



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL**

**CLÉRYSTON DA SILVA SOUSA**

**A SEMIÓTICA NO ENSINO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS E O  
MÉTODO DE PO-SHEN LOH**

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2023**

CLÉRYSTON DA SILVA SOUSA

A SEMIÓTICA NO ENSINO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS E O MÉTODO  
DE PO-SHEN LOH

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Valdir Ferreira de Paula  
Junior

JUAZEIRO DO NORTE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Sistema de Bibliotecas

---

S725s Sousa, Cléryston da Silva.

A semiótica no ensino das equações quadráticas e o método de Po-Shen Loh/ Cléryston da Silva Sousa.– 2023.

86 f. il. color.; 30 cm.

(Inclui bibliografia, p.67-68).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2023.

Orientador: Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior.

1. Equação quadrática. 2. Representação semiótica. 3. Fórmula resolutive. 4. Método Babilônico. 5. Método de Po-Shen Loh.. I. Título.

CDD 515.35

---

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355


CLÉRYSTON DA SILVA SOUSA

A SEMIÓTICA NO ENSINO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS E O  
MÉTODO DE PO-SHEN LOH

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.


Aprovada em: 30 de agosto de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente  
 VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR  
Data: 30/10/2023 22:19:49-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior  
Membro interno/UFCA

Documento assinado digitalmente  
 VALDINES LEITE DE SOUSA JUNIOR  
Data: 31/10/2023 11:44:52-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Junior  
Membro interno/UFCA

Documento assinado digitalmente  
 JOSE MARIA BARBOZA  
Data: 30/10/2023 21:35:44-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. José Maria Barboza  
Membro externo/FIS

*Este trabalho dedico inteiramente  
ao meu pai, o qual se dedicou na  
minha formação acadêmica, ao  
longo deste estudo nos deixou e  
não pode está fisicamente  
presente na conclusão.*

# Agradecimentos

Agradecer primeiramente a Deus pela vida, agradecer também por me possibilitar ao longo de todo esse período de estudos, ampliando meus conhecimentos adquiridos durante o PROFMAT.

Agradecer aos meus pais, Cícero Batista por sempre apoiar meus estudos e incentivar para que eu possa me aperfeiçoar, a minha mãe Raimunda por mostrar o quão valioso é o conhecimento.

Agradecer imensamente à Deus por ser um pai tão generoso e por me presentear com um pai na terra tão bom que, não só se fez presente dando apoio e incentivando-me para obtenção do título de mestre, como também durante toda a vida escolar e para que eu tivesse uma vida digna, com saúde, educação e amor .

Agradecer à CAPES, pois, contribuiu para a conclusão deste trabalho, a bolsa contribuiu tanto para a locomoção para que pudesse comparecer nas aulas presenciais, quanto para compra de livros das disciplinas e livros secundários que serviram de apoio para o tema deste trabalho e para aprofundamento dos conteúdos.

Agradecer a todos os professores do PROFMAT da UFCA os quais foram importantes para essa conquista, agradecer também ao meu professor José Maria Barbosa que também contribui para que pode-se concluir a graduação.

Não poderia deixar de citar os amigos de trabalho que durante esse tempo no mestrado me incentivaram/ajudaram a continuar e focar nos estudos, em especial alguns amigos de trabalho Elisson, Marcílio e João e agradecer a toda equipe gestora da Escola de Referência em Ensino Médio Alfredo de Carvalho(EREMAC) no nome de Luciana. Agradecer a minha colega de trabalho Juliana por me ajudar, quanto as correções no processo de escrita deste trabalho.

Agradecer em especial ao meu orientador Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior, por transmitir conhecimento, experiência, motivação, incentivo, paciência e amizade.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo aprofundado sobre equações quadráticas, abordando tanto os métodos tradicionais presentes nos livros didáticos, quanto, os métodos babilônicos utilizados para determinar as raízes dessas equações. Inicialmente, serão apresentadas as definições e contexto histórico, seguidos pela demonstração dos métodos de resolução. Além disso, examinaremos as representações semióticas dessas equações e o papel da Base Nacional Comum Curricular para o ensino do tema. Destacando-se por ser uma abordagem simples e intuitiva, o método babilônico, que foi generalizado pelo professor Po-Shen Loh, proposto como uma abordagem pedagógica para a educação básica.

**Palavras-chave:** Equação quadrática. Representação semiótica. Fórmula resolutiva. Método Babilônico. Método de Po-Shen Loh.

## ABSTRACT

The aim of this work is to conduct an in-depth study on quadratic equations, addressing both the traditional methods found in textbooks and the Babylonian methods used to determine the roots of these equations. Initially, we will present the definitions and historical context, followed by the demonstration of resolution methods. Additionally, we will examine the semiotic representations of these equations and the role of the National Common Curriculum Base in teaching this subject. Standing out for its simple and intuitive approach, the Babylonian method, which has been generalized by Professor Po-Shen Loh, is proposed as a pedagogical approach for basic education.

**Keywords:** Equation quadratic. semiotic representation. Form resolut.  
Method of the babylon. Method of Po-Shen Loh.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	xi
<b>Lista de Tabelas</b>	xiii
<b>1 Introdução</b>	1
<b>2 Preliminares</b>	3
2.1 Função quadrática . . . . .	3
2.2 Contexto histórico das equações quadráticas . . . . .	6
2.2.1 Bhaskara Akaria ou Bhaskaraacharya . . . . .	7
<b>3 Métodos clássicos para encontrar as raízes da equação quadrática</b>	9
3.1 Fórmula resolutive da equação do segundo grau . . . . .	9
3.2 Método de completar quadrado . . . . .	11
3.3 O Método da soma e produto das raízes . . . . .	13
3.4 Equações incompletas do segundo grau . . . . .	16
<b>4 A parábola</b>	20
4.1 Vértice da parábola . . . . .	20
4.1.1 Ponto de máximo ou mínimo da função quadrática . . . . .	21
4.1.2 Eixo de simetria . . . . .	23
4.1.3 Questões do ENEM . . . . .	27
4.2 Estudo das raízes . . . . .	31
4.2.1 Estudo do sinal . . . . .	35
4.2.2 Aplicações . . . . .	41
<b>5 A semiótica no ensino das equações quadráticas</b>	43
<b>6 O método de Po-Shen Loh</b>	54
6.1 Equações quadráticas na babilônia . . . . .	54
6.2 Método apresentado por Po-Shen Loh . . . . .	56
6.3 Representação geométrica do método de Po-Shen Loh . . . . .	59
6.4 Aplicações do método de Po-Shen Loh . . . . .	61

<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>66</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>69</b>
	<b>A.1</b> Algoritmo de Briot-Ruffini . . . . .	<b>69</b>

# Lista de Figuras

2.1 Imagem de Bhaskara Akari	7
3.1 Quadrado e paralelogramo	17
4.1 Gráficos da parábola	20
4.2 Eixo de simetria ( $f$ )	23
4.3 Parábola gama e pontos $P$ e $P'$	24
4.4 Parábola gama e congruência dos segmentos $PF$ e $FP'$	24
4.5 Congruência dos segmentos $PF, PA, P'F, P'A'$	25
4.6 Pontos em Simetria.	25
4.7 Representação abóbadas da igreja de São Francisco	27
4.8 Representação da taça formada a partir da rotação de uma parábola.	29
4.9 imagem do morro em Porto Alegre	32
4.10 Representação do gráfico da função com imagens positiva.	35
4.11 Representação gráfica da Tabela 4.2	36
4.12 Representação do gráfico da função com imagens negativa.	36
4.13 Representação gráfica da Tabela 4.3	37
4.14 Representação do gráfico da função.	37
4.15 Representação gráfica da função $p_2$	38
4.16 Representação do gráfico da função.	38
4.17 Representação do gráfico da função $p_3$ .	39
4.18 Representação do gráfico da função.	39
4.19 Representação gráfica da função $p_4$ .	39
4.20 Representação do gráfico da função.	40
4.21 Representação gráfica da Tabela 4.4	40
4.22 Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ .	41
5.1 Representação da equação do Exercício 5.0.1	47
5.2 Representação da equação $(x + 3)^2 = 16$	47
5.3 Representação da equação do Exercício 5.0.2	48
5.4 Representação da união $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ .	48
5.5 Representação da equação $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$ .	48

5.6	Representação da equação do Exercício 5.0.3	49
5.7	Representação da igualdade $(x + \frac{5}{4})^2 + (x + \frac{5}{4})^2 = 8 + 2(\frac{5}{4})^2$	49
5.8	Representação da equação $ax^2 + bx = c$	50
5.9	Representação da equação $a(x^2 + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})$	50
5.10	Representação da equação $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	51
5.11	Representação da piscina retangular.	52
5.12	Representação dos seguimentos da piscina	53
6.1	Raízes $\alpha_1$ e $\alpha_2$ da função $g$ .	60
6.2	Gráfico da função $l$ definida por $l(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ .	62
6.3	Gráfico da função do exemplo 6.4.3	63
6.4	Gráfico da função do exemplo 6.4.4	63

# Lista de Tabelas

2.1 Teste de raízes.	5
4.1 Relação entre o discriminante $\Delta$ e as raízes .	31
4.2 Relação entre o Domínio e Imagem da função $p$ .	35
4.3 Relação entre o Domínio e Imagem da função $p_1$ .	36
4.4 Tabela da relação entre o Domínio e Imagem da função $p_3$ .	40
A.1 Algoritmo de Briot-Ruffini	70
A.2 Dispositivo de Briot Ruffini	71

# Capítulo 1

## Introdução

As equações quadráticas são frequentemente pautas de estudos acadêmicos, dada a sua inestimável importância. O estudo desses conceitos envolve o reconhecimento de suas características, como vértice, raízes, concavidade, sinal e gráfico, bem como a resolução de problemas que fazem uso dessas propriedades. Além disso, a utilização de representações semióticas, como tabelas, gráficos, fórmulas e figuras, desempenham um papel crucial na compreensão e na comunicação dos resultados obtidos.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar os métodos de resolução e validar a eficácia dos mesmos, na determinação do valor de  $x$  para equações quadráticas do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ . Além disso, pretende-se apresentar um método simples, ainda desconhecido por muitos, que representa uma nova abordagem pedagógica, pois baseia-se em operações elementares. Enquanto nos livros didáticos o método convencional é a fórmula quadrática, popularmente conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara.

A equação quadrática é atualmente um grande fator que contribui para a falta de interesse pela disciplina de matemática na educação básica, muitas vezes o conteúdo não tem relação com a realidade do estudante, o que torna compreensível a falta de afinidade e carinho de alguns alunos pela matemática “[...] alguns alunos disseram que não gostam da Matemática, pois nas aulas aprendem conteúdos que nunca vão ocupar, conteúdos que não têm aplicação prática [...]” (Tatto, 2004,p.11 [\[1\]](#)). Sua complexidade e, principalmente, seu rigor na escrita faz com que alguns alunos não se “apaixonem pela matemática” ou simplesmente não despertem o desejo de estudar a disciplina.

Ao longo do tempo, a educação no Brasil tem se desenvolvido através de novas práticas pedagógicas para proporcionar uma melhor aprendizagem e maior desenvolvimento cognitivo dos alunos. Devido a isso, surgem constantemente novas metodologias. Considerando a importância do lúdico no processo de ensino, o uso da ludicidade está cada vez mais em evidência nos livros didáticos. Pode-se encontrar facilmente em livros didáticos e para-didáticos questões contextualizadas, com

ilustrações e aplicações, no intuito de aproximar o conteúdo a ser estudado com o cotidiano do aluno. Assim, as representações semióticas são instrumentos que possibilitam ao aluno elucidar os problemas matemáticos e utilizar novas metodologias para implementação dos assuntos, visando melhor absorção dos conteúdos, como no estudo das equações quadráticas.

Como forma de despertar o desejo dos alunos ao estudar matemática, será evidenciado uma maneira intuitiva e simples para resolver problemas que envolvam raízes das equações quadráticas, utilizando o método babilônico que não é apresentado nos livros didáticos o qual não faz parte do currículo da educação básica. O método babilônico que foi generalizado em 2019 pelo professor Po-Shen Loh, visto em (Loh, P.-S 2019 [2]), no qual propôs como uma **abordagem pedagógica**, referindo-se ao método como “[...] computacionamente leve e conceitualmente natural [...]”.

O trabalho tem intuito de mostrar as diferentes abordagens que se pode fazer em relação as equações quadráticas, assim abrindo novas possibilidades metodológicas, utilizadas como facilitadores no processo de ensino.

Ao fim deste trabalho o leitor perceberá a simplicidade na resolução utilizando o método babilônico e a importância das representações semióticas no processo de ensino aprendizagem. O método e os registros de representações semióticas serão apresentados como propostas pedagógicas que possam ser viáveis para a educação básica.

Este trabalho está dividido em 7 capítulos. No capítulo 2 estudaremos as preliminares e veremos o contexto histórico das equações quadráticas. No capítulo 3 serão abordados os métodos apresentados nos livros didáticos, no qual chamaremos de métodos clássicos, para a obtenção das raízes da equação quadrática. No capítulo 4 será mostrado a representação gráfica da função quadrática, que é a figura da parábola, como ponto de máximo e mínimo, eixo de simetria estudos das raízes e das raízes, seguidos de exemplos. No capítulo 5 estudaremos a semiótica no ensino das equações quadráticas. No capítulo 6 estudaremos o método babilônico e o método de Po-Shen Loh, além disso faremos algumas aplicações. Por fim no capítulo 7 teremos algumas considerações finais. A última parte deste trabalho é um apêndice que versa sobre o algoritmo de Briot-Ruffini.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos matemáticos que são fundamentais para a compreensão dos capítulos subsequentes deste trabalho. Será relatado o contexto histórico e os matemáticos relacionados a equação quadrática. Este capítulo foi baseado nas seguintes referências bibliográficas: (Leonardo, 2016 [3]), (Hefez, 2012 [4]), (Dante, 2009 [5]), (Sousa, 2020 [6]), (Silva, 2018 [7]), (Britannica, 2022 [8]), (Iezzi, 2013 [9]).

### 2.1 Função quadrática

Começando nosso estudo abordando a definição de função quadrática, comumente encontrada nos livros didáticos da educação básica, conforme descrito nos livros *Matemática Volume Único* (Dante, 2009 [5]) e *Fundamentos de Matemática Elementar* (Iezzi, 2013 [9]).

**Definição 2.1.1.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática quando existem números  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $a \neq 0$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

As constantes  $a$ ,  $b$ , e  $c$  são chamados de coeficientes da função quadrática, são os números que acompanham as variáveis. Por exemplo, os coeficientes da função  $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$ , são  $a = -2$ ,  $b = 3$  e  $c = -2$ .

**Definição 2.1.2.** *Será chamado de função quadrática incompleta as funções quadráticas cujo os coeficientes  $b$  ou  $c$  são iguais a zero.*

Por exemplo, as funções  $f(x) = x^2 + 12x$ ,  $g(x) = 2x^2 + 1$  e  $h(x) = 5x^2$ . Durante esse trabalho também será adotada à função quadrática o nome de função polinomial do segundo grau.

As definições a seguir terão fundamental importância neste trabalho.

**Definição 2.1.3.** *Dada a função quadrática  $f$ . São chamados zeros da função  $f$  os valores reais  $x$ , tais que  $f(x) = 0$ .*



Definindo também o conceito de *Raízes* com intuito de distinguir raízes da equação quadrática dos zeros da função quadrática.

**Definição 2.1.4.** *Será chamado **Raízes** os valores reais  $x$  que satisfazem a equação quadrática dada por:*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Vale ressaltar que, segundo Cordeiro (2018, [10]), "Dada uma função, desaconselhamos chamar de raízes os números  $x$  tais que  $f(x) = 0$ ". Ele destaca que tais números devem ser chamados de zeros da função  $f$ . Adicionalmente, de acordo com Cordeiro, "O termo raízes deve ser reservado para nos referirmos a equações ou polinômios". Portanto, ao mencionarmos os valores reais para os quais  $f(x) = 0$ , estamos nos referindo aos zeros da função  $f$ , enquanto o termo raiz da equação quadrática se aplica exclusivamente aos valores de  $x$  que satisfazem a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Na história dos povos antigos, a necessidade de encontrar as raízes das equações quadráticas tornou-se mais frequente, como não havia fórmula ou regra de resolução, o mecanismo utilizado era a aplicação de valores em  $x$ , a fim de obter as soluções, entretanto, essa metodologia pode ser bastante cansativa e pouco eficaz, pois baseasse em verificar possíveis candidatos à solução (Boyer, 2011 [11]).

A tentativa de atribuir valores esporádicos gera conseqüentemente o erro, porém a busca das soluções a partir dessa ideia é bastante útil quando se dispõe de candidatos a soluções como no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1.1.** *(Unifil 2019 MG) Dada a função quadrática,  $f(x) = x^2 - 3x - 4$ , quais os valores em que  $f(x) = 0$ ?*

(a)  $\{1,4\}$

(b)  $\{-2,3\}$

(c)  $\{-2,1\}$

(d)  $\{-1,4\}$

*Como o problema nos fornece os possíveis zeros da função quadrática, é natural substituir os valores de  $x$  na função  $f(x)$  para verificar quais serão os zeros da função. Com esse objetivo fizemos a seguinte tabela com tais valores:*

Tabela 2.1: Teste de raízes.

$x$	$f(x) = x^2 - 3x - 4$	$f(x)$
-2	$f(x) = (-2)^2 - 3(-2) - 4$	6
-1	$f(x) = (-1)^2 - 3(-1) - 4$	0
1	$f(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 - 4$	-6
3	$f(x) = 2^2 - 3 \cdot 2 - 4$	-3
4	$f(x) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 4$	0

Fonte: Autor.

Ao analisar a Tabela [2.1](#), conclui-se que os zeros da função quadrática  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  são os números  $-1$  e  $4$ , logo, a resposta é alternativa d.

O mecanismo tentativa e erro, visto no exemplo anterior, apesar de ser simples, não é eficaz para encontrar as raízes de uma equação quadrática, pois é impraticável construir uma tabela com todos os valores de  $f(x)$ . No entanto, esse método pode ser útil quando dispendo das possíveis candidatas a raízes de uma função quadrática. Ao longo do tempo houve a necessidade de explorar outros métodos mais eficientes, até obter a *fórmula resolutiva de uma equação quadrática* ou o método de Poh-Shen Loh, para encontrar as raízes com precisão de uma equação quadrática.

O objetivo deste trabalho é estudar métodos utilizados para obter as raízes de uma equação quadrática, iniciando o estudo com métodos clássicos, como o método da fórmula quadrática ou o método de completar quadrado, para que depois seja abordado o método babilônico.

Começando nosso estudo sobre os métodos para encontrar as raízes de uma equação quadrática, e daremos destaque à Fórmula Resolutiva. Optado por abordar esse método, pois ele é amplamente utilizado nos livros adotados no ensino médio, especialmente no livro *Multiversos matemática* (Sousa, 2020 [\[6\]](#)), utilizado no 1º ano em várias escolas de Pernambuco.

## 2.2 Contexto histórico das equações quadráticas

A fórmula geral das raízes das equações quadráticas foi desenvolvida por vários matemáticos ao longo da história, mas só adquiriu a forma atual quando François Viète e René Descartes usaram letras para representar os coeficientes das equações. Eles também criaram a notação algébrica e a geometria analítica que usamos hoje (Boyer, 2011 [11]).

Assim, pode-se denotar a equação quadráticas do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

Para obter a solução a seguinte formula é utilizada:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.1)$$

A fórmula que determina os valores das raízes, admite existência de raízes complexas.

A seguinte Definição 2.2.1 é frequentemente utilizada nos livros didáticos para simplificar a fórmula resolutive. Conforme será mostrado nos próximos capítulos, é possível extrair informações importantes sobre as raízes de uma função quadrática ao analisar do *discriminante*.

**Definição 2.2.1.** Denomina-se **discriminante** da equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  o valor  $b^2 - 4ac$ , que é representado pela letra grega  $\Delta$  (Delta maiúsculo). Dessa forma denotaremos  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

usando essa notação na Equação 2.1 obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

As equações quadráticas já apareciam em papiros e placas de argila na mesopotâmia, onde eram descritos problemas geométricos relacionados a área de figuras. As soluções para tais problemas eram descritas em forma de “regras matemáticas” que se seguidas corretamente era possível encontrar a solução para o problema. Naquele tempo não havia a escrita matemática de hoje, por isso era comum que os métodos de resoluções de problemas serem descritas como regras matemáticas (Boyer, 2011 [11]). É nítido o quão importante foi o estudo a respeito das equações do segundo grau, como relatado em Boyer [11]; hoje em dia, sabe-se que para resolver problemas dessa natureza, basta utilizar a conhecida *fórmula resolutive*, na qual pode-se determinar valores reais  $x$  para que a equação se iguale a zero. Em livros de escritores

estrangeiros e em Sousa [6] denotam de *fórmula resolutive*, a expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a qual determina as raízes da equação quadráticas.

No Brasil, o matemático indiano **Bhaskara Acharya** dá nome à fórmula resolutive das equações do segundo grau, a “fórmula de Bhaskara” é muito conhecida e ensinada nas escolas, mas em outros países é conhecida por outros nomes. Por exemplo, nos Estados Unidos, ela é chamada de *quadratic form* (fórmula quadrática).

### 2.2.1 Bhaskara Akaria ou Bhaskaraacharya

Nascido em família de matemáticos indianos de Vijayapura, Bhaskara viveu entre 1114 a 1185 aproximadamente, seguiu os passos do seu pai que era astrônomo, assim seus estudos eram voltados para matemática e astronomia. Sua obra mais importante foi o livro **Lilavati**, trabalho elementar que tratava de problemas aritméticos simples, geometria e combinatória, no qual foi de grande importância para a sociedade científica, Os versos de Lilavati (Silva, 2018 [7]). A obra Lilavati tem datação do ano de 1650 e pertence à coleção da universidade de columbia nos Estados Unidos, a palavra “ lilavate ” significa graciosa, que é tradução livre para o português, era assim que Bhaskara descrevia os problemas matemáticos, por isso deu-se esse nome (Britannica, 2022 [8]).

Figura 2.1: Imagem de Bhaskara Akari



Fonte: Marcelo Uva.

Na época em que Bhaskara viveu ainda não existia a escrita matemática que temos hoje, com fórmulas e utilização de letras para representar as incógnitas, grande

parte dos matemáticos daquela época utilizavam “regras” estabelecidas para se obter a resolução desses problemas.

Para resolver problemas do tipo  $ax^2 + bx - c = 0$  era utilizado a seguinte regra:

*“Multiplique ambos os membros da equação pelo número que vale quatro vezes o coeficiente do quadrado e some a eles um número igual ao quadrado do coeficiente original da incógnita. A solução é a raiz quadrada disto”*(Eves, H. 2004, p.48-49 [12]).

Na escrita matemática atual, fornece a fórmula para encontrar as raízes, assim

$$4a(ax^2 + bx) + b^2 = 4a \cdot c + b^2,$$

efetuando a propriedade distributiva,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2,$$

pode-se escrever o primeiro membro como,

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac,$$

extraindo a raiz, em seguida chegando na expressão isolada que determina as soluções

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Essa regra já era de conhecimento dos matemáticos indianos da época, há registros desse preceito ser atribuído ao matemático indiano **Sridhara** que viveu a mais de 100 anos antes de Bhaskara Akaria. Denominada de fórmula Sridharacharya também conhecida como fórmula quadrática ou método Sridharacharya (Mishra, 2008 [13]).

Sridharacharya foi um matemático, filósofo e pandita (título de mestre) sânscrito indiano que viveu entre os séculos IX e X. Ele nasceu em Bhurishresti, uma vila no sul de Radha, na atual Bengala Ocidental. Ele é conhecido por dois tratados principais: o Trisatika (ou Patiganitasara) e o Patiganita. Esses tratados tratam de aritmética, álgebra e aplicações práticas da matemática. Sridharacharya foi um dos primeiros a dar uma fórmula para resolver equações do segundo grau, que é conhecida como fórmula de Sridharacharya ou fórmula quadrática, (O Connor, [14]).

A nomenclatura a “fórmula de Bhaskara” só é utilizada no Brasil, em outros países o denotam como fórmula resolutive de uma equação do segundo grau ou fórmula resolutive de uma equação quadrática. Portanto, a fórmula a qual leva o nome de seu criador não foi desenvolvida por Bhaskara, pois muito antes dele nascer já havia relatos dessa regra, Bhaskara apenas formalizou e tornou publico este método.

# Capítulo 3

## Métodos clássicos para encontrar as raízes da equação quadrática

Neste capítulo, vamos explorar alguns métodos clássicos amplamente utilizados na busca pelas raízes das equações quadráticas. Além disso, iremos aplicar esses métodos para resolver uma série de exemplos práticos, visando aprofundar nossa compreensão sobre o assunto.

### 3.1 Fórmula resolutiva da equação do segundo grau

Para estudarmos a fórmula resolutiva inicialmente utilizaremos a forma canônica. A forma canônica é um recurso valioso que facilita o aprendizado e a solução de equações quadráticas, além de revelar aspectos geométricos relevantes da função. Ela é essencial para tornar o estudo das equações quadráticas mais prático e simples. Por isso, vamos iniciar esta seção explicando com clareza o que é a forma canônica de uma função quadrática.

**Proposição 3.1.1.** *Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ . Então,  $f$  pode ser escrita na forma canônica:*

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Inicialmente colocamos em evidência o coeficiente  $a$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

as duas primeiras parcelas de dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

completando o quadrado, temos:

$$f(x) = a \left[ x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

que pelo desenvolvimento acima resulta em,

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right],$$

ou seja,

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Dizemos que a equação está na forma canônica quando ela está escrita na sua forma mais simples. ■

A seguir, veremos como usar a forma canônica para obter alguns resultados importantes, sendo o principal deles a fórmula que determina as raízes da equação do segundo grau. Além disso, usaremos a forma canônica para encontrar os vértices da parábola que representa o gráfico da função quadrática. Com esse conhecimento, poderemos resolver vários problemas matemáticos e entender melhor o comportamento das funções quadráticas.

Pode-se chegar à fórmula que fornece as raízes da equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$ . De fato, usando a fórmula canônica (3.1) temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0,$$

como, por hipótese  $a \neq 0$ , obtemos:

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + a \left( \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = 0,$$

obtendo a seguinte igualdade:

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

usando a notação  $\Delta = b^2 - 4ac$ , assim,

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

e, portanto, conseguindo-se chegar na seguinte igualdade

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}},$$

isolando a incógnita  $x$  no primeiro membro e simplificando temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A essa equação chama-se de fórmula resolvente da equação do segundo grau.

## 3.2 Método de completar quadrado

O método de completar quadrado é uma técnica utilizada para encontrar as raízes de uma função quadrática através da reescrita da expressão na forma de um quadrado perfeito, da soma

$$(x + b)^2 = x^2 + 2xb + b^2,$$

ou, o quadrado perfeito da diferença

$$(x - b)^2 = x^2 - 2xb + b^2.$$

Esse método foi mostrado pelo matemático uzbequistanês **Al-khwarizmi** em sua obra *Hisab al-jabr wa'lmuqabalah* (ciência da restauração e da redução ou ciência das equações) (Arndt, 1983 [15]) e (Musa, 1986 [16]).

Quando deseja-se obter uma representação alternativa da equação quadrática é viável a utilização desse método simples. Veremos agora alguns exemplos de como se aplica esse método.

**Exemplo 3.2.1.** *Determine as raízes da equação:  $x^2 - x - 2 = 0$ . Note inicialmente o seguinte quadrado:*

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}. \quad (3.2)$$

*Somando e subtraindo  $1/4$ , na equação quadrática do exemplo, obtemos*

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = 0$$



usando a Equação 3.2 e somando  $\frac{9}{4}$  dos dois lados da igualdade, temos,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

extraindo a raiz e isolando  $x$ , obtemos:

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

Portanto, obtemos assim a primeira raízes:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2},$$

ou seja  $x = 2$ , já para a segunda raiz

$$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2},$$

ou seja  $x = -1$ .

Caso a equação seja um quadrado perfeito do tipo  $(x + a)^2$  ou  $(x - a)^2$ , o método se resume ao produto notável.

**Exemplo 3.2.2.** *Determine o valor de  $x$  para que  $x^2 + 2x + 1 = 0$ . Como sabe-se que  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ , assim*

$$(x + 1)^2 = 0,$$

logo, podemos concluir que as duas raízes da equação são iguais

$$x = -1.$$

Os métodos utilizados pelos babilônios era possível encontrar soluções negativas, porém, eles não as consideravam, pois não havia aplicações práticas para essas soluções negativas. Ao longo dos tempos, surgiu a necessidade de considerar soluções negativas para as equações quadráticas, ao analisar essas soluções negativas, no ano de 1629, o Belga *Albert Girard* (1590-1633) escreveu o livro *Invention Nouvelle en Algèbre*, no qual demonstrava a relação das raízes e os coeficientes da equação, admitindo a existência de raízes negativas.

### 3.3 O Método da soma e produto das raízes

O método da soma e do produto é uma técnica útil para encontrar as raízes de uma função quadrática a partir dos coeficientes da equação. A seguinte Proposição segundo Hefez [4], será importante para o desenvolvimento do método mostrado nessa seção.

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $f(x)$  um polinômio em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Então,  $\beta \in \mathbb{R}$  é uma raiz de  $f(x)$  se, e somente se,  $x - \beta$  divide  $f(x)$ .*

Assim pode-se escrever a função quadrática  $f(x) = q(x)(x - \beta)$ . A função quadrática é uma função polinomial de grau 2, logo podemos, pela Proposição 3.3.1, fatorar a função. Seja a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e supondo que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , sejam as raízes, assim:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2). \quad (3.3)$$

Desenvolvendo o produto notável, obtemos:

$$f(x) = ax^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)ax + a \cdot \alpha_1\alpha_2, \quad (3.4)$$

assim, pode-se obter a igualdade:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)ax + a \cdot \alpha_1\alpha_2,$$

usando a igualdade de polinômios, tem-se

$$-(\alpha_1 + \alpha_2)a = b,$$

logo, obtem-se em relação a soma das raízes que,

$$(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{b}{a},$$

e, pelo produto das raízes que,

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a},$$

como visto em (Viète, 1970 [17]).

Essas relações de soma e produto ficaram conhecidas como Relações de Girard, em que determina-se as raízes utilizando seus coeficientes. Pode-se encontrar também essas relações, utilizando os valores das raízes  $x_1$  e  $x_2$  extraídas a partir da fórmula resolutiva. Para isso, suponha que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , denotando  $P$  como sendo o produto destas raízes e  $S$  como sendo a soma, isto é,

$P = \alpha_1 \cdot \alpha_2$  e  $S = \alpha_1 + \alpha_2$ . Extrairdo da fórmula resolutive as raízes da equação, assim, pode-se calcular o valor de  $P$  como,

$$P = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

efetuando o produto da soma pela diferença, tem-se

$$P = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

efetuando as operações, admitindo soluções reais de modo que,

$$P = \frac{4ac}{4a^2},$$

assim, pode-se concluir que,

$$P = \frac{c}{a}. \tag{3.5}$$

Quando  $a = 1$ , tem-se que  $P = c$ .

Agora determinando a expressão para a soma, temos:

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 = \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

note que  $\sqrt{\Delta}$  esta sendo somado ao seu simétrico, com isso,

$$S = -\frac{2b}{2a}$$

portanto,

$$S = -\frac{b}{a}. \tag{3.6}$$

Quando  $a = 1$ , tem-se  $S = -b$ .

Logo pode-se concluir que, para  $a = 1$ , a equação  $x^2 - bx + c$ , pode ser escrita como  $x^2 + Sx + P$ . Para os exemplos a seguir, suponha que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  seja as raízes desta equação.

**Exemplo 3.3.1.** *Determine as raízes da equação quadrática  $x^2 + 3x - 10 = 0$ .*

*Como  $a = 1$ ,  $b = 3$  e  $c = -10$ , obtemos que*

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -3$$

e

$$\alpha_1\alpha_2 = -10$$

as soluções são possíveis soluções inteiras para o produto são  $(1, -10), (-1, 10), (2, -5), (-2, 5)$ . Como a diferença entre as raízes é  $-3$  a única solução possível é  $\alpha_1 = 2$  e  $\alpha_2 = -5$ .

**Exemplo 3.3.2.** ( CETREDE 2019 / Prefeitura de Juazeiro do Norte - CE) O valor de uma bola que eu quero comprar é representado pelo produto das raízes da equação  $x^2 - 9x + 20$ . Logo a bola é

(a) 10.

(b) 20.

(c) 30.

(d) 40.

(e) 50.

É sabido que o produto das raízes é o valor do coeficiente  $c$ , assim a resposta é letra (b),

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 20.$$

**Exemplo 3.3.3.** Determine  $x$  para que  $2x^2 - 3x - 9 = 0$ .

Inicialmete extraíndo os coeficientes  $a=2$ ,  $b=-3$  e  $c=-9$ , obtemos que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3}{2}$$

e

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{-9}{2}$$

as soluções para o produto são  $(\frac{1}{2} e -9), (\frac{-1}{2} e 9), (\frac{3}{2} e -3), (\frac{-3}{2} e 3)$ .

A relação de Girard estendem-se a equações de grau maiores do que 2, porém como o intuito deste trabalho é mostrar métodos de resolução e apresentar o método de Po-Shen Loh, será limitado a grau 2, com alguns exemplos específicos de equações de grau 3.

### 3.4 Equações incompletas do segundo grau

Será dita equação incompleta do segundo grau, quando  $b = 0$  ou  $c = 0$  com  $a \neq 0$ . Para esses casos, pode-se calcular facilmente as soluções. Para o método a seguir, será necessário a seguinte propriedade mostrada em (Hefez, 2009 [18]).

**Propriedade 3.4.1.** *Se  $a \cdot b = 0$ , então  $a = 0$  ou  $b = 0$ .*

Inicialmente para os casos com  $c = 0$ , tem-se a seguinte equação:

$$ax^2 + bx = 0,$$

colocando em evidência o termo  $x$  obtem-se,

$$x \cdot (ax + b) = 0,$$

dado isso, e ao analisar que pela propriedade 3.4.1 temos que,  $x = 0$  ou  $ax + b = 0$ , assim podemos concluir que as raízes são  $x_1 = 0$  e após efetuarmos pequenos cálculos obtemos  $x_2 = -\frac{b}{a}$ . Aplicando o método aos seguintes exemplos a seguir.

**Exemplo 3.4.1.** *Seja as funções  $f(x) = (x - 1)^2$  e  $g(x) = 2x(x - 3) + 1$ . Determine os valores reais de  $x$  para que  $f(x) = g(x)$ . Inicialmente temos a equação  $(x - 1)^2 = 2x(x - 3) + 1$ , calculando o produto notável a esquerda e em seguida efetuando a distributiva a direita da igualdade, obtém-se,*

$$x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 6x + 1,$$

equivalente a,

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 4x + x^2 - 2x + 1,$$

pela lei do corte obtem-se,

$$0 = x^2 - 4x,$$

ou seja,

$$x^2 - 4x = 0,$$

que pelo método para equação para  $c = 0$ , temos:

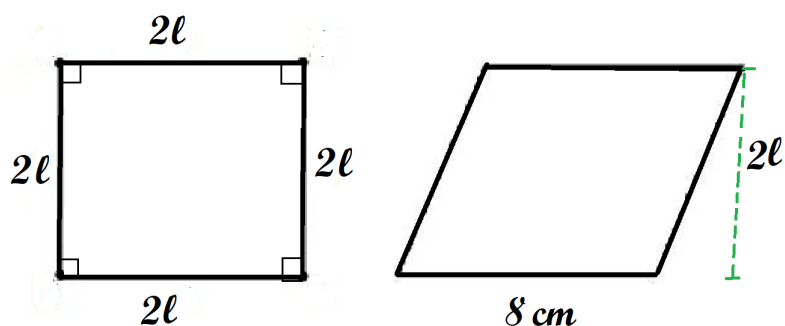
$$x_1 = 0$$

e

$$x_2 = -(-4) = 4$$

**Exemplo 3.4.2.** *Determine o comprimento  $l$  em centímetros, sabendo que o quadrado e o paralelogramo possuem áreas iguais.*

Figura 3.1: Quadrado e paralelogramo



Fonte: Autor.

Como mencionado no exemplo as figuras possuem valores de áreas iguais, ou seja,

$$(2l)^2 = 8 \cdot 2l$$

assim, obtemos a seguinte equação dada em relação aos lados

$$4l^2 - 16l = 0,$$

colocando  $l$  em evidência, podemos escrever a equação como:

$$4l(l - 4) = 0,$$

logo, pode-se concluir que as soluções são  $l = 0$  e  $l = 4$ , como  $l$  é um comprimento, não admitir valor iguais a zero, portanto  $l = 4$  cm.

Para equações cujo coeficiente  $b = 0$ , tem-se a seguinte equação:

$$ax^2 + c = 0,$$

isolando  $x^2$  a esquerda da equação, tem-se,

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

logo,

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Note a seguinte condição, se  $a$  e  $c$  tiverem mesmos sinais não há solução real.

Veja algumas aplicações, nas questões do **ENEM**.

**Exemplo 3.4.3.** (Enem 2013) A temperatura  $T$  de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ( $t = 0$ ) e varia de acordo com a expressão:

$$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$$

com  $t$  em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de  $39^\circ\text{C}$ .

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

(a) 19,0

(a) 19,8

(c) 20,0

(d) 38,0

(e) 39,0

Para a solução queremos que  $T(t) = 39$ , logo

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400$$

com isso, conseguimos encontrar que

$$t^2 = 1444$$

logo, a solução é  $t = 38$  o que nos leva à alternativa (d).

**Exemplo 3.4.4.** (Enem 2010) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo  $t$ , em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções  $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$  e  $V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$ .

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante  $t = 0$  e, também, no tempo  $t$  igual a:

(a) 1,3h

(b) 1,69h

(c) 10,0h

(d) 13,0h

(e) 16,9h

Faremos:  $V_1(t) = V_2(t)$ .

$$250t^3 - 100t + 3000 = 150t^3 + 69t + 3000$$

logo,

$$100t^3 - 169t = 0$$

Colocando  $t$  em evidência, temos que:

$$t(100t^2 - 169) = 0$$

tem-se que uma das raízes de  $t$  é 0 e as outras são:

$$t = \pm \sqrt{\frac{169}{100}}$$

logo,

$$t = 13/10 = 1,3 \text{ horas.}$$

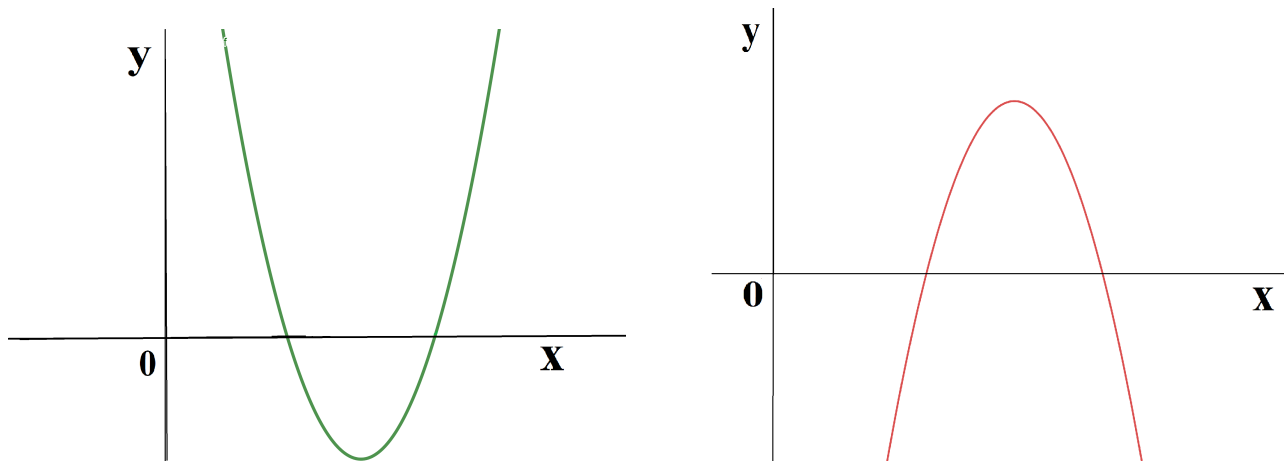


# Capítulo 4

## A parábola

O gráfico da função polinomial de grau 2 é representado por uma **parábola** (uma seção cônica gerada pela intersecção de uma superfície cônica) onde se pode determinar valores de máximos ou de mínimo para a função como mostra as figuras abaixo.

Figura 4.1: Gráficos da parábola



(a) Função quadrática com a concavidade voltada para cima. (b) Função quadrática com a concavidade voltada para baixo.

Fonte: Autor.

### 4.1 Vértice da parábola

O **vértice** da parábola é o ponto máximo da função, quando  $a < 0$  e mínimo da função, quando  $a > 0$ . É representado por  $V = (x_v, y_v)$  o Vértice da parábola.

Para isso, tem-se a seguinte definição:

**Definição 4.1.1.** Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diz-se que  $c \in \mathbb{R}$  é um ponto máximo de  $f$ , quando,  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Analogamente, será dito ponto mínimo de  $f$ , quando,  $f(c) \leq f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### 4.1.1 Ponto de máximo ou mínimo da função quadrática

A fórmula que determina a coordenada do ponto de máximo ou mínimo da função, pode ser determinadas a partir da forma canônica, utilizando a Definição 4.1.1 de ponto máximo e de ponto mínimo.

Pode-se notar pela forma canônica na Subseção 3.1, que se tomado  $x = -\frac{b}{2a}$  uma das parcelas da soma na forma canônica desaparece, pois foi somado ao seu simétrico, como zero é elemento neutro da soma. Realizando a substituição

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

com isso, pela Observação 2.2.1 do discriminante, tem-se

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}. \quad (4.1)$$

A seguir será analisado o ponto máximo ou mínimo da função quadrática para quando  $a > 0$  e  $a < 0$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

**Caso 1** Para  $a > 0$ , tome um  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$  e um real  $s \neq 0$ , de modo que

$$x = -\frac{b}{2a} + s,$$

de posse disso, observe as igualdades

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(-\frac{b}{2a} + s + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(s^2),$$

assim, temos  $a(s^2) > 0$ , pois,  $a > 0$  e  $s^2 > 0$ . Pode-se concluir que:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0.$$

Por fim, tem-se a seguinte conclusão:

Se  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ , então,  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} > -\frac{\Delta}{4a}$  ou seja, como

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

logo, o menor valor que  $f(x)$  pode obter será  $-\frac{\Delta}{4a}$ , pois,

$$f(x) > -\frac{\Delta}{4a},$$

para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$ .

**Caso 2** Para  $a < 0$ , tome um  $x \neq -\frac{b}{2a}$  e um real  $s \neq 0$ , de modo que

$$x = -\frac{b}{2a} + s,$$

de posse disso, observe as igualdades

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = a \left( -\frac{b}{2a} + s + \frac{b}{2a} \right)^2 = a(s^2),$$

note que agora,

$$a(s^2) < 0$$

pois,  $a < 0$  e  $s^2 > 0$ . Pode-se concluir que

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 < 0.$$

Por fim, tem-se a seguinte conclusão:

Se  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 < 0$ , então,  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} < -\frac{\Delta}{4a}$  ou seja, como

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

logo,

$$f(x) < -\frac{\Delta}{4a},$$

para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$ .

Por fim, como analisado, para  $a > 0$  terá ponto de mínimo e para  $a < 0$  terá ponto de máximo na coordenada  $(x_v, y_v)$ , com :

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}. \quad (4.2)$$

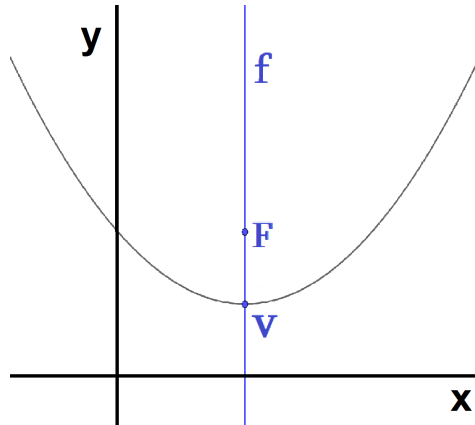
Pode-se chegar também a coordenada do vértice utilizando o argumento de transladar o eixo das abscissas paralelamente a si, até que tangencie o gráfico  $f$  em um único ponto. Essa abordagem utiliza conceitos e definições de cálculo, para aprofundar esse argumento, os livros *fundamentos de cálculo* (Neto, 2015 [23]) e *Análise*

*Real: Funções de um variável* (Lima, 2013 [24]) e serviram para que o desenvolvimento.

### 4.1.2 Eixo de simetria

O eixo de simetria é um segmento de reta paralelo ao eixo  $y$  que passa pelo vértice da parábola .

Figura 4.2: Eixo de simetria ( $f$ )



Fonte: Autor.

A seguir a Definição de parábola mostrada em Delgado [25].

**Definição 4.1.2.** *Sejam  $L$  uma reta no plano e  $F$  chamado de foco um ponto no plano não pertencente a  $L$ . A parábola  $\Gamma$  de diretriz  $L$  é o conjunto que consiste de todos os pontos  $P$  do plano que são equidistantes do foco  $F$  e da reta  $L$ :*

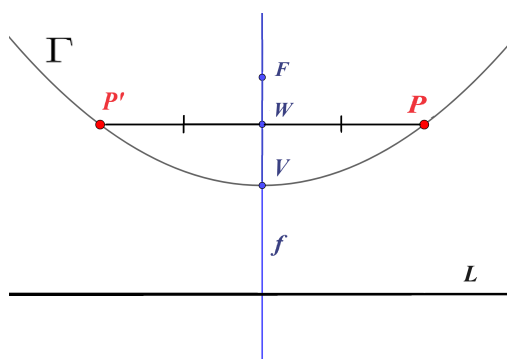
$$\{\Gamma \in P \mid d(P, F) = d(P, L)\}.$$

Sendo  $F$  o foco da parábola e pela Definição [4.1.2], temos que a parábola  $\Gamma$  e a reta  $f$  que passa pelo vértice e ao ponto  $F$  é perpendicular a reta que passa pelo vértice e foco da parábola  $\gamma$ .

**Proposição 4.1.1.** *Toda parábola é simétrica em relação a reta que passa pelo vértice e o foco, ou seja a reta focal.*

De fato, seja  $P$  o par ordenado pertencente à parábola  $\Gamma$  e  $P'$  simétrico a  $P$  em relação a reta focal  $f$ , o segmento  $PP'$  é perpendicular a  $f$  será representado pelo símbolo  $\perp$  para determinar que o segmento é perpendicular. Seja  $W$  um ponto de intersecção da reta  $f$ , é o ponto médio do segmento  $PP'$ , pois,  $P'$  é simétrico a  $P$ .

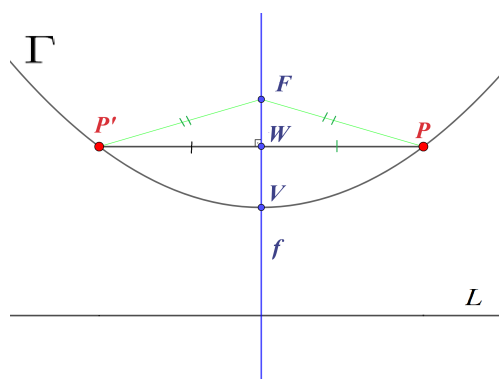
Figura 4.3: Parábola gama e pontos  $P$  e  $P'$



Fonte: Autor.

Pode-se observar os triângulos  $PWF$  e o triângulo  $P'WF$  são congruentes, pois,  $WP = WP'$  devido  $P$  e  $P'$  serem simétricos em relação a  $f$ , o ângulo  $\angle FWP = \angle FWP' = 90^\circ$  como  $FW$  é comum aos dois triângulos, temos pelo caso LAL que  $d(P', F) = d(P, F)$ ,

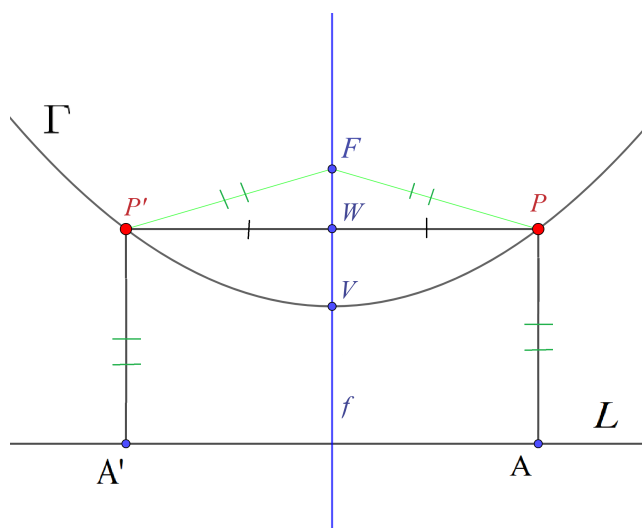
Figura 4.4: Parábola gama e congruência dos segmentos  $PF$  e  $FP'$



Fonte: Autor.

O segmento  $PP'$  é paralelo a  $L$ , pois, a diretriz é perpendicular a reta  $f$ , assim como  $PP'$ . Tem-se que a  $d(P', L)$  seja um segmento  $P'A'$  e  $d(P, L)$  seja o segmento  $PA$ , além disso, os segmentos  $PA = P'A'$ , pois, os segmentos são perpendiculares a  $PP'$  e  $L$ , assim formando o retângulo  $A'P'PA$  e pela Definição [4.1.2](#)  $PA = PF = FP'$  então  $d(P', F) = d(P', A') = d(P', L)$ , portanto  $P' \in \Gamma$ .

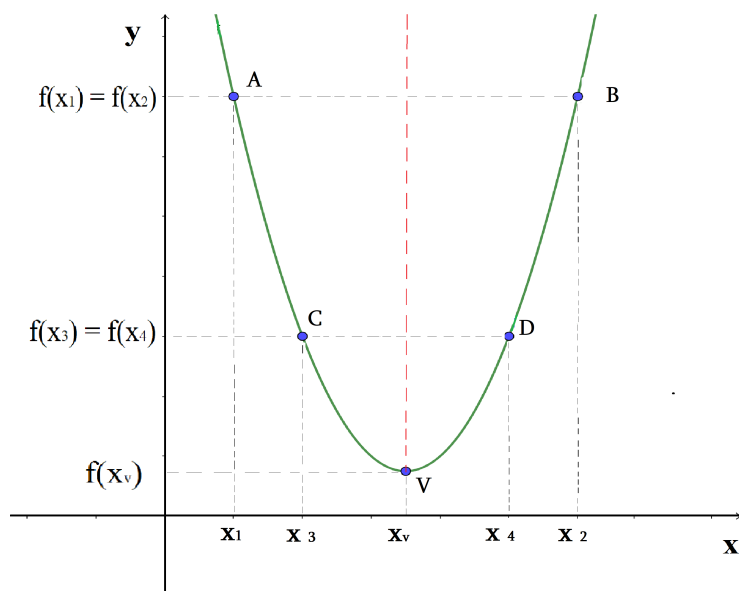
Figura 4.5: Congruência dos segmentos  $PF$ ,  $PA$ ,  $P'F$ ,  $P'A'$ .



Fonte: Autor.

Determinada a coordenada do vértice, utilizando a relação de simetria da parábola e construindo o gráfico da função, na Figura a seguir [4.6](#) que traçando uma reta horizontal paralela ao eixo das abscissas, essa reta cortará o gráfico da função quadrática em dois pontos distintos, de coordenadas  $(x_1, y_0)$  e  $(x_2, y_0)$  de acordo com a Proposição [4.1.1](#).

Figura 4.6: Pontos em Simetria.



Fonte: Autor.

Percebe-se que para os valores  $x_1$  e  $x_2$  na figura [4.6](#) associasse um único valor  $y$ , com  $f(x_1) = f(x_2) = y_0$ , dessa forma podemos elaborar a seguinte proposição.

**Proposição 4.1.2.** *Seja a parábola  $P$ , o vértice é a única coordenada em bijeção*

na função  $f$ .

*Demonstração.* Supondo por absurdo que a função na coordenada do vértice é não injetiva, ou seja, existe um  $x' \neq x_v$ , tal que  $f(x') = -\frac{\Delta}{4a}$ , para a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ .

Como suposto,  $x' \neq x_v$  e  $f(x') = -\frac{\Delta}{4a}$

$$a(x')^2 + bx' + c = -\frac{\Delta}{4a},$$

substituindo o discriminante  $\Delta$  temos,

$$a(x')^2 + bx' + c = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a},$$

logo, efetuando a divisão no segundo membro da igualdade,

$$a(x')^2 + bx' + c = -\frac{b^2}{4a} + c,$$

pode-se retirar o coeficiente  $c$ , ficando com

$$a \left( (x')^2 + \frac{bx}{a} \right) = -\frac{b^2}{4a}$$

como  $a$  é não nulo, pode-se dividir ambos os lados da igualdade por  $a$ , assim:

$$(x')^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{b^2}{4a^2},$$

logo

$$(x')^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

a expressão acima pode ser escrita como,

$$\left( x' + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0,$$

assim,

$$x' = -\frac{b}{2a}.$$

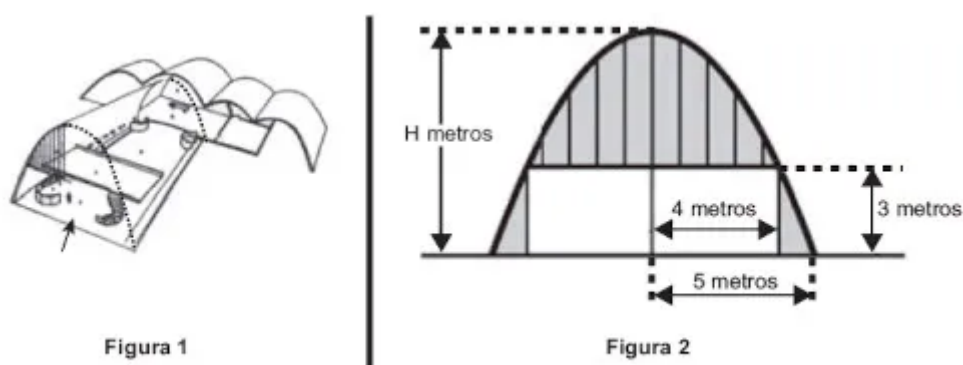
Contradição, pois como suposto, deveria existir um  $x' \neq x_v$ , tal que  $f(x') = -\frac{\Delta}{4a}$ , logo tem-se que  $x_v$  é único. Aplicando  $x_v$  na  $f$  como em [4.1](#), obtemos  $f(x_v)$ . ■

### 4.1.3 Questões do ENEM

Segue algumas aplicações das coordenadas do vértice nas questões do ENEM.

**Exemplo 4.1.1.** (Enem 2017) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Figura 4.7: Representação abóbadas da igreja de São Francisco



Fonte: ENEM 2017.

Qual a medida da altura  $H$ , em metro, indicada na Figura 2?

- (a)  $\frac{16}{3}$ .
- (a)  $\frac{31}{5}$ .
- (c)  $\frac{24}{4}$ .
- (d)  $\frac{25}{3}$ .
- (e)  $\frac{75}{2}$ .

Como as raízes da equação são 5 e  $-5$ , então a equação da parábola é dada por:

$$f(x) = a(x - 5)(x + 5),$$

assim, efetuando a multiplicação distributiva

$$f(x) = a(x^2 - 25)$$

Sabemos que o par ordenado  $(4,3)$  pertence a essa equação, então temos que:



$$3 = a(4^2 - 25),$$

logo, podemos concluir o coeficiente

$$a = -\frac{1}{3}.$$

Desse modo, a lei de formação da função será:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 = \frac{25}{3}$$

Agora, para calcular o valor do  $y_v$ , primeiro encontraremos o valor de delta e, posteriormente, o valor de  $y_v$ :

$$\Delta = 0^2 - 4 \left( -\frac{1}{3} \right) \left( \frac{25}{3} \right),$$

efetuando a multiplicação, obtemos o discriminante

$$\Delta = \frac{100}{9}.$$

Assim, pode-se calcular  $y_v$ , substituindo na fórmula

$$y_v = \frac{-\frac{100}{9}}{4\left(-\frac{1}{3}\right)},$$

pela divisão de frações, temos

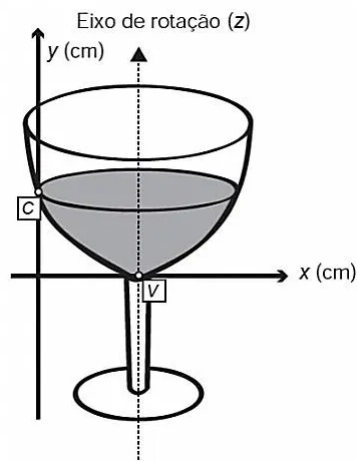
$$y_v = \frac{300}{36},$$

simplificando para obtermos a fração reduzida equivalente, temos

$$y_v = \frac{25}{3}.$$

**Exemplo 4.1.2.** (Enem 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo  $z$ , conforme mostra a figura.

Figura 4.8: Representação da taça formada a partir da rotação de uma parábola.



Fonte: ENEM 2013.

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$

onde  $C$  é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto  $V$ , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo  $x$ . Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

- (a) 1.
- (a) 2.
- (c) 4.
- (d) 5.
- (e) 6.

Como a função possui uma única raiz, então o discriminante delta é zero, substituindo os valores da equação do discriminante

$$0 = (-6)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2}C,$$

efetuando as devidas operações, obtemos

$$6C = 36$$

logo, temos como solução  $C = 6$ .

**Exemplo 4.1.3.** (Enem 2020) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R\$ 2,00;
- Barra II: R\$ 3,50;
- Barra III: R\$ 4,00;
- Barra IV: R\$ 7,00;
- Barra V: R\$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro  $L$  com a venda de barras de chocolate é expresso pela função  $L(x) = -x^2 + 14x - 45$ , em que  $x$  representa o preço da barra de chocolate.

A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra:

- (a) I
- (a) II
- (c) III
- (d) IV
- (e) V

Para encontrar o valor de  $x$  que maximiza o lucro, é necessário encontrar o valor de  $x_v$ , então basta substituir os coeficientes na fórmula

$$x_v = \frac{-14}{-2}$$

portanto, obtemos como solução para o problema  $x_v = 7$ , assim a empresa deverá investir na barra IV alternativa (d).

## 4.2 Estudo das raízes

Como visto nas preliminares 2.1 é necessário encontrar  $\sqrt{\Delta}$  quando for utilizada à fórmula que determina as raízes da equação quadrática. Observe que a existência ou não das raízes  $x_1$  e  $x_2$  da equação quadrática, passa pelo fator  $\sqrt{\Delta}$ , com isso, devemos analisar a relação para  $\Delta > 0$ ,  $\Delta < 0$  e  $\Delta = 0$ .

- 1 Para  $\Delta > 0$ , tem-se que a equação terá duas soluções reais, pois, seja  $\Delta = k$ , tem-se

$$x_1 = \frac{-b + k}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - k}{2a}.$$

Logo tem-se duas raízes reais e distintas ( $x_1 \neq x_2$ ).

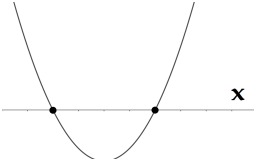
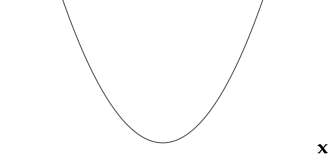
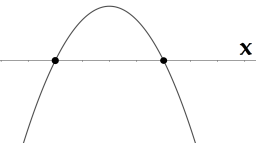
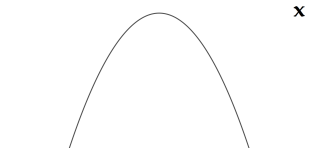

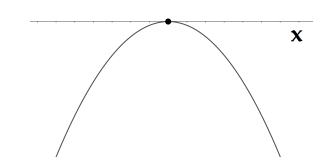
- 2 Para  $\Delta < 0$ , note que tal  $x$  não existe nos reais, assim, diz-se que não possui raiz real, pois,  $\nexists x \in \mathbb{R}$ .

- 3 Para  $\Delta = 0$ , como 0 é elemento neutro da adição, tem-se  $x_1 = x_2$ , logo a raiz são do tipo

$$x = \frac{-b \pm k}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Representando na tabela a seguir os itens citados a cima.

Tabela 4.1: Relação entre o discriminante  $\Delta$  e as raízes .

$\Delta > 0$		$\Delta < 0$	
$a > 0$		$a > 0$	
$a < 0$		$a < 0$	
$\Delta = 0$		$\Delta = 0$	
$a > 0$		$a < 0$	

Fonte: Autor.

A seguir alguns problemas para exemplificar essas relações.

## Questões do ENEM e Concursos

**Exemplo 4.2.1.** (Enem 2017 / Libras) O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma  $y = ax^2 + bx + c$ , com a base da montanha no eixo das abscissas.

Figura 4.9: imagem do morro em Porto Alegre



Fonte: ENEM 2017.

*Para que fique mais adequado essa representação, devemos ter:*

(a)  $a > 0$  e  $b^2 - 4ac > 0$ .

(a)  $a > 0$  e  $b^2 - 4ac < 0$ .

(c)  $a < 0$  e  $b^2 - 4ac < 0$ .

(d)  $a < 0$  e  $b^2 - 4ac > 0$ .

(e)  $a < 0$  e  $b^2 - 4ac = 0$ .

*Analisando o gráfico, sabemos que essa parábola tem concavidade para baixo, com isso temos que  $a < 0$  e sabemos também que  $b^2 - 4ac = \Delta$ .*

*Como a base da montanha é o eixo das abscissas, a parábola toca em dois pontos essa base, assim  $b^2 - 4ac > 0$ .*

*Logo, a alternativa que corresponde a  $a < 0$  e  $b^2 - 4ac > 0$  é a (d).*

**Exemplo 4.2.2.** (IDCAP 2019-ES) Considere a seguinte função  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ .

I Trata-se de uma função do segundo grau;

II Tem-se que  $f(0) = 3$ ;

III Se  $f(x) = 0$ , a função não possui raízes reais.

Dos itens acima,

(a) Apenas o item I está correto.

(b) Apenas o item II está correto.

(c) Apenas os itens I e II estão corretos.

(d) Apenas os itens I e III estão corretos.

(e) Todos os itens estão corretos

A função  $f$  é do segundo grau, logo, o item I é verdadeiro.

Ao substituí  $x = 0$  na função, teremos  $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 2$ , logo, o item II é falso, pois,  $f(0) = 3$ . Para o terceiro item basta calcular o valor de  $\Delta$ , assim

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2,$$

logo, o item III é falso, pois  $\Delta = 1$ . Portanto, a alternativa correta é letra (a).

**Exemplo 4.2.3.** (ITA- SP - 2011) Determine todos os valores de  $m \in \mathbb{R}$  tais que a equação  $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$  tenha duas raízes reais e distintas e maiores que zero.

Note que a equação é do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ . Terá duas raízes distintas quando  $\Delta > 0$ , assim

1 Para  $\Delta > 0$ ,

$$(2m)^2 - 4(2 - m)(m + 2) > 0$$

daí, efetuando multiplicação distributiva obtemos

$$4m^2 - 16 + 4m^2 > 0,$$

logo, as soluções são  $m > \sqrt{2}$  ou  $m < -\sqrt{2}$ .

2 Para que admita somente solução positiva o produto  $P$  das raízes deve ser maior que zero.

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m + 2}{2 - m} > 0,$$

para isso,  $-2 < m < 2$ .

3 Se as raízes são positivas sua soma também deve ser positiva.

$$s > 0 \Rightarrow \frac{-2m}{2-m} > 0,$$

logo,  $m > 2$  ou  $m < 0$ .

Pelos itens (1), (2) e (3) tem-se que  $-2 < m < -\sqrt{2}$ .

**Exemplo 4.2.4.** (ITAME 2020-GO) Sobre a função  $f(x) = -2x^2 + 6x - 10$  podemos considerar como verdadeiras as seguintes afirmações:

- (a) Não possui raiz real e seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo;
- (b) Possui uma única raiz real e o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima;
- (c) Possui duas raízes reais distintas e o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo;
- (d) Possui duas raízes reais diferentes de zero e o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima.

Sabe-se que a concavidade da parábola é voltada para baixo, pois  $a < 0$  será analisado o valor do discriminante  $\Delta$ .

$$\Delta = 6^2 - 4(-1)(-10),$$

ao ser efetuado as operações e os jogos de sinais, obtemos

$$\Delta = 36 - 40$$

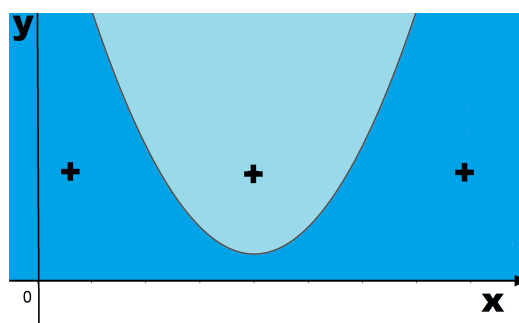
Assim pode-se concluir que, se  $\Delta = -4$ , logo, a equação não possui raiz real, portanto, a alternativa correta é (a).

### 4.2.1 Estudo do sinal

O estudo do sinal de uma função consiste em analisar os intervalos em que a imagem seja, positiva, negativa ou nula. Ou seja, para quais valores do domínio  $D_f$  da função  $f$  a imagem  $f(x)$  será  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$  ou  $f(x) = 0$ . Seja admitido que a  $f$  esteja definida, de acordo com as preliminares. Pela Tabela 4.1, pode-se notar que:

Se  $a > 0$  e  $\Delta < 0$ , então  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Figura 4.10: Representação do gráfico da função com imagens positiva.



Fonte: Autor.

Como na função  $p(x) = x^2 + 2x + 2$ , para o domínio temos os seguintes elementos  $D = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ , assim, pode-se construir a seguinte tabela:

Tabela 4.2: Relação entre o Domínio e Imagem da função  $p$ .

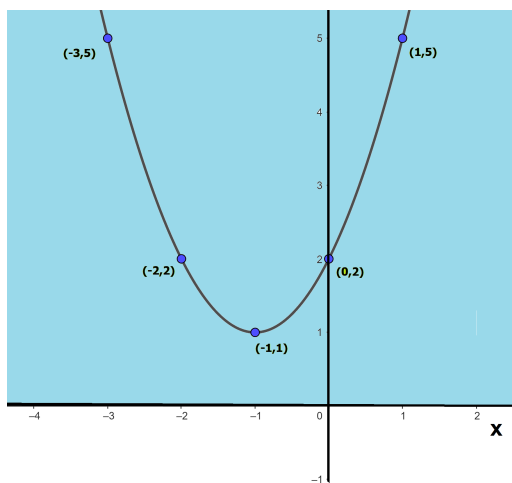
<b>X</b>	$p(x) = x^2 + 2x + 2$	<b>Y</b>
-3	$p(-3) = (-3)^2 + 2(-3) + 2$	5
-2	$p(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 2$	2
-1	$p(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 2$	1
0	$p(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 2$	2
1	$p(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2$	5

Fonte: Autor.

Transpondo as coordenadas  $(-3, 5)$ ,  $(-2, 2)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 2)$  e  $(1, 5)$  no plano cartesiano, ao unirmos os pontos, obtemos o gráfico a seguir.



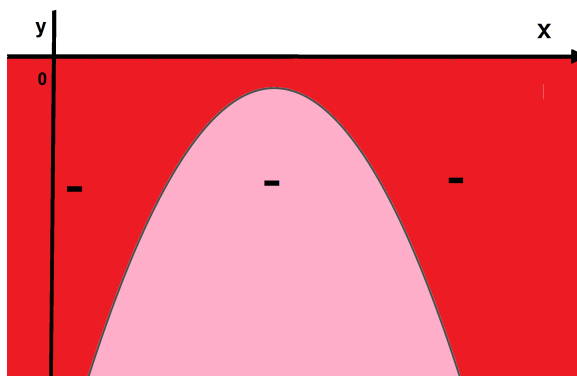
Figura 4.11: Representação gráfica da Tabela 4.2



Fonte: Autor.

Se  $a < 0$  e  $\Delta < 0$ , então  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , ou seja, a imagem admitirá apenas valores positivos para todo o intervalo real do domínio.

Figura 4.12: Representação do gráfico da função com imagens negativa.



Fonte: Autor.

Como na função  $p_1(x) = -x^2 + 2x - 2$ , pode-se construir a seguinte tabela:

Tabela 4.3: Relação entre o Domínio e Imagem da função  $p_1$ .

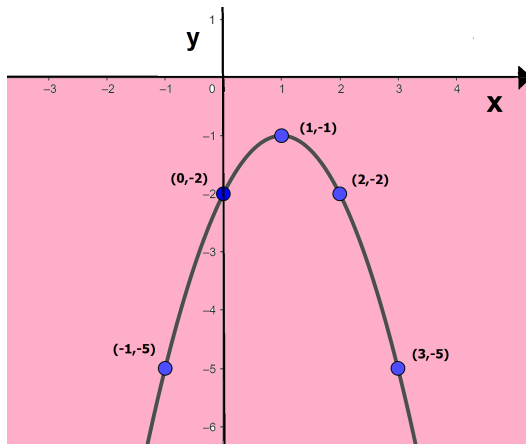
<b>X</b>	$p_1(x) = -x^2 + 2x - 2$	<b>Y</b>
-1	$p_1(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) - 2$	-5
0	$p_1(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 - 2$	-2
1	$p_1(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 - 2$	-1
2	$p_1(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 - 2$	-2
3	$p_1(1, 5) = -(1, 5)^2 + 2 \cdot (1, 5) - 2$	-5

Fonte: Autor.

Transpondo as coordenadas  $(-1, -5), (0, -2), (1, -1), (2, -2)$  e  $(3, -5)$  no plano

cartesiano, ao unirmos os pontos, obtemos o gráfico a seguir.

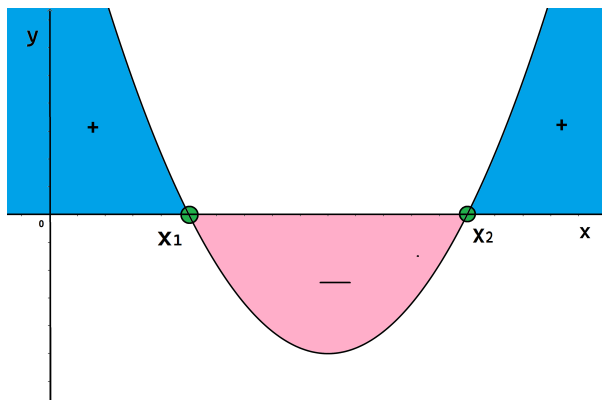
Figura 4.13: Representação gráfica da Tabela 4.3



Fonte: Autor.

Para  $\Delta > 0$  e  $a > 0$  tem-se três intervalos de acordo com as raízes  $x_1$  e  $x_2$ , pela Tabela 4.1  $x_1 \neq x_2$ , assim, para  $x_1 < x < x_2$ ,  $f(x) < 0$  e  $x < x_1$  ou  $x > x_2$ ,  $f(x) > 0$ , e como já é conhecido se  $x$  for  $x_1$  ou  $x_2$ ,  $f(x) = 0$ .

Figura 4.14: Representação do gráfico da função.

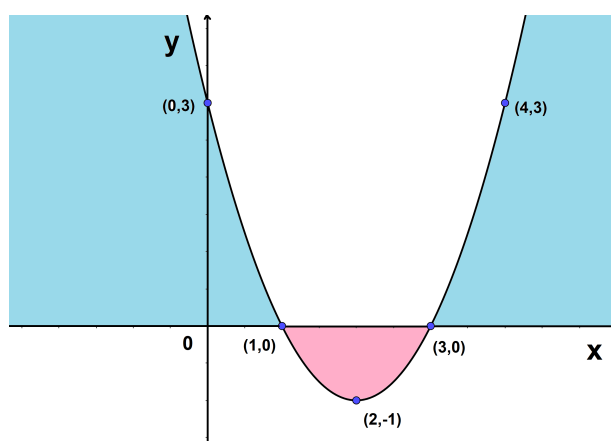


Fonte: Autor.

Por tanto, se  $x \in ]-\infty, x_1[$  ou  $x \in ]x_2, \infty[$ , então  $f(x) > 0$ , se  $x \in ]x_1, x_2[$ , então  $f(x) < 0$  e para  $x_1$  ou  $x_2$  a função  $f$  é nula.

Como na função  $p_2(x) = x^2 - 4x + 3$ , utilizando os seguintes valores para o domínio  $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  pode-se construir o seguinte gráfico de coordenadas  $(0, 3), (1, 0), (2, -1), (3, 0)$  e  $(4, 3)$ .

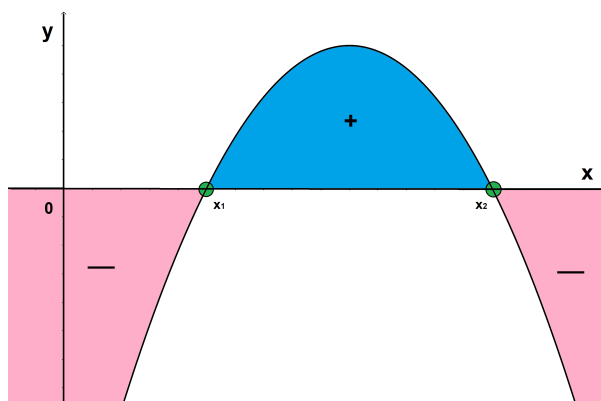
Figura 4.15: Representação gráfica da função  $p_2$



Fonte: Autor.

Para  $\Delta > 0$  e  $a < 0$  tem-se três intervalos de acordo com as raízes  $x_1$  e  $x_2$ , pela Tabela 4.1  $x_1 \neq x_2$ , assim, para  $x_1 < x < x_2$ ,  $f(x) > 0$  e  $x < x_1$  ou  $x > x_2$ ,  $f(x) < 0$ , e como já é conhecido se  $x$  for  $x_1$  ou  $x_2$ ,  $f(x) = 0$ .

Figura 4.16: Representação do gráfico da função.

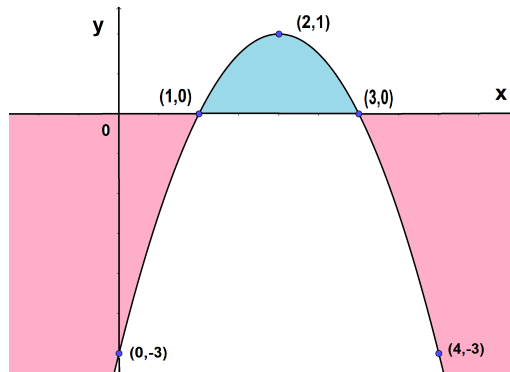


Fonte: Autor.

Por tanto, se  $x \in ]-\infty, x_1[$  ou  $x \in ]x_2, \infty[$ , então  $f(x) < 0$ , se  $x \in ]x_1, x_2[$ , então  $f(x) > 0$ . Para  $x_1$  ou  $x_2$  a  $f$  é nula.

Como na função  $p_3(x) = -x^2 + 4x - 3$ , utilizando os seguintes valores para o domínio  $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  pode-se construir o seguinte gráfico de coordenadas  $(0, -3), (1, 0), (2, 1), (3, 0)$  e  $(4, -3)$ .

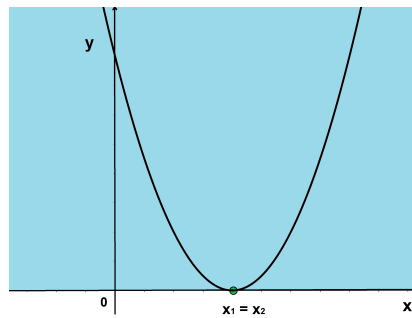
Figura 4.17: Representação do gráfico da função  $p_3$ .



Fonte: Autor.

Para  $a > 0$  e  $\Delta = 0$  um intervalo e uma raiz, pela Tabela 4.1,  $x_1 = x_2$ , assim, para  $x$  diferente de  $x_1$  ou  $x_2$  a  $f(x) > 0$  para todo o intervalo real.

Figura 4.18: Representação do gráfico da função.

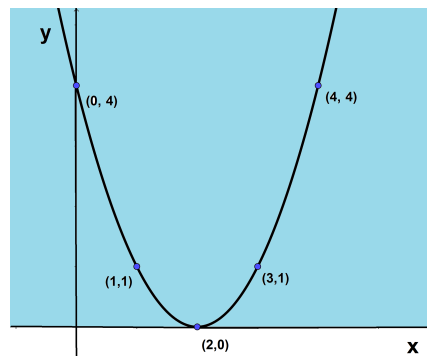


Fonte: Autor.

Ou seja, para todo  $x$  diferente do  $x_1$  ou  $x_2$ , a  $f(x) > 0$ .

Como na função  $p_4(x) = x^2 - 4x + 4$ , utilizando os seguintes valores para o domínio  $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  pode-se construir o seguinte gráfico.

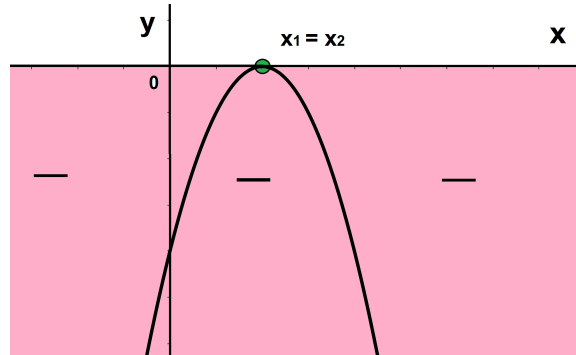
Figura 4.19: Representação gráfica da função  $p_4$ .



Fonte: Autor.

Para  $a < 0$  e  $\Delta = 0$  terá apenas uma raiz, pela Tabela 4.1,  $x_1 = x_2$ , assim, para  $x$  diferente de  $x_1$  ou  $x_2$ ,  $f(x) < 0$  para todo o intervalo real.

Figura 4.20: Representação do gráfico da função.



Fonte: Autor.

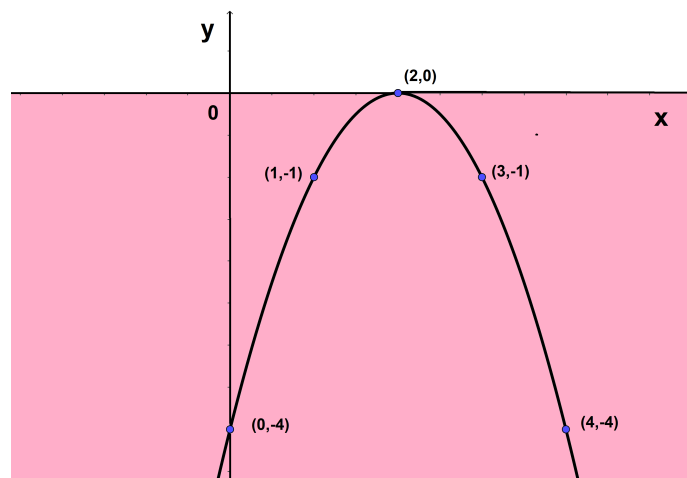
Como na função  $p_5(x) = -x^2 + 4x - 3$ , dado domínio  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  pode-se construir a seguinte tabela:

<b>X</b>	$p_3(x) = -x^2 + 4x - 4$	<b>Y</b>
0	$p_3(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 4$	-4
1	$p_3(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 4$	-1
2	$p_3(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 4$	0
3	$p_3(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 - 4$	-1
4	$p_3(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 - 4$	-4

Tabela 4.4: Tabela da relação entre o Domínio e Imagem da função  $p_3$ .

Transpondo as coordenadas para o gráfico:

Figura 4.21: Representação gráfica da Tabela 4.4



Fonte: Autor.

## 4.2.2 Aplicações

**Exemplo 4.2.5.** (FUNDATEC 2016 /PR) Analisando a função de segundo grau  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ , um indivíduo fez as seguintes afirmações:

I A imagem da função é  $[4, +\infty[$ .

II A função é crescente para todo  $x < 3$ .

III A função é decrescente para todo  $x < 4$ .

IV A função é nula quando  $x = 1$  e  $x = 5$ .

V A função é positiva quando  $1 < x < 5$ .

Quais estão corretas?

(a) Apenas II.

(b) Apenas II e III.

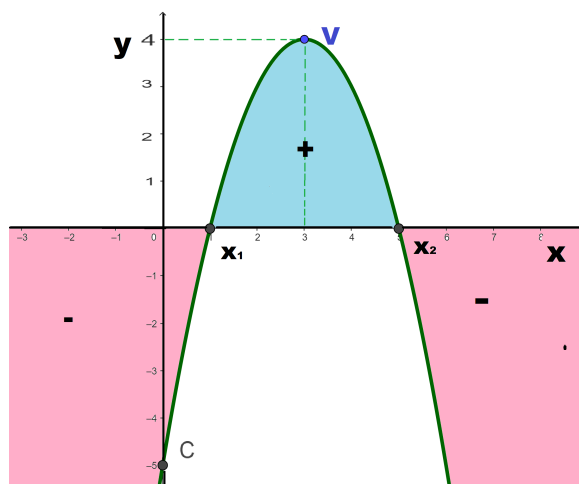
(c) Apenas II, IV e V.

(d) Apenas I, III, IV.

(e) I, II, III, IV e V.

Para solucionar a questão será mostrado a seguir o gráfico da função  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ .

Figura 4.22: Gráfico da função  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ .



Fonte: Autor.

Pela imagem do gráfico da função pode-se determinar que :

*I é falsa, pois, a concavidade da parábola é voltada para baixo, a imagem da função terá  $y_0$ , como maior valor no eixo das ordenadas  $y$ .*

*II é verdadeira, pois, tomado cada  $x_1 < x_2 < \dots < 2 < 3$  do intervalo  $] - \infty, 3]$ ,  $f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(2) < f(3)$ .*

*III é falsa, pois, o intervalo  $] - \infty, 3]$  é crescente e está contido em  $] - \infty, 4]$ .*

*IV é verdadeira, pois  $x = 1$  e  $x = 5$ , são as raízes.*

*V é verdadeira, pois no intervalo  $]1, 5[$ ,  $f(x) > 0$ .*

*Assim a alternativa correta é letra (c).*

**Exemplo 4.2.6.** (SELECON-2019MT) O trinômio  $-x^2 + (m-1)x + (2m+1)$  assume valores negativos para todo  $x$  pertencente aos reais. Logo, o produto dos possíveis valores inteiros de  $m$  é igual a:

(a) 6.

(b) 12.

(c) -18.

(d) -24.

Para que a equação acima possua apenas valores negativos para todo  $x$  real basta que,  $a < 0$  e  $\Delta < 0$ . Pela Exemplo [4.2.6](#) sabe-se que  $a < 0$ , assim, substituindo os coeficientes  $b^2 - 4ac < 0$ , tem-se

$$(m-1)^2 - 4 \cdot (-1)(2m+1) < 0,$$

ou seja,

$$m^2 + 6m + 5 < 0.$$

Como  $m > 0$  para que  $m^2 + 6m + 5 < 0$ , deve-se ter que  $m$  esteja entre as soluções dessa equação

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \Rightarrow \Delta = 16$$

assim, as raízes serão do tipo:

$$m = \frac{-6 \pm 4}{2},$$

o que nos dá  $-5$  e  $-1$ , assim podemos concluir os possíveis valores de  $m$ , que estão no intervalo  $-5 < m < -1$ . Portanto, a solução é o produto  $(-4)(-3)(-2)$ , que são os inteiros entre  $-5$  e  $-1$ , ou seja, a alternativa letra (d), pois o produto é  $-24$ .

## Capítulo 5

# A semiótica no ensino das equações quadráticas

No processo de ensino e aprendizagem da matemática, o docente encontra-se na necessidade de diversificar suas práticas metodológicas. A construção do conhecimento pelo aluno está diretamente relacionada às experiências vivenciadas em sala de aula. Defasagens ou habilidades não desenvolvidas nas séries anteriores podem prejudicar o aprendizado, havendo a necessidade da variação metodológica, exigindo que o professor ministre suas aulas com uma maior variedade de metodologias, com o intuito que todos aprendam o que é esperado sobre o conteúdo tratado. Por isso, é primordial que o docente reinvente-se para que o conteúdo a ser proporcionado seja compreendido de forma simples de maneira clara e tangível com a realidade do aluno, viabilizando a ancoragem dos subsunçores, se fazendo cumprir a aprendizagem significativa.

A relação do conteúdo a ser ensinado aos estudantes com os conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz é um conceito da Teoria da Aprendizagem Significativa de (Ausubel, 1963 [19]), a qual reforça a valorização de conhecimentos prévios, ou seja, aprendizagens conquistadas pelos estudantes anteriormente.

Na maioria das vezes assuntos contidos nos livros didáticos não tem relação com a realidade e expõem os conteúdo apenas como fórmulas e cálculos, no caso de *Matemática Volume único 2009* [5] e *Fundamentos da matemática elementar 2013* [9], mas, com as novas práticas e processos metodológicos, os livros didáticos passaram a inserir cada vez mais, representações de problemas reais em vários contextos e relações com outros assuntos, e assim, havendo a interdisciplinaridade, ou seja, a integração de duas ou mais áreas do conhecimento, presente no atual livro didático *Multiversos matemática* [6], adotado por algumas escolas do estado de Pernambuco, como usado na EREM Alfredo de Carvalho.

A equação quadrática é um exemplo da matemática no qual possibilita à relação com a realidade, pois seu surgimento deu-se através da necessidade nos problemas



práticos.

Neste contexto, para auxiliar na ancoragem dos subsunçores que é inserido as representações semióticas, que possibilita o aluno a identificar a presença dos elementos matemáticos contidos em problemas reais, como no caso dos problemas que estão intrinsecamente relacionados aos elementos da geometria plana, tais como área e segmentos das figuras.

Representações semióticas são formas de expressar ou comunicar algo por meio de signos, que são elementos que têm algum significado ou sentido para quem os usa ou interpreta. Os signos podem ser verbais (palavras, frases, textos) ou não verbais (imagens, gestos, sons, símbolos etc.). Cada sistema de signos tem suas próprias regras e funções e pode ser chamado de registro de representação semiótica. Por exemplo, a escrita matemática, os gráficos, as tabelas e as figuras são diferentes registros de representação semiótica (Duval, 2012 [20]).

A teoria dos registros de representação semiótica foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval, que se interessou pelo papel das representações na aprendizagem matemática. Segundo Durval (2011 p. 2 [21]), “ as representações semióticas são fundamentais para o pensamento e o conhecimento matemático, pois permitem mostrar um mesmo objeto ou conceito de diferentes formas e facilitam a comunicação, a objetivação e o tratamento dos problemas matemáticos ” .

O método de completar quadrado pode ser representado geometricamente, utilizando as figuras para representar as parcelas da equação, o que possibilita a fuga da representatividade escrita do campo algébrico de natureza abstrata, a fim de proporcionar uma representação semiótica das equações quadráticas, usando a ideia central de completar quadrado e representação geométrica, relacionando os termos da equação com a área de quadriláteros. A utilização das representações semióticas possibilitam uma diversificação metodológica no processo de aprendizagem dos discentes, pois, assim como os métodos didáticos tradicionais abordam em seus processos de resolução as habilidades e competências exigidas pela Base Nacional Comum Curricular(BNCC).

A BNCC é um documento que consiste em uma lista de habilidades e competências importantes e pretendidas para o desenvolvimento cognitivo do aluno. Norteia o currículo da rede de ensino fundamental e médio das escolas públicas e privadas de todo o Brasil. De caráter normativo, a BNCC estabelece aprendizagens essenciais a cada serie da educação básica, uma maneira de desfragmentar e unificar o processo de ensino e aprendizagem do país, são através de conteúdos propostos em tal documento que haverá a efetivação da construção de competências e habilidades nos estudantes. Disponível em [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf).

O papel das habilidades e competências na educação é um tema muito relevante

e atual, pois envolve a formação integral dos estudantes para o século XXI. As habilidades e competências são definidas como a capacidade de mobilizar conhecimentos, valores, atitudes e recursos para resolver problemas e enfrentar desafios em diferentes contextos. Elas são fundamentais para o desenvolvimento cognitivo, socioemocional e profissional dos indivíduos, bem como para a construção de uma sociedade mais democrática, sustentável e inovadora.

A educação baseada em habilidades e competências visa promover uma aprendizagem significativa, que articule os saberes teóricos e práticos, as dimensões individuais e coletivas, as demandas locais e globais. Nesse sentido, a educação não se limita à transmissão de conteúdos, mas busca desenvolver nos estudantes as capacidades de pensar criticamente, comunicar-se efetivamente, colaborar com os outros, criar soluções criativas, adaptar-se às mudanças, entre outras. Essas capacidades são essenciais para que os estudantes possam lidar com a complexidade e a diversidade do mundo atual, bem como participar ativamente da vida social, política, cultural e econômica.

Há algumas das habilidades presentes na BNCC relacionadas a representações semióticas tanto no campo da matemática quanto nos demais campos de aprendizagens.

- Analisar os efeitos de sentido do uso de diferentes notações, diagramações e formas gráficas em textos verbais e multissemióticos (EF89LP37)(Ensino Fundamental do oitavo ao nono ano de Língua Portuguesa, Habilidade 37);
- Interpretar e utilizar diferentes linguagens para expressar ou comunicar ideias matemáticas, tais como: equações, fórmulas, algoritmos, fluxogramas, diagramas, tabelas e gráficos (EM13MAT101)(Ensino Médio do primeiro ao terceiro ano de Matemática, Habilidade 101).

Assim, pode-se notar a importância das representações semióticas especificamente nas equações e funções quadráticas em:

- Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1<sup>o</sup> ou 2<sup>o</sup> graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (EM13MAT302)(Ensino Médio do primeiro ao terceiro ano de Matemática, Habilidade302);
- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2<sup>o</sup> grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (EM13MAT402)(Ensino Médio do primeiro ao terceiro ano de Matemática, Habilidade 402);

- Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo  $y = ax^2$  (EM13MAT502)(Ensino Médio do primeiro ao terceiro ano de Matemática, Habilidade 502);
- Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais (EM13MAT503)(Ensino Médio do primeiro ao terceiro ano de Matemática, Habilidade 503);
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º Grau (EF09MA09)(Ensino Fundamental do nono ano de Matemática Habilidade 09).

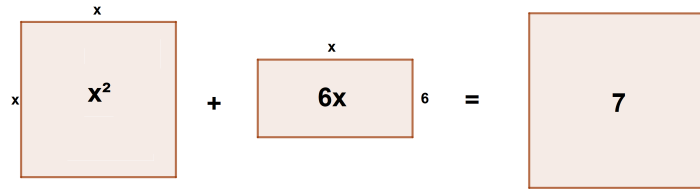
A implementação das representações semióticas no processo de ensino das equações e funções quadráticas, é importante para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e para ser inseridos devem estar de acordo com os Parâmetros Curriculares, sendo também pautadas nos Projetos Políticos Pedagógicos(PPP) das escolas, desde que sejam consideradas as especificidades de cada contexto educacional e as necessidades dos alunos e professores.

Vejamos a seguir alguns exemplos e sua representação semiótica para o processo de resolução dos problemas e para uma aplicação das equações quadráticas no dia a dia.

**Exemplo 5.0.1.** Determine a solução  $x$  para a equação  $x^2 + 6x = 7$ .

Note que, pode-se representar as parcelas como quadriláteros, de modo que

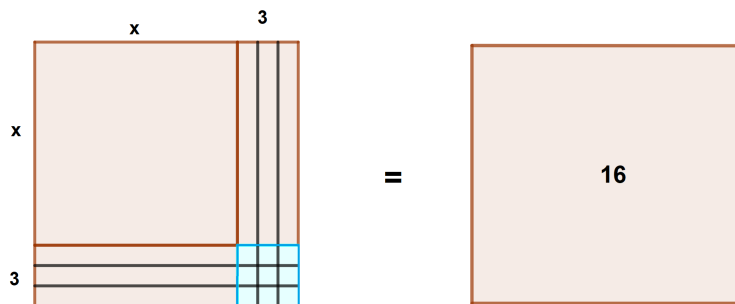
Figura 5.1: Representação da equação do Exercício 5.0.1



Fonte: Autor.

Assim, dividindo o retângulo de área  $6x$  em 6 retângulos iguais de base  $x$  e altura 1, em seguida unindo-os ao quadrado de lado  $x$ . Nota-se também que para completar o novo quadrado, agora de lado  $x + 3$  necessita-se de 9 quadrados de lado 1, para que continue a igualdade basta somar 9 ao segundo membro de modo que fique

Figura 5.2: Representação da equação  $(x + 3)^2 = 16$



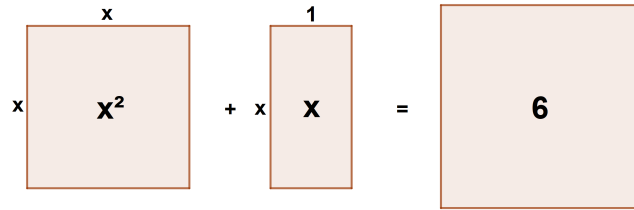
Fonte: Autor.

assim,  $(x + 3)^2 = 16$ , então  $x = -3 \pm 4$  portanto, as soluções são  $x_1 = 1$  e  $x_2 = -7$ , como se trata de segmentos desprezasse soluções negativas, assim 1 será a solução.

**Exemplo 5.0.2.** Determine a solução da equação  $x^2 + x - 6 = 0$ .

Representando a expressão como

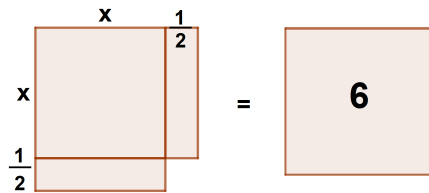
Figura 5.3: Representação da equação do Exercício 5.0.2



Fonte: Autor.

assim, dividindo o retângulo de área  $x$  em dois retângulos de base  $\frac{1}{2}$  e altura  $x$ , unindo-os

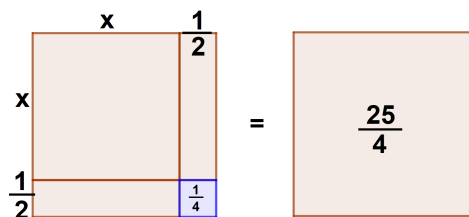
Figura 5.4: Representação da união  $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ .



Fonte: Autor.

adicionando o quadrado de lado  $1/2$

Figura 5.5: Representação da equação  $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$ .



Fonte: Autor.

assim, tem-se

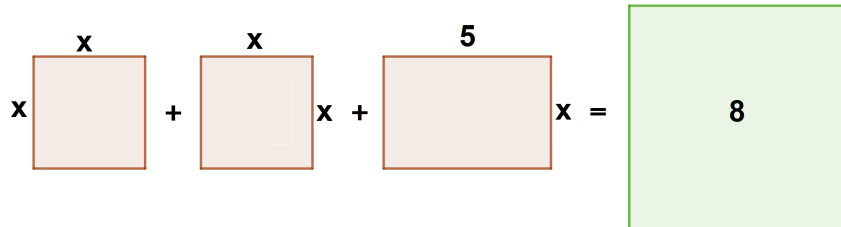
$$x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

logo,  $x_1 = 3$  e  $x_2 = -2$ .

**Exemplo 5.0.3.** Determine as raízes da função  $n(x) = 2x^2 + 5x - 8$ .

Para  $n(x) = 0$ , pode-se representar

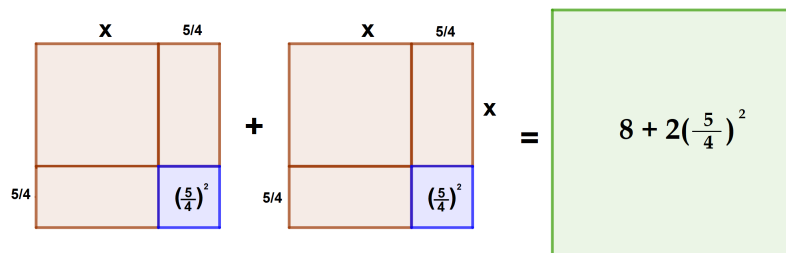
Figura 5.6: Representação da equação do Exercício 5.0.3



Fonte: Autor.

assim, dividindo o retângulo de área  $5x$  em 4 partes

Figura 5.7: Representação da igualdade  $(x + \frac{5}{4})^2 + (x + \frac{5}{4})^2 = 8 + 2(\frac{5}{4})^2$



Fonte: Autor.

ou seja, podemos transpor para a forma algébrica

$$2 \left( x + \frac{5}{4} \right)^2 = 8 + 2 \cdot \frac{25}{16},$$

assim, ao efetuar a soma das frações e simplificarmos por 2, obtendo

$$\left( x + \frac{5}{4} \right)^2 = \frac{89}{16},$$

daí, basta apenas extrair a raiz de modo que

$$x + \frac{5}{4} = \sqrt{\pm \frac{89}{16}},$$

logo, concluímos que as soluções são expressas como

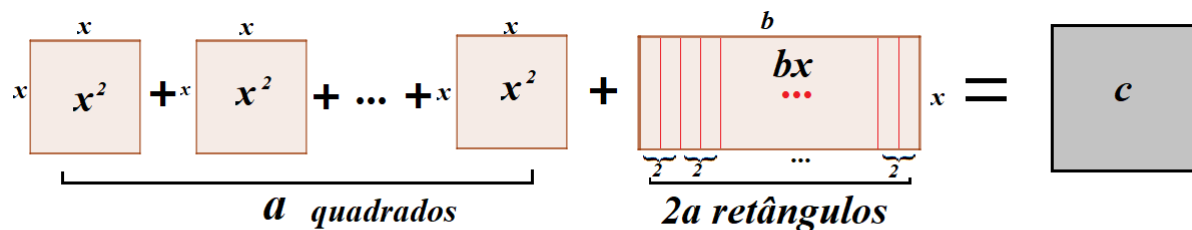
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4}.$$

Mediante os exemplos anteriores, pode-se relacionar as raízes das equações quadráticas do tipo  $ax^2 + bx - c = 0$ , com soma de áreas de retângulos.

É possível chegar a uma fórmula que determina a solução para equações do tipo  $ax^2 + bx - c = 0$ , sempre quando o único coeficiente negativo seja o  $c$  e os demais positivos.

Representado as parcelas da equação como área de quadriláteros.

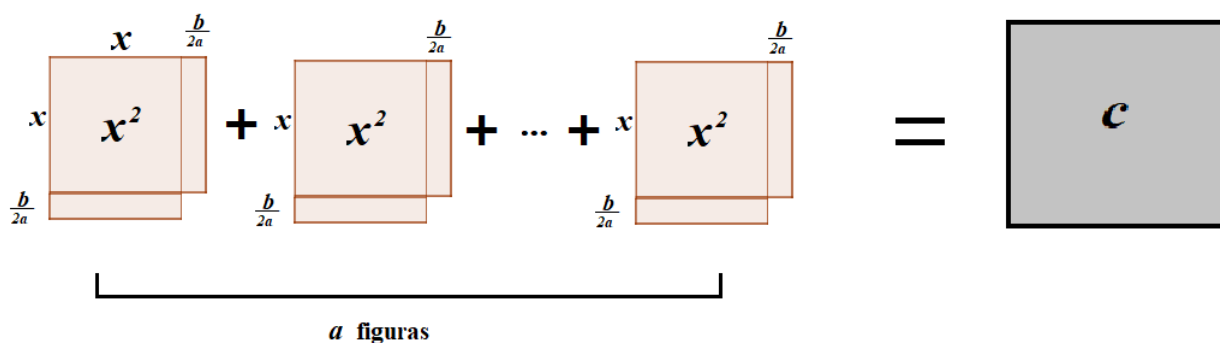
Figura 5.8: Representação da equação  $ax^2 + bx = c$



Fonte: Autor.

Assim, dividindo em  $2a$  partes o lado medindo  $b$  e unindo-os com os quadrados de lado  $x$  como nos exemplos anteriores, obtendo

Figura 5.9: Representação da equação  $a(x^2 + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})$



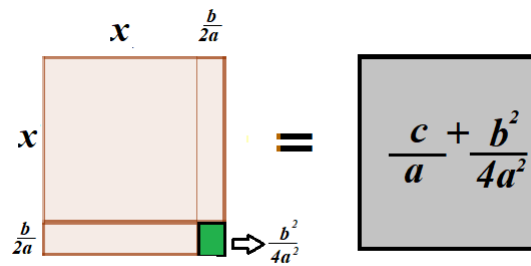
Fonte: Autor.

Dividindo em  $a$  partes o quadrado de área  $c$  e somaremos a ele um quadrado de lado  $\frac{b}{2a}$  para equivaler a um único quadrado cujos lados medem  $x + \frac{b}{2a}$ . Assim

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Geometricamente teremos

Figura 5.10: Representação da equação  $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$



Fonte: Autor.

obtendo a seguinte igualdade

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2},$$

logo, podemos concluir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$$

Note que para equações do tipo  $ax^2 + bx = c$ , usa-se a noção geométrica de completar quadrado, utilizando de quadrados de áreas conhecidas que sejam do tipo  $(\frac{b}{2a})^2$ . Para chegar a fórmula geral que serve para obter as soluções da equação quadrática, basta admitir inicialmente que a equação seja  $ax^2 + bx + c = 0$ , assim terá:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Entretanto, essa abordagem geometricamente poderá causar um debate em sala de aula, pois, os alunos poderão indagar a seguinte situação:

$$ax^2 + bx = -c,$$

a representa semiótica do problema induz que o quadrado terá área medindo  $-c$ , levantando a seguinte questão: “Existe figuras com áreas negativas?”

Não, não existe figuras com áreas negativas, pois a área de uma figura é uma medida da extensão da superfície da figura sempre será um valor positivo ou nulo.

No ensino de matemática, é essencial que os estudantes sejam expostos a diferentes registros de representação semiótica e que sejam estimulados a realizar conversões entre eles. Isso favorece a compreensão dos conceitos e das propriedades matemáticas, bem como a resolução de problemas e a argumentação. De acordo com Soares (2019, p. 2 [22]), “além disso, as representações semióticas podem ser apoiadas por



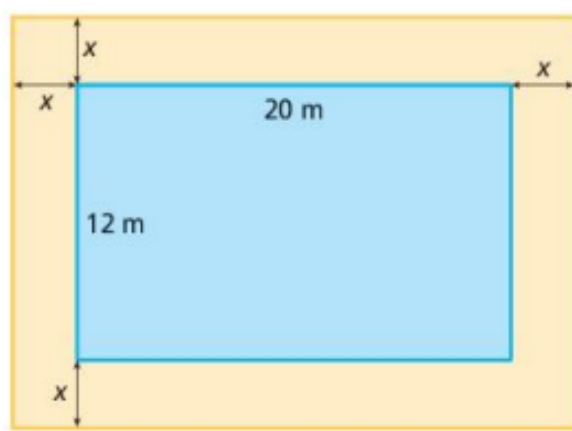
recursos tecnológicos, como softwares e aplicativos, que facilitam a visualização e a manipulação dos objetos matemáticos” .

Portanto, as representações semióticas são elementos fundamentais para o ensino e a aprendizagem da matemática, pois permitem que os estudantes construam significados e relações entre os objetos matemáticos, desenvolvendo o seu raciocínio lógico e criativo.

O exemplo a seguir, ilustra as representações semióticas, foi extraído do livro *Conexões com a matemática 1* (Leonardo, 2016 [3]).

**Exemplo 5.0.4.** *Uma piscina retangular foi planejada conforme a figura abaixo .*

Figura 5.11: Representação da piscina retangular.



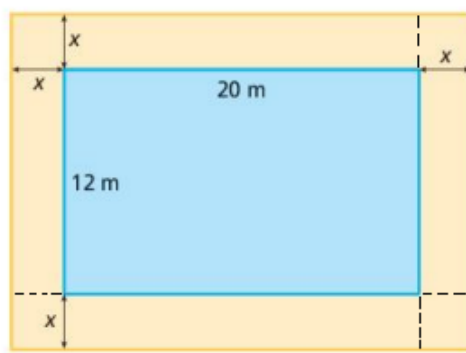
Fonte: Adailson Secco

*A área  $A$  do piso em volta dessa piscina depende da medida  $x$  escolhida. Faça o que se pede.*

- (a) Qual a lei de formação que expressa a área desse piso em função de  $x$ ?*
- (b) Calcule a área  $A$ , em metros quadrados, para  $x$  igual a 3m.*

*Para o item (a) Ao dividir os lados adjacentes à piscina, podemos obter a seguinte imagem*

Figura 5.12: Representação dos segmentos da piscina



Fonte: Autor.

*Ao dividir os lados adjacentes a piscina tem-se quadriláteros, podendo ser representada como*

$$A(x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + 20x + 20x + 12x + 12x,$$

*assim,*

$$A(x) = 4x^2 + 64x.$$

*Para o item (b), basta apenas aplicar, para  $x = 3$  na função  $A(x) = 4x^2 + 64x$ , assim*

$$A(3) = 4 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3$$

*logo*

$$A = 228m^2.$$

# Capítulo 6

## O método de Po-Shen Loh

Neste capítulo, iremos explorar o Método de Po-Shen Loh para a obtenção das raízes de uma equação quadrática. Para isso, iniciaremos com um estudo dos métodos babilônicos, os quais serviram como um modelo para o desenvolvimento do método de Po-Shen Loh.

### 6.1 Equações quadráticas na babilônia

Os babilônios foram um dos primeiros povos a desenvolver métodos para resolver equações quadráticas, por volta de 2000 a.C. Eles usavam um sistema de numeração posicional baseado no número 60, chamado de sexagesimal, e representavam os números com símbolos cuneiformes em tábuas de argila. Os babilônios não tinham uma notação algébrica como a nossa, mas expressavam os problemas e as soluções em forma de texto. Eles conheciam uma fórmula geral para resolver cada tipo de equação, usando o método de completar quadrados, como visto em (Eves, 2004 p.48-49 [12]). Eles também tinham conhecimento dos casos especiais, como raízes negativas ou nulas (Boyer, 2011 [11]).

Um exemplo contido em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, é encontrar dois números que têm uma soma  $s$  e seu produto  $p$ , apresentado no livro *A matemática do ensino médio* (Lima, 1997 [26]).

Os números procurados são as soluções de equações quadráticas do tipo:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

A regra que se dispunham para encontrar as soluções era:

*“Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.”* (LIMA, 1997 p.120 [26]).

Fornecendo na notação atual:

$$x_1 = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Segundo Lima, E.L (1997), Não há registro do raciocínio que levou os escritores dos textos cuneiformes a esse resultado, mas existem evidências de algo semelhante ao seguinte: Sejam  $x_1$  e  $x_2$  as raízes procuradas, tomado  $x_1 \leq x_2$ . Ambos os números são equidistantes da média aritmética  $\left(\frac{s}{2}\right)$ , assim  $\frac{x_1+x_2}{2}$ . Seja  $d$  a diferença entre as raízes a média, ou seja,  $d = \frac{s}{2} - x_1 = x_2 - \frac{s}{2}$ , tem-se

$$x_1 = \frac{s}{2} - d \text{ e } x_2 = \frac{s}{2} + d.$$

a incógnita  $d$  pode ser encontrada pelo produto das raízes,

$$p = x_1 \cdot x_2,$$

substituindo a relação das raízes e a média entre elas,

$$\left(\frac{s}{2} - x_1\right) \cdot \left(x_2 - \frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2,$$

obtendo a seguinte relação ao produto,

$$p = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2,$$

logo, isolando a diferença  $d$ ,

$$d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2}.$$

Portanto, obtemos as seguintes relações dos coeficientes e as raízes

$$x_1 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2}.$$

Lima (1997) apresenta apenas o caso específico, não abordando a generalização do método para o caso geral das equações quadráticas  $ax^2 + bx + c = 0$ .

No próximo tópico, vamos conhecer o método proposto por Po-She Loh em um pré-print (Loh, 2019 [2]), que se baseia na mesma ideia do método Babilônio para encontrar as raízes de uma função quadrática, ou seja, utilizando a soma e o produto das raízes para determina-las.

**Observação 6.1.1.** *Vale salientar que, mesmo antes das contribuições de François Viète, já existia em textos atribuições quanto a soma e o produto das raízes, porém não existia fórmulas para os valores das raízes.*

## 6.2 Método apresentado por Po-Shen Loh

Po-Shen Loh nascido no estado do Wisconsin, professor associado da universidade Carnegie Mellon (EUA), (Loh, P. [27]), em suas pesquisas para o Pré-print *A Simple Proof of the Quadratic Formula* (Loh, 2019 [2]), conseguiu determinar um método para encontrar as raízes de uma equação quadrática, generalizando de uma forma simples e intuitiva, o método que era utilizada pelos babilônios há cerca de quatro mil anos. Neste trabalho será mostrado todo o desenvolvimento e aplicação mostrado no pre-print.

O professor em seu trabalho, admite a presença de raízes complexas, o que mostra a eficácia do método que será mostrado a seguir.

Inicialmente iremos procurar as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 + bx + c = 0. \quad (6.1)$$

Segundo (Loh, P.-S. 2019), se pudermos encontrar uma fatoração da seguinte forma:

$$x^2 + bx + c = (x - r)(x - s).$$

então, podemos rescrever a equação quadrática acima da seguinte forma:

$$(x - r)(x - s) = 0.$$

Realizando a propriedade distributiva,

$$x^2 - (r + s)x + rs = 0. \quad (6.2)$$

Assim, comprando as Equações (6.1) e (6.2) concluímos que devemos encontrar dois números  $r$  e  $s$  cuja soma seja  $-b$  e o produto seja  $c$ ; assim,  $\{r, s\}$  será o conjunto de todas as raízes.

Dois números cuja soma seja  $-b$ , possuem média aritmética igual a  $-\frac{b}{2}$ , logo, a diferença das raízes entre a média será igual a  $z$ , então os dois números procurados são da forma  $\frac{-b}{2} \pm z$  que tenham produto  $c$ , sendo  $z$  a única incógnita. (Se  $z$  for 0, então temos os dois números  $r = s = -\frac{b}{2}$ ).

Para encontrarmos o  $z$ , temos:

$$\left(-\frac{b}{2} - z\right)\left(-\frac{b}{2} + z\right) = c,$$

fazendo as multiplicações e simplificando, temos:

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - z^2 = c.$$

Isolando  $z$ , obtemos,

$$z = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Sem perda de generalidade podemos supor  $\pm z$ , pois as raízes são da forma  $-\frac{b}{2} \pm z$ . Portanto as raízes são dadas por:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

**Exemplo 6.2.1.** *Vamos usar o método de Po-Shen Loh para encontrar as raízes da equação  $x^2 + 5x + 6 = 0$ . Note que  $a = 1$ ,  $b = 5$  e  $c = 6$ , assim o produto das raízes são da forma:*

$$\left(-\frac{5}{2} - z\right) \left(-\frac{5}{2} + z\right) = 6,$$

logo,

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}.$$

Assim as soluções são do tipo  $(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = -3$  e  $(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = -2$ .

Generalizando à fórmula para equações do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com  $x \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ , basta dividir toda a equação por  $a$  (que é não nulo) assim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Se conseguir encontrar uma fatoração de acordo com Proposição [3.3.1](#) de modo que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

Basta encontrar dois números  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  com soma  $\frac{-b}{a}$  e produto  $\frac{c}{a}$ ; então a média da soma será  $\frac{-b}{2a}$ , assim basta encontrar um  $w$  no qual é a diferença entre as médias e as raízes, assim :

$$\alpha_1 = \frac{-b}{2a} - w$$

e

$$\alpha_2 = \frac{-b}{2a} + w.$$

Pelo produto das raízes, pode-se fazer a seguinte relação utilizando os coeficientes

$$\left(\frac{-b}{2a} - w\right) \left(\frac{-b}{2a} + w\right) = \frac{c}{a},$$

efetuando a multiplicação distributiva da soma pela diferença obtemos,

$$\frac{b^2}{4a^2} - w^2 = \frac{c}{a},$$

isolando o valor desconhecido  $w$

$$w = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, utilizando a relação das raízes e a diferença  $w$ , em uma única fração conclui-se,

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{(-b)^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para a segunda raiz, utilizamos agora soma,

$$\alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{(-b)^2 - 4ac}}{2a}$$

Por fim, chegando na fórmula que determina as raízes da equação:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

O método acima além de eficiente, é também intuitivo e requer de operações simples. Portanto, é uma ótima proposta pedagógica que pode ser aplicado aos alunos do 9 ano do ensino fundamental e no ensino médio, assim como a habilidade EF09MA09PE em que diz: Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. De acordo organizador curricular por bimestre utilizados nas escolas de Pernambuco e do ensino médio.

Assim, os professores devem alinhar as competências e habilidades aos parâmetros curriculares nacionais(PCNs), adaptando à sua realidade educacional. Os PCNs são diretrizes do Ministério da Educação(MEC) para orientar os currículos e as práticas pedagógicas das escolas de educação básica do Brasil. Eles abordam as áreas de conhecimento e os temas transversais relevantes para a formação cidadã dos alunos. Eles visam garantir a qualidade da educação e respeitar a diversidade cultural e regional do país.

## 6.3 Representação geométrica do método de Po-Shen Loh

Nesta seção, será apresentado um caso particular que utiliza representações semióticas para ilustrar o método de Po-Shen Loh.

Seja a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

sabe-se que  $a \neq 0$  podendo ser escrita como

$$f(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $f$  possua duas raízes reais  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , e que  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ . Pela igualdade [3.3](#) da Seção 3.3 Soma e produto das raízes, sabe-se que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2),$$

logo, ao efetuar o produto notável obtemos as seguintes relações:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{b}{a}$$

e

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

Pela Proposição [4.1.1](#) da seção 5.1.2 Eixo de simetria, os pontos  $(\alpha_1, 0)$  e  $(\alpha_2, 0)$  são simétricos em relação a reta focal. Seja  $w$  a distância do  $x_v$  às raízes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , representado na figura a seguir.

Logo, pode-se escrever as raízes como:

$$\alpha_1 = x_v - w \text{ e } \alpha_2 = x_v + w$$

assim, o produto entre as raízes poderá ser expresso,

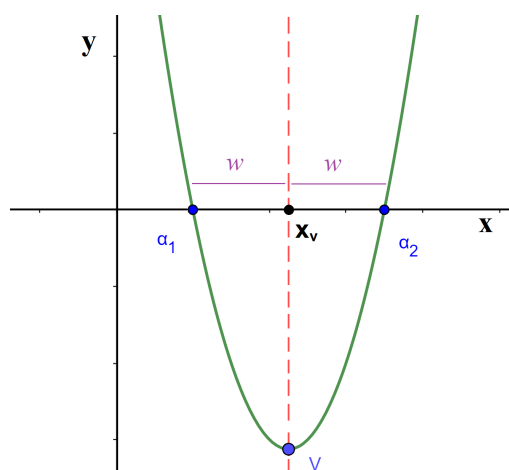
$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (x_v - w)(x_v + w),$$

obtemos a seguinte relação:

$$x_v^2 - w^2 = \frac{c}{a}.$$



Figura 6.1: Raízes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  da função  $g$ .



Fonte: Autor.

sabemos pela Equação 4.2, que o  $x_v$  é  $-\frac{b}{2a}$

$$\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - w^2 = \frac{c}{a}$$

Com isso, isolando o valor desconhecido da diferença  $w$ ,

$$w^2 = \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{c}{a},$$

logo, temos a expressão que determina a diferença em relação aos coeficientes

$$w = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Assim, obtemos o valor de  $w$ , e portanto, conseguimos encontrar o valor de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

$$\alpha_1 = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

## 6.4 Aplicações do método de Po-Shen Loh

Nesta seção mostrados algumas questões de concursos e vestibulares, com intuito de exemplificar e mostrar a eficácia e a simplicidade na resolução dos problemas utilizando o método proposto neste trabalho.

**Exemplo 6.4.1.** (ENEM 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número  $f$  de infectados é dado pela função  $f(t) = -2t^2 + 120t$  (em que  $t$  é expresso em dia e  $t = 0$  é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da pandemia.

A secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no:

(a) 19° dia

(a) 20° dia

(c) 29° dia

(d) 30° dia

(e) 60° dia

Queremos o valor de  $t$  para que  $-2t^2 + 120t = 1600$ , assim, basta encontrar as raízes da equação. Note que, as equações a seguir são equivalentes

$$-2t^2 + 120t - 1600 = 2 \cdot (-t^2 + 60t - 800) = 0,$$

note que, as raízes de  $-t^2 + 60t - 800 = 0$  também são raízes para  $2t^2 + 120t - 1600 = 0$ . Assim, para  $a = 1$ , tem-se  $t^2 - 60t + 800$ , basta dividir o coeficiente  $b$  por 2, daí :

$$30^2 - w^2 = 800,$$

assim, ao isolarmos  $w$ ,

$$-w^2 = -900 + 800,$$

obtendo  $w = 10$ , assim as raízes em graus serão:

$$\alpha_1 = 30 - 10 = 20^\circ$$

e, a segunda solução,

$$\alpha_1 = 30 + 10 = 40^\circ.$$

**Exemplo 6.4.2.** Aplique o método para a equação com coeficientes irracionais  $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ . Sabemos que os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 2\sqrt{2}$  e  $c = 2$ , substituindo na expressão que nos dá o valor da distância  $w$ ,

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 - w^2 = 2$$

efetuando a divisão, a fim de simplificar os cálculos, temos

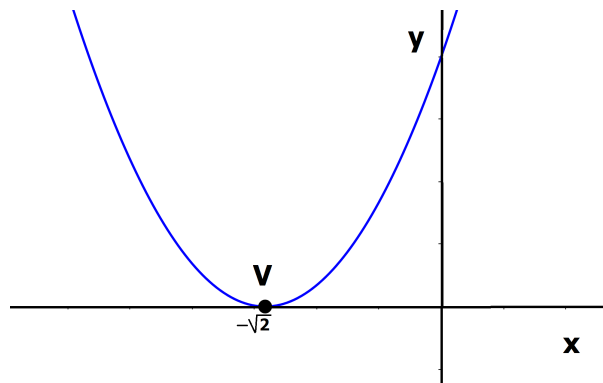
$$(\sqrt{2})^2 - w^2 = 2,$$

isolando o valor desconhecido  $w$ , obtemos

$$w^2 = -2 + 2$$

assim,  $w = 0$ . Como  $w$  é uma distância, conclui-se que terá uma única raiz  $\alpha_1 = \alpha_2$ , e essa raiz será justamente o  $x_v$ .

Figura 6.2: Gráfico da função  $l$  definida por  $l(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ .



Fonte: Autor.

**Exemplo 6.4.3.** (Unifil-2018 PR) Dada a função quadrática  $f(x) = x^2 + 2x - 15$  quais valores em que  $f(x) = 0$ ?

- (a) Para  $x = 2$  e  $x = -3$
- (b) Para  $x = -2$  e  $x = 3$
- (c) Para  $x = -5$  e  $x = -3$
- (d) Para  $x = -5$  e  $x = 3$
- (e) Para  $x = -3$  e  $x = 5$

Por fim, mostrando a resolução pelo método intuitivo, indicado para aplicação em sala de aula. Utilizando o gráfico para ilustrar o exemplo .

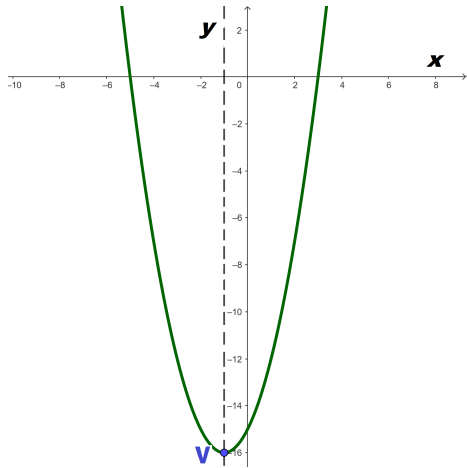


Figura 6.3: Gráfico da função do exemplo 6.4.3

Temos  $x^2 + 2x - 15 = 0$ ,

$$w^2 = 15 + \left(\frac{2}{2}\right)^2,$$

assim  $w = \sqrt{164}$ , como  $w$  é uma distância,

$$x_1 = -\frac{2}{2} + 4 = 3$$

e subtraindo

$$x_2 = -\frac{2}{2} - 4 = -5$$

assim, o produto  $x_1 \cdot x_2 = -15$ , logo, a solução  $S = \{-5, 3\}$ .

**Exemplo 6.4.4.** Determine as raízes da equação  $2x^2 - 16x + 14 = 0$ . Por fim, mostrando a resolução pelo método intuitivo, indicado para aplicação em sala de aula. Utilizando o gráfico para ilustrar o exemplo .

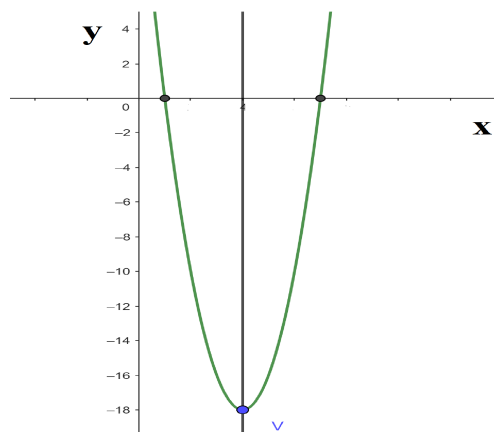


Figura 6.4: Gráfico da função do exemplo 6.4.4

Temos  $2x^2 - 16x + 14 = 2(x^2 - 8x + 7)$ , logo:

$$\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - w^2 = 7,$$

assim

$$-w^2 = -16 + 7$$

logo

$$w = \pm\sqrt{9}$$

como  $w$  é uma distância utiliza-se  $|w|$ , logo  $w = 3$ .

$$x_1 = -\left(\frac{-8}{2}\right) + 3 = 7$$

e

$$x_2 = -\left(\frac{-8}{2}\right) - 3 = 1$$

logo

$$x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot 1 = 7.$$

**Exemplo 6.4.5.** (Fundação de Estudos e Pesquisas Socioeconômicos-FEPESE-2021)

Sabe-se que 2 é uma raiz dupla do polinômio  $p(x) = 4x^4 - 18x^3 + 18x^2 + 16x - 24$ .

Portanto, a soma das outras raízes desse polinômio é:

$$(a)1 \qquad (b)\frac{1}{2} \qquad (c)0 \qquad (d)\frac{-1}{2} \qquad (e)-1$$

Perceba, pode-se obter uma equação equivalente à  $4x^4 - 18x^3 + 18x^2 + 16x - 24 = 0$ .

Adicionando os dados a tabela, em seguida testando para raiz dupla 2

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 4 & -18 & 18 & 16 & -24 \\ 2 & 4 & -10 & -2 & 12 & |0 \\ \hline & 4 & -2 & -6 & |0 \end{array}$$

Assim,  $p(x) = (x - 2)^2(4x^2 - 2x - 6)$ . A solução para  $4x^2 - 2x - 6 = 0$ .

$$w^2 = \left(\frac{2}{2 \cdot 4}\right)^2 + \frac{6}{4} = \frac{1}{16} + \frac{3}{2}$$

assim, efetuando a soma de frações obtemos que a distância  $w$ ,

$$w = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4},$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{4}$$

logo a soma das raízes é  $\frac{1}{2}$ , alternativa correta letra (b).

**Exemplo 6.4.6.** (Fundação de Estudos e Pesquisas Socioeconômicos-FEPESE-2022)

A soma das raízes do polinômio  $x^5 - 2x^3 + x$  é:

(a) 0.

(b) 1.

(c) -1.

(d) 2.

(e) -2.

Note que 0 é solução, do polinômio  $x^5 - 2x^3 + x$ , assim

$$x(x^4 - 2x^2 + 1),$$

adicionando os dados a tabela, em seguida testando para raiz dupla 1 Assim tem-se,

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & |0 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & & |0 \end{array}$$

$x(x-1)^2(x^2+2x+1)$ , assim reduziu-se o polinômio de grau 5 em polinômios de grau 1 e 2, tem-se,

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 - w^2 = 1,$$

tem-se  $w = 0$ , assim as raízes da equação  $x^2 + 2x + 1$  serão iguais  $x_1 = x_2 = -1$ . Assim as raízes são 0, -1, -1, 1, 1 e a soma é 0 alternativa correta letra (a).

# Capítulo 7

## Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre função quadrática, mais precisamente o estudo sobre os zeros da função quadrática, a fim de calcular os valores reais de  $x$  para as equações do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , foi mostrado os diversos métodos de resolução já encontrados na literatura desde os babilônios, alguns mais intuitivos e de conceitos básicos da matemática, evidenciado como proposta pedagógica a generalização mostrada por Po-Shen Loh para os alunos do 9º do ensino fundamental e nas turmas do ensino médio, obtendo mais um método de resolução e como facilitador do processo de ensino na educação básica.

Como já citado o método de completar quadrados já é utilizados na educação básica e utilizado pelo autor em conjunto com os métodos babilônicos nas turmas de 1º ano do ensino médio na EREMAC(Escola de Referência de Ensino Médio Alfredo de Carvalho) na cidade de Triunfo-PE. Durante o período de busca por um tema para conclusão do curso, através de leituras, pesquisas, revisões bibliográficas o método babilônio mostrado pelo professor Po-Shen Loh e verificado que este método era pouco conhecido e conseqüentemente pouco utilizado no processo de ensino para os discentes, visto que não é polêmico afirmar que a fórmula resolutive não é das mais agradáveis, buscou-se mostrar o quão simples e intuitivo é essa forma de resolução podendo ser facilmente aplicável pelo professores da educação básica e simples de ser absorvido pelos alunos.

A implementação das propostas pedagógicas apresentadas neste trabalho, devem ir de encontro com a BNCC e PCNs para que seja trabalhadas tanto uma habilidade pretendida na formação básica dos alunos, quanto um método que se adapte e possa ser aplicada de acordo com a realidade dos alunos, para isso é importante que os educadores conheçam os dois documentos e saibam como adaptá-los à sua realidade educacional.

# Referências Bibliográficas

- [1] TATTO, F.; SCAPIN, I. J. Matemática: por que o nível elevado de rejeição? *Revista de Ciências Humanas*, v. 5, n. 5, p. 57–70, 2004.
- [2] LOH, P.-S. *A Simple Proof of the Quadratic Formula*. arXiv, 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1910.06709>>.
- [3] LEONARDO, F. M. de. *Conexões com a matemática 1*. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.
- [4] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, PROFMAT, 2012.
- [5] DANTE, L. R. Matemática. volume único. são paulo: Ática, 2009.504p., ed. 1. (*Projeto voaz*). ISBN 9788508098019 (*broch.*).
- [6] SOUZA, J. R. d. Multiversos matemática. são paulo: Ftd, 2020.292p., ed. 1. *CÓDIGO DO VOLUME 0218P21202133. CÓDIGO DA COLEÇÃO: 0218P21202*.
- [7] SILVA, I. C. da; SILVA, J. H. da; PEREIRA, A. C. C. Os versos de lilavati como fonte histórica para o ensino de matemática: propondo uma prática. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 4, n. 1, p. 78–87, 2018.
- [8] BRITANNICA, O. E. d. E. *Bhaskara II*. Acessado em 21 de novembro de 2022., 1 de janeiro de 2022. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Bhaskara-II>>.
- [9] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 1: Conjuntos e funções*. Atual Didáticos, 2013. ISBN 9788535716801. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=eHrMjwEACAAJ>>.
- [10] FILHO, D. C. de M. *Manual de Redação Matemática*.
- [11] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A history of mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.



- [12] EVES, H. W. et al. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp Campinas, 2004.
- [13] MISHRA, L. *Teaching of mathematics*. [S.l.]: APH Publishing, 2008.
- [14] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Sridhara*.
- [15] ARNDT, A. Al-khwarizmi. *The Mathematics Teacher*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 76, n. 9, p. 668–670, 1983.
- [16] MUSA, A. J. M. ibn. al-khwarizmi. URL: <http://www-history.mcs.stand.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi.html> (12-8-2014), 1986.
- [17] VIÈTE, F. *Opera mathematica*. [S.l.]: Bonaventura et Abr. Elzevir, 1970.
- [18] HEFEZ, A. Iniciação à aritmética. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2009.
- [19] AUSUBEL, D. P. The psychology of meaningful verbal learning. Grune & Stratton, 1963.
- [20] DUVAL, R.; THADEU, M. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática*, Universidade do Extremo Sul Catarinense, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012.
- [21] DURVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: \_\_\_\_\_. *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus, 2011. p. 1–37.
- [22] SOARES, L. G. Como as representações semióticas podem contribuir para os processos de construção de significados da matemática? In: PUCPR. *Congresso Nacional de Educação*. [S.l.], 2019. p. 1–15.
- [23] NETO, A. C. M. Fundamentos de cálculo. *Rio de janeiro: SBM*, 2015.
- [24] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma Variável - Volume 1*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. ISBN 978-85-85818-75-3.
- [25] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria analítica. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013.
- [26] LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 6.
- [27] LOH, P. Disponível em: <<https://www.poshenloh.com/>>.

# Apêndice A

## Apêndice

### A.1 Algoritmo de Briot-Ruffini

Seja a função  $f$  sendo um função polinomial de grau  $n$  dos  $\mathbb{R}$ , com  $\beta \in \mathbb{R}$ . Escrevemos a  $f(\beta)$  como sendo,

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_n\beta^n \in \mathbb{R}$$

Se  $f(\beta) = 0$ , então diz-se que  $\beta$  é raiz de  $f(x)$ .

A Proposição a seguir, trata-se da função polinomial nos reais, para isso será definido divisão.

**Definição A.1.1.** *Dados  $p, q \in \mathbb{Z}$ , diremos que  $p$  divide  $q$ , quando existe um  $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , tal que  $q = pt$ .*

Denotaremos que  $p$  divide  $q$  por  $p \mid q$ , e quando  $p$  não divide  $q$  por  $p \nmid q$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que,  $f(\beta) = 0$ . Pela conhecida *divisão euclidiana* de  $f(x)$  por  $x - \beta$ , existem  $q(x)$  e  $r(x)$  em  $\mathbb{R}$  tais que:

$$f(x) = q(x)(x - \beta) + r(x),$$

com  $r(x) = 0$  ou grau de  $r(x) < 1$ . Assim,  $r(x)$  é um polinômio constante, ou seja,  $r(x) = r$ , onde  $r \in \mathbb{R}$  e portanto

$$f(\beta) = q(\beta)(\beta - \beta) + r = r$$

combinado este fato com  $f(\beta) = 0$ , obtemos

$$f(\beta) = r = 0,$$

logo  $x - \beta$  divide  $f(x)$ . Para provar recíproca, suponhamos que  $x - \beta$  divide  $f(x)$ .

então, existe que  $q(x) \in \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = q(x)(x - \beta)$ , com isso,

$$f(\beta) = q(\beta)(\beta - \beta) = q(\beta) \cdot 0 = 0$$

logo  $x - \beta$  divide  $f(x)$ . ■

O algoritmo de Briot-Ruffini consiste na elaboração de uma tabela para calcular os coeficientes de  $q(x)$  e o resto  $r$ , usando uma fórmula recursiva. A tabela é constituída por duas linhas. Colocando na primeira linha o valor que se queira testar como raiz, no caso  $\beta$ , seguido dos coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  e  $a_0$  do dividendo  $f(x)$ , e, na segunda linha, o valor inicial  $q_{n-1} = a_n$ .

$$\begin{array}{r|rrrrr} \beta & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n = q_{n-1} & & & & \end{array}$$

Inicialmente multiplicando  $\beta$  por  $a_n$  e somando com  $a_{n-1}$ , resultando no próximo cociente, obtendo  $\beta a_n + a_{n-1} = q_{n-2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \beta & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n = q_{n-1} & q_{n-2} & & & \end{array}$$

Dando continuidade nos processos, até chegar em,

$$\begin{array}{r|rrrrr} \beta & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n = q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots & q_0 & |r \end{array}$$

Tabela A.1: Algoritmo de Briot-Ruffini

Note que os coeficientes  $q_{n-1}, \dots, q_0$  estão separados do resto  $r$ , pois é conveniente separar os quocientes do resto.

Veja algumas exemplos da utilização do algoritmo de Briot-Ruffini .

**Exemplo A.1.1.** *Determine o quociente e o resto da divisão de  $n(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$  por  $x + 2$  e  $x - 2$ , mostre que somente um deles é raiz.*

*Inicialmente faremos a divisão de  $f(x)$  por  $x + 2$ . Note que nesse caso,  $\beta = -2$ , pois,  $x - \beta = x - (-2)$ . Usando o algoritmo A.1.*

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 7 & 17 & 17 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 3 & |0 \end{array}$$

*Logo,  $-2$  é raiz de  $n(x)$ ,  $r = 0$  o quociente  $q(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$  e escrevendo  $n(x) = (x^3 + 5x^2 + 7x + 3)(x + 2)$ . Resolvendo para  $x - 2$ ,  $\beta = 2$ , no algoritmo ficará*

*logo,  $2$  não é raiz de  $n(x)$ , pois  $r = 180$  o quociente  $q(x) = x^3 + 9x^2 + 35x + 87$  e escrevendo  $n(x) = (x^3 + 9x^2 + 35x + 87)(x + 2) + 180$ .*

2	1	7	17	17	6
	1	9	35	87	180

**Observação A.1.1.** Utilizando de uma única tabela para verificar se os  $\beta_n$  são raízes de  $f(x)$  de grau  $n$ , para isso, basta dar continuidade nas operações na tabela da verificação de  $\beta_1$ , para o próximo valor  $\beta_2$  a linha a baixo dos coeficientes será para os novos coeficientes da próxima operação por  $\beta_2$ , caso tenha raiz dupla, iniciar a análise da raiz dupla  $\beta_1 = \beta_2$ .

Tabela A.2: Dispositivo de Briot Ruffini

$\beta_1$	$a_n$	$a_{n-1}$	$\cdots$	$a_1$	$a_0$
$\beta_2$	Coeficientes $q_{n-1}(x)$	$a_n = q_{n-1}$	$\cdots$		$r_1$
$\beta_3$	Coeficientes $q_{n-2}(x)$	$\cdots$			$r_2$
$\vdots$	$\vdots$				
$\beta_{n-1}$	Coeficientes $q_2(x)$	$\cdots$			$r_{n-2}$
$\beta_n$	Coeficientes $q_1(x)$				$r_{n-1}$
	$a_n$				$r_n$

Fonte:Autor, baseado em [\[4\]](#).

Note como repeti-se o coeficiente líder de todos os  $q_{n-1}$ , logo os coeficientes líderes desses  $q_{n-1}$ , serão  $a_n$ .

Caso os restos sejam iguais a zero, ou seja,  $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ , temos que os  $\beta_n$  são todos raízes de  $f(x)$ , podemos escrever a  $f(x)$  como um produtório a seguir,

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \beta_i)$$

Diz-se que  $\beta$  é raiz de *multiplicidade* quando  $(x - \beta)^m$  divide  $f(x)$  e  $(x - \beta)^{m+1}$  não divide  $f(x)$ . Nesse caso podemos escrever a  $f(x)$  como,

$$f(x) = (x - \beta)^m q(x), \text{ com } q(\beta) \neq 0.$$

**Exemplo A.1.2.** Determine as raízes da equação  $x^5 + 2x^4 - 42x^3 - 8x^2 + 257x - 210 = 0$ .

Identificado os coeficientes, basta formular a tabela adicionando os coeficientes e as possíveis raízes. Utilizando os valores 1,-1,2,-3,5 e -7 para verificar se são as raízes.

Note que -1 não é raiz, pois o resto foi 216.

1	1	2	-42	-8	257	-210
-1	1	3	-39	-47	210	0
	1	2	-41	-6		216
2	1	3	-39	-47	210	0
-3	1	5	-29	-105		0
5	1	2	-35		0	
-7	1	7		0		
	1		0			

Este dispositivo(algoritmo de Briot-Ruffini) possibilita, além de uma análise de possíveis raízes, reduzir o grau do polinômio, com isso, pode-se reduzir um polinômio de grau  $n$  para o grau  $a$  que se queira trabalhar.

**Definição A.1.2.** *Seja a função  $f(x)$  com grau  $n$  e raízes  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , pode se escrever a  $f$  como*

$$f(x) = (x - \beta_n)(x - \beta_{n-1}) \cdots (x - \beta_{m+1})q(x),$$

sendo,  $q(x)$  a função com raízes  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  e grau  $m$ , com  $n > m$ .

Com isso, veja o exemplo a seguir.

**Exemplo A.1.3.** *Determine, caso exista, raízes da  $f(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$  contidas no intervalo  $]0, 10[$ . sabendo-se que  $-2$  e  $-3$  são raízes.*

*Como  $-2$  e  $-3$  são raízes já determinadas; usando o dispositivo de Ruffini para determinar a função  $q(x)$ , tem-se:*

-2	1	0	-15	-10	24
-3	1	-2	-11	12	0
	1	-5	4		0

Assim, de acordo com a Definição [A.1.2](#), pode-se escrever a  $f$ , como

$$f(x) = (x + 2)(x + 3)q(x),$$

e como  $q(x) = x^2 - 5x + 4$ , basta analisar  $q(x) = 0$  se  $x \in ]0, 10[$ .

Para  $x^2 - 5x + 4 = 0$ , utilizando a equação da fórmula resolutive [2.1](#) e substituindo os coeficientes, tem-se

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9,$$

assim

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$$

Portanto,  $x_1 = 4$  e  $x_2 = 1$ . Logo a solução para os valores de  $x \in ]0, 10[$  é  $4$  e  $1$ , pois, estão inseridos neste intervalo.

**Exemplo A.1.4.** (ITA 2011) Com respeito à equação polinomial  $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$  é correto afirmar que

- (a) Todas as raízes estão em  $\mathbb{Q}$ .
- (b) Uma única raiz está em  $\mathbb{Z}$  e as demais estão em  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .
- (c) Duas raízes estão em  $\mathbb{Q}$  e as demais têm parte imaginária não-nula.
- (d) Não é divisível por  $2x - 1$ .
- (e) Uma única raiz está em  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  e pelos menos uma das demais está em  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Calculando as soluções da equação pelo dispositivo de Briot Ruffini A.2

1	2	-3	-3	6	-2
-3	2	-1	-4	2	0
	2	-7	17	-49	
$\frac{1}{2}$	2	-1	-4	2	
	2	0	-4	0	

Logo,  $(x - 1)(2x - 1)(2x^2 - 4) = 0$ , assim, resta encontrar as soluções para  $2x^2 - 4 = 0$  que é

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

Assim eliminando as alternativas (a), (b), o item (c), pois não possui raiz imaginária e o item (d), pois, como  $\frac{1}{2}$  é solução pode-se escrever a equação como  $(x - 1)(2x - 1)(2x^2 - 4) = 0$ , assim a equação é divisível por  $2x - 1$ . Possui duas raízes racionais e duas em  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Portanto, alternativa correta letra e.