UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTÔNIO MÁRCIO BRAZ MARQUES

O ENSINO DE PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE AULA COM O AUXÍLIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

SOBRAL - CEARÁ
2023

ANTÔNIO MÁRCIO BRAZ MARQUES

O ENSINO DE PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE AULA COM O AUXÍLIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho

Co-Orientador: Prof. Me. Davi Ribeiro dos Santos

SOBRAL - CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Marques, Antonio Marcio Braz.
O ensino de projeção estereográfica no ensino médio: uma proposta de aula com o auxílio da modelagem matemática e uso de materiais manipuláveis [recurso eletrônico] / Antonio Marcio Braz Marques. - 2023.
75 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional, Sobral, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho.
Coorientação: Prof. Me. Davi Ribeiro dos Santos.

1. Projeção estereográfica. 2. Proposta de aula. 3. Modelagem matemática. 4. Materiais manipuláveis.. I. Título.

ANTÔNIO MÁRCIO BRAZ MARQUES

O ENSINO DE PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE AULA COM O AUXÍLIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Aprovada em: 29 de Setembro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Edvalter da Silva Sena Filho

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Documento assinado digitalmente
gov.br AILTON CAMPOS DO NASCIMENTO
Data: 21/10/2023 16:17:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento
Universidade Federal do Ceará - UFC

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE NILTON DE ABREU COSTA
Data: 23/10/2023 23:33:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Nilton de Abreu Costa
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Documento assinado digitalmente
gov.br KRISTIAN PESSOA DOS SANTOS
Data: 23/10/2023 18:15:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Kristian Pessoa dos Santos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI

Documento assinado digitalmente
gov.br WESLAY VIEIRA DE ARAUJO
Data: 23/10/2023 19:22:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Weslay Vieira de Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força e coragem que ele me transmite para que eu realize meus objetivos.

Aos meus pais, que mesmo não sendo “escolarizados” deram-me a oportunidade de estudar.

A minha esposa Betty-Lee, pela presença e disponibilidade constantes para ouvir, apoiar, e por sempre acreditar na minha força e no meu potencial.

Ao GEPEMAC pelas contribuições e apoio nos momentos de preparação para o exame de qualificação.

Ao PROFMAT-SEDUC pela oportunidade de um programa tão rico.

Aos professores e colegas de turma, pela valiosa colaboração, meus sinceros agradecimentos.

Ao Orientador Professor Dr. Edvalter da Silva Sena Filho pelos ensinamentos e inspiração e ao Co-Orientador Professor Me. Davi Ribeiro dos Santos pelo acompanhamento e incentivo a não desistir.

RESUMO

A presente dissertação tem o objetivo de apresentar uma proposta de aula que possa auxiliar a aprendizagem dos alunos da 3ª série do Ensino Médio, envolvendo a Projeção Estereográfica como conteúdo complementar, explorando algumas habilidades de matemática inseridas na BNCC, de modo que os alunos relacionem conceitos estudados com situações reais e sejam motivados a alcançar as competências desejadas nessa etapa de ensino. Este trabalho consiste numa pesquisa bibliográfica, que permitiu a elaboração e organização de um conjunto de 4 (quatro) atividades a serem trabalhadas com alunos da etapa final da educação básica, utilizando-se da Modelagem Matemática como metodologia de ensino, além do suporte de materiais manipuláveis. Espera-se que atividades aplicadas por etapas e descritas conforme indicadas neste trabalho apresentem novas possibilidades de motivação, exploração dos conteúdos abordados e situações reais que visam uma melhor aprendizagem por parte dos alunos.

Palavras-chave: Projeção Estereográfica. Proposta de aula. Modelagem Matemática. Materiais manipuláveis.

ABSTRACT

This dissertation aims to present a class proposal that can assist the learning of students in the 3rd year of high school, involving Stereographic Projection, as complementary content exploring some mathematics skills included in the BNCC, so that students relate concepts studied with real situations and are motivated to achieve the desired skills at this stage of teaching. This work consists of bibliographical research, which allowed the elaboration and organization of a set of 4 (four) activities to be worked on with students in the final stage of basic education, using Mathematical Modeling as a teaching methodology, in addition to supporting materials manipulable. It is expected that activities applied in stages and described as indicated in this work, will present new possibilities for motivation, exploration of the content covered and real situations that aim for better learning on the part of students.

Keywords: Stereographic Projection. Class proposal. Mathematical Modeling. Manipulable materials.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^2$	Plano, espaço bidimensional
$\mathbb{R}^3$	Espaço tridimensional
$\notin$	Não pertence a
$\in$	Pertence a
$\varnothing$	Conjunto vazio
$\triangle$	Triângulo
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se
$<$	Menor do que
$\forall$	Para todo
$\neq$	Diferente
$\Rightarrow$	Implica
$\cap$	Interseção
$f : A \to B$	Função de A em B
f^{-1}	Função inversa da função f
$\exists$	Existe
$\mathbb{S}^2$	Superfície da esfera
φ	Phi
ψ	Psi

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento nacional orientador dos rumos da Educação Básica, propõe mudanças no currículo de todas as etapas escolares de modo a desenvolver competências e habilidades nos educandos. Essas mudanças visam o fortalecimento de uma educação integral, por meio das denominadas aprendizagens essenciais.

Prevista em documentos normativos como a Constituição Federal (1988), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996), as Diretrizes Curriculares Nacionais (2010) e o Plano Nacional de Educação (2014), a BNCC do Ensino Médio, enumera dez competências gerais, além de competências específicas de cada área do conhecimento. Dentre as competências gerais observa-se que as de número dois, quatro e sete se guardam relação com o conhecimento matemático na medida em que têm por finalidade:

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. (BRASIL, 2018, p. 9).

Ainda no Ensino Médio, a BNCC propõe que a área de Matemática e suas Tecnologias consolide, amplie e aprofunde as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Nesse intuito,

> [...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 259).

A Matemática enquanto ferramenta que possibilita a compreensão e a interpretação do mundo, se manifesta através da exploração de relações entre quantidades, formas, espaços e estruturas. Ela também serve como meio para a solução de problemas, fornecendo modelos para representar situações reais.

O que se percebe é que, para se utilizar da Matemática como ferramenta capaz de interpretar e compreender o mundo, os alunos precisam mobilizar um conjunto de habilidades que a BNCC propõe desenvolver. Mas para isso, há a necessidade de uma postura proativa por parte dos alunos e qualificada por parte do professor na utilização de metodologias e propostas de atividades que busquem o desenvolvimento de tais habilidades.

Numa perspectiva de trabalho em que se considera o discente como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões, pois enquanto organizador da aprendizagem, é o principal ator envolvido na seleção de conteúdos, atividades, estratégias e processos avaliativos que permitam a construção dessa aprendizagem. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, reforçam que:

> Ao se escolher a forma com a qual se vai trabalhar, deve-se reconhecer que os alunos precisam de tempo para desenvolver os conceitos relativos aos temas selecionados e, ainda, para desenvolver a capacidade de acompanhar encadeamentos lógicos de raciocínio e comunicar-se matematicamente; por isso é essencial o contato repetido com as diferentes idéias, em diferentes contextos, ao longo do ano e de ano para ano. Dessa forma a escolha dos conteúdos e atividades deve ser coerente com o tempo disponível de trabalho, evitando atropelos ou ociosidade na sala de aula. (BRASIL, 2018, p. 130).

Ao tratar da escolha de conteúdos, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio mostram as expectativas que os alunos devem consolidar ao final dessa etapa, ao afirmar que:

> Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69).

Dentre o rol de habilidades que os alunos devem dominar, elencadas na competência específica 5[1] para a área de Matemática, esse trabalho busca propor, por meio da metodologia de modelagem matemática o desenvolvimento da habilidade: “EM13MAT509 - Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em Cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital” (BRASIL, 2018, p. 541), além de outras (como EM13MAT105, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT512), utilizando-se como objeto do conhecimento a Projeção Estereográfica.

[1] Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Para isso, a elaboração de uma proposta de aula que possa auxiliar a aprendizagem dos alunos da 3ª série do Ensino Médio, mostra-se como um desafio, na medida em que as sugestões das atividades propostas possam atribuir significado aos conceitos e mostrem a importância da projeção estereográfica. Desse modo, o presente estudo busca responder à seguinte questão motivadora: Como desenvolver uma proposta de aula envolvendo a Projeção Estereográfica, de modo a contribuir com a aprendizagem dos estudantes do 3° ano do Ensino Médio?

Isso posto, tem-se como objetivo geral apresentar uma proposta de aula usando a Projeção Estereográfica, através de algumas atividades, como conteúdo complementar no Ensino Médio para explorar algumas habilidades de matemática inseridas na BNCC de forma que os alunos relacionem conceitos estudados com situações reais e sejam motivados a alcançar as competências desejadas nessa etapa de ensino.

Quanto aos objetivos específicos, ficaram assim definidos no contexto da proposta temática: a) Utilizar-se da modelagem matemática como metodologia de ensino da projeção estereográfica; b) Identificar conceitos matemáticos na educação básica envolvidos no ensino da projeção estereográfica; c) Contextualizar o conhecimento de projeção estereográfica com outras disciplinas, a exemplo da Geografia para facilitar o processo de ensino-aprendizagem; d) Utilizar materiais manipuláveis para auxiliar a compreensão do estudo da Projeção Estereográfica no Ensino Médio.

Compreendendo não se estar iniciando a discussão sobre o ensino de projeção estereográfica no ensino médio, realizou-se uma pesquisa exploratória por meio de um levantamento acerca dos trabalhos já realizados sobre a temática. Nesse levantamento realizado nas dissertações de mestrado no sítio do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), utilizou-se os filtros: “projeção estereográfica” e “material manipulável”. Foram localizados apenas 2 (dois) trabalhos com o primeiro filtro conforme o quadro a seguir:

Quadro 1 – Dissertações que tratam de Projeção Estereográfica

Ano	Autor	Título da Dissertação	Instituição
2022	Shalon Gonçalves de Souza	Números complexos, Projeção estereográfica e projeção de Mercator: Uma proposta de motivação ao aluno do Colégio Naval a respeito do Curso de Hidrografia	UFC
2015	Euderley de Castro Nunes	A esfera de Riemann: Projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o Ensino Médio	UFAM

Fonte: PROFMAT (2023, adaptado).

A partir desses resultados foi feita uma leitura detalhada nas duas dissertações que tratavam especificamente sobre a projeção estereográfica.

A primeira apresenta o estudo da Projeção Estereográfica, da projeção de Mercator e dos números complexos como proposta de motivação aos alunos do Colégio Naval, associando esses temas à Matemática destacando sua relevância para o Curso de Hidrografia para Oficiais Marinheiros.

Já a segunda, faz uma conexão entre os números complexos e o desenvolvimento da cartografia, bem como de outras áreas, destacando como projetar estereograficamente uma esfera num plano, baseado nos estudos de Riemann, além de utilizar o software Geogebra para demonstrar propriedades da Projeção Esferográfica e motivar o estudo desse tema no Ensino Médio.

Nas 6 (seis) dissertações encontradas com o segundo filtro (descritas no quadro 2), realizou-se uma leitura dos resumos para se fazer uma nova triagem, onde foram selecionados 2 (dois) trabalhos sobre os quais foi detida uma leitura mais atenta, quais sejam: i) O uso de material manipulável no ensino de Geometria Espacial: um olhar investigativo sobre a BNCC para o ensino médio e ii) Calculando distância em Geometria Espacial usando material manipulável.

Nesse bloco, a primeira dissertação investiga, à luz da BNCC para o Ensino Médio, a efetividade do uso de material manipulável no ensino de Geometria Espacial. Na segunda, o autor defende o uso de material manipulável como recurso didático para apresentar os conceitos primitivos de Geometria Plana e alguns teoremas da Geometria Espacial, como alternativa para aprimorar a percepção espacial dos alunos assimilando melhor tais assuntos, sugerindo uma sequência de atividades práticas que exploram a manipulação de alguns materiais.

Quadro 2 – Dissertações que tratam de Material Manipulável

Ano	Autor	Título da Dissertação	Instituição
2020	Antonio Carlos Ferreira	O uso de material manipulável no ensino de Geometria Espacial: um olhar investigativo sobre a BNCC para o ensino médio	UFPA
2019	Gerciane das Neves Lima Osório	O uso de material manipulável no ensino de Princípio Multiplicativo e na construção de gráficos de barras e de setores no Ensino Fundamental	UNIVASF
2016	Marciano Mauro Pagliarini	Abordagem metodológica para o ensino de Trigonometria por meio de material manipulável e registros de representação semiótica	UTFPR
2015	Alexandre Adriano Bernardi	Geoplexo: um material manipulável para o ensino dos Números Complexos	UTFPR
2013	José Carlos Vieira de Souza	Calculando distância em Geo. Espacial usando material manipulável	UFRN
2013	Andrea Maria Mano Amazonas	O Princípio de Cavalieri e aplicações com o uso de material manipulável	UFBA

Fonte: PROFMAT (2023, adaptado).

Além do capítulo introdutório, enumerado como primeiro, este trabalho apresenta a seguinte estrutura: o Capítulo 2, denominado Conceitos Preliminares, traz definições consideradas pré-requisitos para uma melhor compreensão do assunto de projeções. No terceiro capítulo, o tema de funções é tratado como forma de embasamento no estudo da projeção estereográfica. No quarto capítulo desta pesquisa, são apresentados os conceitos de modelagem matemática e etapas para sua aplicação no ensino. No quinto é feita uma breve conceituação, desenvolvimento e características dessa função, bem como sua conexão com outras áreas, notadamente a Cartografia.

A proposta de aula com sugestões de aplicação de atividades são enfocadas no quinto capítulo, e em seguida, na conclusão deste estudo, são abordadas algumas considerações sobre a relevância do ensino de projeção estereográfica no Ensino Médio, bem como algumas reflexões, que poderão contribuir para pesquisas futuras e com a prática pedagógica de docentes que atuam na respectiva etapa de ensino.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

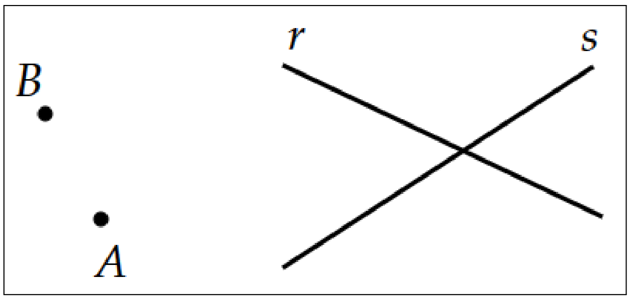
"A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental" (BRASIL, 2018, p. 517). Dessa forma, no âmbito escolar, a organização curricular deve, além de outros aspectos, levar em conta os conhecimentos prévios para promover uma aprendizagem gradual, como forma de facilitar o acesso a esse conhecimento. Nesse sentido, para uma melhor compreensão da projeção estereográfica, o objetivo deste capítulo é fundamentar a parte matemática das atividades que serão desenvolvidas no capítulo 5 apresentando conceitos básicos tais como, ponto, reta, plano, sistema cartesiano no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, bem como função injetora, sobrejetora, bijetora e inversa, dentre outros.

O texto a seguir baseia-se nas referências: Muniz Neto (2013), Euclides (2009), Iezzi e Murakami (2004) e Delgado, Frensel e Crissaff (2017).

2.1 Ponto, reta e plano

Por serem considerados conceitos primitivos, para Neto (2013, p. 2-3) "o leitor certamente tem uma boa ideia, a partir da experiência diária, do que vem a ser um ponto, uma reta ou um plano", e entende que tais conceitos dispensam definições formais. Ainda assim, remete a algumas ideias que julgamos importantes serem recordadas ao afirmar "que toda reta é um conjunto de (pelo menos dois) pontos", e ainda que o plano contém todos os pontos e que há pelo menos três pontos não situados em uma mesma reta. Aqui convém lembrar a ideia de ponto como "é aquilo de que nada é parte" (Euclides, 2009, p. 97), ou seja, não admite subdivisões.

Figura 1 – Pontos e retas no plano

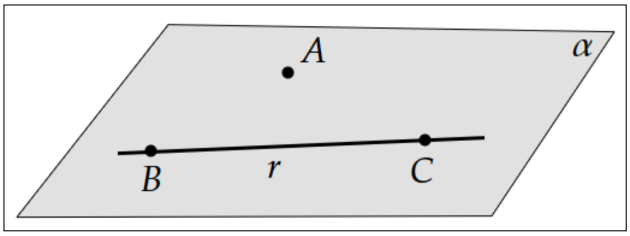


Fonte: Adaptado de Muniz Neto (2013).

Na Figura 1, estão representados os pontos A e B e as retas r e s (em geral, os pontos são indicados por letras latinas maiúsculas e retas por letras latinas minúsculas).

Em Geometria Plana, três pontos que pertencem a uma mesma reta serão ditos colineares. Três pontos não colineares A, B, e C determinam um único plano, denotado (ABC). Planos também podem ser denotados por letras gregas minúsculas; nesse sentido podemos escrever $\alpha = (ABC)$ para denotar o plano (ABC) da Figura 2.

Figura 2 – Determinação do plano



Fonte**:** Adaptado de Muniz Neto (2013).

Se uma reta r tiver dois pontos em comum com um plano α, então r estará contida em α e denotaremos $r \subset \alpha$, uma vez que $B, C \in r \cap \alpha$.

Segue da discussão acima que uma reta r e um ponto $A \notin r$ determinam um único plano α, o qual contém a reta r. De fato, sendo B e C pontos distintos de r, o plano (ABC) contém ambos A e r; por outro lado, qualquer plano que contenha A e r conterá A, B e C, de sorte que coincidirá (ABC). Sendo α o plano determinado por A e r, denotamos $\alpha = (A, r)$.

Definição 2.1 *Seja r a reta que passa pelos pontos A e B e seja P um ponto do plano. Então, o ponto P pertence à reta r se, e somente se,* $\overrightarrow{AP}$ *é múltiplo do vetor* $\overrightarrow{AB}$*. Isto é,* $P \in r$ *se, e somente se, existe um número* $t \in R$ *tal que*

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} \tag{2.1}$$

Note que o número t é determinado de forma única pelo ponto P e é chamado parâmetro de P em r.

Assim, para atingir o ponto P na reta r, deve-se ir até o ponto A e deslocar-se ao longo da reta por $t \cdot \overrightarrow{AB}$. Então, a equação que determina o ponto P pela variação do parâmetro t é escrita da seguinte forma:

$$r: \quad P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad t \in R \tag{2.2}$$

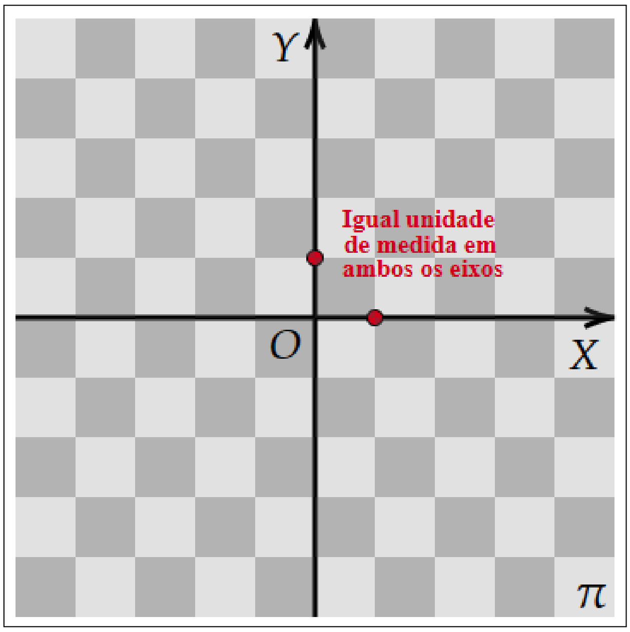
2.2 Sistema de Coordenadas Cartesianas

Pensar no ato de projetar um globo no plano, propósito primeiro da projeção estereográfica, implica compreender as ideias de localização de coordenadas de pontos, tanto no espaço tridimensional quanto no bidimensional. Assim, nesta seção faz-se uma breve conceituação do Sistema de Coordenadas Cartesianas tanto no $\mathbb{R}^2$ quanto no $\mathbb{R}^3$, uma vez que a representação de pontos por suas coordenadas torna possível a resolução algébrica diversos problemas geométricos.

Definição 2.2 *Seja π um plano e sejam dois eixos contidos em π, com unidades de medida de comprimento iguais, que se intersectam perpendicularmente no ponto O do plano π que é origem comum deles. Para facilitar a visualização, convenciona-se que:*

- *um dos eixos, denominado eixo-OX, é horizontal, orientado para a direita e sua coordenada é a primeira coordenada ou abscissa;*
- *o outro eixo, denominado eixo-OY, é vertical, orientado para cima e a coordenada nesse eixo é a segunda coordenada ou ordenada.*

Figura 3 – Sistema de eixos ortogonais OXY no plano



Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel, Crissaff (2017).

A partir de então, faremos referência a essa configuração como sistema de eixos ortogonais OXY ou, simplesmente, sistema OXY.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(a,\ b);\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$ da seguinte maneira:

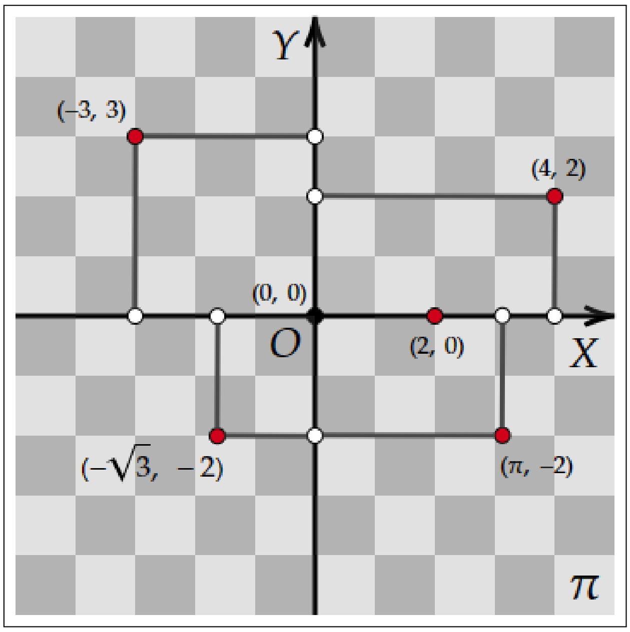
Ao ponto $P \in \pi$ faz-se corresponder o par ordenado $(a,\ b)$, se P não está sobre os eixos, a é a abscissa do pé da perpendicular ao eixo-OX por P e b é a ordenada do pé da perpendicular ao eixo-OY por P.

Se P está sobre o encontro das perpendiculares OXY, tem-se o par ordenado $(0,0)$. Se P está somente sobre o eixo-OX, tem-se o par $(a,0)$. Por fim, se P está somente sobre o eixo-OY, tem-se o par (O,b).

Os números $a,\ b \in \mathbb{R}$ do par ordenado $(a,\ b)$ associado ao ponto P são as coordenadas cartesianas do ponto P, a é a abscissa ou primeira coordenada de P e b é a ordenada ou segunda coordenada de P.

Na Figura 4, são ilustrados alguns pontos do plano π com suas coordenadas em relação ao sistema OXY .

Figura 4 – Pontos do plano π



Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel, Crissaff (2017).

Reciprocamente, ao par ordenado $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ associa-se o ponto P do plano π dado pela interseção da perpendicular ao eixo-OX que passa pelo ponto de abscissa a, com a perpendicular ao eixo-OY que passa pelo ponto de ordenada b.

Sabendo que $(a,\ b) = (a',\ b')$ em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $a = a'$ e $b = b'$, é simples verificar que a correspondência

$$\textit{ponto do plano } \pi \Leftrightarrow \textit{par ordenado de } \mathbb{R}^2$$

é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca.

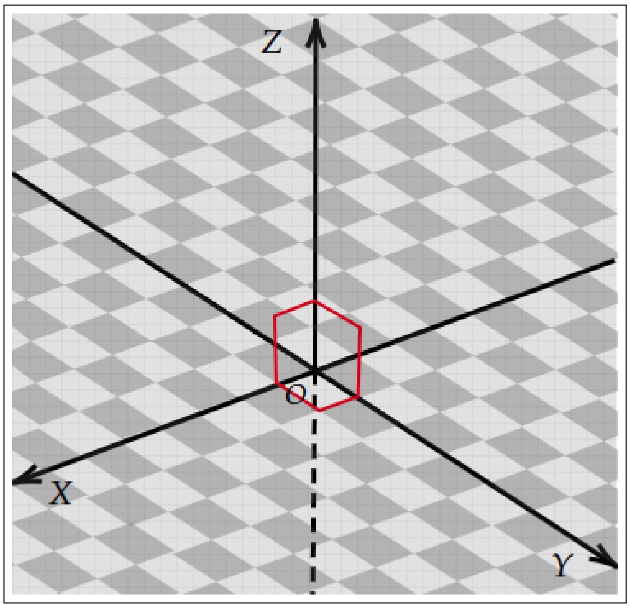
Notação: Se $P \in \pi$ corresponde a $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (a,\ b)$.

Observe que os pontos do eixo-OX têm coordenadas $(x,\ 0)$ e os pontos do eixo-OY tem coordenadas $(0,\ y)$.

No desenvolvimento da projeção estereográfica, faz-se necessário o estudo da esfera mergulhada no espaço $\mathbb{R}^3$. Para tanto, daqui por diante, denotar-se-á por ε, o espaço euclidiano tridimensional.

Definição 2.3 *Um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço ε da Geometria Euclidiana consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX, OY e OZ, com a mesma origem O (Figura 5).*

Figura 5 – Eixos do sistema OXYZ no espaço ε

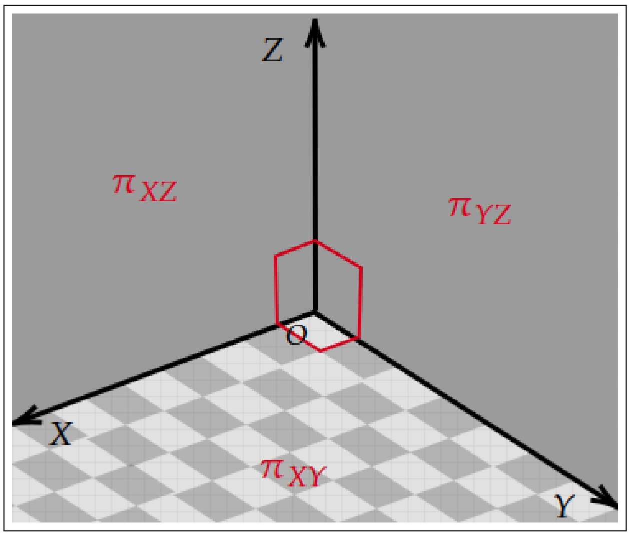


Fonte**:** Adaptado de Delgado, Frensel, Crissaff (2017).

Escolhido um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço ε, há três planos especiais, chamados planos cartesianos (Figura 6):

- πXY , o plano que contém os eixos OX e OY ;
- πXZ, o plano que contém os eixos OX e OZ;
- πYZ, o plano que contém os eixos OY e OZ.

Figura 6 – Plano cartesiano no espaço ε



Fonte**:** Adaptado de Delgado, Frensel, Crissaff (2017).

Assim como no sistema OXY, um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço ε também estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço ε e os ternos ordenados de números reais $(x,\ y,\ z)$. Isto é, cada ponto do espaço corresponde exatamente a um terno ordenado de números reais, e cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente a um ponto de ε.

Se o ponto P está em correspondência com o terno $(x,\ y,\ z)$, dizemos que x, y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais OXYZ. Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- coordenada x: coordenada no eixo OX do ponto de interseção deste eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano πYZ.
- coordenada y: coordenada no eixo OY do ponto de interseção deste eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano πXZ.
- coordenada z: coordenada no eixo OZ do ponto de interseção deste eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano πXY.

Designa-se por $\mathbb{R}^3$ o conjunto de todos os ternos ordenados $(x,\ y,\ z)$ de números reais. A escolha de um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço ε determina uma correspondência biunívoca entre ε e $\mathbb{R}^3$. A bijeção $\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ é obtida associando-se a cada ponto $P \in \varepsilon$ o terno $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ formado pelas coordenadas de P relativas ao sistema OXYZ.

Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço ε, identifica-se cada ponto $P \in \varepsilon$ pelas suas coordenadas $(x,\ y,\ z)$ e escreve-se:

$$P = (x,\ y,\ z). \tag{2.3}$$

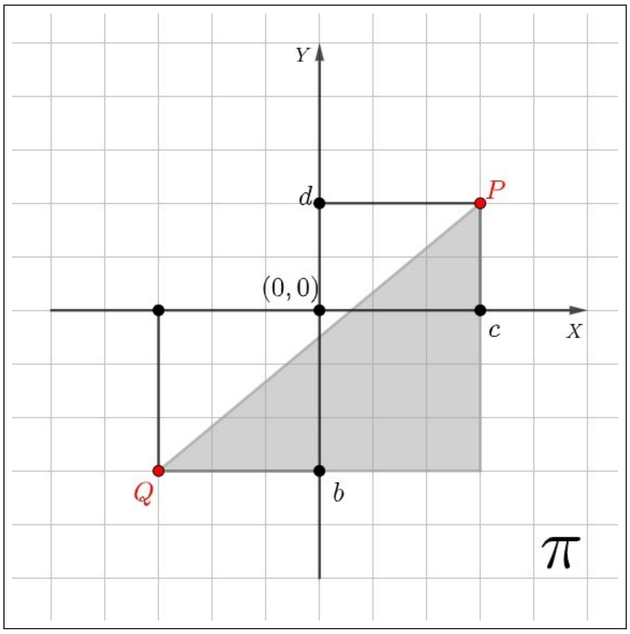
2.3 Esfera

Antes da definição de Esfera, convém definir distância euclidiana entre dois pontos no plano. Sejam $P = (a,\ b)$ e $Q = (c,\ d)$ pontos no plano π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY dado.

Definição 2.4 *A distância euclidiana do ponto $P = (a,b)$ ao ponto $Q = (c,d)$, que designamos $d(P,Q)$, é dada por*

$$d(P,Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \tag{2.4}$$

Figura 7 – Distância euclidiana entre dois pontos no plano π



Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel, Crissaff (2017).

Assim, a distância euclidiana de $P = (a,\ b)$ a $Q = (c,\ d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes. Definida distância euclidiana entre pontos, passa-se à definição de circunferência.

Definição 2.5 *A circunferência C de centro no ponto $A \in \pi$ e raio $r > 0$ é o conjunto que consiste dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:*

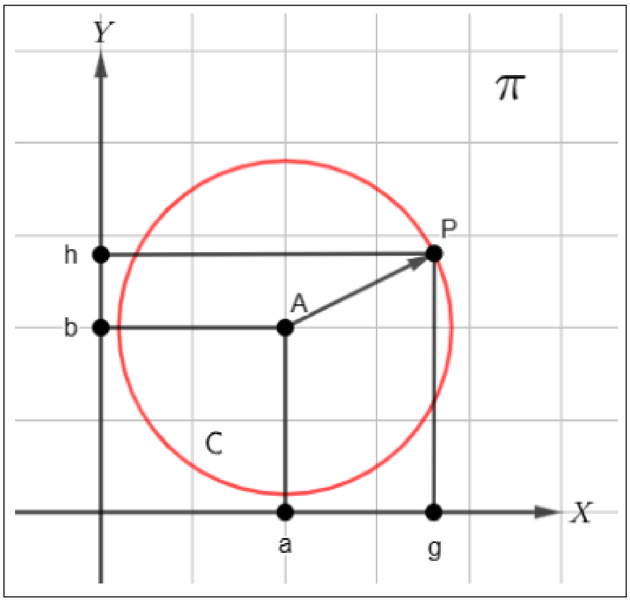
$$C = \{P \in \pi \mid d(P,\ A) = r\}. \tag{2.5}$$

Seja $A = (a,\ b)$ num sistema de eixos ortogonais OXY no plano π,

$$P = (x,\ y) \in C \ \Leftrightarrow\ (P,\ A) = r \ \Leftrightarrow\ d(P,\ A)^2 = r^2 \ \Leftrightarrow\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{2.6}$$

Assim, associa-se à circunferência C a equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos.

Figura 8 – Circunferência C de centro A e raio r



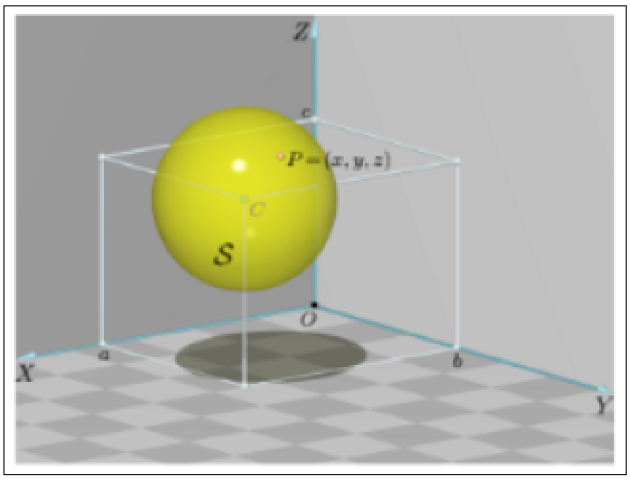
Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel, Crissaff (2017).

Definição 2.6 *A esfera S de centro C e raio $r > 0$ é o conjunto formado por todos os pontos $P \in \varepsilon$ cuja distância ao centro C é igual a r:*

$$S = \{P \in \varepsilon \mid d(P,\, C) = r\}. \tag{2.7}$$

Como se vê na Figura 9.

Figura 9 – Esfera S de centro $C = (a,\, b,\, c)$ e raio r



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2017).

Sejam $C = (a,\ b,\ c)$ e $P = (x,\ y,\ z)$ as coordenadas do centro C e de um ponto genérico de S em relação a um sistema de eixos ortogonais OXYZ. Então,

$$P \in S \ \Leftrightarrow \ d(P,C) = r \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r. \tag{2.8}$$

Vale destacar que a circunferência nada mais é do que a esfera no espaço $\mathbb{R}^2$. Considerando que o cálculo de distância no espaço pode ser feito de modo análogo ao da distância no plano, elevando ao quadrado ambos os lados desta última identidade, obtém-se a equação da esfera S no sistema de eixos OXYZ:

$$S: \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \tag{2.9}$$

3 FUNÇÕES

Um outro conceito relevante no estudo de projeção estereográfica, é o conceito de função, na medida em que ao projetar uma esfera no plano, faz-se por meio de uma função na qual se associa a cada ponto desta esfera (exceto o ponto de origem da projeção - que será discutido no Capítulo 5) a um único ponto no plano. Dessa foram, convém definir função a partir do conceito a seguir:

Definição 3.1 *Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de 'aplicação de A em B' ou 'função definida em A com imagens em B' se, somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x,\ y) \in f$. Em símbolos:*

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A, \exists!\ y \in B \mid (x,\ y) \in f$$

Definido o conceito de função, passa-se ao conceito de função sobrejetora.

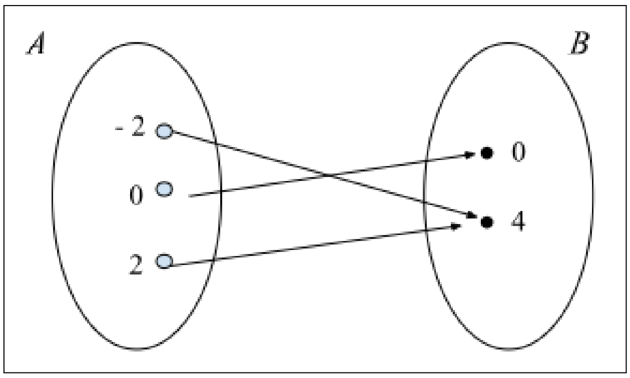
Definição 3.2 *Uma função $f:\ A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$. Em símbolos:*

$$f : A \to B$$

$$f \text{ é sobrejetora } \Leftrightarrow\ \forall y\ \in B,\ \exists\, x\ \in A \mid f(x) = y$$

Exemplo 1 . *A função f de $A = \{-2,\ 0,\ 2\}$ em $B = \{0,\ 4\}$ definida pela lei $f(x) = x^2$ é sobrejetora.*

Figura 10 – Função sobrejetora



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Como em todo elemento de B chega uma flecha, segue que f é sobrejetora. (Ver Figura 10).

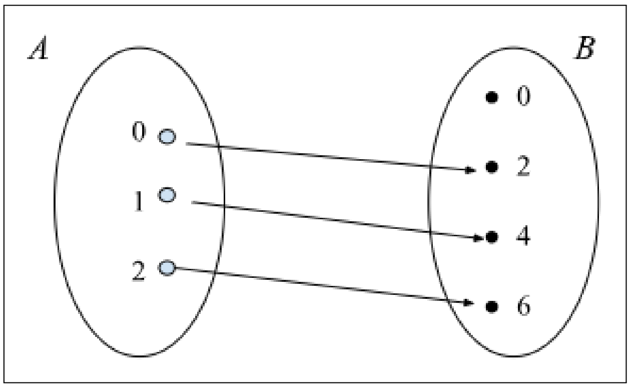
A seguir, será definida a função injetora.

Definição 3.3 *Uma função $f:\ A \to B$ é injetora se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Em símbolos:*

$$f\ \text{ é injetora } \Leftrightarrow \forall\, x_1,\, x_2 \in A,\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplo 2 . *A função f de $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ em $B = \{0,\ 2,\ 4,\ 6\}$ definida pela lei $f(x) = 2x+2$ é injetora.*

Figura 11 – Função injetora



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Logo, uma função será injetora quando elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas. Uma vez que não existem flechas saindo de elementos diferentes de A chegando no mesmo elemento de B, então f é injetora.

Definição 3.4 *Uma função $f:\ A \to B$ é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora. Em símbolos:*

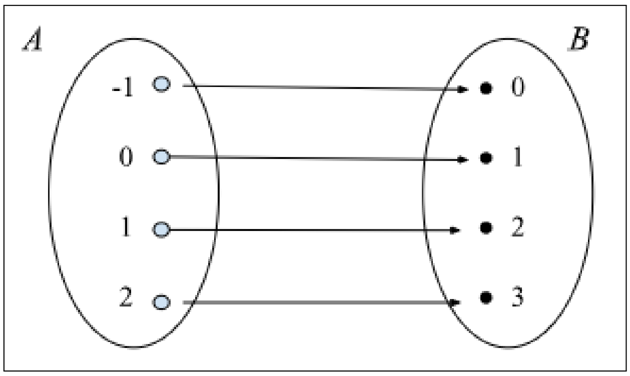
$$f \text{ é bijetora } \Leftrightarrow f \text{ é sobrejetora e injetora}$$

A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é bijetora se, somente se, para qualquer elemento y pertencente a B, existe um único elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

$$f \text{ é bijetora } \Leftrightarrow \forall\, y \in B,\ \exists!\, x \in A \mid f(x) = y$$

Exemplo 3 . *A função f de $A = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ em $B = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ definida por $f(x) = x+1$ é bijetora.*

Figura 12 – Função bijetora



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como f é injetora, visto que não há duas flechas chegando no mesmo lugar em B, e é sobrejetora, visto que em cada elemento de B chega uma flecha partindo de A, então f é bijetora. Note que, com este diagrama, para se ter uma bijeção é necessário que em cada elemento de B chegue uma, e somente uma flecha.

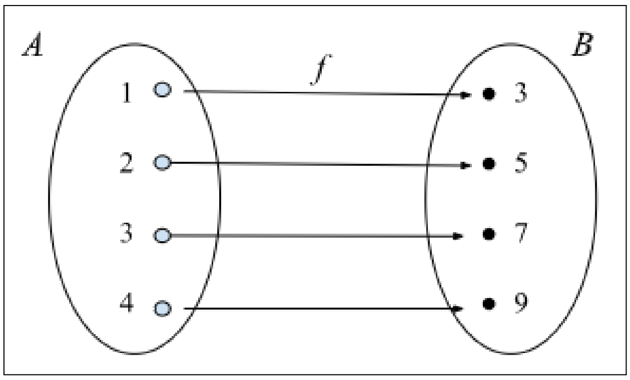
Ao se estudar a bijetividade de uma função, permite-se verificar se esta função possui inversa.

Definição 3.5 *Seja $f: A \to B$ uma função bijetora e $g: B \to A$ uma função dada por $g(y) = x$, sempre que $f(x) = y$. Diz-se que g é a função inversa de f e denota-se por f^{-1}. Em símbolos:*

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

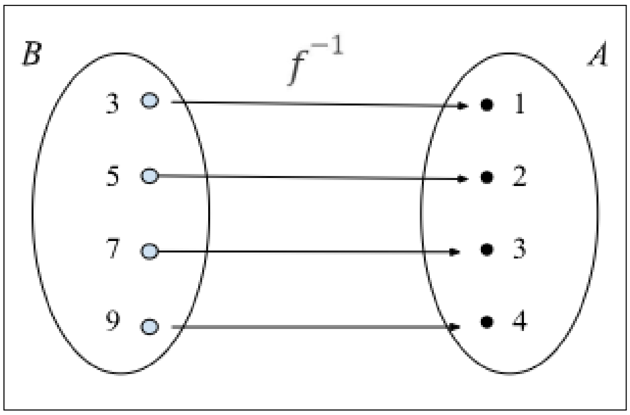
Exemplo 4 . *Seja a função f de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{3, 5, 7, 9\}$ definida por $f(x) = 2x+1$, dizemos que a função f^{-1} de B em A definida por $f^{-1}(x) = (x-1)/2$.*

Figura 13 – Função $f: A \to B$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 – Função $f^{-1}: B \to A$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O Teorema 3.0.1, de acordo com Iezzi e Murakami (2004, p. 240), afirma que:

Teorema 3.0.1 *Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é uma função inversa de f, então:*

$$f^{-1} \circ f = I_A \tag{3.1}$$

e

$$f \circ f^{-1} = I_B \tag{3.2}$$

Demonstração:

$$\forall x \in A,\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \tag{3.3}$$

$$\forall y \in B,\ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y. \tag{3.4}$$

Ainda sobre função inversa, segue o Teorema 3.0.2.

Teorema 3.0.2 *Seja $f: A \to B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.*

Demonstração:

Suponha que f^{-1} é uma função de B em A, provar-se-á que f é bijetora.

a) Dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, se tivermos $f(x_1) = f(x_2) = y$ resultará em $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$, o que é um absurdo pois y só tem uma imagem em f^{-1} . Assim $f(x_1) \neq f(x_2)$ e f é injetora.

b) Para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$, isto é, $(y,\ x)f^{-1}$, ou ainda, $(x,\ y) \in f$. Assim f é sobrejetora.

Reciprocamente, se f é bijetora, então f^{-1} é uma função de B em A. Como se faz prova adiante.

a) Se $y \in B$, para duas imagens x_1 e x_2 em f^{-1}, vem:

$$(y,\ x_1) \in f^{-1} \text{ e } (y,\ x_2), \in f^{-1}$$

portanto: $(x_1,\ y) \in f$ e $(x_2,\ y) \in f$.

Como f é injetora, resulta $x_1 = x_2$.

b) Como é f é sobrejetora, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $(x,\ y) \in f$; portanto , $(y,\ x) \in f^{-1}$.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

O desenvolvimento da proposta de aula sobre a Projeção Estereográfica, utilizará como metodologia de ensino a Modelagem Matemática, pois dentre outros benefícios, para Bassanezzi, essa abordagem:

> [...], em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir com ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão. (Bassanezzi, 2004, p. 17).

No mesmo sentido, a BNCC corrobora essa ideia, ao afirmar que:

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área. (BRASIL, 2018, p. 470).

A escolha dessa metodologia se sustenta exatamente pelos aspectos da motivação do aluno em enfrentar problemas reais, buscando na matemática, o suporte necessário para a resolução desses problemas.

4.1 Breve Histórico

A modelagem matemática tem uma longa história que remonta à antiguidade. De acordo com Biembengut e Hein (2011), na sua essência a modelagem matemática sempre esteve presente na criação de teorias científicas, incluindo-se aí as teorias matemáticas. Só para exemplificar, na música, Pitágoras descobriu que os sons musicais têm durações diferentes ao esticar um fio e o fazendo vibrar. Em seguida, fixou-o no meio e o fez vibrar novamente, e repetindo o processo, percebeu que a cada vez que fixava obtinha uma nota uma oitava mais alta. Verificando que a oitava tinha proporção de dois para um usou frações simples para medir a distância das cordas adicionais, nascendo assim a escala musical.

No entanto, a abordagem moderna da modelagem matemática como um campo de estudo sistemático começou a surgir no final do século XIX e início do século XX, com o advento da teoria matemática da equação diferencial.

A aplicação da matemática à física, particularmente à mecânica, foi uma das principais forças impulsionadoras dos primeiros estudos de modelagem matemática. Galileu Galilei e Isaac Newton, por exemplo, desenvolveram equações matemáticas para descrever o movimento dos corpos celestes e dos objetos na Terra. A partir desses estudos, as equações diferenciais ordinárias e parciais foram desenvolvidas para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos.

Durante o século XX, a modelagem matemática tornou-se cada vez mais importante em muitas áreas, incluindo a física, a biologia, a economia e a engenharia. Avanços na computação tornaram possível a criação de modelos cada vez mais complexos e detalhados, permitindo uma melhor compreensão de sistemas complexos e a previsão de seu comportamento futuro. Na engenharia, diversas plantas industriais utilizam a modelagem matemática utilizando equações diferenciais e teorias de controle moderno para transformar um processo industrial qualquer em um equacionamento em que, através dele, é possível entender a sua dinâmica na planta industrial considerando entradas e saídas.

Hoje, a modelagem matemática é uma área interdisciplinar que abrange uma ampla gama de tópicos e aplicações, desde a análise de sistemas físicos e biológicos até a previsão de tendências econômicas e sociais.

4.2 Conceito de Modelagem Matemática

Para Bassanezi (2004, p. 16), a modelagem matemática é a "*arte de transformar problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando as soluções em termos da linguagem do mundo real*."

Dessa forma a modelagem matemática se apresenta como um processo de formular e resolver problemas da vida real utilizando técnicas e conceitos matemáticos. Ela envolve identificar um problema do mundo real e transformá-lo em um problema matemático, para que possa ser analisado e resolvido utilizando ferramentas matemáticas.

Biembengut e Hein (2011, p. 7) conceitua modelagem matemática como "a arte de expressar, por intermédio da linguagem matemática, situações problemas do nosso meio." Nessa definição reside a ideia de que a modelagem surge de uma necessidade humana de resolver problemas do cotidiano utilizando-se da matemática como instrumento.

Um modelo matemático pode ser representado por equações, gráficos, simulações, entre outras formas, e deve ser validado por meio de comparações com dados reais. Dessa forma, Biembengut e Hein (2011, p. 12) entende por modelo matemático, "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procuram traduzir de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real". Além disso, a modelagem matemática envolve também a análise crítica dos resultados obtidos, para verificar se eles fazem sentido do ponto de vista prático e se estão de acordo com as premissas e limitações do modelo.

4.3 Etapas da Modelagem Matemática

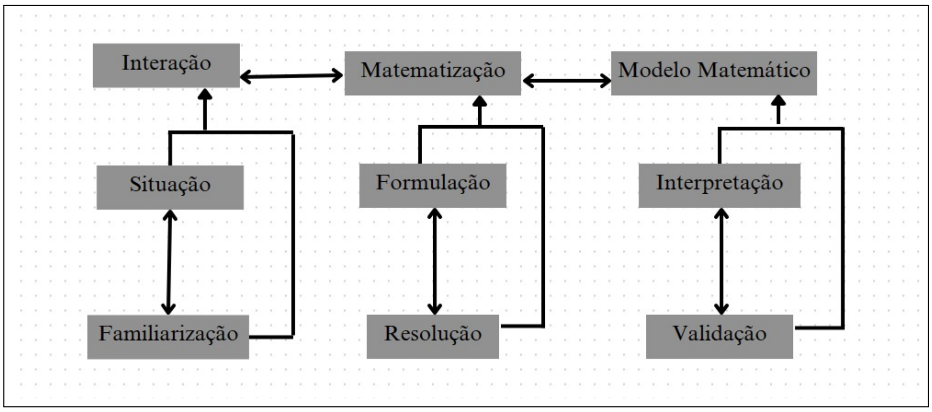
Segundo Biembengut e Hein (2011, p. 13) o processo de modelagem matemática pode ser sistematizado em três etapas:

1ª Etapa: Interação - Neste momento o educando reconhece a problemática em questão (reconhecimento da **situação** problema) e busca identificar um conjunto de variáveis relativas à situação a ser modelada. Consistem no reconhecimento da situação-problema, no levantamento dos dados e do referencial teórico (**familiarização**) necessário à fundamentação e realização do trabalho de modelagem. Aqui, há uma síntese do tema ou das informações essenciais de modo a tornar a situação mais clara e que permita gerar a questão norteadora, cujas etapas seguintes irão se debruçar em tentar responder. Importa salientar que o problema pode surgir do debate de ideias entre os alunos e professor, ou este último pode apresentar uma situação que demande um problema a ser solucionado. Desse modo, a modelagem não está presa a um currículo, nem a uma ordem de conteúdos.

2ª Etapa: Matematização - Nesta etapa ocorrerá a **formulação** do problema para a linguagem matemática, e o momento em que o educando irá trabalhar a produção/reconstrução do conhecimento matemático, utilizando algum sistema teórico-matemático. Busca-se descrever relações em termos matemáticos para se chegar a um conjunto de expressões, fórmulas, representações que levem à solução ou permitam sua dedução. A seleção das variáveis e constantes envolvidas no problema, bem como o levantamento das hipóteses ocorre nesta fase, que se fecha com a obtenção de um modelo baseado na utilização das ferramentas matemáticas disponíveis. Uma vez formulada a situação, passa-se à **resolução** ou análise com o ferramental matemático de que se dispõe.

3ª Etapa: Modelo Matemático - Analisar as implicações da solução, bem como a aplicação do modelo (**interpretação**) como forma de avaliar o processo é essencial para verificar sua aproximação com a situação-problema, bem como para reestruturá-lo caso necessário. Nesta etapa, o educando irá testar a validade (**validação**) do modelo objetivando consolidá-lo e reestruturá-lo. Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa, ajustando-se hipóteses, variáveis, etc.

Figura 15 – Dinâmica da modelagem matemática



Fonte**:** Biembengut e Hein (2011, p. 15).

Os autores ainda fazem uma diferenciação entre modelagem e modelação matemática na medida em que apontam que "na modelação, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua recriação em sala, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto." (Biembengut; Hein, 2011, p.29).

Nesse sentido, a modelação pode ser entendida como uma adequação da modelagem matemática a alguns inconvenientes de sua aplicação na escola, como: currículo pré-estabelecido pelo qual o modelo deverá passar, o ferramental matemático requerido ser de domínio do professor e alunos, acompanhamento simultâneo de temas escolhidos pelos alunos.

5 PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Os primeiros escritos sobre a obra Elementos de Euclides datam de 300 anos antes da era Cristã, onde estão sintetizados os principais axiomas, termos primitivos, postulados e teoremas, os quais são utilizados nas aulas de Matemática até hoje. Sinteticamente, conforme Cruz e Santos (2009, p. 9) a geometria Euclidiana está alicerçada nos seguintes postulados:

1 Dois pontos distintos determinam uma reta;
2 Por qualquer ponto de uma reta, é possível destacar um segmento de comprimento arbitrário;
3 Uma circunferência pode ser obtida dados quaisquer raio e centro;
4 Ângulos retos são iguais;
5 Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única reta que passa por P e é paralela a r.

Por mais de 2000 anos os postulados foram aceitos, porém o seu quinto postulado gerou muitas discussões, dúvidas, resistindo a todo tipo de demonstrações.

Foram muitos os matemáticos que tentaram elucidar o postulado: Bolyai, Lobachevski e Riemann, chegaram ao que denominaram de geometria dos espaços curvos: Janos Bolyai (1802 - 1860) admite a negação do postulado do paralelismo de Euclides como hipótese não absurda. Nicolai Lobachewski (1792 - 1856) publica em 1829 a sua versão da geometria não euclidiana, hoje chamada de Geometria Hiperbólica, na qual por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta. Georg Riemann, em 1851, expõe um modelo de visualização que trata da superfície esférica. Nele as retas são círculos máximos da superfície, tornando a geometria mais infinita, embora se saiba que um círculo máximo tenha comprimento fixo, na geometria elíptica.

O modelo da Geometria de Riemann concebe a superfície de uma esfera como sendo um plano e pontos como posições pertencentes a esse plano. Nele, faz-se uma correspondência entre o plano e a superfície esférica, entre as retas e as geodésicas. Para ele, "reta" é uma circunferência máxima sobre a esfera. Em seus estudos, Riemann mostra como projetar uma esfera sobre um plano, o que denominou-se de projeção estereográfica, sendo tal projeção definida em toda a superfície esférica, com exceção de um único ponto (o ponto de projeção).

Para melhor entender as relações acima, nessa geometria destaca-se que: O plano é uma superfície bidimensional de uma esfera; Nessa superfície as linhas retas são circunferências; As distâncias entre dois pontos na superfície esférica são denominadas de geodésica; Duas quaisquer dessas circunferências máximas cortam-se em dois pontos e não existem paralelas, formando dois grandes círculos que se cruzam; Todas as retas, que são os círculos máximos, se intersectam sendo a soma dos ângulos superior a 180º.

A deformação de ângulos e áreas provocadas pelas diferentes projeções cartográficas, como objeto do conhecimento proposto na habilidade específica EM13MAT509, deve-se inicialmente ao formato aproximado do nosso planeta se assemelhar a uma esfera. Nesse sentido, inicialmente, faz-se necessário uma análise sobre a geometria que permeia o planeta, a qual se passa a discorrer a seguir.

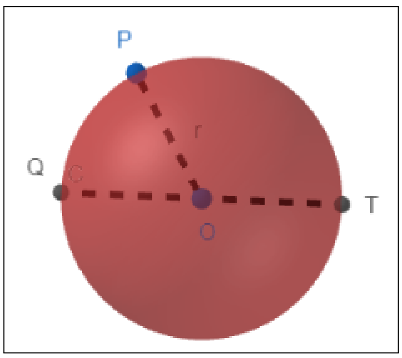
5.1 Noções de Geometria Esférica

Doravante, considerando a possibilidade de serem explorados no Ensino Médio, amplia-se a definição de esfera vista no capítulo 1, trazendo-se alguns de seus elementos, baseados nos estudos de Alves (2009), além de sua relação com o globo terrestre.

Seja O um ponto e r um número real positivo. A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a O é igual a r. Os pontos do espaço cuja distância a O é menor que r são interiores à superfície esférica e aqueles cuja distância a O é maior que r são exteriores a ela. A reunião da superfície esférica de centro O e raio r com seus pontos interiores é chamada esfera de centro O e raio r.

O segmento que une o centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado raio da superfície esférica enquanto que o segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é chamado corda da superfície esférica. Uma corda que contém o centro é chamada diâmetro da superfície esférica. Desse modo, o comprimento de qualquer diâmetro é o número $2r$. Na Figura 16, r é o raio da superfície esférica, $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ e $\overline{OT}$ são raios, $\overline{PQ}$ e $\overline{PT}$ são cordas, $\overline{QT}$ é um diâmetro e $2r = \overline{QT}$ é o diâmetro da superfície esférica.

Figura 16 – Superfície esférica



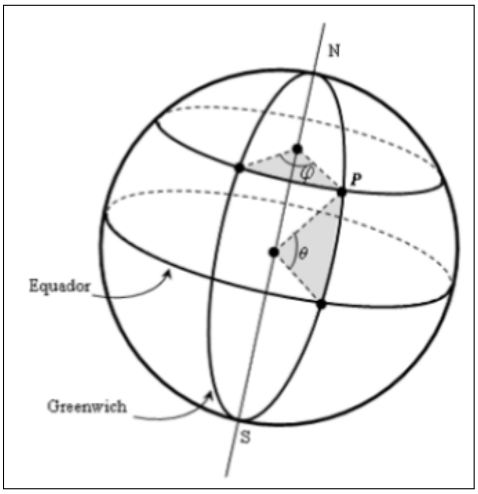
Fonte: Alves (2009, adaptado).

Embora se saiba não ser a Terra perfeitamente redonda (O'Shea, 2009), já que é ligeiramente achatada nos polos, para facilitar o entendimento, considera-se, no ensino médio, como uma esfera perfeita. Nessa esteira, conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes, entre outros são baseados em importantes ideias geométricas que podem conduzir a uma melhor compreensão sobre o assunto por parte dos alunos.

Considerando a superfície da Terra como uma esfera, o qual didaticamente é denominado de Globo Terrestre, chama-se de eixo polar a reta que contém o centro da Terra e ao redor da qual a mesma desenvolve o movimento de rotação, e respectivamente, de polo Norte e Sul os pontos N e S, interseções da superfície da Terra com o eixo polar.

A circunferência máxima delimitada pela superfície da Terra e o plano do Equador é denominada de *Linha do Equador*. Os *paralelos* são circunferências determinadas pela intersecção de planos paralelos ao plano do Equador e a superfície da Terra sendo, portanto, à exceção da Linha do Equador, todos os demais paralelos possuem circunferência com o raio inferior ao raio terrestre. Já os *meridianos* são semicircunferências cujos centros coincidem com o centro da Terra e que tem seus extremos nos polos. O meridiano de Greenwich é uma dessas semicircunferências que passa pelos polos e que recebe esse nome porque passa pelo Observatório Real de Greenwich, em Londres. (Figura 17).

Figura 17 – Eixo polar, Equador e Greenwich

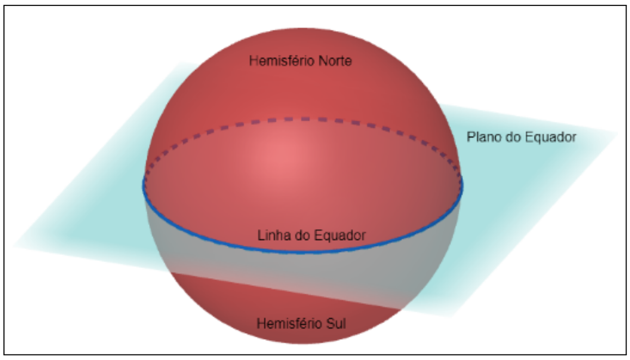


Fonte**:** Freitas (2017).

O plano perpendicular ao eixo polar e que contém a circunferência máxima na Linha do Equador, denomina-se de plano do Equador, e divide a Terra em duas partes chamadas Hemisfério Norte e Hemisfério Sul, cada uma contém os respectivos polos (Figura 18).

Toda seção obtida por um plano secante a uma superfície esférica é uma circunfe-

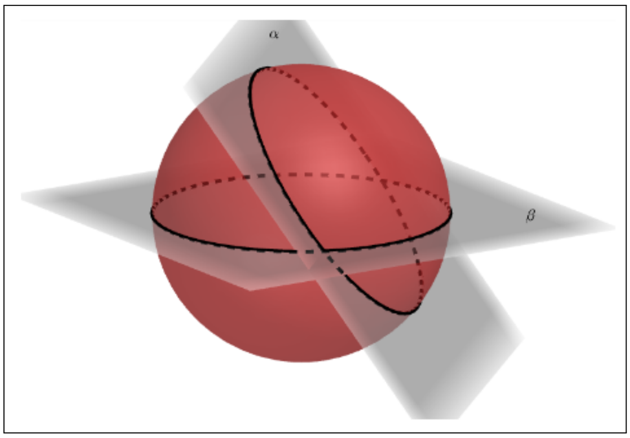
Figura 18 – Hemisférios Norte e Sul



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

rência (Figura 19). Se o plano secante passa pelo centro da esfera, tem-se uma circunferência máxima. Toda circunferência máxima possui dois pontos diametralmente opostos, esses pontos são denominados *antípodas*.

Figura 19 – Planos secantes a uma esfera e suas interseções



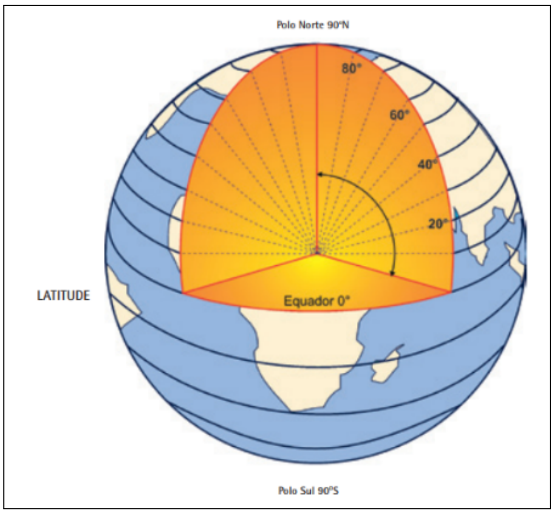
Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Algumas definições referentes ao Globo Terrestre:

a) Latitude: Dado um ponto P na superfície terrestre a Latitude de P é a medida do arco (θ) que vai de P até a Linha do Equador e que está contido em um mesmo meridiano. Esse arco é medido em graus, minutos e segundos e pode variar entre 0º e 90º para norte N ou sul S de acordo com o hemisfério em que P se localiza (Figura 20).

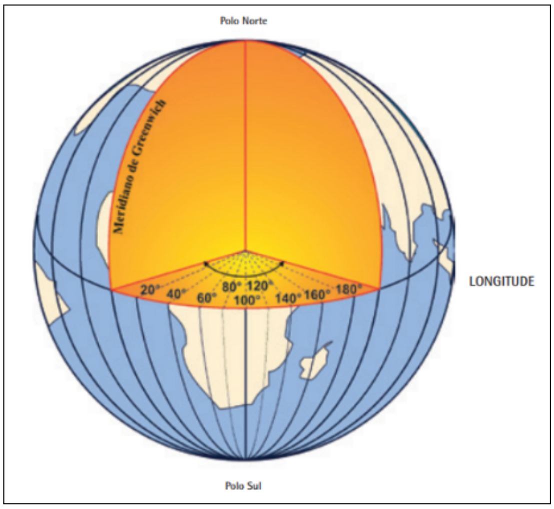
b) Longitude: Dado um ponto P na superfície terrestre a Longitude de P é a medida do arco (φ) que vai de P até o Meridiano de Greenwich e que está contido em um paralelo. Esse arco é medido em graus, minutos e segundos e pode variar entre 0º e 180º de longitude E (leste) ou W (oeste). Por definição, o meridiano de Greenwich tem sua longitude igual a 0º (Figura 21).

Figura 20 – Latitude



Fonte: IBGE (2023a).

Figura 21 – Longitude



Fonte: IBGE (2023a).

5.2 Noções de Cartografia

Desde os primórdios, o homem sente a necessidade de se localizar, saber qual a sua posição sobre a Terra, seja para ter noção de sua localização em uma pequena cidade, seja navegando por vastos oceanos. Para isso, se utilizavam, antigamente, de instrumentos como a bússola magnética, o astrolábio e o sextante, e hodiernamente o GPS (Global Position Sistem).

Uma ferramenta de muita importância até mesmo nos dias atuais são os mapas. Entretanto, quando se pretende representar partes significativas do Globo Terrestre em um mapa, este precisa ser o mais preciso possível. Daí, recorre-se então à projeção cartográfica.

A cartografia é o ramo do conhecimento que procura maneiras eficientes de representar uma porção da superfície da Terra por um mapa plano.

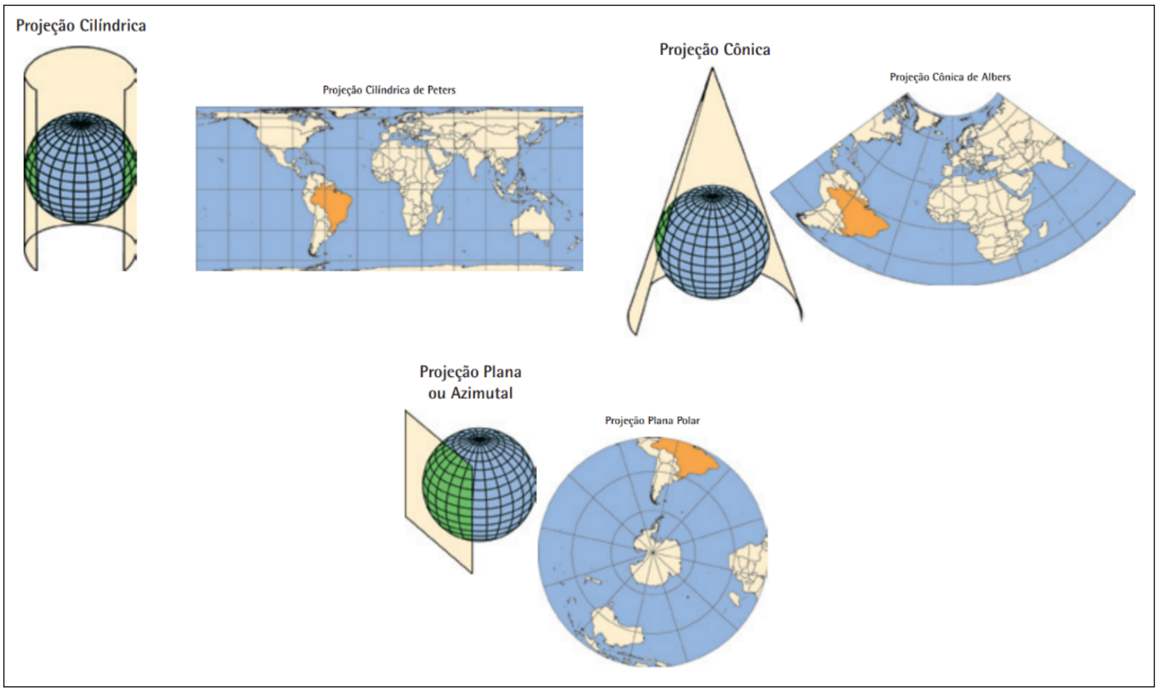
O grande problema da cartografia consiste em ter que representar uma superfície esférica num plano, pois, é sabido, a esfera (globo terrestre) é um sólido não planificável, pelo menos, não sem distorções. Nesse sentido, Ávila (2010) afirma que durante as grandes navegações:

> [...] os cartógrafos procuravam descobrir a maneira de fazer um mapa de forma a reproduzir as diferentes localidades do globo preservando, com exatidão, na mesma escala, as várias distâncias entre elas. Isso perdurou até que, em meados do século XVIII, o grande matemático Leonard Euler (1707-1783) demonstrou a impossibilidade desse intento. (Ávila, 2010, p.185).

Assim, sempre que uma esfera é planificada, necessariamente ela sofrerá alterações ou deformações.

A cartografia lida com diversos tipos de projeções. Dentre as mais famosas estão a projeção Cilíndrica e a Cônica, além da Azimutal, conforme Figura 22.

Figura 22 – Projeções Cilíndrica, Cônica e Azimutal



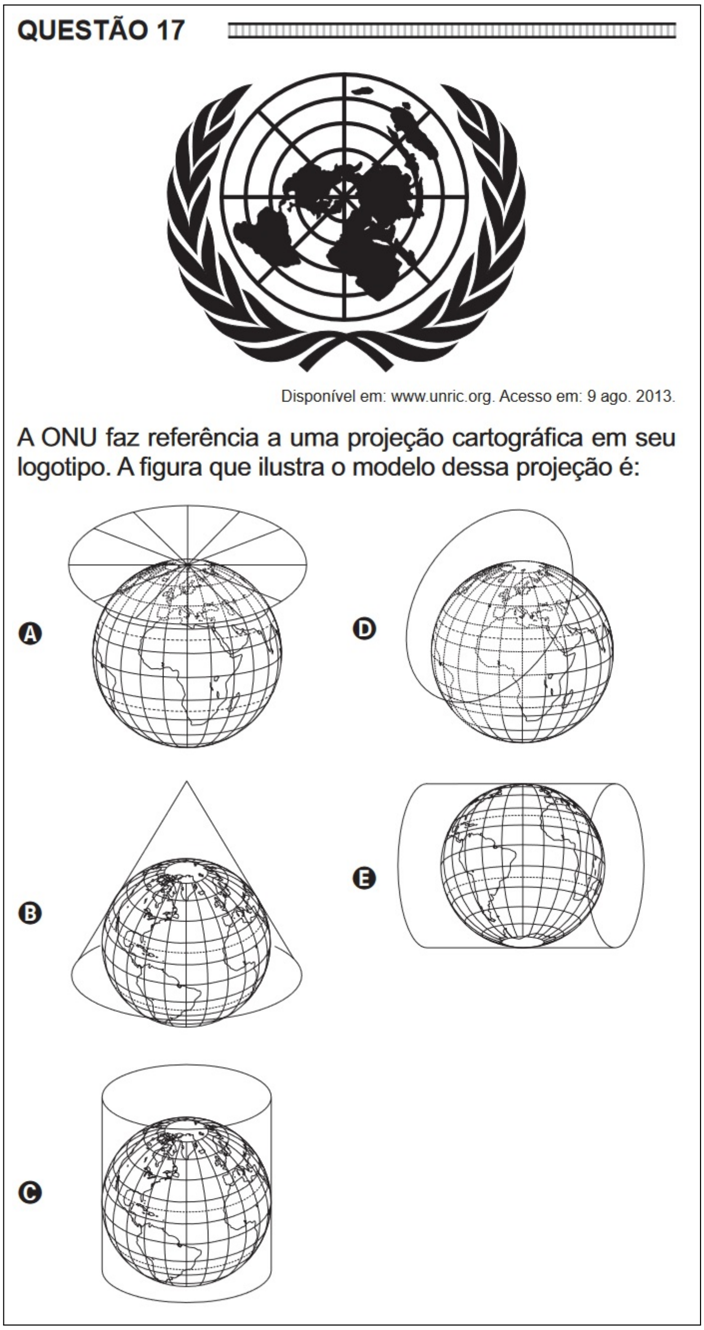
Fonte: IBGE (2023a).

a) Cilíndrica: é obtida a partir da projeção de paralelos e meridianos sobre um cilindro que envolve o globo, e posteriormente desenvolvido (planificado).
b) Cônica: o globo terrestre é projetado na superfície lateral de um cone e, em seguida, planificado.

c) Azimutal: também chamada de polar ou plana, a superfície terrestre é projetada sobre um plano tangente ao globo. Podem ser classificadas em: ortográfica, estereográfica ou gnomônica.

Apenas para exemplificar, a bandeira da ONU (Organização das Nações Unidas) é uma projeção azimutal do globo terrestre, centrada no polo norte, tendo inclusive sido objeto de questão no ENEM 2016 (questão 17 prova azul do primeiro dia), conforme se vê na Figura 23.

Figura 23 – Bandeira da ONU em questão do ENEM



Fonte**:** ENEM (2016).

Segundo Boyer (2012, p. 130), Ptolomeu teria descrito dois tipos de projeção cartográfica: a ortográfica explicada no *Analemma* - a mais antiga exposição desse método que pode ter sido usada por Hiparco, uma vez que praticamente todo seu trabalho foi perdido e Ptolomeu era seu discípulo - essa projeção transportava a esfera para o plano ortogonalmente sobre três planos perpendiculares entre si; e a estereográfica descrita no *Planisphaerium*, onde Ptolomeu relata que pontos da esfera são projetados por retas por um polo sobre um plano - no caso de Ptolomeu, do polo sul para o plano do equador. Ptolomeu sabia que, neste tipo de projeção, "um círculo que não passasse pelo polo de projeção ia em um círculo do plano, e que um círculo pelo polo era projetado em uma reta", além de perceber que tratava-se de transformação conforme - isto é, preservava ângulos.

Por sua importância, Ptolomeu é considerado o pai da geografia, tanto que mapas da Idade Média que chegaram até nós têm bases nos mapas feitos por Ptolomeu mais de mil anos antes.

Considerando que o objeto deste estudo está voltado para a projeção estereográfica, deter-se-á sobre ela.

5.3 Desenvolvimento da Projeção Estereográfica

A ideia de estudar a projeção esferográfica no ensino médio, parte do pressuposto de que vincular o ensino de conceitos matemáticos à cartografia pode despertar um interesse nos alunos, pois se sentirão inseridos no espaço geográfico e conseguirão, não somente visualizar, como também manipular situações que geram conceitos matemáticos, uma vez que os mapas e outras representações cartográficas são importantes para a localização e a compreensão do indivíduo e de seu posicionamento.

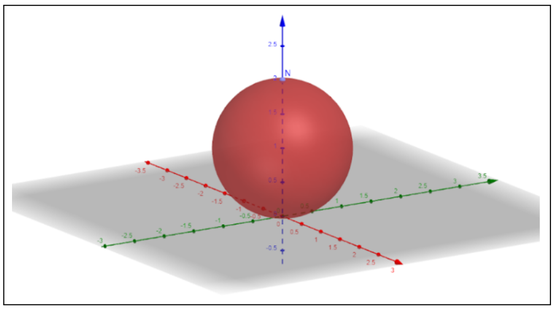
A Projeção Estereográfica é uma espécie de projeção azimutal (cujo plano de projeção é tangente à esfera) na qual a projeção parte de um ponto antipodal a um ponto tangente ao plano de projeção.

Tal como em outras projeções azimutais, os círculos máximos que passam pelo ponto de tangência aparecem como linhas retas. Por essa razão, essa projeção é frequentemente usada para realizar aproximações de paralelos, meridianos e outras linhas de longitude e latitude. É também usada para representar regiões polares, pois as áreas próximas aos polos são as mais distorcidas em outras projeções como a cilíndrica, tornando-as mais visíveis.

A projeção estereográfica é muito utilizada em cartografia geográfica, pois distorce os elementos menos significativos e preserva os elementos mais importantes como as dimensões e as formas. É ainda utilizada na cartografia de navegação, pois permite ao navegador ter uma melhor visualização dos elementos de rota. A seguir, passaremos ao estudo matemático dessa projeção.

Essa aplicação, projeta os pontos de uma esfera em um plano tangente (ou secante) a essa esfera. Isso pode ser visualizado, por exemplo, como se um refletor no polo norte projetasse uma sombra do mapa acima da esfera no plano. Desse modo, teríamos o polo norte N como um ponto de origem da projeção situado na posição diametralmente oposta ao ponto de tangência (ou seja, o polo Sul - S), no caso do plano tangente (Figura 24). Graficamente a projeção estereográfica pode ser obtida da seguinte maneira: para um ponto qualquer na superfície da esfera (P), trace uma reta que une esse ponto ao polo norte. Essa reta irá intersectar o plano tangente ao polo Sul em algum ponto. Esse ponto (P') é a projeção estereográfica do ponto P na superfície da esfera – pode-se repetir esse procedimento para todos os pontos da esfera, obtendo para cada um deles sua projeção estereográfica, exceto o próprio polo Norte.

Figura 24 – Esfera tangente ao plano π



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Vamos explorar este conceito matematicamente. Inicialmente, define-se uma expressão matemática que caracterize essa projeção.

Sem perda de generalidade, consideremos a esfera unitária, com centro no ponto $C(0,\ 0,\ 1)$,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\} \tag{5.1}$$

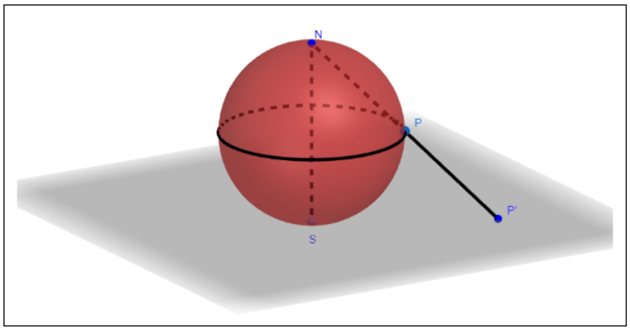
e o plano

$$\pi = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \tag{5.2}$$

tangente a $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{S} = (0,\ 0,\ 0)$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \pi &= \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \\ &= (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Figura 25 – A Projeção Estereográfica



Fonte: Silva (2011, adaptado).

Dado um ponto $P = (a,\ b,\ c) \in \mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$, define-se a reta $r(t) = \{N + t \cdot \overline{NP} \mid t \in \mathbb{R}\}$, partindo do polo norte $N = (0,\ 0,\ 2)$ da esfera $\mathbb{S}^2$ e passando pelo ponto P da esfera. Dessa forma, deseja-se encontrar o instante t, tal que a $r \cap \pi \neq \varnothing$. Com efeito,

$$\begin{aligned} r(t) &= \{N + t \cdot (P - N) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,\ 0,\ 2) + t \cdot (a,\ b,\ c-2) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(ta,\ tb,\ t \cdot (c-2) + 2) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

O ponto da interseção $r \cap \pi = \{(x,\ y,\ z) \in r \mid z = 0\}$ representa a projeção de $P \in \mathbb{S}^2$ sobre o plano π, definindo o ponto $P' \in \pi \cap r$. Assim:

$$P' = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,\ y,\ z) = (ta,\ tb,\ t \cdot (c-2) + 2)\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Como a terceira coordenada tem valor $z = 0$, então

$$t(c-2) + 2 = 0 \tag{5.6}$$

$$t = \frac{-2}{c-2}, \tag{5.7}$$

o que é equivalente a $t = 2/(2-c)$. Portanto,

$$\begin{aligned} P' &= (ta,\ tb,\ t \cdot (c-2) + 2) \\ &= \left(\frac{2}{2-c} \cdot a,\ \frac{2}{2-c} \cdot b,\ 0\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dessa forma, podemos definir a projeção estereográfica como sendo a função:

$$\varphi : \ \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$$
$$(a,\ b,\ c) \to \left(\frac{2a}{2-c},\ \frac{2b}{2-c} \right).$$

Corolário: A projeção estereográfica será injetiva e sobrejetiva, e portanto bijetiva, admitindo uma inversa, que será dada por:

$$\psi(m,\ n) = \left(\frac{4m}{m^2+n^2+4},\ \frac{4n}{m^2+n^2+4},\ \frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4} \right). \tag{5.9}$$

Prova: Para provar a bijetividade de φ, iniciemos pela prova de sua injetividade. Assim, consideremos os pontos P_1 e P_2 distintos pertencentes à esfera $\mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$ de modo que:

$$P_1 = (a_1,\ b_1,\ c_1) \ \text{ e } \ P_2 = (a_2,\ b_2,\ c_2).$$

Dessa forma,

$$\varphi(P_1) = \varphi(a_1,\ b_1,\ c_1) = \left(\frac{2a_1}{2-c_1},\ \frac{2b_1}{2-c_1} \right) \tag{5.10}$$

e

$$\varphi(P_2) = \varphi(a_2,\ b_2,\ c_2) = \left(\frac{2a_2}{2-c_2},\ \frac{2b_2}{2-c_2} \right). \tag{5.11}$$

Como

$$\left(\frac{2a_1}{2-c_1},\ \frac{2b_1}{2-c_1} \right) \neq \left(\frac{2a_2}{2-c_2},\ \frac{2b_2}{2-c_2} \right), \tag{5.12}$$

logo:

$$P_1 \neq P_2 \ \Rightarrow \ \varphi(P_1) \neq \varphi(P_2). \tag{5.13}$$

Desse modo, está provada a injetividade de φ.

Para que φ seja sobrejetiva, é necessário que para cada ponto P' pertencente a π exista um único ponto P pertencente a $\mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$, tal que $\varphi(P)$ é igual a P'.

Com efeito, para se determinar o ponto $P(a,\ b,\ c)$ da esfera sabendo que a sua projeção é o ponto $P'(m,\ n,\ 0)$ no plano, defina a reta NP' dada pela a seguinte equação vetorial $s(NP') = \{N + t \cdot NP' \mid t \in \mathbb{R}\}$, assim:

$$\begin{aligned} s(NP') &= N + t \cdot (P' - N) \\ &= (0,\ 0,\ 2) + t \cdot (m,\ n,\ -2) \\ &= (tm,\ tn,\ -2t+2). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Desse modo:

$$\begin{cases} a &= & tm & \Rightarrow & t = \frac{a}{m} \\ b &= & tn & \Rightarrow & t = \frac{b}{n} \\ c &= & -2t+2 & \Rightarrow & t = \frac{2-c}{2} \end{cases}$$

Das equações acima, tem-se:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{2-c}{2}. \tag{5.15}$$

Importa salientar os seguintes casos para m e n nulos, a saber:

I) Se $m = n = 0$, implica:

i)

$$\frac{2a}{2-c} = 0 \ \Rightarrow \ a = 0,$$

ii)

$$\frac{2b}{2-c} = 0 \ \Rightarrow \ b = 0.$$

Assim, como $\varphi : \ \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$, então:

$$(0,0,0) \ \to (0,0)$$

II) Se $m = 0$ e $n \neq 0$, implica:

$$(0,b,c) \ \Rightarrow (0, \frac{2b}{2-c}).$$

III) Se $m \neq 0$ e $n = 0$, implica:

$$(a,0,c) \ \Rightarrow (\frac{2a}{2-c}, 0).$$

Como o ponto $P = (a, \ b, \ c) \in \mathbb{S}^2$, satisfaz a condição

$$a^2 + b^2 + (c-1)^2 = 1 \tag{5.16}$$

e pertence à reta NP', então:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \ \ \Rightarrow \ \ b = \frac{an}{m} \tag{5.17}$$

$$\frac{a}{m} = \frac{2-c}{2} \ \ \Rightarrow \ \ c = \frac{-2a}{m} + 2 \tag{5.18}$$

Substituindo (5.17) e (5.18) em (5.16), encontra-se:

$$a^2+\left(\frac{an}{m}\right)^2+\left(\frac{-2a}{m}+2-1\right)^2=1. \tag{5.19}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} 1 &= a^2+\frac{a^2n^2}{m^2}+\left(\frac{-2a}{m}+1\right)^2 \\ 1 &= a^2+\frac{a^2n^2}{m^2}+\frac{4a^2}{m^2}-\frac{4a}{m}+1. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Assim:

$$a^2m^2+a^2n^2+4a^2-4am=0 \;\Rightarrow\; a(am^2+an^2+4a-4m)=0, \tag{5.21}$$

expressão que é satisfeita para $a=0$ ou $a(m^2+n^2+4)=4m$. Logo:

$$a=\frac{4m}{m^2+n^2+4}. \tag{5.22}$$

Note que $a=0$ não convém, pois, por hipótese, $P\neq N$. Por outro lado, se $a=0$, então:

$$P=(a,\,b,\,c)=\left(a,\,\frac{an}{m},\,\frac{-2a}{m}+2\right)=\left(0,\,\frac{0\cdot n}{m},\,\frac{-2\cdot 0}{m}+2\right)=(0,0,2)=N,\ \text{absurdo.}$$

Usando (5.22) em (5.17), tem-se:

$$\begin{aligned} b &= \frac{4mn}{m(m^2+n^2+4)} \\ &= \frac{4n}{m^2+n^2+4}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

E, de modo análogo, fazendo (5.22) em (5.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} c &= \frac{-8m}{m(m^2+n^2+4)}+2 \\ &= \frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Logo, P existe, e é da forma:

$$P=(a,\,b,\,c)=\left(\frac{4m}{m^2+n^2+4},\,\frac{4n}{m^2+n^2+4},\,\frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}\right). \tag{5.25}$$

Perceba que $\varphi(P) = P'$, pois:

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= \varphi(a,\, b,\, c) \\
&= \left(\frac{2\cdot\frac{4m}{m^2+n^2+4}}{2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}}, \frac{2\cdot\frac{4n}{m^2+n^2+4}}{2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{8m}{m^2+n^2+4}}{\frac{2m^2+n^2+8-2m^2-n^2}{m^2+n^2+4}}, \frac{\frac{8n}{m^2+n^2+4}}{\frac{2m^2+n^2+8-2m^2-n^2}{m^2+n^2+4}} \right) \\
&= \left(\frac{8m}{8}, \frac{8n}{8} \right) \\
&= (m,\, n). \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

Como $P' = (m,\, n)$, logo:

$$\varphi(P) = P',$$

o que prova a sobrejetividade.

Sendo injetiva e sobrejetiva, pela **definição 3.4**, φ é bijetiva e, portanto, admite inversa.

Teorema 5.3.1 *φ e ψ definidas anteriormente são aplicações inversas uma da outra.*

Prova: Com efeito,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(m,\, n) &= \varphi(\psi(m,\, n)) \\
&= \varphi\left(\frac{4m}{m^2+n^2+4}, \frac{4n}{m^2+n^2+4}, \frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4} \right) \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

Lembre que:

$$\begin{aligned}
\varphi(a,\, b,\, c) &= \left(\frac{2a}{2-c}, \frac{2b}{2-c} \right) \\
&= \left(\frac{2\cdot\frac{4m}{m^2+n^2+4}}{2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}}, \frac{2\cdot\frac{4n}{m^2+n^2+4}}{2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}} \right) \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
2 - \frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4} &= \frac{2m^2+2n^2+8-2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4} \\
&= \frac{8}{m^2+n^2+4} \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(a,\, b,\, c) &= \left(\frac{8m}{8}, \frac{8n}{8} \right) \\
&= (m,\, n). \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(a,\, b,\, c) &= \psi(\varphi(a,\, b,\, c)) \\ &= \psi\left(\frac{2a}{2-c},\, \frac{2b}{2-c}\right) \end{aligned} \tag{5.31}$$

Lembre que:

$$\begin{aligned} \psi(m,\, n) &= \left(\frac{4m}{m^2+n^2+4},\, \frac{4n}{m^2+n^2+4},\, \frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}\right) \\ &= \left(\frac{4\cdot\frac{2a}{2-c}}{\left(\frac{2a}{2-c}\right)^2+\left(\frac{2b}{2-c}\right)^2+4},\, \frac{4\cdot\frac{2b}{2-c}}{\left(\frac{2a}{2-c}\right)^2+\left(\frac{2b}{2-c}\right)^2+4},\, \frac{2\left[\left(\frac{2a}{2-c}\right)^2+\left(\frac{2b}{2-c}\right)^2\right]}{\left(\frac{2a}{2-c}\right)^2+\left(\frac{2b}{2-c}\right)^2+4}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{8a}{2-c}}{\frac{4a^2}{(2-c)^2}+\frac{4b^2}{(2-c)^2}+\frac{4(2-c)^2}{(2-c)^2}},\, \frac{\frac{8b}{2-c}}{\frac{4a^2}{(2-c)^2}+\frac{4b^2}{(2-c)^2}+\frac{4(2-c)^2}{(2-c)^2}},\, \frac{\frac{8a^2}{(2-c)^2}+\frac{8b^2}{(2-c)^2}}{\frac{4a^2}{(2-c)^2}+\frac{4b^2}{(2-c)^2}+\frac{4(2-c)^2}{(2-c)^2}}\right) \end{aligned}$$

Note que, de (5.16), tem-se $a^2+b^2+(c-1)^2=1$, assim:

$$a^2+b^2+c^2-2c+1=1 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=2c-c^2 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=c(2-c) \tag{5.32}$$

Multiplicando (5.32) por 4 em ambos os membros, tem-se:

$$4a^2+4b^2=4c(2-c) \tag{5.33}$$

Assim:

$$\psi(m,\, n) = \left(\frac{\frac{8a}{2-c}}{\frac{4a^2+4b^2}{(2-c)^2}+4},\, \frac{\frac{8b}{2-c}}{\frac{4a^2+4b^2}{(2-c)^2}+4},\, \frac{\frac{8a^2+8b^2}{(2-c)^2}}{\frac{4a^2+4b^2}{(2-c)^2}+4}\right) \tag{5.34}$$

Substituindo (5.33), tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(m,\, n) &= \left(\frac{\frac{8a}{2-c}}{\frac{4c(2-c)}{(2-c)^2}+4},\, \frac{\frac{8b}{2-c}}{\frac{4c(2-c)}{(2-c)^2}+4},\, \frac{\frac{8a^2+8b^2}{(2-c)^2}}{\frac{4c(2-c)}{(2-c)^2}+4}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{8a}{2-c}}{\frac{4c}{(2-c)}+4},\, \frac{\frac{8b}{2-c}}{\frac{4c}{(2-c)}+4},\, \frac{\frac{8a^2+8b^2}{(2-c)^2}}{\frac{4c}{(2-c)}+4}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{8a}{2-c}}{\frac{4c+8-4c}{(2-c)}},\, \frac{\frac{8b}{2-c}}{\frac{4c+8-4c}{(2-c)}},\, \frac{\frac{8c(2-c)}{(2-c)^2}}{\frac{4c+8-4c}{(2-c)}}\right) \\ &= (a,\, b,\, c). \end{aligned} \tag{5.35}$$

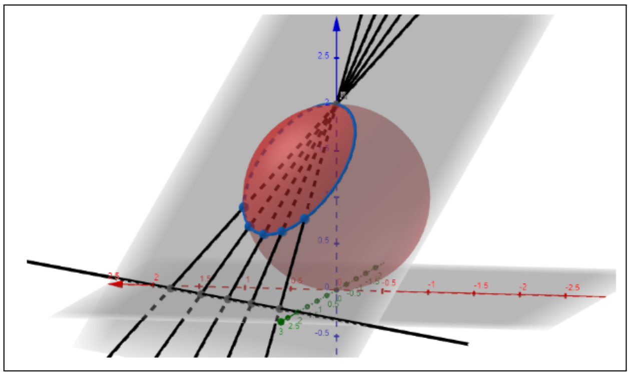
Verifica-se que $\psi(m,\, n) \in \mathbb{S}^2$. Logo, concluímos que $\psi = \varphi^{-1}$.

Uma vez que o objetivo do trabalho busca introduzir o tema de Projeção Estereográfica no Ensino Médio, considera-se prescindível as demonstrações matematicamente de suas propriedades, entretanto é importante explicitá-las ao menos graficamente. Mesmo assim, caso o leitor sinta a necessidade de um maior aprofundamento, sugere-se a leitura de Silva (2011).

Conforme Silva (2011), a projeção estereográfica, possui três propriedades que a tornam peculiar e útil na medida em que tem aplicações em diversas áreas como a astronomia, por exemplo. A primeira propriedade será dividida em duas partes (A e B) para facilitar a exposição.

Propriedade 5.1 *Círculos na superfície esférica que passam pela origem do ponto de projeção (ponto N) projetam-se como retas no plano (α)*

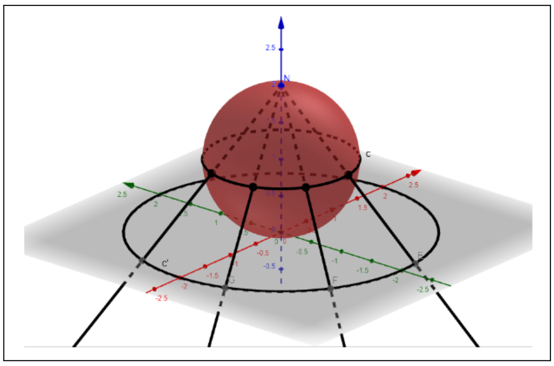
Figura 26 – Projeção estereográfica de círculos que passam por N



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Propriedade 5.2 *Círculos na superfície esférica que não passem pela origem são projetados como círculos no plano;*

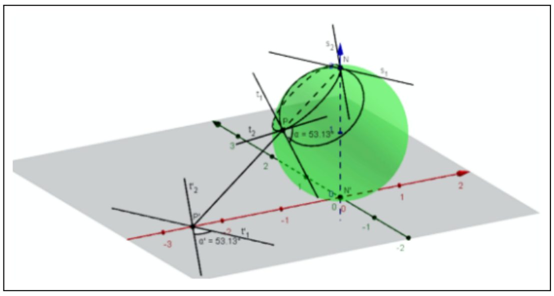
Figura 27 – Projeção estereográfica de circunferências que não passam por N



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Propriedade 5.3 *Ângulos entre curvas da superfície esférica são preservados quando essas mesmas curvas são projetadas no plano.*

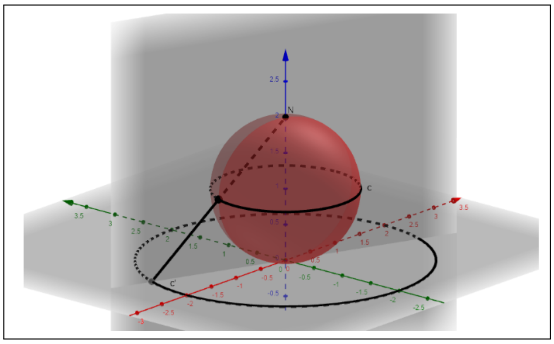
Figura 28 – Conservação de ângulos



Fonte: Nunes (2015).

Propriedade 5.4 *Quando a esfera gira em torno do eixo NS, os objetos projetados no plano vão também sofrer uma rotação de centro em S' com a mesma amplitude.*

Figura 29 – Rotação da Projeção Estereográfica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma característica relevante da projeção estereográfica é que ela permite observar toda esfera, exceto em um de seus pontos, no plano. Na verdade podemos considerar que esse único ponto (que é o ponto de origem da projeção) poderia ser projetado no infinito.

A projeção estereográfica possui maior aplicação na cartografia náutica, principalmente na construção de cartas marítimas de regiões polares. Entretanto, ela é amplamente utilizada em diversas áreas, incluindo cartografia, geologia, astronomia e topografia. Os exemplos de aplicações na vida cotidiana incluem:

a) Mapas: é amplamente utilizada na produção de mapas globais e regionais, permitindo representar a Terra como uma “esfera plana”.

b) Geologia: é utilizada para representar as características geológicas de uma rocha, como a direção de foliação e a intensidade de fechamento;
c) Astronomia: é utilizada para representar o céu noturno como uma esfera plana, facilitando a localização de estrelas e outros objetos celestes.

Já a projeção estereográfica inversa é aplicada na visão computacional e na robótica para determinar a posição tridimensional de objetos a partir de imagens bidimensionais. Alguns exemplos incluem:

a) Sistemas de vigilância: baseados em visão computacional utilizam projeção estereográfica inversa para determinar a distância de objetos capturados por câmeras;
b) Robótica: Robôs industriais utilizam a projeção estereográfica inversa para determinar a posição tridimensional de objetos e planificar seus movimentos;
c) Realidade aumentada: A projeção estereográfica inversa é utilizada em aplicativos de realidade aumentada para superpor objetos virtuais em imagens reais do mundo ao redor.

6 PROPOSTA DE AULA USANDO A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Este capítulo propõe uma sequência de atividades a serem trabalhadas com alunos da 3ª série do Ensino Médio, com o objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no estudo da projeção estereográfica, como: coordenadas cartesianas no plano e no espaço, figuras planas e espaciais, ponto, reta, plano, círculo e circunferência, esfera, equação da esfera, além de função bijetora e inversa.

Essa proposta de aula foi elaborada de forma que a projeção estereográfica fosse apresentada como curiosidade matemática a partir de um problema num contexto interdisciplinar com a disciplina de Geografia, ao tratar das projeções cartográficas, numa aula de geometria. Para o professor que desejar aplicá-la não é regra seguir estritamente o que é proposto. Adaptações podem ser necessárias de acordo com o nível cognitivo de cada turma.

Para a aplicação da sequência didática sugere-se a realização de 4 encontros com duração de 50 minutos cada um.

No primeiro, apresentamos uma situação problema, na intenção de provocar uma inquietação nos alunos na busca de hipóteses sobre como solucioná-lo, obviamente nesse momento ainda não fora apresentado o conteúdo de projeção estereográfica, que será o conhecimento novo que se deseja aprender, sendo apresentado seu conceito no final dessa etapa.

No segundo momento, propõe-se uma atividade de desenho que visa aferir como os alunos compreendem a formação de elementos geométricos na esfera.

No terceiro encontro, apresenta-se a demonstração da projeção estereográfica enquanto função, bem como sua inversa, para que seja compreendida como essa função pode solucionar o problema inicial.

No quarto e último, é proposto um questionário avaliativo para coletar evidências da aprendizagem dos alunos sobre a projeção estereográfica.

Antes de adentrarmos na proposta de aula propriamente dita, consideramos importante conceituar o uso de materiais manipuláveis que serão utilizados como suporte às aulas.

6.1 Uso de materiais manipuláveis no Ensino de Matemática

Segundo Lorenzato (2006 apud SANTOS; GUALANDI, 2016, p. 3), muitos estudiosos dedicaram seus estudos para defender a importância da utilização de materiais no desenvolvimento da aprendizagem. Nesse sentido, por volta de 1650, Comenius, filósofo tcheco, entende que o ensino deveria partir do concreto para o abstrato, sugerindo que o conhecimento inicia pelos órgãos sensoriais e que só se aprende fazendo. Locke, filósofo inglês, em 1680 alertava sobre a necessidade da experiência sensível para alcançar o conhecimento. Piaget deixou claro que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre o objeto, considerando que a inteligência se constrói a partir de relações mentais manipuláveis e das trocas do indivíduo com o meio no qual está inserido.

Materiais manipuláveis podem ser definidos como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar". Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia (REYS, apud PASSOS, 2006, p. 78).

Dessa forma, a utilização de materiais manipuláveis no ensino de matemática é uma estratégia pedagógica que visa auxiliar os alunos na compreensão de conceitos matemáticos, tornando-os mais concretos e palpáveis. Esses materiais podem ser objetos concretos, como blocos, peças, jogos e quebra-cabeças, que podem ser manipulados pelos alunos de forma livre e ativa.

Lucena (2017, p. 27) ainda conceitua materiais manipuláveis como

> [...] materiais didáticos que permitem a manipulação táctil do aluno, permitindo realizar construções e deformações de objetos geométricos, cálculos de forma concreta através de jogos (por exemplo), ajudando a perceber conceitos e propriedades de elementos matemáticos, bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, que é determinante na resolução de problemas matemáticos do seu cotidiano. São exemplos de materiais didáticos manipuláveis: o material dourado; escalas de Cuisenaire, jogos geométricos, dominós, sólidos geométricos, tangram, blocos lógicos, sementes, palitos de picolés, tampinhas, etc.

Pelas definições acima, o que se percebe é que ao utilizar materiais manipuláveis, os estudantes podem experimentar, explorar e construir seu próprio conhecimento matemático. Eles podem contar, agrupar, dividir, medir, transmitir e manipular formas, números e símbolos, o que facilita a visualização e a compreensão de conceitos abstratos. Esses materiais também permitem que os alunos desenvolvam habilidades como o raciocínio lógico, a resolução de problemas, a criatividade, a reflexão e a comunicação matemática. Isso ocorre porque eles são desafiados a pensar de forma crítica, a estabelecer relações entre os objetos, a formular hipóteses, a testá-las e a comunicar suas descobertas aos colegas.

Além disso, a utilização de materiais manipuláveis promove a participação ativa dos alunos nas aulas de matemática, tornando-as mais motivadoras e envolventes. Isso acontece porque eles são incentivados a interagir com os objetos, a discutir ideias com os colegas, a resolver problemas de forma colaborativa e a construir conhecimento de maneira significativa.

Por outro lado, é importante ressaltar que o uso de materiais manipuláveis não deve ser um fim em si mesmo, mas sim um meio para atingir os objetivos educacionais. Os professores devem planejar cuidadosamente suas aulas, selecionando os materiais adequados para cada conteúdo e estabelecendo atividades que explorem as potencialidades desses materiais. Nesse sentido:

> O material manipulável por si só não é instrumento capaz de garantir a aprendizagem dos alunos, é preciso que o professor tenha clareza das potencialidades do material didático escolhido e que esteja apto a mediar a interação entre o aluno e o saber através do material didático.(LUCENA, 2017, p. 27).

Deste modo, para evitar que a utilização do material manipulável seja um inconveniente em vez de um facilitador da aprendizagem, sua escolha deve ser precedida de alguns critérios, conforme Passos (2006 apud MURARI, 2011, p. 193-195):

> a) Os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas; b) Os materiais devem representar claramente o conceito matemático; c) Os materiais devem ser motivadores; d) Os materiais, se possível, devem ser apropriados para serem usados quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de conceitos; e) Os materiais devem formar uma base para a abstração; f) Os materiais devem proporcionar manipulação individual.

A utilização de materiais manipuláveis no ensino de matemática pode ser uma ferramenta pedagógica valiosa, pois permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos, além de promover a participação ativa e o engajamento dos alunos nas aulas.

Feitas essas considerações sobre o uso de materiais manipuláveis, apresenta-se a seguir, detalhadamente, cada um dos encontros da sequência de atividades.

6.2 Atividade 1: Conhecendo a projeção estereográfica

Como dito, nesse encontro parte-se de uma situação problema contextualizando interdisciplinarmente a matemática e a geografia de modo a despertar o interesse dos alunos. Desse modo, tem-se a seguinte proposta de atividade:

Essa atividade tem como objetivos: identificar o local onde residem no mapa bidimensional da cidade; identificar no globo terrestre o ponto mais próximo onde residem; estabelecer conexões entre o ponto no plano (mapa) e ponto no globo (superfície esférica); Compreender a importância dos mapas, como representações bidimensionais a partir do globo terrestre (objeto tridimensional); recordar conceitos do Sistema Cartesiano; elaborar hipóteses de como os mapas são "desenhados"; discutir o conceito de projeções e apresentar a projeção estereográfica. Como pré-requisitos, espera-se que os alunos desta etapa de ensino tenham conhecimentos prévios sobre o Sistema Cartesiano.

Sugere-se como procedimentos no transcurso da aula, que o professor: Divida a turma em pequenos grupos (sugere-se um máximo de 6 alunos por grupo, para que o trabalho seja o mais participativo possível); Exponha o mapa do município no quadro (consultar no site <ibge.gov.br> - vide Anexo B) e solicite que um representante de cada grupo indique a localização de onde mora, com um **ponto** no mapa; Apresente o globo terrestre e peça a outro aluno de cada grupo que indique no globo o ponto mais próximo onde residem; Discuta a relação que existe entre o ponto indicado no mapa e o do globo, e proponha os seguintes questionamentos:

Quadro 3 – Atividade 1

a) Qual o nº de coordenadas usamos para representar o mapa? E o globo? **b)** Utilizando-se o sistema de coordenadas cartesianas, como pode ser representado um ponto no mapa? E no globo? **c)** Qual a importância dos mapas? **d)** Como é possível "desenhar" um mapa a partir do globo?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que para responder os questionamentos dos itens "a" e "b", é importante que os alunos compreendam que a representação de um **ponto** P' no plano-mapa, se dá a partir de um par ordenado $(m,\ n)$, e que um **ponto** P na superfície esférica-globo, pode ser representado por um terno ordenado $(a,\ b,\ c)$;

Peça aos alunos que anotem ideias sobre o questionamento do item "d", pois ele é o problema motivador que irá desencadear a ideia de projeção e que fará a conexão com a projeção estereográfica, proposta deste trabalho. Nessa etapa, no âmbito da Modelagem Matemática, pode-se dizer se estaria diante da fase de INTERAÇÃO proposta por Biembengut e Hein (2011).

Peça aos grupos que socializem suas respostas. Nesse momento, deve-se valorizar todo tipo de *feedback* dos alunos, seja por meio de anotações escritas, orais, gráficas, etc., uma vez que o objetivo nessa fase é incentivar a participação e possibilitar ao aluno um raciocínio investigativo, cerne da modelagem matemática;

Ressalta-se a importância de, durante todas as etapas das atividades, o docente proporcionar condições favoráveis para a aprendizagem e permitir que os alunos participem com autonomia, contribuindo com seus conhecimentos prévios, sugerindo exemplos, caminhos e formas de resoluções, e com o auxílio dos colegas e do professor, construírem juntos um novo saber, completando assim um verdadeiro processo de aprendizagem.

Após a socialização das equipes, sugerir leitura e posterior discussão do texto de apoio sobre projeções (Apêndice A); Aqui se busca munir de embasamento teórico necessário à validação, ou não das ideias apontadas no questionamento do item "d", levando os alunos a refletirem sobre como são feitas as projeções, em particular: a projeção estereográfica.

6.3 Atividade 2: O comportamento de retas e círculos na superfície esférica

O segundo momento visa instrumentalizar o aluno de modo a construir uma base matemática capaz de suscitar um modelo matemático válido para a solução do problema inicial. Para isso, serão propostos vários questionamentos nessa atividade que irão auxiliar a construção dessa base matemática.

Para otimizar a execução dessa atividade, sugerimos a aquisição de alguns materiais a seguir, a serem distribuídos a cada equipe: folha de papel sulfite, bola de isopor de 100 *mm* de diâmetro, pedaço de arame (sugestão: raio de bicicleta cortado ao meio), papel transparente A4 (imprimir uma folha de papel milimétrico), lanterna (pode ser a do celular), elásticos (daqueles de amarrar dinheiro).

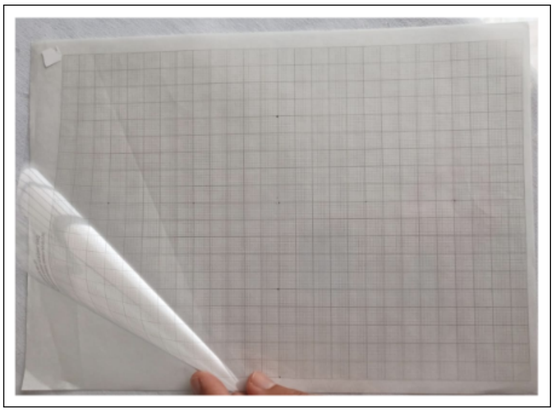
Figura 30 – Bola de isopor (100 *mm*)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 – Pedaço de arame (raio de bicicleta)

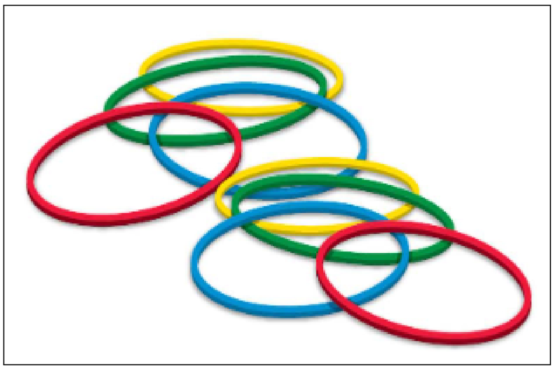
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 – Papel transparente (malha milimetrada impressa)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 33 – Elásticos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Convide as equipes a imaginarem como os elementos da geometria euclidiana como: reta e círculo "se comportam" na esfera. O professor propõe então as seguintes questões do quadro a seguir:

Quadro 4 – Atividade 2.1

a) Como uma reta no plano pode ser representada numa esfera? Faça um desenho no papel.
b) Como um círculo no plano pode ser representado numa esfera? Faça um desenho no papel.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse momento os alunos devem discutir em grupo e desenhar numa folha de papel sulfite como eles imaginaram a reta e o círculo. Inicialmente, o que se deseja aqui, é que os alunos pensem sobre como esses elementos seriam representados na superfície esférica e identificar se eles compreendem que há "deformações" que não são percebidas no plano.

Solicite que os grupos socializem suas respostas para os demais. Em seguida, entregue uma esfera de isopor, uma folha de papel transparente e o pedaço de arame (que servirá como guia para direcionar o feixe de luz) para a cada equipe e peça que com a ajuda da lanterna do celular os alunos realizem os seguintes procedimentos:

Quadro 5 – Atividade 2.2

1. Desenhe uma reta no papel transparente;
2. Posicione a esfera sobre o papel transparente, fixe o pedaço de arame na posição oposta ao ponto de tangência de modo que o arame toque no papel transparente na direção da reta desenhada;
3. Com a ajuda da lanterna do celular projetem a sombra da reta desenhada no papel transparente na esfera de isopor tendo como guia o arame de bicicleta para direcionar o feixe de luz (o professor deve orientar que a direção dos raios enviados pela lanterna do celular devem acompanhar a direção do pedaço de arame para que seja feita a interpretação correta no que se refere ao estudo da inversa da projeção estereográfica, além disso, para um melhor resultado, sugere-se apoiar o papel transparente sobre uma superfície de vidro - vide Figura 33);
4. Desenhe um círculo no papel transparente, e repita os passos 2 e 3;

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aqui é o momento do professor aproveitar e fazer um paralelo com o que foi proposto no início da atividade nos itens "a" e "b", com o que foi observado nos passos 1 a 4. Efetuar as intervenções que julgar necessárias enfatizando as propriedades da projeção estereográfica envolvidas na atividade. Enfatizar que a aplicação do plano para a esfera é chamada de função

Figura 34 – Reta esférica

Fonte: Elaborado pelo autor.

inversa da projeção estereográfica. Como sugestão de enriquecimento da atividade, outras figuras podem ser exploradas, como o triângulo, por exemplo.

A manipulação desses materiais, pode promover uma maior participação na atividade e mais autonomia por parte dos alunos que passam a ser protagonistas do processo de aprendizagem, portanto, nessa fase deve-se valorizar os conhecimentos prévios em detrimento aos possíveis erros que os alunos possam cometer, uma vez que eles podem não estar familiarizados com o comportamento das figuras na geometria esférica. Dessa forma, o professor fará com que os alunos, mesmo cometendo equívocos, se sintam confiantes e estará criando um ambiente propício à aprendizagem.

Nessa atividade, busca-se munir de conceitos e elementos, ainda que incipientes, visando a formulação do problema para a linguagem matemática, para iniciar o que na modelagem chama-se de MATEMATIZAÇÃO, e que será continuado na atividade 3.

6.4 Atividade 3: O modelo matemático da Projeção Estereográfica

Nesse terceiro momento busca-se trabalhar coletivamente com os alunos o modelo matemático que fundamenta a projeção estereográfica, pensada aqui enquanto função. Para isso, o professor pode ainda trabalhar com as equipes das atividades anteriores e realizar os seguintes passos:

Dividir a turma em pequenos grupos. Distribuir uma bola de isopor e papel transparente utilizado na aula anterior, e retomar a questão sobre como os mapas são “desenhados” agora com o viés da projeção estereográfica. Pedir aos grupos que identifiquem os pontos Norte e Sul da esfera (diametralmente opostos), para isso pode-se utilizar elásticos como na Figura 34.

Figura 35 – Pontos N e S (antípodas)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, espetem o arame de bicicleta a partir do N (Norte) passando pela esfera de isopor (preferencialmente de forma inclinada) até tocar o papel transparência. Arbitrar o ponto N$(0,\ 0,\ 2)$ como ponto de projeção e S$(0,\ 0,\ 0)$ como ponto de tangência entre papel transparente e esfera, localizar os pontos de interseção do arame na superfície esférica $P(a,\ b,\ c)$ e de interseção com o plano $P'(m,\ n)$ e desenvolver com os alunos a função da projeção esferográfica vista no item 4.3 deste trabalho, bem como sua inversa. Reforçar os conceitos de função sobrejetora, injetora, bijetora e inversa.

Explicar que as expressões das funções da projeção estereográfica φ e Ψ permitem a conversão de um ponto da esfera (objeto tridimensional) em um ponto do plano (bidimensional) e vice-versa, e podem ser consideradas modelos. Isto porque, por meio delas, podemos obter a projeção de uma esfera (exceto por um único ponto - o Norte), variando apenas a medida de seu raio.

6.5 Atividade 4: Avaliando os alunos e readequando a proposta

Essa atividade busca consolidar os conhecimentos adquiridos pelos alunos aos longo dos encontros anteriores e reajustar eventuais desvios que possam ocorrer durante esse percurso. Neste momento, sugere-se que a atividade seja inicialmente feita de forma individual, para que se busque o que cada aluno conseguiu sistematizar do conhecimento estudado por meio de um questionário.

Depois de apresentadas a função matemática da projeção estereográfica e sua inversa na atividade anterior, aplicar os seguintes questionamentos aos alunos:

Quadro 6 – Atividade 4

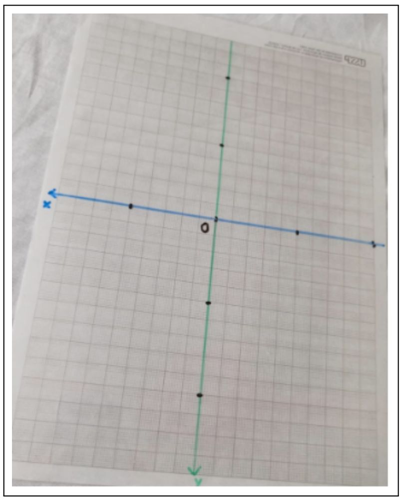
a) Um ponto se localiza no globo terrestre nas coordenadas $(0, 1, 1)$, quais as suas coordenadas correspondentes no plano?
b) Um ponto se localiza num plano nas coordenadas $(2, 0)$, quais as suas coordenadas correspondentes a este ponto no globo?
c) Um ponto se localiza no globo terrestre nas coordenadas $(0, 0, 2)$, existem as coordenadas correspondentes no plano? Justifique.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pedir que alguns alunos apresentem suas respostas, podendo-se permitir que outros alunos comentem as conclusões dos colegas. O professor pode também comentar as respostas e fazer algumas intervenções que julgar necessárias. Basicamente, na resolução do questionário se faz uma aplicação de dados com operações matemáticas fundamentais. Aqui o mais importante é a compreensão desses resultados.

Sugere-se que o professor re-organize as equipes e se utilizem da esfera de isopor, do papel transparente (com impressão da folha milimetrada) e do arame de bicicleta para validar os resultados de cada questionamento de forma concreta, fazendo-se algumas adequações. Por exemplo, como se considerou a esfera de raio unitário, e como ela na realidade apresenta raio 50 milímetros, deve-se agrupar 5 centímetros da folha milimetrada para se considerar uma unidade, nos eixos x e y (desenhar os eixos conforme Figura 36).

Figura 36 – Eixos x e y

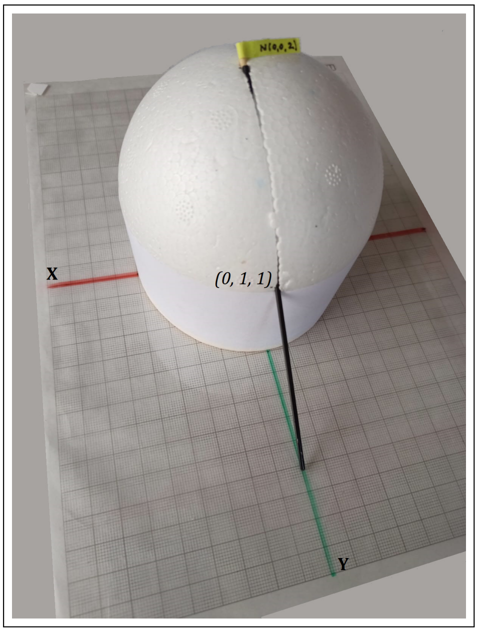


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a localização adequada do ponto $(0,0,1)$ indicado no item a), sugere-se usar uma espécie de régua esférica construída com uma faixa de papel de 50 milímetros de largura e comprimento da circunferência máxima da esfera, de modo a indicar a coordenada $z = 1$, conforme a Figura 37.

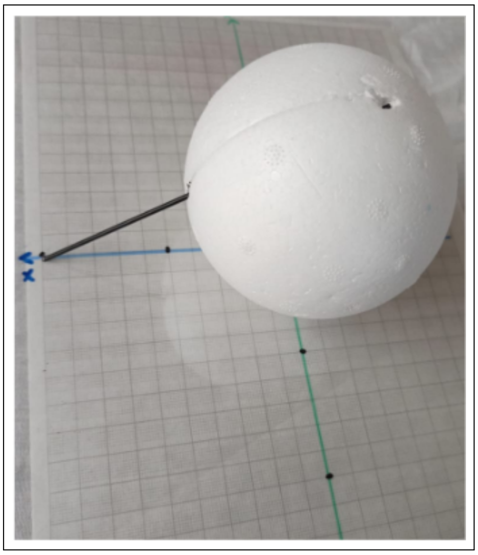
Dessa forma, o manuseio de material concreto possibilita a confirmação do resultado dos questionamentos propostos.

Figura 37 – Resultado Atividade 4a



Fonte: Elaborado pelo autor.

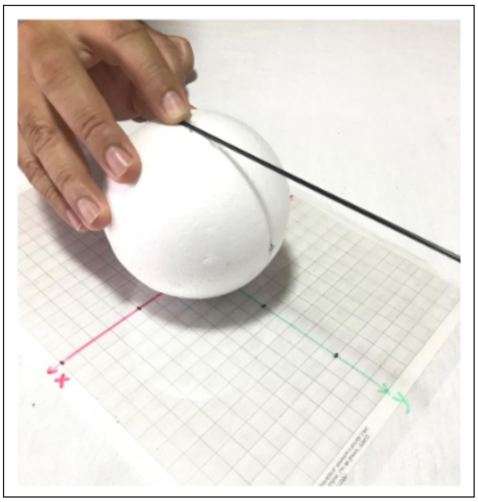
Figura 38 – Resultado Atividade 4b



Fonte: Elaborado pelo autor.

Importante salientar a discussão do resultado do item c, no qual haverá a indeterminação da divisão de $\frac{0}{0}$, que deve ser interpretada como um resultado que não terá ponto no plano, assim a reta que define a função estereográfica encontra-se paralela ao plano e dizemos que ela o encontra no infinito (vide Figura 39), sendo o único ponto não projetado no plano.

Figura 39 – Resultado Atividade 4c



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com as análises dos resultados matemáticos dessa atividade, validando-se e interpretando-se concretamente os questionamentos propostos, chega-se à fase do MODELO MATEMÁTICO descritos por Biembengut e Hein.

Finalizando a atividade sugere-se a exibição do mapa estereográfico constante no Anexo B, como forma de visualizar a construção desse tipo de mapa a partir de projeção estudada nesse trabalho.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As competências e habilidades de aprendizagens essenciais constituintes da base comum da BNCC, sugerem um trabalho docente estruturado onde a dosagem entre teoria e prática adequadas pode ser um caminho, permitindo aos alunos o acesso ao desenvolvimento de suas aprendizagens, notadamente o conhecimento proposto na habilidade específica EM13MAT509.

O uso de materiais manipuláveis como bolas de isopor, globo terrestre, mapas políticos, exige dos alunos uma interação com tais objetos de modo a possibilitar a reflexão e exposição de ideias do que está sendo trabalhado e aprendido, levando assim à melhoria no ensino e aprendizagem, principalmente quando os conceitos matemáticos encontram sentido na contextualização de outros conceitos da realidade, como os geográficos. Acredita-se ser possível inserir a geometria não euclidiana, ainda que de forma incipiente no contexto do ensino médio, onde os professores de matemática e geografia, por exemplo, possam trabalhar interdisciplinarmente com questões do cotidiano, sendo levados a questionar, refletir, argumentar e descrever a representação geométrica e geográfica.

Enquanto professor da rede pública a mais de 20 anos, sabe-se das dificuldades de recursos e também da defasagem de conhecimentos básicos com que os alunos chegam no ensino médio, entretanto consideramos ser possível que todo o processo apresentado no decorrer desta pesquisa, possa ser implementado e auxiliar o professor a repensar sua prática ao introduzir esses e outros conceitos abordados, além de mostrar que a geometria euclidiana não é a única que deve ser trabalhada na escola, havendo outras que também merecem atenção, como a geometria de Riemann que pode apresentada no ensino médio a partir da Projeção Estereográfica.

A tarefa de mudar a prática docente não é fácil, mas quando se propõe uma metodologia diferenciada, tornando o ensino da Matemática contextualizado, articulado com os conhecimentos vistos em outras disciplinas, desperta um maior interesse pelos alunos na aprendizagem.

Como sugestão de trabalho futuro, pretende-se aplicar essa proposta de aula em turmas da 3ª série do ensino médio e realizar um tratamento estatístico de modo a aferir o potencial que tal atividade pode ter no sentido de melhorar a aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

ALVES, S. **A geometria do globo terrestre**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

ÁVILA, G. S. de S. **Várias faces da matemática**: tópicos para licenciatura e leitura geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. Blumenau: Ed. Contexto, 2011.

BOYER, C. B. **História da matemática**. (tradução de Helena Castro). São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, M. d. E. **Orientações curriculares para o ensino médio**: volume 2. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL, M. d. E. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CRUZ, D. G. d.; SANTOS, C. H. d. **Algumas diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas - hiperbólica e elíptica - a serem abordadas no ensino médio**. 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-8.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2023.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FREITAS, J. T. d. **Projeções, Mapas e GPS**: algumas aplicações na educação básica. 81 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Brasília, 2017.

GONTSA. **World Stereographic**. 2019. Disponível em: <https://twitter.com/gontsa/status/1196531968625795075>. Acesso em: 16 set. 2023.

IBGE. **Coleção de mapas municipais**. 2020. Disponível em: <https://geoftp.ibge.gov.br/cartas_e_mapas/mapas_municipais/colecao_de_mapas_municipais/2020/CE/massape/2308005_MM.pdf>. Acesso em: 10 set. 2023.

IBGE. **Introdução à cartografia**. 2023. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv64669_cap2.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2023.

IBGE. **O que é Cartografia? As Projeções Cartográficas**. 2023. Disponível em: <https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/as-projec-o-es-cartogra-ficas.html>. Acesso em: 16 set. 2023.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**: conjuntos, funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LORENZATO, S. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. In: **Coleção Formação de Professores**. 1. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 3–37.

LUCENA, R. d. S. **Laboratório de Ensino de Matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

MURARI, C. **Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática**. Rio Claro, 2011. v. 25, 187-211 p.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NUNES, E. d. C. **A esfera de Riemann**: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio. 72 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: **LORENZATO, Sergio (Org). O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 77–92.

PROFMAT. **Dissertações do PROFMAT**. 2023. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 07 set. 2023.

SANTOS, R. C.; GUALANDI, J. H. Laboratório de ensino de matemática: o uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Comunicação Científica.** São Paulo, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5490_2562_ID.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2023.

SILVA, A. M. M. M. **Projecção Estereográfica**: Propriedades e aplicações. 119 p. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) — Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, S.I, 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TEXTO DE APOIO SOBRE PROJEÇÕES

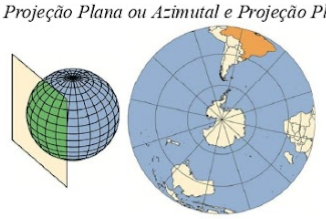
O que é Cartografia? As Projeções Cartográficas
Fonte:
https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/as-projec-o-es-cartogra-ficas.html

Diferentes projeções cartográficas foram desenvolvidas para permitir a representação da esfericidade terrestre num plano (mapas e cartas), cada uma priorizando determinado aspecto da representação (dimensão, forma, etc.). É importante ressaltar que não existe uma projeção cartográfica livre de deformações, devido à impossibilidade de se representar uma superfície esférica em uma superfície plana sem que ocorram extensões e/ou contrações. As projeções cartográficas são classificadas, principalmente, quanto à superfície de projeção e às propriedades:

Quanto à superfície de projeção

Podem ser projeções planas, cônicas ou cilíndricas, quando forem utilizadas as superfícies de um plano, cone ou cilindro como base para planificar a esfera terrestre. Os exemplos abaixo demonstram a transformação da superfície terrestre em uma superfície plana com auxílio das superfícies de projeção.

Projeção Plana ou Azimutal e Projeção Plana Polar.



Projeção Cônica e Projeção Cônica de Albers.

Projeção Cilíndrica e Projeção Cilíndrica de Peters.

Quanto às propriedades

Podemos minimizar as deformações ocorridas pela planificação da superfície terrestre no que diz respeito às áreas, aos ângulos ou às distâncias, mas nunca aos três simultaneamente. Os exemplos abaixo mostram a possibilidade de alterar as projeções para o Brasil de acordo com as propriedades.

Projeção conforme

Não há deformação dos ângulos em torno de quaisquer pontos.

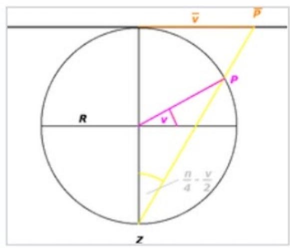
Projeção equivalente

Não altera as áreas, conservando, assim, uma relação constante com a sua correspondência na superfície terrestre.

Projeção equidistante

Os comprimentos são representados em escala uniforme.

Projeção estereográfica
Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.



Corte transversal de uma esfera. A partir do ponto Z (origem) projeta-se o ponto P (ponto da superfície da esfera) sobre o plano v (plano tangente à esfera), o que resulta no ponto $\overline{P}$ (imagem do ponto P sobre o plano v).

Em geometria, com aplicações em cartografia, a projeção estereográfica é um tipo de projeção em que a superfície de uma esfera (Terra) é representada sobre um plano tangente a ela, utilizando-se como origem um ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência daquele plano com a esfera. A escala em uma projeção estereográfica aumenta com a distância do ponto de tangência. Um hemisfério completo pode ser representado em uma projeção estereográfica, sem distorções excessivas. Tal como em outras projeções azimutais, os círculos máximos que passam pelo ponto de tangência aparecem como linhas retas. Todos os demais círculos, incluindo meridianos e paralelos, são representados como círculos ou arcos de círculos. Em Cartografia Náutica, o principal uso da projeção estereográfica é para a construção de cartas das regiões polares.

Fonte: IBGE (2023b, adaptado).

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO AVALIATIVO

Considerando a esfera unitária, com centro no ponto $C(0,\ 0,\ 1)$, Norte $(0,\ 0,\ 2)$ e Sul $(0,\ 0,\ 0)$, tangente ao plano no polo Sul, e ainda a projeção esferográfica e sua inversa como as funções abaixo descritas, responda as questões a seguir:

$$\varphi(a,\ b,\ c) = \left(\frac{2a}{2-c},\ \frac{2b}{2-c}\right)$$

e

$$\varphi^{-1}(m,\ n) = \left(\frac{4m}{m^2+n^2+4},\ \frac{4n}{m^2+n^2+4},\ \frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}\right)$$

1a). Um ponto se localiza no globo terrestre nas coordenadas $(0,\ 1,\ 1)$, quais as suas coordenadas correspondentes no plano? Justifique sua resposta.

1b) Sobre a 1ª questão - Você achou essa questão:

( ) fácil ( ) difícil ( ) nem fácil nem difícil

2a). Um ponto se localiza num plano nas coordenadas $(2,\ 0)$, quais as suas coordenadas correspondentes a este ponto no globo? Justifique sua resposta.

2b) Sobre a 2ª questão - Você achou essa questão:

( ) fácil ( ) difícil ( ) nem fácil nem difícil

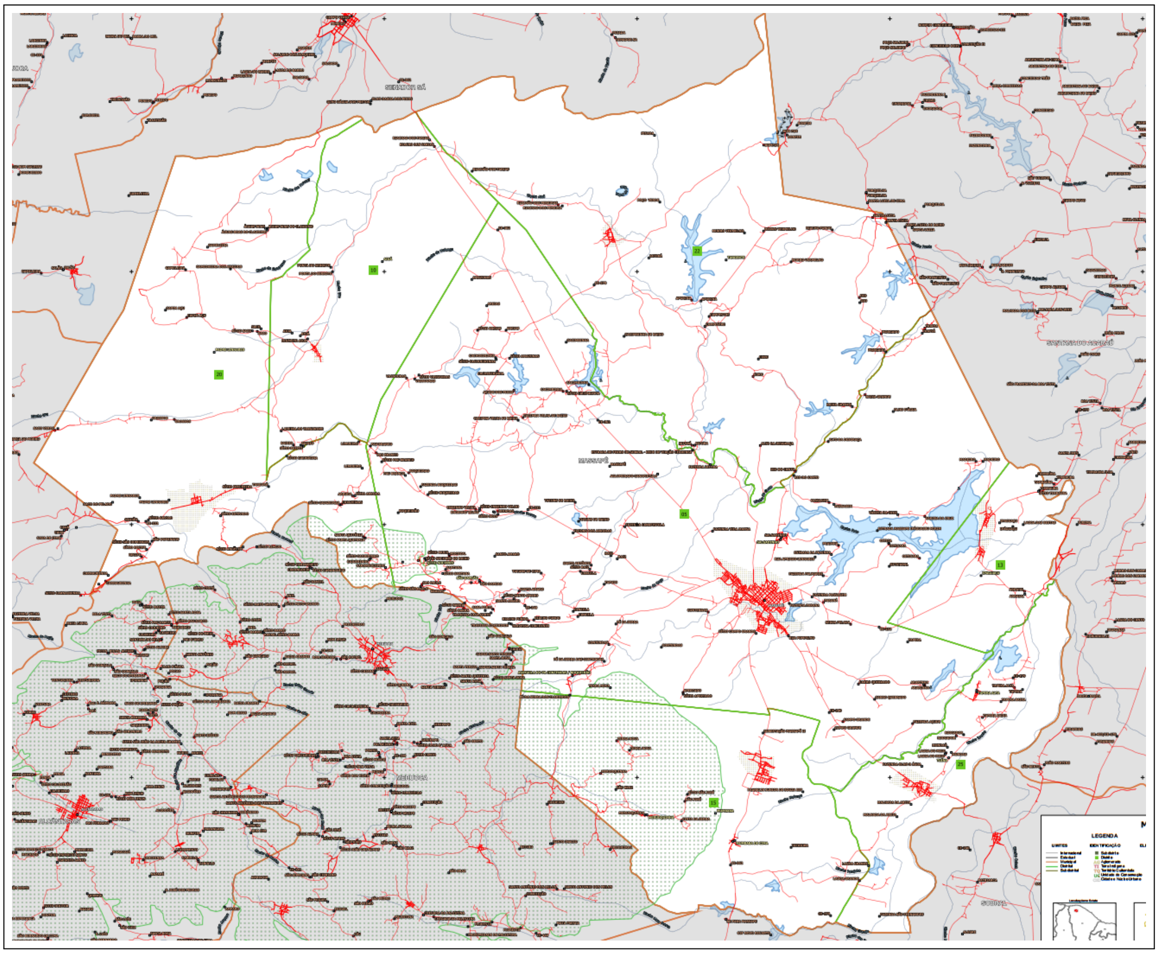
3a). Um ponto se localiza no globo terrestre nas coordenadas $(0,\ 0,\ 2)$, há coordenadas correspondentes no plano? Justifique sua resposta.

3b) Sobre a 3ª questão - Você achou essa questão:

( ) fácil ( ) difícil ( ) nem fácil nem difícil

ANEXOS

ANEXO A – MAPA DO MUNICÍPIO DE MASSAPÊ



Fonte: IBGE (2020).

ANEXO B – EXEMPLO DE MAPA ESTEREOGRÁFICO

Fonte**:** Gontsa (2019).