UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WALMIR PIRES DOS SANTOS NETO

PRÁTICAS DE AGRIMENSURA COMO ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE
2023

WALMIR PIRES DOS SANTOS NETO

PRÁTICAS DE AGRIMENSURA COMO ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho

JUAZEIRO DO NORTE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S237p Santos Neto, Walmir Pires dos.
Práticas da agrimensura como alternativa para o ensino de geometria no ensino médio/ Walmir Pires dos Santos Neto.– 2023.
73 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p. 57-60).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho.

1. Agrimensura. 2. Geometria. 3. Sequência didática. I. Título.

CDD 510

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

WALMIR PIRES DOS SANTOS NETO

PRÁTICAS DE AGRIMENSURA COMO ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 30 de agosto de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br VICENTE HELANO FEITOSA BATISTA SOBRINHO
Data: 16/10/2023 17:28:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. D.Sc. Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho
UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br VALDINES LEITE DE SOUSA JUNIOR
Data: 17/10/2023 11:39:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. D.Sc Valdinês Leite de Sousa Junior
UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br JUNIO MOREIRA DE ALENCAR
Data: 16/10/2023 23:19:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. D.Sc. Júnio Moreira de Alencar
IFCE

Se eu disser que não sentirei saudades do PROFMAT é porque não tenho coração, mas se eu disser que faria tudo de novo, é porque não tenho juízo.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado muito mais que o dom da vida. Ele me deu a certeza de uma vida vitoriosa, cheia de graça e paz, mesmo diante de tantos desafios e dificuldade que se levantam perante nós ao longo de nossa caminhada.

A minha mãe, Rosimar Pereira da Motta e a meus tios, Rosely e Monte pelo amor, cuidado, incentivo e apoio incondicional. Se hoje sou esse homem honesto e exemplar, é graças a criação que tive de vocês.

A minha maravilhosa esposa Samara Delmondes, minha filha primogênita, Anna Lívia Pires e ao mais novo integrante desta abençoada família, Samir Pires que tiveram tanta paciência comigo, me apoiando, incentivando e brigando comigo para que eu nunca parasse e nem deixasse de acreditar que seria possível concluir essa etapa em minha história, mesmo diante das inúmeras vezes que vieram as vontades de desistir.

Aos meus amigos do curso que levarei no coração por toda a vida. A vocês, obrigado pelos melhores conselhos, apoio, incentivo e encorajamento, pois sem os quais, acredito que seria impossível concluir o PROFMAT.

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Vicente Helano por ter feito a loucura em aceitar me orientar neste trabalho de conclusão de curso. Acredito que se não fosse a sua dedicação e comprometimento com o meu êxito, este aluno teria fica pelo caminho. Professor, o senhor é o cara! Que Deus abençoe cada vez mais o senhor e sua família.

Ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), agradeço pelo excelente nível de ensino que mudou não apenas a minha forma de ver e encarar a Matemática, mas também mudará a vida de todos os alunos pelos quais eu passar.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pelo fundamental apoio financeiro fornecido através da bolsa de estudo. Essa bolsa foi de suma importância para custear as despesas ao longo deste programa.

À Universidade Federal do Cariri (UFCA), pelo excelente time de professores responsáveis em nos conduzir neste desafiador programa de mestrado. Todos vocês que terão sempre um lugar especial reservado em meu coração.

RESUMO

Neste trabalho, iremos abordar o ensino de dois eixos fundamentais no currículo do ensino médio de Pernambuco, (i) Geometria e (ii) Grandezas e Medidas, e suas diversas habilidades, a partir de uma proposta de atividades práticas contextualizadas sobre o cálculo de áreas e distâncias, medidas com unidades convencionais e não convencionais, elaboradas a partir do olhar da Agrimensura e das realidades regionais e culturais vivenciadas por alunos do Sertão Pernambucano. Esta proposta se mostra como alternativa para motivar os alunos e fazer com que o processo de ensino-aprendizagem se torne mais significativo. Assim, para o cumprimento desse objetivo será apresentada uma sequência didática estruturada em quatro atividades que, de forma progressiva, auxiliará professores no desenvolvimento e consolidação dos eixos aqui analisados. Com isso, esperamos contribuir tanto para os estudantes, fazendo com que eles possam melhorar o desempenho em problemas de geometria, quanto aos professores, trazendo um material que possa enriquecer suas práticas pedagógicas.

Palavras-chave: Agrimensura. Geometria. Sequência Didática.

ABSTRACT

In this work, we will address two fundamental axes in the high school curriculum of Pernambuco, Brazil: (i) Geometry and (ii) Magnitudes and Measurements, and their various skills, through a proposal of contextualized practical activities on computing areas and distances using conventional and unconventional units, exploring its relation with the field of Surveying and the local culture common to the Pernambuco backlands. This proposal serves as an alternative to motivate students and make the teaching-learning process more meaningful. To achieve this goal, we will present a didactic sequence structured into four activities that progressively assist teachers in the development and consolidation of the axes here analyzed. With this, we hope to contribute both to the students, enabling them to improve their performance in geometry problems, and to the teachers, providing them with supplementary material that can enrich their pedagogical practices.

Keywords: Surveying. Geometry. Didactic Sequences.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos vinte anos, o Estado de Pernambuco tem buscado cada vez mais melhorar a qualidade do ensino ofertado aos seus alunos, uma vez que a educação é vista como o pilar fundamental para o desenvolvimento social e econômico da população. Para tanto, o governo estadual tem implementado uma série de políticas e programas com o objetivo de elevar a qualidade da educação e proporcionar oportunidades educacionais mais igualitárias. Uma das principais iniciativas adotadas pelo Estado de Pernambuco é o programa Pacto pela Educação, lançado em 2007, que de acordo com a Secretaria de Planejamento, Gestão e Desenvolvimento Regional de Pernambuco [1] visa promover uma educação de qualidade, com foco na melhoria dos resultados de aprendizagem e na redução das desigualdades educacionais. Tais ações têm superado diversas barreiras educacionais e também propiciado um ambiente favorável ao processo de ensino-aprendizagem, impactando positivamente no desempenho de estudantes da rede estadual. No entanto, ainda assim há muitos desafios a serem superados, especialmente no que diz respeito à matemática.

É fato que a matemática desempenha um papel fundamental na formação dos alunos da rede estadual de Pernambuco, assim como em qualquer sistema educacional. Uma vez que se trata de uma disciplina que desenvolve habilidades cognitivas, raciocínio lógico, capacidade de resolver problemas e pensamento crítico, que são essenciais para o sucesso acadêmico e profissional dos estudantes. No entanto, muitas vezes a matemática que é apresentada em sala de aula acaba destoando da realidade vivenciada pelo estudante.

Um ensino de matemática baseado em apenas reprodução de contas faz com que o aluno tenha uma visão distorcida de que essa disciplina se resume em fazer com que o estudante seja capaz apenas de memorizar uma série de fórmulas e relações, ao invés de uma disciplina que os ajude a vencer desafios do dia a dia. Assim, considerada por muitos como a disciplina de maior dificuldade, a matemática acumula diversos obstáculos de aprendizado devido a abordagens inapropriada em seu ensino. Ao longo dos anos, isso ocasiona uma queda no interesse dos alunos durante sua vida escolar.

Grandes são os desafios enfrentados pelos professores de Matemática no ensino médio e segundo Masola e Allevato [2] demonstrar aos alunos a necessidade e relevância do estudo dessa disciplina é uma dessas dificuldades que os professores precisam enfrentar. De fato, é muito recorrente vermos os alunos questionando o porquê de se estudar Matemática ou qual a importância dos conteúdos que são apresentados em suas vidas e tais questionamentos estão diretamente relacionados à forma como o professor aborda os conteúdos matemáticos em sala de aula. Muitas vezes os docentes se preocupam em transmitir o maior número possível de conceitos no menor período de tempo e, para isso, boa parte dos conteúdos são apresentados exclusivamente por meio de fórmulas, forçando os alunos a memorizá-las para obter boas notas nas avaliações que são aplicadas ao longo do ano letivo.

De acordo com Pereira [3], a Matemática ensinada nas salas de aula pouco serve para os alunos, uma vez que se trata de uma Matemática desprovida de contexto histórico e social, distante da experiência humana, reforçando apenas a memorização de resultados. Segundo o autor, a abordagem metodológica acaba gerando mitos e falsas concepções, como a crença de que apenas pessoas inteligentes podem aprender Matemática e as consequências provocadas por isso são as altas taxas de reprovação e transformação dessa disciplina em um grande filtro social que faz com que ela seja repudiada por muitos.

Segundo Borba e Costa [4], a presença e importância da Matemática na escola é consequência de sua presença na sociedade e, portanto, as necessidades matemáticas que surgem na escola deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade como um todo, tornando os usuários, dessa área de conhecimento habilitados para tratar com a mesma em todos os momentos em que tais conhecimentos fossem solicitados. Desse modo, durante a jornada no Ensino Básico o estudante precisaria lidar com problemas reais que façam sentido para ele e que o possibilite dominar diversas habilidades e competências matemáticas para resolver problemas claros, concretos e objetivos em sua vida cotidiana. Para isso, basta que seja despertado nos alunos essa confiança de que é possível superar as dificuldades da aprendizagem da matemática, bem como, estimular o interesse dos alunos pela disciplina. E para isso a contextualização é uma ótima estratégia para instigar o interesse do aluno e levá-lo a uma aprendizagem significativa.

Mostrar aos alunos como a matemática está presente em atividades do cotidiano proporciona oportunidades de aplicar os seus conhecimentos matemáticos em situações práticas e desafiadoras. Por isso, atividades práticas (como por exemplo, atividades de campo) de resolução de problemas podem ajudar os alunos a construir conexões significativas entre os diversos conceitos matemáticos.

Neste contexto, como afirma Brito [5], o ensino da Matemática em sala de aula é fortemente impactado através dos saberes que são produzidos pela sociedade e cultura em que o estudante está inserido. Assim, trazer uma proposta de ensino que reporte aspectos da história local e familiar dos alunos trazendo questionamentos sobre como parentes mais antigos e que não tiveram acesso ao conhecimento acadêmico resolviam problemas de matemática que os cercavam. Esse tipo de reflexão pode proporcionar um interesse e participação mais ativa na construção dos saberes, uma vez que aguçam a curiosidade dos alunos, e leva-los a perceber a Matemática como ferramenta facilitadora e solucionadora de problemas presentes em suas suas vidas.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem prática para o ensino das habilidades que estão presentes em dois dos cinco eixos fundamentais no currículo de Pernambuco: (i) Geometria e (ii) Grandezas e Medidas. Trata-se de uma proposta baseada na contextualização do ensino de matemática visando um processo de ensino e aprendizagem atrativo para alunos e professores. Essa proposta pode ser de particular interesse para escolas que enfrentam resultados negativos no aprendizado da Matemática e como será visto mais adiante, de acordo com resultados obtidos através do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), grande parte dos alunos tem apresentando baixos índices de aprendizagem nesse eixos temáticos.

Os resultados que analisaremos serão as notas obtidas pelos alunos da escola Escola Técnica Estadual (ETE) Professor Urbano Gomes de Sá, localizada no município de Salgueiro-PE. A análise teve como foco os dois eixos definidos no objetivo dessa pesquisa e partiu-se do entendimento que para que o aluno tenha um bom domínio em Geometria e Grandezas e Medidas é necessário que ele tenha o domínio de várias competências fundamentais e para isso, este trabalho prepõe em seus capítulos finais uma sequência didática que segundo Cândido [6] tem como objetivo viabilizar a inserção do cálculo de áreas e distâncias de modo prático no ensino médio e assim poder contribuir significativamente na vida acadêmica dos discentes fazendo com que eles possam dominar as habilidades dentro desses eixos e assim melhorar os índices de aprendizagem dos estudantes.

1.1 A avaliação da educação em Pernambuco

A seguir, será apresentado um breve estudo do Sistema de Avaliação da Educação de Pernambuco (SAEPE), apresentando suas principais características e implicações levantadas por um estudo mais detalhado dos resultados obtidos. serão também apresentados os resultados obtidos pala ETE Professor Urbano Gomes de Sá, resultados esses que tem motivado os professores de matemática da referida escola a buscarem alternativas para melhorar o processo de ensino-aprendizagem ofertado ao corpo discente.

1.1.1 Sobre o SAEPE

Anualmente, no estado de Pernambuco é realizado, através da Secretaria de Educação e Esportes (SEE), o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), que tem como objetivo avaliar a qualidade da educação básica no estado. O SAEPE é uma importante ferramenta para fornecer informações sobre o desempenho dos estudantes, identificando pontos fortes e fracos do sistema educacional do estado e, através de seus resultados, embasar políticas públicas que visem melhorar a qualidade da educação.

Segundo Silveira [7], o SAEPE teve seu surgimento nos anos 2000 quando foi realizada sua primeira edição seguindo os moldes do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). De acordo com o mesmo, o SAEPE abrangeu toda a rede estadual, compreendendo 68 municípios, fazendo assim que esse instrumento avaliativo passasse a fornecer um raio X dos estudantes e das escolas localizadas da rede pública de Pernambuco. De acordo com a SEE, em 2005 houve uma nova aplicação do SAEPE, porém os resultados obtidos só conseguiram ser estruturados, organizados e divulgados em 2007. Posteriormente, a partir de 2008, o SAEPE passou a ser aplicado anualmente.

De acordo com Gonçalves [8] o SAEPE ocorre no fim do processo estudantil e possui uma função voltada para classificar os educandos de acordo com níveis de aproveitamento em todas as atividades que foram realizadas em um determinado período letivo. Ainda dentro desse mesmo contexto, Pereira [9] afirma que nesse tipo de avaliação as notas obtidas pelos alunos devem servir para identificar as dificuldades dos estudantes, possibilitando assim ajudá-los a descobrir novos métodos ou meios que lhes permitam completar lacunas no processo de aprendizagem.

Os resultados do SAEPE são divulgados tanto para as escolas de forma individual como para a sociedade em geral, permitindo uma ampla análise e acompanhamento da qualidade da educação em Pernambuco. As escolas recebem os relatórios individuais de desempenho dos seus alunos, o que possibilita às equipes pedagógicas e aos professores traçarem estratégias de melhoria da qualidade do ensino. Após a análise dos resultados, muitos professores aproveitam para rever o modo de lecionar determinados conteúdos e direcionar melhor suas ações e práticas pedagógicas para avaliar os estudantes.

Nesse contexto, tanto as análises feitas pelos professores, quanto pelos demais profissionais envolvidos na educação são de suma importância para promover o avanço na qualidade de ensino das escolas pernambucanas. Elas são decisivas para a elaboração de políticas educacionais, como a implementação de programas de reforço escolar, capacitação de professores e investimentos em infraestrutura.

Segundo Silveira [7], o SAEPE usa como base uma matriz de referência que é composta por descritores que correspondem a habilidades que são consideradas fundamentais em cada etapa do ensino e no desenvolvimento cognitivo dos estudantes ao longo da carreira acadêmica do ensino básico. A matriz de referência estabelece os fundamentos teóricos e o grau de dificuldade que os alunos serão avaliados. Ainda de acordo com Silveira [7], os descritores associam o conteúdo curricular a operações cognitivas que devem ser desempenhadas durante a aplicação de uma avaliação, indicando assim os conhecimentos que precisarão ser desenvolvidos e assim avaliados em cada etapa do ensino.

É importante destacar que as competências e habilidades são conceitos que se complementam durante o processo de ensino-aprendizagem e a utilização de tais conhecimentos têm sido bastante significativo na educação. De acordo com a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) [10], competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos). Já as habilidades, sejam elas práticas, cognitivas ou socioemocionais são atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Desse modo, quando um aluno está resolvendo, por exemplo, um problema de geometria, ele precisa usar além dos conhecimentos ou fórmulas vistos em sala, a capacidade de mobilizar logicamente os conhecimentos e fórmulas para obter um resultado e fornecer uma resposta coerente ao desafio proposto. Esse conjunto de relacionamentos lógicos, conexões feitas com saberes prévios e desenvolvidas durante um processo de resolução de um problema estão ligadas às habilidades.

> Habilidades estão associadas ao saber fazer: ação física ou mental que indica capacidade adquirida. São qualidades que o estudante tem para realizar alguma atividade, ou seja, são aquelas características que podem ajudá-lo a desenvolver competências. Ao se consolidar determinadas habilidades, é possível realizar as tarefas correspondentes, que podem ser medidas objetivamente nos testes padronizados. No contexto escolar, apresentar um trabalho para os colegas, ler e interpretar um texto e realizar operações matemáticas são exemplos de habilidades que os alunos desenvolvem ao longo da evolução escolar. Na Matriz de Referência as habilidades recebem o nome de descritores, especificam as operações mentais e os saberes que os estudantes devem desenvolver nos anos avaliados. Portanto, as habilidades compõem as competências e não podem ser identificadas como elas. (SILVEIRA [7]).

Abaixo, estão listados os descritores que são encontradas na Matriz de Referência do 3º ano do ensino médio dentro do eixo de Geometria e Grandezas e Medidas no currículo de Pernambuco que é de interesse para o presente trabalho.

D1 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D2 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D6 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

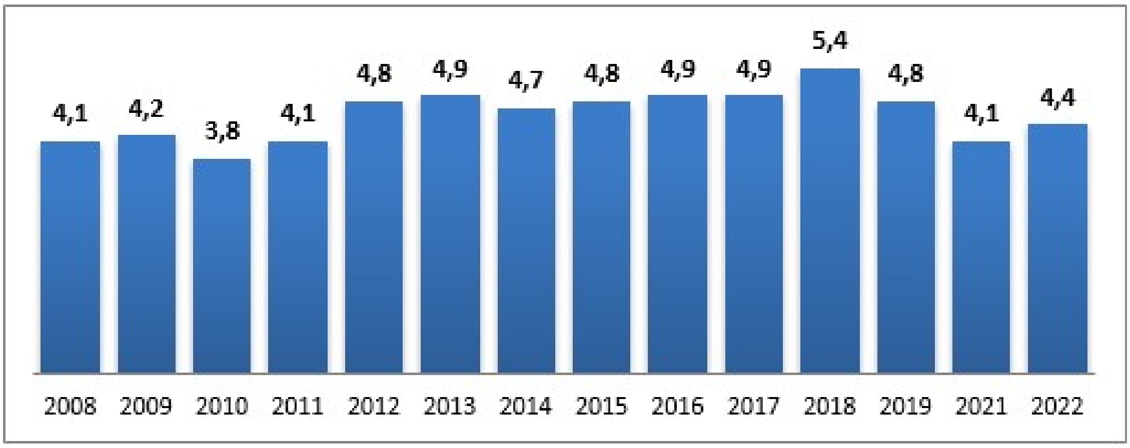
D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

1.1.2 O caso da ETE Professor Urbano Gomes de Sá

Na seção anterior foi apresentado de forma concisa a estrutura que pauta o SAEPE, bem como a importância acadêmica e social proveniente da análise de seus resultados. Agora será apresentada uma breve discussão sobre o desempenho da ETE Professor Urbano Gomes de Sá no SAEPE desde 2008, ano da primeira aplicação maciça dessa avaliação no estado de Pernambuco, conforme Figura 1.1.

Figura 1.1: Série Histórica de notas em matemática no SAEPE da ETE Prof. Urbano Gomes de Sá.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Como pode ser observado na Figura 1.1, os resultados do SAEPE obtidos pela escola ETE Professor Urbano Gomes de Sá demonstram uma leve oscilação entre os anos de 2008 a 2011. A partir de 2012, o desempenho dos estudantes teve um acréscimo razoável, mantendo-se praticamente constante até 2017. Já em 2018, pôde-se observar a maior pontuação atingida pela escola até então, porém no ano seguinte, o índice retornou praticamente para o mesmo patamar do período de 2012 à 2017. Em 2021, como reflexo dos efeitos da pandemia do Covid-19, a nota do SAEPE regrediu ao nível que foi visto em 2008. Por fim, em 2022, observa-se uma melhora no resultado, saltando de 4,1 para 4,4. Diante do exposto, tanto o período de oscilação, quanto o período em que os resultados se mantiveram praticamente constantes. Isso pode ser um indicativo de que as metodologias aplicadas pelos professores de matemática precisam ser analisadas afim de se proporcionar uma base sólida que sustente um crescimento constante no processo de ensino aprendizagem e consequentemente, nas notas de matemática no SAEPE.

Assim, este trabalho busca melhorar o desempenho dos alunos nos descritores que compõe o campo temático da Geometria e Grandezas e Medidas por intermédio de sequências didáticas baseadas em situações-problemas formuladas com o auxílio da Agrimensura.

Acredita-se que as atividades práticas são ferramentas importantes para chamar a atenção dos alunos durante as aulas e, nesse contexto, a Agrimensura se mostra uma área extraordinária, visto que sua teoria é facilmente conectada ao cotidiano dos estudantes, possibilitando assim uma maior interação com o objeto de estudo. Espera-se que tal interação tenha um impacto positivo nos descritores relacionados anteriormente, alavancando assim os resultados futuros da ETE Professor Urbano Gomes de Sá no SAEPE.

Capítulo 2

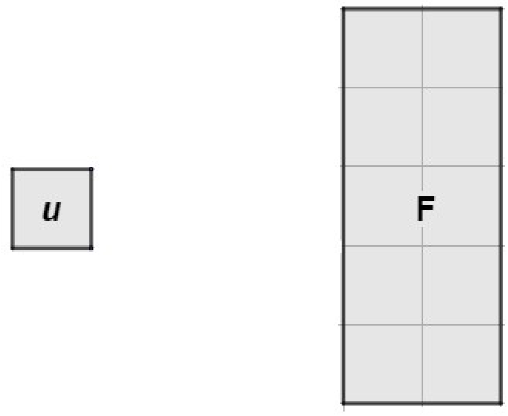
Áreas e unidades de medida

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos e resultados matemáticos fundamentais para a compreensão deste trabalho. Inicialmente, é discutido de forma simplificada o conceito de área. Logo em seguida, são apresentadas algumas fórmulas para o cálculo da área de regiões poligonais, acompanhadas de suas deduções escritas em uma linguagem matemática menos formal, mais construtiva, tal como se vê com frequência em livros do ensino médio. O capítulo se encerra com a apresentação de noções sobre sistemas de medida e as diversas unidades subjacentes.

2.1 A área segundo a geometria euclidiana

De acordo com Dante [11], quando queremos medir uma determinada região F do plano, precisamos simplesmente comparar essa determinada região com uma outra unidade de área pré-estabelecida, que aqui denotamos por u. Desse modo, quando dizemos que a região F mede 10 unidades, estamos falando que F contém exatamente 10 unidades de área iguais a u. Isto está ilustrado na Figura 2.1.

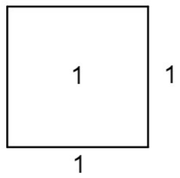
Figura 2.1: Representação geométrica de área.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Consideraremos essa região u como sendo uma região quadrada de lado igual a uma unidade de comprimento. A ela chamaremos de *região quadrada unitária* (conforme Figura 2.2). Desse modo, qualquer região superficial quadrada cujo lado apresente 1 como unidade de comprimento terá, por definição, área igual a 1.

Figura 2.2: Região quadrada unitária.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

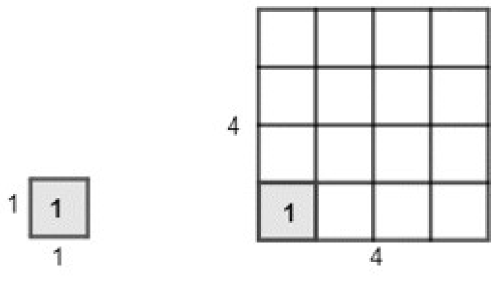
2.1.1 Área de uma região quadrada

Consideremos uma região quadrada Q com seus lados medindo n, que por sua vez é um número natural. Essa região pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas e cada uma com lado unitário e área igual a 1. Logo, a superfície quadrada Q tem como área n^2, ou seja,

$$\text{Área de Q} = n^2. \tag{2.1}$$

Para ilustrar o exposto acima, vamos considerar o seguinte exemplo. Suponha uma região quadrada de lado 4 conforme ilustrado na Figura 2.3. Como podemos ver, tal região pode ser decomposta em 16 (ou seja, 4^2) regiões quadradas unitárias. Portanto, sua área superficial vale 16 unidades quadradas unitárias.

Figura 2.3: Região quadrada com área de 16 unidades.

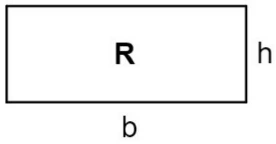


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

2.1.2 Área de uma região retangular

Considere a região retangular R ilustrada na Figura 2.4. Iremos determinar a área dessa figura.

Figura 2.4: Região retangular.



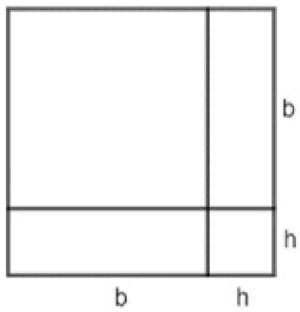
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Com efeito, suponha que R possui base medindo b unidades de comprimento e altura com h unidades de comprimento, em que $b, h \in \mathbb{R}_+^*$. Deseja-se mostrar que a área dessa região R é dada através da seguinte relação:

$$\text{Área de } R = b \cdot h. \tag{2.2}$$

De fato, consideremos Q como sendo uma região quadrada cuja medida do lado seja igual a $b + h$ (ver Figura 2.5).

Figura 2.5: Região quadrada.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Da Equação 2.1, sabemos que a área de um quadrado de lado $(b+h)$ é dada por $(b+h)^2$. Assim temos,

$$\text{Área de } Q = (b+h)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot h + h^2. \tag{2.3}$$

Por outro lado, note que a região quadrada Q é composta por duas sobreposições da região R e outras duas regiões quadradas, cujos lados valem b e h. Sendo assim, temos que:

$$\text{Área de } Q = b^2 + h^2 + 2 \cdot (\text{Área de } R) \tag{2.4}$$

Comparando as Equações 2.3 e 2.4, concluímos que:

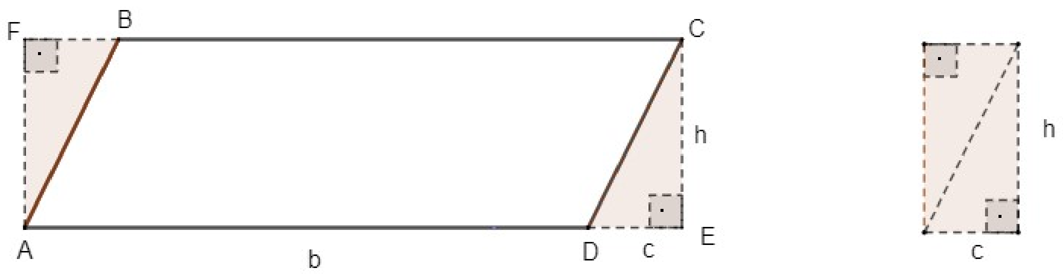
$$\text{Área de } R = b \cdot h. \tag{2.5}$$

2.1.3 Área de uma região limitada por um paralelogramo

Seja $ABCD$ um paralelogramo com $\overline{AD}$ sendo sua base de medida igual a b e altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AD}$) de medida igual a h, conforme ilustrado na Figura 2.6. Observe que a região limitada pelo paralelogramo $ABCD$ está contida em uma região retangular de base $(b + c)$ e altura h. Mas a área dessa região retangular é:

$$\text{Área da região retangular} = (b + c) \cdot h = b \cdot h + c \cdot h. \tag{2.6}$$

Figura 2.6: Paralelogramo ABCD de altura h e o retângulo formado a partir dos triângulos AFB e CED.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Por outro lado, observe que a região retangular é formada pela justaposição do paralelogramo $ABCD$ com outras duas regiões triangulares que, por sua vez, ao se juntarem formam uma região retangular de base c e altura h. Logo:

$$b \cdot h + c \cdot h = (\text{Área da região limitada pelo paralelogramo } ABCD) + c \cdot h. \tag{2.7}$$

de onde obtemos que:

$$\text{Área da região limitada pelo paralelogramo } ABCD = b \cdot h. \tag{2.8}$$

Esse resultado nos mostra que a área da superfície limitada por um paralelogramo é calculada ao multiplicarmos o valor de sua base pala altura correspondente a essa base.

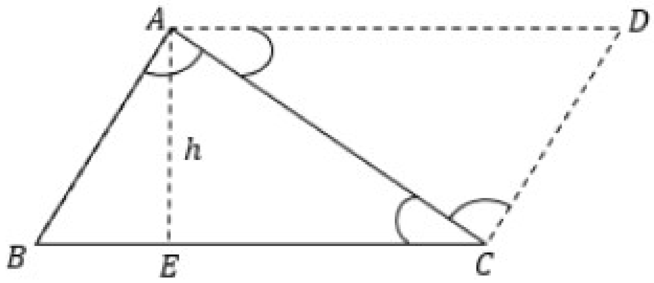
2.1.4 Área de uma região triangular

Agora, será mostrado algumas formas de se calcular a área de uma região triangular, uma vez que dependendo da situação e dos dados que forem fornecidos nos problemas propostos, cada uma das formas apresentadas terá sua devida importância durante a resolução dos exercícios.

Área da região triangular na forma Euclidiana

Considerando a região triangular ABC conforme ilustrado na Figura 2.7. Será mostrado que a área dessa figura é dada pela meta da área de uma região formada por um paralelogramo em que sua base e sua altura possuam os mesmos valores da base e da altura da região triangular em questão.

Figura 2.7: Paralelogramo de vértices ABCD



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Seja ABC a região triangular de altura $\overline{AE} = h$. A partir do vértice A, traçamos a reta r paralela ao lado $\overline{BC}$, e sobre o vértice C traçamos uma reta s que seja paralela ao lado $\overline{AB}$, conforme ilustrado na Figura 2.7.

Agora, seja D o ponto dado pela intersecção das retas r e s. Temos que se o comprimento do lado $\overline{BC}$ for igual a b, a região dada pelo paralelogramo $ABCD$ terá área igual $b \cdot h$. Daí, para encontrar a fórmula que resulta na área do triângulo ABC, basta mostrar que o paralelogramo $ABCD$ possui uma área que é o dobro da área da região triangular.

Com efeito, observe que os triângulos ABC e CDA são semelhantes pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo), logo as referidas regiões triangulares possuem áreas iguais. Assim:

$$\text{Área da região } ABCD = 2 \cdot \text{Área da região triangular } ABC. \tag{2.9}$$

ou seja,

$$b \cdot h = 2 \cdot \text{Área da região triangular } ABC. \tag{2.10}$$

Portanto:

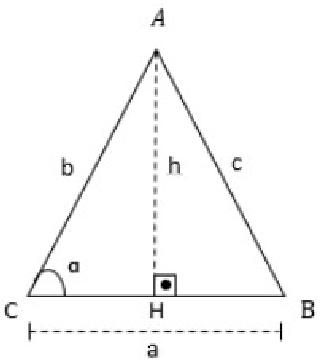
$$\text{Área da região triangular } ABC = \frac{b \cdot h}{2}. \tag{2.11}$$

Deste modo, observa-se que a área de uma região triangular é calculada pela metade do produto entre a medida da base pela altura correspondente.

Área de uma região triangular via trigonometria

Lançando mão da trigonometria, pode-se calcular a área de uma região triangular quando são conhecidos dois lados quaisquer e o ângulo formado pelos referidos lados. Com efeito, considere um triângulo ABC com altura $h = \overline{AH}$ e lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ com comprimentos b, c e a, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 2.8.

Figura 2.8: Triângulo ABC de altura h



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Considerando, sem perda de generalidade, $\alpha = A\widehat{C}B$, pode-se observar que:

$$\text{Área da região triangular } ABC = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \alpha. \tag{2.12}$$

Com efeito, denote por S a área da região triangular ABC. Da Equação 2.11, tem-se que $S = a \cdot h/2$. Mas $\sin \alpha = h/b$, uma vez que o triângulo ACH é retângulo. Fazendo uma pequena manipulação, conclui-se que:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \alpha. \tag{2.13}$$

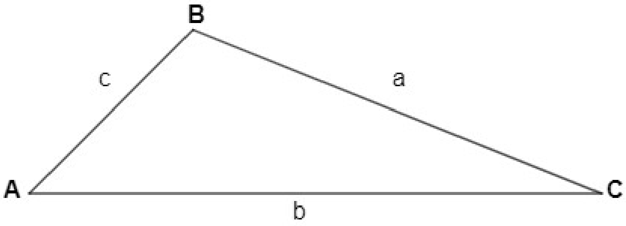
Dessa forma, a área de uma região triangular pode ser expressa como a metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado pelos dois lados em questão.

Área da região triangular quando são conhecidos os três lados

Além das fórmulas apresentadas anteriormente, há também um outro método muito explorado nas turmas de ensino médio, a conhecida *fórmula de Heron*, a qual fornece o valor da área de um triângulo quando são conhecidos os comprimentos de todos os seus lados.

Considere uma região triangular ABC cujos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, a, b e c unidades de comprimento, conforme Figura 2.7.

Figura 2.9: Triângulo ABC com lados medindo a, b e c.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Pode-se determinar o valor da área dessa região por meio da fórmula:

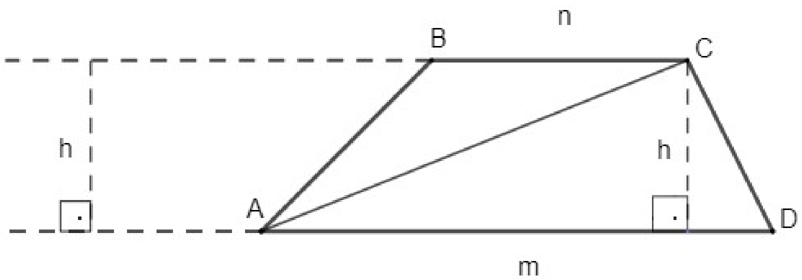
$$\text{Área da região triangular } ABC = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}. \tag{2.14}$$

onde p é o semiperímetro dessa região, ou seja, $p = (a+b+c)/2$.

2.1.5 Área de uma região trapezoidal

Considere um trapézio com suas bases medindo m e n, em que m corresponde à base maior e n à base menor, conforme Figura 2.10.

Figura 2.10: Região limitada pelo trapézio.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Para calcular a área dessa região trapezoidal, basta dividi-la em dois triângulos, ADC e ACB, com alturas de mesmo valor. Desse modo, a área do primeiro triângulo será dada por $(m \cdot h)/2$, e a do segundo triângulo será igual a $(n \cdot h)/2$. Logo, tem-se que a área dessa região trapezoidal será igual a:

$$\begin{aligned} \text{Área da região trapezoidal} &= \frac{m \cdot h}{2} + \frac{n \cdot h}{2} && (2.15)\\ &= \frac{(m+n) \cdot h}{2} && (2.16)\\ &:= \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{altura}}{2}. && (2.17) \end{aligned}$$

2.2 A fórmula do agrimensor

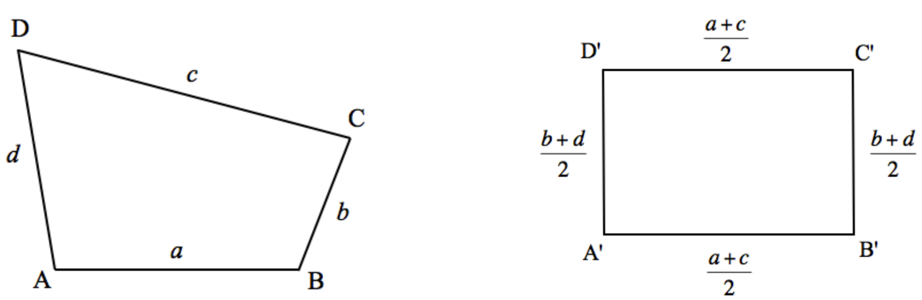
Ao longo da evolução da sociedade, a Matemática tem contribuído significativamente para a forma como o homem enxerga o mundo em que vive. No passado calcular áreas de figuras planas era algo bastante complicado e muito de nossos antepassados para realizar esses tipos de tarefas, tiveram que romper com as dificuldades impostas pela falta das ferramentas matemáticas que hoje são facilmente acessíveis nos nossos dias. Boyer [12] traz em seu trabalho que, em muitas culturas, o cálculo da área de um quadrilátero era encontrado através do produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos. Mais especificamente, dado um quadrilátero de vértices A, B, C, D orientados no sentido anti-horário, com os comprimentos dos lados AB, BC, CD e DA denotados por a, b, c e d, respectivamente, sua área seria:

$$\text{Área do quadrilátero} \approx \frac{(a+c)}{2} \cdot \frac{(b+d)}{2}.$$

Segundo Tou [13], esta fórmula é conhecida por muitos autores como a *fórmula do agrimensor*, profissional especializado na aquisição e processamento de dados espaciais. Intuitivamente, o que está por trás dessa fórmula é a aproximação do quadrilátero $ABCD$ por um retângulo $A'B'C'D'$ de largura $(a+c)/2$ e altura $(b+d)/2$, conforme ilustrado na Figura 2.11.

Obviamente, para terrenos retangulares, o resultado será exato. Porém, no caso geral, esta fórmula resulta apenas em uma aproximação do verdadeiro valor da área. De fato, denote os ângulos internos correspondentes aos vértices A, B, C e D de um quadrilátero por α, β, γ e δ, respectivamente. Como a soma das áreas dos triângulos ABC, BCD, CDA e DAB vale o dobro da área do quadrilátero [14], é

Figura 2.11: Ilustração da ideia por trás da fórmula do agrimensor, em que um quadrilátero é aproximado por um retângulo.



(a) quadrilátero original.

(b) aproximação retangular.

Fonte: Tou [13].

possível escrever:

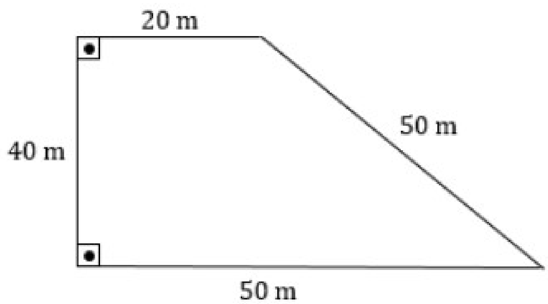
$$
\begin{aligned}
4 \cdot \text{Área do quadrilátero} &= ad\sin\alpha + ab\sin\beta + bc\sin\gamma + cd\sin\delta, && (2.18)\\
&\leq ad + ab + bc + cd, && (2.19)\\
&= (a+c)(b+d), && (2.20)
\end{aligned}
$$

visto que $\sin x \leq 1$, para todo x real. Portanto, a fórmula do agrimensor fornece apenas um limite superior para a área do quadrilátero. Por exemplo, se o quadrilátero for degenerado, isto é, se ele possuir área nula, mas tiver todos os seus lados com comprimento positivo, a área retornada pela fórmula do agrimensor pode resultar em um valor tão grande quanto os lados do quadrilátero. Agora, quanto mais próximo o quadrilátero for de um retângulo, maior será a exatidão da aproximação [13].

Embora hoje, através da aplicação correta das fórmulas apresentadas na seção anterior, possamos calcular de modo exato áreas de polígonos planos, em várias regiões do Brasil, como é o caso de algumas localidades do sertão nordestino, ainda há pessoas que se utilizam de antigas técnicas, como a citada anteriormente. Em muitos distritos de Salgueiro, em Pernambuco, por exemplo, ainda é possível encontrar habitantes locais usando regras muito semelhantes à fórmula do agrimensor. Vê-los realizando seus cálculos é uma ótima experiência para apreciar o poder e a evolução da Matemática e assim ampliar nosso entendimento dessa extraordinária ciência. Ilustraremos a seguir como são realizados os cálculos por esses agrimensores através de uma situação problema.

Suponha que seja preciso determinar qual a área de uma propriedade que possui a forma de um trapézio retângulo com base maior com 50 metros de comprimento, base menor com 20 metros, altura igual a 40 metros e cujo quarto lado possui 50 metros de comprimento, conforme Figura 2.12.

Figura 2.12: Representação do terreno retangular.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Lançando mão da fórmula do agrimensor, temos os seguintes cálculos. Primeiro, os dois pares de lados opostos são somados, ou seja, 20 mais 50, que resulta em 70. Daí somamos 40 com 50, que por sua vez tem como resultado 90. Após isso, é tomada a média aritmética dos valos encontrados, ou seja, divide-se 70 por dois que vale 35 e divide-se 90 por dois, que resulta em 45. Por fim, multiplicamos os resultados encontrados, obtendo no final uma área de $35 \cdot 45 = 1.575$ metros quadrados. Por outro lado, quando usamos a fórmula acadêmica tradicional para o cálculo da área de uma região trapezoidal, encontramos como resultado:

$$\text{Área da região trapezoidal} = \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{altura}}{2} \tag{2.21}$$

$$= \frac{(50 + 20) \cdot 40}{2} = 1400\, m^2. \tag{2.22}$$

Observe que o valor retornado pela fórmula do agrimensor é 12,5% maior do que o valor exato. No entanto, como na prática os terrenos são geralmente quase retangulares, pode-se dizer que sua utilização resolve de forma satisfatória os problemas pontuais de cálculo de áreas, ainda mais se a mesma métrica for empregada para todas as propriedades da região.

2.3 Sistemas de medida

Nesta seção, apresenta-se de forma concisa a evolução dos sistemas de unidades de medida na sociedade. O sistema SI é amplamente utilizado em diversos campos da ciência, tecnologia, comércio, engenharias e muitas outras áreas. Ele possibilita a padronização de dados numéricos, o que evita o surgimento de erros de arredondamento durante a conversão entre diferentes sistemas, aumentando assim a confiabilidade dos resultados que estão sendo mensurados. Entretanto, como veremos ao final, nem sempre essa segurança e padronização estiveram presentes.

2.3.1 O sistema internacional

Segundo Crease [15], em tempos antigos, era muito comum a variação de medidas entre povos distintos, o que provocava muitos transtornos no comércio, por exemplo. O que acontecia era que cada povo desenvolvia seu próprio sistema de medidas, os quais eram fortemente influenciados pela religião e pelo sistema político que imperava naquela região. O autor traz que na China, por exemplo, o sistema métrico foi implementado durante a era neolítica a fim de resolver problemas que estavam ligados à produção de artefatos como utencílios domésticos, ferramentas agrícolas, bem como problemas ligados à produção têxtil.

Ainda segundo Crease [15], as primeiras medidas lineares usadas eram construídas com base em partes do corpo humano, principalmente em dedos, mãos e pés, com destaque para o *chi*, que era uma medida baseada em um pé de um homem adulto e podia variar entre 16 a 24 centímetros. Ele afirma que durante a Era Medieval, o sistema de medições em partes da Europa sofria um misto de influência, pois após o Império Romano conquistar essas regiões, costumava-se introduzir muitas de suas próprias unidades como o *pé*, para comprimento, e a *libra*, para peso. Como não havia uma padronização nas unidades de medidas usadas, muitos transtornos eram gerados entre diferentes regiões ou grupos, devido a dificuldades na comunicação. Além disso, a falta de uma estrutura métrica única levava a uma sensação de desordem e falta de organização.

Na França [15], por exemplo, diversas unidades de medida foram criadas. A quantidade de terra que um agricultor podia arar em um dia com um único boi ou cavalo, ou com uma parelha, era chamada de *journal* (lembrando que *jour*, em francês, significa dia); um *hommée* (palavra derivada de *homme*, que significa homem, em francês) era a porção de terra que um homem podia trabalhar em um dia. O "are", que vem da palavra *area* em latim, representa a área de um quadrado cujo lado tem 10 metros de comprimento, e o "hectare", junção da palavra *hecto* em Grago, que significa "cem", é igual a 100 ares. Vale ressaltar que esta última ainda é bastante usada para medições de terra, principalmente no setor agropecuário. Não é de se surpreender, então, do quanto a França deve ter contribuído para o estabelecimento do sistema SI.

De fato, a França desempenhou um papel fundamental no avanço e desenvolvimento do sistema internacional de medidas. Ao longo da história, o país teve um papel central na promoção da padronização das unidades de medida que, por volta do século XVII, culminaria na criação do SI como conhecemos hoje, amplamente utilizado em todo o mundo.

> Ao findar o século 18, com a apresentação feita por Laplace dos padrões de "metro", "quilograma" e "litro", e a listagem dos múltiplos e submúltiplos decimais dessas unidades, o Sistema Métrico Decimal foi definitivamente adotado pela França sob o lema "PARA TODOS OS POVOS E PARA TODOS OS TEMPOS", inscrito numa medalha comemorativa mandada cunhar pelo governo da República Francesa para perpetuar a data dessa adoção: 2 de novembro de 1799. (ROZEMBERG [16] , p. 20)

O sistema métrico decimal conquistou a Europa continental graças às repercussões positivas obtidas pela Revolução Francesa, incluindo decretos baixados pelo imperador Napoleão Bonaparte [16]. No entanto, a adoção do sistema métrico decimal implicava em abandonar as antigas unidades de medida que faziam parte da cultura e da história de muitos países. Por isso, muitas pessoas resistiam a essa mudança, pois consideravam melhor permanecer nas tradicionais unidades baseadas em dimensões corporais, ao invés de usar o sistema decimal.

Segundo Corrêa [17], o sistema métrico decimal foi difundido em vários países e, durante esse movimento, causou grande impacto em diversos âmbitos da sociedade, sobretudo no comércio. Sua propagação foi possível, dentre diversos motivos, porque o ensino desse sistema passou a ser introduzido nas escolas.

> Finalmente, em 1799, com os novos resultados da medição do Meridiano, foram construídos novos padrões, de platina, para o metro e o quilograma, que passaram a ser conhecidos como "o metro e o quilograma dos Arquivos". Apesar de sua implantação oficial ostensiva, o uso pela população das novas unidades não teve muita aceitação. No comércio usual e nas construções continuaram sendo utilizadas antigas unidades. Foram divulgadas tabelas de conversão sem muito sucesso e em 1812 passaram a ser aceitas, para uso popular, unidades antigas, incluindo divisões não decimais. Em 1840, finalmente, quando a situação política na França passou a se estabilizar, após o período com Napoleão Bonaparte no poder, o uso do Sistema Métrico Decimal passou a ser efetivamente obrigatório e aceito em toda a França. (MOSCATI [18], p. 5-6)

Figura 2.13: Protótipo internacional do quilograma.

Fonte: Revista Robótica [19] (2017, p.18).

No Brasil, de acordo com Lima [20], na segunda metade do século XIX o governo imperial inicia suas tentativas de modernizar o país através da implementação do sistema métrico decimal, para com isso colocá-lo no mesmo patamar das nações europeias. Porém, como no Brasil a maior parte de suas riquezas estavam concentradas no campo, os grandes latifundiários detentores de grandes poderes e influência levantaram vários grupos de homens contra o governo imperial.

> As primeiras unidades de medida introduzidas no Brasil Colônia foram as primitivas unidades portuguesas, muito mal definidas, com magnitudes e denominações desordenadas e bastante confusas, inclusive as de uso recomendado para a Metrópole e suas colônias. As questões relativas aos "pesos e medidas" eram reguladas pela legislação portuguesa, particularmente pelas Ordenações de D. Manoel, pelo Código Filipino e por uma séria de sucessivos ordenamentos editados, principalmente, a partir dos fins do século 17. Não deixa de ser curioso que nas primeiras décadas de 1800, embora Portugal já tivesse adotado o Sistema Métrico Decimal, no Brasil aplicavam-se quase exclusivamente as antigas unidades de medidas impostas por Portugal às suas colônias. (ROZEMBERG [16], p. 20)

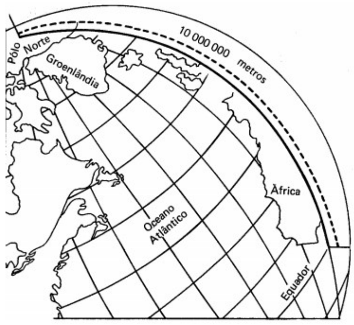
Em 1875, foi realizada em Paris a Conferência Diplomática do Metro, que contou com a participação de 20 países, incluindo o Brasil (Rozemberg [16]). Nela foi consagrado definitivamente o sistema métrico decimal com a assinatura do tratado conhecido como *Convenção Internacional do Metro*, que tinha por objetivo assegurar a unificação das medidas. Mesmo diante de resistências de alguns setores da sociedade, a implementação do sistema métrico decimal no Brasil ocorreu de forma gradual ao longo do século XIX e início do século XX. A transição para o sistema métrico decimal trouxe benefícios significativos para o país, simplificando as medições e facilitando a comunicação e o comércio com outras nações que já adotavam o sistema.

O Sistema Internacional de Unidades (SI), instituído em 1960, é uma modernização do sistema decimal de medidas consistindo de 7 unidades básicas e 22 unidades secundárias. Atualmente, o sistema SI está presente em todos os países do mundo, facilitando a colaboração científica e tecnológica em diversos ramos do conhecimento, corroborando com um movimento mundial que busca o desenvolvimento igualitário.

O metro

De acordo com Pozebon e Lopes [21], a palavra metro é oriunda da palavra grega *métron*, que tem por significado *o que mede*. Ainda segundo os mesmos autores, inicialmente, o comprimento do metro era igual a um décimo de milionésimo da distância entre o Pólo Norte e o Equador, quando medida sobre um meridiano que passa por Paris, conforme ilustrado na Figura 2.14.

Figura 2.14: Ilustração da distância entre o Polo Norte e o Equador.



Fonte: Física.Net. Disponível em [22].

Segundo Crease [15], o Comitê de Pesos e Medidas, criado em 1790, reconheceu a importância de se definir uma unidade de medida baseada em referências universais e constantes. Jean-Baptiste Delambre e Pierre Méchain, dois cientistas franceses, lideraram uma expedição que tinha como objetivo medir um arco de meridiano do norte ao sul da França, entre os anos de 1792 e 1799. Delambre e Méchain trabalharam arduamente nesta missão. Eles utilizaram instrumentos e técnicas de medição avançadas à época para obter a medida mais precisa possível. Mesmo assim, as medições iniciais sofreram de imprecisões e desvios significativos. A distância medida foi posteriormente recalculada e corrigida, resultando em um valor aproximado de 10.000.000 metros. Porém, visando reduzir as incertezas envolvidas na definição do metro e, com isso, garantir maior confiabilidade nas medições, ele foi reformulado. Na Conferência Geral de Pesos e Medidas de 1983, o metro passou a ser considerado como a distância que a luz viaja no vácuo durante um intervalo de 1/299.792.458 de segundo.

No contexto deste trabalho, iremos nos deter às unidades usadas para medir comprimentos e áreas de superfícies, acompanhadas de seus múltiplos e submúltiplos, bem como suas correspondências com unidades de medida regionais. Na Tabela 2.1, ilustramos a unidade fundamental de medida de comprimento, o metro, bem como seus múltiplos e submúltiplos.

Tabela 2.1: O metro com seus múltiplos e submúltiplos.

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
quilômetro	hectômetro	decâmetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Para as medidas de áreas de superfícies, a unidade fundamental é o metro quadrado (m^2), o qual também apresenta múltiplos e submúltiplos, como por exemplo o hectare (ha), que vale 10.000 metros quadrados, largamente usado para expressar grandes áreas superficiais.

2.3.2 Antigas unidades de medida

De acordo com o exposto na seção anterior, em vários países eram utilizados diferentes sistemas de medida para a realização das atividades diárias. Essas antigas unidades de medida, muitas vezes relacionadas a partes do corpo humano ou objetos do cotidiano, desempenharam um papel importante no desenvolvimento das sociedades antigas, mas com o passar do tempo, diversos fatores como a economia, comércio, agricultura e outros mais fizeram com que surgisse a necessidade de uma padronização.

A criação do sistema SI foi imprescindível para o desenvolvimento da sociedade moderna. Porém, mesmo diante das vantagens levantadas, o Brasil levou um tempo considerável até se adaptar a esse padrão e, ainda hoje, é muito comum vermos antigas unidades de medida em pleno uso em nosso país, como acontece em algumas regiões do sertão pernambucano. Por exemplo, em muitos locais a braça e a tarefa ainda são unidades tidas como "padrões" por agricultores e fazendeiros, principalmente como medidas para as propriedades, usadas inclusive para medir terrenos em transações comerciais.

Como afirma Silva,

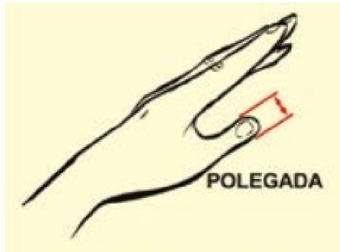
> Com o surgimento do sistema métrico decimal, na França (século XVIII), estabeleceu-se que o metro quadrado seria a unidade padrão para medir superfícies. Mas, no Brasil, desde a sua implementação, os agricultores brasileiros ligados as suas tradições culturais não se adaptaram totalmente a essas medidas métricas decimais, em suas atividades agrícolas. Desta forma, continuaram em uso, na agricultura familiar brasileira, as unidades de medidas agrárias utilizadas por diversas regiões do país, dentre estas medidas destacamos a tarefa [. . .] (SILVA [23], p. 58).

Por esse motivo, é importante trazer para a sala de aula a origem de tais unidades de medida que ainda resistem em nosso meio, uma vez que elementos históricos fortalecem o processo de ensino-aprendizagem. Além disso, mostrar ao aluno a forma como alguns agrimensores calculam áreas e distâncias e fazer as devidas conversões entre unidades em desuso e unidades atuais é uma ótima estratégia para aproximar o aluno dos conhecimentos de Geometria, Grandezas e Medidas e, assim, promover uma melhoria nas habilidades e competências que os estudantes necessitam desenvolver dentro desses eixos curriculares.

Polegada

De acordo com Silva [23], a *polegada* continua sendo bastante usada em países como os Estados Unidos. No Brasil, podemos encontrá-la como unidade para indicar o tamanho de telas de aparelhos eletrônicos, bitolas de varões de ferros usados na construção civil e também para indicar o tamanho de facas usadas nas cozinhas de nossas casas. Ainda de acordo com o mesmo autor, a palavra inglesa *inch* deriva do latim *uncia*, que significa a "duodécima parte" de um pé, e corresponde a 2,54 centímetros.

Figura 2.15: A Polegada.



Fonte: Banna [24] (2019, p.9).

Palmo

Para os gregos, o palmo era a medida que compreendia a distância entre o dedo mínimo e a ponta do polegar com a mão esticada, conforme ilustrado na Figura 2.16. Esta unidade costuma ser usada para medir pequenas profundidades [15] está presente no Brasil em muitas medições caseiras que não exigem tanta precisão [23].

Figura 2.16: O Palmo.

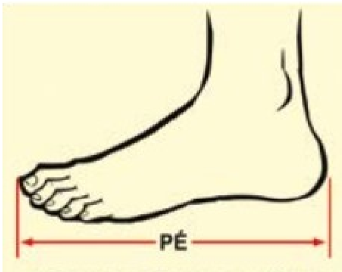
Fonte: Banna [24] (2019, p.9).

De acordo com o sistema de internacional de unidades, o palmo corresponde a 0,22 metros, que equivale a 22 centímetros. Segundo Silva [23], essa unidade corresponde à sétima parte do cúbito, medida esta que será abordada posteriormente neste trabalho.

Pé

De acordo com Crease [15], o pé foi usado como unidade de medida por quase todas as civilizações (Figura 2.17). Na Grécia antiga, por exemplo, essa unidade era chamada de *pous*, já na China antiga, essa medida era conhecida como *chi* e estava muito presente na construção civil.

Figura 2.17: O Pé.



Fonte: Banna [24] (2019, p.9).

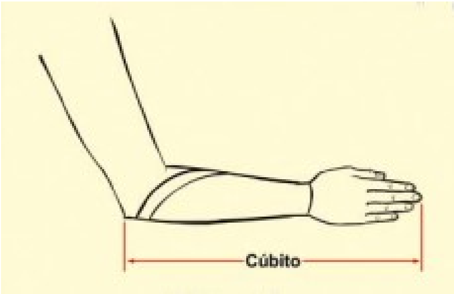
A utilização do pé como unidade de medida ainda é muito comum no Brasil em jogos e brincadeiras infantis. Por exemplo, uma brincadeira de rua bastante difundida e praticada no Nordeste brasileiro é conhecida como “barrinha”. Essa brincadeira, basicamente, consiste em um jogo de futebol em que dois times disputam uma partida entre si para ver qual time marca mais pontos. A pontuação se dá quando algum dos times faz com que a bola cruze a linha demarcada por duas traves e para medir o tamanho do gol geralmente um dos participantes mede a distância entre as traves a partir da quantidade de pés. O tamanho do gol costuma ter entre 3 a 6 pés.

De acordo com Silva [23], originalmente, essa unidade de medida era baseada no tamanho médio do pé de um homem adulto. Ela permaneceu sendo usada por toda a Europa mesmo apresentando algumas variações regionais. Ainda segundo o autor, essa unidade passou a ser difundida em países de língua inglesa em todo o mundo e, a partir de 1959, os Estados Unidos e outros 53 países soberanos definiram a *jarda* como uma medida igual 0,9144 metros e, por sua vez, o pé ficou definido como sendo um terço de uma jarda, ou seja, exatamente igual a 0,3048 metros, que equivalem a 30,48 centímetros.

Cúbito

De acordo com Banna [24] , o cúbito (também conhecido como côvado) é a unidade de medida cujo tamanho era dado pela distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio (ver Figura 2.18). Essa unidade era bastante utilizada entre povos antigos como os egípcios, babilônios, gregos e hebreus. Inclusive, é muito comum vermos trechos bíblicos empregando o côvado, como por exemplo, é relata a história da Arca de Noé que foi estabelecida com as seguintes dimensões: 300 côvados de comprimento; 50 côvados de largura e 30 de altura. Outra história muito famosa é sobre a construção do templo de Salomão que apresentava as seguintes dimensões: sessenta côvados de comprimento, vinte de largura e trinta de altura.

Figura 2.18: O Cúbito.



Fonte: Banna [24] (2019, p.11).

O valor de um cúbito variava de povo para povo e também podia variar entre indivíduos, mas estima-se que geralmente correspondia a cerca de 45 a 52 centímetros.

Jarda

A jarda era uma unidade de medida de comprimento que se desenvolveu principalmente na Inglaterra e, hoje em dia, é amplamente usada nos países com influência britânica. Crease [15] afirma que o rei britânico do século XII, Henrique I, introduziu a *jarda*, ou *ulna*, nas medidas britânicas, decretando que ela teria o comprimento do centro de seu corpo até a ponta de um dos dedos de sua mão com seu braço ligeiramente esticado.

Figura 2.19: A Jarda.

Fonte: SlidePlayer. Disponível em [25].

De acordo com o SI, a jarda está fixada em 0,9144 metros, que por sua vez correspondem a 91,44 centímetros.

Braça

A braça era uma unidade de medida de comprimento que era comumente usada em países de influência portuguesa, como Portugal e Brasil. A braça era definida como a distância entre as pontas dos dedos médios de ambos os braços estendidos de uma pessoa, conforme ilustrado na Figura 2.20. A braça era considerada a medida mais importante usada pelos Gregos [15].

Figura 2.20: A Braça.

Fonte: Material Didático. Disponível em [26]

Atualmente muitos trabalhadores rurais utilizam a braça para fazer medidas e cubagem de terras e também é muito comum vermos pescadores utilizando essa antiga unidade para medir a profundidade do mar durante uma pescaria. De acordo com o SI, a braça tem medida que corresponde a 2,2 metros.

Légua

Como dito por Silva e Santos [27], o sertanejo costuma não ter problema em incorporar unidades de medida oficiais, porém ele não costuma abandonar suas unidades regionais. Por exemplo, a unidade atual usada para denotar grandes distâncias é o quilômetro, mas durante muito tempo, grandes distâncias eram expressas em *léguas*. Ainda hoje, é fácil ouvir algum sertanejo tratando lidando com distâncias em léguas.

Para exemplificar o uso dessa unidade de medida, observe o trecho abaixo extraído do livro Geografia da Pecuária no Brasil de 1967:

> Segundo a Ordem Régia de 27 de Dezembro de 1695, o padrão de uma fazenda de criação tinha três léguas de comprimento, medidas ao longo de um rio, e uma légua de largura, sendo meia para cada margem. Como não se construíam cêrcas, deixava-se um espaço vazio de uma légua, entre terras de uma fazenda e outra. (VALVERDE [28], p. 2)

Segundo Silva [23], a légua é uma unidade de medida que variava conforme a época, país e região. Para os portugueses, a légua era aquilo que se podia percorrer em linha reta durante uma hora, o que girava em torno de 6000 metros.

Tarefa de terra

A tarefa é uma unidade de medida de superfície comumente usada em áreas rurais, especialmente em contextos de produção agrícola no interior do Nordeste. A medida de uma tarefa de terra pode variar em diferentes regiões devido a fatores culturais e geográficos. Segundo Onofre [29], a tarefa é uma unidade agrária destinada a terras com plantio de cana de açúcar, valendo no Ceará 3630 m^2, em Alagoas e Sergipe ela equivale a 3052 m^2 e, na Bahia, uma tarefa é igual a 4356 m^2.

Neste trabalho, iremos considerar uma tarefa de terra como sendo uma região quadrada com dimensões iguais a 25 braças por 25 braças, totalizando assim 625 braças quadradas, que equivalem, de acordo com o sistema SI, a 3025 metros quadrados. Isso corresponde a uma superfície quadrada com 55 metros de lado.

Capítulo 3

Agrimensura e geometria

Este capítulo é dedicado à apresentação dos fundamentos da Agrimensura que serão explorados ao final deste trabalho sob a forma de uma sequência didática. Apresenta-se um resumo da evolução da Agrimensura ao longo da história da humanidade, destacando as principais contribuições obtidas por povos que a dominaram, sua importância para a sociedade moderna e sua relação com a Geometria. O capítulo é encerrado com a análise de quatro situações-problema, ordenadas segundo o nível de dificuldade, todas envolvendo conceitos da Agrimensura.

3.1 Breve histórico da Agrimensura

No ensino de Matemática, é extremamente importante abordar elementos que remetam à história de construção dos conceitos matemáticos. A partir dela, é possível compreender quais os principais fatos que levaram a se chegar no que hoje conhecemos como álgebra, análise, topologia, geometria, etc. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), um dos objetivos do ensino da História, é o conhecimento sobre os manifestos culturais de vários povos, visando apresentar fatos marcantes na construção de uma determinada civilização (BRASIL [10]). No contexto da matemática, isto permite compreender como as diversas teorias matemáticas foram concebidas.

> O ensino de História pode desempenhar um papel importante na configuração da identidade, ao incorporar a reflexão sobre a atuação do indivíduo nas suas relações pessoais com o grupo de convívio, sua afetividade, sua participação no coletivo e suas atitudes de compromisso com classes, grupos sociais, culturais, valores e com gerações do passado e do futuro (BRASIL [10], p.22).

Assim, tendo em vista a grande importância de se inserir contextos históricos e também contextos culturais nas salas de aulas, é necessário apropriar-se cada vez mais de tais contextos que possam fazer com os estudantes tenham uma maior apreciação de Matemática e assim diminuir a resistência ao ensino dessa disciplina.

Abordar a história da Matemática no âmbito da sala de aula permite provocar a reflexão dos alunos sobre como matemáticos constroem suas teorias. Segundo Da Fonseca [30], uma das principais funções da História da Matemática é mostrar aos nossos estudantes como se deu o processo de desenvolvimento de alguns conceitos, evidenciando as dificuldades que o próprio matemático teve durante este processo.

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL [10], p.32).

Considerada por muitos como uma das áreas mais belas da Matemática, a Geometria, um dos temas centrais deste trabalho, tem origem provável em problemas comuns à Agrimensura, ciência dedicada à aquisição, processamento e gerenciamento de dados espaciais. Boyer [12] afirma que a Geometria teve seus primórdios no leito do Rio Nilo e acredita-se que se deu através do surgimento da necessidade de fazer novas demarcações dessas terras em cada inundação do rio.

> Desde as mais antigas civilizações, monumentos gigantescos, templos sagrados, pirâmides, teatros, anfiteatros, aquedutos ou pontes foram construídos. Em torno destas obras magistrais podemos imaginar as operações topográficas necessárias ao arquiteto, para estabelecer os planos que permitiriam a realização prática da obra. Estabelecer as direções, medir as distâncias, estimar as alturas, mas também delimitar as parcelas dos terrenos, traçar as estradas e caminhos, construir canais para irrigação ou mesmo transporte de água, foram muitas das aplicações da agrimensura (Corrêa [31], p.7).

Ainda de acordo com o mesmo autor,

> A agrimensura é uma das mais velhas artes praticadas pelo homem. Os registros históricos indicam que essa ciência se iniciou no Egito, Heródoto (1400 a.C.) descreve em seus apontamentos, os trabalhos de demarcação das terras às margens do Nilo. O agrimensor era um funcionário nomeado pelo faraó com a tarefa de avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas propriedades. A propriedade era um bem respeitado pelos egípcios. Roubar a terra de alguém era um dos crimes imperdoáveis. Como todo ano o rio Nilo inundava as terras apagando as marcas físicas de cada propriedade, surgiu tal necessidade de medir o território de cada pessoa. A medição de terras auxiliava também na arrecadação de impostos de áreas rurais. (Corrêa [31], p.8).

A partir disso, percebe-se que a civilização do Egito Antigo tinha um sistema avançado de medição de terras e tal atividade era essencial para o planejamento de sua economia. Os antigos egípcios desenvolveram métodos engenhosos de medição que eram altamente precisos para sua época garantindo assim uma consistência em suas atividades.

Segundo Eves [32] os agricultores do antigo Egito precisavam manter anotações sobre as produções agrícolas, períodos de cheia do Rio Nilo e mapas especificando o curso das valas utilizadas para irrigação. De acordo com Roque [33] a Geometria como hoje conhecemos pode ter sua origem com as medidas de terras, mas a falta de registros impossibilitam fazer tais asseverações com segurança e nem permite que se possa dizer também que a matemática desenvolvida na Mesopotâmia e no Egito tenha evoluído para a matemática usada na Grécia, visto que os primeiros matemáticos gregos de que se tem notícia lidavam com a Geometria de modo relativamente mais abstrato. Corroborando com as hipóteses já citadas, D'Ambrosio [34] afirma que o foco principal da sociedade Egípcia estava no manuseio das terras que poderiam ser aráveis e tais práticas estão relacionadas ao que hoje entendemos por Agrimensura. As enchentes do Rio Nilo traziam muita prosperidade para o povo egípcio, mas também geravam alguns inconvenientes. Era muito comum a desmarcação das linhas que dividiam as propriedades ruais localizadas na beira do rio, assim quando o nível das águas voltavam ao normal, o Faraó enviava funcionários específicos para redefinir as terras e calcular os prejuízos causados pela cheias. Esse funcionário eram chamados de agrimensores. Ver Figura 3.1.

Figura 3.1: Agrimensores do antigo Egito demarcando as terras.

Fonte: Corrêa [17] (2019, p. 13)

Na Figura 3.1 podemos ver o trabalho dos agrimensores na reconstrução das divisória dos campos. Boyer [12] afirma que essas pessoas eram responsáveis por fazer medições de terreno e isso servia principalmente fins de cobrança de impostos ou para remarcar lotes inundados pelo rio Nilo. Ainda segundo Boyer [12], a propriedade para os egípcios era um bem respeitado e roubá-la era um crimes, além disso, a correta demarcação das terras também promovia uma arrecadação dos impostos mais coerente entre o povo egípcio.

A necessidade de demarcação de terras não era exclusividade dos povos egípcios. Segundo Silva [23], agrimensores de diversas outras localidades usavam varas como instrumentos de medida, conhecidos como braças, ao invés das cordas egípcias. A grande variedade de técnicas e instrumentos de medição usados ao longo do tempo acabou levando ao surgimento de diversas *unidades de medida*. Verificou-se, por exemplo, que em muitos locais eram usadas partes do corpo como referência, como a espessura do polegar ou o comprimento da palma da mão.

Cândido (2016 [6], p.19) ressalta que "As unidades de medidas de comprimentos do passado eram variáveis por região, por épocas, mas todas elas frequentemente tinham algo em comum: baseavam-se quase sempre nas dimensões de partes do corpo humano". Surpreendentemente, algumas das unidades usadas nos primórdios da civilização humana ainda encontram-se em pleno uso na atualidade. Silva [23] ressalta que, apesar dessas unidades não serem padronizadas, ainda são bastante utilizadas em algumas culturas, como por exemplo na região Nordeste do Brasil. De fato, em muitas localidades do sertão pernambucano, são usadas unidades que se assemelham bastante com aquelas usadas por povos antigos. Com o passar do tempo, no entanto, essas medidas vão perdendo força e, de certa forma, vão ficando esquecidas, restritas a grupos populacionais cada vez menores.

3.2 A relação entre a Agrimensura e a Geometria

Um dos maiores desafios que se apresenta para grande parte dos professores é o de fazer com que os alunos se sintam motivados a buscar novos conhecimentos que lhes são apresentados em sala de aula. Na matemática, de acordo com Carraher [35] essa desmotivação observada pode estar ligada a diversos fatores como a falta de conhecimentos prévios necessários para entender determinado conceito apresentado, traumas relacionados à disciplina, o uso de metodologias ineficientes em sala de aula ou até mesmo a falta de ligação entre aquilo que está sendo apresentado com a realidade do estudante. Como afirma D'Ambrosio ([34], p.80), "O grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã. Pôr em prática significa levar pressupostos teóricos, isto é, um saber/fazer acumulativo ao longo de tempos passados, ao presente".

Para reverter esse quadro de desmotivação e desinteresse pela matemática, a preocupação de grande parte dos professores, como afirma Rogenski e Pedrosa [36], está em como explorar de maneira adequada o uso e aplicações de novas metodologias e tecnologias a fim de que seja atraída a atenção dos discentes. Müller [37], afirma que o treino excessivo da Matemática como meio para alcançar a compreensão de definições e demostrações de resultados pode inibir o processo de aprendizagem, tornando-o assim desanimador e desestimulante essa forma de ensino.

Rogenski e Pedrosa, Rogenski e Pedrosa [36] exploram a inversão da lógica tradicional como uma estratégia fundamental para que o professor possa construir uma matemática conceitual sólida, ou seja, ao invés de se apresentar a sequência tradicional de teorema, demonstração e por último, aplicação, o docente poderá iniciar suas atividades a partir de um problema que por sua vez seria solucionado pelos alunos que estariam lançando mão de estratégias e habilidades que até então são conhecidas a eles. Desse modo, o aluno pode se apropriar dos conceitos trabalhados na aula por meio desse processo histórico que promove a construção do conhecimento.

Boeri e Vione [38] dizem que quando se mostra ao aluno a importância daquilo que ele estuda e como isso poderá ser usado em sua vida cotidiana, seu interesse aumenta significativamente. Damasceno e Rabelo [39], afirmam que a falta de contextualização dos conteúdos com a realidade do estudante, faz com que eles busquem apenas memorizar um punhado de fórmulas afim de obterem boas notas em suas provas e assim passar de ano. Ainda de acordo com os mesmos autores, esse tipo de problema gerado pela falta de conexão entre a Matemática ensinada e o dia a dia dos alunos pode ser minimizada quando o docente busca meios inovadores que demonstre a importância dos conceitos abordados na realidade do alunado.

> Toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido (D'AMBROSIO [34], p.79).

No caso do ensino de Geometria, cujos conteúdos possibilitam o professor trabalhar com materiais concretos presente no dia a dia dos alunos, é essencial que eles possam fazer paralelos entre a teoria e a prática. Segundo Rogenski e Pedrosa [36], boa parte dos alunos no ensino médio apresentam uma defasagem no aprendizado de geometria durante os anos em que estão no nível fundamental e isso faz com que esse alunado apresente bastante dificuldade ao se deparar com cálculos de áreas e volumes. Isso se daria, segundo as autoras, pelo fato desses conteúdos geralmente serem lecionados ao final dos anos letivos e, quase sempre, serem apresentados por meio de exemplos isolados , dificultando o desenvolvimento das habilidades necessárias para conseguir amadurecer tais competências.

De acordo com D'Ambrosio [34], a formação que é dada aos professores durante sua graduação é o principal causador desses problemas, pois segundo o autor, os docentes não conseguem adquirir a capacidade de conhecer melhor seus alunos e muitas vezes os conteúdos adquiridos em suas licenciaturas são obsoletos. Assim pode-se destacar que é importante que os professores estejam inteirados com as necessidades dos seus alunos para assim poder propor uma Matemática que esteja pronta para ajudá-los em suas demandas cotidianas. Desse modo, a Geometria poderia ser apresentada a partir de possíveis situações vivenciadas pelos discentes e assim minimizar tanto a resistência e quanto as dificuldades tão frequentes em sala de aula.

Em se tratando de uma Matemática mais atrativa para o aluno, Boeri e Vione [38] acrescentam que esta se faz quando ela é apresentada ao aluno através de um processo de construção, ou seja, processo que permite que o aluno possa aprender também com seus próprios erros e não apenas com instruções dogmáticas. Assim, os autores defendem que a Matemática precisa ser apresentada de forma dinâmica e criativa, tornando seu conhecimento mais valioso para os alunos.

> Ao começar a aula, o professor tem uma grande liberdade de ação. Dizer que não dá para fazer isso ou aquilo é desculpa. Muitas vezes é difícil fazer o que se pretende, mas cair numa rotina é desgastante para o professor. A propósito, hoje é comum nas propostas para melhoria da eficiência profissional a recomendação de se evitar rotina. Recomenda-se que nenhum profissional deve fazer a mesma coisa por mais de quatro ou cinco anos (D'AMBROSIO [34], p.104-105).

Desse modo, Roque [33] enfatiza que o professor poderia expor aos seus alunos de forma inicial algo bastante simples, como por exemplo, as necessidades que levaram os povos antigos a conceberem seus primeiros conceitos geométricos, quais eram os contextos históricos em que eles viviam e quais os desafios que eles tiveram que superar. Essa abordagem poderia fazer com que os estudantes construam ligações entre aquilo que será apresentado e suas realidades e, desse modo, a partir de uma aula bem planejada, fortalecer a prática de ensino-aprendizagem e assim contribuir para uma elevação dos índices de aprendizagem desses estudantes.

3.3 Regionalismo na Matemática

No processo em que o saber matemático é transmitido, faz-se necessário que os professores tenham em mente qual a realidade do ambiente em que estão inseridos, pois muitas das questões e especificidades locais são as causas dos problemas que os alunos acabam por enfrentar durante suas jornadas acadêmicas. Assim, uma vez que os professores se apropriam das principais questões ligadas ao meio em que estão inseridos, eles poderão apresentar os conhecimentos científicos embasados por essa cultura local. D'Ambrosio [34] diz por exemplo que a educação indígena se manifestou com a finalidade de resolver problemas culturais locais, assim eles dominam tudo o que é essencial para suas práticas diárias. O autor também afirma que a matemática indígena serve e é eficiente para muitas coisas e por isso não precisa ser substituída pela matemática do branco, uma vez que a supressão de um determinado saber cultural em detrimento de outro saber considerado mais avançado pode trazer danos culturais irreversíveis a um determinado povo.

É importante reconhecer que a matemática rústica, peculiar que é praticada em locais específicos por povos ou culturas particulares é tão importante e valiosa quanto aquela matemática acadêmica, formal que se apresenta refinada nos livros didáticos. Silva [23] afirma que muitas práticas trazidas pelos alunos apontam para a utilização de conhecimentos prévios adquiridos fora do ambiente escolar em seus cotidianos. O autor continua com o seguinte questionamento: uma vez que os alunos apresentam diversos conhecimentos matemáticos, como o professor pode agir de maneira a aproveitar esses saberes matemáticos acrescentando a eles conhecimentos formais e mais abrangentes de modo a construir competência e habilidades que serão úteis tanto na vida escolar do estudante, quanto no seu dia a dia? Desse modo, uma boa abordagem matemática envolve o reconhecimento e a valorização desses saberes prévios, incorporando-os ao processo de ensino-aprendizagem e um um ambiente de sala de aula que incentive a participação ativa dos alunos, permite que eles compartilhem suas experiências matemáticas e culturais. Isso não apenas enriquece o aprendizado, mas também ajuda a construir conexões entre os conceitos matemáticos formais e as aplicações práticas de seus cotidiano.

Seguindo essa lógica, Carraher, Carranher e Schliemann [35] afirmam que as dificuldades enfrentadas e vencidas pelos alunos em suas vidas diárias produzem conhecimentos, incluindo os matemáticos que são muitas vezes mal aproveitados nas escolas durante a resolução de problemas. Um exemplo citado pelos autores que corrobora para o que foi apresentado é um caso de um jovem que precisa ir para as ruas vender frutas. Esse jovem por sua vez convive diariamente com a matemática vista em sala de aula, porém na sua lida diária, essa matemática usada acaba sendo mais interessante e mais dinâmica, não de forma abstrata, mas em total consonância com sua realidade.

Quando o professor se apropria dessas ideias, ele possibilita significativos avanços e crescimento em sua carreiras docente, pois uma vez que suas aulas conseguem dialogar tanto com a cultura local, como com os conhecimentos intrínsecos a cada estudante, ele estará contribuindo de forma positiva na formação de cidadãos, que por sua vez serão pessoas produtivas na sociedade, uma vez que a matemática outrora abstrata, agora ganhará sentido e utilidade em suas vidas diárias.

Explorar o contexto em que os estudantes estão inseridos é um dos grandes desafios do professor de matemática no ensino de Geometria, pois requer a realização de um estudo prévio sobre os conceitos matemáticos da Geometria mais relevantes para a comunidade escolar envolvida. Por exemplo, quando se trata sobre o cálculo de áreas de figuras planas, é interessante provocar discussões desde a escolha de uma unidade de medida, como a braça, a tarefa de terra ou metro quadrado. Essas duas primeiras unidades de medida são muito antigas, usadas desde os primórdios das civilização, mas resistem ao passar do tempo, permanecendo fortes na cultura de Pernambuco, pois, nos dias atuais, boa parte dos agricultores do sertão pernambucano utilizam-nas em seus cotidianos para preparar e dimensionar suas terras.

Trabalhando desse modo, é possível apresentar conceitos matemáticos formais de modo acessível aos estudantes, facilitando na superação dos desafios que se apresentam no processo do ensino da Matemática.

3.4 Situações-problema como recurso didático

Vale e Pimentel [40] afirmam que tradicionalmente existe consenso na literatura sobre o que seria uma *situação-problema*. Segundo os autores, define-se uma situação-problema como uma situação que envolve o aluno em um problema para o qual não se conhece de antemão, ou não é óbvio, um caminho para se chegar à solução. A utilização de situações-problema permite que o aluno possa assimilar e consolidar os conhecimentos adquiridos ao longo de sua jornada acadêmica. Nesse aspecto, de acordo com Brasil [10] algumas habilidades e competências precisam ser desenvolvidas nos alunos:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Segundo Souza, Ohira, Pereira [41] como metodologia de ensino, a resolução de situações-problema é extremamente eficaz para promover o raciocínio lógico e desenvolver motivação e entusiasmo nos alunos ao estudar a Matemática. Ainda segundo os autores, durante o processo de resolução de situações-problema os alunos são levados a mobilizar conhecimentos previamente adquiridos e assim desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão a seu alcance.

Diante do exposto, e como forma de ilustrar a utilização do recurso didático introduzido nesta seção, serão apresentadas quatro situações-problema construídas a partir do contexto dos alunos, com níveis de dificuldade gradualmente crescentes. Os problemas aqui listados são acompanhados de possíveis soluções, uma vez que se sabe existirem várias formas de solucioná-los.

3.4.1 Problema 1 – As ovelhas de Keylla

Keylla é uma mulher esforçada que, além de seu emprego como professora da educação infantil, resolveu empreender na criação ovelhas e para isso ela usará a propriedade rural de seu pai Sebastião. Após a pronta aprovação da ideia por parte do seu pai, Keylla fez uma pesquisa e verificou que poderá criar 12 ovelhas por cada hectare de terra. Porém como o terreno de seu pai não era cercado, ela necessitará fazer a compra dos arames para tal, assim, após perguntar as medidas do terreno a seu Sebastião, veio a surpresa, seu pai só usava unidades de medidas não convencionais para fazer a cubagem de suas terras. Ele disse que o terreno possuía 24 tarefas de terras e as medidas dos lados eram 150 braças de comprimento por 100 braças de largura, assim determine:

(a) Sabendo que serão necessárias 5 fiadas de arame para cercar o terreno, quantos metros de arame Keylla terá que comprar?
(b) Qual o número máximo de ovelhas que ela poderá criar no terreno?

Solução do item (a). Primeiramente, teremos que saber qual é o perímetro P do terreno de seu pai. Como o terreno possui formato retangular, temos que:

$$P = 2 \cdot 150 + 2 \cdot 100 \Rightarrow P = 500 \text{ braças.}$$

Sabendo que cada braça corresponde a 2,2 m, o perímetro em metros é igual a:

$$P = 500 \cdot 2{,}2 = 1100\,\text{m}.$$

Assim, como serão 5 fiadas de arame que Keylla terá que usar, a quantidade total de arame T será dada por:

$$T = 1100 \cdot 5 \Rightarrow T = 5.500\,\text{m}.$$

Solução do item (b). Para sabermos o total de ovelhas que Keylla poderá comprar, inicialmente, é preciso conhecer a área do terreno em metros quadrados. Com efeito, o comprimento C do terreno, em metros, é dado por $150 \cdot 2{,}2$, que é igual a 330. Por sua vez, a largura L será igual a $100 \cdot 2{,}2$ que vale 220 metros. Logo, sabendo que a área A de uma região retangular é dada pelo produto de seu comprimento por sua largura, conclui-se que a área do terreno vale:

$$A = C \cdot L = 330 \cdot 220 \Rightarrow A = 72600\,\text{m}^2.$$

Mas cada hectare equivale a 10.000 m^2. Assim, a área total do terreno em hectare é dada por:

$$\frac{72600}{10000} = 7{,}26\,\text{hec.}$$

Multiplicando o valor encontrado por 12, que corresponde à capacidade máxima de ovelhas por hectare, temos:

$$7{,}26 \cdot 12 = 87{,}12.$$

Portanto, Keylla poderá criar, no máximo, 82 ovelhas no terreno de seu pai.

3.4.2 Problema 2 – Seu Sebastião e o novo código florestal

De acordo com o novo código florestal brasileiro, propriedades rurais privadas devem manter uma porcentagem mínima de 20% de sua área total como reserva legal para que se tenha a preservação ambiental. Para saber se sua propriedade estava de acordo com a lei, seu Sebastião, que é um agricultor de milho e residente do município de Verdejante, em Pernambuco, contratou uma equipe para fazer um mapeamento aéreo de sua terra através de drones. Ao final do levantamento, foi verificado que apenas 12% de sua fazenda continha área preservada. Sabendo que a propriedade de seu Sebastião possui 50 tarefas de terra, determine o tamanho do terreno, em hectares, que ele precisará reflorestar para ficar em conformidade com a lei.

Solução. Inicialmente, faremos a conversão entre a unidade de medida não convencional, ou seja, a tarefa, para a unidade de medida convencional que é o hectare. Sabendo que 1 hectare corresponde a 3,3 tarefas de terra, temos a seguinte relação:

$$\begin{array}{ccc} \text{Área} & & \text{Área} \\ \text{em tarefas} & & \text{em hectares} \\ 3{,}3 & \text{———} & 1 \\ 50 & \text{———} & x \end{array}$$

Agora, obtemos x através de uma regra de três simples, resultando em um valor aproximado para x de 15,15 hectares. Assim, como seu Sebastião já possui 12% de sua propriedade preservada, temos que ele precisará reflorestar 8% que por sua vez corresponde a:

$$\begin{array}{ccc} \text{Área} & & \text{Área} \\ \text{em hectares} & & \text{preservada (\%)} \\ 15{,}15 & \text{———} & 100 \\ x & \text{———} & 8 \end{array}$$

Novamente por regra de três, podemos concluir que seu Sebastião terá que reflorestar um total de 1,212 hectares, aproximadamente.

3.4.3 Problema 3 – A pesquisa do professor Cicinho

Afim de instigar o espírito investigador dos seus alunos, um professor de matemática da ETE Professor Urbano Gomes de Sá, conhecido como Cicinho, propôs a seguinte pesquisa:

> *Descubra como seus pais, avós ou parentes mais antigos faziam para cubar suas propriedades rurais sem o auxílio das fórmulas tradicionais que são usadas para calcular áreas de polígonos.*

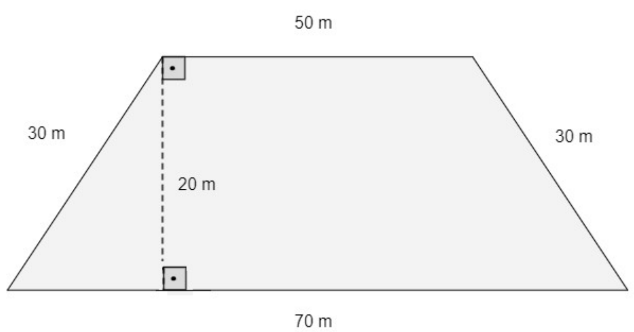
Após uma semana e já de posse das pesquisas realizadas, o professor Cicinho destacou o trabalho apresentado por dois de seus alunos. Sua aluna Anna Lívia relatou em seu trabalho uma forma muito curiosa usada por seu avô para fazer a cubagem de terrenos. Segundo ela, ele primeiramente calcularia o perímetro do terreno, ou seja, somava o comprimento de todos os lados. Em seguida, dividiria o resultado obtido por quatro e, por fim, multiplicaria o valor obtido por ele mesmo.

Por sua vez, seu aluno Samir apresentou o método que seu tio-avô usava. Primeiro ele somava os lados opostos do terreno em seguida tirava a média aritmética dos resultados encontrados. Após isso, multiplicava esses valores entre si e por fim dividia o resultado obtido por quatro.

Diante das pesquisas apresentadas pelos alunos, explique se as metodologias apresentadas pelos estudantes poderiam ser indicadas para quaisquer terrenos poligonais, apresentando um exemplo que justifique sua resposta.

Solução. Vamos analisar as metodologias dos alunos a partir de um exemplo. Consideremos um terreno cujo formato seja um trapézio, conforme ilustrado na Figura 3.2.

Figura 3.2: Terreno com formato de um trapézio.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Aplicando o método sugerido pelo avô de Anna Lívia, iniciamos com o cálculo do perímetro P do terreno:

$$P = 30 + 50 + 30 + 70 = 180.$$

Este resultado é dividido por 4:

$$\frac{180}{4} = 45$$

e, multiplicado por ele mesmo, resultará no valor da área A procurada:

$$A = 45 \cdot 45 = 2025m^2.$$

Vamos agora analisar o método que o aluno Samir apresentou ao professor Cicinho. O resultado para a cubagem do terreno seria encontrado a partir dos seguintes passos. Primeiramente, tiramos as médias dos lados opostos:

$$\frac{30+30}{3} = 30 \qquad \text{e} \qquad \frac{50+70}{2} = 60.$$

Agora, multiplicamos esses valores entre si, ou seja, $30 \cdot 60 = 1800$, e por fim dividindo o resultado por 4, obtemos 450 metros quadrados de área.

No entanto, usando o método tradicional, ou seja, a fórmula euclidiana para calcular a área do trapézio, obtemos:

$$A = \frac{(70+50) \cdot 20}{2} = 1200m^2.$$

Desse modo, podemos observar que as metodologias apresentadas pelos alunos **não** correspondem ao valor exato que foi calculado a partir da fórmula euclidiana, mas sim a aproximações em maior e menor grau de exatidão. Portanto, com base no exemplo apresentado, podemos concluir que as metodologias analisadas não são indicadas para se fazer a cubagem de terrenos com formas arbitrárias.

3.4.4 Problema 4 – O terreno de seu Sebastião

Após a tão aguardada aposentadoria, seu Sebastião resolveu vender sua propriedade rural para poder reformar sua casa localizada na cidade. Após procurar uma imobiliária, ele informou que sua propriedade possuía 24 tarefas de terra. Porém, para realizar a venda, o atendente da imobiliária precisaria saber a extensão do terreno em metros quadrados, bem como, quais os tamanhos dos lados desta propriedade em metros. Assim, sabendo que o terreno de seu Sebastião possui um formato retangular, cuja largura e comprimento estão na proporção de 2/3, quantos metros quadrados esse terreno possui e quais os valores de largura e comprimento dessa propriedade?

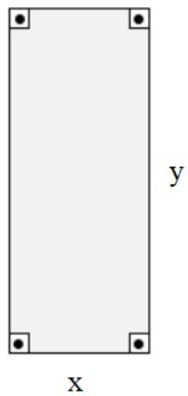
Solução. Observe que o terreno possui um total de 24 tarefas de terra, assim sabendo que 1 hectare corresponde a 3025 metros quadrados, podemos determinar a área desse terreno usando uma regra de três simples, logo temos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Área} & & \text{Área} \\ \text{em tarefas} & & \text{em m}^2 \\ 1 & \text{———} & 3025 \\ 24 & \text{———} & x \end{array}$$

Resolvendo essa regra de três, temos que x é igual a 72600 metros quadrados.

Agora, a partir das proporções do terreno e lançando mão da fórmula para o cálculo da área de retângulos, podemos encontrar o valor dos lados do terreno de seu Sebastião.

Figura 3.3: Terreno com formato retangular.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Suponha que o terreno possui dimensões x e y, conforme ilustrado na Figura 3.3). Como o terreno está na proporção de 2/3, temos que $x = 2y/3$, daí, para encontrar o valor das medidas, basta resolver a equação do segundo grau que se apresenta:

$$A = x \cdot y \Rightarrow \frac{2 \cdot y^2}{3} = 72600 \Rightarrow y^2 = 108900 \Rightarrow y = \sqrt{108900} \Rightarrow y = 330.$$

Como $x = 2y/3$, temos que $x = 220$ metros. Com isso, chegamos às dimensões do terreno: 220 metros de largura e 330 metros de comprimento.

Capítulo 4

Uma sequência didática em Agrimensura

Sabe-se que não existe uma forma única e mágica de se ministrar uma boa aula, que atraia a atenção de todos os alunos, ainda mais quando se trata de matemática, uma disciplina que exige muita concentração. Por isso, professores de matemática precisam estar sempre fazendo o uso de estratégias que possam manter os alunos interessados na aula, curiosos pelo que está por vir. Neste sentido, uma ferramenta que tem se destacado é a *sequência didática*, pois ela oferece ao professor um cronograma estruturado em uma lógica progressiva e gradual que visa fazer com que os alunos possam desenvolver suas habilidades e assim construir um conhecimento sólido. As sequências didáticas dentro da sala de aula tem se tornado uma forma de ensino valiosa, pois a partir de sua estrutura mais dinâmica e interativa, tem conseguido fazer com que os estudantes participem mais ativamente das aulas (Ferraz [42]). Elas permitem mostrar o caminho pelo qual o educador precisa seguir para chegar no seu objetivo final do processo ensino-aprendizagem.

Assim, podemos entender que uma sequência didática consiste em "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (Zabala [43], 2007, p. 18).

Segundo Peretti e Tonin da Costa [44], a sequência didática apresenta um conjunto de atividades conectadas e articuladas, cuidadosamente planejadas para apresentar e consolidar um determinado conteúdo, de forma progressiva, com o objetivo de alcançar metas específicas de aprendizado estabelecidas pelo professor. Essas atividades são organizadas em etapas e podem levar de alguns dias, semanas, ou até mesmo todo o ano letivo. Além disso, as atividades incluem momentos de avaliação para acompanhar o progresso e o desempenho dos alunos ao longo do processo de ensino-aprendizagem.

Neste contexto, tendo em vista a grande utilidade das sequências didáticas para a prática docente, será apresentado um conjunto de quatro atividades que exploram a temática relacionada à agrimensura dentro do eixo curricular de Geometria, Grandezas e Medidas e nessas sequências didáticas serão vivenciadas as seguintes habilidades.

D1 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D2 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D6 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

D17 – Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

4.1 Atividade 1 – origem da Agrimensura

Título da aula: A origem da agrimensura e sua influência nos conceitos regionais
Turmas: Ensino Médio
Eixo Curricular: Geometria e Grandezas e Medidas

Habilidades:

Nessa atividade, teremos por objetivo fazer com que os alunos desenvolvam o protagonismo em sua aprendizagem, de modo que eles possam:

- Compreender um pouco sobre História da Matemática e como se deu a origem e a evolução da Geometria.

- Compreender um pouco sobre a cultura e história dos povos.

Duração:

Para essa primeira atividade, será sugerida a duração de quatro aulas de 50 min cada, tendo em vista a quantidade de tarefas e momentos de socialização necessários.

Metodologia:

As metodologias usadas aqui serão: aulas expositivas, debates com os alunos, apreciação de documentário transmitido através de data show. O docente deve iniciar a aula instigando os alunos sobre como surgiram os primeiros conceitos geométricos e quais as dificuldades que tiveram que ser superadas a fim de que tais conceitos fossem construídos. Após esse momento, deve ser apresentado um breve filme sobre a história da matemática, o documentário Vida Matemática # 1, Egito O Berço dos Números (ver Figura 4.1).

Figura 4.1: Vida Matemática # 1, Egito O Berço dos Números.

Fonte: Hyung-Joon [45]

Antes de iniciar a apresentação do documentário, o professor deverá instruir os alunos a tomarem nota das informações e curiosidades transmitidas durante o longa, uma vez que após o encerramento do mesmo será realizado um debate e socialização daquilo que foi absorvido por eles. Também devem ser realizadas algumas pesquisas e atividades de fixação, propostas a seguir.

Atividade de fixação:

Esta atividade consiste na realização de um debate em sala e para tal, seguem alguns questionamentos que poderão ser feitos pelo professor para estimular a participação dos alunos. As perguntas aqui sugeridas serão direcionadas aos métodos que os egípcios empregavam para realizar a cubagem de terra fazendo um *link* com nossa atual realidade regional e cultural.

1. Nos dias atuais, será que alguma das metodologias adotadas pelos egípcios ainda está sendo utilizada? E quanto a nossa região, algo parecido ainda é empregado?

2. Cite quais os principais instrumentos eram usados pelos egípcios em suas tarefas? Alguns desses instrumentos ainda são utilizados nos dias atuais?

3. Faça uma pequena pesquisa investigativa na sua localidade sobre alguém que ainda hoje realiza a cubagem da terra através dos materiais e procedimentos vistos no vídeo. Pesquise também como tais pessoas adquiriram esses conhecimentos.

Após a conclusão desta atividade, deverá ser aberto um momento para que os alunos possam compartilhar suas pesquisas e relatar quais os pontos que mais chamaram sua atenção e por fim, deverá ser elaborado pelos alunos um pequeno relatório sobre a aula.

Recursos educacionais:

- Data Show para apreciação do documentário: Vida Matemática # 1, Egito O Berço dos Números [45].
- Quadro branco e pincel.
- Caneta, lápis, borracha e papel.

Avaliação:
A avaliação se dará de forma contínua e processual e será realizada durante a ministração da aula, na qual o professor observará: comportamento, participação, bem como, a realização das pesquisas propostas.

4.2 Atividade 2 – unidades não usuais

Título da aula: Aplicações de unidades de medidas não usuais.
Turmas: Ensino Médio
Eixo Curricular: Geometria e Grandezas e Medidas

Habilidades:
Nessas aulas, teremos por objetivo fazer com que os alunos desenvolvam o protagonismo em sua aprendizagem, de modo que eles possam:

- Aprimorar a noção espacial.

- Vivenciar as dificuldades enfrentadas pelas civilizações antigas devido à falta de um padrão de medida.

- Relacionar as unidades de medidas usuais com as não convencionais.

Duração:

Para essa segunda atividade, será sugerido a duração de quatro aulas de 50 min cada, tendo em vista as atividades e socialização necessárias.

Metodologia:

As metodologias usadas aqui serão: aulas expositivas, debates com os alunos e aplicação de desafios. O docente deve iniciar a aula instigando os alunos sobre os principais desafios gerados na sociedade devido à falta de uma padronização das unidades de medida. Após esse momento, deve ser apresentado um documentário que trata da evolução das medidas do tempo e do comprimento, a saber, A Medida de Todas as Coisas - Ep. 1 (ver Figura 4.2).

Figura 4.2: A Medida de Todas as Coisas - Ep. 1.

Fonte: Cunliffe [46].

Durante a apreciação deste documentário, o foco deve estar centrado na origem e evolução do sistema de medidas de comprimento. Assim, antes de ser iniciada a apresentação do documentário, o professor deverá instruir os alunos a tomarem nota das informações e/ou curiosidades transmitidas ao longo do filme de modo que, após o encerramento do mesmo será feito um debate e socialização daquilo que foi absorvido pela turma. Em seguida, deverá ser proposta a atividade de fixação.

Atividade de fixação:

Após a finalização do documentário, será aberto um momento de debates em que os alunos poderão compartilhar suas percepções acerca dos desafios e problemas enfrentados pelas civilizações passadas devido à falta de padronização das unidades de medidas que foram abordadas no filme.

Uma vez finalizado esse momento, o professor irá dividir a turma em equipes de 3 ou 4 alunos cada, a fim de que eles possam realizar a tarefa de modo colaborativo. Para auxiliar o professor no tocante a esta atividade, segue um roteiro ilustrativo.

Esta atividade consistirá no cálculo da área de pelo menos três grandes objetos localizados no interior da sala de aula, como quadro branco, carteira, cadernos ou livros, usando medidas de comprimento não usuais.

Após o professor fixar os objetos que serão medidos, as equipes elegerão um integrante que será a referência da unidade de medida escolhida, ou seja, cada equipe terá seu próprio representante a partir do qual serão estabelecidas unidades como a polegada, o pé, o palmo, o cúbito e a braça, tal como era feito na Idade Média. Neste ponto, o professor deverá entregar um pequeno rolo de barbante a cada equipe para que sejam tomadas as medidas escolhidas pelos seus integrantes.

Depois que todas as equipes tiverem medido os objetos previamente selecionados, deverá ser feito um momento de debate em que os alunos irão comparar os resultados encontrados e observar as diferenças entre os resultados de cada equipe. Finalizado o debate, os alunos irão fazer as devidas conversões das "suas" unidades não usuais para as unidades de medida do SI e novamente comparar as diferenças obtidas após a conversão. Por último, cada equipe deverá calcular as áreas dos objetos selecionados pelo professor com o auxílio de réguas e trenas. Daí, mais uma vez deverá ser feita uma comparação entre as equipes com os novos resultados encontrados e também compará-los com os resultados calculados no primeiro momento (ou seja, com as unidades não usuais).

Recursos educacionais:

- Data Show para apreciação do documentário: A Medida de Todas as Coisas - Ep. 1 [46].
- Quadro branco e pincel.
- Caneta, lápis, borracha, papel, régua e barbante.

Avaliação:

A avaliação se dará de forma contínua e processual e será realizada durante a ministração da aula, na qual o professor observará: comportamento, participação, bem como, a realização da atividade propostas.

4.3 Atividade 3 – tecnolgias de cubagem

Título da aula: Utilização de diferentes tecnologias para a cubagem de um terreno.
Turmas: Ensino Médio
Eixo Curricular: Geometria e Grandezas e Medidas

Habilidades:

Nesta atividade, teremos por objetivo fazer com que os alunos desenvolvam o protagonismo em sua aprendizagem, de modo que eles possam:

- Conhecer diversas ferramentas para se realizar a cubagem de terras.
- Praticar as metodologias usadas pelos agrimensores das antigas civilizações.
- Fazer a cubagem de terras através de tecnologias variadas.
- Relacionar os conhecimentos geométricos empregados pela agrimensura para realização de cubagem de terras.

Duração:

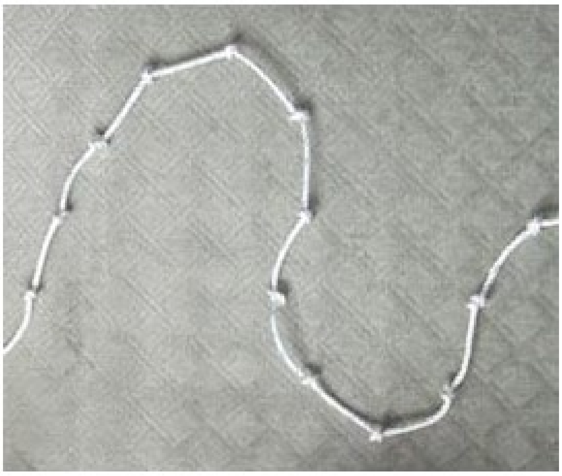
Para essa terceira atividade, será sugerido a duração de quatro aulas de 50 min cada, tendo em vista as atividades e socialização necessárias.

Metodologia:

No início da aula, deverá ser feito pelo professor uma breve apresentação dos instrumentos que serão utilizados nesta atividade, a saber:

- Fita métrica.
- Corda contendo 12 nós igualmente espaçados (ver Figura 4.3).
- Vara com medida de 2,2 metros (braça), conforme Figura 4.4.
- Aplicativos de celular (por exemplo, Medidor de Areas e Distancias, Calculadora de área da terra, Magicplan, Distância Medida Área Terrestre, AutoCAD e etc.)

Figura 4.3: Corda com 12 nós igualmente espaçados.



Fonte: Matemagia [47]

Figura 4.4: Vara de madeira com 2,2 metros.

Fonte: Silva e Santos [27] (2016, p.61).

As metodologias usadas para realização destas aulas serão: aulas expositivas, realização de trabalhos, debates com os alunos e elaboração de um texto.

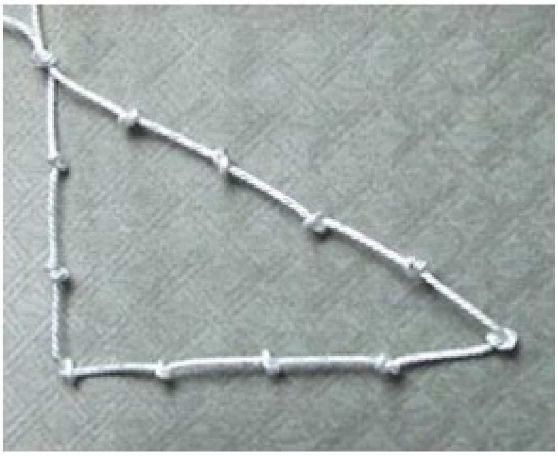
Atividade de fixação:

Para esta atividade, o professor dividirá a turma em cinco equipes levando-os para fazer a cubagem de um terreno retangular que será previamente selecionado pelo docente, sendo que cada uma das equipes formadas ficará incumbida de realizar uma determinada tarefa específica.

Equipe 1:

A Equipe 1 ficará com a tarefa de verificar através da corda com doze nós se o terreno apontado pelo professor possui um formato retangular. A metodologia empregada aqui remete a mesma metodologia que era usada pelos antigos agrimensores egípcios, uma vez que a corda de doze nós pode fornecer um triângulo retângulo conforme Figura 4.5:

Figura 4.5: Triângulo retângulo construído por uma corda.



Fonte: Matemagia [47]

Equipe 2:

Esta equipe estará incumbida de medir o comprimento e a largura do terreno com o auxílio de uma fita métrica e anotando os resultados obtidos num papel.

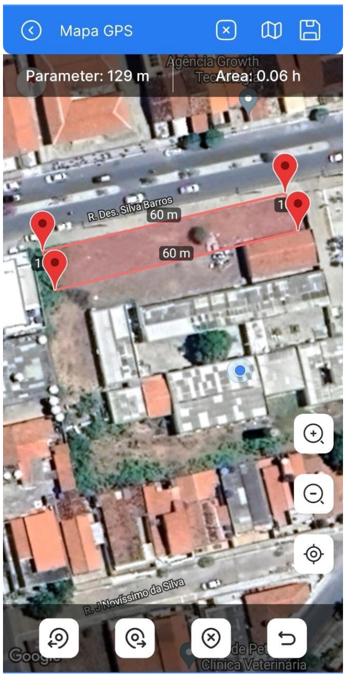
Equipe 3:

Por sua vez, a equipe 3 estará incumbida de tomar as dimensões do comprimento e da largura do terreno com o auxílio de uma vara (a braça) e os resultados obtidos deverão ser anotados num papel.

Equipe 4:

Esta equipe fará as medições do terreno usando um aplicativo de medição de distâncias e áreas de sua preferência (aqui ilustramos a utilização do aplicativo Medidor de Áreas e Distâncias), no qual o aluno poderá percorrer o as laterais do terreno e assim obter suas medidas como representado na Figura 4.6.

Figura 4.6: Interface do aplicativo Medidor de Áreas e Distâncias.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Equipe 5:

Por sua vez, a Equipe 5 ficará responsável em recolher os resultados obtidos pelas quatro equipes afim de realizar as devidas operações para calcular a área da região investigada.

Após o final das atividades de medição, o professor orientará cada uma das equipes a apresentar em sala os dados coletados em campo. Uma vez finalizadas as apresentações, cada equipe deverá fazer um relatório contendo as experiências vivenciadas durante a aula prática.

Recursos educacionais:

- Instrumentos para medições.
- Aparelho celular.

- Fita métrica, vara de medir.
- Caneta, lápis, borracha e papel.

Avaliação:

A avaliação se dará de forma contínua e processual e será realizada durante a ministração da aula, na qual o professor observará: comportamento, participação, bem como, a realização das tarefas propostas.

4.4 Atividade 4 – distâcias inacessíveis

Título da aula: Cálculo de distâncias inacessíveis.
Turmas: Ensino Médio
Eixo Curricular: Geometria e Grandezas e Medidas

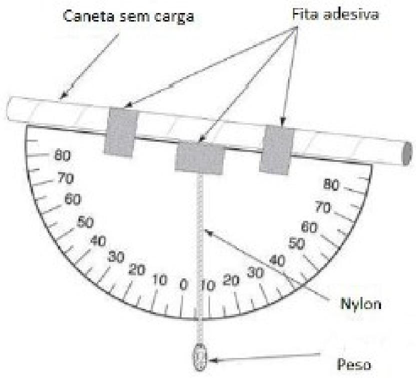
Habilidades:
Nesta atividade, o objetivo é fazer com que os alunos desenvolvam o protagonismo em sua aprendizagem, de modo que eles possam:

- Conhecer o funcionamento de um teodolito.
- Calcular distâncias inacessíveis através de instrumentos tecnológicos modernos e através de métodos antigos.
- Resolver problemas com a aplicação de relações trigonométricas do triângulo retângulo.
- Aplicar conhecimentos relacionados a proporcionalidade.

Duração:
Para essa terceira sequência didática, será sugerido a duração de quatro aulas de 50 min cada, tendo em vista as atividades e socialização necessárias.

Metodologia:
No início da aula, o professor deverá apresentar um teodolito caseiro composto por um transferidor, uma caneta vazia e um pequeno pedaço de barbante amarrado a um pequeno peso, conforme Figura 4.8.

Figura 4.7: Teodolito caseiro.



Fonte: Beck [48] (2017, p.3).

Após isso, será feito uma breve apresentação de como utilizar o instrumento no campo para medir o valor do ângulo procurado.

Atividade de fixação:

Esta atividade está direcionada ao cálculo da altura do campanário da igreja de Nossa Senhora do Perpétuo Socorro localizada em Salgueiro – PE, igreja essa que além de ser considerada como símbolo de orgulho e de superação para a comunidade é um grande marco arquitetônico do município.

Vale ressaltar que esta atividade pode ser realizada tendo como base qualquer outra estrutura de grande medida, tal como um poste, uma árvore, um galpão, e etc.

As metodologias usadas para realização destas aulas serão aulas práticas e expositivas, realização e apresentação de trabalhos confeccionados a partir de dados colhidos em campo, debates com os alunos e elaboração de um croqui. Assim, para esta atividade, o professor dividirá a turma em duas equipes em que uma ficará responsável por fazer o cálculo do campanário através das relações métricas do triângulo retângulo e a outra equipe realizará o mesmo desafio através da aplicação da semelhança de triângulos. Assim, dividindo as equipes temos:

Equipe 1:

A equipe 1 ficará com a tarefa de calcular a altura do campanário com a utilização do teodolito e para isso, o professor irá instruir a equipe nos seguintes passos:

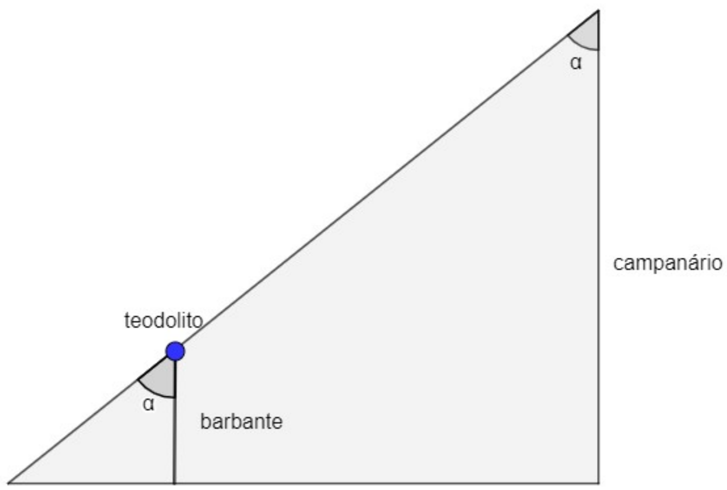
1º) Posicionar o teodolito a uma determinada distância do campanário.

2º) Com o auxílio de uma fita métrica, medir a distância entre o campanário e o teodolito.

3º) Observe, através da caneta, o topo do campanário e tome a medida do ângulo que barbante formou no transferidor.

Assim, ao observar através do canudo o ponto mais alto do campanário, temos que o menor ângulo formado entre a caneta e o pedaço de barbante é o mesmo ângulo formado pelo segmento de reta que representa a vista do observador ao topo do campanário, como mostra a Figura 4.8.

Figura 4.8: Ângulo determinado pelo teodolito caseiro.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Com o ângulo α encontrado através do teodolito e também de posse da distância entre o teodolito e o campanário, é só aplicar a relação da tangente de α, ou seja:

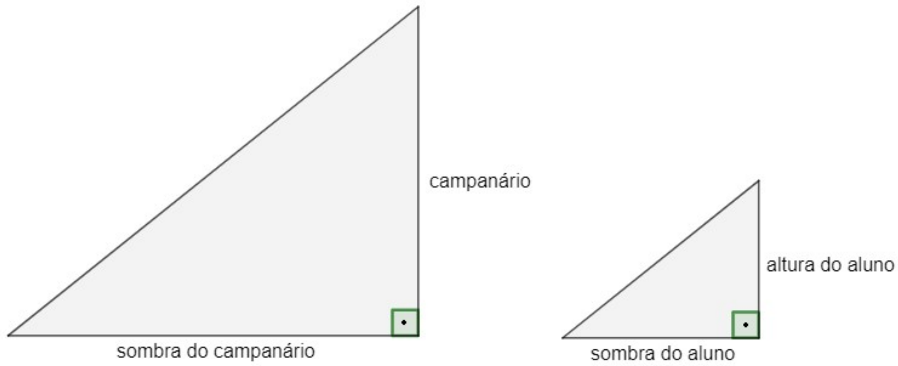
$$\tan \alpha = \frac{\text{distância entre o teodolito e o campanário}}{\text{altura do campanário}}$$

Ao aplicarmos a fórmula acima, encontraremos o valor da altura do campanário, porém para o resultado final, precisaremos acrescentar ao valor encontrado a altura do teodolito.

Equipe 2:

Esta equipe estará incumbida de calcular a altura do campanário através da semelhança de triângulos com a utilização de uma simples fita métrica. Assim, os alunos desta equipe deverão medir o comprimento da sombra do campanário e também, o tamanho da sombra e da altura de um dos integrantes da equipe que esteja posicionado próximo a construção, como mostra a Figura 4.9.

Figura 4.9: Esquema para calcular a altura inacessível.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Logo, com os resultados obtidos e anotados em um papel, os integrantes desta equipe irão usar a seguinte relação:

$$\frac{\text{altura do campanário}}{\text{altura do aluno}} = \frac{\text{comprimento da sombra do campanário}}{\text{comprimento da sombra do aluno}}$$

Assim, usando uma regra de três simples obtemos o valor da altura do campanário.

Recursos educacionais:

- Aparelho celular.
- Fita métrica.
- Caneta, lápis, borracha e papel.
- Teodolito caseiro.

Avaliação:

A avaliação se dará de forma contínua e processual e será realizada durante a realização da aula de campo na qual o professor observará: comportamento, participação, bem como, a realização das tarefas propostas.

Capítulo 5

Considerações finais

Ao longo de tudo aquilo que foi apresentado neste trabalho, buscou-se deixar claro que a forma e/ou metodologia usada por parte dos professores de Matemática para ministrar esta disciplina pode causar bastante dificuldade entre os alunos, mas que com a utilização de estratégias didáticas simples isso pode ser amenizado.

Neste contexto, o uso de abordagens pedagógicas como aulas práticas e aulas de campo estruturadas a partir de uma sequência didática bem definida e bem contextualizada pode enriquecer a experiência ensino-aprendizagem dos alunos, aproximando-os significativamente da Matemática. Acreditamos, particularmente, que o uso da Agrimensura em aulas extraclasse pode proporcionar uma compreensão mais concreta dos conceitos matemáticos.

Ao vivenciar a Matemática a partir de situações reais, presentes em seu cotidiano, os alunos podem perceber como ela pode ser atrativa e interessante, bem como vicenciar a aplicabilidade dos diversos conceitos envolvidos nesta disciplina, muitas vezes abordados apenas dentro das salas de aula.

Além disso, tem-se que mesclar atividades práticas com métodos tradicionais torna a aprendizagem mais acessível e prazerosa, possibilitando ao aluno superar dificuldades que muitas vezes são herdadas das metodologias tradicionais. Vale ressaltar que, embora a sequência didática apresentada neste trabalho envolva apenas conceitos introdutórios da Agrimensura, ela faz uso de tecnologias educacionais, bem como de outros recursos criativos que, por sua vez, despertam o interesse dos alunos, promovendo a participação ativa em sala de aula, além de estimular a autonomia na resolução de problemas.

As práticas regionais presentes em situações-problema também se mostram relevantes para o ensino da Matemática, uma vez que elas valorizam a cultura local e as diferentes formas de conhecimento. Incorporar elementos culturais e contextos regionais nas aulas estimula o engajamento dos alunos e possibilita um processo de ensino-aprendizagem mais significativo, uma vez que os alunos podem se identificar como protagonistas do seu processo educativo de modo tal que, ao final, eles amadureçam e incorporem diversas outras habilidades e competências, o que é bem diferente de apenas atingir boas notas em avaliações escritas, como o SAEPE por exemplo. Isso promove uma educação com resultados positivos para suas vidas.

Por fim, sabe-se que a Matemática deve ser vivenciada e trabalhada em um coletivo. A busca por uma boa prática de ensino da Matemática deve ser contínua, envolvendo não apenas professoes, mas também gestores, familiares e os próprios alunos. A colaboração e o diálogo entre todos os envolvidos, bem como a adoção de estratégias inovadoras, contextualizadas e adaptadas à realidade dos alunos, possibilita transformar a experiência de aprendizagem da Matemática, tornando-a mais próxima, interessante e valiosa para a formação integral dos estudantes.

Referências Bibliográficas

1 PLANEJAMENTO, G. e. D. R. d. P. Secretaria de. *Pacto Pela Educação*. 2018. Disponível em: <https://www.seplag.pe.gov.br/pactos/43-pactos/39-pacto-pela-educacao>. Acesso em: 11 de setembro de 2023.

2 MASOLA, W.; ALLEVATO, N. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. *Educação Matemática Debate*, v. 3, n. 7, p. 52–67, 2019.

3 PEREIRA, A. C. C. Educação matemática no ceará: Os caminhos trilhados e as perspectivas.

4 BORBA, V. M. de L.; COSTA, A. P. da. Sucesso e fracasso no ensino da matemática: o que dizem futuros professores de uma ies? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, v. 2, n. 1, p. 55–76, 2018.

5 BRITO, D. R. de; MATTOS, J. R. L. de. Problemas geométricos tratados por produtores rurais. 2016.

6 CÂNDIDO, L. P. S. et al. Áreas e distâncias na agrimensura: uma proposta didática de modelagem matemática para o ensino fundamental e médio. Universidade Federal de Alagoas, 2016.

7 SILVEIRA, P. R. S. d. et al. Análise pedagógica das provas do saepe da disciplina de matemática dos 3º anos do ensino médio. Universidade Federal de Campina Grande, 2021.

8 GONÇALVES, J. B. et al. Análise dos resultados do saepe da disciplina de matemática dos 9. os anos do ensino fundamental. Universidade Federal da Paraíba, 2019.

9 PEREIRA, M. d. J.; MACEDO, M. M. D. d.; RESENDE, R. R. Avaliação da aprendizagem na 4ª série do ensino fundamental.

10 BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 de julho de 2023.

11 DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, v. 3, 2013.

12 BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

13 TOU, E. Measuring the accuracy of an ancient area formula. *Mathematical Spectrum*, v. 46, n. 3, p. 107, 2014.

14 BOTTEMA, O. O. *Geometric inequalities*. Wolters-Noordhoff, 1969. Disponível em: <https://cir.nii.ac.jp/crid/1130000797909095680>.

15 CREASE, R. *A medida do mundo*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2013.

16 ROZENBERG, I. M. *O sistema internacional de unidades-SI*. [S.l.]: Instituto Mauá de Tecnologia, 2002.

17 CORRÊA, P. d. C. et al. Sistema métrico decimal: difusão no sistema escolar do pará (1868–1918). Universidade Federal do Pará, 2019.

18 MOSCATI, G. O sistema internacional de unidades (si): passado, presente e futuro. *Revista Metrologia & Instrumentação*, n. 48, 2007.

19 CACAIS, F. A. L.; MENDOZA, V. M. L. Redefinição do kilograma i: motivações e justificativas. 2017.

20 LIMA, V. de O. Revoltas dos quebra-quilos. levantes contra a imposição do sistema métrico decimal.

21 POZEBON, S.; LOPES, A. R. L. V. Grandezas e medidas: surgimento histórico e contextualização curricular. In: *VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática-2013*. [S.l.: s.n.], 2013.

22 FISICA.NET. *Pesos e Medidas Histórico*. 2009. Disponível em: <https://www.fisica.net/unidades/pesos-e-medidas-historico.pdf>. Acesso em: 04 de julho de 2023.

23 SILVA, J. R. N. d. et al. Etnomatemática: abordagem dos diversos tipos de unidades de medidas e sua utilização no sertão alagoano. Universidade Federal de Alagoas, 2016.

24 BANNA, W. R. E. *METROLOGIA ORIENTADA A CONTROLES AUTOMOTIVOS*. 2019. Disponível em: <https://avant.grupont.com.br/dirVirtualLMS/arquivos/arquivosPorRange/0000821285/texto/

d2bc03335b56deb2be5679eb54143c77.pdf>. Acesso em: 29 de junho de 2023.

25 NOGUEIRA, J. *Unidades de Medida*. 2015. Disponível em: <https://slideplayer.com.br/slide/2678817/>. Acesso em: 05 de julho de 2023.

26 MORINI, A. A. *Tabela de Unidades*. 2013. Disponível em: <https://docente.ifsc.edu.br/gianpaulo.medeiros/MaterialDidatico/Metrologia/Aula%202/MET_aula02_03_Unidades.pdf>. Acesso em: 05 de julho de 2023.

27 SILVA, G. dos S.; SANTOS, J. C. D. Unidades de medidas: Um estudo dos saberes milenares dos agricultores da zona rural de são raimundo nonato. *Cadernos Cajuína*, v. 1, n. 3, p. 53–68, 2016.

28 VALVERDE, O. Geografia da pecuária no brasil. *Finisterra*, v. 2, n. 4, 1967.

29 ONOFRE, E. J. d. O. Medidas de comprimento e de área: um estudo sobre unidades de medidas e sobre o cálculo de áreas de algumas figuras planas. Universidade Federal da Paraíba, 2018.

30 FONSECA, L. S. da. Caminhos da educação matemática em revista (online). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe (IFS), 2022.

31 CORRêA, I. C. S. *A História da Agrimensura*. 2009. Disponível em: <https://igeo.ufrgs.br/museudetopografia/images/acervo/Exposicoes/Apresentao_Agrimensura.pdf>. Acesso em: 15 de julho de 2023.

32 EVES, H. W. et al. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp Campinas, 2004.

33 ROQUE, T. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

34 D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 1996.

35 CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. *Na vida dez, na escola zero*. [S.l.]: Cortez São Paulo, 1988.

36 ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades. *Ponta Grossa, Brasil, Brasil. Obtido em*, v. 13, p. 44–4, 2019.

37 MÜLLER, I. Tendências atuais de educação matemática. unopar cient. *Ciênc. Hum. Educ*, p. 133–144.

38 BOERI, C. N.; VIONE, M. T. Abordagens em educação matemática. *Domínio público*, v. 1, p. 71, 2009.

39 DAMASCENO, L. N.; RABELO, J. C. R. Matemática: Nos dias atuais ainda existe um nível alto de rejeição? *Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 13, n. 1, 2019.

40 VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, v. 24, n. 2, p. 39–60, 2015.

41 SOUZA, A. V. P.; OHIRA, M. A.; PEREIRA, A. L. A arte de resolver problemas no ensino da matemática. *Revista Valore*, v. 3, p. 376–389, 2018.

42 FERRAZ, J. K. A importância da sequência didática como instrumento dinamizador no ensino da matemática. Colatina, 2022.

43 ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015.

44 PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. D. Sequência didática na matemática. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, p. 1–15, 2013.

45 HYUNG-JOON, K. *Vida Matemática, Egito, O Berço dos Números*. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=XfIj6vBB7TY>. Acesso em: 16 de setembro de 2023.

46 CUNLIFFE, M. *A Medida de Todas as Coisas*. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=G0jBGm__Rek>. Acesso em: 16 de setembro de 2023.

47 MATEMAGIA. *Cálculo de Áreas*. 2013. Disponível em: <http://mj-matemagia.blogspot.com/2013/11/>. Acesso em: 06 de julho de 2023.

48 BECK, M. M. Uso do teodolito caseiro para o ensino de razões trigonométricas na rede municipal de porto alegre. In: *VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA-2017*. [S.l.: s.n.], 2017.