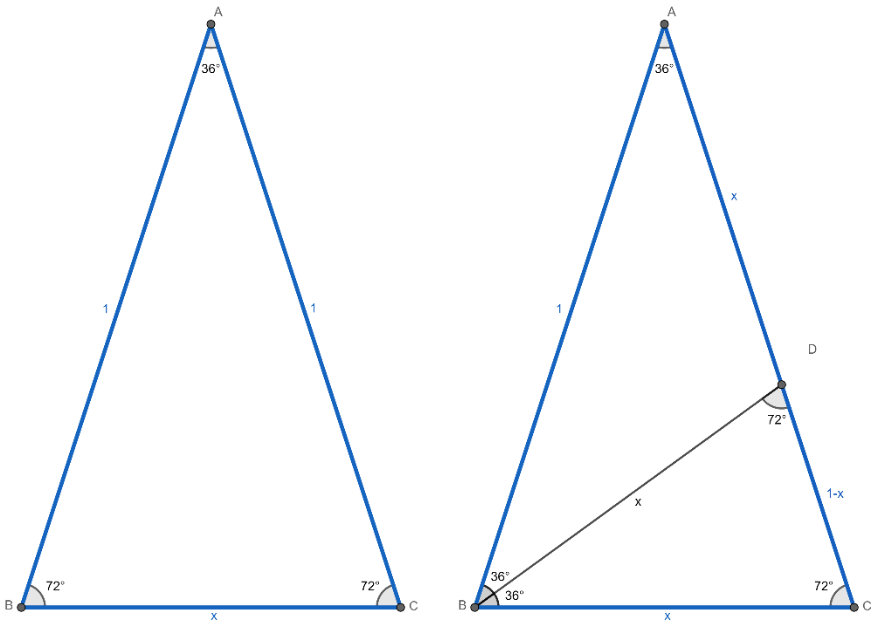
$$\Delta = (-b)^2 - 4.1.(-b^2) = b^2 + 4b^2 = 5b^2$$

$$a = \frac{b \pm \sqrt{5}b}{2} \Rightarrow a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{b.(1 \pm \sqrt{5})}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \Phi$$

3.7.2.1 Cosseno de 36°

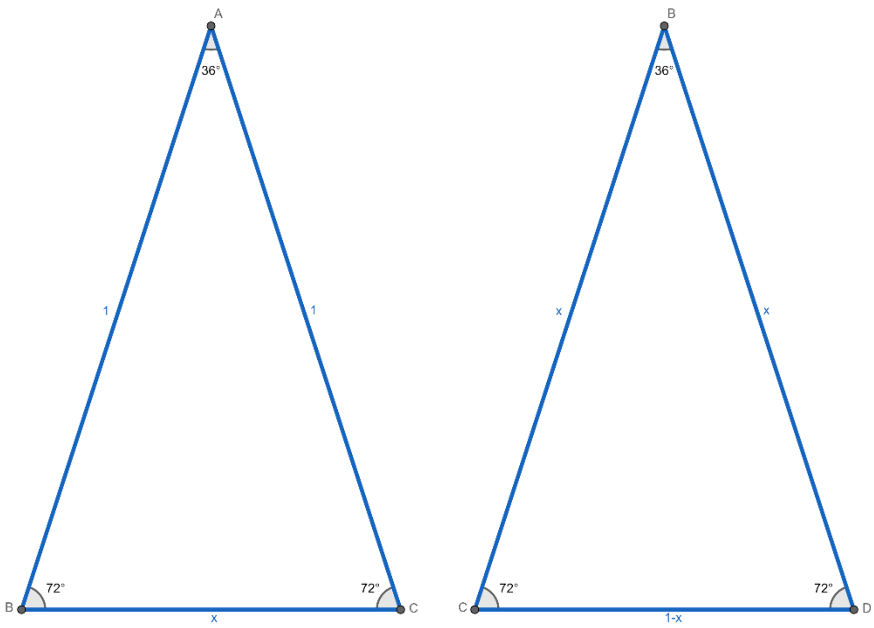
Utilizando o triângulo áureo, podemos calcular o valor do cosseno do ângulo de 36° que apresenta relação com o número de ouro. As figuras a seguir demonstram o passo a passo e serão utilizadas para facilitar a compreensão dos cálculos dos valores supramencionados.

Figura 18 - Triângulo áureo passo 1 e 2



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Figura 19 - Triângulo áureo passo 3 e 4



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

De início, e sem perda de generalidade, adota-se o valor unitário para os lados duplos do triângulo áureo BAC, logo $\overline{BA} = \overline{CA} = 1$, e x para a base $\overline{BC}$, conforme mostra a Figura 18. Ao passo 2, é traçada uma bissetriz $\overline{BD}$ dando origem ao segundo triângulo Figura 18 e algumas informações importantes como: $\overline{BC}$ = $\overline{BD}$ = x, uma vez que a novo triângulo CBD é isósceles de base 1 – x e lados duplos x; $\overline{DA}$ = $\overline{BC}$ = $\overline{BD}$ = x, pois o triângulo BDA também é isósceles e possui base 1 e lados duplos x. Com isso, faz-se a comparação por semelhança entre os triângulos BAC e CBD, de tal forma que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-1) = 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x, neste caso, representa o valor numérico do lado de um triângulo, o valor negativo para x resultante da resolução da equação acima será descartado, logo:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Agora será aplicada a lei dos cossenos no triângulo BAC:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 36°$$

$$\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = 1 + 1 - 2.\cos 36°$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = 2 - 2.\cos 36° \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 2 - 2.\cos 36°$$

$$\Rightarrow 3 - \sqrt{5} = 4 - 4.\cos 36° \Rightarrow 4.\cos 36° = \sqrt{5} + 1$$

$$\Rightarrow \cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{\Phi}{2}$$

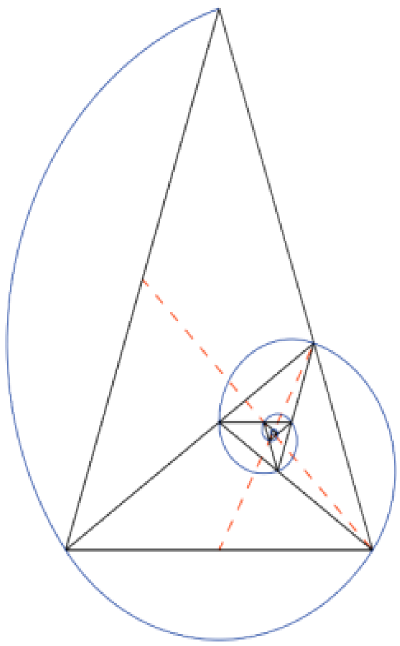
A nível complementar de conhecimento, informa-se que para calcular as demais identidades trigonométricas de 36°, basta aplicar a relação fundamental da trigonometria $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$ e com isso encontra-se o $sen36° = \frac{(-1+\sqrt{5}).(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{8}$. Já para encontrar o valor da tangente de 36°, é necessário usar a definição de que: $\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$. Outra informação importante é que, uma vez conhecido o seno e cosseno de 36°, é possível obter os senos e cossenos de 18° e 72°, dentre outros.

3.7.3 Espiral logarítmica

A partir de um triângulo dourado, podemos construir uma espiral logarítmica. Esta espiral foi estudada por Jacques Bernoulli (1654-1705) e trata-se de uma curva em um sistema de coordenadas polares que se expande ou contrai de acordo com uma taxa logarítmica. Ela é definida matematicamente pelas coordenadas polares (r, θ), onde "r" representa o raio e "θ" é o ângulo.

Se dividirmos os ângulos da base, criamos um ponto que, por sua vez, cria outro triângulo dourado. Se continuarmos com o processo de bissecção, criaremos um número infinito de triângulos dourados, pois a cada processo de bissecção, criamos triângulos menores semelhantes aos já existentes (processo detalhado anteriormente na Figura 17 p.57) e poderemos desenhar uma espiral logarítmica unindo seus vértices, segundo a Figura 20.

Figura 20 - Espiral logarítmica



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Tal como aconteceu no caso do retângulo áureo, onde se subtrairmos o quadrado do seu interior teríamos outro retângulo áureo de dimensões menores, no triângulo áureo, se continuarmos desenhando bissetrizes obtemos triângulos áureos menores dentro do primeiro triângulo. Assim, desta forma, obtemos uma espiral que convergirá no mesmo ponto que na seção anterior chamamos de “o olho de Deus”.

3.7.4 Espiral áurea

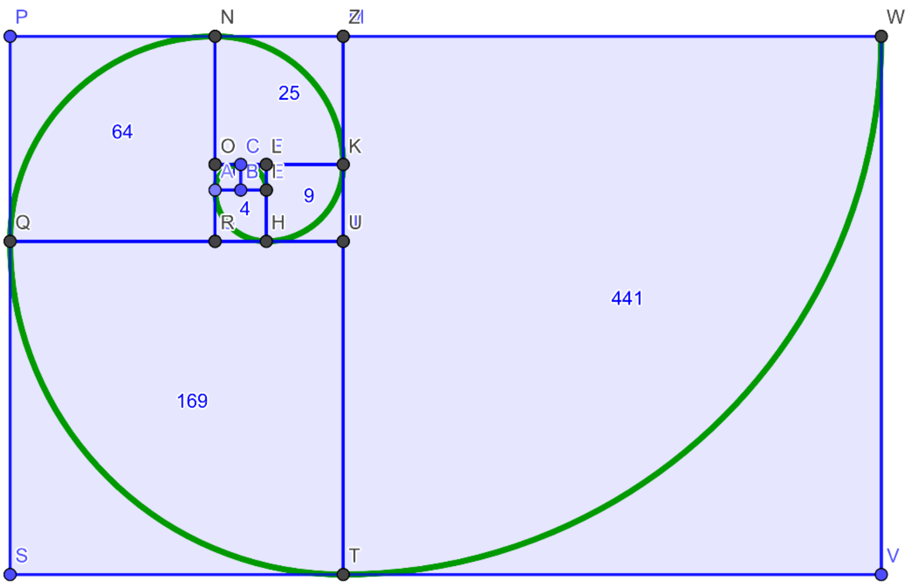
A espiral áurea é um padrão criado a partir do conceito da proporção áurea, uma lei universal que representa o “ideal” em todas as formas de vida e matéria. Na verdade, é frequentemente citado como um exemplo da conexão entre as leis da matemática e a estrutura dos seres vivos. Quanto mais entendermos a matemática por trás do símbolo, mais apreciaremos suas aparências na natureza e na arte (LEOPOLDINO, 2016).

Na matemática, a proporção áurea é um número especial que é aproximadamente igual a 1,618... e é representado pela letra grega Φ (Phi). Em geometria, a espiral áurea pode ser desenhada a partir de um retângulo áureo cujos lados são proporcionais conforme a proporção áurea (ANDRADE, 2020).

A proporção áurea aparece em muitos contextos matemáticos. É por isso que a espiral dourada é frequentemente associada à sequência de Fibonacci, uma série de números intimamente relacionada a Φ e que será estudada mais detalhadamente no próximo capítulo. Tecnicamente, a sequência começa com 0 e 1 e continua indefinidamente, e se dividir cada número por seu antecessor, o resultado convergirá para a proporção áurea, aproximadamente 1,618.

Construindo um retângulo de base Φ e altura 1, que será chamado de “retângulo áureo”, construindo novos retângulos áureos de menor dimensão, procedendo da seguinte forma: tomando o lado mais curto do retângulo, construímos um quadrado de modo a dividi-lo neste e num novo retângulo, que terá agora como lado maior o que anteriormente era o lado mais curto do retângulo inicial, e como lado mais curto, o segmento que resulta da subtração do lado maior do retângulo inicial, seu menor lado. Seguindo sucessivamente este procedimento em direção ao interior do retângulo áureo inicial, obteremos como resultado o indicado na Figura 21, na qual também traçamos uma espiral que chamaremos de “espiral áurea”, e o exemplo da Figura 22, encontrado na natureza.

Figura 21 - Espiral áurea



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Figura 22 - Nautilus Shell

Fonte: www.google.com (2023).

Esta singular espiral representa não só uma das curiosidades da proporção áurea, como também é o processo de crescimento harmonioso dos moluscos gastrópodes provido de uma concha espiral, por exemplo, a *Nautilus Shell*, representada na Figura 22.

Tomando como base um quadrado de lado 1, adicionamos outro igual, obtendo assim um retângulo de base 2 e altura 1. Anexado a este retângulo construímos um quadrado de lado 2, e obtemos um novo retângulo de base 3 e altura 2. Agora adicionamos um quadrado com lado 3, que resulta em um novo retângulo com base 5 e altura 3. Continuando com este processo, o que iremos obtendo serão retângulos em que seus lados pertencem a algum par da série de Fibonacci, e unindo os vértices dos retângulos poderemos traçar uma espiral que, se a compararmos com a dourada verificaremos que existe uma semelhança muito aproximada entre ambos, conforme mostra Figura 21.

4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Inicia-se este capítulo apresentando uma breve e objetiva contextualização sobre quem foi Leonardo Fibonacci, seu modo de vida e suas obras. Após isso, é faz-se uma abordagem sobre o famoso e instigante problema de reprodução dos coelhos de forma a apresentar a questão ao leitor. Diante do exposto, e conhecendo a sequência de Fibonacci, é elaborada uma fórmula fechada para cálculo de qualquer termo (em qualquer posição) da sequência em questão. No tópico seguinte, são feitas conjecturas a respeito de uma possível relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro, concluindo com a comprovação e demonstração da suposta relação. Ao final, mostra-se algumas relações de potências do número de ouro com a sequência.

4.1 Leonardo Fibonacci

Segundo Belucci (et al., 2008), Leonardo de Pisa nasceu na Itália, aproximadamente entre os anos de 1175 e acabou sendo conhecido como Fibonacci porque era filho de Bonaccio. Grande estudioso matemático, Fibonacci acabou tornando-se famoso após a publicação do seu primeiro livro, denominado como *Liber Abacci* (Livro do Ábaco), publicado no ano de 1202.

De acordo com explicações de Belucci (et al., 2008, p. 05):

> Fibonacci tornou-se famoso, principalmente devido aos inúmeros temas desenvolvidos nesse trabalho. Nele aparecem estudos sobre o clássico problema envolvendo populações de coelhos, o qual foi a base para o estabelecimento da célebre sequência (números) de Fibonacci.

Pisa, na Itália, local onde Fibonacci nasceu, destacou-se no século XII como um local de grandes centros comerciais. Neste tempo, “possuía vários entrepostos comerciais espalhados pelo Mediterrâneo onde passavam mercadorias importadas no interior e do ultramar, tais como, as especiarias do Extremo Oriente” (RAMOS, 2013, p. 04).

Seu pai, Guglielmo del Bonacci, era um grande mercador e atuava, nesta época, como um fiscal alfandegário. O conhecimento de Fibonacci e seu deslumbramento através das descobertas matemáticas deu-se a partir das viagens que fazia com o seu pai por quase todo o Mediterrâneo.

Com isso, Fibonacci teve a oportunidade de conhecer vários lugares, como: o Egito, a Espanha, a Grécia e foi a partir dessas oportunidades que começou a aprender com vários professores islâmicos, onde a matemática árabe era conhecida por ser a mais desenvolvida na Europa Ocidental (RAMOS, 2013).

Depois disso, após conhecer e compreender acerca do sistema de numeração indo-arábicos, Fibonacci começou a identificar que este sistema era muito mais prático de se compreender em relação aos outros sistemas de numeração que já conhecia, como era o exemplo dos algarismos romanos. Foi com esta descoberta que Fibonacci escrever seu primeiro livro, o *Liber Abaci* (Livro do Ábaco).

Segundo explica Lívio (2011, p. 111) Fibonacci aponta que: “os nove números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com esses nove números e com o 0… qualquer número pode ser escrito…”. Corroborando a ideia de Lívio, Boyer (1974, p. 185), afirma que o Livro elaborado por Fibonacci “é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso dos numerais indo-arábicos é fortemente recomendado”.

No livro de Fibonacci era possível identificar inúmeros problemas, onde abordavam questões úteis para os mercadores, assim como as “conversões monetárias, cálculo de juros, médias, entre outras” (RAMOS, 2013, p. 04).

Um dos exemplos apresentados no *Liber Abaci* é descrito por Lívio (2011, p. 114), onde apresenta que:

> Um homem cujo fim se aproximava chamou seus filhos e disse: “Dividam meu dinheiro do modo como descreverei.” Para seu filho mais velho, ele disse: “Você terá 1 bezant [uma moeda de ouro originalmente cunhada em Bizâncio] e um sétimo do que sobrar.” Ao segundo filho, disse: “Pegue dois bezants e um sétimo do que sobrar.” Ao terceiro filho, disse: “Você pegará 3 bezants e um sétimo do que sobrar.” Assim, ele deu a cada filho 1 bezant a mais do que ao filho anterior e um sétimo do que restava e, para o último filho, tudo o que restava. Após seguirem cuidadosamente as instruções, os filhos viram que tinham dividido sua herança igualmente. Quantos filhos havia e qual o tamanho da herança.

A partir dessa obra, Fibonacci conquistou inúmeros prestígios e reconhecimentos e além da sua obra mais famosa, *Liber Abaci*, o estudioso também escreveu mais outros dois livros, denominados como: *O Practica Geometriae*, publicado no ano de 1220 e *Liber Quadratorum*, publicado no ano de 1225.

Em seu livro *O Practica Geometriae*, Fibonacci apresentou conhecimentos acerca da Geometria e da Trigonometria. Já em sua obra, *Liber Quadratorum*, apresentou conhecimentos que abordavam a Teoria dos Números, que foi considerada uma das obras mais avançadas da época (RAMOS, 2013).

Para se compreender acerca do pensamento de Fibonacci é preciso observar e analisar como ocorreu o seu raciocínio em relação ao problema da reprodução dos coelhos. Por isso, separou-se uma pequena subseção para esclarecimentos acerca desta problemática apresentada por Fibonacci.

4.2 Fibonacci e o problema da reprodução dos coelhos

Em seu primeiro livro, *Liber Abaci*, apresenta-se, no capítulo 12, a seguinte problemática, descrita também na dissertação de Andrade (2020, p. 42), cuja abordagem apresenta o que hoje conhecemos por sequência de Fibonacci:

> "Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?"

Após leitura do problema, é necessário que se acompanhe o que pode ocorrer nos seis primeiros meses:

a) No primeiro mês identifica-se apenas um par de coelho, que são considerados como filhotes;
b) No segundo mês, os coelhos que eram filhotes já se encontram em fase adulta. Portanto, continuasse com um par de coelhos;
c) No terceiro mês, nasce os primeiros filhotes do par de coelho do primeiro mês. Nesse sentido, agora apresentam-se dois pares de coelhos, compostos de um par de coelhos adultos e um par de filhotes.
d) No quarto mês, o par de coelho adultos, do primeiro mês de observação da situação-problema, gera novos filhotes. Totalizando, desse modo, três pares de coelhos, sendo compostos por: o par inicial de coelhos (já adultos e que procriaram a partir do terceiro mês); o

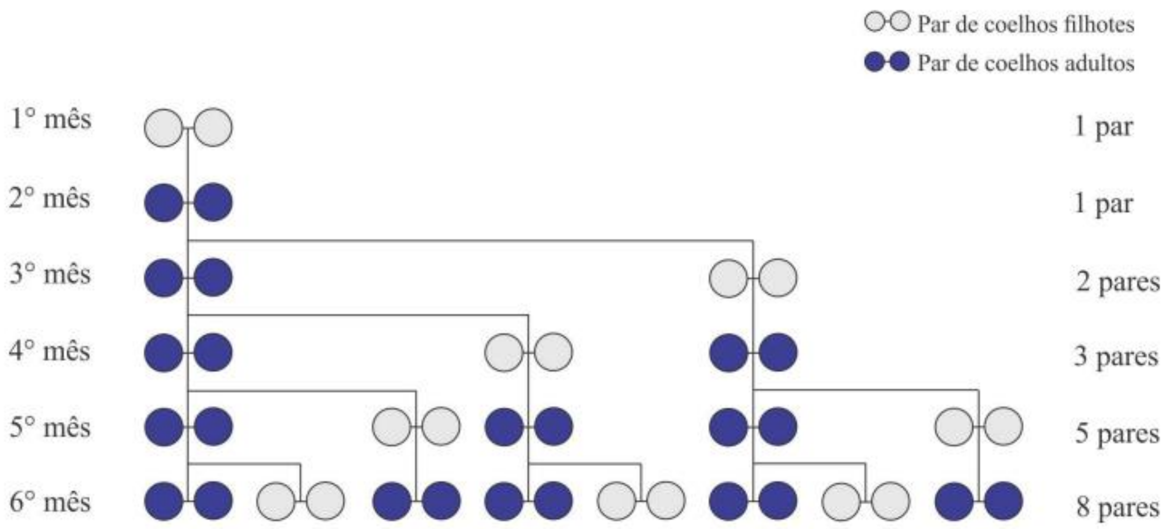
primeiro par de filhotes do casal de coelhos (agora em estado adulto) e o segundo par de filhotes;

e) No quinto mês, o par de coelho inicial gera o seu terceiro par de filhotes. Já o segundo par de coelhos (já adultos e fruto do primeiro casal) também gera novos pares; e o par de filhotes da gestação anterior, encontra-se em estado adulto. Desse modo, tem-se cinco pares de coelhos ao total, três partes de coelhos adultos e mais dois pares de filhotes, que no tempo propício gerará novas crias.

f) No sexto mês os três pares de coelhos, já em estado adulto, geram mais novas crias, onde cada par gerará mais novos pares de filhotes; os dois pares de filhotes apresentados no mês anterior, que eram filhotes, já se apresentam na forma adulta e que logo iniciarão o processo de procriação. Por fim, neste sexto mês, tem-se: oito pares de coelhos, sendo cinco de adultos e três de filhotes.

Para ilustrar melhor essa fase do crescimento populacional dos coelhos, apresenta-se a seguinte Figura 23.

Figura 23 - Crescimento populacional dos coelhos



Fonte: RAMOS (2013, p.06)

A partir da análise da descrição do problema acima, percebe-se que no próximo mês o número de par de coelho deverá apresentar a soma do número de pares de coelhos do mês anterior, junto ao número de pares de coelhos de adultos que já existem no mês anterior. Sendo assim, o sétimo mês deverão existir: treze pares de coelhos, distribuídos da seguinte forma: oito pares de coelhos do sexto mês mais cinco pares de coelhos filhotes e que foram gerados pelos pares adultos do sexto mês.

Nesse sentido, compreende-se que o número de casais de coelhos, a cada mês, acaba gerando a seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 e 144.

Dessa forma, entende-se que, ao observar a procriação dos coelhos durante um ano, apresentará um total de 144 coelhos.

A partir da Tabela 1, identifica-se todos os meses em subsequências, com a finalidade de responder a situação-problema apresentada por Fibonacci.

Tabela 1 - Pares de coelhos conforme problema estabelecido por Fibonacci

Mês	Pares de coelho adultos	Pares de coelhos filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: Elaborado pelo autor com base em ANDRADE (2020, p. 43)

A seguinte sequência dos números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,21,34, 55, 89,144… gerada a partir da situação-problema proposta por Fibonacci, em relação a reprodução dos coelhos, dá-se por meio de uma sequência, na qual é obtida a partir de cada termo. Ou seja, a partir do terceiro mês, soma-se os dois termos anteriores (os pares de coelhos já adultos) e assim sucessivamente.

De acordo com o que descreve Livio (2011) esta sequência começou a ser denominada como: sequência Fibonacci, a partir do problema proposto por ele, isso ocorreu no século XIX, quando o matemático Edouard Lucas (1842-1891) iniciou esse tratamento.

4.3 Fórmula fechada

Segundo Andrade (2020, p. 43) “sequências desse tipo, nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas ou sequências obtidas por recorrência”.

Dessa forma, tem-se a seguinte sequência:

F_n, ou seja, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $\cdot\cdot\cdot$, $F_{12} = 144$…

temos que o termo geral desta sequência é

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

A expressão F_n representa o número da sequência, F_{n+1} é o termo que segue F_n e F_{n+2} é o termo que vem depois de F_{n+1}.

4.3.1 Recorrências

Segundo explicação de Ramos (2013, p. 07):

> Essa relação define, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada Sequência de Fibonacci, cujos termos são chamados de Números de Fibonacci. Os Números de Fibonacci apresentam propriedades aritméticas notáveis que são, até hoje, objeto de investigação. Existe até uma revista intitulada *The Fibonacci Quarterly*, fundada em 1963, dedicada à pesquisa em torno desses números. Mas o que mais nos impressiona é o fato de que esses números aparecem na geometria, na Teoria dos Números, na genética, assim como surgem, inesperadamente, em fenômenos aparentemente desconexos, tais como, na distribuição das sementes dentro de um girassol, na árvore genealógica de um zangão e na relação com o Número de Ouro.

Desse modo, entende-se que a descoberta de Fibonacci, a partir do problema da reprodução dos coelhos é utilizada na atualidade também e auxilia na construção de um pensamento mais lógico.

Definição 4.3.1.1: Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores.

Definição 4.3.1.2: Quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores for do mesmo modelo que as funções do primeiro grau, é definida como linear.

Definição 4.3.1.3: Quando surge na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos, é definida como de segunda ordem.

Definição 4.3.1.4: Quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores, a é definida como homogênea.

4.3.2 Fórmula de Binet

Ao resolvermos a equação de recorrência para um termo qualquer da sequência de Fibonacci em função apenas da sua posição n, nos deparamos com a equação característica coincidindo com a equação que origina a razão áurea ou número de ouro.

$$F_{(n+2)} = F_{(n+1)} + F_n$$

$$F_{(n+2)} - F_{(n+1)} - F_n = 0 \text{ , } onde \ n \ \geq \ 0; \ F_0 = 0; F_1 = F_2 = 1$$

1º passo: Encontrar a equação característica, também conhecida como polinômio característico.

$$F_{(n+2)} = r^2; \ F_{(n+1)} = r; \ F_n = r^0 = 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Essa equação é conhecida e sabemos calcular suas raízes, logo:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; e \; r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

2º passo: Encontrar a equação geral.

$$Como\, r_1 \neq r_2,\; temos:$$

$$F_n = C_1 \,.\, (r_1)^n + C_2 \,.\, (r_2)^n$$

Pela resolução acima, teremos a seguinte equação geral:

$$F_n = C_1 \,.\, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \,.\, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A partir de então, como $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, seguimos com:

$$F_0 = 0 \Rightarrow C_1 \,.\, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \,.\, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \; (I)$$

$$F_1 \;=\; 1 \;\Rightarrow\; C_1\,.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \;+\; C_2\,.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; C_1\,.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \;+\; C_2\,.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; -C_2\,.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \;+\; C_2\,.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; \frac{C_2}{2}\,.\left[\left(-1-\sqrt{5}\right) \;+\; \left(1-\sqrt{5}\right)\right] \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; \frac{C_2}{2}\,.\left(-2\sqrt{5}\right) \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; C_2\,.\left(-\sqrt{5}\right) \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; C_2 \;=\; \frac{1}{\left(-\sqrt{5}\right)} \;=\; -\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)}$$

De (I), temos que $C_1 = - C_2$, logo:

$$\Rightarrow\; C_1 \;=\; -C_2 \;=\; -\left(\frac{-1}{\left(\sqrt{5}\right)}\right) \;=\; \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)}$$

Portanto, chegamos a seguinte fórmula conhecida como Fórmula de Binet:

$$F_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \;-\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

4.4 A sequência de Fibonacci e a razão áurea

Ao analisar a sequência de Fibonacci é possível compreender que existe uma conexão entre esta sequência e razão áurea, para isso, apresenta-se a tabela elaborada pelo autor com base nos estudos de Ramos (2013, p. 39), onde indica esta relação surpreendente.

Tabela 2 - Relação entre Números de Fibonacci e o Número de Ouro

n	F_n	F_n/F_{n-1}
1	1	-
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,66666666666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,61538461538462
9	34	1,61904761904762
10	55	1,61764705882353
11	89	1,61818181818182
12	144	1,61797752808989
13	233	1,61805555555556
14	377	1,61802575107296
15	610	1,61803713527851
16	987	1,61803278688525
17	1597	1,61803444782168
18	2584	1,61803381340013
19	4181	1,61803405572755
20	6765	1,61803396316671
…	…	
φ =		**1,6180339887499**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo explica Ramos (2013) a razão entre os termos apresentados na Sequência de Fibonacci, consecutivamente, tendem para o Número de ouro, quando n tende a infinito.

De acordo com Lívio (2011, p. 121) essa conexão entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci foi descoberta no ano de 1611 por Johannes Kepler, famoso astrônomo alemão. No entanto, apesar da descoberta não houve uma comprovação verídica sobre a possibilidade.

Anos depois, comprovou-se essa conexão através das ideias apontadas por Robert Simson (1687-1768).

Outro exemplo dessa relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci é apresentada por Nazaré (2022, p. 15), onde explica que: “O parentesco surge quando se divide o número com seu antecessor a partir da 5° casa em diante da sequência de Fibonacci, com o resultado, surge a aproximação do Número de Ouro”. A Tabela 3, com base na explicação de Nazaré (2022) traz essas relações.

Tabela 3 - Proporção entre Números de Fibonacci e o Número de Ouro

Sequência de Fibonacci	Número de Ouro	Razão
0+1= 1	1	1/1
1+1=2	2	2/1
1+2=3	1,5	3/2
2+3=5	1,666	5/3
3+5=8	1,6	8/5
5+8=13	1,625	13/8
8+13=21	1,615	21/13

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Nazaré (2022, p. 15)

Após análise de ambas as tabelas elaboradas pelo autor, pode-se conjecturar que quanto maior for o número da sequência de Fibonacci dividido pelo anterior, maior será a aproximação ao número de ouro. Ao ponto de questionar se, em algum momento, em números extremamente grandes ou em uma escala infinita, será obtido o próprio número de ouro como resultado desta divisão. Questiona-se: a razão entre dois números de Fibonacci converge

Nessa linha de raciocínio, pode-se calcular essa razão quando o limite da posição de um número desta sequência tende ao infinito. Para tal, calcula-se o limite utilizando a fórmula de Binet, partindo do pressuposto que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

4.4.1 Cálculo do limite utilizando a fórmula de Binet

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left[1-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}}{1-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{\frac{1-\ \sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\frac{1-\ \sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{1+\ \sqrt{5}}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{1+\ \sqrt{5}}\right)^n}$$

Sabendo que:

$$0 < \left|\frac{1-\ \sqrt{5}}{1+\ \sqrt{5}}\right| < 1$$

temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{1+\ \sqrt{5}}\right)^n = 0$$

Conclui − se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{1+\ \sqrt{5}}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{1+\ \sqrt{5}}\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}\right) - 0.\left(\frac{1-\ \sqrt{5}}{2}\right)}{1-0}$$

$$= \left(\frac{1+\ \sqrt{5}}{2}\right) = \Phi$$

4.5 Potências de Φ e a sequência de Fibonacci

Inicialmente será demonstrado uma relação entre as potências de φ e os termos da sequência de Fibonacci.

$\varphi^1 = 0 + \varphi$;

$\varphi^2 = 1 + \varphi$;

$\varphi^3 = \varphi.\varphi^2 = \varphi.(1 + \varphi) = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$;

$\varphi^4 = \varphi.\varphi^3 = \varphi.(1 + 2\varphi) = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2.(1 + \varphi) = \varphi + 2 + 2\varphi = 2 + 3\varphi$;

$\varphi^5 = \varphi.\varphi^4 = \varphi.(2 + 3\varphi) = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3.(1 + \varphi) = 2\varphi + 3 + 3\varphi = 3 + 5\varphi$;

$\varphi^6 = \varphi.\varphi^5 = \varphi.(3 + 5\varphi) = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5.(1 + \varphi) = 3\varphi + 5 + 5\varphi = 5 + 8\varphi$;

…

A tabela 4 resume os resultados obtidos com a relação descrita entre as potências de φ e os termos da sequência de Fibonacci, considerando que $f_0 = 0$.

Tabela 4 - Relação entre potências de φ e os termos da sequência de Fibonacci

n	**φ^n**
1	$0 + \varphi = f_0 + f_1\varphi$
2	$1 + \varphi = f_1 + f_2\varphi$
3	$1 + 2\varphi = f_2 + f_3\varphi$
4	$2 + 3\varphi = f_3 + f_4\varphi$
5	$3 + 5\varphi = f_4 + f_5\varphi$
6	$5 + 8\varphi = f_5 + f_6\varphi$
7	$8 + 13\varphi = f_6 + f_7\varphi$
…	…

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando que φ é raiz da equação $x^2 = x + 1$, então, $\varphi^2 = \varphi + 1$. Logo, para $n \geq 2$ temos que: $x^n = f_n.x + f_{n-1}$, onde u_n é uma sequência de Fibonacci qualquer, considerando $f_0 = 0$, podemos escrever: $\varphi^n = f_n.\varphi + f_{n-1}$ $\forall$ $n \geq 1$, condizente com a tabela 4.

Usando indução matemática para verificar a sequência de Fibonacci para n = 2, temos que:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+4+1}{4} = 1 + \frac{2+2\sqrt{5}}{4}$$

$$=1 + \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi = f_1 + f_2\varphi$$

Logo, o caso base é verdade.

Então, supondo que $\varphi^n = f_{n-1} + f_n\,\varphi$, provaremos que $\varphi^{n+1} = f_n + f_{n+1}\,\varphi$.
Temos:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n\varphi = (f_{n-1} + f_n\varphi)\varphi = f_{n-1}\varphi + f_n\varphi^2$$

$$f_{n-1}\varphi + f_n(1+\varphi) = f_{n-1}\varphi + f_n + f_n\varphi$$

$$\varphi(f_{n-1} + f_n) + f_n = f_n + f_{n+1}\varphi,$$

Como queríamos demonstrar.

A manifestação da sequência de Fibonacci e a proporção áurea “estão interligadas através de cálculos e do nosso meio natural” (NAZARÉ, 2022, p. 16). Exemplos disso ocorrem em situações que fazem parte do cotidiano do ser humano e em casos envolvendo a natureza, como nas formas espirais de um girassol ou de uma pinha. Esses são apenas alguns exemplos do que se pode encontrar na natureza.

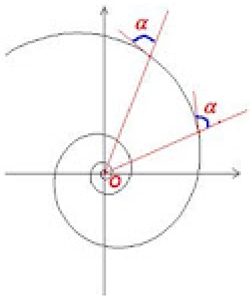
Conhecendo acerca do número de ouro e da sequência de Fibonacci, no próximo capítulo apresenta-se as ocorrências e aplicações.

5 OCORRÊNCIAS E APLICAÇÕES

Ao longo deste estudo nota-se que a sequência de Fibonacci tem grande representatividade em ocorrências na natureza e na ciência. Um exemplo disso é a espiral de ouro da natureza, que também pode ser denominada como Espiral Equiangular.

De acordo com Santos (2020, p. 45) “este nome reflete outra propriedade da Espiral Logarítmica: se traçarmos uma linha reta do polo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente sempre o mesmo ângulo”. Na Figura 24 é possível notar o desenho de uma Espiral Equiangular.

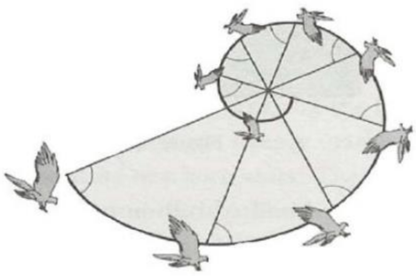
Figura 24 - Espiral Equiangular



Fonte: Livio, 2011

Um exemplo claro dessa espiral na natureza é o movimento que um falcão peregrino realizada ao atacar uma de suas presas. Segundo explica Santos (2020, p. 45), isso ocorre porque “seus olhos estão nas laterais da sua cabeça, eles precisam inclinar a cabeça em torno de 40 graus para um dos lados e assim não perder o alvo de vista”.

Figura 25 - Voo do falcão peregrino



Fonte: Livio, 2011

Nesse sentido, conforme apresenta-se na Figura 25, o falcão acaba por descer em uma trajetória espiral logarítmica, com a finalidade de manter este ângulo sempre em constância e utilizando a propriedade Equiangular.

Além disso, há evidências que algumas plantas possuem, curiosamente, o número da sequência de Fibonacci, gerando ainda mais charme por trás da beleza que há nas flores e plantas.

Figura 26 - Disposição das sementes de um girassol

Fonte: Francisco, 2017.

Na Figura 26, por exemplo, nota-se que o girassol possuí uma distribuição de sementes no miolo de sua flor, o que segundo relata Santos (2020, p. 46) “são várias espirais tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário e a quantidade delas está relacionada com os números de Fibonacci”.

Ao observar um girassol tem-se, inicialmente, que identificar o seu tamanho, pois é a partir dele que existem algumas diferenças.

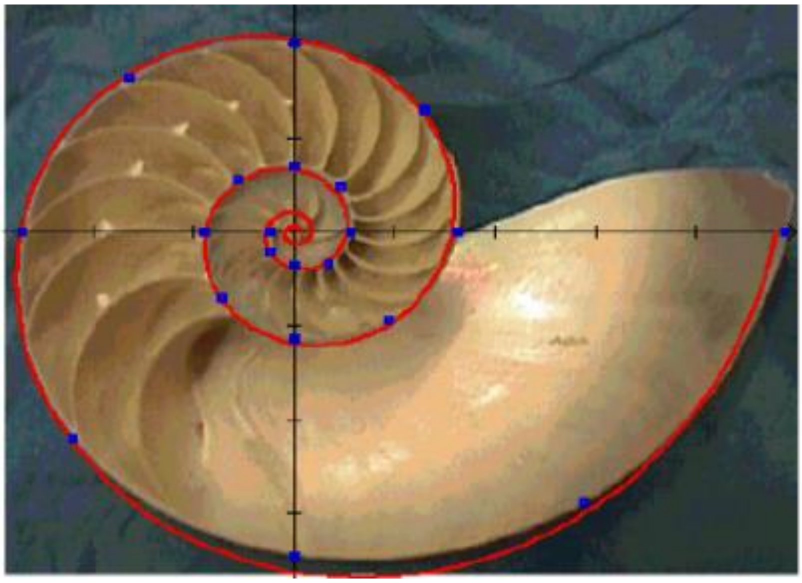
Um girassol grande apresenta 21 espirais em um sentido e, em outra direção (sentido) pode observar-se um número de 34 espirais, que são acomodadas em outra direção de sentido.

Há ocorrências de girassóis que possuem 34 espirais em um sentido e no outro, por exemplo, são 55 sementes. A ordem continua com 55 e 89; 89 e 144 e que são evidências da sequência apresentada por Fibonacci.

Além da flor e da trajetória do falcão peregrino, tem-se também a associação de uma concha, denominada como Concha de Náutilo e a Espiral de Ouro.

Na Figura 27 identifica-se esta concha, que cresce de maneira espiral logarítmica.

Figura 27- Concha dos Náutilus

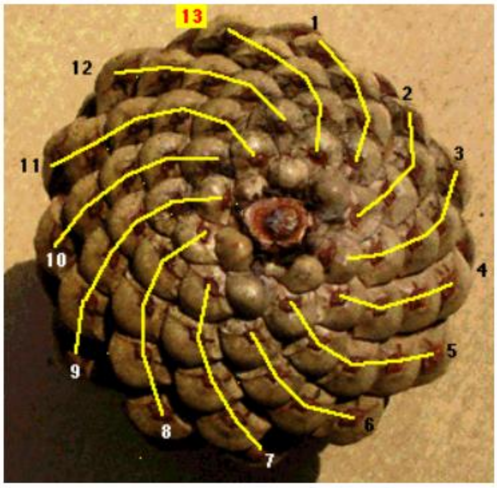


Fonte: Landim, 2014.

Essas são, portanto, algumas das ocorrências evidenciadas pela sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

Ainda em relação a sequência dourada, a espiral dourada ocorre com frequência na natureza; aparece na forma de diferentes plantas, de galáxias espirais e na forma de furacões, podendo ainda distinguir-se nas proporções na face de um ser humano. O número de verticilos em muitas flores e frutas também se encaixa em pares consecutivos de termos nessa sequência: os girassóis têm 55 verticilos para um lado e 89 para o outro, ou 89 e 144, conforme mostra Figura 28.

Figura 28 - Sequência de Fibonacci: pinhão e flor margarida



Fonte: adaptado de www.google.com (2023)

As margaridas apresentam as sementes na forma de 21 e 34 espirais. E qualquer variedade de abacaxi ou pinhão, como mostrado na Figura 28, sempre apresenta um número de espirais que coincide com dois termos da sequência do coelho de Fibonacci, 8 e 13; ou 5 e 8. Então, o mundo vegetal tem os termos da sequência de Fibonacci programados em seus códigos genéticos para o crescimento. Uma espiral, que de forma bastante apertada, está presente no crescimento das conchas dos moluscos, nos chifres dos ruminantes, entre outros. Ou seja, a espiral do crescimento e a forma do reino animal.

Na próxima seção, apresentam-se algumas sugestões para atividades didáticas a serem aplicadas para aluno do Ensino Médio, que, desde o início desta pesquisa estabelece-se como o centro deste trabalho.

Com isso, visa-se proporcionar aos estudantes uma visão da matemática mais relacionada com o seu cotidiano, levando sempre em consideração aquilo que os alunos já sabem e conseguem identificar de problemas a serem resolvidos.

Nesse sentido, atingindo esta proposta mais realista com o que o aluno apresenta é possível incentivar e motivá-los a pensar de maneira crítica e mais racional.

6 PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Esta seção busca apresentar algumas atividades que foram construídas com base no conteúdo abordado durante esta pesquisa, o Número de ouro e a sequência de Fibonacci.

No entanto, para esclarecimentos, aponta-se, inicialmente, alguns indicativos que são apresentados de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Segundo o que são apresentadas nela, no que diz respeito ao ensino da matemática na educação básica, encontra-se a “habilidade de proporcionar argumentos convincentes utilizando o conhecimento matemático, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico no educando”.

Com isso, segundo é apresentado na BNCC (BRASIL, 2018), nota-se que:

> **EF07MA17:** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas (BRASIL, 2018, p. 307); **EF08MA11**: Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes (BRASIL, 2018, p. 313); **EF09MA08**: Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (BRASIL, 2018, p. 317).

A partir desse contexto, compreende-se que o Número de Ouro, além de estar conectado com a Sequência de Fibonacci, acaba, por sua vez, interligando-se com outras várias unidades temáticas, assim como: a geometria, a álgebra, os números irracionais, entre outros.

Por este motivo, entende-se que este conteúdo, principalmente, deve ser compartilhado com os alunos a partir dos anos finais da educação, com o intuito de esclarecer sobre a contextualização dos conteúdos e estimular os alunos a criarem hábitos de serem mais reflexivos e analíticos sobretudo o que se pode observar ao redor, durante as investigações expostas no seu próprio cotidiano.

Com isso, mostra-se que “a matemática não se restringe somente a cálculos”, (RAMOS, 2013, p. 15), mas é uma disciplina que vai muito além de conteúdos prontos e que precisam ser decorados, mas que evidenciem a sua própria realidade.

Por fim, apresentam-se algumas sugestões de atividades que foram baseadas nesses conteúdos e que podem ser abordadas para alunos do Ensino Médio.

Os conteúdos apresentados auxiliam o professor e podem ser expostos aos alunos do Ensino Médio, ou seja, do 1º ano ao 3º ano, e é possível que seja necessário utilizar mais de uma aula, dependendo da dinâmica do professor e do progresso de compreensão da turma.

Inicialmente há a necessidade de contextualizar os alunos, a fim de que compreendam o que é um Número de ouro, de onde surgiu esta expressão e como ocorreu a sua dinâmica histórica. Isso também deve ocorrer com a Sequência de Fibonacci, que deve apresentar uma breve abordagem histórica também.

6.1 Atividade pedagógica 1 – Identificando o corpo humano: uma visão matemática

Identificando que o corpo dos seres humanos também faz referência a utilização da razão áurea, inicia-se esta primeira atividade, realizando algumas anotações que apresentam este indicativo, assim como:

* Razão da altura pela altura do umbigo;
* Razão entre a medida do ombro até a ponta do dedo médio;
* Razão da altura dos quadris até a altura dos joelhos;
* Razão da medida da cintura até a cabeça;
* Razão do tamanho dos dedos

Nisso, o professor organizará grupos de três pessoas e juntos irão calcular as médias apresentadas, para isso, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$Xm = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

O desvio padrão é uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados. Ou seja, o desvio padrão indica o quanto um conjunto de dados é uniforme. Quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados. Explicado isso, os alunos devem calcular o desvio padrão (*DP*) do conjunto de medidas observadas.

$$DP = \sqrt{\frac{(X_1 - X_m)^2 + (X_2 - X_m)^2 + (X_3 - X_m)^2}{3}}$$

Nota-se que esta atividade promove o conhecimento de alguns conceitos fundamentais como estatística, média aritmética e pode servir como introdução ao conceito de proporção, média e coleta de dados.

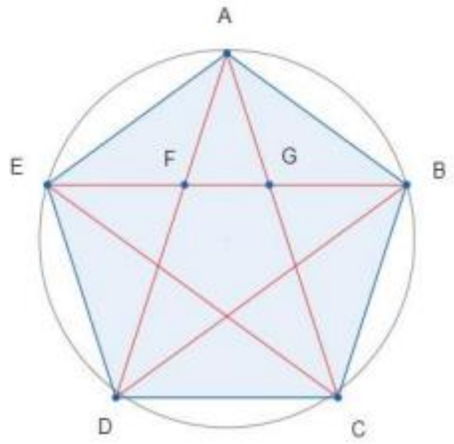
6.2 Atividade pedagógica 2: Construção de um Pentagrama e um Pentágono

Baseada na atividade apresentada por Ramos (2013), inicialmente os alunos deverão realizar uma circunferência com o compasso. Após isso, o aluno deve pegar o transferidor, onde deve-se cortar cinco partes iguais, neste ponto é importante que cada lado dividido pelos alunos apresente 72º de cada segmento. Com os pontos separados corretamente os alunos devem nomeá-los (A, B, C, D, e E), conforme disposição do ponto.

Feito isso, as retas precisam ser traçadas, a partir de: AC, CE, EB, BD e, por fim, o ponto DA, onde nota-se a construção do pentagrama.

Nisso, a razão deve ser calculada assim: DA/FD, FD/FA, DA/CD e FA/FG, conforme segue abaixo:

Figura 29 - Construção de um Pentagrama



Fonte: Nazaré, 2020

Tabela 5 - Atividade 2

Comprimento (cm)	Valor exato
DA	
CD	
FD	
FA	
FG	
Razão	**Cálculo**
DA/FD	
FD/FA	
DA/CD	
FA/FG	

Fonte: Ramos, 2013

6.3 Atividade pedagógica 3: Procurando o número de ouro

Inicialmente se realiza uma explicação para cada uma das equipes:

1) A palavra proporção é usada com muita frequência, certamente se lembrarão dos problemas da regra de três, mas o que significa proporção? Os alunos irão explicar o significado com suas palavras e com exemplos.

2) Encontre, através do *GeoGebra*, as soluções da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Uma de suas raízes é a chamada “razão áurea ou número de ouro”. Qual é o valor? Podemos escrevê-lo como uma fração?

3) Agora que descobrimos o valor do número áureo, vamos encontrá-lo a partir do retângulo áureo.

O professor irá explique o procedimento para obtê-lo. Será proposto para as equipes que o encontrem dividindo um segmento em duas partes, de modo que a parte longa, dividida pela parte curta, seja igual à linha completa, dividida pela parte longa. Que relação eles encontram com o significado dado de proporção?

4) As atividades a seguir serão distribuídas entre as equipes de acordo com o número de equipes formadas:

a) Investigar, em diferentes obras de arquitetura e arte pictórica, a existência do número áureo usando o retângulo de ouro. Sugerimos que os alunos investiguem: O Parthenon e "Las Meninas" de Velazquez.

b) Em uma imagem do Parthenon e Las Meninas, será realizado um desenho dos retângulos dourados e a espiral dourada, usando o *GeoGebra* para essa parte.

c) Repetindo os itens anteriores, serão feitas as mesmas atividades de antes, mas com a *Notre Dame* em Paris, a Escola de Atenas, a Torre Eiffel em Paris e com a Mona Lisa de Leonardo da Vinci.

Todas as equipes finalizam o trabalho com as seguintes atividades:

1) E agora cada aluno/equipe mostrará a sua criatividade. Pedimos que façam um desenho que contenha a proporção áurea.

2) Ao final das atividades, apresentar em plenária um infográfico com as conclusões que incluam a resposta fundamentada à pergunta inicial.

Além disso, para entretenimento dos alunos, será exibido o filme **Donald no País da Matemágica e O Número de Ouro**, disponível em:

https://www.youtube.com/watch?v=g8oqgrVhA_8&pp=ygUhcGF0byBkb25hbGQgZSBhIHByb3BvcsOnw6NvIGF1cmVh.

Acessado por último em 23/09/2023

Fase de encerramento da atividade

Nesta fase, cada equipe apresenta seu infográfico e os resultados obtidos são discutidos abrindo um debate para responder à pergunta inicial: podemos encontrar beleza na Matemática?

Avaliação de Aprendizagem

Durante o desenvolvimento das atividades, o professor cumpre o papel de facilitador da aprendizagem e se constitui como mais um membro de cada equipe.

Então, será realizada uma avaliação formativa e somativa, essa etapa da avaliação não é fácil, principalmente quando a organização dos alunos é através do formato de equipe. Cada professor deverá realizar o processo avaliativo porque é fundamental o acompanhamento da aprendizagem e a presença e orientação professor.

Dessa forma, a avaliação formativa é realizada através da observação do trabalho em cada uma das equipas. Algumas observações: a distribuição de papéis, a cooperação e o relacionamento entre seus membros, se há discussão sobre as diferentes propostas antes da tomada de decisão, o respeito a opinião dos outros, a ajuda a quem apresenta alguma dificuldade. Observa-se também a análise e tratamento das informações e o uso correto da linguagem formal. A apresentação e defesa dos trabalhos finais são avaliadas (avaliação somativa).

6.4 Caderno de atividades (banco de questões)

Para auxiliar o docente a trabalhar questões que envolvam o conteúdo abordado neste trabalho, elaborou-se um caderno de atividades em formato de banco de questões com perguntas com opções de múltipla escolha com cinco itens (a, b, c, d, e) sendo um único correto e ao final é disponibilizado o gabarito.

01 - Na sequência de Fibonacci, qual é o resultado da divisão entre um termo qualquer e seu antecessor à medida que a sequência progride para o infinito?

a) O número de ouro.

b) O número pi.

c) O número primo mais próximo.

d) O número 2.

e) O número zero.

02 - O número de ouro é uma constante irracional, o que significa que não pode ser expresso como uma fração exata. Qual é o resultado aproximado do quadrado do número de ouro?

a) 0,786 b) 0,854 c) 0,618 d) 1,618 e) 2,618

03 - O número de ouro está relacionado à proporção áurea, que pode ser expressa pela fórmula:

a) φ = (1 - $\sqrt{2}$) / 2

b) φ = (1 - $\sqrt{5}$) / 2

c) φ = (-1 + $\sqrt{5}$) / 2

d) φ = (1 + $\sqrt{5}$) / 2

e) φ = (1 + $\sqrt{2}$) / 2

04 - Qual é a relação entre dois números consecutivos na sequência de Fibonacci à medida que a sequência progride para o infinito?

a) A diferença dos dois números é igual ao número anterior.

b) A soma dos dois números é igual ao próximo número.

c) A diferença entre os dois números é igual ao próximo número.

d) O quociente entre os dois números é igual ao número de ouro.

e) O produto dos dois números é igual ao número de ouro.

05 - A "razão áurea" (ou número de ouro) pode ser definida de várias maneiras diferentes e aparece em várias construções humana e da natureza. Esse número, geralmente, é representado pela letra grega Φ ("phi") e tem como valor $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Em várias situações, é mais interessante a utilização do inverso multiplicativo de Φ. Qual é o valor de 1/Φ?

a) ($\sqrt{5}$ + 2) /2

b) ($\sqrt{5}$ + 1) /2

c) ($\sqrt{5}$ − 1) /2

d) (1 − $\sqrt{5}$) /2

e) (2 − $\sqrt{5}$) /2

06 - Leia o texto a seguir.

Por que não dividir um segmento unitário em duas partes iguais? A resposta é que, simplesmente, com a igualdade não existe diferença, e sem diferença não há universo perceptivo. O "número de ouro" é uma razão constante derivada de uma relação geométrica que os antigos chamavam de "áurea" ou de divisão perfeita, e os cristãos relacionaram este símbolo proporcional com o Filho de Deus.
(Adaptado de: LAWLOR, R. Mitos – Deuses – Mistérios – Geometria Sagrada. Madrid: Edições del Prado, 1996. p.46.).

O número de ouro, denotado pela letra grega Φ, é definido como a única raiz positiva da equação $x^2 = x + 1$.

Com base no texto e na definição do número de ouro, atribua V (verdadeiro) ou F (falso) às afirmativas a seguir:
( ) $2\Phi = 1 + \sqrt{5}$.
( ) O número de ouro Φ pode ser expresso como um quociente de números inteiros não nulos.
( ) Os números Φ, Φ + 1, 2Φ + 1 estão em progressão geométrica de razão Φ.
( ) $1/\Phi = \Phi - 1$.
( ) Φ não pode ser expresso através de uma equação, por ser derivado de uma relação geométrica.
Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.

a) V, V, V, F, F.

b) V, F, V, V, F.

c) V, F, F, F, V.

d) F, V, V, F, V.

e) F, V, F, V, F.

07 - A proporção áurea pode ser encontrada em várias estruturas arquitetônicas famosas. Suponhamos que a relação entre a largura e a altura de um prédio segue a proporção áurea. Se a largura deste prédio é 65 metros, qual será a sua altura aproximada?

a) 22,75 metros.

b) 34,25 metros.

c) 40,18 metros.

d) 54,75 metros.

e) 62,50 metros.

08 – Suponha que uma carteirinha de estudante possua dimensão padrão de 42,80 mm de altura e que você seja o responsável pela sua confecção e queira aplicar a proporção áurea, também conhecida como número de ouro, para determinar a largura ideal do documento. Qual é a largura aproximada documento para que este siga a proporção áurea? Adote 1,618 para o número de ouro.

a) 53,98 mm.

b) 62,75 mm.

c) 69,25 mm.

d) 89,44 mm.

e) 100,15 mm.

09 - A sequência de Fibonacci possui uma propriedade interessante chamada "recursividade". Qual a característica desta sequência que justifica esse fato?

a) Cada termo da sequência é igual à soma dos dois termos anteriores.

b) Cada termo da sequência é igual ao produto dos dois termos anteriores.

c) Cada termo da sequência é igual ao dobro do termo anterior.

d) Cada termo da sequência é igual ao triplo do termo anterior.

e) Cada termo da sequência é igual ao quadrado do termo anterior.

10 - A proporção áurea costuma ser relacionada a várias estruturas arquitetônicas famosas. Qual das opções abaixo representa um monumento que se atribui a proporção áurea em sua construção?

a) Torre Eiffel.

b) Taj Mahal.

c) Coliseu de Roma.

d) Empire State Building.

e) Parthenon.

GABARITO

01 - A	06 - B
02 - E	07 - C
03 - D	08 - C
04 - D	09 - A
05 - C	10 - E

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção desta pesquisa deu-se a partir da observação do Número de Ouro e a sequência de Fibonacci e as suas relações com as abordagens geométricas e em outras aplicações da matemática.

Por isso, a presente pesquisa indicou uma relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci que, a partir de observações realizadas pelo homem foram apontando a importância da matemática em tudo que nos rodeia.

A partir da realidade dos alunos o professor de matemática tende a sentir-se desafiado, a fim de mostrar aos seus estudantes que a matemática pode sim ser um instrumento necessário e interessante de abordagem.

Por este motivo, sabendo que a matemática ainda é conhecida como uma disciplina de difícil compreensão que buscou-se apresentar este conteúdo, apresentando, inicialmente, uma breve contextualização sobre a temática.

Os objetivos desta pesquisa foram atingidos em partes, no entanto, as atividades que eram o objetivo desta pesquisa ainda precisam ser moldadas, trazendo novas contribuições e um sadio desenvolvimento com tudo o que está ao redor.

Espera-se que esta pesquisa possa levar os professores e futuros professores a repensarem sobre a didática aplicada em sala de aula, que, muitas vezes, pode estar descontextualizada, não fazendo parte da vida dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Jorge Gonçalves. O método geométrico euclidiano. **Revista Conatus-Filosofia de Spinoza**, v. 10, n. 20, p. 57-68, 2018.

AFEITOS, Carlos Domingues. **O número de Ouro**. 2013. 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2013.

AJZENBERG, Elza. Da Vinci e a busca do conhecimento. **Revista USP**, n. 122, p. 122-140, 2019.

ALBUQUERQUE, Rafael Vale Geroncio Borges. **A sombra do rei:** análise da personagem Xerxes na tragédia Persas de Ésquilo. 2022. 135f. Dissertação (Mestrado em Estudos em Literatura Comparada) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2022.

ANDRADE, Tiego de Moraes. **A proporção divina**: estudando a beleza do Número de Ouro na Matemática. 2020. 146f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.

ARAUJO, Matheus Treuk Medeiros. A inscrição de Behistun (c. 520 aC): tradução do texto Persa Antigo para o Português, introdução crítica e comentários. **Revista de História**, n. 182, p. 1-35, 2023.

ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de matemática**, v. 6, 1985.

BECKER, Elsbeth Léia Spode. Jerusalém e sua relação com as três grandes religiões monoteístas. **Disciplinarum Scientia Ciências Humanas**, v. 20, n. 2, p. 255-267, 2019.

BELUSSI, G. et al. **Número de Ouro**. Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BERLINSKI, David. **Os elementos de Euclides:** uma história da geometria e do poder das ideias. São Paulo: Schwarcz-Companhia das Letras, 2018.

BRASIL. Ministério da educação. **Base nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRENNER, Daniela Bierhals; LÜBECK, Marcos. Razão Áurea: conexão com a natureza, o corpo humano, a pintura e a arquitetura. **Revista:** Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE, v. 1, 2016.

CABRAL, Rosimere Mendes. **Bibliotecas de Alexandria:** construções políticas da memória. 2010. Dissertação (Mestrado em Memória Social) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

CARVALHO, Gracielle Simões. **Geometrias não euclidianas**: uma proposta de inserção da geometria esférica no ensino básico. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2017.

CASAL, Celvio Derbi. **A biblioteca universal**: uma história do ideal da acumulação de conhecimento. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Biblioteconomia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

CASSELA, Ezequias; ANDRÉ, Amado Leonardo; CABRERA, Yanileidy Moreira. A proporção áurea como base de senso estético em desenhos artísticos. **European Review of Artistic Studies**, v. 12, n. 1, p. 56-73, 2021.

CELUQUE, Leonardo. **A Série de Fibonacci:** um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes. 2004. Dissertação (Mestrado em História das Ciências) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2004.

CHÂTELET, François; DUHAMEL, Olivier; PISIER, Évelyne. **História das idéias políticas**. São Paulo: Schwarcz-Companhia das Letras, 2018.

CIVITATIS, Atenas. **Partenon de Atenas**. 2021. Disponível em: https://www.tudosobreatenas.com/partenon. Acesso em: 21 fev. 2023.

CORREGIO, Orlando. **A contribuição da teoria de Luca Pacioli [1445-1517] para a solidificação universal do método das partidas dobradas**. 2006. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

CUPAIOLI, Marcos Eder. **O teorema de pitágoras em uma abordagem experimental**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2016.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 16. ed. São Paulo: Papirus Editora, 2007.

DINIZ, Alex Santos Moura. **Uma análise histórica sobre os elementos de Euclides.** 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

EVANGELISTA, Fernanda Mayer. **Incêndios em bibliotecas**: a perda da memória patrimonial e os prós e contras dos métodos de prevenção e controle. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Biblioteconomia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

FARIA, Leonardo. **Razão áurea**: Matemática e Arte, a verdadeira harmonia!. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2017.

FERREIRA, Carolina Assed. **A privatização da guerra e seus impactos no direito internacional humanitário.** 2011. Tese (Doutorado em Direito) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

FERREIRA, Maria do Rosário. Pedro de Barcelos e Fibonacci: da forma como mediação (sobre a estrutura original da Crónica de 1344). **Guarecer. Revista Eletrónica de Estudos Medievais**, n. 1, p. 17-32, 2016.

FLOWER, Derek Adie. **Biblioteca de Alexandria:** as histórias da maior biblioteca da Antiguidade. 2 ed. São Paulo: Nova Alexandria, 2019.

FRANCISCO, Samuel Vilela de Lima. **Entre o fascínio e a realidade da razão áurea**. 2017. 119 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2017.

GAMAS, Carlos Alberto Duarte. A matemática em Alexandria: convergência e irradiação. **Revista Archai**, n. 11, p. 47-47, 2013.

GALVÃO, Lamartine Pragana. Geometria Hiperbólica: Explorando o Disco de Poincaré no Ensino Médio. **Revista Científica Fundação Osorio**, v. 2, n. 1, p. 38-53, 2017.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

JESUS, Sandra Vanessa da Silva. **Os números figurados e a sequência de Fibonacci no EB.** 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico) – Universidade de Aveiro, Aveiro, 2013.

JUNIOR, Gilmar Kruchinski. **A função dos oráculos no livro I das histórias de Heródoto**. 2015. Dissertação (Mestrado em Estudos Clássicos) – Universidade de Coimbra, Coimbra, 2015.

JUNIOR, José Baracat. Exemplo ou contraexemplo? O caso de uma estátua nas Enéadas de Plotino. **Revista Archai**, n. 10, p. 73-83, 2013.

JUVARI, Stefan Cunha. **História das epidemias**. São Paulo: Contexto, 2020.

KIFFER, André Geraque. **Campanhas Persas nas Guerras Medas, 494-479 a.C**. Rio de Janeiro: Clube de Autores, 2010.

KIFFER, André Geraque. **Guerra de Alexandre, 336-323 a.C**. Rio de Janeiro: Clube de Autores, 2013.

KRIWACZEK, Paul. **Babilônia:** a Mesopotâmia e o nascimento da civilização. São Paulo: Schwarcz-Companhia das Letras, 2018.

LAGE, Celina F. Diálogo entre Fídias e William Kentridge na paisagem cultural intertemporal da Acrópole de Atenas: interatividade e performance do público na arte antiga e contemporânea. **Dramaturgias**, n. 19, p. 104-115, 2022.

LAGO, Danielle Michaelsen. **Um estudo das cônicas**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo, SP: Atlas 2003.

LANDIM, N. P. **Razão Áurea:** Expressando a beleza desse número para o ensino médio. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, 2014.

LEÃO, Delfim Ferreira. **A globalização no mundo antigo:** do polites ao kosmopolites. Coimbra: Coimbra University Press, 2012.

LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea-aplicações no ensino básico**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

LÍVIO, M. **Razão Áurea:** a história de Fi, um número surpreendente. 6. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

LYONS, Jonathan. **A casa da sabedoria:** como a valorização do conhecimento pelos árabes transformou a civilização ocidental. São Paulo: Schwarcz, Companhia das Letras, 2011.

MANGUEL, Alberto. **A biblioteca à noite**. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2019.

MARRIOTT, Emma. **A história do mundo para quem tem pressa:** mais de 5 mil anos de história resumidos em 200 páginas!. Rio de Janeiro: Valentina, 2015.

MARTINS, P. C. O número de Ouro e a Divina Proporção. In: SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA, 22., 2008. [S.l.]. **Anais**... [s.l.]: Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2008.

MEDEIROS, Ana Lígia. As bibliotecas na Antiguidade. **Memória e Informação**, v. 3, n. 2, p. 69-85, 2019.

MELO, A. L. **Número de Ouro.** Estudo Prático, 2015. Disponível em: https://www.estudopratico.com.br/numero-de-ouro-historico-e-aplicacoes/. Acesso em: 20 fev. 2023.

MELO, Josivaldo Silva. **Uma visualização e a representação planar de sólidos na geometria espacial.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

MIGUEL, A. **Números Irracionais**. Campinas: Delta Xis, 1993. (Coleção Tópicos de Ensino de Matemática, 15).

MONTEIRO, João Gouveia. **Grandes conflitos da história da Europa:** de Alexandre Magno a Guilherme" o Conquistador". Coimbra: Coimbra University Press, 2012.

NASCIMENTO, Wellison Costa. **Construções geométricas**: uma introdução à geometria plana. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Bragança, 2023.

NAZARÉ, Wenderson Araujo de. **O número de Ouro, a Sequência de Fibonacci e a contextualização de suas aplicações à aprendizagem em sala de aula para alunos do Ensino Fundamental II**. Acará – PA: Universidade Federal do Pará, 2022.

PELEIAS, Ivam Ricardo. LUCA PACIOLI: um mestre do renascimento. **Revista de Educação e Pesquisa em Contabilidade**, v. 4, n. 2, p. 99-102, 2010.

PELLEGRINI, L. O número de ouro. Como a proporção áurea se manifesta na natureza. **Revista Oásis**, v. 1, 2005.

PEREIRA, Breno Teles. **O Contra Celso de Orígenes e a paideia apostólica em formação na Cesareia Marítima (séc. III d.C.).** 2019. Dissertação (Mestrado em História) - Universidade Estadual Paulista, Franca, 2019.

PEREIRA, P. S.; LOPES. A. R. L. V.; ANDRADE, S. V. R. de. Pentagrama: Qual a sua história? In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2009. Itujuí - RS, **Anais**... Itujuí - RS, 2009.

PIOVEVAN, Escarletti Zordenoni. **Biblioteca de Alexandria e sua importância para a história da matemática**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia, Cacoal, 2022.

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

ROSA, Nicoll Siqueira. **Biblioteca universal**: críticas de autores da antiguidade sobre o ideal de acumulação do conhecimento na Biblioteca de Alexandria. 2012. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em História) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SANT ANNA, Henrique Modanez; PEIXOTO, Raul Vitor Rodrigues. Antíoco I, grande como Ciro e Dario, ou a realeza babilônica revisitada: uma abordagem intercultural de três textos régios antigos. **Anos 90**, v. 23, n. 43, p. 269-284, 2016.

SANT ANNA; Modanez, Henrique. A luta pela sobrevivência política, de Alexandre III a Antíoco I: ações e reações das póleis nos primórdios do período helenístico. **Revista Iberoamericana de Estudios de Desarrollo**, v. 4, n. 1, p. 177-192, 2015.

SANTOS, Carlos Gonçalves dos. **A Razão Áurea e suas aplicações**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTOS, L. M. **Razão áurea: abordagem histórica, aplicações e sua relação com Fibonacci**. Dissertação (mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

SANTOS, Sofia Oliveira. **Representações do Rei da Pérsia em Ésquilo e Heródoto**. 2021. Dissertação (Mestrado em História) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2021.

SANTOS, Solange Ferreira. **O uso do tangram como proposta no ensino de frações**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2019.

SANTOS, Victor Ramsés Silva Laranjeira dos. **Resolução pacífica de controvérsias internacionais**: um estudo de caso sobre a disputa entre a Macedônia do Norte e a Grécia. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Relações Internacionais) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo: Cortez, 2007.

SHAPIRO, Stewart. **Filosofia da Matemática**. Lisboa: Leya, 2018.

SILVA, Daniel Romao da. **Livro didático de Matemática:** lugar histórico e perspectivas. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

SILVA FILHO, Daniel Sombra. **Teoria dos Números**: praticando a resolução de problemas Olímpicos. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.

SILVA, Ellyda Maria Cupertino Freire. **A aplicação da matemática na composição arquitetônica**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Goiânia, 2021.

SILVA, Maria Aparecida de Oliveira. Alexandre, o Grande, na escrita biográfica de Plutarco. **Figura: Studies on the Classical Tradition**, v. 8, n. 2, p. 155-184, 2020.

SILVA, R. L.; ALMEIDA, R. L. da S. A fantástica sequência de Fibonacci e o enigmático número de ouro: contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 77-88, 2020.

SILVEIRA, Tiago Loyo. **A razão áurea na botânica–práticas contextualizadas utilizadas como elemento de motivação da educação matemática**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2018.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de.; ALVES, Laís Hilário. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da FUCAMP,** v. 20, n. 43, 2021.

SOUSA, Rogério. **Alexandria**: a encruzilhada do conhecimento. Porto: Faculdade de Letras/Biblioteca Digital, 2009.