



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

NATÁLIO JOÃO SILVA

**OS ARBELOS DE ARQUIMEDES: UMA AMPLIAÇÃO PARA AS ELIPSES E UMA
DEMONSTRAÇÃO ALTERNATIVA DO TEOREMA DE PAPPUS SEM O USO DE
INVERSÃO**

**JUAZEIRO DO NORTE
2023**

NATÁLIO JOÃO SILVA

OS ARBELOS DE ARQUIMEDES: UMA AMPLIAÇÃO PARA AS ELIPSES E UMA
DEMONSTRAÇÃO ALTERNATIVA DO TEOREMA DE PAPPUS SEM O USO DE
INVERSÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis
Benjamim Filho

JUAZEIRO DO NORTE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S586a Silva, Natálio João.

Os arbelos de arquimedes: uma ampliação para as elipses e uma demonstração alternativa do teorema de pappus sem o uso de inversão/ Natálio João Silva –2023.
76 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p. 60-63).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho.

1. Arbelos. 2. Parbelos. 3. Cadeia de Pappus. 4. Teorema de Pappus. I. Título.

CDD 516.5

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

NATÁLIO JOÃO SILVA

OS ARBELOS DE ARQUIMEDES: UMA AMPLIAÇÃO PARA AS ELIPSES E UMA
DEMONSTRAÇÃO ALTERNATIVA DO TEOREMA DE PAPPUS SEM O USO DE
INVERSÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em: 31 de agosto de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho
UFCA

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves
UFCA

Prof. Dr. Renivaldo Sodré de Sena
IFCE

*A minha família, em especial a
minha mãe, que sempre esteve
comigo nos melhores e piores
momentos, a meu pai, que sempre
me ensinou o que é certo, e a minha
esposa, que nunca desistiu de mim.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida;

A minha família: minha mãe, Maria Socorro; Meu Pai, João Otávio, que esta no céu; e a todos os meus irmãos: Ricardo João, Ricaria Maria e Jaiane Maria.

A minha esposa, Rosana do Nascimento Macedo, que sempre me deu forças para conseguir tudo o que tenho.

A todos os meus colegas de curso, em especial ao Diógenes, que sempre esteve comigo durante todos os momentos.

A todos os professores, pela dedicação e pelo bom desempenho nos seus trabalhos, todos foram muito importantes para mim durante esse período.

Agradeço em especial ao professor Dr. Francisco Assis, por aceitar meu singelo convite de ser meu orientador, sem ele nada disso seria possível.

Ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que proporcionou conhecer pessoas maravilhosas e aprender um pouco mais sobre essa disciplina - A Matemática.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pelo incentivo financeiro ao programa.

À Universidade Federal do Cariri (UFCA), por ser uma grande parceira do projeto.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar e ampliar as propriedades dos Arbelos de Arquimedes e da Cadeia de Pappus. Um Arbelo é uma estrutura composta por três semicírculos tangentes dois a dois, de modo que os diâmetros dos três semicírculos estejam sobre a mesma reta. Tal estrutura foi estudada pelo matemático Arquimedes, que encontrou diversas propriedades geométricas interessantes. Inicialmente teremos uma introdução seguida de um breve relato histórico sobre a vida e obra de Arquimedes de Siracusa e Pappus de Alexandria. Nos conceitos preliminares, apresentamos definições e resultados sobre circunferências e elipses que serão de extrema importância para o bom entendimento deste trabalho. Na seção destinada aos resultados, apresentamos uma ampliação de duas propriedades dos arbelos para as elipses, exigindo, para tanto, que as elipses envolvidas tenham a mesma excentricidade. Provamos o Teorema de Pappus usando apenas geometria plana e geometria analítica, o que difere de modo substancial do que tradicionalmente é feito: a construção usando a técnica de inversão, normalmente não vista no Ensino Médio. Por fim, como produto educacional, apresentamos uma sequência didática voltada para o ensino dos círculos e das elipses, tais atividades podem ser aplicadas nas três séries do Ensino Médio.

Palavras-chave: Arbelos. Pabelos. Cadeia de Pappus. Teorema de Pappus.

ABSTRACT

The present work aims to study and expand the properties of Archimedes' Arbelos and the Pappus Chain. An Arbelo is a structure composed of three semicircles that are pairwise tangent and have the diameters on the same line. Such a structure was studied by the mathematician Archimedes, who found several interesting geometric properties. Initially we will have an introduction followed by a brief historical account of the life and work of Archimedes of Syracuse and Pappus of Alexandria. In the preliminary concepts, we present configurations and results about circles and ellipses that will be of extreme importance for the good understanding of this work. In the section dedicated to the results, we present an extension of two properties of the arbelos to the ellipses, provided that the ellipses involved have the same eccentricity. We prove Pappus' Theorem using only plane geometry and analytic geometry, which differs substantially from what is traditionally done: construction using the inversion technique, normally not seen in High School. Finally, as an educational product, we present a didactic sequence devoted for teaching of concept of circles and ellipses, Such activities can be applied in the three grades of high school.

Keywords: Arbelos. Parbelos. Pappus Chain. Pappus Theorem.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xii
1 Introdução	1
2 Conceitos preliminares	4
2.1 Breve história	4
2.1.1 Arquimedes de Siracusa	4
2.1.2 Pappus de Alexandria	6
2.2 A circunferência	7
2.2.1 Circunferências tangentes	10
2.2.2 Circunferência e ponto externo	14
2.3 Elipse	15
2.4 Área e Comprimento da Elipse	23
2.5 Os arbelos, os parbelos e suas propriedades	27
3 Ellarbelos	32
3.1 Cadeia de Pappus	35
3.1.1 Teorema de Pappus e Coordenadas dos centros dos círculos da Cadeia de Pappus	39
4 Proposta de Sequência Didática	47
4.1 Atividade I: Arquimedes, o gênio da matemática	48
4.2 Atividade II: A matemática na arte de resolver problemas	50
4.3 Atividade III: A circunferência e seu lugar na matemática	51
4.4 Atividade IV: De onde vêm as cônicas?	52
4.5 Atividade V: A elipse e suas aplicações	55
4.6 Atividade VI: Ellarbelos, uma ampliação dos arbelos de Arquimedes	57
5 Considerações Finais	59

LISTA DE FIGURAS

1.1	Questão do livro	2
2.1	Arquimedes de Siracusa.	5
2.2	Cilindro com um esfera circunscrita.	6
2.3	Página de rosto do trabalho Mathematicae colletiones.	6
2.4	Círculo de centro (a, b) e raio r	8
2.5	Reta t tangente à circunferência λ	8
2.6	Triângulos semelhantes.	11
2.7	Circunferências tangentes externas.	11
2.8	Circunferências tangentes internas.	12
2.9	Circunferências tangentes externas no ponto B.	12
2.10	Circunferências tangentes internas no ponto B.	13
2.11	Circunferências tangentes externas no ponto P.	13
2.12	Circunferências tangentes internas no ponto P.	14
2.13	Retas tangente a Γ , passando pelo ponto P.	14
2.14	Elipse de focos F_1 e F_2	15
2.15	Elipse com centro na origem do sistema cartesiano.	16
2.16	Elipse com centro na origem do sistema cartesiano e eixo maior sobre o eixo Oy	17
2.17	Elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo Ox	18
2.18	Elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo Oy	18
2.19	Elipse de foco nos pontos $F_1 = (0, 2\sqrt{3})$ e $F_2 = (0, -2\sqrt{3})$	19
2.20	Elipses com diferentes excentricidades.	19
2.21	Triângulo semelhantes de razão 2.	20
2.22	Elipses E e E' com centros no plano cartesiano.	21
2.23	Equação da elipse.	23
2.24	Faca de sapateiro	28
2.25	Arbelo	28
2.26	Área do arbelo igual a área do círculo de diâmetro A_2B	29
2.27	Parábola de foco F e diretriz L	29
2.28	Segmento C_1C_2 , Latus Rectum da parábola P	30
2.29	Parbelo.	30

3.1	Arbelo elíptico ou ellarbelo.	32
3.2	ellarbelo e elipse de eixo focal E_2A	33
3.3	Cadeia de Pappus.	35
3.4	Círculo tangente.	36
3.5	Em azul, círculo que contém os pontos de tangência dos círculos da Cadeia de Pappus.	37
3.6	Arbelo ABC com A centrado na origem do plano cartesiano	39
3.7	Arbelo ABC e circunferência da Cadeia de Pappus	42
3.8	Pontos A , T_n e I alinhados	43
3.9	Arbelo ABC e circunferência da Cadeia de Pappus de raio r_n e r_{n+1}	43
3.10	Seis primeiros círculos da Cadeia de Pappus para $R = 4$ cm e $r = 3$ cm	46
4.1	Planta da praça na forma de uma arbelo.	48
4.2	Arquimedes e o problema da coroa.	49
4.3	Dedução da fórmula da área da circunferência.	51
4.4	Lanterna com feixe de luz	53
4.5	Lanterna com feixe de luz inclinada.	53
4.6	Cônicas	54
4.7	Construção da elipse.	54
4.8	Interior do Coliseu	55
4.9	Imagens da elipse no Geogebra.	56
4.10	Distribuição do campo magnético para dois fios paralelos com corrente assimétrica e gráfico de ellarbelos.	57
4.11	Medidor de vazão com engrenagens oval.	58

LISTA DE TABELAS

- 3.1 Tabela contendo as coordenadas dos seis primeiros círculos da Cadeia de Pappus 45

Capítulo 1

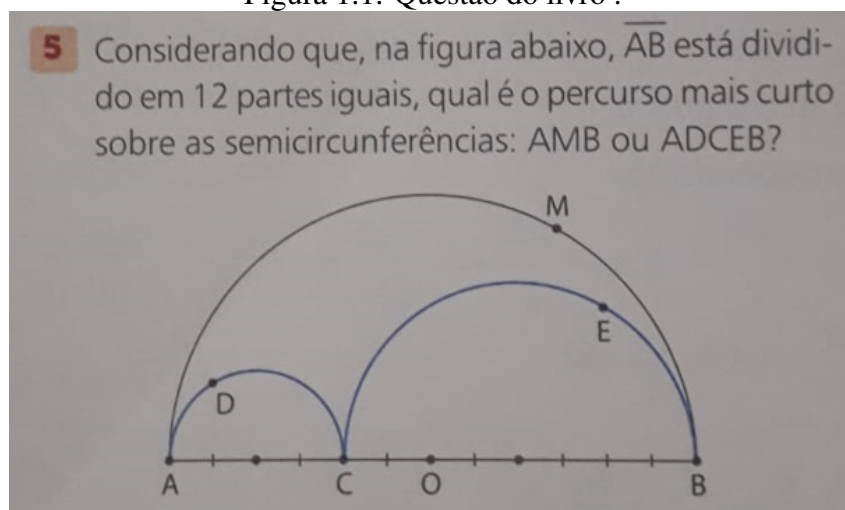
Introdução

Diante do cenário educacional que vivemos no qual a Matemática, muitas vezes, é colocada como uma das disciplinas mais críticas no que diz respeito ao aprendizado e à aceitação dos estudantes, é importante proporcionar aos discentes situações do cotidiano que deem significado aos conceitos trabalhados na escola, sendo a falta de conexão com o dia a dia um dos grandes motivos para que os alunos deixem de acreditar na utilidade de tal disciplina. Corroborando essa ideia, Gervázio (2017) relata que o ensino tradicional da Matemática é um dos principais fatores que fazem da disciplina uma grande vilã no currículo dos alunos, causando assim uma grande evasão escolar.

Por outro lado, a geometria, um dos ramos mais importantes da Matemática, acaba sendo pouco trabalhada nos anos finais do Ensino Fundamental, o que traz mais dificuldade para professores e alunos do Ensino Médio nos processos de ensino e aprendizado. Os conceitos geométricos são bem diversos, por vezes, bem difíceis de abordar por parte do professor e de internalizar por parte do estudante. Dois exemplos são o Teorema de Pappus e o Teorema de Pitágoras.

O presente trabalho foi idealizado durante o período de curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profm. Durante essa trajetória ao ministrar aulas em escolas da Educação Básica na cidade de Iguatu, em particular, na segunda série do Ensino Médio, deparei-me com um problema Matemático, Figura 1.1, que pode ser encontrado em Iezzi et al. (2016, p. 12), o qual me fez pensar a respeito do tema. Tal problema encontrava-se na parte de círculos e circunferências e consistia em três semicircunferências tangentes duas a duas, o que gerava uma figura plana, conhecida como arbelo. O objetivo do problema abordado era calcular qual o caminho mais curto entre os dois caminhos existentes no desenho.

Figura 1.1: Questão do livro .



Fonte: Iezzi et al. (2016).

Durante a apresentação da situação problema, os estudantes se mostraram bastante curiosos, pois imaginavam que o comprimento da semicircunferência maior, superaria a soma dos comprimentos das semicircunferências menores, o que os deixou todos intrigados foi o fato desses resultados serem iguais. Pesquisando um pouco mais sobre o tema, descobri que aquela estrutura, conhecida como arbelo, foi estudada por Arquimedes de Alexandria há mais de dois mil anos, o qual descobriu inúmeras propriedades. Vale ressaltar que, durante a pesquisa que realizamos foram encontrados poucos trabalhos relacionados a esse tema em Língua Portuguesa.

Diante disso, o presente trabalho tem como objetivos dar suporte técnico e pedagógico aos professores de Matemática em relação ao assunto arbelos; apresentar o estudo dos arbelos e sua generalização para as elipses; exibir uma prova alternativa do Teorema de Pappus sem o uso de inversão; propor uma sequência didática sobre arbelos.

Dessa forma, para alcançarmos os objetivos estabelecidos acima, dividimos esse trabalho em cinco capítulos, sendo o primeiro deles a presente introdução na qual deixamos clara a motivação, os objetivos e a relevância do tema estudado.

No segundo capítulo, iniciamos com uma breve introdução histórica falando sobre Arquimedes de Siracusa e Pappus de Alexandria. Durante essa abordagem apresentamos algumas de suas principais obras e feitos que marcaram esses dois personagens na história da Matemática como grandes estudiosos. Ainda nesse capítulo, apresentamos os recursos necessários para a compreensão do restante dessa obra.

No capítulo três, são apresentados os resultados: iniciamos definindo os arbelos elípticos (ou ellarbelos), uma extensão dos arbelos para as elipses e demonstramos alguns resultados relevante. Ainda nesse capítulo, estudamos a Cadeias de Pappus e apresentamos diversas propriedades desse tópico. Nessa parte do trabalho, são destacadas algumas propriedades inovadoras dos ellarbelos e da Cadeia de Pappus.

No quarto capítulo, apresentamos uma breve sequência didática sobre o tema, a qual é composta por cinco atividades destinadas ao público da segunda série do Ensino Médio, podendo ser adaptada a outros níveis.

Por fim, no quinto capítulo temos nossas considerações finais.

Capítulo 2

Conceitos preliminares

Neste capítulo, apresentamos os conceitos fundamentais para o bom entendimento dessa obra. Iniciamos apresentando um breve relato histórico sobre Arquimedes de Siracusa e Pappus de Alexandria. Em seguida, definimos e abordamos propriedades sobre as circunferências e as elipses tais como: eixo maior, distância focal, elipse equilátera, entre outros. Apresentamos também alguns conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral, a saber, cálculo de áreas e comprimento de curvas, que serão fundamentais para chegarmos às fórmulas da área e do comprimento da elipse.

Esse capítulo é baseado nas obras Barbosa (1985), Magno, Chaquiam e Sousa (2020), Venturi (1949), Dias e Dantas (2006), Iezzi (2013), Brito (2020), Steinbruch e Winterle (2000), Bezerra e Silva (2010), Leithold (1990), Silva (2014a) e Fonseca (2021).

2.1 Breve história

2.1.1 Arquimedes de Siracusa

Nascido em Siracusa, na época parte do mundo Grego, hoje atual Itália, Arquimedes (287-212) a.C é considerado um dos maiores cientistas de todos os tempos e o maior matemático da antiguidade. Filho do autônomo Fídias, o qual obteve uma aproximação para a razão entre os diâmetros do Sol e da Lua, Arquimedes passou alguns anos no Egito e, provavelmente, estudou na cidade de Alexandria, centro da ciência grega na época.

Embora seus principais trabalhos fossem nas áreas Matemática e Física, a fama de Arquimedes na época se deu por ele ser um grande construtor de máquinas de guerra, como por exemplo: catapultas, guindantes e espelhos ardentes. Entre as invenções creditadas a ele consta o Parafuso de Arquimedes, o qual se trata de um sistema de bombeamento de água conhecido como *Cóclea*.

Figura 2.1: Arquimedes de Siracusa.



Fonte: Wikipedia (2004)

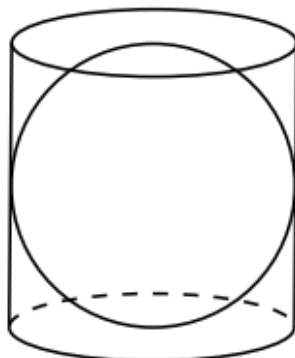
Muitas das histórias de Arquimedes estão relacionadas à defesa de sua cidade, Siracusa. Uma das mais famosas é a dos espelhos queimando os navios romanos. Segundo Assis (2008), Arquimedes teria concentrado os raios solares usando um grande espelho para atear fogo aos navios de Roma.

Sem dúvidas, Arquimedes era um grande sábio. Ainda de acordo com o trabalho de Assis (2008), quando o rei Hierão tomou o poder de Siracusa, este solicitou a confecção de uma coroa feita de ouro para homenagear os deuses. Prontamente, os ourives, profissionais que trabalham com esse tipo de matérias, entregaram-lhe o pedido, o qual deixou o rei bastante feliz, até que um dia ouviu rumores que parte do ouro que havia destinado para a construção da coroa tinha sido roubado. Sem saber como descobrir a fralde, o rei Hierão solicitou ao matemático para que esse resolvesse o problema. Debruçando-se sobre o assunto, um belo dia ao entrar em uma banheira, Arquimedes percebeu que a medida que seu corpo afundava, saía água do recipiente na mesma proporção, com isso, o sábio percebeu que se trabalhasse com a densidade do ouro e da prata poderia resolver o problema, diante da solução do desafio, segundo o trabalho do autor acima citado, Arquimedes saiu correndo pelas ruas da cidade gritando, eureka, eureka, (encontrei encontrei)!

De fato, Arquimedes foi um grande matemático para sua época e para os dias atuais. Das principais obras que sobreviveram a todos esses anos e chegaram até nós, muitas delas eram destinadas ao astrônomo Canon de Samos, a seu discípulo Dositheu de Pelússia, ao rei Gelon, filho do rei Hierão, e a Erastóstenes, bibliotecário do museu de Alexandria e conhecido pela estimativa do raio da terra. Dentre essas obras, destacamos as seguintes: *Sobre as esferas e o cilindro*, *Medidas do círculo*, *Sobre conoides e esferoides*, *Sobre as espirais*, *Sobre o equilíbrio dos planos*, *O contador de areia*, *Quadratura da parábola*, entre outras.

Na obra *Sobre as esferas e o cilindro*, Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é igual a quatro vezes a área do círculo maior que passa pelo seu centro e mostra ainda que o volume da esfera vale dois terços do volume do cilindro circunscrito a ela, conforme a Figura 2.2, o qual Arquimedes expressou em vida que em seu túmulo fosse colocado um cilindro circunscrito a uma esfera dentro dele.

Figura 2.2: Cilindro com um esfera circunscrita.



Fonte: Assis (2008).

Arquimedes foi morto em 212 a.C por um soldado romano durante a conquista da cidade por Marcelo, o qual tinha bastante admiração pelo matemático, e que, mesmo dando ordens expressas a seus soldados que poupassem a vida de Arquimedes, essas não foram cumpridas.

2.1.2 Pappus de Alexandria

Pappus nasceu em Alexandria e é considerado o matemático mais importante entre os gregos da época do final do Império Romano. De acordo com Jones (2021), seu trabalho mais importante é *Sinagoga*, que significa coleção.

Figura 2.3: Página de rosto do trabalho Mathematicae collectione.



Fonte: Wikiwand (2007)

Infelizmente, da única cópia grega da Sinagoga, que sobreviveu durante toda a idade média, foram encontrados apenas os livros, do 3 ao 7, e partes dos livros 2 e 8. Desse último, pode ser encontrada sua tradução para o Árabe. O livro 1 foi completamente perdido.

Ainda segundo Jones (2021), a coleção Sinagoga aborda diversos tópicos matemáticos interessantes tendo Geometria como o principal enfoque. O segundo livro trabalha o seguinte problema. Associando α ao número 1, β ao número 2, e assim sucessivamente até ω ao número

24, como calcular o produto de todas as letras em uma linha de uma poesia e nomear esse resultado? O terceiro livro trata da duplicação do cubo, isto é, dado um certo cubo, como construir outro que tenha o dobro do volume do primeiro? O quarto livro aborda o estudo de espirais bem como a divisão de uma ângulo dado em uma quantidade de partes iguais.

De acordo com Magno, Chaquiam e Sousa (2020), o livro 5 é composto de cinco partes, das quais a segunda fala sobre círculos inscritos no Arbelo de Arquimedes. Arbelos são figuras geométricas que serão estudadas na Seção 2.7. Tais círculos são conhecidos na literatura como *Cadeia de Pappus*, ver Figura 3.3. O livro 6 fala sobre Astronomia, o livro 7, o mais longo, é um comentário do autor sobre um grupo de livros de Euclides, Apolônio de Perga, Eratóstenes de Cirene e Aristeu, referidos coletivamente como “*O tesouro da análise*”, e, por fim, o oitavo livro fala sobre algumas aplicações de Geometria na Mecânica, nos quais os tópicos incluem construções geométricas feitas sob condições bem peculiares como, por exemplo, usando uma bússola enferrujada presa e uma abertura fixa.

2.2 A circunferência

Nessa seção são apresentados alguns conceitos básicos sobre circunferência, tais como sua definição como lugar geométrico e propriedades que serão de extrema importância para essa obra.

Definição 1 (Distância entre dois pontos). *Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ no plano cartesiano, a distância entre eles é dada por*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.1)$$

Definição 2. *Dados um ponto C , pertencente a um plano α , e um número positivo r , chama-se circunferência o conjunto dos pontos de α que estão a uma distância r do ponto C .*

Considere a circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio r , conforme a Figura 2.4.

Um ponto P pertence a λ se, e somente se, $d(P, C) = r$. Portanto, temos que

$$P \in \lambda \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r,$$

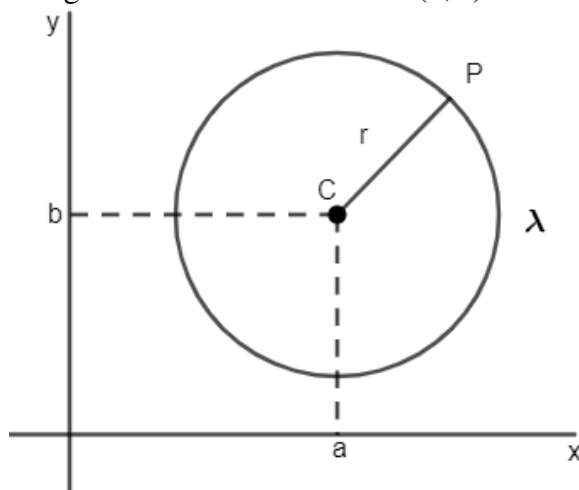
e, daí, temos a equação da circunferência.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (2.2)$$

Exemplo: A equação da circunferência de centro $C(5, 6)$ e raio $r = 2$ é $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 4$.

Uma situação muito importante para esse trabalho é quando uma reta e um círculo têm apenas um ponto em comum. Nesse caso, dizemos que a reta é tangente à circunferência e o ponto em comum é chamado ponto de tangência.

Figura 2.4: Círculo de centro (a, b) e raio r .

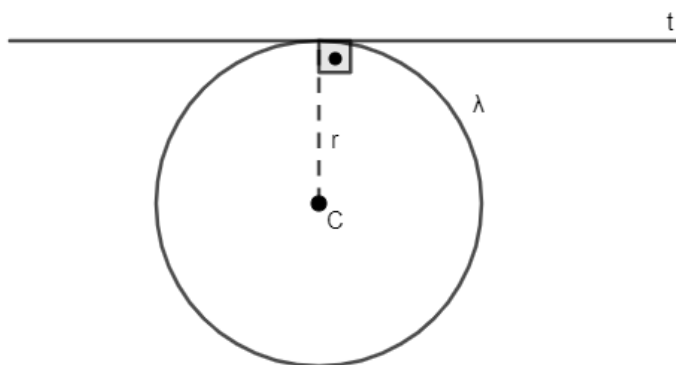


Fonte: O autor

Os resultados a seguir, entre os quais há alguns que apresentaremos sem demonstração, podem ser encontrados na obra de Barbosa (1985) e Fernandes (2019).

Proposição 1. *Uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, essa reta é perpendicular a seu raio.*

Figura 2.5: Reta t tangente à circunferência λ .



Fonte: O autor

Definição 3. *Três pontos de um plano são ditos colineares quando pertencem a uma mesma reta.*

Proposição 2. *Três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade*

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1).$$

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ três pontos colineares. Temos três casos possíveis.

- 1º caso: Dois pontos coincidem (digamos $A = B$).

Nesse caso, temos $(x_1 = x_2)$ e $(y_1 = y_2)$, logo:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0 \cdot (y_3 - y_2) = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = (x_3 - x_2) \cdot 0 = 0.$$

- 2º caso: Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta paralela a um dos eixos.

Com efeito, sem perda de generalidade, suponha que a reta seja paralela ao eixo Ox . Nesse caso, temos $y_1 = y_2 = y_3$. Logo,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = (x_3 - x_2) \cdot 0 = 0.$$

Observação: No caso em que a reta é paralela ao eixo Oy temos que $x_1 = x_2 = x_3$. Logo,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0 \cdot (y_3 - y_2) = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0 \cdot (y_2 - y_1) = 0.$$

- 3º caso: Os pontos são distintos e pertencem a uma reta não paralela a nenhum dos eixos. Tal situação está ilustrada na Figura 2.6, onde os pontos A , B e C estão alinhados e, conseqüentemente, os triângulos ABD e BCE são retângulos e semelhantes (ver Definição 6 e Exemplo 2.3).

Nesse caso, considere $r = \frac{d(A, B)}{d(B, C)}$. Então;

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \text{ e } r = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

Assim,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

Portanto,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1).$$

(\Leftarrow) Suponha que vale

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

Assim, temos três situações possíveis.

- i) $(x_3 - x_2) = 0$ (ou seja, $x_2 = x_3$). Assim, temos

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0.$$

Logo,

$$(x_2 - x_1) = 0 \text{ ou } (y_3 - y_2) = 0.$$

Para $x_2 - x_1 = 0$, temos $x_1 = x_2 = x_3$, dessa forma A, B, C pertencem a uma reta paralela ao eixo Oy . Se $y_3 - y_2 = 0$, então $y_3 = y_2$ e $x_3 = x_2$.

Portanto, $A = B$ e os pontos A, B, C são colineares.

- ii) De modo análogo à primeira situação, se $(y_2 - y_1) = 0$, temos $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$. Assim,

$$(x_2 - x_1) = 0 \text{ ou } (y_3 - y_2) = 0.$$

Se $(x_2 - x_1) = 0$, temos

$$x_2 = x_1 \text{ e } y_2 = y_1.$$

Assim, A e B coincidem, dessa forma, A, B, C são colineares. E se $y_3 - y_2 = 0$ resulta que $y_1 = y_2 = y_3$, assim, A, B, C pertencem a uma reta paralela ao eixo Ox .

- iii) $x_3 - x_2 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$

Nessa situação, segue por hipótese que:

$$(y_3 - y_2) \neq 0$$

Assim, dividindo ambos os membros por $(x_3 - x_2)(y_3 - y_2)$, temos

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

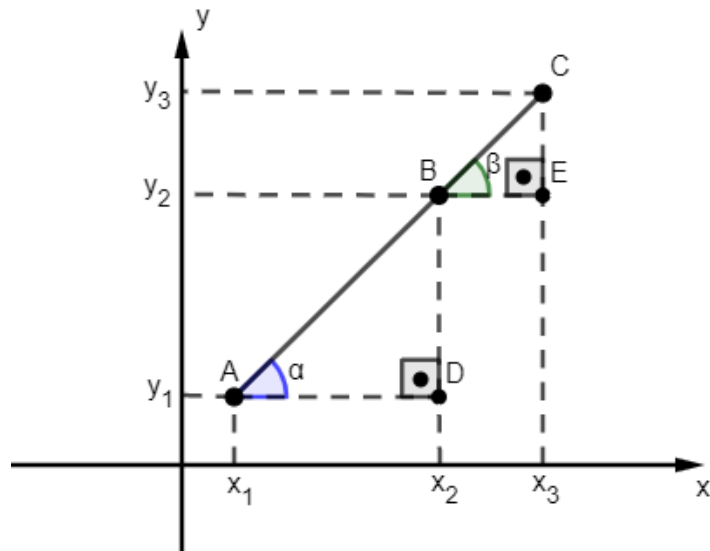
Então, na Figura 2.6, os triângulos ABC e BCE são semelhantes e têm lados proporcionais, logo são semelhantes, (Ver Definição 5 e Exemplo 2.3). Por isso $\alpha = \beta$, onde α e β são as medidas dos ângulos \widehat{DAB} e \widehat{EBC} respectivamente. Dessa forma temos que os pontos A, B e C estão alinhados.

□

2.2.1 Circunferências tangentes

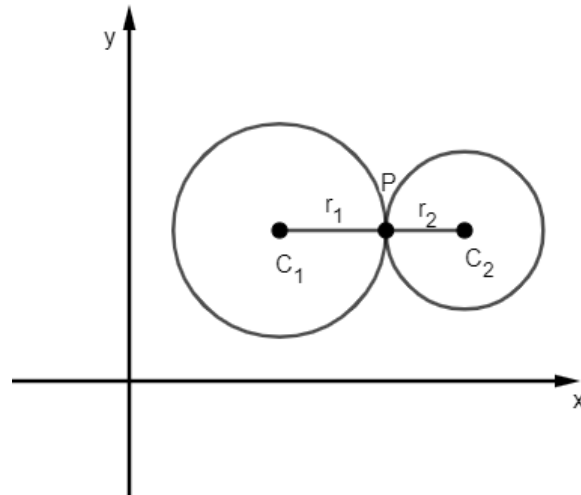
Da Geometria, temos que duas circunferências são tangentes quando possuem somente um ponto em comum. Podemos observar abaixo que existem dois casos nos quais duas circunferências são tangentes.

Figura 2.6: Triângulos semelhantes.



Fonte: O autor

Figura 2.7: Circunferências tangentes externas.



Fonte:

Caso 1: As circunferências são tangentes externas. (Veja Figura 2.7).

Neste caso, temos que a distância entre os centros C_1 e C_2 é igual à soma dos dois raios r_1 e r_2 das circunferências, pois

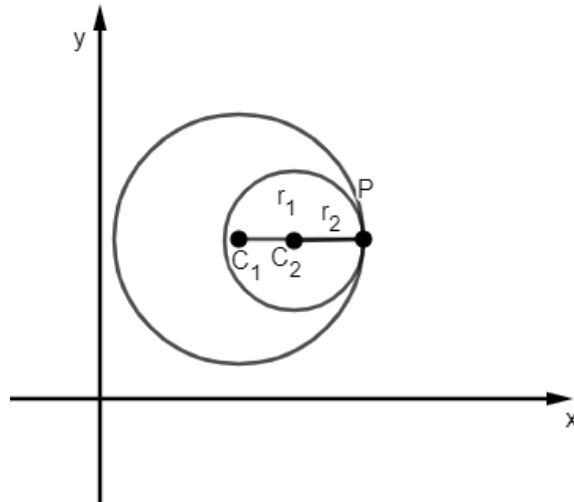
$$d(C_1, C_2) = d(C_1, P) + d(C_2, P) = r_1 + r_2.$$

Caso 2: As circunferências são tangentes internas. (Figura 2.8).

Neste caso, temos que a distância entre os centros C_1 e C_2 das circunferências é igual à diferença dos seus raios, ou seja:

$$d(C_1, C_2) = d(C_1, P) - d(C_2, P) = r_1 - r_2.$$

Figura 2.8: Circunferências tangentes internas.



Fonte: O autor

A proposição a seguir é um resultado muito importante para esse trabalho, ela pode ser encontrada com mais detalhe em Fernandes (2019).

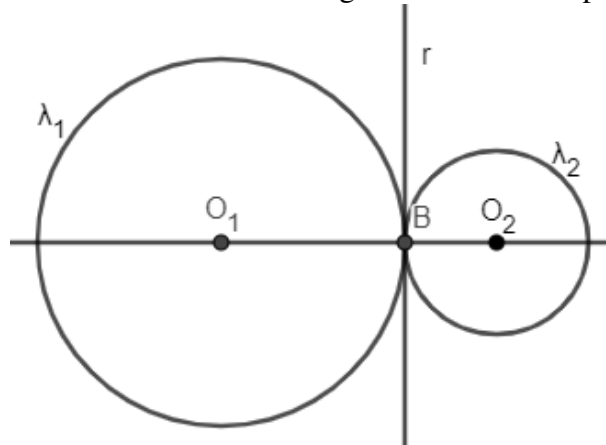
Proposição 3. *Duas circunferências são tangentes se, e somente se, seus centros são colineares com o ponto de interseção delas.*

Demonstração. Sejam λ_1 uma circunferência de centro O_1 , λ_2 uma circunferência de centro O_2 , e B um ponto de interseção entre λ_1 e λ_2 . Suponhamos que λ_1 e λ_2 são tangentes. Então B é o único ponto de interseção entre λ_1 e λ_2 . Temos dois casos a considerar.

Caso 1: As circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes externas, conforme a Figura 2.9.

Neste caso, sobre o ponto B , podemos traçar uma reta r tangente às circunferências λ_1 e λ_2 . Pela Proposição 1, a reta r é perpendicular às retas O_1B e BO_2 . Como ambas as retas O_1B e BO_2 contêm o ponto B , concluímos que elas coincidem. Logo, os pontos O_1 , B e O_2 são colineares.

Figura 2.9: Circunferências tangentes externas no ponto B.

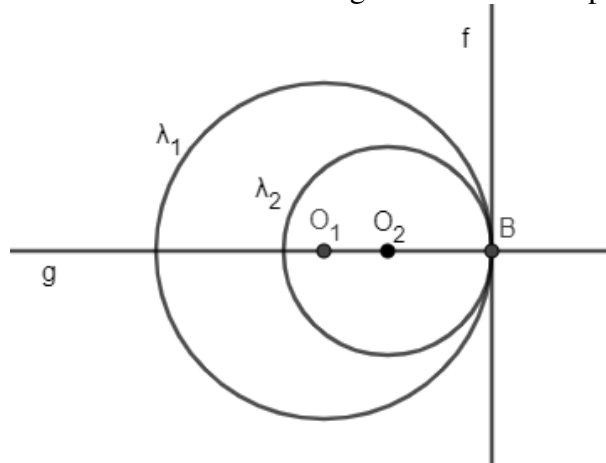


Fonte: O autor

Caso 2: As circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes internas, conforme a Figura 2.10.

Neste caso, sobre o ponto B , podemos traçar uma reta f tangente às circunferências λ_1 e λ_2 . Novamente pela Proposição 1, a reta f é perpendicular às retas O_1B e BO_2 , as quais contêm o ponto B . Logo, as retas O_1B e BO_2 coincidem. Assim, os pontos O_1 , B e O_2 são colineares. Figura 2.10.

Figura 2.10: Circunferências tangentes internas no ponto B .



Fonte: O autor

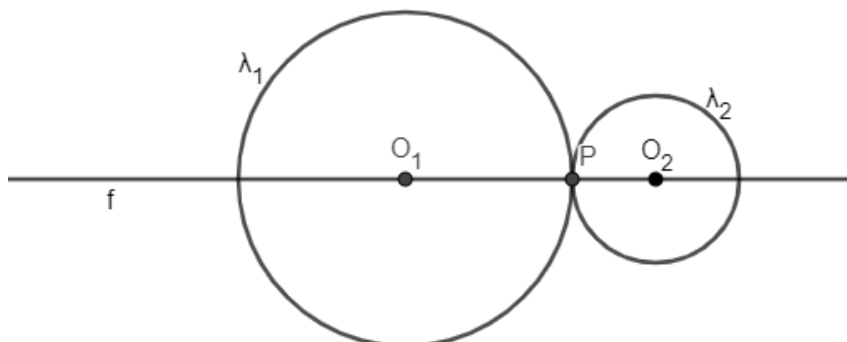
Reciprocamente, suponhamos que os centros O_1 e O_2 das circunferências λ_1 e λ_2 sejam colineares com o ponto B . Novamente temos dois casos a considerar.

Caso 1: O ponto de tangência está entre os dois centros.

As circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes externas, conforme a Figura 2.9.

Com efeito, sejam λ_1 e λ_2 duas circunferências que possuem um ponto em comum e colineares com seus centros. Como P está localizado entre os centros e é único, temos que as duas circunferências são tangentes externas no ponto P . Veja Figura 2.11.

Figura 2.11: Circunferências tangentes externas no ponto P .



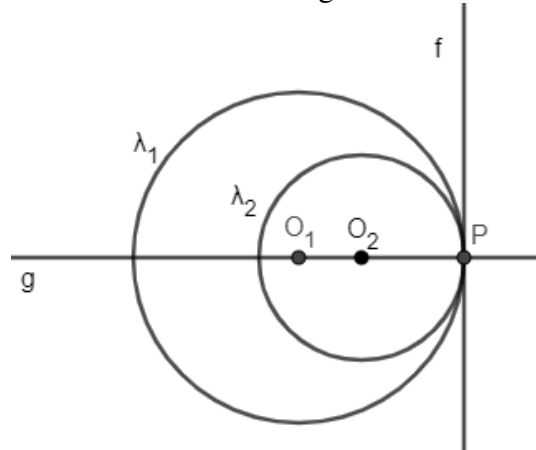
Fonte: O autor

Caso 2: O ponto de tangência está entre os dois centros

De modo análogo, considere λ_1 e λ_2 duas circunferências que possuem um ponto P em comum e colineares com seus centros. Como P não está localizado entre os centros das circunfe-

rências e é o único que pertence as duas, logo as duas circunferências são tangentes internas no ponto P . Veja Figura 2.12.

Figura 2.12: Circunferências tangentes internas no ponto P .



Fonte: O autor

□

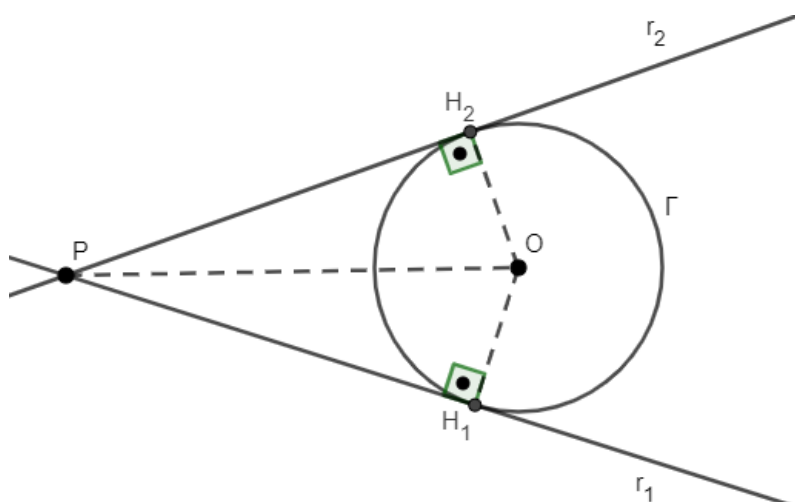
2.2.2 Circunferência e ponto externo

Considere um ponto P e uma circunferência Γ , ambos pertencentes a um plano α , com P exterior a Γ , temos o seguinte resultado.

Proposição 4. *Considere o ponto P e a circunferência Γ conforme anunciado acima, sejam as retas r_1 e r_2 tangentes a Γ nos pontos H_1 e H_2 , respectivamente, e passando por P . Então temos que $d(P, H_1) = d(P, H_2)$.*

Demonstração. Consideremos os triângulos PH_1O e PH_2O . Figura 2.13. Pelo caso especial de congruência de triângulo, cateto e hipotenusa, temos que os mesmos são congruentes. Portanto, temos que $d(PH_1) = d(PH_2)$. □

Figura 2.13: Retas tangente a Γ , passando pelo ponto P .

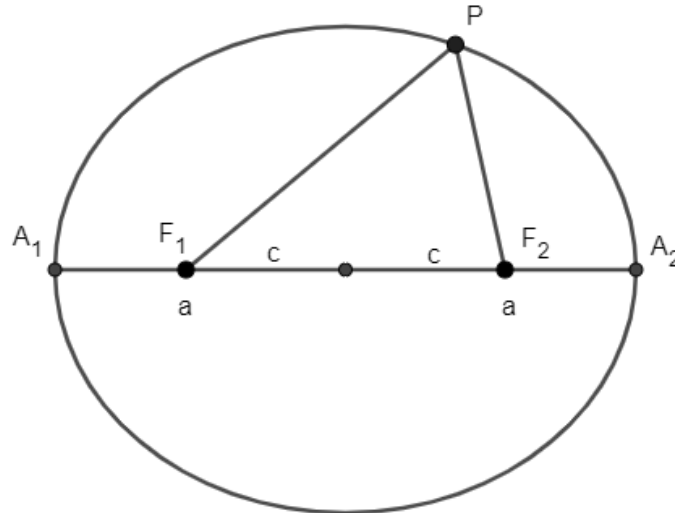


Fonte: O autor

2.3 Elipse

Definição 4. Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles. Definimos elipse como sendo o conjunto de pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$).

Figura 2.14: Elipse de focos F_1 e F_2 .



Fonte: O autor

Na figura 2.14 temos que F_1 e F_2 são os focos da elipse e o segmento A_1A_2 e chamado de eixo maior.

Observação: Sejam A_1 e A_2 extremidades do eixo maior da elipse conforme a Figura 2.14. Temos que $d(A_1, A_2) = 2a$. Com efeito, seja $d(A_1, F_1) = x$, $d(A_2, F_2) = y$, temos, pela Definição 4, que:

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = d(A_2, F_2) + d(A_2, F_1). \quad (2.3)$$

Então

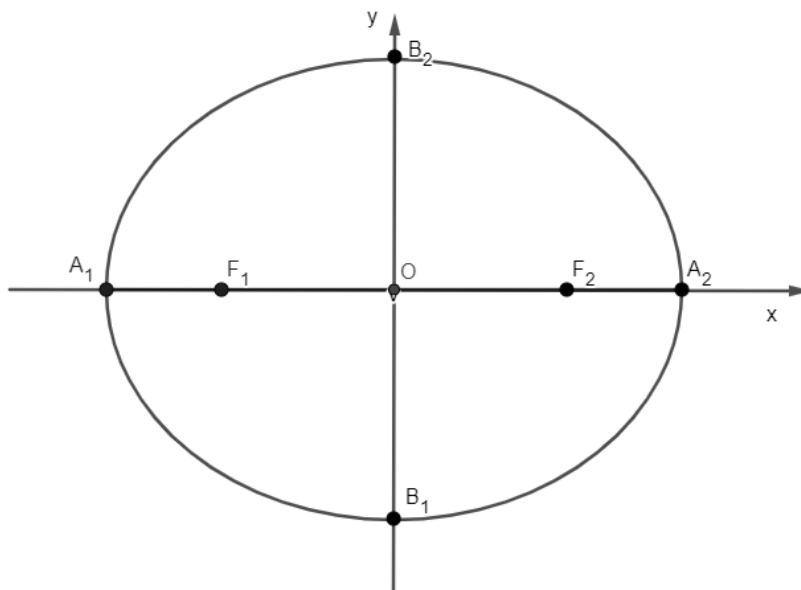
$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c) \implies x = y.$$

Logo,

$$d(A_1, A_2) = d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(F_2, A_2) = x + 2c + x = 2(x + c) = 2a.$$

Considere a elipse cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, o centro é $(0, 0)$ e os vértices são $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$, conforme Figura 2.15.

Figura 2.15: Elipse com centro na origem do sistema cartesiano.



Fonte: O autor

Como vimos, temos que A_1A_2 é o eixo maior da elipse e B_1B_2 é chamado de eixo menor, de modo que $d(A_1, A_2) = 2a$ é a medida do eixo maior, $d(B_1, B_2) = 2b$ é a medida do eixo menor e $d(F_1, F_2) = 2c$ é chamada de distância focal. Temos também que a reta dada pelos pontos A_1A_2 é chamada de eixo focal.

Observação: Em toda elipse, como consequência do teorema de Pitágoras, vale que;

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (2.4)$$

Proposição 5. A equação da elipse de centro na origem do sistema cartesiano, cujo eixo maior esta sobre o eixo Ox é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.5)$$

Onde a e b são respectivamente as medidas dos semieixos maior e menor da elipse

Demonstração. Seja E uma elipse de centro na origem do sistema cartesiano, cujo eixo maior esta sobre o eixo Ox , conforme a Figura 2.15. Pela Definição 2.14, temos que

$$P \in E \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Assim,

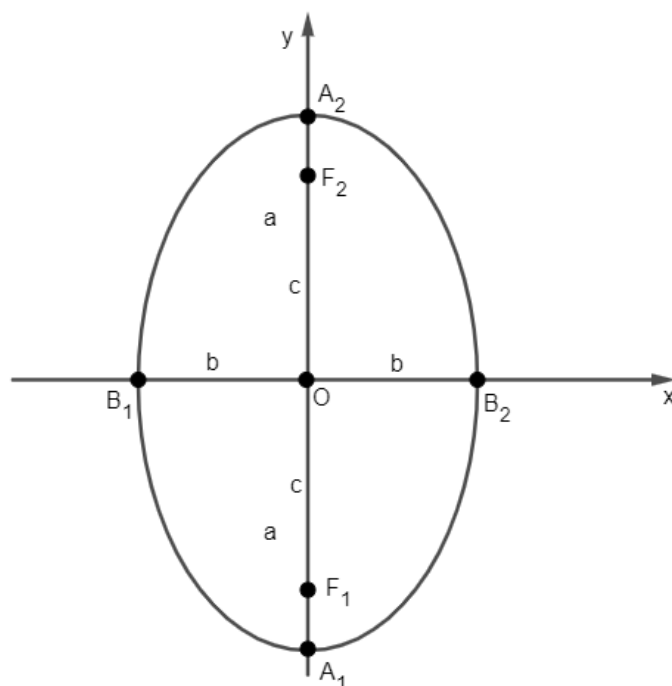
$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \\
\Leftrightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 &= (a^2 - cx)^2 \\
\Leftrightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
\Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

□

Observação 1: Se o eixo maior estiver sobre o eixo Oy (Veja Figura 2.16), então a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (2.6)$$

Figura 2.16: Elipse com centro na origem do sistema cartesiano e eixo maior sobre o eixo Oy .

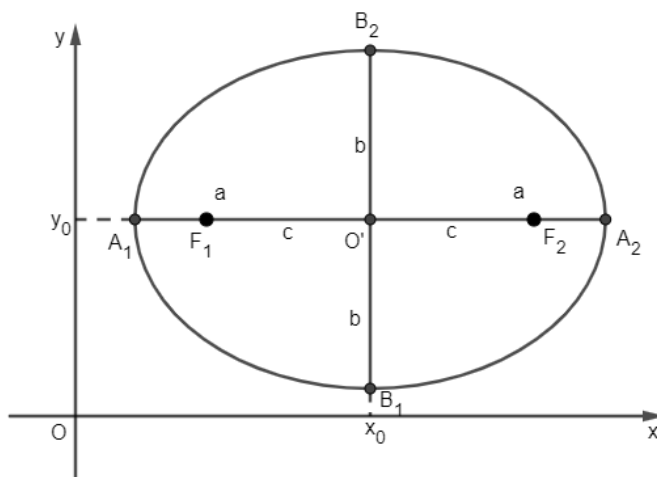


Fonte: O autor

Observação 2: Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 // Ox$ (Veja Figura 2.17), então, transladando seu centro para a origem do plano cartesiano, temos que sua equação será:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.7)$$

Figura 2.17: Elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo Ox .

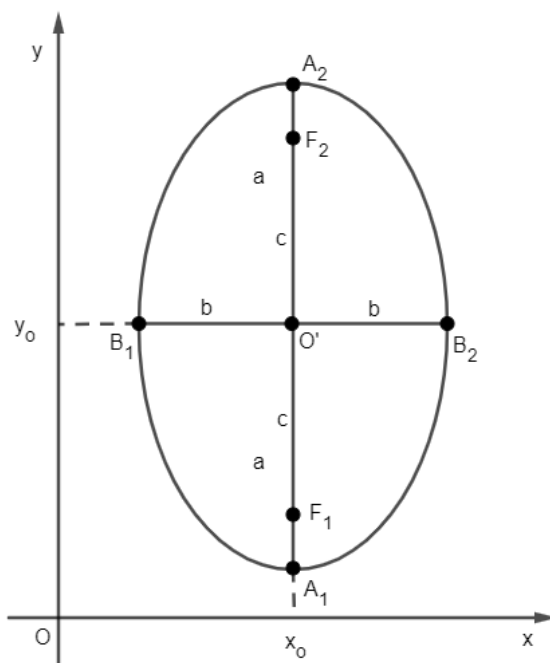


Fonte: O autor

Observação 3: Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 // Oy$, (Veja Figura 2.18), então sua equação será:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1. \quad (2.8)$$

Figura 2.18: Elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo Oy .



Fonte: O autor

O exemplo abaixo, que pode ser encontrado em Venturi (1949), apresenta como podemos identificar cada elemento de uma elipse através de sua equação.

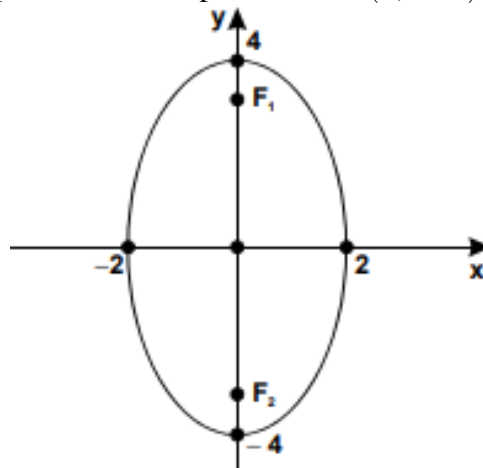
Exemplo: A equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ representa uma elipse em que $a^2 = 16$, e $b^2 = 4$, logo $a = 4$ e $b = 2$. Veja Figura 2.19.

Assim, pela Observação 2, temos que o eixo maior coincide com o eixo Oy e tem comprimento $2a = 2 \cdot 4 = 8$. Temos também que

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}.$$

Assim, os focos da elipse são $F_1 = (0, 2\sqrt{3})$ e $F_2 = (0, -2\sqrt{3})$. Observe Figura 2.19.

Figura 2.19: Elipse de foco nos pontos $F_1 = (0, 2\sqrt{3})$ e $F_2 = (0, -2\sqrt{3})$

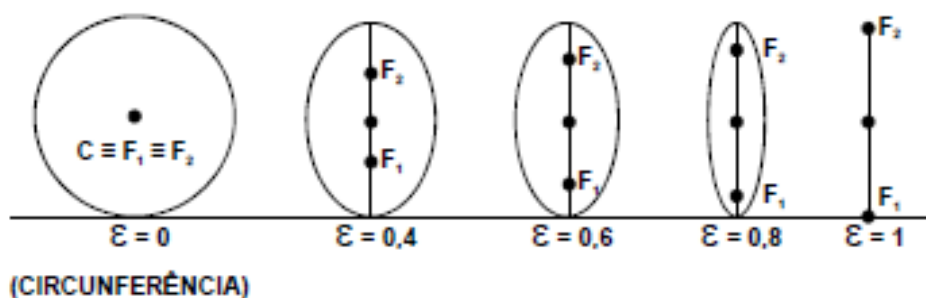


Fonte: Venturi (1949).

Definição 5. A excentricidade de uma elipse é dada por $e = \frac{c}{a}$.

Observação: Quando $c = 0$, ou seja, quando os focos coincidem temos $e = 0$, e nesse caso a elipse se transforma em um círculo de raio a . A imagem, a seguir, foi retirado de Venturi (1949) no qual o autor define $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Figura 2.20: Elipses com diferentes excentricidades.



Fonte: Venturi (1949).

Observando a Figura 2.20, é possível inferir que a excentricidade pode ser usada para comparar o quanto duas elipses são diferentes, fato esse que não é apresentado para os alunos

no Ensino Básico, de modo que os mesmos podem se perguntar porque somente as cônicas, elipse e hipérbole, tem excentricidade? A resposta para essa pergunta é bem simples e intuitiva para o círculo, pois todos os círculos são semelhantes entre si, já o fato de todas as parábolas serem semelhantes requer um pouco mais de estudo. Veremos logo mais tais fatos, para isso, necessitamos da definição de semelhança.

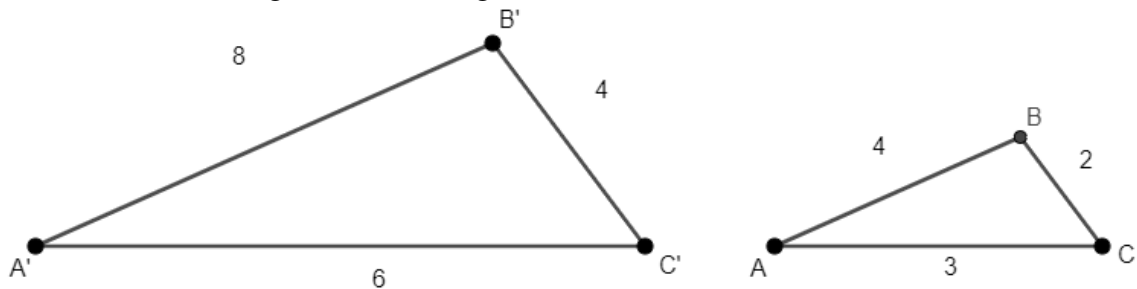
Definição 6. Duas curvas planas C e C' são semelhantes quando existe uma função bijetiva $\varphi : C \rightarrow C'$ tal que $\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = k \cdot \overline{xy}$, com $k > 0$ um número real.

A função φ é chamada função de semelhança e k é chamada de constante de semelhança. Quando $0 < k < 1$, a curva C' é uma redução de C . Quando $k > 1$, a curva C' é uma ampliação de C .

Exemplo: Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes quando $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k$. Assim, considerando os triângulos da Figura 2.21, temos:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = 2.$$

Figura 2.21: Triângulo semelhantes de razão 2.



Fonte: O autor

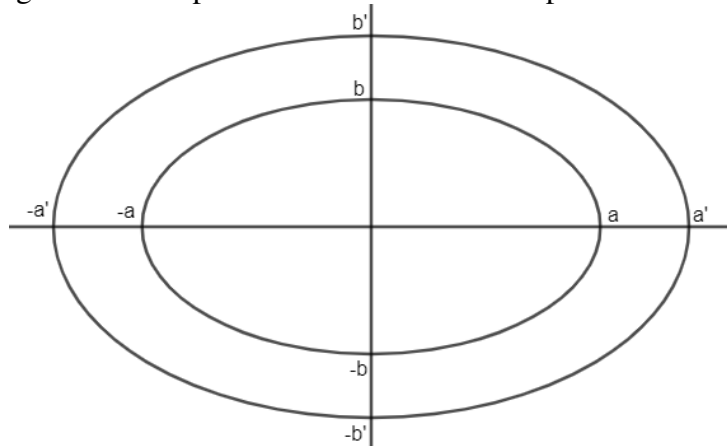
Dessa forma, temos que $A'B'C'$ é uma ampliação de ABC com razão de semelhança $k = 2$.

A próxima proposição apresenta uma condição necessária e suficiente para que duas elipses seja semelhantes. Tal resultado será bastante útil nos próximos capítulos.

Proposição 6. Duas elipses são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma excentricidade.

Demonstração. (\Rightarrow) Considere E e E' duas elipses com função de semelhança $\varphi : E \rightarrow E'$ e $k > 0$ a constante de semelhança. Por rotações e translações, podemos considerar que E e E' sejam concêntricas, conforme a Figura 2.22.

Figura 2.22: Elipses E e E' com centros no plano cartesiano.



Fonte: O autor

Ou seja, os vértices da elipse E são $v_1 = (-a, 0)$, $v_2 = (a, 0)$, $v_3 = (0, b)$ e $v_4 = (0, -b)$. E os vértices da Elipse E' são $\varphi(v_1) = (-a', 0)$, $\varphi(v_2) = (a', 0)$, $\varphi(v_3) = (0, -b')$ e $\varphi(v_4) = (0, b')$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2)} &= k \cdot \overline{v_1 v_2} \\ \Rightarrow 2a' &= k \cdot 2a \\ \Rightarrow a' &= ka. \end{aligned}$$

De modo análogo, temos que $b' = kb$. Denotando a semidistância focal por c . Temos que a excentricidade de E vale $e_E = \frac{c}{a}$.

Resta agora deduzirmos a excentricidade de E' . Para isso, denotando por c' a semidistância focal da elipse E' . Temos que

$$\begin{aligned} c' &= \sqrt{(a')^2 - (b')^2} \\ &= \sqrt{(ka)^2 - (kb)^2} \\ &= \sqrt{k^2 a^2 - k^2 b^2} \\ &= \sqrt{k^2 (a^2 - b^2)} \\ &= \sqrt{k^2 c^2} \\ &= kc. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$e_{E'} = \frac{c'}{a'} = \frac{kc}{ka} = \frac{c}{a} = e_E.$$

Portanto, temos que a excentricidade de E é igual à excentricidade de E' .

(\Leftarrow) Suponha agora que E e E' tenham a mesma excentricidade. Isto é,

$$e_E = \frac{c}{a} = \frac{kc}{ka} = e_{E'}.$$

Considere b o semieixo menor da elipse E . Então, temos que o semieixo menor da elipse E' vale:

$$\begin{aligned} b' &= \sqrt{(ka)^2 - (kc)^2} \\ &= \sqrt{k^2a^2 - k^2c^2} \\ &= \sqrt{k^2(a^2 - c^2)} \\ &= \sqrt{k^2b^2} \\ &= kb. \end{aligned}$$

Dessa forma, as equações de E e E' são dadas por,

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, E' : \frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1.$$

Desse modo, verifica-se que,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (kx, ky) \in E'.$$

Defina a função $\varphi : E \rightarrow E'$; $\varphi(x, y) = (kx, ky)$.

Afirmação: Temos que a função φ é de semelhança com constante de proporcionalidade k .

Com efeito, tomando os pontos $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) \in E$ e $\varphi(kx_a, ky_b), \varphi(kx_b, ky_b) \in E'$ temos,

$$\overline{\varphi(A)\varphi(B)} = k\overline{AB}.$$

Daí fica provada a recíproca da proposição. □

Proposição 7. *Se duas elipses são semelhantes então seus eixos são proporcionais.*

Demonstração. Considere E e E' duas elipses com função de semelhança

$\varphi : E \rightarrow E'$ e $k > 0$ a constante de semelhança. Conforme resultado anterior, temos que,

$$e_E = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = e_{E'} \Leftrightarrow a'c = c'a \quad (2.9)$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ e $a'^2 = b'^2 + c'^2$, elevando ambos os membros da Equação (2.9) ao quadrado, temos,

$$\begin{aligned}
a'^2 c^2 = a^2 c'^2 &\Leftrightarrow a'^2(a^2 - b^2) = a^2(a'^2 - b'^2) \\
&\Leftrightarrow a'^2 a^2 - a'^2 b^2 = a'^2 a^2 - a^2 b'^2 \\
&\Leftrightarrow -a'^2 b^2 = -a^2 b'^2 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{a'}{b'}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2.
\end{aligned}$$

Como todos os termos são positivos, temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

□

2.4 Área e Comprimento da Elipse

Proposição 8. Considere S a área da elipse de eixo maior igual a $2a$ e eixo menor igual a $2b$, temos que $S = ab\pi$

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere a elipse de equação

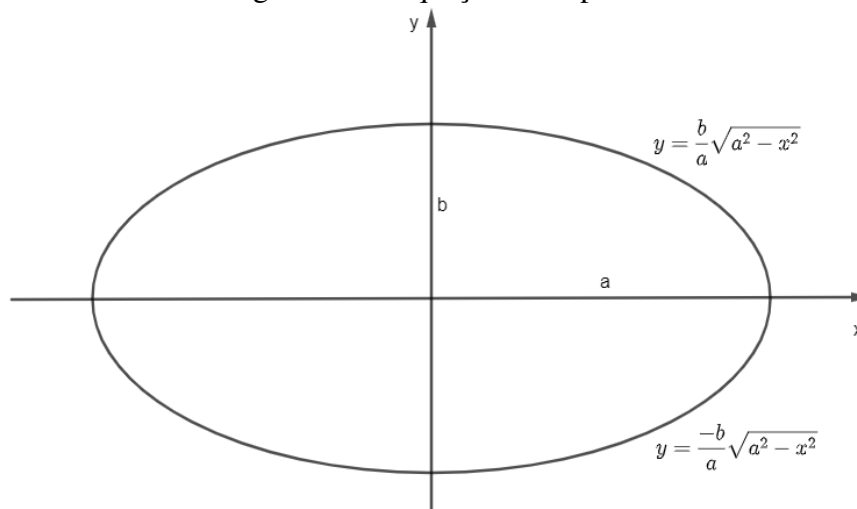
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } a^2 = b^2 + c^2. \quad (2.10)$$

Isolando y na Equação (2.10), temos:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ ou } y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.11)$$

Observe Figura 2.23.

Figura 2.23: Equação da elipse.



Fonte: O autor

De acordo com Leithold (1990), temos que

$$S = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx. \quad (2.12)$$

Vamos calcular $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Temos que,

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx. \quad (2.13)$$

Fazendo a mudança de variável $\frac{x}{a} = \text{sen}(u)$, temos $x = a \text{sen}(u)$. Logo, $dx = a \cdot \cos(u) du$. Como $-a \leq x \leq a$, temos que

$$-1 \leq \text{sen}(u) \leq 1.$$

Dessa forma,

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \text{sen}^2(u)} \cdot a \cdot \cos(u) du \\ &= a \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \text{sen}^2(u)} \cdot \cos(u) dx. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)| = \cos(u)$, pois $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que,

$$\begin{aligned} a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx &= a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u) du \\ &= a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2u}{2}\right) du \\ &= a \left(\frac{u}{2} + \frac{\text{sen } 2u}{4}\right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= a \left(\frac{u}{2} + \frac{\text{sen}(u) \cos(u)}{2}\right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{a\pi}{4} + \frac{a\pi}{4} = \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2\pi}{2}. \quad (2.14)$$

Dessa forma, concluímos que

$$S = \frac{2b}{a} \cdot \frac{a^2\pi}{2} = ab\pi. \quad (2.15)$$

□

Observe que se $a = b$ temos que a elipse se transforma no círculo de raio a cuja área sabemos ser dada por $a^2\pi$.

Em um primeiro curso de cálculo, sabemos que o comprimento C de uma curva de equação $y = f(x)$ onde f é uma função de classe C^1 no intervalo $[a, b]$, é dada pela fórmula:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Assim, temos a seguinte proposição:

Proposição 9. *O comprimento da elipse de Equação (2.5) e excentricidade $e = \frac{c}{a}$ é aproximadamente*

$$C \simeq \pi a \left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{16} \right). \quad (2.16)$$

Demonstração. Considere a elipse de Equação 2.5, derivando implicitamente ambos os lados da igualdade em relação a x , temos,

$$\begin{aligned} \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 &\Rightarrow \frac{2yy'}{b^2} = \frac{-2x}{a^2} \\ &\Rightarrow y' = \frac{-2xb^2}{2a^2y}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y' = \frac{xb^2}{a^2y}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e somando 1, temos

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2} \quad (2.17)$$

Como, pela Equação (2.5), temos

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Substituindo na Equação (2.17), obtemos,

$$\begin{aligned}
1 + (y')^2 &= 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \\
&= 1 + \frac{b^4 x^2}{\frac{a^4 b^2 (a^2 - x^2)}{a^2}} \\
&= 1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \\
&= \frac{a^2 (a^2 - x^2) + b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \\
&= \frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \\
&= \frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \\
&= \frac{a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

Como a excentricidade da elipse é dada por $e = \frac{c}{a}$, concluímos que

$$1 + (y')^2 = \frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}. \quad (2.18)$$

Dessa forma, o perímetro procurado será dado por,

$$C = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}. \quad (2.19)$$

Assim, fazendo a substituição trigonométrica $x = a \operatorname{sen}(\alpha)$ temos $dx = a \cos(\alpha) d\alpha$. Observe ainda que para $x = 0$ temos $\alpha = 0$ e para $x = a$ temos $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Logo, a Equação 2.19 será dada por,

$$C = 4 \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{\frac{a^2 - e^2 a^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}} a \cos(\alpha) \right] d(\alpha) = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)} d(\alpha). \quad (2.20)$$

A integral acima é uma integral elíptica e não pode ser resolvida por funções elementares. Por isso, não teremos o valor exato do comprimento da elipse e sim uma boa aproximação para tal. Para isso, usamos a expansão por binômio de Newton que, por sua vez, permite calcular potências do tipo $(1 + x)^n$, para $x, n \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$.

Como $| -e^2 \text{sen}^2(\alpha) | = |e^2| |\text{sen}^2(\alpha)| < 1$, temos que se considerarmos $n = \frac{1}{2}$ e $x = -e^2 \text{sen}^2(\alpha)$, obtemos, pela expansão binomial, que

$$(1 - e^2 \text{sen}^2(\alpha))^{1/2} \simeq 1 - \frac{e^2 \text{sen}^2(\alpha)}{2} + \frac{e^4 \text{sen}^4(\alpha)}{8} - \frac{e^6 \text{sen}^6(\alpha)}{16} \quad (2.21)$$

Por fim, substituindo (2.21) em (2.20) e integrando termo a termo, obtemos a fórmula aproximada para calcular o comprimento de uma elipse em função de sua excentricidade e do seu eixo maior, isto é:

$$C \simeq \pi a \left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128} \right). \quad (2.22)$$

□

Saindo um pouco da parte geométrica, veremos agora o princípio de indução finita. Tal princípio é usado em matemática para provar teoremas e proposições que envolvem os números naturais. Uma ideia intuitiva para o princípio, segundo Maciel (2021), é imaginar uma fila com um número infinito de pedras de dominó, postas uma a uma de forma que, se um dominó cair o seu sucessor também cairá. Dessa forma, derrubando a primeira pedra do dominó, garantimos que todas as demais devem cair.

A proposição a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada no trabalho acima citado, será usada nesse manuscrito para demonstrar uma propriedade bastante importante da Cadeia de Pappus, que será vista no próximo capítulo.

Proposição 10. (*Princípio de Indução*) *Seja $P(n)$ uma sentença aberta em \mathbb{N} . Se $P(n)$ satisfaz as condições: i) $P(1)$ é verdadeira; ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $P(n+1)$ for verdadeira sempre que $P(n)$ for verdadeira; então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

2.5 Os arbelos, os parbelos e suas propriedades

Nesta seção, veremos a definição de arbelo e parbelo e algumas das principais propriedades dos mesmos, as quais seram de extrema importância para esse trabalho. Essa parte do trabalho se passa nas obras de Kiwamen (2014), Dassie e Lima (2004) e Silva (2014a).

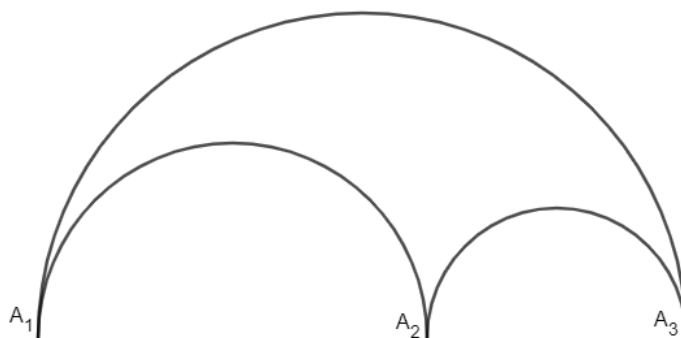
Arbelo, nome de origem Grega que significa faca de sapateiro (veja Figura 2.24), é uma região plana limitada por três semicírculos que são tangentes aos pares (ver Figura 2.25). Segundo Oliveira (2023), foi Arquimedes de Siracusa o primeiro a estudar os arbelos, os quais encontram-se no antigo livro *Lemmas*. Tal livro traz algumas das principais propriedades dos arbelos, duas das quais destacamos abaixo.

Figura 2.24: Faca de sapateiro



Fonte: Encrypted (s.d.a).

Figura 2.25: Arbelo



Fonte: O autor

Proposição 11. *O comprimento do limite superior de um arbelo é igual ao comprimento de seu limite inferior.*

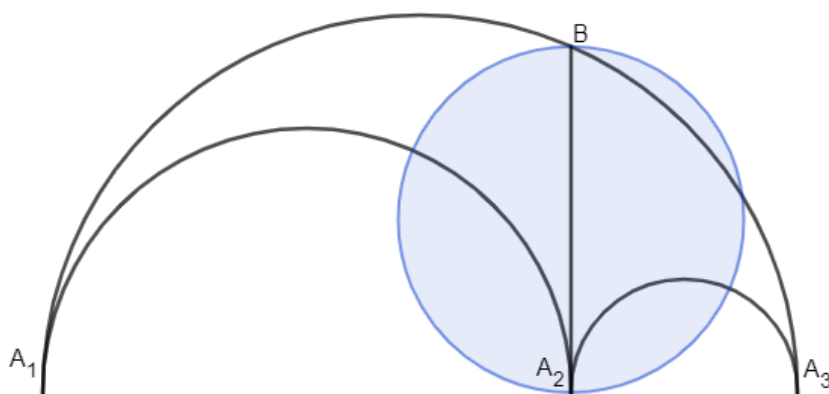
Observe que tal propriedade, apesar de não intuitiva, é muito fácil de ser demonstrada e apresentada para alunos do Ensino Médio, basta ter a noção do conceito de comprimento de arcos, o que torna o estudo desse objeto acessível aos alunos.

Já a propriedade que veremos a seguir apresenta um pouco mais de dificuldade em sua demonstração, mas o docente pode apresentar como uma simples curiosidade matemática, instigando aqueles mais curiosos a buscarem mais informações sobre o tema.

Proposição 12. *Seja B o ponto comum do semicírculo externo e a reta perpendicular a A_1A_3 passando por A_2 . Temos que a área dos arbelo é igual à área do círculo cujo diâmetro é A_2B .*

Para apresentar a definição e as propriedades dos parbelos, inicialmente, recordamos a definição de parábola e de dois conceitos não muito utilizados no Ensino Básico, o de corda focal e *Latus rectum*.

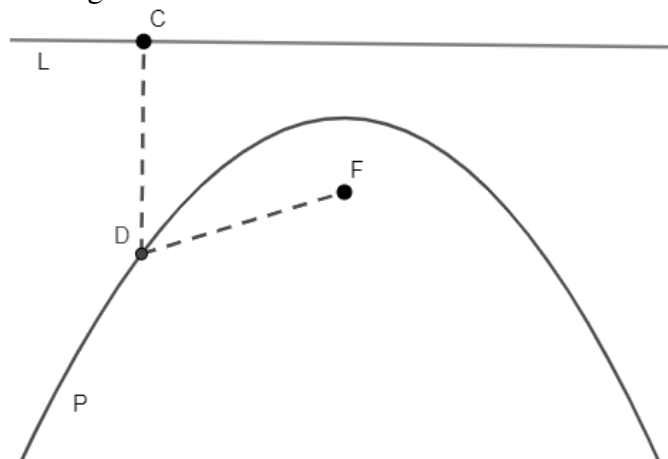
Figura 2.26: Área do arbelo igual a área do círculo de diâmetro A_2B .



Fonte: O autor

Definição 7. Considere F um ponto fixo no plano e L uma reta que não passa por F . Chamamos de parábola P o lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e da reta L , veja a Figura 2.27.

Figura 2.27: Parábola de foco F e diretriz L .



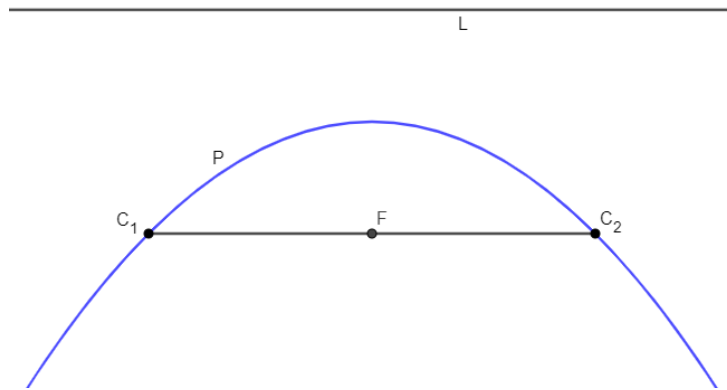
Fonte: O autor

O ponto F é chamado de foco e a reta L é chamada de diretriz. Por definição, temos que a medida do segmento CD é igual a medida do segmento FD .

Definição 8. Chamamos de corda focal qualquer segmento de reta com extremidade pertencente à parábola P que passa por seu foco F . A corda focal que tem o menor comprimento é chamada de *Latus Rectum*.

Temos que tal corda é obtida quando tomamos o segmento determinado pelos pontos extremos pertencentes à parábola paralelo à reta diretriz L (ver figura 2.28).

Figura 2.28: Segmento C_1C_2 , Latus Rectum da parábola P

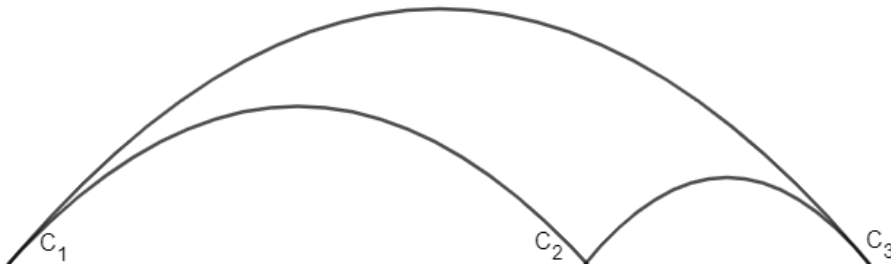


Fonte: O autor

Definição 9 (Parbelos). *Considere três pontos colineares C_1, C_2, C_3 , chamamos de Parbelos a reunião de três parábolas tendo $\widehat{C_1C_2}$, $\widehat{C_2C_3}$ e $\widehat{C_1C_3}$ de um mesmo lado da reta que contém os pontos C_1, C_2 e C_3 e sendo os segmentos C_1C_2, C_2C_3 e C_1C_3 os latus rectum das respectivas parábolas.*

Assim como os círculos, todas as parábolas são semelhantes entre si. Sendo assim, é razoável esperar que os parbelos tenham propriedades similares às dos arbelos. Motivado por tal expectativa, Sondow (2013) investigou os parbelos e provou que diversos resultados dos arbelos também valem para os parbelos.

Figura 2.29: Parbelo.



Fonte: O autor

Em termos de funções, Kiwamen (2014) definiu os Parbelos da seguinte forma:

Considere a função quadrática $h(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = a\alpha x^2 - a\alpha x$, com $a < 0$ e $h(0) = h(1) = 0$. Seja um ponto $z \in (0, 1)$, considere $h_1 : [0, z] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_2 : [z, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida como:

$$h_1(x) = zh\left(\frac{x}{z}\right), \quad (2.23)$$

e

$$h_2(x) = (1 - z)h\left(\frac{x - z}{1 - z}\right). \quad (2.24)$$

O caso particular $h(x) = x - x^2$, ou seja, $\alpha = 1$ e $a = -1$ é conhecido como *parbelo de Sondow*.

A próxima proposição, é um resultado análogo à Proposição 11. Tal propriedade, diz respeito ao comprimento dos arcos superior e inferior dos parbelos, o que torna essa estrutura bastante similar à estrutura dos arbelos de Arquimedes.

Proposição 13. *O arco superior de um parbelo tem comprimento igual à soma dos comprimentos dos arcos inferiores.*

Observe que essa proposição apresenta um resultado bem interessante sobre essas estruturas. Nosso objetivo nesse momento é tentar estender essas propriedades para além dos arbelos e dos parbelos. Na próxima parte desse trabalho, veremos que as elipses com excentricidades iguais também possuem algumas características interessantes. Tais características colocam os arbelos elípticos como estruturas similares aos arbelos e parbelos.

Capítulo 3

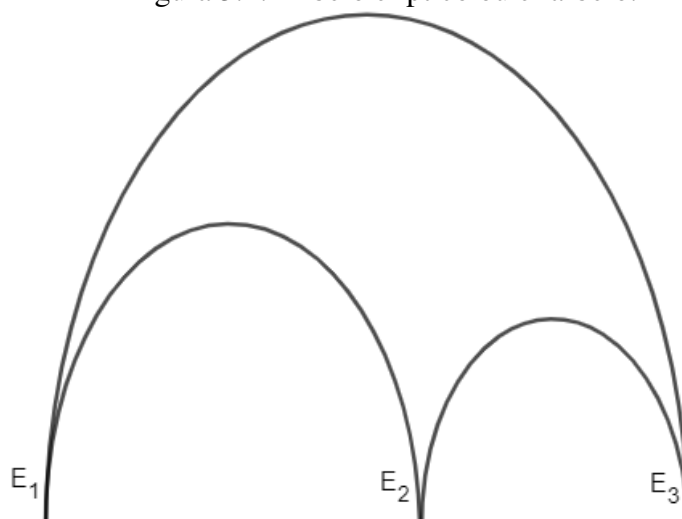
Ellarbelos

Neste capítulo, veremos alguns dos principais resultados desse trabalho. Iniciamos definindo o conceito de ellarbelo. Em seguida, demonstraremos que em um ellarbelo formado por elipses com a mesma excentricidade (ver Figura 3.1), vale que o comprimento da semielipse maior é igual à soma dos comprimentos das semielipses menores. Demonstraremos também que a área desse ellarbelo é igual à área da elipse de eixo focal dado pelo segmento de reta que passa pelo ponto E_2 e é perpendicular à reta E_1E_3 .

Ainda nesse capítulo, veremos alguns resultados sobre a Cadeia de Pappus, provaremos o Teorema de Pappus sem o uso de inversão e mostraremos como calcular as coordenadas dos centros e dos raios dos círculos que compõem a Cadeia de Pappus.

Definição 10. *Um arbelo elíptico ou simplesmente ellarbelo é uma região do plano delimita por três semielipses em vez de três semicírculos, no qual os pontos de intersecção são os vértices das elipses.*

Figura 3.1: Arbelo elíptico ou ellarbelo.



Fonte: O autor

Os pontos E_1 , E_2 e E_3 são chamados cúspides do ellarbelo.

A proposição a seguir é um resultado análogo às Proposições 11 e 13. Veremos que, se as elipses tem a mesma excentricidade então vale o mesmo resultado dos arbelos e dos parbelos.

Proposição 14. *Seja um ellarbello formado por elipse de mesma excentricidade então o comprimento da semielipse maior é igual à soma dos comprimentos das semielipses menores.*

Demonstração. Com efeito, considere o ellarbello formado por três elipses de mesma excentricidade. Pela Proposição 9, o comprimento da semielipse maior é dado por

$$C \cong \pi a \left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128} \right). \quad (3.1)$$

Por outro lado, temos que os comprimentos das semielipses menores é dada por

$$C_1 \cong \pi a_1 \left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128} \right) \quad (3.2)$$

e

$$C_2 \cong \pi a_2 \left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128} \right). \quad (3.3)$$

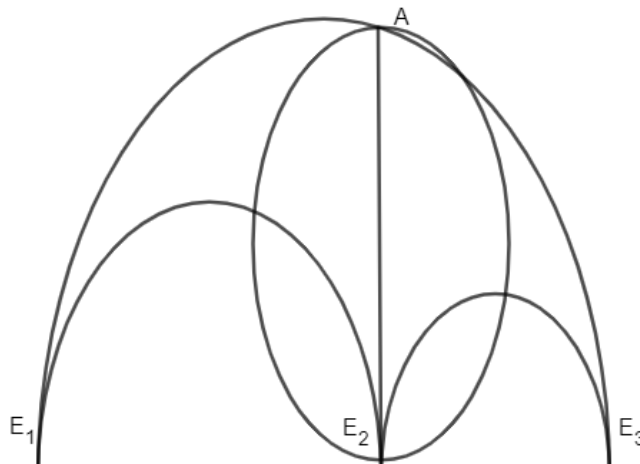
Observe que as parcelas entre parênteses nas Equações 3.1, 3.2 e 3.3 são iguais. Como $a = a_1 + a_2$, temos que,

$$C = C_1 + C_2 = \pi(a_1 + a_2) \left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128} \right).$$

□

O resultado a seguir, análogo ao que acontece nos arbelos, diz que a área do ellarbello pode ser encontrada observando a elipse de eixo maior E_2A . Veja a Figura 3.2. Para isso, vamos supor que as três elipses tenham a mesma excentricidade.

Figura 3.2: ellarbello e elipse de eixo focal E_2A



Fonte: O autor

Proposição 15. *Considere o ellarbello da Figura 3.1, temos que sua área é igual à área da elipse de eixo maior dado pela segmento de reta E_2A e excentricidade igual as três semielipses.*

Demonstração. Com efeito, considere as elipses de equações:

$$E : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, E_1 : \frac{(x - x_1)^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} = 1 \text{ e } E_2 : \frac{(x - x_2)^2}{b_2^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1. \quad (3.4)$$

Suponha que E , E_1 e E_2 têm a mesma excentricidade $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, $x_1 = -b_2$ e $x_2 = b_1$. Observe que as semi elipses têm seus eixos focais menores sobre o eixo Ox do plano cartesiano. Dessa forma, temos que o ponto de tangência das duas semi elipses menores é dado por $x = b_1 - b_2$.

Portanto, isolando y na Equação (2.6), temos que cada ponto y da semielipse maior pode ser dado por:

$$y = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}. \quad (3.5)$$

Dessa forma, tomando $x = b_1 - b_2$, temos que a medida do segmento E_2A , eixo maior da elipse, será:

$$E_2A = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - (b_1 - b_2)^2}. \quad (3.6)$$

Logo, a medida do semieixo maior da elipse é:

$$a' = \frac{a}{2b}\sqrt{b^2 - (b_1 - b_2)^2}. \quad (3.7)$$

Como tal elipse tem excentricidade igual a excentricidade da semielipse maior, temos que b' , medida do semieixo menor, será dado por:

$$b' = \frac{b \cdot a'}{a} = \frac{b \cdot \frac{a\sqrt{b^2 - (b_1 - b_2)^2}}{2b}}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - (b_1 - b_2)^2}}{2}. \quad (3.8)$$

Assim, pela Proposição 8, temos que a área da elipse é dada por:

$$S' = a'b'\pi = \left(\frac{a\sqrt{b^2 - (b_1 - b_2)^2}}{2b} \right) \left(\frac{\sqrt{b^2 - (b_1 - b_2)^2}}{2} \right) \pi = \frac{a(b^2 - (b_1 - b_2)^2)}{4b} \pi. \quad (3.9)$$

Por fim, substituindo $a = a_1 + a_2$ e $b = b_1 + b_2$, temos

$$S' = \frac{(a_1 + a_2)b_1b_2\pi}{b_1 + b_2}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, temos que a área do ellarbelo é dada por

$$\text{Área do ellarbelo} = \frac{S - (S_1 + S_2)}{2}. \quad (3.11)$$

No qual, S , S_1 e S_2 são respectivamente as áreas das três elipses que formam o ellarbelo. Ou seja, $S = ab\pi$, $S_1 = a_1b_1\pi$ e $S_2 = a_2b_2\pi$.

Dessa forma, temos que,

$$\text{Área do ellarbelo} = \frac{ab\pi - (a_1b_1\pi + a_2b_2\pi)}{2}. \quad (3.12)$$

Como $a = a_1 + a_2$ e $b = b_1 + b_2$, temos:

$$\begin{aligned} \text{Área do ellarbelo} &= \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)\pi - (a_1b_1\pi + a_2b_2\pi)}{2} \\ &= \frac{(a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_1 - a_2b_2)\pi}{2} \\ &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{2} \pi \cdot \frac{(b_1 + b_2)}{(b_1 + b_2)} \\ &= \frac{(a_1b_1b_2 + a_2b_1^2 + a_1b_2^2 + a_2b_1b_2)\pi}{2(b_1 + b_2)\pi}. \end{aligned}$$

Como $b_1 = \frac{b_2a_1}{a_2}$ e $b_2 = \frac{a_2b_1}{a_1}$, temos que:

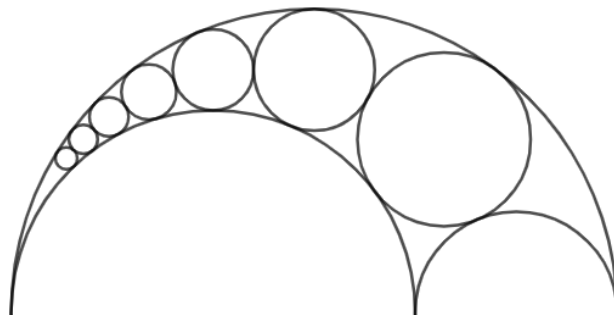
$$\begin{aligned} \text{Área do ellarbelo} &= \frac{\left(a_1b_1b_2 + \frac{a_2b_1b_2a_1}{a_2} + \frac{a_1b_2a_2b_1}{a_1} + a_2b_1b_2 \right) \pi}{2(b_1 + b_2)} \\ &= \frac{(2a_1b_1b_2 + 2a_2b_1b_2)\pi}{2(b_1 + b_2)} \\ &= \frac{(a_1 + a_2)b_1b_2\pi}{b_1 + b_2}. \end{aligned}$$

□

3.1 Cadeia de Pappus

Conforme foi citado na Seção 2.1, no livro 5, Pappus de Alexandria fala sobre círculos inscritos no arbelo, veja a Figura 3.3. Tais círculo são conhecidos como Cadeia de Pappus, em homenagem ao autor. Veremos nesse trabalho algumas de suas principais propriedades.

Figura 3.3: Cadeia de Pappus.

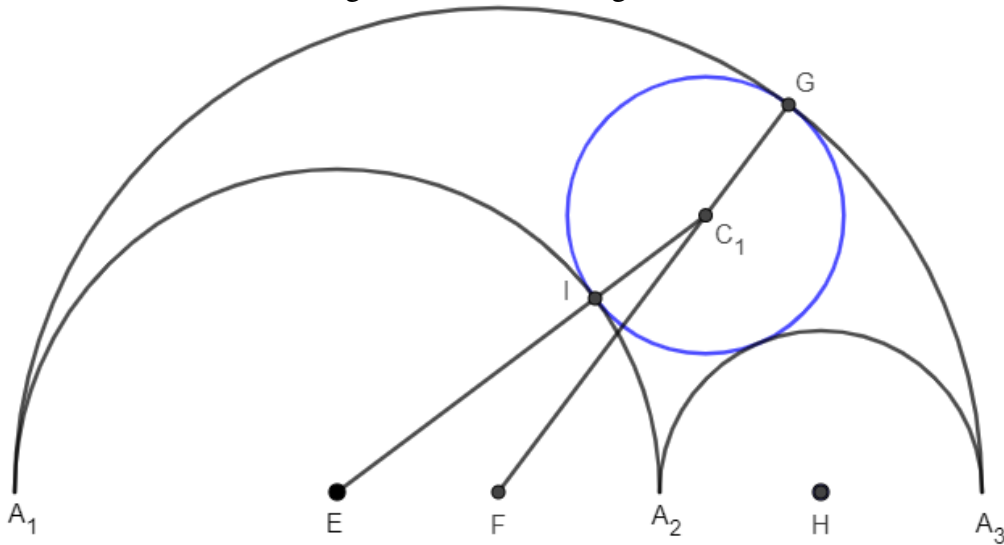


Fonte: O autor

Proposição 16. *Os centros dos círculos da Cadeia de Pappus estão sobre uma elipse de foco dado pelo centros do semicírculo maior e do semicírculo médio que forma o arbelo.*

Demonstração. Considere E e F os centros dos círculos maior e médio que formam o arbelo, seja C_1 o centro do círculo Γ_1 da Cadeia de Pappus, vamos mostrar que C_1 pertence à elipse de focos E e F . De fato, sejam R, r, r_1 e r_2 respectivamente os raios dos círculos com centros F, E, H e C_1 , conforme Figura 3.4:

Figura 3.4: Círculo tangente.



Fonte: O autor

Na Figura 3.4, temos que:

$$\overline{FA_1} = \overline{FA_3} = \overline{FG} = R;$$

$$\overline{EA_1} = \overline{EA_2} = \overline{EI} = r_1;$$

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_3} = r_2;$$

$$\overline{C_1G} = \overline{C_1I} = r;$$

$$\overline{EC_1} = \overline{EI} + \overline{IC_1} = r + r_1;$$

$$\overline{FC_1} = \overline{FG} - \overline{C_1G} = R - r.$$

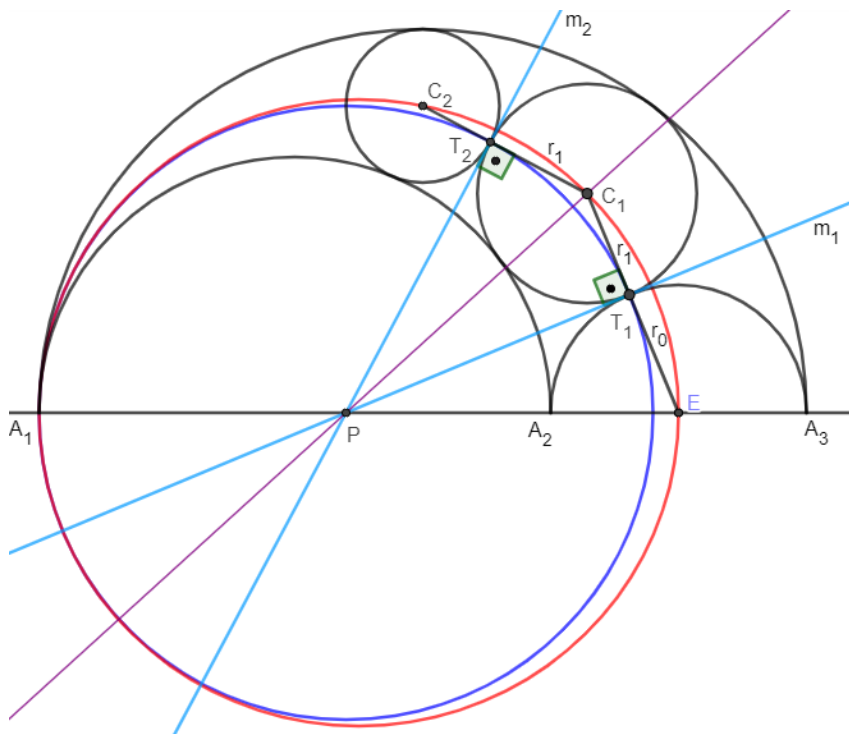
Como $R = r_1 + r_2$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{EC_1} + \overline{FC_1} &= r + r_1 + R - r \\ &= R + r_1 \\ &= r_1 + r_2 + r_1 \\ &= 2r_1 + r_2 = \overline{A_1H}. \end{aligned}$$

Para os demais círculos da Cadeia de Pappus o resultado é demonstrado de modo análogo. \square

O próximo resultado, que se encontra em Parisse (s.d.), fala que os pontos de tangência dos círculos que formam a Cadeia de Pappus estão sobre um círculo que passa pelo ponto A_1 , Veja a Figura 3.5.

Figura 3.5: Em azul, círculo que contém os pontos de tangência dos círculos da Cadeia de Pappus.



Fonte: O autor.

Proposição 17. *Os pontos de tangência dos círculos da Cadeia de Pappus estão sobre um círculo que passa pelo ponto A_1 e tem diâmetro dado pela razão entre o quadrado da média geométrica e a média aritmética do diâmetro do semicírculo maior e o semicírculo médio do arbelo.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que os pontos de tangência são equidistantes de um ponto P a ser determinado. De fato, Considere os círculos Γ_1 e Γ_2 da Cadeia de Pappus, conforme Figura 3.5. Pela Proposição 3, temos que os pontos F , T_1 e C_1 estão alinhados, assim como os pontos C_1 , T_2 e C_2 . Já pela Proposição 1, existe uma reta m_1 que passa por T_1 e é tangente a circunferência Γ_1 e o semicírculo A_2A_3 . Considere o ponto P , interseção de m_1 com a reta dado pelos pontos A_1A_3 . Por outro lado, de modo análogo, existe uma reta m_2 que passa por T_2 e é tangente as circunferências Γ_1 e Γ_2 . Observe que a reta m_2 deve passar por P . De fato, suponha por absurdo que a reta m_2 corte a reta A_1A_3 em um ponto P' com $P' \neq P$. Pelo caso de congruência (lado-ângulo-lado) os triângulos PT_1C_1 e PT_2C_1 são congruentes, assim o ângulo $C_1\widehat{T_2}P = C_1\widehat{T_1}P = 90^\circ$. Por outro lados temos que o ângulo $C_2\widehat{T_2}P' = 90^\circ$. Absurdo,

pois, se consideramos o triângulo PT_2P' , temos que os ângulos $C_1\widehat{T_2}P$ e $C_2\widehat{T_2}P$ são ângulos externos desse triângulo que medem 90° . Esse absurdo foi gerado pois consideremos $P \neq P'$. Portanto devemos considerar $P = P'$.

Seja a' a medida do eixo focal da elipse que contém os centros dos círculos que formam a Cadeia de Pappus. Temos, pelo resultado acima, que o raio da circunferência que contém os pontos de tangência é dado por $r = a' - x$. Por outro lado, usando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{aligned}(a' + x)^2 &= r_0^2 + r^2 \Rightarrow a'^2 + 2a'x + x^2 = r_0^2 + r^2 \\ &\Rightarrow a'^2 + 2a'x + x^2 = r_0^2 + a'^2 - 2a'x + x^2 \\ &\Rightarrow 2a'x = r_0^2 - 2a'x \Rightarrow 4a'x = r_0^2 \\ &\Rightarrow x = \frac{r_0^2}{4a'}.\end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}r &= a - x = a - \frac{r_0^2}{4a'} \\ \Rightarrow r &= \frac{4a^2 - r_0^2}{4a'} = \frac{(2a' + r_0)(2a' - r_0)}{4a'}.\end{aligned}$$

Para finalizar, sejam b o diâmetro da circunferência maior e a o diâmetro da circunferência menor que forma o arbelo, temos que

$$b = 2a' + r_0 \text{ e } a = 2a' - r_0.$$

Dessa forma, temos que

$$r_0 = \frac{b - a}{2}.$$

Logo,

$$a' = \frac{a + b}{4}.$$

Portanto,

$$r = \frac{(2a' + r_0)(2a' - r_0)}{4a'} = \frac{ba}{a + b}. \quad (3.13)$$

No qual concluímos que seu diâmetro é $\frac{2ab}{a + b}$. □

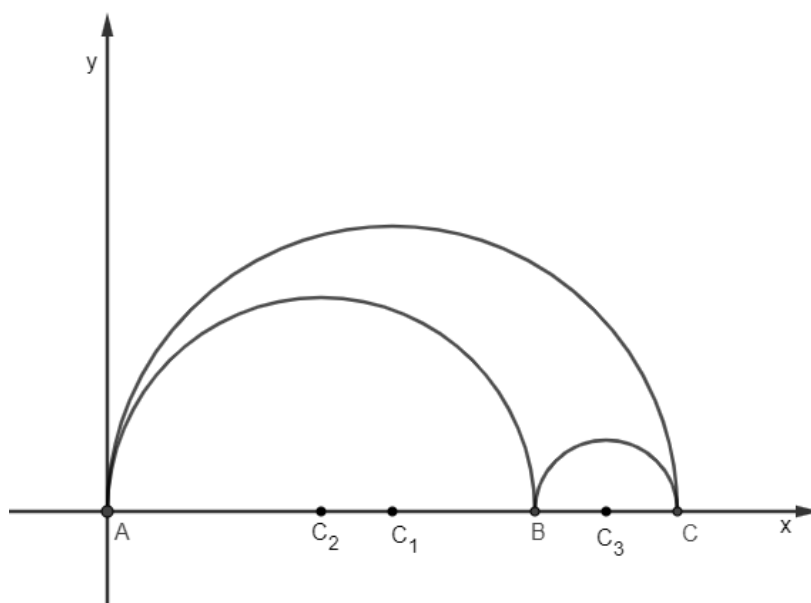
Na próxima seção, veremos como a Cadeia de Pappus pode ser construída usando as coordenadas dos centros dos círculos que as formam. Veremos também que as inclinações das retas que passam pela origem e por tais centros formam uma progressão aritmética.

3.1.1 Teorema de Pappus e Coordenadas dos centros dos círculos da Cadeia de Pappus

Sem dúvida, o uso da inversão para a construção da Cadeia de Pappus não é elementar, já que este não é um conteúdo ministrado no Ensino Fundamental e Médio, e muitas das vezes nem mesmo nos cursos de graduação. Nosso objetivo nessa seção é apresentar uma forma alternativa para a construção da Cadeia de Pappus e demonstrar usando apenas geometria básica o famoso Teorema de Pappus, o qual diz que a altura h_n do centro do n ésimo círculo da Cadeia de Pappus é igual a n vezes o diâmetro desse círculo.

Nosso primeiro resultado demonstra a afirmação acima para o primeiro círculo da Cadeia de Pappus. Para essa demonstração, usaremos alguns conceitos de Geometria Analítica, tais como: equação da circunferência e equação da reta, conteúdos esses de fácil absorção pelos discentes.

Figura 3.6: Arbelo ABC com A centrado na origem do plano cartesiano



Fonte: O autor.

Proposição 18. *O centro da primeira circunferência da Cadeia de Pappus está sobre a reta de equação:*

$$y = 2 \frac{(R - r)}{R + r} x. \quad (3.14)$$

no qual R e r são respectivamente os raios dos círculos maior e menor que forma o arbelo. E a distância desse centro à reta AB (base do arbelo) é duas vezes o raio desse círculo.

Demonstração. De fato, considere o arbelo ABC com cúspide A centrado na origem do plano cartesiano. Veja a Figura 3.6. Seja R o raio do semi-círculo maior e r o raio do semi-círculo médio. Pela Proposição 17, a equação da circunferência que contém os pontos de tangência dos círculos da Cadeia de Pappus é dada por:

$$\left(x - \frac{2Rr}{R+r}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2Rr}{R+r}\right)^2. \quad (3.15)$$

Temos também que a equação da circunferência que determina o arco BC é dada por:

$$(x - (R+r))^2 + y^2 = (R-r)^2. \quad (3.16)$$

Assim, igualando 3.16 e 3.15, obtemos que o ponto de tangência do arco BC com a primeira circunferência que forma a Cadeia de Pappus é:

$$T_1 = \left(\frac{2Rr(R+r)}{R^2+r^2}, \frac{2Rr(R-r)}{R^2+r^2}\right) \quad (3.17)$$

Assim, pelo Proposição 16, e pelo fato de duas circunferência tangentes terem seus centros e o ponto de tangência alinhados, podemos encontrar as coordenadas do centro da primeira circunferência que forma a cadeia.

Com efeito, temos que a equação da reta que passa pelo centro da primeira circunferência e pelo ponto C_3 é dada por:

$$y = -\left(\frac{2Rr}{R^2-r^2}\right)(x - (R+r)) \quad (3.18)$$

e a equação da elipse que contém os centros das circunferência é:

$$\frac{\left(x - \left(\frac{R+r}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{Rr})^2} = 1 \quad (3.19)$$

Assim, igualando as Equações 3.18 e 3.19, temos que a coordenada do centro da primeira circunferência é:

$$C_1 = \left(\frac{Rr(R+r)}{r^2 - Rr + R^2}, \frac{2Rr(R-r)}{r^2 - Rr + R^2}\right) \quad (3.20)$$

Portanto, temos que:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{2(R-r)}{R+r} \quad (3.21)$$

Logo, como a reta passa pela origem do plano cartesiano, temos que sua equação é dada por

$$y = \frac{2(R-r)x}{R+r} \quad (3.22)$$

O que prova o resultado. □

Para o que segue, temos que o raio da primeira circunferência da cadeia é dado por:

$$r_1 = \frac{Rr(R-r)}{r^2 - Rr + R^2} \quad (3.23)$$

Com efeito, basta calcular a distância entre os pontos dados pelas equações 3.17 e 3.20. Note que r_1 é metade da ordenada de C_1 .

Observe que o coeficiente angular da reta que passa pelo centro da primeira circunferência da Cadeia de Pappus é o dobro do coeficiente angular da reta que passa pelo ponto de tangência desta circunferência com o arco BC .

O próximo resultado, encontra-se em Klarner (1981), e será crucial na demonstração do resultado principal dessa seção. O mesmo mostra que existe uma relação entre os raios das circunferência e as ordenadas desses centros.

Proposição 19. *Para toda circunferência da Cadeia de Pappus vale a relação*

$$\frac{r_n}{x_n} = \frac{R-r}{R+r} \quad (3.24)$$

Demonstração. Considere uma circunferência de raio r_n qualquer, conforme Figura 3.7. Pelo teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação:

$$\overline{LC_1}^2 - \overline{LC_2}^2 = \overline{C_nC_1}^2 - \overline{C_nC_2}^2$$

Como:

$$\overline{AF} = x_n,$$

$$\overline{LC_1} = R - \overline{AL} = R - x_n,$$

$$\overline{LC_2} = r - \overline{AL} = r - x_n,$$

$$\overline{C_nC_1} = R - r_n$$

e

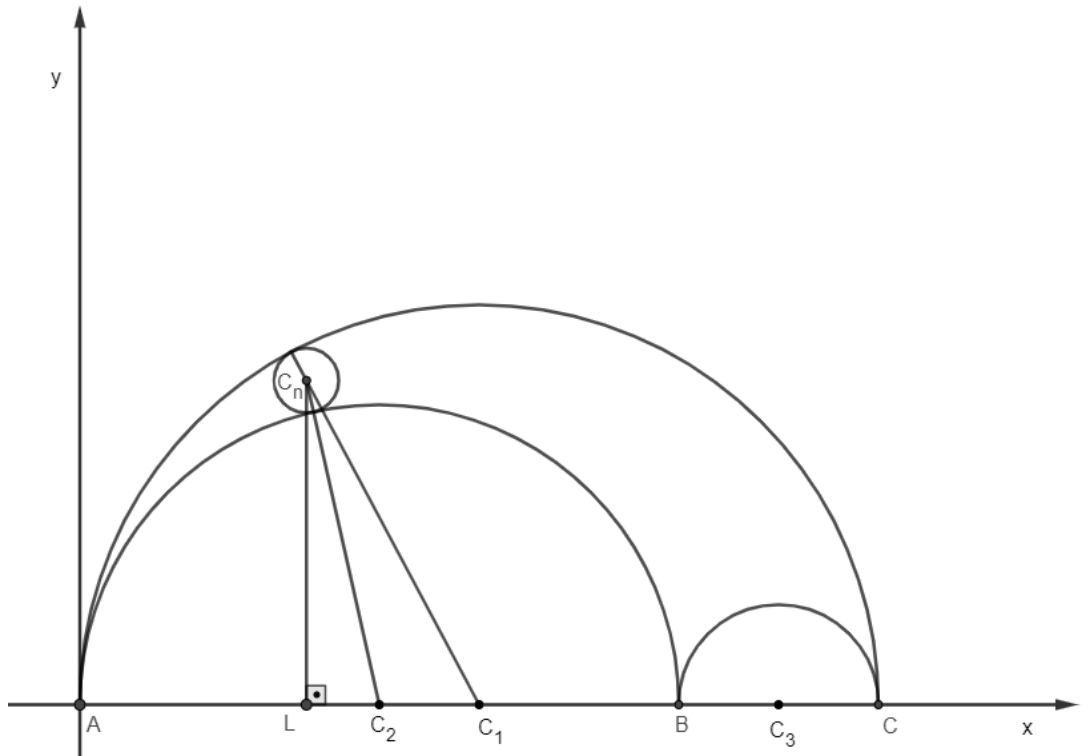
$$\overline{C_nC_2} = r + r_n.$$

Obtemos que

$$\frac{r_n}{x_n} = \frac{R-r}{R+r} \quad (3.25)$$

□

Figura 3.7: Arbelo ABC e circunferência da Cadeia de Pappus



Fonte: O autor.

O resultado a seguir, principal para esse trabalho, no qual o Teorema de Pappus segue como uma consequência imediata, fala que as coordenadas dos centros das circunferências que formam a Cadeia de Pappus estão sobre retas que passam pela origem do plano cartesiano e têm inclinação dada pelos termos de uma progressão aritmética. Esse fato, como já foi mencionado, pode ser usado para a demonstração do Teorema de Pappus sem o uso de inversão.

Antes disso, analisando a Figura 3.8, podemos observar que os pontos I e T_n pertencem à reta que passa pelo origem do plano cartesiano.

De fato, considere o círculo λ_n da Cadeia de Pappus, conforme Figura 3.8. Vamos mostrar que os pontos A, T_n e I estão alinhados, onde T_n é o um ponto de tangência de λ_n com λ_{n+1} , A é a origem e I é a interseção de λ_n com a reta vertical que passa pelo centro de λ_n . Para tanto, mostraremos que os ângulos AT_nB e BT_nI são suplementares.

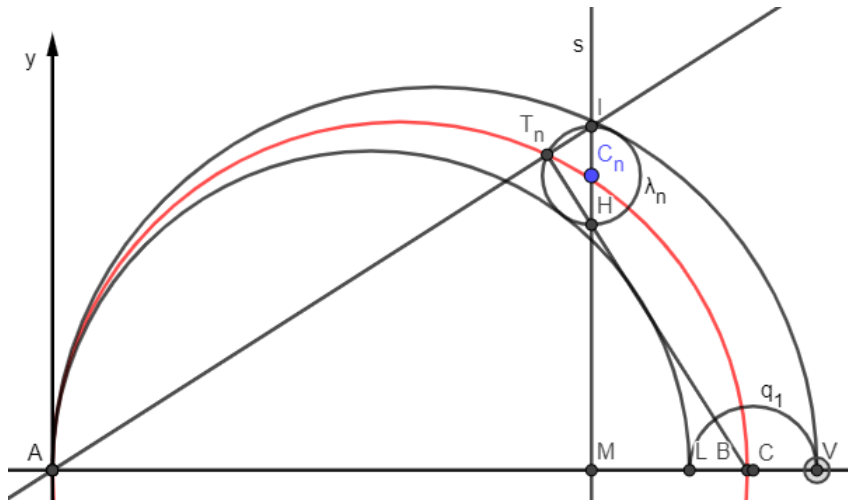
Com efeito, seja H a interseção da reta T_nB com a λ_n . Como I e H pertencem a λ_n , temos que o segmento IH é diâmetro de λ_n . Logo, o triângulo HT_nI é retângulo em T_n . Temos também que o ângulo $BT_nI = HT_nI$. Logo o ângulo BT_nI é igual a 90° .

Por outro lado, como T_n pertence ao círculo da Proposição 17, temos que o triângulo AT_nB é retângulo em T_n . Portanto,

$$\widehat{AT_nI} = \widehat{AT_nB} + \widehat{BT_nI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

como queríamos demonstrar.

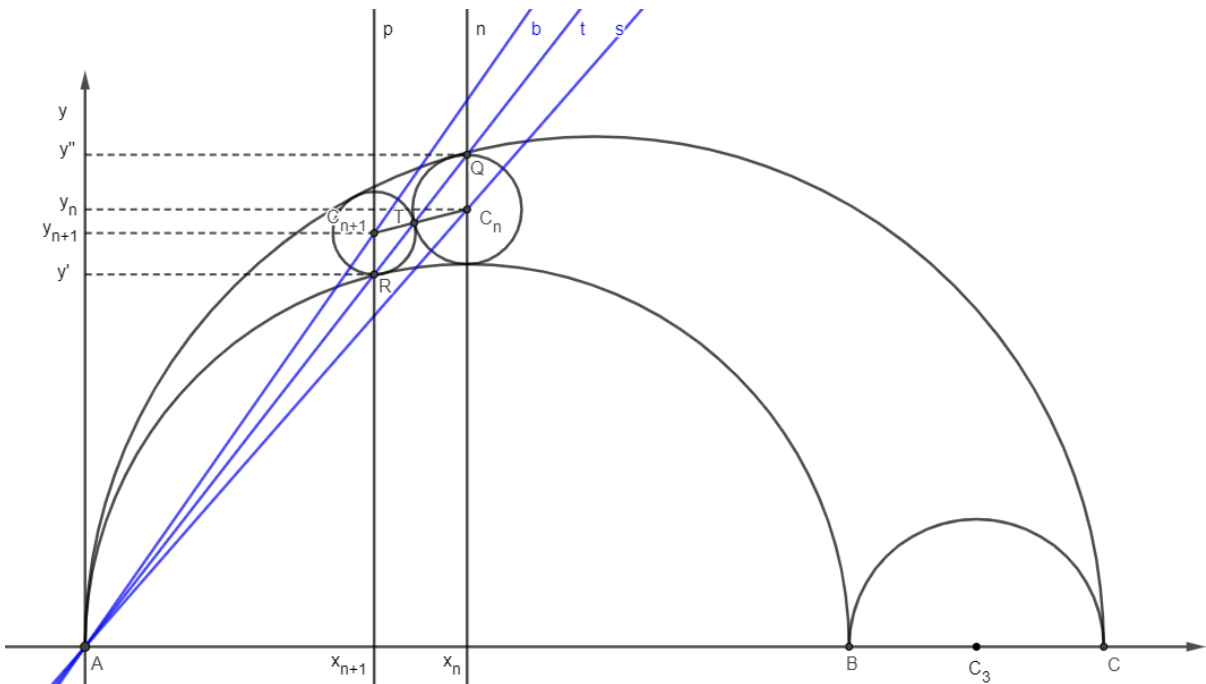
Figura 3.8: Pontos A , T_n e I alinhados



Fonte: O autor.

Observando a Figura 3.9, podemos demonstrar que o ponto R , interseção da reta vertical que passa pelo ponto C_{n+1} , centro do círculo λ_{n+1} , também pertence à reta que passa pelos pontos de tangência é o ponto I . Com efeito, vamos mostrar que os Ângulos $C_{n+1}\widehat{RT}$ e $C_n\widehat{QT}$ são iguais. Com efeito, temos que o triângulo $RC_{n+1}T$ é isósceles de base RT . Logo, os ângulos $C_{n+1}\widehat{RT}$ e $C_{n+1}\widehat{TR}$ são iguais. De modo análogo, temos que os ângulos $C_n\widehat{QT}$ e $C_n\widehat{TQ}$ são iguais. Por outro lado, temos que os ângulos $R\widehat{T}C_{n+1}$ e $Q\widehat{T}C_n$ são opostos pelo vértice, logo iguais. Portanto, os Ângulos $C_{n+1}\widehat{RT}$ e $C_n\widehat{QT}$ são iguais.

Figura 3.9: Arbelo ABC e circunferência da Cadeia de Pappus de raio r_n e r_{n+1}



Fonte: O autor.

Proposição 20. *Os centros das circunferências que formam a Cadeia de Pappus estão sobre retas de inclinação*

$$m_{c_n} = \frac{2n(R - r)}{R + r} \quad (3.26)$$

Demonstração. Usaremos indução sobre n .

Com efeito, para $n = 1$, a Proposição 18 garante o resultado.

Suponha agora que a igualdade seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que o resultado é válido também para $n + 1$. De fato, seja y' e y'' as ordenadas dos pontos R e Q , Figura 3.9, temos que

$$\begin{aligned} m_{c_{n+1}} &= \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \\ &= \frac{y' + r_{n+1}}{x_{n+1}} \\ &= \frac{y'}{x_{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{x_{n+1}} \\ &= \frac{y''}{x_n} + \frac{R - r}{R + r} \\ &= \frac{y_n + r_n}{x_n} + \frac{R - r}{R + r} \\ &= \frac{y_n}{x_n} + \frac{r_n}{x_n} + \frac{R - r}{R + r} \\ &= \frac{y_n}{x_n} + \frac{R - r}{R + r} + \frac{R - r}{R + r} \\ &= \frac{2n(R - r)}{R + r} + \frac{2(R - r)}{R + r} \\ &= \frac{2(n + 1)(R - r)}{(R + r)} \end{aligned}$$

Portanto, por indução matemática, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. □

De posse dos resultados acima, podemos demonstrar o Teorema de Pappus sem o uso de inversão. O enunciado do teorema e sua demonstração podem ser encontrados na próxima proposição.

Proposição 21. *A altura h_n do centro da n ésima circunferência da Cadeia de Pappus e base ABC é igual a n vezes o diâmetro d_n dessa circunferência.*

Demonstração. De fato, como $h_n = y_n$, combinar os resultados das Proposições 19 e 20, temos que:

$$y_n = 2n \cdot r_n = n \cdot d_n \quad (3.27)$$

Dessa forma, temos que $h_n = n \cdot d_n$. □

Por fim, podemos encontrar as coordenadas dos centros das circunferências que formam a Cadeia de Pappus, basta tomar a interseção entre as retas que passam pela origem e tem inclinação dada pela Proposição 20, e a elipse da Proposição 16. Assim, temos que as coordenadas dos centros são:

$$(x_{c_n}, y_{c_n}) = \left(\frac{Rr(R+r)}{n^2(R-r)^2 + Rr}, \frac{2nRr(R-r)}{n^2(R-r)^2 + Rr} \right). \quad (3.28)$$

Além disso, usando o resultado da Proposição 19, temos que os raios dessas circunferência são dados por:

$$r_n = \frac{Rr(R-r)}{n^2(R-r)^2 + Rr}. \quad (3.29)$$

Portanto, temos uma nova maneira de construir a Cadeia de Pappus, pois com o resultado acima, podemos encontrar as circunferência que a formam.

Exemplo: A seguir, será apresentada a construção da Cadeia de Pappus quando o arbelo é formado por um semicírculo maior de raio 4 cm e um semicírculo médio de raio 3 cm.

Utilizando a expressão (3.28), temos que para $R = 4$ cm e $r = 3$ cm, as coordenadas dos centros que formam a Cadeia de Pappus são obtidas por

$$(x_{c_n}, y_{c_n}) = \left(\frac{84}{n^2 + 12}, \frac{24n}{n^2 + 12} \right). \quad (3.30)$$

Temos ainda que, utilizando a fórmula (3.29), os raios dos círculos que formam a Cadeia de Pappus para o exemplo acima são dados por:

$$r_n = \frac{12}{n^2 + 12}.$$

A Tabela 3.1 apresenta as coordenadas dos centros e os raios dos seis primeiros círculo que formam a Cadeia de Pappus para o exemplo acima.

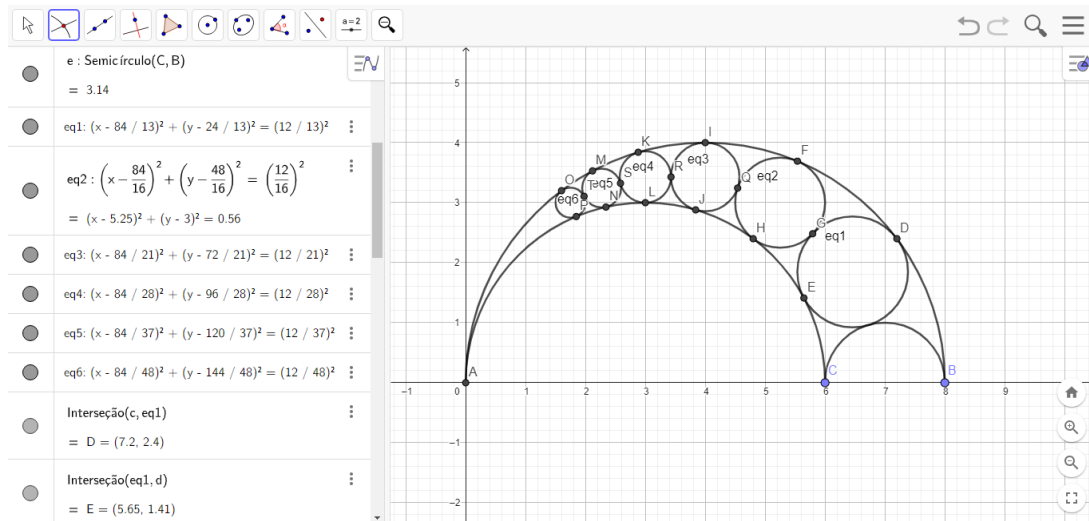
Tabela 3.1: Tabela contendo as coordenadas dos seis primeiros círculos da Cadeia de Pappus

n	1	2	3	4	5	6
(x_{c_n}, y_{c_n})	$\left(\frac{84}{13}, \frac{24}{13}\right)$	$\left(\frac{84}{16}, \frac{48}{16}\right)$	$\left(\frac{84}{21}, \frac{72}{21}\right)$	$\left(\frac{84}{28}, \frac{96}{28}\right)$	$\left(\frac{84}{37}, \frac{120}{37}\right)$	$\left(\frac{84}{48}, \frac{144}{48}\right)$
r_n	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{12}{48}$

Fonte: O autor.

Por fim, utilizando a Equação 3.15 e colocando esse dados no Geogebra temos os seis primeiros círculos que formam a Cadeia de Pappus.

Figura 3.10: Seis primeiros círculos da Cadeia de Pappus para $R = 4$ cm e $r = 3$ cm



Fonte: O autor.

Capítulo 4

Proposta de Sequência Didática

Diante do cenário educacional que vivemos, ser professor é um grande desafio, mais ainda, quando a disciplina lecionada é considerada difícil pela grande maioria dos alunos, como é o caso da Matemática. Diante disso, o professor de Matemática deve, por sua vez, apresentar um aprimoramento de suas práticas docentes, buscando assim uma melhoria nos processos de ensino e aprendizado. Isso está de acordo com o que vemos a seguir.

O processo de educação formal é desafiada em inúmeros pontos, questões do cotidiano, dificuldade em aprendizagem por parte dos estudantes, didática não atrativa por parte dos docentes, até a fragmentação na formação dos professores, e se tratando da Educação Matemática, por si só, requer um tratamento criativo, provocando o envolvimento espontâneo dos alunos, com isso, valorizando e percebendo a importância das atividades propostas compartilhadas, reflexivas e colaborativas para desenvolvimento e construção do conhecimento matemático (OLIVEIRA, 2023, p. 36).

Segundo Lima (2019), os estudantes buscam, nas aulas de Matemática, uma aplicação para aquele estudo, questionando assim o professor, que por sua vez deve dar significado aos conteúdos matemáticos. Dessa forma, uma prática docente que vem dando muito certo são as sequências didáticas, nelas o professor organiza de forma clara e cronológica os conceitos estudados sobre um determinado conteúdo. De acordo com Peretti e Costa (2013), a sequência didática trata-se de um conjunto com atividades interligadas entre si, planejadas etapa a etapa e organizadas de acordo com os objetivos a serem alcançados pelo professor, essas atividades podem levar dias, semanas ou até mesmo durar todo o ano letivo.

Já Castellar (2016), ressalta a diferença entre a sequência didática e o plano de aula. Segundo a autora,

Enquanto o plano de aula fica circunscrito aos registros dos seus objetivos, atividades e avaliação, a sequência didática avança para o material de apoio ou instrucional. Ou seja, a sequência didática atrela-se não apenas aos pormenores das atividades – que neste caso é a descrição das tarefas –, mas também às tarefas em si, com os enunciados das questões, imagens, figuras, tabelas etc (CASTELLAR, 2016, p. 41)

A seguir, apresentamos uma proposta de sequência didática que o professor do Ensino Médio pode executar na apresentação dos conceitos de círculos e elipse.

4.1 Atividade I: Arquimedes, o gênio da matemática

Tema da aula: Vida e obras de Arquimedes..

Público-alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Objetivo: Introduzir conceitos históricos sobre a matemática.

Objetivo específicos:

- Apresentar a matemática do passado;
- Apresentar fatos marcantes na vida de Arquimedes;
- Compreender a evolução da matemática;
- Apresentar problemas relevantes da época.

Duração da aula: 1h/a.

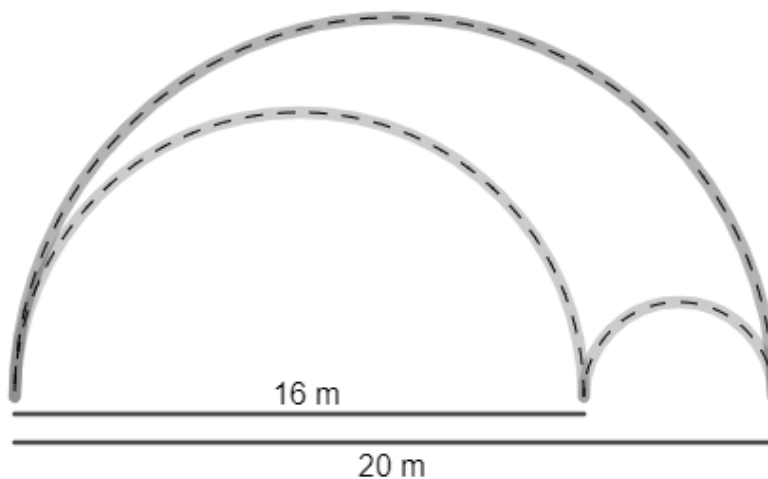
Recursos didáticos: Data show e o vídeo “Arquimedes”.

Disponível em: Nunes (2011).

Procedimentos metodológicos: O professor iniciará a aula apresentando o seguinte problema motivacional:

- Um engenheiro construiu uma praça na escola de João com as dimensões e formato da Figura 4.1. Um dia, João e seu amigo Marcos resolveram apostar uma corrida para ver quem chegava primeiro de uma extremidade a outra da praça. Para escolher o caminho, os dois fizeram um simples sorteio do qual Marcos foi o vencedor. Sabendo que Marcos escolheu o caminho dado pelo dois arcos de círculo, podemos dizer que o mesmo foi beneficiado?

Figura 4.1: Planta da praça na forma de uma arbelo.



Fonte: O autor

De acordo com Polya (1995, p. 4) “a resolução de problemas é uma habilidade prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilidade por imitação e prática”. Ainda segundo Polya (1995), se o professor desafiar a curiosidade dos alunos, apresentado-lhes problemas que os instiguem poderá despertar neles o gosto pelo raciocínio independente.

Em seguida, o professor promoverá uma discussão com a turma sobre o problema proposto, de forma a fazer com que os alunos reflitam e discutam sobre o tema. Após este momento, o professor apresentará algumas imagens correspondentes ao problema, chamando atenção para o fato de que essa estrutura é conhecida como arbelo, o qual há muitos anos foi estudado pelo matemático e filósofo Arquimedes de Siracusa.

Nesse momento, julgamos propício uma breve introdução histórica dos feitos que se credita a Arquimedes.

A reprodução de métodos históricos com objetivos pré-estabelecidos em sala de aula favorece a visão e a percepção de que a Matemática não é pronta e acabada, pois provoca a reflexão sobre as indagações práticas ou abstratas na construção do conhecimento matemático das diferentes culturas em diferentes momentos históricos (OLIVEIRA, 2023, p. 71).

Dessa forma, propomos que o professor apresente a animação “Arquimedes”, que conta a história de como Arquimedes desvendou o mistério do problema da coroa do rei.

Figura 4.2: Arquimedes e o problema da coroa.



Fonte: Extraído de Nunes (2011).

Por fim, como atividade extraclasse, o professor dividirá a sala em grupos com cinco estudantes, propondo-lhes uma pesquisa sobre o problema do início da aula. A metodologia utilizada nesse momento pelo professor é a de sala invertida. Segundo Machado (2022), na metodologia de sala invertida os papéis do professor e do aluno mudam completamente, o docente será agora um facilitador, buscando trabalhar as dificuldades dos discentes e não apenas

expor no quadro os conteúdos da disciplina. Ainda segundo o autor, essa prática estimula a ativação de competências por parte dos alunos e também por parte dos professores, dividindo entre ambos a responsabilidade de aprender.

Avaliação: A avaliação se dará pela participação dos discentes diante do problema proposto e pela pesquisa extraclasse.

4.2 Atividade II: A matemática na arte de resolver problemas

Tema da aula: Circunferência e suas propriedades.

Público-alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Objetivo: Compreender conceitos sobre circunferência.

Objetivo específicos:

- Compreender a definição de circunferência;
- Compreender a fórmula para o comprimento da circunferência;
- Resolver problema utilizando esses conceitos.

Duração da aula: 2h/a.

Recursos didáticos: Quadro e data show.

Procedimentos metodológicos: No início na aula, o professor retornará ao problema proposto da aula anterior, proporá uma nova discussão relacionada ao assunto, questionando aos discentes sobre qual o caminho da praça é mais vantajoso. Como os alunos já fizeram uma breve pesquisa, eles devem, de modo mais seguro, apresentar uma solução mais compatível com a realidade, assim, sendo esperada a conclusão que os caminhos são iguais em ambos os casos.

Depois da discussão, o professor apresentará a definição de circunferência como lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto dado, assim como suas propriedades, tais como: medida do raio e comprimento da circunferência. Em seguida, o professor retorna ao problema do início da aula anterior, apresentando ao estudantes que tal solução pode ser encontrada tomando a soma dos comprimentos dos arcos das semicircunferências menores e comparando com o comprimento da semicircunferência maior. Assim, mostrando para os alunos que, independente dos raios das circunferências, os caminhos escolhidos por João ou Marcos terão o mesmo comprimento.

De acordo com Polya (1995), “se o problema é difícil, é possível que tenhamos de decompô-lo ainda mais e de examinar detalhes ainda mais remotos”. Ainda segundo Polya (1995) “Uma vez decomposto o problema, podemos tentar recombinar os seus elementos de maneira nova”.

Por fim, ainda usando o problema da praça, o professor fará a seguinte pergunta: qual a quantidade de grama usada na praça entre os caminhos?

Em seguida, orientando que em casa os discentes estudem um pouco sobre o problema proposto, relatando que tal conteúdo será o estudado na próxima aula.

Avaliação: A avaliação se dará pela participação dos discentes diante do problema proposto, para isso, o professor observará as estratégias apresentadas na resolução do desafio.

4.3 Atividade III: A circunferência e seu lugar na matemática

Tema da aula: Área da circunferência.

Público-alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Objetivo: Compreender conceitos sobre a área da circunferência.

Objetivo específicos:

- Compreender a definição de circunferência;
- Compreender a fórmula para a área do círculo.
- Resolver problema utilizando esses conceitos.

Duração da aula: 2h/a.

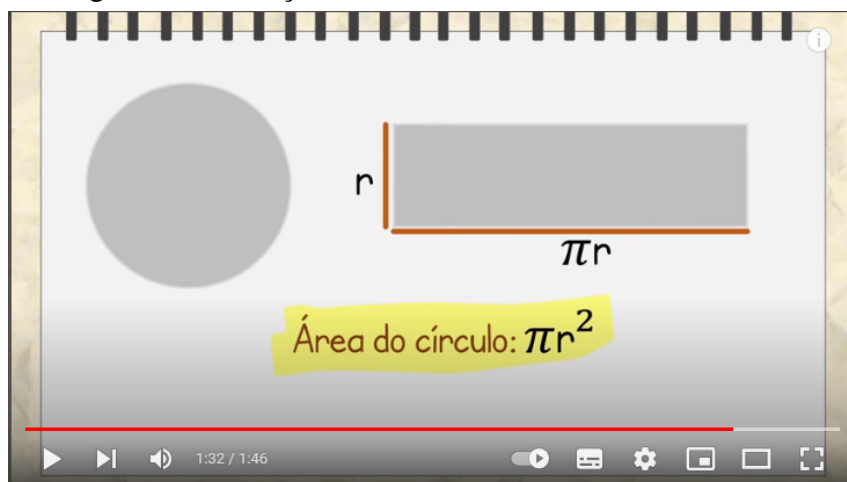
Recursos didáticos: Quadro, data show e vídeo da dedução da fórmula da área.

Link: Eutíquio (2022).

Procedimentos metodológicos:

No início da aula, o professor retorna ao problema proposto da aula anterior e questiona aos discentes sobre qual a quantidade de grama usada no projeto da praça. Nesse momento, esperamos que os alunos possam dar suas soluções diante do problema proposto, trocando experiências com os colegas de sala. Em seguida, o professor apresentará a fórmula para o cálculo da área da circunferência, orientamos que o docente apresente o vídeo, ver Figura 4.3, o qual, de modo bem dinâmico, ilustra essa dedução.

Figura 4.3: Dedução da fórmula da área da circunferência.



Fonte: Eutíquio (2022)

Em seguida, com o auxílio do software *Geogebra*, construa algumas circunferências e peça para que os estudantes possam calcular suas áreas.

De acordo com Wolff e Silva (2013) o software, desenvolvido para o ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser aplicado em diferentes níveis de ensino, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, o uso dessas ferramentas auxilia na compreensão do conteúdo, contribuindo assim para os processos de ensino e aprendizagem, pois esse programa proporciona a interação entre o homem e a máquina.

Por fim, ainda com o auxílio do Geogebra e tendo como objetivo aprofundar os conhecimentos dos educandos, relate que Arquimedes de Siracusa, o sábio estudado no início do Profmat, demonstrou que a área entre os caminhos, conhecido como área do arbelo, é igual à área da circunferência ilustrada na Figura 2.26.

Avaliação: A avaliação se dará pela participação dos discentes diante do problema proposto, para isso, o professor observará as estratégias apresentadas na resolução do desafio.

4.4 Atividade IV: De onde vêm as cônicas?

Tema da aula: Conceitos preliminares sobre a elipse.

Público-alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Objetivo: Apresentar de modo lúdico a definição das cônicas circunferência e elipse e suas propriedades.

Duração da aula: 2h/a.

Recursos didáticos: Data show, lanterna, alfinete, barbante, lápis, papel e computador com internet.

Procedimentos metodológicos: O professor iniciará a aula retomando o conceito da aula anterior, lembrando a definição e as propriedades sobre as circunferências. Em seguida, o docente fará a seguinte pergunta aos alunos:

- Por que chamamos as circunferências, as elipses, as parábolas e as hipérbolas de cônicas?

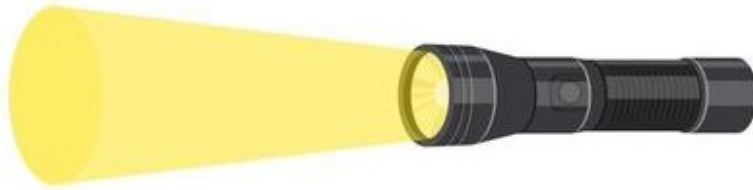
De acordo com Castellar e Machado (2016, p. 82) “na elaboração de uma sequência didática, é fundamental também que o professor tenha habilidade de formular perguntas aos alunos, de ilustrar com exemplos, de propiciar *feedback*, de facilitar a comunicação, entre outros”.

Esperando um tempo para que os discentes respondam e com o auxílio de uma lanterna e o quadro da sala, o professor, de modo bem lúdico, responderá a pergunta.

A metodologia utilizada pelo professor será a seguinte: o docente direcionará a lanterna para o quadro de modo que os raios cheguem paralelamente entre si tocando essa superfície, conforme Figura 4.4. Diante dessa estratégia, nosso objetivo é que os alunos observem a circunferência formada pela interseção dos raios de luz e o plano do quadro.

Em seguida, o professor faz a seguinte pergunta;

Figura 4.4: Lanterna com feixe de luz



Fonte: Encrypted (s.d.b)

- E se inclinarmos um pouco a posição da lanterna 4.5, qual a cônica que vai se formar?

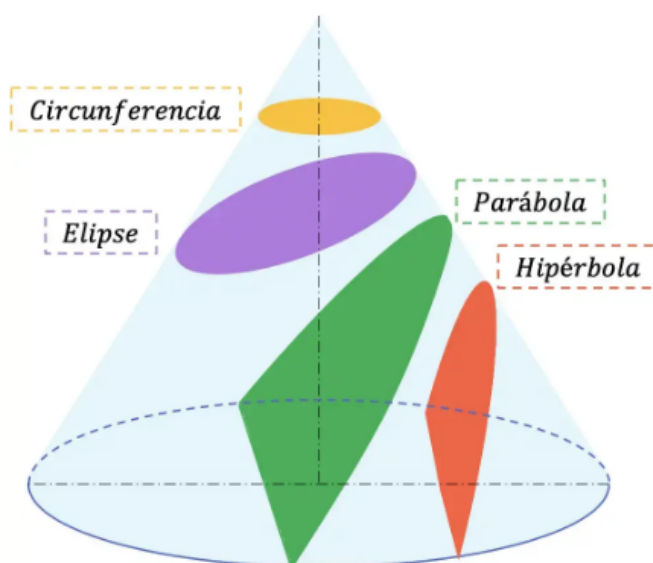
Figura 4.5: Lanterna com feixe de luz inclinada.



Fonte: Freepik (s.d.)

Nesse momento, esperamos que o discentes possam observar que a imagem formada é uma elipse e, à medida que aumentamos essa , obtemos uma parábola. Para ilustrar esse fato, o professor deve apresentar a Figura 4.6, a seguir.

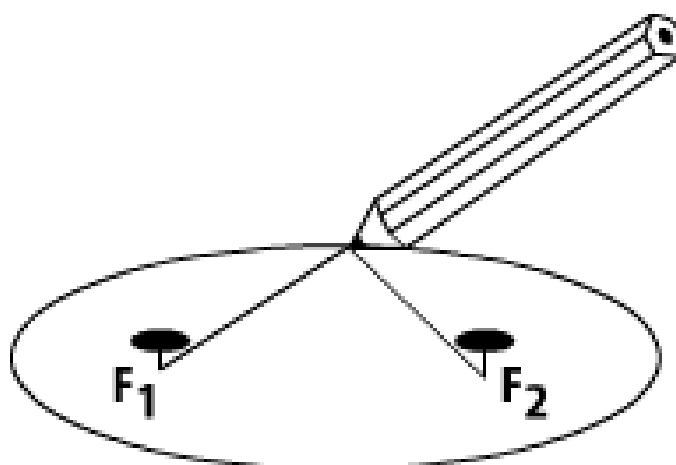
Figura 4.6: Cônicas



Fonte: Geometria... (2020)

Observando a ideia por trás das cônicas, orientamos que o professor exiba a definição da elipse, conforme Definição 4. Em seguida, como na atividade, será pedido para que os estudantes se dividam em grupos de cinco pessoas, no máximo, e construam elipses em seus cadernos. Os materiais utilizados nessa atividade serão: dois alfinetes, um pedaço de barbante, lápis e papel. Comece orientado que os alfinetes devem ser fixados no papel. Com o pedaço de barbante, amarre as extremidades em cada um dos alfinetes e, com o lápis, estique o barbante até ficar tensionado, conforme Figura 4.7, a seguir. Para desenhar a elipse, faça o lápis deslizar sobre o papel, sempre com a linha tensionada.

Figura 4.7: Construção da elipse.



Fonte: Mello (2001).

Com a figura em mãos, questione os estudantes sobre os seguintes fatos:

- O que os dois alfinetes representam na elipse? E o cordão?

- Afastando ou aproximando os alfinetes, o que acontece com a forma da elipse?

Nosso objetivo com essa atividade é que os estudantes possam, de modo prático, ter um contato com a definição e os elementos de uma elipse. Segundo Gervázio (2017), para que os alunos absorvam os conteúdos de modo efetivo, é necessário que se tenha uma teoria, mas também que esse conteúdo esteja alinhado com a prática. Dessa forma, o uso de materiais concretos nas aulas de Matemática é indispensável para uma boa compreensão.

Por fim, o professor pedirá que os discentes pesquisem em fontes confiáveis; como a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações do Brasil (BDBT) e no *Google* acadêmico, sobre as diversas aplicações das elipses no cotidiano e faça um breve resumo sobre essa pesquisa. Para essa atividade, é necessário que haja computador com acesso à internet.

Avaliação: A avaliação se dará pela participação dos alunos e pela resolução da pesquisa proposta.

4.5 Atividade V: A elipse e suas aplicações

Tema da aula: Equação da elipse e suas propriedades.

Público-alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Objetivo: Reconhecer a equação da elipse com o auxílio do Geogebra.

Duração da aula: 2h/a.

Recursos didáticos: Data show, lápis, papel e Computador com internet.

Procedimentos metodológicos: Inicialmente, o professor retomará o conteúdo da aula anterior revisitando a definição de elipse. Em seguida, o docente apresentará uma imagem do antigo Coliseu, que, de acordo com o trabalho de Venturi (1949), é considerado o maior monumento arquitetônico construído na Roma Antiga. Sua construção se deu entre os anos 72 a 82 d.c e sua planta baixa possui a forma elíptica, cujo eixo maior tinha 188 m e o menor 156 m.

Figura 4.8: Interior do Coliseu



Fonte: Todamatéria (s.d.).

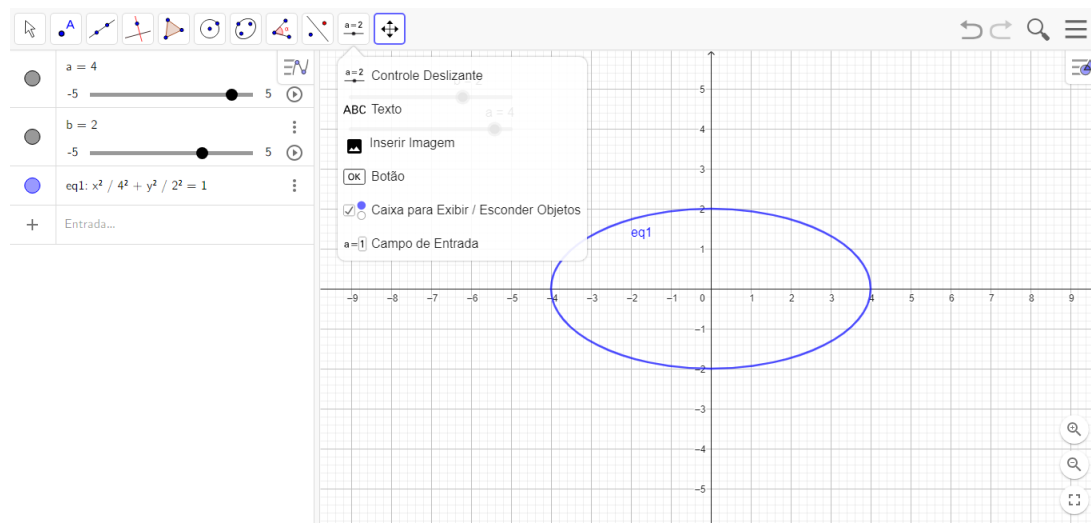
Em seguida, fará as seguintes perguntas aos alunos:

- O que significa eixo maior e eixo menor?
- Qual a área ocupada pela planta baixa do Coliseu?

De acordo com Polya (1995), o aluno precisa compreender o problema e desejar resolvê-lo. O professor, por sua vez, deve escolher bem o desafio: problemas fáceis desmotivam, e problemas difíceis podem frustrar os alunos. Assim, é interessante que o professor dedique um tempo de sua aula para uma apresentação natural e interessante do problema. Ainda segundo o autor, a falta de interesse e compreensão por parte dos alunos diante ao problema, nem sempre é culpa do professor.

Em seguida, o professor apresentará para os alunos a equação reduzida da elipse, Equação (2.6). Com o auxílio do Geogebra, usando o comando de criação dos controles deslizantes, o professor deve construir no software algumas elipses para a melhor compreensão dos discente. Para um manuseio eficiente do aplicativo recomendamos a leitura do trabalho de Diniz et al. (2016).

Figura 4.9: Imagens da elipse no Geogebra.



Fonte: O autor.

Em seguida, o professor apresentará a fórmula para o cálculo da área da elipse, Equação (2.10), destacando que tal área se assemelha bastante à da circunferência, bastando tomar $a = b = r$, no qual r é o raio da circunferência. Por fim, o professor pedirá que os alunos resolvam o problema inicial da aula. Nesse momento, como atividade extraclasse, o professor, orientará que os discente façam uma simples pesquisa sobre algumas das aplicações da elipse. **Avaliação:** A avaliação se dará pela participação dos discentes diante do problema proposto e pela compreensão dos alunos.

4.6 Atividade VI: Ellarbelos, uma ampliação dos arbelos de Arquimedes

Tema da aula: As elipses e suas aplicações.

Público-alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Objetivo: Compreender a importância das elipses na Mecânica e na Física.

Duração da aula: 2h/a.

Recursos didáticos: Quadro, pincel, papel e datashow.

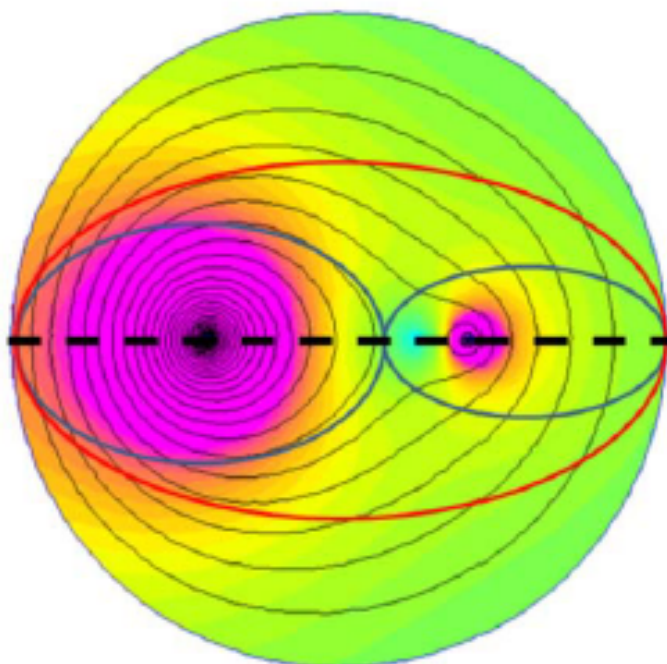
Procedimentos metodológicos: O professor retomará o conteúdo da aula anterior perguntando quais foram as aplicações que foram encontradas sobre as elipses. Feito isso, o professor deve deixar que os alunos possam expor suas pesquisas e deve acrescentar mais informações aos discentes.

Em seguida, o professor deve lembrar os alunos do problema da praça da escola de João, problema da Aula 1, e lhes fazer as seguintes perguntas;

- Será que as propriedades dos arbelos de Arquimedes valem para as elipses?
- Quais as aplicações para esse tema?

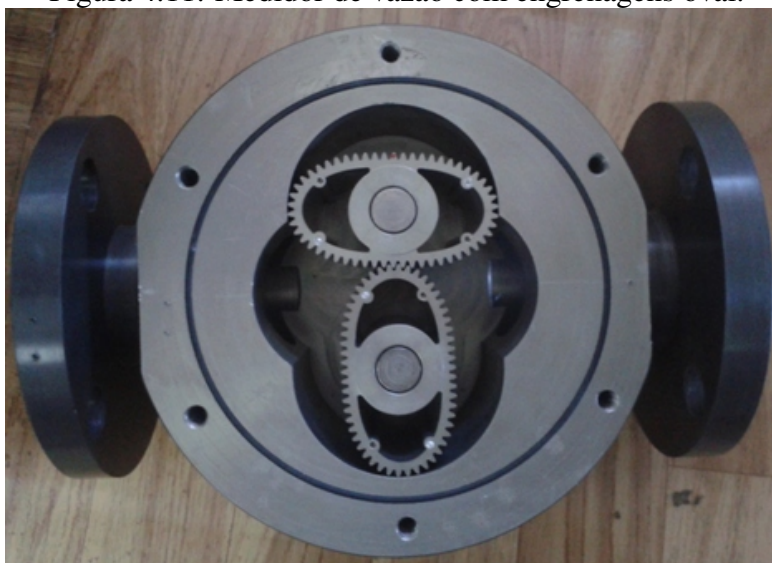
Em relação à primeira pergunta, o professor deve prontamente responder que sim e apresentar com o uso do Geogebra alguns exemplos. Já para a segunda pergunta, o professor deve falar que os Ellarbelos podem ser encontrados em campos magnéticos, Figura 4.10, e também na mecânica, como é o caso das engrenagens elípticas, Figura 4.11.

Figura 4.10: Distribuição do campo magnético para dois fios paralelos com corrente assimétrica e gráfico de ellarbelos.



Fonte: Rozanski et al. (2017)

Figura 4.11: Medidor de vazão com engrenagens oval.



Fonte: Solucoesindustriais (s.d.).

Por fim, como uma simples atividade, peça para que os discentes, formem grupos com 5 alunos para que possam pesquisar sobre as vantagens e desvantagens das engrenagens elípticas. **Avaliação:** A avaliação se dará pela participação dos discentes diante do problema proposto e pela pesquisa extraclasse.

Capítulo 5

Considerações Finais

Ao longo desta pesquisa, ficou claro que a Matemática, de modo mais particular a geometria, pode ser trabalhada de forma dinâmica e inovadora. Como podemos observar durante a leitura dessa obra, ideias e pensamentos criativos podem fazer com que alunos e professores tenham a curiosidade estimulada acerca de um determinado assunto matemático e, com isso, busquem investigar o assunto.

Como apresentado na introdução, um simples problema matemático que, por sua vez, poderia ser apenas apresentado e resolvido com os alunos sem nenhum questionamento, foi a motivação necessária para a construção dessa obra. Deduzimos assim que, resultados já consolidados, como o dos Arbelos e da Cadeia de Pappus, ainda podem nos render muitos estudos e conclusões surpreendentes, como é o caso das Proposições 20 e 21.

Concluimos também, durante essa pesquisa, que os trabalhos realizados até o presente momento usam o conceito de inversão para demonstrar tais fatos, conteúdo esse que não é trabalhado no Ensino Médio e muitas das vezes, nem mesmo na graduação, tornando-o assim um grande desafio durante esse estudo. A técnica que apresentamos na seção 3.1 permite a construção da Cadeia de Pappus a partir da compreensão de conceitos de geometria analítica, o que pode ser explorado tranquilamente no Ensino Médio.

Desse modo, julgamos que o ensino da geometria e o aprimoramento dos seus resultados são indispensáveis para os discentes e para a carreira de todo bom professor. Por fim, esperamos que essa obra venha a estimular a pesquisa sobre o assunto, e que novos resultados possam ser encontrados, como por exemplos uma ampliação dos arbelos para as hipérboles. Esperamos também que esse trabalho possa servir como ferramenta didática para professores tornarem suas aulas mais curiosas e atrativas.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca**. 1. ed. Montreal: Apeiron Montreal, 2008.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1985.
- BEZERRA, L. H.; SILVA, I. P. C. e. **Geometria Analítica**. Florianópolis: UFSC, 2010.
- BRITO, G. V. de S. **Aplicações de teoremas de geometria plana em problemas de olimpíadas de matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.
- CASTELLAR, S. M. V. **Metodologias ativas: sequências didáticas**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- CASTELLAR, S. M. V.; MACHADO, J. C. **Metdologias Ativas: Sequências Didá'ticas**. São Paulo: FTD, 2016.
- DASSIE, B. A.; LIMA, M. L. A. de. O livro dos lemas de arquimedes. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, 2004.
- DIAS, C. C.; DANTAS, N. M. **Geometria analítica e números complexos**. Natal: EDUFRRN, 2006.
- DINIZ, J. F. S. et al. **Geogebra: uma ferramenta dinâmica na aprendizagem da Geometria no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Maranhão, 2016.
- ENCRYPTED. s.d. Disponível em: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcROMyby2qgHhuy50woI62aP6OUz1RJ_MIqbs6AMHHFCMDn61atpSkOm10oHF7u7AdkdMNU&usqp=CAU>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.
- ENCRYPTED. s.d. Disponível em: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS0UD74LzzZIXocUSc1_x_goq47vZCVwMuqQdTqvloLxFxv_ILBPXXm38Llmb7CF3sgyk&usqp=CAU>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

- EUTÍQUIO, T. **Demonstração da área do círculo**. 2022. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=l6kFz0dQA5I>>. Acesso em: 11 de agosto de 2023.
- FERNANDES, M. L. B. **O Estudo da Circunferência - Abordagens dos Problemas de Tangências**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2019.
- FONSECA, E. P. d. **Circunferências em triângulos**. 101 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2021.
- FREEPIK. **Vetores**. s.d. Disponível em: <https://img.freepik.com/vetores-premium/lanterna-de-bolso-incluida-com-feixe-brilhante-em-fundo-amarelo-lampada-eletrica-alimentada-por-bateria_681342-310.jpg>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.
- GEOMETRIA ANALITICA. Secciones Cónicas. 2020. Disponível em: <<https://www.geometriaanalitica.info/wp-content/uploads/2020/08/definicion-secciones-conicas.png>>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.
- GERVÁZIO, S. N. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 9, 2017.
- IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- IEZZI, G. et al. **Matemática elementar: ciências e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2.
- JONES, A. R. Pappus of alexandria. **Encyclopedia Britannica**, 6 de Outubro de 2021, 2021. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Pappus-of-Alexandria>>. Acesso em: 5 de Júlio de 2023.
- KIWAMEN, L. **Parbelos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014.
- KLARNER, D. A. **The Mathematical Gardner**. Belmont - Califonia: Springer Science & Business Media, 1981.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica (Volume 1)**. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1990.
- LIMA, J. M. P. A importância da sequência didática para a aprendizagem significativa da matemática. **Revista Artigos. Com**, São Paulo, v. 2, 2019.
- MACHADO, R. d. M. **Sala de aula invertida e a aprendizagem baseada em problemas no ensino de Geografia na EPT**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação

Profissional e Tecnológica - PROFEPT) — Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Salgueiro, 2022.

MACIEL, A. N. de F. **A introdução do método da indução matemática no ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Pará, Belé, 2021.

MAGNO, L. C.; CHAQUIAM, M.; SOUSA, R. W. D. O. Pappus de alexandria: contribuições à matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, n. 20, p. 08–17, 2020.

MELLO, J. L. P. **Resumão / matemática - o brilhar elíptico.** Uol, Folha de São Paulo, 2001. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u7646.shtml>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

NUNES, G. **Arquimedes.** 2011. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=X8c3AdgMi9w>>. Acesso em: 11 de agosto de 2023.

OLIVEIRA, L. C. B. de. **Uma atividade sobre as medidas do círculo de Arquimedes por meio do uso de materiais concretos: contribuições para o ensino de Matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Piauí, Floriano, 2023.

PARISSE, B. **Chapitre 7 Géométrie plane seconde et terminale.** s.d. Disponível em: <<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac/doc/fr/casexo/casexo007.html>>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. d. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai - IDEAU, v. 8, n. 17, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Universidade de Stanford. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROZANSKI, M. et al. Variations on the arbelos. **Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics**, Czestochowa Univ Technology, Inst Mathematics Armii Krajowej 21, Czestochowa . . . , v. 16, n. 2, p. 123–133, 2017.

SILVA, F. F. da. **Arbelos.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014.

SILVA, J. P. d. Como calcular a área e o perímetro de uma elipse? **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 3, p. 2–6, 2014.

SOLUCOESINDUSTRIAIS. **Medidor de Engrenagens Ovais**. s.d. Disponível em: <https://www.solucoesindustriais.com.br/images/produtos/imagens_851/p_medidor-de-vazao-engrenagens-ovais-3.jpg>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

SONDOW, J. The parbelos, a parabolic analog of the arbelos. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 120, n. 10, 2013.

STEINBRUCH; WINTERLE. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

TODAMATÉRIA. **Interior do Coliseu**. s.d. Disponível em: <https://static.todamateria.com.br/upload/in/te/interiordocoliseu-cke.jpg?auto_optimize=low>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Copyright by, 1949. 243 p.

WIKIPEDIA. **Beschreibung: Archimedes, mittelalterliches Idealportrait**. 2004. Disponível em: <[https://simple.wikipedia.org/wiki/Archimedes#/media/File:Archimedes_\(Idealportrait\).jpg](https://simple.wikipedia.org/wiki/Archimedes#/media/File:Archimedes_(Idealportrait).jpg)>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

WIKIWAND. **Mathematicae Collectiones de Pappus (edición de 1589)**. 2007. Disponível em: <https://www.wikiwand.com/gl/Pappus_de_Alexandr%C3%ADa#/Media/Ficheiro:PappusBook.jpg>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

WOLFF, M. E.; SILVA, D. P. da. **Os desafios da Escola Pública Paranaense na perspectiva do professor PDE produções Didático Pedagógicas**. [S.l.: s.n.], 2013.