UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI - URCA
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Comparação entre a Geometria de Euclides e de Hilbert

BÁRBARA CORREIA DE OLIVEIRA

Juazeiro do Norte - CE
2023

Comparação entre a Geometria de Euclides e de Hilbert

BÁRBARA CORREIA DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Mario de Assis Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2023

Comparação entre a Geometria de Euclides e de Hilbert

Bárbara Correia de Oliveira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 06/06/2023.

Banca Examinadora:

Prof. Me. Mario de Assis Oliveira (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira(Orientador)
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do estado do Ceará/ IFCE

À minha família!

Agradecimentos

Peço desculpas pelas omissões.

Agradeço a Deus Pai, Filho e Espírito Santo razão primeira e última de minha existência.

A meus pais pelo dom da vida.

A meu esposo Vinício, pela comunhão em todos os momentos.

Aos meus filhos: João Victor e Maria Vitória, pela presença e torcida.

Ao professor orientador por todas as contribuições diretas e indiretas na realização deste trabalho.

A todos os meus professores, de ontem e de sempre, especialmente os do mestrado.

Aos colegas de Mestrado, pelo convívio e amizade.

Enfim, grata a meus alunos e a cada um que compartilhou comigo a alegria do aprender e os desafios do saber.

*"As leis da natureza não são nada
mais que os pensamentos
matemáticosde Deus". (EUCLIDES,
300 a.C.).*

Resumo

Durante séculos, a geometria de Euclides contribuiu para a pesquisa matemática, mas alguns matemáticos discordaram de seu conceito ou reconhecem as falhas de Euclides e reformularam sua geometria. O estudioso Hilbert reafirmou isso trocando os axiomas de Euclides pela similaridade do triângulo. O objetivo deste trabalho é comparar a geometria entre Hilbert e Euclides. A pesquisa é bibliográfica. Propomos, assim, apresentar reflexões e analisar as diferenças entre a geometria de Euclides e a geometria de Hilbert, expondo os conceitos, os axiomas em relação à geometria euclidiana com intuito de expor a importância desses estudiosos para a matemática. Enfim, Hilbert simplificou a geometria em uma série de axiomas e deu uma contribuição vital para os fundamentos formalistas da matemática.

Palavras-chave: Geometria. Euclides. Hilbert. Reformulação.

Abstract

For centuries Euclid's geometry contributed to mathematical research, but some mathematicians disagreed with his concept or recognized Euclid's flaws and reformulated his geometry. The scholar Hilbert reaffirmed this by exchanging Euclid's axioms for the similarity of the triangle. The objective of this work is to compare the geometry between Hilbert and Euclid. The research is bibliographical. We propose, therefore, to present reflections and analyze the differences between Euclid's geometry and Hilbert's geometry, exposing the concepts, the axioms in relation to Euclidean geometry in order to expose the importance of these scholars for mathematics. Ultimately, Hilbert simplified geometry into a series of axioms and made a vital contribution to the formalist foundations of mathematics.

Keywords: Geometry. Euclid. Hilbert. Reformulation

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Euclides de Alexandria é considerado o 'pai da Geometria', que exerceu a função de um professor, matemático e escritor grego em meados do século III a.C., e sua principal obra 'os Elementos'. Ele se notabilizou por sua habilidade de escrever e ensinar. Seus conceitos foram difundidos e se tornou o pai da geometria, tendo sua obra sido considerada uma das mais importantes de todos os tempos, porém, no século XIX, críticos a Euclides culminaram numa proposta de geometria alternativa.

Hilbert é considerado um dos mais notáveis matemáticos, e sua pesquisa é essencial em diversos ramos da matemática atual. Hilbert criou um sistema de axiomas completo e tão simples quanto possível para a geometria. Sendo que sua obra teve importância capital na mudança da concepção da geometria, em certo sentido, na da concepção idealística da verdade (HILBERT, 2003).

Hilbert apresentou um modelo puramente aritmético que elaborasse as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão introduzindo alguns números reais em um conjunto. Seu trabalho mudou de uma teoria em geometria para uma teoria de aritmética (BERLINSKY, 2018).

Em particular, argumenta-se que para Hilbert sua aritmética de segmentos revelou uma das características mais atraentes de seu novo método axiomático formal, do ponto de vista matemático, consistindo na capacidade do método axiomático descobrir e exibir conexões internas ou estruturais entre teorias matemáticas de natureza diversa e, assim, contribuir para a unidade do conhecimento matemático. Nesse contexto, Hilbert destacou que o método axiomático não deve ser concebido apenas como um instrumento eficaz para apresentar uma teoria matemática de forma mais perspícua e logicamente precisa, sendo necessário também um instrumento capaz para descobrir novos resultados matemáticos.

"Os Elementos" de Euclides foram considerados por Hilbert confuso nas definições e nas teorias das proporções, das retas e dos ângulos. Assim, Hilbert o analisou corrigindo falhas ou dúvidas. Nesse contexto, se tem as seguintes indagações: como se processa a geometria de Euclides e de Hilbert? Quais as mudanças feitas por Hilbert em sua reformulação? Essas são apenas algumas das questões cujo intuito é a busca de solução por meio dos estudos matemáticos. Assim, o trabalho faz uma comparação entre a construção geométrica de Euclides para a reformulada por Hilbert, tendo como desafio identificar as diferenças e semelhanças entre as teorias pesquisadas, com ênfase na análise detalhada das obras dos dois matemáticos, culminando na identificação das problemáticas.

O estudo tem como objetivo geral analisar as diferenças entre a Geometria de Euclides e a Geometria de Hilbert a partir da análise do conhecimento dos teóricos em estudo. Em suas etapas intermediárias veem-se os estudos de Euclides e de Hilbert direcionados para a identificação dos seus axiomas e teoremas, como também mostrar as falhas deixadas por Euclides de acordo com Hilbert.

A metodologia caracteriza-se como bibliográfica desenvolvida a partir de leitura de documentos impressos como: livros, artigos, teses, sites, dentre outros. Berlinski (2018), Hilbert (2000), Gray (2005) e Da Silva (2003) definem a geometria de Euclides e de Hilbert e refletem sobre suas formulações. Outros teóricos complementam nesse estudo para esclarecer os aspectos da geometria de Euclides e de Hilbert. Os teóricos citados são a base fundamental para o desenvolvimento do estudo dissertativo.

A motivação para a elaboração desse estudo tem como fator fundamental beneficiar os estudantes e professores para refletir sobre os motivos que levaram Hilbert reformular "Os Elementos" de Euclides e para orientar como se utiliza o conteúdo científico em sala de aula. É relevante destacar a importância das obras de Euclides e Hilbert para a Geometria e a matemática no sentido de entender como ocorreu a transformação da geometria euclidiana em axiomas, como um formalismo mais que em Euclides.

A geometria denominada de 'geometria Euclidiana' é concepcional numa ideal material ou concreta com um estudo do espaço real, ou natural, se estabelecendo no sistema axiomático através dos teoremas por demonstrações lógicas. Enquanto a geometria de Hilbert induziu a uma transformação da geometria de Euclides em axiomas com a publicação de 'Bases de geometria'.

Ressalta-se que não são tantos trabalhos acadêmicos publicados comparando a geometria euclidiana da geometria de Hilbert, porém, a pesquisa procura seu diferencial quando busca analisar os postulados e noções de Euclides e os axiomas de Hilbert encontrando suas falhas e pontos de distinções.

O trabalho é constituído de cinco capítulos: O primeiro capítulo tem a intenção de apresentar a história da geometria, do tempo antigo até os dias atuais. O segundo capítulo descreve-se a biografia de Euclides e os elementos básicos da sua geometria; o terceiro capítulo discorre-se sobre Hilbert e seus axiomas; o quarto capítulo foca-se na reformulação da geometria Euclidiana; o quinto capítulo tem se a questão do livro didático para a prática em sala de aula por meio da transposição didática.

1 BREVE HISTÓRICO DA GEOMETRIA

O ser humano nos afazeres do dia a dia utiliza-se de conhecimentos geométricos. Além da própria natureza que é rodeada de formas geométricas. O cultivo de terras pelos povos antigos utilizava a geometria e usavam nas construções de diversos objetos e utensílios, nos desenhos que enfeitavam suas vestes e tecidos, nos monumentos gigantes, como as pirâmides do Egito e do México. Diante de infinidades de formas geométricas presentes na vida cotidiana, precisamos apresentar a origem da geometria e seu desenvolvimento até os dias de hoje, o que passará a ser feito na próxima seção.

1.1 Geometria

A geometria é relevante em diversas áreas do conhecimento. Estuda-se geometria na escola, porém, precisa-se conhecer sua etimologia e definição para entender melhor o que realmente é geometria.

Conforme Fainguelent (1995), geometria oferece um amplo campo de pensamento e método de grande valor para o desenvolvimento intelectual dos alunos, o raciocínio lógico e a passagem da intuição, dos dados concretos e experimentais aos processos de assimilação e generalização. A geometria também ativa a transição da fase operacional concreta para a abstrata. Como tal, é um tema de integração entre as diferentes partes da matemática e um terreno fértil para aprender a fazer e aprender a pensar. Desempenha um papel original no ensino porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência. Sua significação é abordada por Giovanni e Castrucci (2009, p. 194) que "geo significa terra e metron significa para medir (medida)."

A palavra geometria foi utilizada pelo historiador grego Heródoto no século V a.C. em sua grande épica sobre as guerras persas donde escreveu sobre o antigo Egito, que foi utilizada "geometria" para as necessidades dos agricultores egípcios para redistribuir as terras do vale do Nilo (LUCAS, 2008).

1.2 A geometria e suas origens

A partir da curiosidade do homem em observar as formas geométricas das coisas e da natureza surgiu o estudo geométrico, denominada Geometria. Conforme Gerbasi (2019), o homem primitivo foi adquirindo conhecimento em geometria, supostamente em épocas remotas da antiguidade, de formas simples, aperfeiçoando gradualmente até atingir o estágio de desenvolvimento atual. Mesmo o ser humano de a antiguidade ter uma vida primitiva, o seu instinto o impulsionou a ter ideias associadas a geometria. Eves (1992 apud GERBASI, 2019) presume como pode ter se originado a geometria:

> A vida cotidiana pode ter levado o homem pré-histórico à percepção de curvas, superfícies e sólidos como uma pedra que, arremessada no ar, descreve uma parábola, e se jogada sobre a superfície de um lago, descreve círculos concêntricos iguais aos que se observam no corte de um tronco de árvore; um cipó pendurado pelas extremidades entre duas árvores originam uma catenária; uma corda enrolada se parece com uma espiral; alguns frutos têm forma esférica; ovos de aves têm formato oval; folhas e flores ilustram a ideia de simetria; e a ideia de volume pode ter nascido da necessidade de se armazenar água, líquidos, cereais e outros produtos (EVES, 1992, p. 1-2 apud GERBASI, 2019, p. 22).

Observa-se que a geometria foi criada através da intuição e pela necessidade da observação do ser humano. O seu começo se deu ao homem olhar uma folha cair, a arremessar uma pedra num rio, observando o contato com a água, e assim, notando circunferências concêntricas. Assim, a partir desses conhecimentos surgiu a geometria. No entanto, o autor expõe que é difícil deduzir que a matemática teve sua gênese na aritmética ou na geometria, ou saber qual delas surgiu primeiro. O conhecido atualmente é que a geometria transcende a arte da escrita. Veja essa abordagem abaixo no qual Gerbasi cita Boyer e Strunik.

> Transcorreram aproximadamente 6 mil anos para que o homem fosse capaz de colocar seus registros e ideias em forma escrita. Informações sobre a pré-história dependem das interpretações fundamentadas nos artefatos e documentos encontrados. Os desenhos do homem do Neolítico mostram a preocupação com relações espaciais, o que proporcionou a abertura para a geometria. Peças artesanais como a cerâmica, os tecidos e os cestos mostram exemplos de congruência e de simetria, elementos básicos da geometria; as sequências simples indicam proposições geométricas e aritméticas. Provavelmente, a intenção do homem do Neolítico foi apenas o sentido estético e a beleza das formas, sem ter em mente qualquer significado aritmético ou geométrico (BOYER, 2010, p. 4-5; STRUIK, 1989, p. 35, apud GERBASI, 2019, p. 23).

No período pré-histórico, neolítico, a simplificação dos desenhos pela geometrização deu origem a um tipo de escrita que as ideias e os objetos eram retratados como desenhos rudimentares.

Gerbasi (2019) aponta que o homem pré-histórico era impossibilitado a decompor frases que permitisse representar ideias. A escrita com o tempo conseguiu construir símbolo ou combinações de vários deles, atingindo o progresso e nascendo a escrita.

A geometria teve os primeiros contatos pelo homem antes dos sistemas dos escritos. Existem evidências de diversos povos pelo interesse da repetição e pela simetria com objetivo de decorar seus objetos e moradias. A data padrão do uso geométrico é de 25 000 a.C. e esse ser humano pré-histórico já construía estruturas alinhadas com precisão, demonstrando domínio de forma simples de geometria (GERBASI, 2019).

Os conhecimentos de Geometria no Egito Antigo eram utilizados de forma prática, basicamente para medir terrenos, realizando construções. A geometria encontra-se nas construções egípcias mais famosas como as pirâmides, conhecidas pela beleza e engenhosidade de suas edificações. Enquanto os gregos adquiriram dos egípcios os conhecimentos geométricos, porém, por volta de 600 a.C. iniciaram a organização e a sistematização desse conhecimento. Seus conhecimentos geométricos são vistos em suas belas construções (GIOVANNI e CASTRUCCI, 2019).

O trabalho de organização dos conhecimentos matemáticos foi devido ao matemático grego Euclides, por volta de 300 a.C., e reunido em uma obra de 13 volumes chamada de Os elementos. Essa obra atribuída a Euclides é considerada o primeiro livro didático de matemática. Seu estudo é tão fundamental para história da matemática que hoje essa geometria é chamada de Geometria Euclidianas (GIOVANNI e CASTRUCCI, 2019).

Gerbasi (2019) nos conta que, na Antiga Grécia existiram três problemas clássicos da geometria, considerados fundamentais para o desenvolvimento da Matemática. Tais problemas são a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do circulo.

Os antigos geômetras propuseram o problema da quadratura do círculo. Nesse contexto, Gerbasi (2019) esclarece:

> O problema da quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado, utilizando apenas a régua sem escala e o compasso. A origem do interesse grego nos problemas de quadratura é pouco conhecida. Provavelmente, o problema primitivo do qual se originaram todos os outros foi o da quadratura do retângulo. Aristóteles afirmava que a origem deste problema foi a procura da média geométrica. Dentre os três problemas clássicos da antiguidade, possivelmente o problema da quadratura do círculo foi o mais famoso (GERBASI, 2019, p. 115).

A quadratura do círculo é um dos três problemas clássicos da Geometria grega, consistindo em construir, utilizando somente régua e compasso, um quadrado com a mesma área a de um círculo dado.

A geometria no Egito originou-se da necessidade de aprimorar a tributação de impostos de áreas rurais, porque os administradores do faraó perdiam a referência do limite das possessões e dos impostos a cobrar aos agricultores de acordo com a verdadeira medida de extensão da terra. O rio Nilo tinha enchentes anuais que inundavam as áreas férteis, destruindo os marcos fixados, forçando os donos de terras a refazer os limites de suas propriedades agrícolas, com objetivo de conservar as áreas relativas ao ano anterior. Dessa forma, para solucionar o problema, os faraós nomeavam funcionários para delimitação de terras, os esticadores de corda, atuais agrimensores, cujo trabalho fundamentava-se em avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras das áreas dos proprietários (GERBASI, 2019).

A geometria era utilizada para medir terrenos por meio de retângulos e triângulos como expõe Gerbasi (2019):

> Os “agrimensores” egípcios e babilônios conheciam, por exemplo, o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, e utilizavam-no como instrumento de medida para traçar ângulos retos, dividindo os lotes em retângulos e triângulos. Desse modo, conseguiam determinar a área de terrenos, pois, eles sabiam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à de dois ângulos retos, e que a área de um paralelogramo é igual à do retângulo que tenha a mesma base e a mesma altura (GERBASI, 2019, p. 28).

Os vestígios de aplicação de agrimensura no antigo Egito, remonta por meio de papiros e monumentos que mostram a aplicação dessa profissão. O Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes é um documento egípcio que descreve a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. Esse é considerado um dos mais famosos documentos matemáticos que ainda existe atualmente juntamente com o papiro de Moscou. O escriba egípcio Ahmes (1960 a.C. e 1620. a.C.) reuniu conhecimentos a respeito à área do círculo, designado problema. Ele esclarece, não justificando a solução do problema, com simplicidade escolheu um quadrado que tivesse como lado o próprio raio de figura. Dessa forma, apresentou o quadrado contendo no círculo mais de três vezes e menos de quatro, ou aproximadamente 3,14 vezes. Para conhecer a área de um círculo, de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado igual a oito unidades, comparando com a fórmula usada atualmente $A = \pi \mathrm{r}^{\mathbf{2}}$, confirmando que a regra egípcia é equivalente a atribuir a π o valor de $3\frac{1}{6}$, uma aproximação muito razoável, mas não há indicação que Ahmes conhecesse que as áreas do círculo e do quadrado não eram exatamente iguais (GERBASI, 2019).

Para Gerbasi (2019), a geometria na Babilônia era obtida pelo volume de cilindro circular reto, assim como o produto da base pela altura, entretanto, no volume de uma pirâmide quadrada ou no volume de um tronco de um cone, utilizou-se erradamente como produto da altura pela metade das somas das bases. Outra informação interessante é a respeito de medir a distância, utilizavam a milhar babilônica, correspondendo a sete milhas atuais. Os babilônios utilizavam diferentes formas para demarcar os terrenos para o cultivo como também a projeção de edifícios. Embora com pouco conhecimento geométrico, os babilônios conseguiram solucionar o problema, por intermédio de duas estacas apoiadas na terra, marcavam um segmento de reta. Posteriormente, ligava e estendia as cordas que funcionavam como compassos através de dois arcos de circunferência que se cruzavam determinando dois pontos que, unidos, cortavam perpendicularmente a outra reta, formando os ângulos retos. Este procedimento não era o bastante para levantar uma perpendicular por um ponto dado; todavia, os estudiosos geômetras da antiguidade conseguiram através de uma corda, determinando a melhor solução para esse problema. A resolução colocava de forma estratégica essa corda de modo a formar os lados de um triângulo retângulo com comprimentos equivalentes a 3, 4 e 5 unidades, respectivamente.

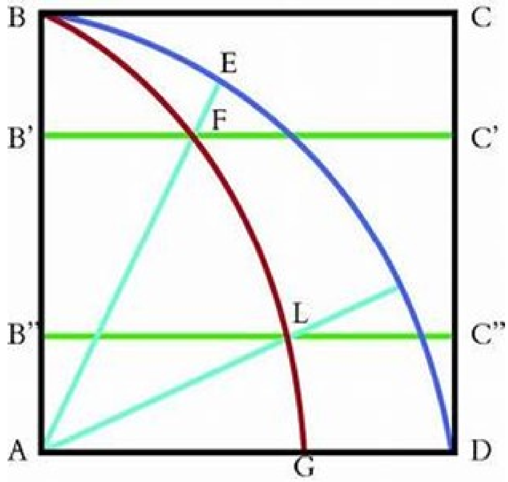
Em relação aos círculos, Eves (2004 apud GERBASI, 2019) informa sobre as suas demarcações:

> Já para demarcar círculos, grandes ou pequenos, os antigos geômetras usavam uma corda, fazendo-a girar em torno de uma estaca cravada no solo como centro da figura. O comprimento dessa corda, hoje conhecido como raio, possivelmente, tinha alguma relação desconhecida com o comprimento da circunferência. Ao retirarem a corda da estaca e colocá-la sobre a circunferência desenhada no solo, eles podiam verificar que o comprimento dessa corda era necessário para contornar a circunferência (EVES, 2004, p. 60-61 apud GERBASI, 2019, p. 32).

Ao demarcar os círculos comprovaram que era apenas necessário conhecer o comprimento do raio e multiplica-lo por 6,28 (equivalente a um pouco mais de seis vezes e quarto da corda). Assim, não importava o tamanho da corda, o resultado sempre exprimia semelhança.

Os gregos como cita Gerbasi (2019) conheciam a quadratura do círculo antes de 400 anos a.C. Anaxágoras de Alexandria (500 a.C.) foi o primeiro matemático considerado a tentar a determinar a resolução para esse problema, mas seu aporte é desconhecido. O geômetra grego Dinóstrato (a.C. 499 a.C. - 427 a.C.) em 350 a.C., desenvolveu um método para quadrar o círculo através do uso da trissetriz de Hípias, tornando o problema de quadrar círculo uma questão simples. No entanto, Dinóstrato não utilizou exclusivamente a régua e o compasso para estabelecer a solução. A demonstração apresentada para o problema se vê na figura abaixo:

Figura 1: Método de Dinóstrato para o quadrante do círculo.



Fonte: Gerbasi (2019, p. 116).

Seja o quadrado $ADCB$ da figura 1. e BED um quadrante de um círculo de centro em A e raio AB; conjecturando que o raio se movimenta da posição AB para posição AD, enquanto, ao mesmo tempo, o segmento BC se move uniformemente para posição AD, paralelamente a si mesmo; os movimentos relativos do raio e do segmento são sincronizados de modo que estes comecem a se mover a partir da posição original no mesmo instante e alcancem a posição AD também no mesmo instante. Os pontos correspondentes de intersecção do raio e do segmento em cada momento formam o lugar pretendido. Desse modo, $BFLG$ é a quadratriz, curva que determina a solução da quadratura do círculo (GERBASI, 2019).

Boyer (1974) ressalta que entre os séculos V a.C. e III a.C. foi o período glorioso da matemática grega, com seu declínio no período entre 250 a.C. a 350 d.C., chamando o século da idade de prata. Primeiramente, no início do período teve-se o destaque do maior algebrista grego, Diofanto de Alexandria. Na história da Aritmética, ele desempenha um papel semelhante ao que Euclides teve na Geometria. Sua obra de destaque é "Arithmética", que aborda sobre equações que possuem como soluções números inteiros ou racionais designadas equações diofantinas.

Gerbasi (2019) fala que os gregos adquiriram conhecimentos de outras culturas, sistematizando e superando seus predecessores. Suas proezas marcaram a história da humanidade em todas as áreas do pensamento humano. Eles não acharam suficiente o caráter empírico, então, buscaram descobrir demonstrações dedutivas rigorosas de normas relativas no âmbito da teoria e nas aplicações práticas da Geometria.

As primeiras observações feitas pelo ser humano associado do que é chamada hoje de Geometria ocorreram através do conhecimento de semelhanças e distinções dos objetos do seu cotidiano. Esses conhecimentos são considerados empíricos, assim, Gerbasi (2019) menciona que:

> Tanto a civilização egípcia como a babilônica conhecia a geometria, mas apenas como instrumento empírico e não como uma teoria organizada. Essas civilizações, por meio da indução, atingiram resultados geométricos, acumulando conhecimentos que as capacitavam na resolução de problemas de traçado de limites de terras, de comparação de áreas, de projetos arquitetônicos e de engenharia, como as pirâmides e os templos. Estes são os registros mais antigos do conhecimento sistematizado da Geometria, em civilizações que floresceram há cerca de 3.500 anos (GERBASI, 2019, p. 33).

Esse conhecimento deve-se a diversos fatores relacionados a caráter mais empírico assumido pela matemática, especificamente a geometria. A partir desse caráter experimental ou empírico os gregos iniciaram cogitar a transformação da Geometria empírica utilizada pelos babilônios e egípcios em Geometria Teórica.

Boyer (1974) salienta que as civilizações que se desenvolveram na China e na Índia são dos mesmos períodos comparáveis às do Nilo ou dos rios Tigre e Eufrates, porém, as informações cronológicas relativas à China não são tão confiáveis quanto as referentes ao Egito e a Babilônia. As culturas gregas e romanas são posteriores às civilizações chinesas e Hindus. Dessa forma, o primeiro império chinês se formou acerca do ano 2750 a.C., mas datar documentos de origem grega que comprove suas formações não são considerados uma tarefa fácil. As obras podem ser de épocas diferentes, um exemplo, o texto mais antigo das obras clássicas da matemática, Chou Pei Suang Ching (Arte de Matemática). A tal obra é uma exposição das realizações matemática chinesa ao redor de 1200 a.C. Existem outras estimativas que foi elaborado no século I a.C., porém, com data mais provável seria 300 a.C. Assim, a obra ficaria a par com a obra Chiu Chang Suanshu, elaborada por volta de 250 a.C. O nome Chou Pei sugere o uso do gnômon no estudo de trajetórias circulares no céu, tratando de cálculos astronômicos, não obstante, a obra contendo uma introdução às propriedades do triângulo retângulo e um estudo incipiente sobre o uso de frações. Além disso, há indícios do Teorema de Pitágoras no Chou Pei, aparentemente.

O K'ui-ch'ang Suan Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática (206 a.C.) é outro trabalho importante da matemática chinesa, contendo informações bem antigas. A obra consta de 246 problemas sobre agricultura, procedimentos de negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos. Nele, inclui somente regras de resolução e não existe demonstração no estilo grego, que era completamente axiomático. Os nove capítulos do livro tinha a seguinte ordem como destaca Gerbasi (2019):

1. Agrimensura, áreas do triângulo retângulo, do trapézio e do círculo;
2. Porcentagem e proporção;
3. Regra de sociedade e regra de três;
4. Determinação de lados de figuras, incluindo cálculo de raízes quadradas e cúbicas;
5. Volumes;
6. Problemas de movimento e ligas;
7. Regra da falsa posição;
8. Sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais;
9. Triângulos retângulos pitagóricos.

Um tratado intitulado Manual de Matemática da Ilha Marítima foi escrita pelo matemático Liu Hui (220 d.C.-280 d.C.). A obra apresenta: $3,1410 < \pi < 3,1427$. Dois séculos depois, Tsu Ch′ung-Chih (430 d.C.-501 d.C.) e seu filho encontraram: $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ (GERBASI, 2019).

Os árabes reproduziram os ensinos recebidos dos gregos e o fundo para o desenvolvimento matemático começou ao redor de Bagdá pelos Califas. Eles eram indivíduos cultos e patrocinaram a ciência e a cultura, convidando exímios estudiosos as suas cortes. As obras gregas de diversas áreas como astronomia, medicina e matemática grega foram traduzidas para o árabe. Essas traduções contribuíram para maioria da ciência grega e hindu não terem sido perdidas durante a baixa idade média conforme Gerbasi (2019).

1.3 A geometria na idade média

Ao decorrer de sua história a geometria sempre foi fundamental em vários sentidos, pois, tem a função de facilitar a vida do ser humano. Na Idade Média não é diferente, a geometria estava presente nas grandes construções religiosas da época. Os povos medievais tinham como ídolo Euclides, mas tinham também grande admiração por Villard de Hounnecount[2].

Borges Filho (2005) observa que é na Idade Média, com a obra de Villard de Honnecourt, apresentando desenhos arquitetônicos, evidenciando desenhos das catedrais em planta e alçados. Além de geometria e técnicas de construção, evidencia desenhos das catedrais de Laon e Reims. A partir de suas viagens pela Europa, desenhou seus desenhos geométricos, que sua obra ficou bastante famosa entre os arquitetos da época. Enquanto Euclides deixava o legado dos "13 elementos", Villard deixou uma geometria prática, se tornando a obra mais ilustre do período medieval, de um notável conhecimento geométrico.

Na China, a geometria desenvolveu a partir da medição, e foi usado como na Babilônia, para exercícios de aritmética ou álgebra. Um importante matemático chinês foi Yan Hui (1238-1298), que escreveu uma extensão dos Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, na qual representou habilmente frações decimais e também incluiu a primeira versão do triângulo de Pascal. Durante a dinastia Tang (618 d.C.-907 d.C.), a influência hindu é notada, e há vestígios do árabe na Dinastia Yuan (1278-1368). No entanto, muito pouca matemática chinesa antiga está diretamente relacionada com o grego ou o latim. Isso ocorreu após a Dinastia Ming (1368-1644) (GERBASI, 2019).

Na época em que a Europa atravessou a indiferença cultural da Baixa Média, como resultado do domínio exercido pela igreja Católica através da Inquisição, houve um declínio da matemática grega e a matemática chinesa tornou-se uma das mais criativas do mundo. Cresceu e alcançou resultados que a Europa só conheceria após o Renascimento (EVES, 2011).

Com a queda do Império Romano Ocidental, situada no ano 476. Nesse ano nasceu Aryabhata, autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos. Ele produziu seu trabalho no início do século VI d.C., entre os quais estão o volume da pirâmide como

[2]Villard de Honnecourt da Picardia (região do nordeste da França) foi um renomado arquiteto mestre do século XIII, famoso devido à coletânea de desenhos que deixou, repletos de projetos arquitetônicos.

metade do produto de sua base pela altura ($b.h/2$) e $\pi^{3/2}r^3$ como o volume da esfera (GERBASI, 2019). No entanto, Boyer (1974) observou que a atividade matemática na índia já existia muito antes. A India também tem seus "estiradores de corda", assim como o Egito, e os primeiros conceitos geométricos adquiridos em conexão com o traçado de templos, medição e construção de altares tomaram a forma de um corpo de conhecimento conhecido como os Sulvasutras. Sulva refere-se às cordas utilizadas nas mensurações, enquanto sutra se refere a um livro de regras ou aforismos relacionados a rituais, ou ciência. O estirar de corda é notavelmente reminiscente de origem da geometria egípcia. Mas as dificuldades em datar as regras estão ligadas a dúvidas quanto à influência que tiveram sobre matemáticos hindus posteriores. Mais ainda do que na China, existe uma acentuada falta de continuidade na tradição matemática hindu: contribuições importantes são acontecimentos isolados separados por intervalos sem resultados.

Bhaskara (1114-1185) foi um dos maiores matemáticos da india medieval. Escreveu muitas obras importantes, incluindo *Lilavati* e *Bijaganita*. Bhaskara Akaria é mais conhecida por seu livro *Lilavati*, um importante trabalho sobre problemas simples de aritmética, geometria plana (medição e trigonometria) e combinatória. Ao tratar do círculo e esfera *Lilavati* não faz distinção entre afirmações exatas das aproximadas. A área do círculo é corretamente dada como um quarto da circunferência, vezes o diâmetro e o volume da esfera como um sexto do produto da área, vezes o diâmetro, mas para a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo Bhaskara sugere 3.927 por 1.250 ou o valor bruto 22/7. O primeiro valor equivale à razão citada. Não há indicação em Bhaskara ou em outros escritores hindus de que eles soubessem que todas as razões propostas eram aproximações (BOYER, 1974).

Portanto, as contribuições que os matemáticos chineses e hindus permitiram que a matemática dessas nações da Idade Medieval fosse estudada até os dias de hoje.

1.4 A geometria na idade moderna

A Idade Moderna é um período considerado de intensas mudanças, revoluções e mudanças na mentalidade ocidental. Na matemática tem-se o destaque do matemático Regiomontanus, Descartes, Pierre de Fermat, Johann Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, Nicolai Ivanovich Lobatchevski e János Bolyai .

Launay (2019) apresenta que a Europa do século XVI estava em uma grandiosa efervescência intelectual. A Itália era transbordada pelo Renascimento e influenciou todo o continente. Essas mudanças foram de ordem científica, social, religiosa e econômica multiplicaram as descobertas. Os espanhóis descobriram um novo mundo. Então, enquanto se buscavam terras distantes, os intelectuais humanistas redescobriam nas bibliotecas grandes textos da antiguidade. No aspecto religioso teve a Reforma Protestante promovida por Martinho Lutero e João Calvino. Outra mudança importantíssima foi à criação da imprensa pelo alemão Johannes Gutenberg em 1450. Os elementos de Euclides foi impresso numa gráfica, em Veneza. Assim, milhares de obras foram impressas a partir da imprensa.

Segundo Eves (2011) o mais influente matemático do século XV foi Johann Müller (1436-1476), geralmente conhecido por Regiomontanus. Ainda bem jovem estudou com Peurbach em Viena. Traduziu, do grego, trabalhos de Apolônio, Herão e Arquimedes. Seu tratado De triangulis omnimodis, escrito por volta de 1464, mas publicado postumamente em 1533, é a mais importante de suas obras; trata-se da primeira exposição europeia sistemática de trigonometria plana e esférica, num tratamento independente da astronomia. Essa obra se divide em cinco livros, os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os outros três à trigonometria esférica. Nessa obra o autor revela particular interesse na determinação de um triângulo, satisfeitas três condições dadas. Nos trabalhos de Regiomontanus, usa-se a álgebra na resolução de problemas geométricos. Além disso, Para Boyer (1974, p. 201) "a álgebra de Regiomontanus era retórica. Sua influência sobre a álgebra foi reduzida não só pela sua adesão à forma retórica de expressão e por sua morte prematura."

Launay (2019) relata que a álgebra se torna independente da geometria, não necessitando interpretar as multiplicações como retângulos, passando a serem encarregados pelos x, os y e os z. Essa mudança foi por intermédio do Francês René Descartes. Ele passa a introduzir um meio simples de algebrizar os problemas da geometria através de um sistema de eixos e coordenadas. Sua ideia de coordenadas cartesianas: pôr no plano, duas retas numéricas, uma horizontal e outra vertical, com finalidade de localizar cada ponto geométrico por suas coordenadas em função desses dois eixos.

Mol (2013) cita que Pierre de Fermat (1601-1665) foi um advogado e político francês que viveu na cidade de Toulouse. Ele nunca atuou como matemático profissional tinha a matemática apenas como um hobby. No entanto, foi um dos maiores talento da matemática do seu tempo. Produziu contribuições importantes em diversas áreas, que o fazem ser conhecido como um dos pioneiros da moderna teoria dos números e ainda como um dos criadores da geometria analítica e do cálculo diferencial. Fermat não produziu obras completas, sendo que muitos dos seus trabalhos permaneceram manuscritos em vida e ficaram famosos através de cartas a seus amigos e colaboradores. Os seus interesses principais em aritmética estavam nos números primos e nas propriedades de divisibilidade. Alguns dos resultados estabelecidos por ele seriam demostrados apenas por seus sucessores. Tal como, o conhecido $Pequeno\ Teorema\ de\ Ferma$, que diz que: Se p é primo e a é um número não divisível por p o número $a^{p-1}-1$ é divisível por p.

Andrade (2013) ressalta que o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), após duas décadas de tentativas, acabou por se convencer que o axioma das paralelas era independente dos outros quatro. Segundo seu próprio depoimento, ele descobriu várias consequências de uma geometria na qual por um ponto fora de uma reta passam mais de uma reta que não a intercepta.

Gauss fez tentativas de provar o postulado das paralelas, chegando à conclusão de que era impossível uma demonstração. As conclusões não publicadas de Gauss o tornariam criador das geometrias não euclidianas. Desde seus tempos de aluno, Gauss se encantou pelo problema de postulado das paralelas[3]. Em torno de 1813 teria criado uma geometria, segundo ele, "estranha e totalmente diferente da nossa". No entanto, como lhe era característico, não publicou sobre o assunto. Porém, sua visão sobre a possibilidade de existência de geometrias diferentes da euclidiana apareceu em seus resultados sobre geometria diferencial de superfícies, onde ficou clara a possibilidade de dotar uma mesma superfície de diversas geometrias. Em seu Disquisitiones Circa Superfícies Curvas, Gauss já havia desenvolvido a noção de geometria intrínseca a uma superfície, pesquisando suas propriedades geométricas de forma independente de seu espaço ambiente (MOL, 2013).

O trabalho de Gauss sobre geometria teve seguimento com um de seus mais ilustres discípulos: Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann investigou as peculiaridades das geometrias não-euclidianas, seguindo a perspectiva da geometria diferencial, expondo-as em um quadro mais geral. A obra de Riemann restabeleceu e difundiu a ideia de Gauss sobre a geometria intrínseca das superfícies, elaborando uma teoria de geometria diferencial

[3]O 5^o O postulado de Euclides é conhecido como postulado das paralelas. A explicação histórica é bem conhecida. Utilizando apenas os quatro primeiros postulados é possível provar até a 31^a proposição do Livro I dos Elementos: por um ponto fora de uma reta passa pelo menos uma reta que não a intercepta. O último postulado garante a unicidade da paralela (ANDRADE, 2013).

para dimensão qualquer, atualmente denominada como geometria Riemanniana. Riemann investigou a ideia de curvatura, revelando que a geometria euclidiana representava à curvatura nula, ao passo que a geometria de Bolyai e Lobatchevski estava relacionada à curvatura negativa. Ele também descobriu que, em "dimensão dois, as superfícies de curvatura positiva podiam ser aplicadas sobre uma esfera, onde poderia ser desenvolvida uma geometria desprovida de retas paralelas."(MOL, 2013, p. 127).

Mol (2013) descreve que a sociedade matemática tomaria noção dos estudos das geometrias não-euclidianas apenas com os trabalhos do russo Nicolai Ivanovich Lobatchevski (1792-1856), professor na Universidade de Kazan, e do húngaro János Bolyai (1802-1860), oficial do exército do império austríaco. Eles são conhecidos como criadores da geometria não-euclidiana, teoria que desenvolveram, de forma independente, por volta do ano de 1825. O conceito de geometria que criaram e divulgaram é idêntica à elaborada por Gauss, receberia mais tarde de Felix Klein o nome de geometria hiperbólica.

Conforme Andrade (2007), na matemática moderna, com os trabalhos de Bolyai e Lobashevsky, a crença no modelo absoluto foi abalada. Lembramos que a física descobriu fenômenos que não poderiam ser explicados dentro da estrutura euclidiana apenas algumas décadas depois. Essa disputa puramente intelectual teve forte repercussão entre os geômetras, pois, um objeto estudado por tantos corria o risco de não existir, e verdades descobertas ao longo dos séculos poderiam ser uma descrição do nada.

O objeto de pesquisa da geometria é a pragmática. Em essência, Euclides e Bolyai - Lobaschevsky estudaram duas estruturas axiomáticas diferentes das quais verdades relativas foram obtidas por derivação lógica. Portanto, um objeto de estudo deve ter uma estrutura axiomática, por mais artificial que seja, pois, alguns parecem estar no momento histórico de sua formação, mas depois são utilizados por outros campos de aplicação. Assim, os fatos não provocam rachaduras, o dilema é resolvido e não há necessidade de perguntar sobre o passado. Os princípios axiomáticos permeiam a matemática (ANDRADE, 2007).

1.5 A geometria no Brasil

É preciso informar que, no Brasil, a história da ciência é recente e não tem contribuído significativamente para o desenvolvimento da matemática e da ciência. Portanto, os livros da Geometria Científica e da história da matemática foca mais no ensino do que no conhecimento em si. Então, o ensino iniciou-se com a chegada dos jesuítas no Brasil e foi se desenvolvimento com o decorrer dos tempos.

Antes de 1882, o Estado não era responsável pela oferta da educação, e Rui Barbosa defendeu a garantia ao acesso universal à educação, defendendo a obrigatoriedade, gratuidade e laicidade. Abordaremos a seguir o parecer de Rui Barbosa.

O parecer de Rui Barbosa mencionado por Silva e Valente (2014) foi desenvolvido pelos republicanos na República Velha que influenciou a proposta educacional. Nessa proposta, o método intuitivo é exaltado como elemento mais fundamental para as novas propostas educacionais. A metodologia proposta por Rui Barbosa para o ensino das ciências são as chamadas lições de coisas com objetivo de extirpar a pedagogia retórica com base em nomes, datas, definições, preceitos. Ao contrário, pressupôs o contato com os objetos e a observação.

Em relação à geometria, a proposta de Rui Barbosa mencionado por Barbosa (1947 apud SILVA e VALENTE, 2014) destacava:

> É por meio de modelos materiais, de construções gráficas, que há de ter entrada na escola o curso sempre concreto, intuitivo, figurado dos elementos desta ciência. Começando por discernir ao aspecto as formas geométricas mais elementares, o sistema froebeliano adestrar utilmente o menino em reproduzi-las por meio de papelão, do papel, da terra plástica, ou do arame. Por uma graduada sucessão de passos, esta parte do programa, dominado e encaminhado sempre pelo mesmo espírito é susceptível do mais amplo desenvolvimento. (BARBOSA 1947, p. 289-290 apud SILVA e VALENTE, 2014, p. 48-49).

No parecer Rui Barbosa propôs ao Estado uma responsabilidade com a instrução pública, pois, para ele, o ensino a todos era importante para a reconstrução do caráter nacional. Além disso, Rui Barbosa definiu a taquimetria como "concretização da geometria, é o ensino da geometria pela evidência material, a acomodação da geometria às inteligências mais rudimentares: é a lição de coisas aplicada à medida das extensões e volumes"(BARBOSA 1947, p. 290 apud SILVA e VALENTE, 2014).

Silva e Valente (2014) diz que a geometria no programa passa a constituir como uma disciplina escolar autônoma. Não mais se apresenta focada ao adjetivo “prática”, e está colocada ao lado do desenho, da modelagem, ao lado da aritmética, e dos trabalhos manuais. Assim, uma proximidade com a geometria. Então, na matéria de desenho, figura geométrica plana desde triângulos até octógonos. A matéria de modelagem propusera exercícios em barro úmido em forma de esfera, cubo e cilindro. Enquanto nos trabalhos manuais é proposta atividade como cortar com a tesoura o quadrado em dois triângulos e em quatro triângulos.

Segundo Souza (2016), a Reforma Francisco Campos (nas décadas de 1930 e 1940) ministrava-se em todas as séries a disciplina Matemática. Aritmética, Álgebra e Geometria estabeleciam uma correlação fazendo com que o ensino adquirisse uma noção de função, já que os ensinamentos matemáticos eram de forma intuitiva e em seguida, desenvolvidos gradualmente, de maneira geométrica e analítica.

Pavanello (1989) explana mudanças na reforma educacional de 1942:

> Os programas de matemática de 1942 apresentam algumas diferenças em relação aos de 1931. Em primeiro lugar, não mais se insiste em que os três assuntos-aritmética, álgebra e geometria — sejam abordados em cada uma das séries do curso ginasial. A geometria é ainda abordada nas quatro séries iniciais, intuitivamente nas duas primeiras e dedutivamente nas duas últimas. A aritmética (prática) é, no entanto, ministrada só nas séries iniciais, enquanto a álgebra é programada para às duas últimas. Progressões, logaritmos, exponenciais e funções circulares, que constavam do programa da 4ª série (programa de 1931) passam a figurar nos cursos clássico e científico. No 3º ano são estudados limites e derivadas. A geometria é bastante priorizada no segundo ciclo, sendo programada para todos os anos, incluindo-se ainda trigonometria no 2º ano e geometria analítica no 3º. (PAVANELLO, 1989, p. 136–137).

A Reforma de Francisco Campo em 1932 e a de Gustavo Capanema de 1942 respondiam as exigências político - ideológicas daquelas décadas, com ideologia nas concepções educacionais que se redefiniam no Brasil. Para tanto, Souza (2016) mostra que naquela ocasião uma restauração no sistema educacional legitimava e controlava as intenções inovadoras do novo governo de Getúlio Vargas, representando um passo decisivo nas criações das infraestruturas administrativas, necessárias à política centralizadora e intervencionista daquele governo.

Pavanello (1989) enfatiza a omissão do ensino da geometria no Ensino Fundamental:

> A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra - mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância. A maioria dos alunos do 1º grau deixa, assim, de aprender geometria, pois, em geral, os professores das quatro séries iniciais limita-se a trabalhar somente a aritmética - e as noções de conjunto. O estudo de geometria passa a ser feito, quando o é, apenas no 2º grau. A substituição do Desenho Geométrico pela Educação Artística nos dois graus de ensino vem, no entanto, tornar ainda maior a dificuldade dos alunos em trabalhar com as figuras geométricas e sua representação (PAVANELLO, 1989, p. 144).

A geometria aos poucos foi ensinada somente no Ensino Médio. Além disso, a geometria dedutiva frequentemente ensinada na forma de exposição de teoremas e demonstrações, na qual ensinar e aprender geometria acontecia por meio de axiomas ou de transformações vem sendo abandonada do currículo escolar.

A Lei LDB n^0 9.394/96 foi publicada em 1996 e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de matemática em 1998, indicando a abordagem da geometria euclidiana por meio da exploração visual e tátil:

> [. . .] As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca (Brasil, 1999, p. 44).

É importante destacar que a geometria na escola possibilita uma interpretação mais clara para desenvolver o pensamento espacial e estimular o raciocínio por meio da visualização. Então, é necessário que o docente incentive o aluno em desenvolver uma educação visual adequada. Portanto, reflete-se que ao olharmos o corpo de um homem ou mulher, algumas folhas de árvores ou plantas, ou vê uma borboleta voando edifícios antigos, ou atuais encontra-se uma excelente alternativa para trabalhar conteúdos de geometria de forma prática. Logo, os estudiosos como Euclides, Platão, Arquimedes, Descartes e outros perceberam esses padrões geométricos em diversos fenômenos da natureza e ampliaram seus estudos com o decorrer dos tempos.

2 A GEOMETRIA DE EUCLIDES

Desde o surgimento da humanidade, o homem tinha a curiosidade geométrica e por meio de Euclides, um grande matemático da Grécia antiga que modificou o pensamento matemático de acordo com as novas necessidades que surgiram a explorar a geometria pela publicação de sua obra "Os elementos", que influenciou diversos estudos e sendo estudado até os dias atuais.

Diante disso, viu-se a possibilidade de abordarmos nas seções abaixo sobre sua biografia e seus estudos matemáticos.

2.1 EUCLIDES

Conhecer Euclides é conhecer os estudos matemáticos de "Os elementos", a obra que o consagrou.

Euclides de Alexandria foi um matemático platônico, professor e escritor grego, considerado como o "Pai da Geometria". Sua principal obra é "Os elementos". Ainda quando jovem deve ter tido influência de estudantes de Platão, com possibilidade de ter frequentado a academia fundada pelo filósofo. Sua vida pessoal e a razão em que Euclides compôs seu livro, Os elementos, permanecem com muitas informações desconhecidas. Existem registros de que Euclides possa ter lecionado na grande biblioteca de Alexandria, fundada por Ptolomeu I, que se diz que como docente, Euclides foi urbano, prestativo e delicado. O autor de Os elementos é rigoroso, severo, lógico, implacável e como matemático, Euclides apreendeu com seus predecessores, estudiosos como Eudoxo e Teeteto, e passou aos seus sucessores, Apolônio e Arquimedes. Euclides ajustou e refinou a geometria que já existia e influenciou o mundo antigo, medieval, moderno até os dias atuais (BERLINSKI, 2018).

Berlinski (2018) demonstra que geometria durante mais de dois mil anos significou geometria euclidiana, e a tal era Os elementos. Esse é considerado a obra mais antiga da matemática ocidental. Os elementos no primeiro livro contém 48 proposições, e o segundo, quatorze. São treze volumes constando 467 proposições. Além de dois livros incertos, atribuído a sua autoria de edições mais antigas de Os elementos.

O Livro I tem um conjunto de 5 axiomas ou 5 postulados, enquanto o Livro IV, aplica a teoria das proporções de Eudoxo à geometria. Ambos fazem menção aos pontos, as retas, aos círculos, aos quadrados, aos triângulos, aos ângulos retos e aos retângulos, as formas estáveis de arte e da arquitetura. Os embasamentos dos Livros V a IX são voltadas a uma teoria de magnitudes, proporções e números. Os outros livros são abordados os estudos à geometria sólida. Todos os livros de Os elementos são importantíssimos, mas somente os quatro primeiros livros de seus tratados estão o mito e a memória de Euclides como cita Berlinski(2018).

De acordo com Azevedo Filho (2015), os elementos de Euclides organizados em treze livros, com apenas os seis primeiros tratam de geometria plana elementar. O geômetra estruturou o tema em 5 postulados, 5 "noções comuns" e mais de 150 proposições. As noções comuns são consideradas também princípios, que estas diferem dos postulados por serem mais evidentes, porém, um estudo moderno não faz essa diferença. As críticas a Euclides deram origem a geometria não euclidiana, mas por mais de dois mil anos, a obra é a mais rigorosa do tratado lógico dedutivo da matemática elementar.

O estudo de "Os elementos" segundo Berlinski (2018) sempre encanta gerações:

> Em cada geração, alguns estudantes encantaram-se com Os elementos. "Aos onze anos de idade", lembra Bertrand Russell em sua autobiografia, "eu comecei a ler Euclides, tendo meu irmão como tutor. Foi um dos grandes acontecimentos da minha vida, tão deslumbrante como o primeiro amor. Eu nunca tinha imaginado que havia algo tão delicioso no mundo."(BERLINSKI, 2018, p. 12).

A obra de Euclides até os dias atuais encanta quem lê por sua complexidade, organização, e aprendendo álgebra ao período que estuda geometria. O interesse pela geometria euclidiana há muito tempo faz parte do currículo da humanidade. Todavia, tudo que se ler de Euclides são cópias de cópias, mutilado pelas traduções do grego para o latim e depois para o árabe, traduzindo novamente para o grego e finalmente para o latim medieval como apresenta Berlinski (2018).

As versões modernas de Euclides são baseadas em um manuscrito grego do século X, identificado pelo francês François Peyrard no século XVIII. Há uma distinção entre a solidez pungente do pensamento de Euclides e os papiros perecíveis que ele usou para expressá-los. Muito antes de Euclides, os babilônios escreviam laboriosamente em tabuletas (BERLINSKI, 2018).

Segundo Berlinski (2018, p. 12) "se Euclides impôs ordem sobre seu objeto de estudo e o transformou em um sistema, foi uma ordem tão severa que moldou a geometria numa forma fixa até pelo menos a Renascença Italiana, no século XVI."A seguir do século XIX, os matemáticos descobriram geometrias não euclidianas, como a de Euclides tornando uma entre muitas.

Euclides implantou um sistema matemático duradouro relata Berlinski (2018):

> Os elementos representa a grande conquista da tradição matemática grega. Arquimedes foi um matemático mais brilhante do que Euclides. Ele deu ao mundo aquilo que grandes matemáticos sempre dão que é um registro de seu gênio, mas em termos de um sistema axiomático, Euclides deu à matemática algo ainda mais duradouro, e que era um estilo de vida. Era um estilo de vida invisível para as pessoas que antecederam os gregos, e invisível também para os chineses, os mestres de uma cultura tecnológica sutil (BERLINSKY, 2018, p. 12).

Sua geometria dura mais de dois mil anos encantando pessoas, fazendo elas se indagarem ou ficarem totalmente deslumbradas por sua genialidade. Euclides é um dos mais significativos matemáticos da história, também é considerado o autor mais importante da matemática antiga e com um estudo mais duradouro de todos os tempos.

2.2 Um sistema axiomático

Berlinski (2018) define que um sistema axiomático é um conjunto de axiomas podendo ser organizados em conjunção para derivar teoremas logicamente. Euclides concebeu uma teoria matemática consistindo em um sistema axiomático (é um tipo de sistema formal) e todos os seus teoremas. Certamente, os egípcios conheciam muito bem conhecimentos sobre pirâmides, bastantes sofisticados, mas seus conhecimentos eram incompletos. Eles construíram o que necessitavam, porém, não possuía uma compreensão do todo. Enquanto Euclides acreditava na existência de uma forma de unidade subjacente à diversidade de experiências, marcando a distinção entre Euclides e os matemáticos egípcios.

Para Hilbert e Cohn-Vossen (1990) a grande contribuição de Euclides, pela qual ele é justamente conhecido, é que ele organizou o conhecimento geométrico de seu tempo em um quadro lógico coerente, pelo qual cada resultado poderia ser deduzido daqueles que o precederam, começando com apenas um pequeno número de "postulados"considerados autoevidentes.

A imortalidade do estudo geométrico de Euclides se deve a sua dedicação e uma dupla compreensão. Os pressupostos de Euclides são chamados de axiomas, podendo ser chamados de postulados também e, além disso, suas conclusões são os teoremas. Euclides apresentou cinco axiomas, derivando 467 teoremas (BERLINSKI, 2018).

Berlinski (2018) indica que o legado de Euclides é centrado no seu poder intelectual e de sua grandeza. O seu livro Os elementos não encontra nada de insano diferente de seus antecessores, pois, os pitagóricos eram homens consumidos pelas loucuras matemáticas. Então, em Euclides, à obra tem uma estrutura totalmente intelectual acessível a qualquer um capaz de seguir um argumento.

Os teoremas de um sistema axiomático decorrem de seus axiomas. Certamente, os povos do Oriente antigo conheciam o que eram argumentos, mas sabiam de forma imperfeita. Assim, os gregos foram quem realmente elaboraram e implantaram a ideia verdadeira dos argumentos (BERLINSKI, 2018).

2.3 Noções comuns

Euclides em sua obra "Os elementos" anuncia cinco noções comuns. Berlinski (2018) apresenta as noções comuns de Euclides da seguinte forma:

> (1) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
> (2) Se a iguais somamos iguais, as somas serão iguais.
> (3) Se de iguais retiramos iguais, as diferenças serão iguais.
> (4) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais entre si.
> (5) O todo é maior que a parte. BERLINSKI, (2018, p. 19).

É necessário deixar claro que as noções de Berlinski não estão como nos elementos, pois, se entende que são apenas 5 noções comuns e na obra Os Elementos são 9 noções. Além disso, as noções comuns representam uma definição que não podia ser explicada, não envolvendo repreensão. O próprio Euclides não podia explicar ou nem justificar as noções comuns, tampouco os leitores são capazes disso como cita Berlinski (2018).

A primeira noção comum de Euclides é ilustrada por retas A, B, e C (três linhas retas rotuladas). Assim, se A é igual a B e B é igual a C, então A é igual a C. Por outro lado, o mesmo pode ser relacionado ao tamanho, pois, se A é maior que B e B maior que C, então, A é maior que C (BERLINSKI, 2018).

Berlinski (2018) expressa que a igualdade traçada na quarta noção comum, supõe que duas coisas iguais se coincidem entre si. Essa questão é criticada por muitos matemáticos. Assim, apenas 23 séculos depois, George Boole e C.S. Pierce avaliaram a igualdade em seu contexto próprio, lógico. Atualmente, os matemáticos conduzem a igualdade com mais clareza enquanto Aristóteles e Euclides em sua época tiveram mais dificuldades.

Igualdade é uma relação, que primeiramente, a igualdade é reflexiva. Nenhuma relação poderia ser mais próxima de $A = A$. E simétrica, se $A = B$, então $B = A$ e transitiva, se

$A = B$ e $B = C$, então $A = C$. Como reflete Berlinsky (2018).

Euclides viu a transitividade da igualdade. É a primeira de suas noções comuns. Mas ele não atentou à simetria e à reflexividade, ou não as mencionou. Veja Berlinski (2018):

> Em suas segunda e terceira noções comuns, Euclides justapõe a relação de igualdade e as operações de adição e subtração. Coisas são acrescentadas umas às outras ou subtraídas umas das outras. Como subtração é uma forma de desfazer a adição, a segunda e a terceira noções comuns de Euclides podem afunilar em uma declaração abrangente: se $A = B$ e $C = D$, então $A \pm C = B \pm D$ (BERLINSKI, 2018, p. 22).

Euclides utiliza a palavra igualdade verificando em axiomas e noções comuns definindo suas relações de equivalências. No entanto, alguns matemáticos se cogitam em restringir a igualdade, porém, não à razão em restringi-lo em princípios a operações aritméticas. Claramente, entende-se que as coisas verdadeiras de A é igual a si mesmo, sugerindo que a igualdade não pode ser facilmente eliminada em favor da verdade, pois, ela não pode ser eliminada de forma alguma como cita Berlinski (2018).

A quarta noção de Euclides é expressa por um critério de identidade, um princípio que refere a mesma coisa sendo considerado por triângulos, círculos ou linhas retas. Esse conceito de a mesma coisa é implícito em todos os teoremas de Euclides (BERLINSKI, 2018).

2.4 Axiomas

Os axiomas são também chamados de postulados, e axiomas são verdades incontestáveis aplicadas sem necessidade de haver demonstrações.

Berlinski (2018) mostra os primeiros axiomas de Euclides:

> 1. Traçar uma linha reta de algum ponto para algum ponto.
> 2. Produzir uma linha reta finita continuamente numa linha reta.
> 3. Descrever um círculo com qualquer centro e distância. (BERLINSKI, 2018, p. 38).

Os três primeiros axiomas de Euclides referem-se a uma régua e compasso. O autor ainda diz que na obra Os elementos não são mencionados nem a régua e, nem o compasso. No entanto, essas afirmações são difíceis serem consideradas controversas, e parecem ter sentido. Robin Hartshorne, matemático contemporâneo nota que as provas de Euclides são “realizadas com instrumentos específicos, a régua (ou traçador) e o compasso”, porém, nenhum instrumento é especificado em Os elementos.

O quarto axioma conforme Berlinski (2018) afirma que:

> Todos os ângulos retos são iguais. Esse axioma é notavelmente diferente dos três primeiros axiomas de Euclides. Ele não diz que algo existe, a não serem os ângulos retos. Os três primeiros axiomas de Euclides têm como objetivo pôr as coisas a caminho. O quarto pretende estabelecer uma identidade amistosa entre ângulos retos, uma irmandade. Contudo, seja qual for a identidade dos ângulos retos, sua natureza deve ser abrangida pelos três primeiros axiomas de Euclides, junto com a assistência decorativa de suas definições (BERLINSKI, 2018, p. 40-41).

O quinto e último axioma do sistema de Euclides é mais famoso que os outros quatro. Consta que Euclides ficou perturbado antes de aceitá-lo. Berlinski (2018) define da seguinte forma:

> Se uma linha reta cruzar duas linhas retas e formar ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se produzidas indefinidamente, encontram-se no lado em que estão os ângulos menores do que dois ângulos retos (BERLINSKY, 2018, p. 42).

O quinto postulado de Euclides é aquele que tem dado mais dores de cabeça aos estudiosos matemáticos desde a antiguidade. O próprio Euclides teve dúvidas sobre a convicção desse axioma. "Ele sabia que algo estava errado ou, se não errado, não certo"(BERLINSKY, 2018, p. 43).

Segundo Andrade (2007) os quatros primeiros postulados são de origem empírica, eles são informações simples e claras dos métodos utilizados na agrimensura antiga. Tais métodos foram empregados como as regras mínimas para o avanço de uma teoria apropriadamente chamada Geometria. Com a adição do quinto postulado, o homem programou o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico. Um modelo físico deve ser compreendido como um conjunto de leis que comandam a estrutura de um sistema físico do qual se procura, a partir deles, explicitar dedutivamente as propriedades do sistema. O sistema considerado na Geometria Euclidiana é o espaço físico e as leis são os postulados. Desse modo, o espaço é o objeto de estudo da Geometria Euclidiana, planos e retas são subconjuntos empregados para estudá-lo e requerem um tratamento destacado.

Em relação ao 5 postulado, Andrade (2007) destaca:

> O 5^o postulado chegou até nós conhecido como postulado das paralelas. A explicação histórica é bem conhecida. Utilizando apenas os quatro primeiros postulados é possível provar até a 31 proposição do Livro I dos Elementos: por um ponto fora de uma reta passa pelo menos uma reta que não a intercepta. O último postulado garante a unicidade da paralela! (ANDRADE, 2007, p. 5).

O geômetra escocês John Playfair (1748-1819), que criou uma tradução dos Elementos para o Inglês, notou, provavelmente inspirado nessa preposição 31, que o 5 postulado poderia ser trocado por uma afirmação não condicional sem que a teoria fosse modificada. Ele é o criador do substituto: por um ponto fora de uma reta passa uma única reta que não a intercepta. Por esse motivo, o 5 postulado também é conhecido como postulado de Playfair (ANDRADE, 2007).

2.5 Proposições

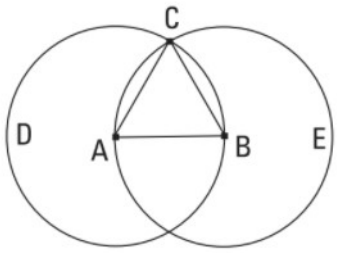
As proposições ou Teoremas (48 proposições) são regras que se buscam com apoio dos postulados.

As proposições de Euclides 19 e 20, são definidos por figuras retilíneas, figuras contidas por linhas retas e triângulos equiláteros que apresentam triângulos com três lados iguais. No entanto, as suas definições, suas noções e axiomas não diz nada da existência deles, "e nada que veio antes conferia a Euclides a mais leve indicação de que está em seu poder produzir ou criar essas figuras"(BERLINSKI, 2018, p. 47).

Berlinski (2018) cita que sobre uma dada linha reta é sempre possível construir um triângulo equilátero, essa é a proposição 1. Sendo AB uma linha reta e usado A como um ponto fixo, Euclides deduz a existência do círculo BCD. Um círculo merece outro: este, ACE, cujo centro é B. O terceiro axioma utilizado novamente. Nesses círculos devem se encontrar em um ponto C, porém, para o primeiro axioma, podendo quaisquer dois pontos definir uma linha reta. Assim fica o seguinte: as linhas CA de C para A, e CB de C para B e estabelecendo linhas retas por dedução, surge o triângulo ABC. Sua base é a linha reta AB com a qual o grande Euclides iniciou sua demonstração, sendo seus lados as linhas retas CA e CB. O autor ainda acrescenta que, o ponto A é o centro do círculo BCD. Em suas proposições 15, 16 e 17, Euclides afirma que dado um círculo, todo conjunto de linhas retas de seu centro à sua circunferência são iguais. A partir disso, Euclides conclui que AC é igual a BA. Mas Euclides já tinha estabelecido que AC fosse igual a AB. Segue-se que CA e CB são ambas iguais a AB. Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si. É a terceira noção comum de Euclides. Vem a calhar, não? Assim, o triângulo ACB é equilátero.

A proposição 2 de acordo com Euclides (2009), dado um ponto A ligado ao ponto B, a reta AB, construindo o triângulo equilátero DAB, prolongando sobre uma reta com

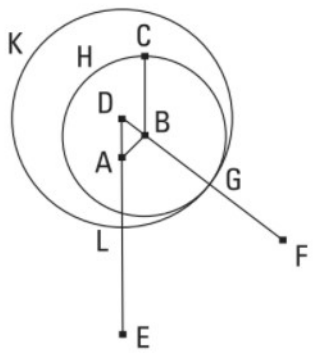
Figura 2: Proposição 1



Fonte: Berlinski (2018, p. 48).

as DA, DB as retas AE, BF, e, por um lado, com o centro B, descrevendo a distância BC, por outro lado, ficando descrito o círculo CGH, com o centro D numa distância DG, ficando discrito o círculo GLK. Veja a figura 3.

Figura 3: Proposiçao 2



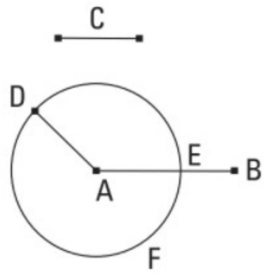
Fonte: Euclides (2009, p. 99).

Observa-se que o ponto B é o centro do círculo CGH, e que BC é igual á BG. No centro do círculo KLG fica o D, que a DL é igual à DG, enquanto a DA é igual a DB. Portanto, a restante AL é igual à restante BG. Mas também a BC foi provada igual à BG. Dessa forma, cada uma das AL, BC é igual à BG e sabe-se que as coisas iguais à mesma coisa serão iguais entre si. Em suma, no ponto dado A, foi postada a reta AL que é igual à reta dada BC.

A proposição 3 é estabelecida de acordo com Euclides (2009) que dois segmentos de retas desiguais dados AB, C, dos quais seja maior o AB, necessitando então, subtrair do maior AB um segmento de reta igual ao menor C. Assim, a resolução dessa proposição de dois segmentos de retas desiguais AB, C, precisa ser subtraído do maior AB o AE igual ao menor C.

Euclides (2009) estabelece a Proposição 4, que quando dois triângulos ABC, DEF, com dois lados AB, AC iguais aos dois lados de DE, DF, e o ângulo sob BAC será igual

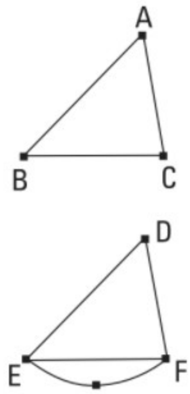
Figura 4: Proposiçao 3



Fonte: Berlinski (2009, p. 100).

EDF, e o triângulo ABC será igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes. Assim, conclui-se que caso dois triângulos tenham os dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais, igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais é estendido os lados iguais. Veja a figura 5.

Figura 5: Proposiçao 4



Fonte: Euclides (2009, p. 100).

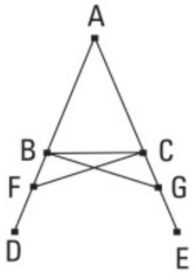
Berlinski (2018) explica a Proposição 5:

> Triângulos equiláteros são prisioneiros de sua simetria. Eles são os mesmos, não importa o ângulo pelo qual são vistos. Não fazem nada e não vão a lugar algum. Não é de admirar que existam tantos desses brutos atarracados por aí. O triângulo isósceles é bem mais refinado. Os lados de um triângulo equilátero são todos iguais. Os lados opostos de um triângulo isósceles são iguais, mas cada base é independente. A diferença é artisticamente importante. Triângulos isósceles têm o poder de ascender. Arquitetos eclesiásticos formavam um triângulo isósceles com as pontas dos dedos e juntando os polegares para imaginar espaço afilando-se para cima a partir de sua base para a abóbada de uma grande catedral. (BERLINSKI, 2018, p. 50).

Euclides estabelece uma conexão em Os elementos, entre os lados e os ângulos da base de um triângulo isósceles, existindo uma relação ou outra entre os lados e os ângulos da base de um triângulo isósceles.

Segundo Berlinski (2018) Euclides afirma que em qualquer triângulo isósceles ABC, e que, os ângulos da base são iguais um ao outro e acrescentando se as linhas retas iguais são produzidas mais adiante, os ângulos sob a base também serão iguais um ao outro. Assim, Euclides na sua estratégia de demonstração prova mais do que necessário e concluindo menos do que é demonstrado. Então, dado ABC seu triângulo isósceles original, acaba construindo uma ponte de B a C. O geômetra Euclides primeiramente estende as linhas retas AB e AC para D e E, seguindo a ordem e depois as linhas retas são estendidas com base no segundo axioma de Euclides.

Figura 6: Proposiçao 5



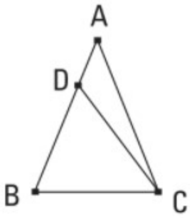
Fonte: Euclides (2009, p. 103).

Berlinski (2018) destaca que a Proposição 5 de Euclides também chamada como *pons asinorum* ou ponte de asnos. O recurso assemelha uma ponte como mostra na figura acima. Ela parece descrever um viaduto de cavaletes, mas esses asnos sugeriram também algo mais, uma ponte intelectual que asnos de sala de aula são incapazes de cruzar. Nada, contudo, na prova de Euclides justifica sua reputação de dificuldade. A demonstração não é nem o mais simples possível, nem a mais elegante, mas oferece uma apreciação de Euclides na plenitude de sua maneira.

A proposição 6 com base em Euclides (2009), dado o triângulo ABC, que tendo o ângulo sob ABC igual ao ângulo sob ACB. Assim, diz que o lado AB é igual ao lado AC. Então, a solução da definição 6 é que caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, logo, os seus lados estendidos aos ângulos iguais serão iguais entre si.

A proposição 8 segundo Euclides (2009) caso dois triângulos tenham dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, tendo a base igual à base, terão o ângulo igual ao ângulo contido pelas retas iguais. A seguir, a proposição 9 diz que o ângulo retilíneo dado

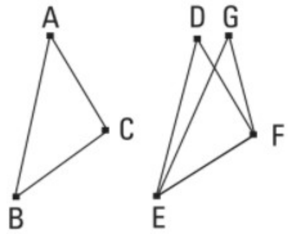
Figura 7: Proposiçao 6



Fonte: Euclides (2009, p. 104).

sob BAC, é necessário cortá-lo em dois.

Figura 8: Proposiçao 8



Fonte: Euclides (2009, p. 105).

Figura 9: Proposiçao 9

Fonte: Euclides (2009, p. 105).

Conforme Berlinski (2018) a proposição 9 é definida quando o ângulo retilíneo é fornecido para estar sob BAC; então é necessário que corte-o ao meio. Seja o ponto D encontrado aleatoriamente em AB,e deixe AE subtrair de AC igual a AD, e deixe conectar a DE, e fique construído no triângulo equilátero DE, DEF, e ligado a AF; digamos que o ângulo sob BAC é dividido em dois pela linha AF. Pois, como AD é igual a AE, e AF é comum, então DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada um para cada. A base DF também é igual à base EF; portanto, o ângulo sob DAF é igual ao ângulo sob EAF. Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF.

Berlinski (2018) pormenoriza que a proposição 47 é o famoso Teorema de Pitágoras, esse teorema recebeu das mãos de Euclides uma demonstração puramente geométrica. Essa fórmula permite a pessoa a associar as medidas de lados de um triângulo retângulo (o comprimento dos lados do triângulo a e b e sua hipotenusa). Então, a somar os quadrados dos catetos sempre será igual ao quadrado da hipotenusa. Aparentemente já difundido entre os babilônios e revelado novamente por Pitágoras no século V a.C., o Teorema de Pitágoras era bem conhecido na antiguidade. Seu estudo é muito importante para a matemática, auxiliando no desenvolvimento geométrico. A relação de medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo é através do cálculo: $a^2 + b^2 = h^2$. O conceito de distância através do teorema de Pitágoras é a extensão de algum aspecto geométrico, descrevendo também à distância h entre quaisquer dois pontos em um plano.

Euclides (2009) demonstra que nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado é estendido sob o ângulo reto é igual os quadrados sobre os lados contendo ângulo reto. Um exemplo, seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto, então o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC.

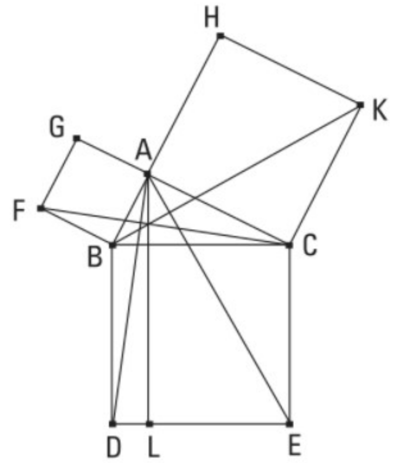
Berlinski (2018) indica que:

> A Proposição 47 é o primeiro teorema no qual um magistral Euclides impõe a seus leitores a distinção entre estratégia e tática. Sua tática envolve dois conjuntos de triângulos congruentes. Eles desempenham o papel de substitutos. Esses substitutos são congruentes e, por isso, iguais. Mas, como Euclides vai demonstrar, eles são também iguais a quadrados ou partes de quadrados. A estratégia dessa demonstração envolve assim um estratagema com objetos incidentais, seguido por um movimento das identidades essenciais do teorema, com o eixo do ataque curvando como uma foice. (BERLINSKY, p. 57-58).

Observa que o 47 problema de Euclides (47 proposição de Euclides) é representado pelo Teorema de Pitágoras, que a tática envolve os conjuntos de triângulos congruentes desempenhando função de substitutos. Enquanto a estratégia é envolvida pela estratagema. Então, Euclides de acordo com Berlinsky (2018) obteve o primeiro de seus substitutos baixando uma reta de A a L, uma paralela a BD ou CE, unindo depois as retas AD e FC. Os ângulos retos são formados por BAC e BAG. A linha reta é constituída por CA e AG. Além disso, BA é uma linha reta a AH e os ângulos DBC e FBA são iguais, pois, são ângulos retos. Então, foi acrescentado o ângulo ABC a DBC e FBA, que o ângulo DBA é igual ao ângulo FBC. Mas BD é igual a BC, que são lados do mesmo quadrado. Pela mesma razão FB é igual BA. Logo, os triângulos ABC e FBC são congruentes.

Euclides (2009, p. 119) esclarece que caso uma reta esteja caindo sobre duas retas,

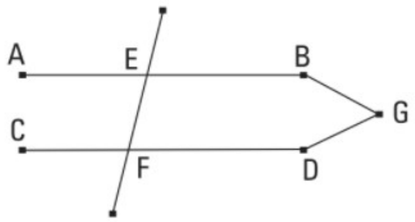
Figura 10: Proposiçao 47



Fonte: Euclides (2009, p. 134).

faça os ângulos alternos iguais entre si, às retas serão paralelas entre si. Essa é a solução da proposição 27.

Figura 11: Proposiçao 27



Fonte: Euclides (2009, p. 120).

A Proposição 27 conforme Berlinski (2018) declara que se utilizar uma linha reta EF traçando sobre duas linhas retas AB e CD formando os ângulos iguais AEF e EFD, então AB é paralela a CD (Figura 11). Então, ângulos são iguais e linhas são paralelas. Dessa forma, Euclides observa o espaço logicamente em que seus argumentos e ilustrações se unem totalmente.

Berlinsky (2018) esclarece que a demonstração de Euclides não pode ser considerada completa, pois, se fosse completa, não necessitaria pôr provas antes dela. A proposição 27 emprega a Proposição 16 e as noções 19 e 23. A proposição 16 comenta que em qualquer triângulo se um dos lados for estendido, seus ângulos exteriores precisam ser maiores que os ângulos interior e oposto. Então, os ângulos ACD é obviamente maior que os ângulos CBA ou BAC. A definição 23 diz respeito as linhas paralelas, que entre outras coisas, se duas retas não são paralelas, com certeza, elas devem se encontrar em um ponto.

Obviamente, a definição 19 oferece a explicação exata de quais figuras são triângulos, que "o maior lado de todo triângulo é subtendido pelo maior ângulo"(EUCLIDES, 2009, p. 112).

Em síntese, podemos concluir que a maior parte do conhecimento do geômetra foi criada através de um pequeno conjunto de axiomas simples. Logo, Euclides definiu o espaço como, simétrico, imutável e geométrico, contribuindo para a formação de diversos conhecimentos como geometria plana e espacial, aritmética, álgebra e Teoria das proporções. Para isso, ele utilizou outros matemáticos como Pitágoras, Tales, Platão e outros para sistematizar o conhecimento aperfeiçoando seu trabalho e preenchendo diversas lacunas.

3 GEOMETRIA DE HILBERT

A geometria, como a aritmética, requer para seu desenvolvimento lógico, princípios fundamentais chamados de axiomas da geometria. A escolha dos axiomas desde Euclides tem sido discutido e Hilbert com suas investigações matemáticas ampliou o estudo axiomático. O interesse por Hilbert é por sua onipresença em toda álgebra comutativa e geometria algébrica e as informações exprimíveis de maneira geométrica. É interessante ver sua biografia, seus problemas e axiomas como veremos na seção abaixo.

3.1 Hilbert

David Hilbert foi um matemático alemão que segundo Gray (2005) nasceu em 23 de janeiro de 1862, na cidade de Konigsberg, uma pequena cidade da Prússia Oriental(hoje Kaliningrado), conhecida por ser a cidade natal do filosófo Immanuel Kant. Esse foi ocasionalmente trabalhado por Hilbert em seu trabalho e algumas vezes foi profundamente kantiano.

Gray (2005) informa que Hilbert começou a cursar sua graduação na Universidade de Konigsberg (a universidade tinha uma grande tradição em matemática e física) e serviu em sua faculdade de 1886 a 1895. Embora a universidade fosse pequena, ela tinha uma grande tradição em matemática e física, começando com Carl Jacobi e o físico Fraz Neumann. Jacobi, um dos mais importantes matemáticos da primeira metade do século XIX, que trabalhou em vários tópicos da teoria dos números à mecânica teórica, havia apresentado o primeiro seminário de matemática em uma universidade alemã, a primeira tentativa de treinar matemáticos.

Riemann (1990 apud GRAY, 2005) relata que o matemático Heinrich Weber exerceu importante influência. Ele tinha interesses muito amplos. Em 1876, ele e Dedekind publicaram a edição póstuma dos artigos de Riemann, incluindo uma generosa seleção de material não publicado. Esta foi a maior fonte de informações para os muitos que vêm responder os desafios que Riemann deixou para as gerações futuras. Em 1882, Weber publicou um artigo importante com Richard Dedekind sobre álgebra e a geometria das curvas algébricas a partir de uma posição nova e abstrata.

Gray (2005) deixa claro que através de Weber, Hilbert teve pela primeira vez contato com a forte corrente da vida matemática alemã que remontava a Gauss. Ele seguiu os cursos de Weber sobre funções elípticas, teoria dos números e um seminário sobre teoria dos invariantes. O substituto de Weber, Lindemann, também encorajou Hilbert a estudar a teoria dos invariantes. Em seu momento de invariantes, que descobriremos mais tarde, seria o tema de seu primeiro grande sucesso como matemático. Hilbert também aproveitou o sistema universitário alemão, que permitia aos alunos estudar onde quisessem, bastando ir para Heilderberg para estudar por um tempo com Lazarus Fuchs. Exceto por isso, Hilbert permaneceu em suas terras. É notável, por exemplo, que ele não passou nenhum tempo na muito mais dinâmica Universidade de Berlim, sugerindo que Königsberg estava se afirmando.

Em 1895, Hilbert apresenta sua tese de doutorado, com o tema sobre a Teoria dos invariantes sugerida por Lindermann. Além disso, Hilbert conheceu D'Ocagne e foi imediatamente atraído, e eles também conheceram Henri Poincaré, que era algum ano mais velho que ele e já havia se estabelecido como um dos principais homens de sua geração na França. Mas embora pareça haver respeito mútuo entre às duas figuras que na época iam liderar suas respectivas noções matemáticas, e certa rivalidade do lado alemão, não havia muito afeto ou coincidência de interesses (GRAY, 2005).

Depois de fazer um estudo sistemático dos axiomas da geometria Euclidiana, Hilbert propôs um conjunto de 21 axiomas e analisou o significado deles.

Hilbert contribuiu a vários ramos da matemática, incluindo a teoria algébrica dos números, análise funcional, físicas matemáticas e os cálculos de variações. Ele também enumerou 23 problemas não solucionados de matemática que ele considerou merecedor de investigação adicional. Desde o tempo de Hilbert, foram resolvidos quase todos estes problemas.

Hilbert (2003) explica que a prova da compatibilidade dos axiomas da geometria pode ser efetuada por meio da construção de um corpo numérico adequado. Por isso, qualquer contradição nas deduções dos axiomas geométricos deveria, posteriormente, ser reconhecível na aritmética deste campo de números. A prova da compatibilidade da geometria dependeria da prova da compatibilidade dos axiomas da aritmética. Tal intento solicitava um método direto de prova, pois seus axiomas são, basicamente, as regras conhecidas do cálculo, juntamente com o axioma da continuidade. Hilbert (2003, p. 414) afirma estar convencido de "ser possível encontrar uma prova direta para a compatibilidade dos axiomas aritméticos, por meio de um estudo cuidadoso e de modificação adequada dos métodos conhecidos de raciocínios na teoria dos números irracionais."

Conforme Da Silva (2003), o programa de Hilbert foi um programa que objetivava construir uma teoria rigorosa capaz de descrever toda a Matemática. Em outras palavras, propunha "formalizar as teorias matemáticas (ou melhor, ainda, toda a Matemática), e demonstrar por meios finitários que essas teorias (ou melhor, ainda, toda a Matemática formalizada) eram consistentes".

3.2 Os elementos da geometria

O estudo de Hilbert é um sistema dedutivo com fórmulas finitas e que cada fórmula é um axioma.

Designa-se de acordo com Hilbert (2003) que:

> Imaginemos três sistemas diferentes de objetos: aos objetos do primeiro sistema chamamos pontos e representemo-los por $A, B, C, ...$; os objetos do segundo sistema chamem rectas e representemo-los por $a, b, c, ...$ aos objetos do terceiro sistema chamamos planos e representemo-los por α, β, γ , ... Os pontos chamando-se também os elementos da geometria linear, os pontos e rectas os elementos da geometria plana e os pontos, rectas e planos os elementos da geometria do espaço ou do espaço (HILBERT, 2003, p. 2).

Os elementos primordiais da geometria são: ponto, reta e plano. São noções primitivas para compreender melhor a geometria, e os pontos são representados por $A, B, C, ...$; e as retas representadas por $a, b, c, ...$; e os planos representados por α, β, γ.

Os axiomas são divididos em cinco grandes grupos: Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência, Axioma das Paralelas e Axiomas de Continuidade.

3.3 Axiomas de Incidência

Para Hilbert e Cohn-Vossen (1990) os axiomas de incidência lidam com pontos e linhas e suas interseções. Os pontos e linhas são objetos indefinidos. Simplesmente postulamos um conjunto, cujos elementos são chamados de pontos, com certos subconjuntos, que chamamos de linhas. Não dizemos quais são os pontos, nem quais subconjuntos formam linhas, mas exigimos que essas noções indefinidas obedeçam a certos axiomas.

O primeiro grupo é formado pelos axiomas de incidência de acordo com Hilbert (2003).

O axioma 1 do grupo: Para cada dois pontos A e B existe uma reta a que contém os dois pontos A e B. Escrevemos $AB = a$ ou $BA = a$. Em vez de "contém", também podemos empregar outras formas de expressão; por exemplo, podemos dizer "A repousa sobre a", "A é um ponto de a", "a passa por A e por B", "a une A a B", etc. Se A repousa sobre a e ao mesmo tempo em outra linha b, fazemos uso também da expressão: "As linhas a e b têm o ponto A em comum", etc,.

Figura 12: Axioma 1 de incidência.

Fonte: Autoria própria

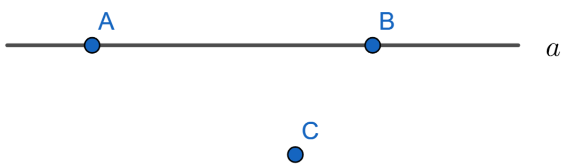
O axioma 2 do grupo de incidência: Para cada dois pontos, não existe mais do que uma reta que os contenha; consequentemente, dados os pontos A e B e as retas a e b, se A e B pertencem à a e a b, então $a = b$.

Figura 13: Axioma 2 de incidência.

Fonte: Autoria própria

O axioma 3 do grupo de incidência: Existem pelo menos dois pontos em uma reta. Existem pelo menos três pontos que não estão na mesma reta.

Figura 14: Axioma 3 de incidência.

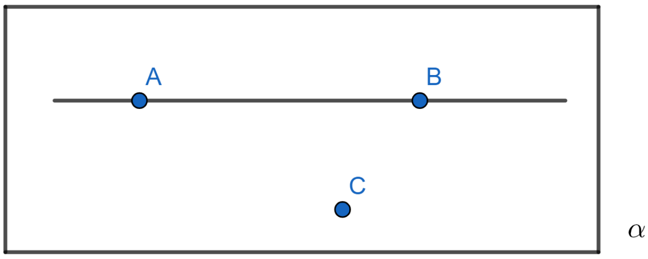


Fonte: Autoria própria

O axioma 4 do grupo de incidência: Para cada três pontos A, B, C não situados na mesma reta existe um plano α que contém todos eles. Para cada plano existe um ponto que fica sobre ele. Escrevemos $ABC = \alpha$. Empregamos também as expressões: "A, B, C estão em α"; "A, B, C são pontos de α", etc.

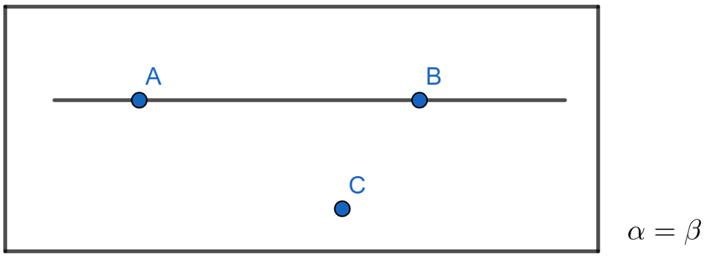
O axioma 5 do grupo de incidência: Para cada três pontos A, B, C que não estão na mesma reta, não existe mais de um plano que os contém todos.

Figura 15: Axioma 4 de incidência.



Fonte: Autoria própria

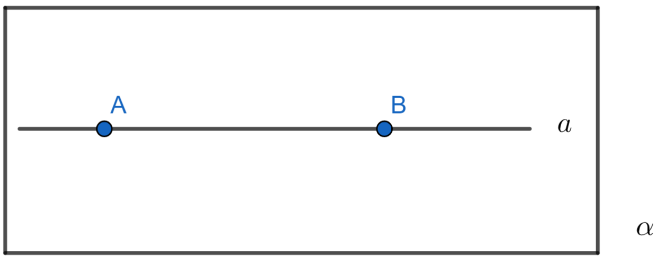
Figura 16: Axioma 5 de incidência.



Fonte: Autoria própria

O axioma 6 do grupo de incidência: Se dois pontos A, B de uma reta a estão em um plano α, então todos os pontos de a estão em α. Neste caso dizemos: "A reta a encontra-se no plano α", etc.

Figura 17: Axioma 6 de incidência.



Fonte: Autoria própria

O axioma 7 do grupo de incidência: Se dois planos α, β têm um ponto A em comum, então eles têm pelo menos um segundo ponto B em comum.

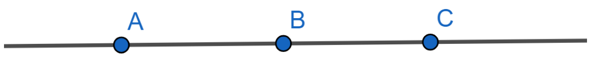
O axioma 8 do grupo de incidência: Existem pelo menos quatro pontos que não estão no mesmo plano.

3.4 Axiomas de Ordem

Os axiomas deste grupo segundo Hilbert (2003) são os pontos duma reta que dispõem com certas associações entre si, para cuja descrição servindo em particular, a palavra 'entre'.

Axioma 1 do grupo: Se um ponto B está entre os pontos A e C, então B também está entre C e A, e existe uma reta contendo os três pontos distintos A, B, C.

Figura 18: Axioma 1 de ordem.



Fonte: Autoria própria

Axioma 2 do grupo: Se A e C são dois pontos, então existe pelo menos um ponto B na linha AC tal que C fica entre A e B.

Figura 19: axioma 3 de ordem.

Fonte: Autoria própria

Axioma 3 do grupo: De quaisquer três pontos situados em uma reta, não há mais do que um entre os outros dois.

Axioma de Pascoal (axioma 4 do grupo de ordem): sejam A, B, C três pontos que não estão em linha reta e seja a uma reta situada no plano ABC e não passando por nenhum dos pontos A, B, C. Então, se a reta a passar através de um ponto do segmento AB, ele também passará por um ponto do segmento BC ou por um ponto do segmento AC.

3.5 Axiomas de Congruência

Os axiomas deste grupo conforme Hilbert (2003) define o significado de congruência. Os segmentos têm associações entre si, com uso das palavras congruentes ou iguais.

O axioma 1 do grupo: Se A, B são dois pontos em uma reta a, e se A' é um ponto na mesma ou em outra reta a', então, em um determinado lado da reta a' , podemos sempre encontrar um ponto B' de forma que o segmento AB seja congruente com o segmento $A'B'$. Indicamos essa relação escrevendo $AB \equiv A'B'$.

O axioma 2 do grupo: Se um segmento AB e um segmento $A'B'$ são congruentes com o segmento $A''B''$, então o segmento AB é congruente com o segmento $A'B'$, isto é, se dois segmentos são congruentes com um terceiro, então são congruentes entre si.

O axioma 3 do grupo: Sejam AB e BC dois segmentos de uma reta a que não têm pontos em comum além do ponto B, e, além disso, sejam $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos da mesma ou de outra reta a' tendo, da mesma forma, nenhum ponto diferente de B' em comum. Então, se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, temos $AC \equiv A'C'$ (HILBERT, 2003).

O axioma 4 do grupo: Seja um ângulo $\angle(h, k)$ dado no plano α e seja dada uma reta a' no plano α'. Suponha também que, no plano α', um lado definido da reta a' seja atribuído. Denote por h' um raio da reta a' que emana de um ponto O' dessa reta. Então, no plano α' existe um e apenas um raio k' tal que o ângulo $\angle(h, k)$, ou $\angle(k, h)$, é congruente com o ângulo $\angle(h', k')$ e ao mesmo tempo, todos os pontos internos do ângulo $\angle(h', k')$ estão sobre o lado dado de a'. Expressamos essa relação por meio da notação $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ (HILBERT, 2003).

O axioma 5 do grupo: Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$, se $AB \equiv A'\mathrm{B}'$, $AC \equiv \mathrm{A}'\mathrm{C}'$ e $\angle BAC \equiv \angle B'\mathrm{A}'\mathrm{C}'$, então $\angle ABC \equiv \angle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$. Por troca de símbolos, resulta, sob as hipóteses do axioma, que são sempre verificadas às duas congruências $\angle ABC \equiv \angle A'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ e $\angle ACB \equiv \angle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ (HILBERT, 2003).

Hilbert (2003) cita que os axiomas 1-3 só possuem informações sobre congruência de segmentos e são chamados de axiomas lineares do 3 grupo. O axioma 4 contém afirmações sob a congruência de ângulos. Já o axioma 5 define o elo entre os conceitos de congruência dos segmentos e de ângulos. Os axiomas 4 e 5 são chamados de axiomas planos do 3 grupo, por eles possuírem informações sobre os elementos da geometria plana.

3.6 Axiomas de paralelas

A definição de axioma de paralelas em conformidade ao grande matemático Hilbert (2003, p. 26) que "duas retas dizem-se paralelas quando estão num mesmo plano e não se intersectam."O axioma 4 do grupo é chamado de Axioma de Euclides. Sua explicação: seja a qualquer reta e A um ponto fora dela. Então, há no máximo uma reta no plano, determinada por a e A, que passa por A e não intercepta a.

3.7 Axiomas de Continuidade

O axioma 1 do grupo, conhecido como Axioma de Arquimedes. Sua definição: se AB e CD forem quaisquer segmentos, então existe na reta AB um número finito de pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ tais que os segmentos AA_1,A_1A$_2$,...,A_{n-1}A$_n$ são congruentes com o segmento CD e B está entre A e A_n de acordo com Hilbert (2003).

Axioma linear da completabilidade. Um sistema é constituindo pelos pontos de uma reta, com suas relações de ordem e congruência, que já não pode ser ampliado, que preservariam as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de ordem linear e congruência que segue dos Axiomas $I - III$ e de $V1$. Esse é o segundo axioma de continuidade conforme Hilbert (2003).

Portanto, Hilbert apresentou uma nova proposta para a fundação da matemática clássica por uma formalização de toda a matemática na forma axiomática.

4 REFORMULAÇÃO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

A geometria de Hilbert está fundamentada por um contraste entre a matemática moderna e a geometria antiga de Euclides. Assim, estudaremos as transformações elaboradas por Hilbert.

Partiremos da Axiomática de Hilbert para "Os elementos" de Euclides, comparando as suas diferenças. Além disso, o estudo traz diversas demonstrações euclidianas e dos axiomas de Hilbert, observando seus pontos semelhantes.

4.1 Críticas à geometria de Euclides

De acordo com Berlinski (2018) houve diversas críticas a geometria euclidiana, entre as quais destacamos duas a seguir.

Durante 2.000 anos, tentativas de provar a hipótese das paralelas ainda ocorreram de tempos em tempos de acordo com Berlinski (2018). O autor enfatiza que alguns matemáticos deram uma olhada no problema e, após algumas tentativas aleatórias, desistiram. Os longos e brilhantes matemáticos da Renascença Árabe estavam tão interessados na hipótese da similaridade quanto os gregos antes deles. Ibn AL Haytham no século décimo escreveu que hipótese pode exigir prova indireta. Euclides provou vários teoremas em Os elementos assumindo que eles estavam errados e procurando as contradições resultantes. Ibn AL Haytham fez a mesma coisa. Mas ele não encontrou nada: sua hipótese, para provar que o postulado das paralelas estava errada, manteve tudo igual, cristalino e sem perturbações.

Berlinski aponta (2018) que nos séculos 19 e 20, matemáticos com mentes espertas e apressadas forneceram-lhe assistência retrospectiva ao expressar as intenções de Euclides. Eles reformularam os axiomas de Euclides como declarações de existência e unicidade. 1a. Existem dois pontos diferentes em uma única linha reta. 2a. Para qualquer segmento de linha reta, existe uma única linha de extensão. 3a. Para qualquer ponto, existe um único círculo com raio fixo. Esses axiomas controlam como o universo euclidiano está estruturado. Eles são muito poderosos: eles fornecem uma definição implícita da própria forma. A forma euclidiana é qualquer forma que exista dos três primeiros axiomas de Euclides ou da aplicação repetida de seus três primeiros axiomas. A estrutura euclidiana tenta capturar o poder lógico da mente no movimento físico. O movimento é a seta de interferência.

4.2 A reformulação feita por Hilbert

A geometria de Euclides no "Os elementos" foi reformulada por David Hilbert a partir de suas reflexões críticas.

Conforme Berlinski (2018, p. 23), "Bertrand Russell e David Hilbert pensavam que Euclides teria se saído melhor se tivesse aceitado a Proposição 4 como um axioma em vez de reivindicá-la como um teorema". Além disso, Berlinski (2018) apresenta que as definições de Euclides foram criticadas por diversos Matemáticos dos séculos XIX e XX. Matemáticos como Moritz Pasch e David Hilbert criticaram Euclides, porque foram encontradas lacunas em seu trabalho, indagações como se axiomas devem, serem aceitos sem prova, assim, alguns termos permitem serem aceitos sem definição. Das Definições 9 a 22, Euclides é quase impecável, citando termos antigos para definir novos termos. Ele disse na Definição 19 que um triângulo é uma figura composta de três linhas retas. Um ponto, afirma Euclides na definição 1, não tem partes. Assim, é a primeira coisa que Euclides afirma e é a primeira definição que os críticos contestam.

Segundo Berlinski (2018, p. 41), Euclides apontou em sua definição 8 que "um ângulo plano é a inclinação de uma linha em relação a outra num plano onde encontram uma a outra e não estão numa linha reta". Em sua definição seguinte, Euclides parecia sugerir que um ângulo é, de acordo com sua definição prévia, o que um ângulo contém. Quando David Hilbert revisou a geometria de Euclides no início do século 20, ele considerou a definição de Euclides 8 e melhorou a definição com algumas modificações. Portanto, α torna-se um plano arbitrário detalhado por Hilbert, e h e k são dois semirraios diferentes em α, que são emitidos do ponto O de tal forma que fazem parte de duas retas diferentes. O sistema formado pelos dois semirraios h e k é denominado ângulo. Portanto, o ângulo é uma questão de duas linhas retas saindo suavemente de um ponto comum. No entanto, a definição de Hilbert deixa dúvidas sobre quando esses sistemas são iguais e diferentes. Tanto Euclides quanto Hilbert apelam para alguns princípios gerais segundo os quais ângulos de qualquer tamanho são considerados iguais ou desiguais.

Berlinski (2018) enfatiza que embora concordando com este ponto, Euclides e Hilbert parecem estar satisfeitos, mas para determinar se dois ângulos bem separados no espaço coincidem, Euclides e Hilbert devem assumir que um sistema é movido de forma a ser imposto sobre o outro. No entanto, se ele se mover, manterá seu próprio ângulo dessa maneira. Isso requer um compromisso com a homogeneidade do espaço, ou seja, as figuras euclidianas não mudam de forma quando se movem no espaço.

Berlinski (2018) escreve que:

> Hilbert se dedicou a uma reforma da geometria euclidiana por meio da expansão da lista original dos cinco axiomas de Euclides, transformando-os em vinte. Num comentário meio atrevido, Thom define o sistema de Hilbert como uma obra de "tediosa complexidade". Os detalhes são onerosos. Hilbert havia descoberto e corrigido vários lapsos lógicos em Euclides; ele era fastidioso. Hilbert aceita, como fez Euclides, pontos, linhas e planos como fundamentais, e os traz à existência explicitamente e por suposição (BERLINKI, 2018, p. 79).

Sem dúvida que uma das maiores contribuições para a matemática foi do oriundo matemático Euclides. Sua obra influenciou e influência até os de hoje, o ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, sua obra ao decorrer do tempo foi analisada por muitos matemáticos, destaca-se Hilbert, que ampliou os axiomas e corrigiu diversas falhas em Euclides.

Depois de estabelecer 20 axiomas, Hilbert deu um passo para trás e avaliou calmamente o que havia feito. O foco mudou e a sensação de clareza aumentou. A análise de Euclides visava o mundo da forma, mas Hilbert começou a pensar na própria análise. As nuances necessárias para chamar a atenção para essas questões urgentes não existiam no início do século XX. Os lógicos precisam de tempo para desenvolvê-los. Hilbert é muito cuidadoso, não cometeu erros em seu tratado, mas não acompanhou os tempos como cita Berlinski (2018).

Visa Berlinski (2018) sobre a teoria Euclidiana:

> Uma teoria, dizem agora os lógicos, consiste em um conjunto de axiomas e suas consequências lógicas. A geometria euclidiana é uma teoria, a primeira na história humana. Um modelo de uma teoria consiste em estruturas nas quais teorias são satisfeitas – seu mundo. A geometria euclidiana se satisfaz no plano euclidiano. O plano euclidiano é, por isso, um modelo para a geometria euclidiana. Essas ideias simples de teorias e seus modelos tornam possível perguntar quais modelos fazem teorias verdadeiras e se uma teoria pode ser expressa dentro do alambique de uma outra. Foi essa ideia de reafirmação ou reinterpretação que Hilbert avançou em seu tratado, o instrumento que desenvolveu (BERLINSKI, 2018, p. 79-80).

A contribuição da teoria de Euclides começa com duas definições fundamentais da geometria, a reta e de ponto. Além dos cinco axiomas ou postulados. Berlinski (2018, p.

82) esclarece que Euclides, "nos livros V, VII e X de 'Os elementos' utilizou um mundo totalmente geométrico, as figuras estáveis da aritmética". Então, empenhando, porém, ele não distingue claramente o que distingue. Assim, Hilbert justificou Euclides mais objetivo em seu livro *Crundlagen*.

Berlinski (2018) argumenta que:

> (...) Hilbert pacientemente mostra como cada um dos axiomas da geometria euclidiana pode ser interpretado dentro de um modelo puramente aritmético. Mas Hilbert, é claro, faz mais. O fato de que cada dois pontos determinam uma linha reta não é verdadeiro apenas no campo ordenado real, é demonstrável. Axiomas geométricos se tornaram teoremas aritméticos. Com essa manobra, a geometria euclidiana foi engolida pela aritmética, a ingestão dando origem ao que hoje é chamado de espaço vetorial euclidiano, novas estruturas, ubíquas em toda a matemática, suas linhas compactas e lisas apagando todas as evidências pelas quais foram criadas (HILBERT, 2018, p. 85).

Entende-se que na análise de Hilbert, não existe coordenação, contraparte, mapeamento e nem esquema de coordenação entre pontos e pares de números. Isso ocorre, pois a geometria de Hilbert foi eliminada os pontos euclidianos de antigamente.

Tabela 1: Comparação entre a geometria de Euclides e Hilbert

POSTULADOS DE EUCLIDES	**GEOMETRIA DE HILBERT**
1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade	1. Axiomas de incidência
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.	2. Axiomas de ordem
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raios arbitrários	3. Axiomas de continuidade
4. Todos os ângulos retos são iguais	4. Axiomas de congruência
5. Por um ponto exterior a uma reta passa mais de uma paralela	5. Por um ponto exterior a uma reta passa mais de uma paralela

Fonte: Hilbert (2003) e Berlinski (2018)

O livro de Hilbert de acordo com Berlinski (2018) apresenta a teoria geométrica baseada na teoria de Euclides, porém os axiomas de Hilbert são expressos com mais precisão. Há muito mais axiomas dos que os encontrados no Livro "Os elementos" de Euclides. Além disso, Euclides criou os axiomas geométricos contemplando num modelo geométrico enquanto Hilbert contemplou num modelo aritmético. Ele escolheu um objeto aritmético para seu estudo, incluindo um conjunto de números Ω. Esses são os números que começam com 1 e incluem todos os números que podem ser elaborados a partir de 1 por meio das operações de adição, subtração, multiplicação, e divisão e os números $\sqrt{(1+\ \Omega^2)}$. Então, esses formam os números reais, porém não gerando todos. Assim, Hilbert escolheu Ω, introduzindo alguns números reais, por uma questão de conveniência.

Da Silva (2003) esclarece que uma possibilidade de provar a consistência aritmética é explicar a teoria, ou seja, mostrar uma sequência mas, para isso, é necessário apelar novamente à intuição. Uma maneira direta de provar a consistência de um sistema de axioma formal é simplesmente mostrar que, no contexto do sistema, nenhuma demonstração formal terminará com uma contradição óbvia, ou seja, nenhuma contradição será o teorema do sistema.

Focalizando o problema 2 de Hilbert, Da Silva (2003) explica que a solução para o problema proposto por Hilbert só pode ser dada à própria aritmética no contexto de uma meta-teoria estritamente mais fraca do que a aritmética formal. Hilbert em particular, a chama de matemática finitária, e isso significa que esta prova limitada de consistência aritmética terá um papel fundamental na natureza da matemática e da epistemologia, porque fornecerá uma base limitada para essas teorias. Esse fundamento tem obviamente uma função epistemológica, pois, limita a verificação da realidade do conceito de infinito ao limitado leque de possibilidades humanas.

O ponto euclidiano conforme Berlinski (2018) se esvanece em favor dos pares de números, linha reta em favor de trincas de números. Hilbert é livre para fornecer uma interpretação dos axiomas de Euclides em aritmética. O primeiro axioma geométrico de Hilbert é quase o mesmo que Euclides: dois pontos diferentes, A e B, sempre determina totalmente uma linha reta a. Este método é assumido por forma geométrica, mas não é aritmética. Isso é ilustrativo. Hilbert ganhou forças, o que pode ilustrar o que significa um ponto numa linha reta sem nunca mencionar pontos ou linhas retas. Ele escreve, a equação "$ax + by + c = 0$"indica as condições de que o ponto (x, y) está na linha reta $(a : b : c)$.

Há uma diferença entre a geometria euclidiana e não euclidiana na natureza das linhas paralelas. Na geometria euclidiana, para o ponto e a linha dada, há exatamente uma única linha que passa pelos pontos dados no mesmo plano e nunca se cruza. A geometria esférica não tem linhas retas, que é o que chamamos de geometria não euclidiana. No entanto, segundo Eves (1992), muitos matemáticos do século 20 acreditam que a melhor maneira de descrever a geometria hoje é talvez como um ponto de vista, uma maneira especial de olhar para o assunto. Portanto, ao observar a forma, o tamanho e a relação espacial dos corpos geométricos, a inteligência humana pode extrair atributos gerais por meio de relações específicas. Este fato é básico, pois, desde então, o trabalho de regras geométricas tem contribuído para a sistematização do conhecimento geométrico. Trata-se de uma geometria de cunho científico, pois, existem várias etapas do método científico, como observação, formulação de conjecturas, investigação, confirmação de conjecturas e verificação final ou refutação de conjecturas.

4.3 Congruência de triângulos

Hilbert trocou os axiomas de Euclides, por congruência de triângulos como se ver na sua obra "Fundamentos de Geometria".

Ao compararmos duas figuras geométricas indica Hilbert (2003) que devemos procurar as semelhanças existentes entre elas. Essas podem ser iguais, podendo ser precedidas ou distintas completamente. Assim, as figuras geométricas são comparadas podendo ser figuras congruentes, figuras semelhantes e figuras distintas.

A congruência ou igualdade é introduzida na geometria por meio de axiomas de congruência, e não é óbvio que cada segmento é congruente consigo mesmo; mas esta proposição é derivada dos dois primeiros axiomas de congruência, se movermos o segmento de linha AB a qualquer semirreta para obter a congruência entre o segmento de linha e $A'B'$, e então se aplica o Axioma 3 à congruência $AB\equiv A'\mathrm{B}'$, $AB \equiv A'B'$ (HILBERT, 2003).

Para Hilbert (2003, p. 13) em um "triângulo com dois lados congruentes, os ângulos opostos a esses lados são congruentes, ou abreviadamente: num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais."

Hilbert (2003, p. 13) escreve que "um triângulo ABC diz-se congruente com um triângulo $A'B'C'$, se são verificadas todas as seguintes congruências:"

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ BC \equiv B'C',$$

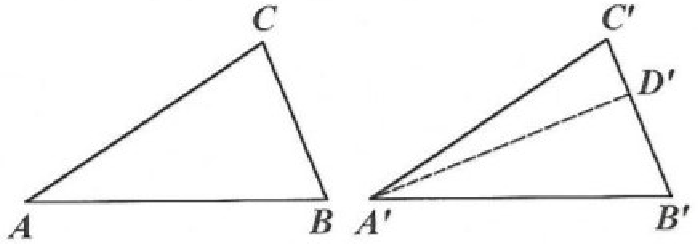
$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A}',\ \angle \mathrm{B} = \angle\ \mathrm{B}',\ \angle\ \mathrm{C} = \angle\ \mathrm{C}'.$$

Uma das consequências dos axiomas de congruências são os 3 teoremas da congruência de triângulos (HILBERT, 2003).

1.^{0} teorema de congruência para triângulos: O triângulo ABC e o triângulo $A'B'C$ são congruentes, desde que a seguinte congruência seja verificada como aborda Hilbert (2003):

$$AB \equiv \text{A}'\text{B}',\ AC \equiv \text{A}'\text{C}',\ \angle A \equiv \angle A'.$$

Figura 20: 1.^{0} teorema de congruência para triângulos



Fonte: Hilbert (2003, p. 14).

Demonstração: Pelo axioma 5 do grupo de congruência são verificadas as congruências:

$$\angle\text{B} \equiv \angle B', \angle C \equiv \angle C'.$$

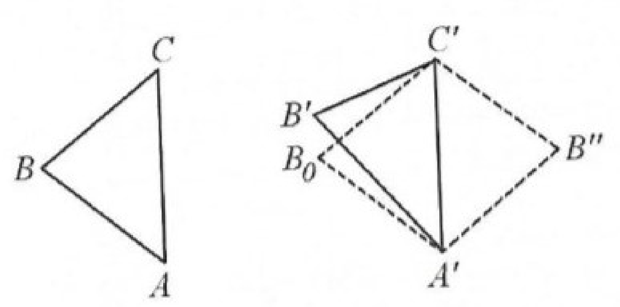
Precisamos apenas verificar a validade da congruência $BC = B'C'$. Supondo o contrário, que BC não seja congruente com $B'D'$, e determinando sobre $B'C'$ o ponto D' tal que $BC \equiv B'C'$ então afirma o axioma 3 do grupo de congruência, que se aplica ao triângulo ABC e $A'B'D'$, ou seja, $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$. Poderia $\angle BAC$ ser congruente com $\angle B'A'D'$ e $\angle B'A'C'$. Isso é impossível, porque cada ângulo só pode ser, duma única maneira, deslocado num plano, a partir duma semirreta dada, para um dado lado. Portanto, provou que o triângulo ABC é congruente com o triângulo $A'B'C'$.

2.^{0} teorema de congruência para triângulos. Para que um triângulo ABC seja congruente com o triângulo $A'B'C'$, é necessário que se verifiquem as seguintes congruências segundo Hilbert (2003).

$$AB \equiv A'B', A \equiv A', < B \equiv B'.$$

3.^{0} teorema de congruência de triângulos. Se em dois triângulos ABC e $A'B'C'$, os lados correspondentes são respectivamente, congruentes, então os triângulos são congruentes como cita Hilbert (2003).

Figura 21: 3.^{0} teorema de congruência para triângulos



Fonte: Hilbert (2003, p. 18).

Demonstração: Se movemos o ângulo $\angle BAC$ para A' e para um e outro lado da semi-reta $A'C'$. Fixando o ponto B_0, no lado do ângulo que está com B' sendo do mesmo lado de $A'C'$ tal que $A'B_0 \equiv AB$ e no outro lado livre designamos B'' de maneira que $A'B'' \equiv AB$. Pelo 1.^{0} teorema de congruência para triângulos temos que $BC \equiv B_0\mathrm{C}'$ e também $BC \equiv B\text{"}\mathrm{C}'$. Essas congruências, justamente com as da hipótese, dão conforme o axioma 2 do grupo de congruência, as congruências

$$A'B'' \equiv \mathrm{A'B_0},\ B''C' \equiv \mathrm{B_0}C'$$

e equivalentemente,

$$A'B'' \equiv \mathrm{A'}B',\ B''C' \equiv \mathrm{B'C'}.$$

Sabe-se que pelo axioma 4 do grupo de congruência que cada ângulo pode ser deslocado num plano, de uma única maneira, a partir duma semirreta dada, e para um dado lado desta, assim a semi-reta $A'B'$, ou seja, o ângulo congruente com $\angle BAC$ que parte de $A'C'$ para o citado lado, é o ângulo $\angle B'A'C'$. Da congruência $\angle BAC \equiv B'A'C'$ e da congruência de segmentos pressuposta e sabendo do seguinte teorema: se um ângulo $\angle ABC$ é congruente com um outro ângulo $\angle A'B'C'$, logo o ângulo adjacente suplementar $\angle CBD$ é congruente com o ângulo adjacente suplementar $\angle C'B'D'$ do outro. Daí resulta a tese (HILBERT, 2003).

A respeito dos axiomas, Barbosa (1995) ressalta que as propriedades de noções de distâncias com destaque a desigualdade triangular. Esta desigualdade ocorre como consequência dos 4 primeiros grupos de axiomas. Para quaisquer três pontos nos planos A, B e C, temos do plano $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade acontece se e somente se C pertence ao intervalo AB.

Euclides contribuiu para o conhecimento matemático a partir das duas definições essenciais, a de reta e a de ponto. Dessa forma, realizou-se uma sistematização geométrica por meio de seus cinco axiomas ou postulados. Logo, com os cinco axiomas seria impossível construir a geometria e acabou empregando outros axiomas e postulados nas suas demonstrações geométricas. Por isso, a axiomatização de David Hilbert foi uma elaboração completa do conjunto axiomático da geometria euclidiana.

CONCLUSÃO

A geometria Euclidiana foi criada por Euclides e posteriormente reelaborada pelo alemão David Hilbert, que passou a ser essencial para o conhecimento geométrico moderno. Euclides até os dias atuais é considerado o maior geômetra da história, que sua obra "Os elementos" segue ao tempo, não perdendo seu valor para o conhecimento. É importante lembrar que a geometria de Euclides serviu de base de estruturação para outros novos conhecimentos.

A representação geométrica de "Os elementos" de Euclides foi objeto de diversos matemáticos e geômetras ao longo do tempo como Descartes, Hilbert e muitos outros. Foi a partir do trabalho de Euclides que a geometria começou a se tornar popular e mais acessível para todos. Apesar dos erros da obra, é considerada a obra mais bem-sucedida dos livros didáticos de matemática. Apresentamos os cinco grupos de axiomas que foram reformulados da geometria Euclidiana através de Hilbert. Dessa forma, a reformulação deu um aprofundamento completo na geometria, por meio da construção axiomática do conjunto dos números naturais. Os axiomas reformulados por Hilbert são mais explícitos e mais extensos do que de Euclides.

Comparamos a geometria de Euclides e Hilbert e discutimos mudanças na abordagem e história. Portanto, a ideia principal deste trabalho foi à mudança do método geométrico de Euclides, a troca dos axiomas de Euclides pela congruência dos triângulos, essa mudança foi criada por David Hilbert em seu livro "Fundamentos da Geometria". O estudo geométrico é importante para formação do estudante, que através dos conceitos que o aluno desenvolve o pensamento geométrico possibilitando representar, descrever e compreender, de maneira precisa e ordenada, o espaço que vivem. A limitação de obras relacionadas ao tema desse estudo causou um obstáculo para concluir o embasamento bibliográfico, porém, com muita dedicação e esforços buscamos todas as referências necessárias como livros e teses de doutorado. Esses pesquisadores foram fundamentais para pesquisa, que contribuiu para enriquecer os nossos conhecimentos sobre a geometria de Euclides e de Hilbert. Entretanto, estamos conscientes que muito poderia acrescentar, e que sua estrutura científica pode se modificar a fazer um reestudo ou reestruturar o trabalho dissertativo. Este estudo destina-se ao estudo matemático de geometria de Euclides e de Hilbert, que legitimamente sirva-se para alunos manuseá-los para estudos científicos. A escolha do tema foi por se tratar de um assunto que é estudado desde as séries iniciais do Ensino Básico. Além do mais, acredita-se ter apresentado conhecimentos relevantes para a classe acadêmica.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Plácido F. A. **De Euclides a Poincaré.** Ceará: Universidade Federal do Ceará (UFC), 2007.

AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira de. **Geometria euclidiana espacial.** 3. ed. Fortaleza: EDUECE, 2015.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana.** Sociedade Brasileira de Matemáticaca Coleção do professor, Fortaleza, 1995.

BERLINSKI, David. **Os elementos de Euclides:** uma história da geometria e do poder. 1. ed. Editora Zahar, 2018.

BORGES FILHO, Francisco. **O desenho e o canteiro no Renascimento Medieval (séculos XII e XIII):** indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores. Tese de Doutorado. São Paulo, 2005. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses /disponiveis/16/16131/tde-13102005-115856/pt-br.php>. Acessado em 22/09/2021.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino médio. Brasília: MEC, 1999.

DA SILVA, J. J. **O segundo problema de Hilbert.** Rev Bras Hist Matem, 3(5), p. 29-37, 2003.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. - São Paulo: Unicamp, 2011.

EVES, Howard. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FAINGUELERNT, E.K. O **Ensino de Geometria no 1^o e 2^o graus.** A educacão Matematica em Revista. SBEM, n.4, p. 45. Blumenau, 1995.

GERBASI, Ramon Valderrama. **As maravilhosas utilidades da Geometria da pré-história á era espacial.** Curitiba: PUCPRESS, 2019.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedictio. **A conquista da matemática,** 8^0 ano. São Paulo: FTD, 2009.

GRAY, Jeremy J. **El reto de Hilbert:** los 23 problemas que desafiaron a la matemática. Tradudicion Castelliana de Javer Garcia Sanz. Barcelona: Crítica, 2005.

Hilbert, David. **Fundamentos da Geometria.** 1. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, Stephan. **Geometry and the Imagination.** 2 ed. New York: Chelsea, 1990.

LAUNAY, Mickae. **A fascinante história da matemática: da pré-história aos dias de hoje.** Rio de Janeiro: Betrand Brasil, 2019.

LUCAS, Helen Rocio Ramires. **El plateamento crítico de la geometria euclidiana.** Dissertação de mestrado. Guatemala, 2008. Disponível em <http://biblioteca.usac. edu.gt/tesis/07/071912. pdf >. Acessado em 22/09/2021.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono da geometria no Brasil:** causas e consequências. Zetetiké, 1993.

SILVA, Maria Célia L. da; VALENTE, Wagner R. **A Geometria nos primeiros anos escolares:** História e perspectivas atuais. Rio de Janeiro: Papirus, 2014.

SOUZA, Suely Cristina Silva. **História da Matemática no Brasil.** Curitiba: Appris, 2016.