Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Emmanoel Campello da Luz

O Uso do Google Earth e do GeoGebra no Ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI.

Teresina

2023

Emmanoel Campello da Luz

O Uso do Google Earth e do GeoGebra no Ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI.

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Natã Firmino Santana Rocha
Coorientador: Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Teresina
2023

L979u Luz, Emmanoel Campello da.
O uso do Google Earth e do GeoGebra no ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI / Emmanoel Campello da Luz. – 2023.
81 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2023.
“Orientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha.”
“Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima.”

1.Geometria. 2. Distâncias. 3. Circunferências. 4. Softwares. 5. Matemática – Ensino. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB 3ª Região/1188

EMMANOEL CAMPELLO DA LUZ

O Uso do Google Earth e do GeoGebra no ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: MATEMÁTICA

Aprovado por:

Natã Firmino Santana Rocha

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - Presidente
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima – Co-orientador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Pedro Antônio Soares Júnior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí - UFPI

TERESINA
Novembro/2023

Emmanoel Campello da Luz graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI) no ano de 2006, no ano de 2021 concluiu Especialização em Ensino de Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Piauí (IFPI). É professor efetivo da rede pública estadual do Piauí.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, inicialmente a meus pais, Manoel Campelo da Luz, Seu Daluz(*in memorian*) e Bendita Maria dos Santos Campelo, Dona Dita, por sempre acreditarem em meus projetos. A minha esposa Kelly Regina por sempre me apoiar, me incentivar a estudar e a aprender cada dia mais e a meus filhos queridos, Emmanoel Filho e Arthur Campello pelo amor na presença e paciência na ausência durante os momentos que tive que me afastar para estudar. Sem vocês nada disto faria sentido. Amo todos vocês do tamanho do Universo!

AGRADECIMENTOS

O que fazemos pela força do nosso braço é colhido na medida em que plantamos, mas quando confiamos em Deus, as benções são maiores do que imaginamos. Agradeço a Deus por esta conquista, razão pela qual, peço sabedoria para saber honrá-lo na mesma medida.

Agradeço a minha Mãe, Dona Dita, que sempre me mandou estudar para ser alguém na vida e buscar vencer pelos estudos. E meu Pai, Seu Da luz, obrigado por sempre me colocar no caminho certo, só me arrependo de não ter lhe escutado mais cedo, quando mandava eu estudar mais. Sou grato por todo o sacrifício e dedicação que tiveram por mim, sou testemunha de tudo que abriram mão na vida para que eu tivesse a oportunidade de estudar em uma boa escola durante a educação básica. Tenho muito orgulho da nossa história. Muito obrigado por tudo, AMO MUITO VOCÊS!

Agradeço também a minha esposa Kelly Regina que há mais de 20 anos me incentiva a estudar, a me superar e buscar a cada dia ser uma profissional melhor, obrigado minha querida, TE AMO MUITO! Obrigado pelos filhos queridos Emmanoel Filho e Arthur Campello, sei que em alguns momentos estou ausente, contudo, sem sacrifico não há vitória, esse trabalho também é pra vocês. E já já será a vez de vocês! AMO MUITO TODOS VOCÊS!

Agradeço ao meu amigo, meu padrinho, meu eterno professor Delon Barros, por ter me ajudado e me orientado como meu professor no ensino médio, por ter me influenciado a iniciar na docência e por todos os conselhos que até hoje são importantes na minha vida, como também é aluno do PROFMAT, já já é a sua vez. Muito obrigado por tudo meu amigo!

A todos os meus amigos do mestrado profissional do PROFMAT/UESPI 2021, Andressa, Cláudio, Carlos Bezerra, Douglas, Elder, Francílio, Jackson, Jerlane, Marcelo, Marcos, Milton, Maria Deusiane e Welton pelos estudos em grupo presenciais e on-line que foram de grande importância durante o curso.

Aos professores, Dr. Arnaldo Brito, Dr. Afonso Norberto, Dr. Pedro Júnior, Dr. Natã Firmino, Dr. Pitágoras Pinheiro, Dr. Neuton Alves, Dra. Valdirene e Dra. Lilane de Araújo, por compartilharem conosco seus conhecimento e suas experiências. Obrigado professores.

Aos meus orientadores Dr. Natã Firmino Santana Rocha e Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima, que por inúmeras vezes, discutimos sobre um tema interessante e relevante na geometria que poderia ser aplicado com os alunos do ensino médio. Obrigado pela paciência e por compartilhar comigo seus conhecimentos acadêmicos, pelos esclarecimentos das dúvidas e pelas orientações do trabalho. Obrigado Professores.

Agradeço ainda aos meus professores do curso de Especialização no Instituto Federal do Piauí(IFPI) Me. Paulo Aírton Cordeiro de Souza e Me. Jonathan Lavor da Costa, egressos do PROFMAT, pelo compartilhamento de conhecimento, pela amizade e pelos incentivos a continuar estudando. Obrigado professores.

Por fim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuíram de forma positiva para a realização deste mestrado, minha sincera gratidão!

“A essência da Matemática reside na sua liberdade. ”

George Cantor

RESUMO

Esta dissertação é fruto da pesquisa de campo realizada sobre O Uso do Google Earth e o GeoGebra no ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana que teve como público alvo os alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI. Na sua execução foi associada as teorias matemáticas da geometria e as funcionalidades dos softwares Google Earth e GeoGebra. O objetivo foi criar situações problemas em sala de aula e visualizar a sua resolução nos softwares. A introdução traz um breve contexto histórico dos postulados de Euclides e da tentativa de matemáticos como Gauss, Bolyai, Lobachevsky, Reimann e Hermann Minkowski que esfossaram-se para demostrar o V postulado a partir dos quatro primeiros porém não obtiveram sucesso. Contudo, estes estudos serviram de base para a criação das geometrias não euclidianas como a geometria hiperbólica, esférica e do táxi. Em seguida, são vistas as noções básicas de métrica e espaços métricos, métrica da geometria euclidiana e da geometria do táxi, a relação entre o cálculo das distâncias entre dois pontos, a construção das circunferências e a determinação do π nestas geometrias. A pesquisa de campo foi iniciada com a avaliação diagnóstica, esta buscou verificar o conhecimento prévio que os alunos possuíam sobre o tema. Em seguida foi realizada a análise das suas respostas, elemento fundamental para a construção dos planos de aula e a estrutura da execução das atividades. Os alunos utilizaram os software Google Earth e GeoGebra para comprovar e verificar todas as construções realizadas em sala de aula.

Palavras-chave: Geometria; Distâncias; Circunferências; Softwares; Ensino; Matemática.

ABSTRACT

This dissertation is the result of field research carried out on the use of Google Earth and GeoGebra in teaching Taxi Geometry and Euclidean Geometry, which targeted students in the 3rd year of public high school in Teresina-PI. In its execution, mathematical theories of geometry and the functionalities of Google Earth and GeoGebra software were associated. The objective was to create problem situations in the classroom and visualize their resolution in the software. The introduction provides a brief historical context of Euclid's postulates and the attempts of mathematicians such as Gauss, Bolyai, Lobachevsky, Reimann and Hermann Minkowski who tried hard to demonstrate the V postulated from the first four but were unsuccessful. However, these studies served as the basis for the creation of non-Euclidean geometries such as hyperbolic, spherical and taxi geometry. Next, the basic notions of metrics and metric spaces, metrics of Euclidean geometry and taxi geometry, the relationship between the calculation of distances between two points, the construction of circles and the determination of π in these geometries are discussed. The field research began with the diagnostic assessment, which sought to verify the students' prior knowledge on the topic. Their responses were then analyzed, a fundamental element for the construction of lesson plans and the structure for carrying out the activities. The students used Google Earth and GeoGebra software to check and verify all constructions carried out in the classroom.

Keywords: Geometry; Distances; circles; Softwares; Teaching; Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Nas aulas de matemática no ensino fundamental e médio os alunos se deparam com conteúdos que inicialmente podem ser considerados como difíceis ou complicados. Porém, todos os assuntos podem e devem ser contextualizados pelos professores. Esse fato, já faz com que os alunos vejam a matéria de uma forma mais atrativa, deixado de lado o temor pela disciplina e o pensamento de autossabotagem que alguns alunos desenvolvem acreditando que aprender matemática é uma tarefa difícil.

A contextualização dos conteúdos, tem por objetivo, levar os alunos a pensar como esses assuntos podem ser vivenciados no cotidiano de cada um. Essa dinâmica de ensino tem como fundamento principal passar o conteúdo matemático juntamente com estratégias que façam do aluno um protagonista na construção do conhecimento e não um mero espectador. A matéria não pode mais ser simplesmente lançada como se todos compreendessem da mesma forma, pois cada aluno tem sua singularidade na análise, interpretação e compreensão dos conteúdos.

Para Valente o desafio de buscar meios que incentivem o aluno pertence ao professor,

> Caberá ao professor saber desempenhar um papel de desafiador, mantendo vivo o interesse do aluno, e incentivando relações sociais, de modo que os alunos possam aprender uns com os outros e saber como trabalhar em grupo. Além disso, o professor deverá servir como modelo de aprendiz e ter um profundo conhecimento dos pressupostos teóricos que embasam os processos de construção do conhecimento e das tecnologias que podem facilitar esses processos.(VALENTE. 1999, p. 43 - 44)

No projeto foi estudada uma Geometria que é aplicada nas ruas, mostrando como o caminho que as pessoas fazem no seu dia-a-dia por meio dos percursos urbanos caracterizam a geometria do táxi, que também é conhecida como a distância de Manhattan tendo, em vista a arquitetura da cidade.

Durante o projeto foi realizado um paralelo entre a geometria do táxi e a euclidiana, para isso foram utilizadas as ferramentas do Google Earth para extrair mapas, fotos aéreas de bairro com o objetivo de localizar pontos determinados e calcular suas distâncias. Também foi utilizado o GeoGebra com o objetivo de mostrar aos alunos na prática uma visualização das construções e dos cálculos geométricas praticados em sala.

Para trabalhar com geometria é importante conhecer seu o significado. Segundo o Mundo Educação(2023), a palavra Geometria possui origem grega que significa: "geo", terra, e "metria", que vem da palavra "métron" e significa medir, de forma geral media a terra. Desta forma podemos entender a Geometria como uma ciência que se dedica a estudar as medidas das formas de figuras planas ou espaciais, bem como sobre a posição relativa das figuras no espaço e suas propriedades.

A Geometria estudada no ensino básico de forma mais comum é a euclidiana, fundamentada pelos ensinamentos de Euclides conforme seus axiomas e postulados ao qual seu método de pesquisa será detalhado a seguir.

> O método utilizado por Euclides baseou-se na utilização de cadeias dedutivas, que obtém novos elementos a partir de outros anteriores. Entretanto, uma vez que não se pode retroceder indefinidamente em busca de elementos anteriores, há um momento em que se devem estabelecer os que serão os princípios fundamentais da teoria. Para Euclides, esses princípios têm o nome de postulados e noções comuns (ou axiomas). (UOL EDUCAÇÃO, 2023)

Contudo, esta não é a única geometria existente ou aquela que possui resposta para todos os problemas geométricos. Existem outras que não se apoiaram em todos os ensinamentos de Euclides, por esta razão recebem o nome de geometrias não euclidianas.

As geometrias não euclidianas são aquela que não utilizaram o V postulado de Euclides na formulação das suas definições. Além disso, não acreditam que o V postulado seja sempre verdadeiro ou ainda que possa ser provado a partir dos 04 primeiros. Alguns matemáticos como Lobachevski (1792-1856), Bolyai (1802-1860), Gauss (1777-1855) e Riemann (1826-1866) se debruçaram nesta tentativa, porém não conseguiram demostrá-lo. Contudo seus resultados foram fundamentais para o desenvolvimento de outras geometrias, como a hiperbólica, a esférica a elíptica e a do táxi que é o objeto deste trabalho.

A título de exemplo, na geometria Hiperbólica também chamada de geometria lobachevskiana ou geometria de Bolyai - Lobachevsky, o quinto postulado Euclidiano não é satisfeito, ou seja, o postulado das paralelas da geometria euclidiana é substituído pelo postulado de Lobachesvky que assim se transcreve segundo a Enciclopédia Viva(2023): "por um ponto fora de uma reta dada passa mais de uma paralela a essa reta."

Como já citado, a geometria não-euclidiana estudada nesta pesquisa foi a Geometria do Táxi, também conhecida como Distância de Manhattan ou "City Block" este nome surgiu em alusão ao formato quadriculado da maior parte das ruas da ilha de Manhattan. No decorrer do trabalho também foi explicado porque esta geometria faz parte do rol das geometrias não-euclidianas.

Nesta geometria a forma de calcular as distâncias é diferente da euclidiana. Na Geometria do táxi, a distância entre dois pontos é calculada pela soma das diferenças absolutas de suas coordenada, uma definição simples de ser deduzida uma vez que os percursos serão somas de comprimentos calculados em linha reta.

Um Fato que torna esta geometria interessante de ser trabalhada em sala é que os alunos conseguem entender com certa facilidade as definições do tema, uma vez que se imaginam percorrendo as ruas e os quarteirões entre um ponto e o outro.

A escolha do tema teve como fundamento mostrar aos alunos que existem mais de uma geometria conhecida. E que a geometria do táxi também faz parte do cotidiano deles. Fato que foi visto em sala utilizando as ferramentas do Google Earth, onde os alunos construíram no mapa oferecido pelo software a menor distância euclidiana entre as duas unidades da escola, a Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz e a Fundação Nossa Senhora da Paz, em seguida construíram percursos entre as escolas e dentre eles qual seria o menor.

Antes de iniciar o tema sobre a geometria do táxi foram revisadas as noções de métrica e espaços métricos, a teoria do valor absoluto, a desigualdade triangular com suas demostrações. A revisão destes conteúdos foi necessário para a formação teórica que fundamentou os demais conteúdos.

Após o estudo da métrica, foi visto a métrica da geometria euclidiana em paralelo com a métrica da geometria do táxi. Além disso, foi realizada a análise da distância entre dois pontos, a construção da circunferência e a determinação do π nas duas geometrias. Em seguida ocorreu a comparação dos valores encontrados nas distâncias d_e e a d_t.

Para estes cálculos e suas verificações foram utilizados o Google Earth e o GeoGebra. Por meio deles, foi possível a visualização das construções e dos valores relacionados as distâncias entre dos pontos e as circunferências nas geometrias estudadas.

As atividades realizadas pelos alunos foram divididas em etapas. A primeira etapa foi dividida em duas partes, inicialmente eles marcaram a menor distância entre as escolas. Em seguida, foi questionado como eles fariam este percurso. Esta pergunta causou um grande debate, uma vez que a maioria afirmou que jamais tinham pensando sobre essa resposta.

A segunda parte, foi a busca de um percurso onde eles conseguiriam se deslocar pelas ruas do bairro Vida da Paz em Teresina-PI, saindo da Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz em direção a Fundação Nossa Senhora da Paz. Na segunda atividade proposta os alunos deveriam construir o menor percurso possível entre suas casas e a escola, neste momento eles já interagiram com mais tranquilidade e objetividade uma vez que já tinham entendido o que deveriam fazer.

Ademais, por meio do GeoGebra foi verificado o valor das distâncias entre dois pontos na geometria euclidiana e na geometria do táxi, cálculos que tinham sido calculados em sala. Outra funcionalidade explorada no GeoGebra foi a representação das duas circunferências sob o mesmo plano cartesiano, essa estratégia foi de grande importância na visualização dos alunos sob a análise de lugar geométrico nas duas geometrias.

O GeoGebra também foi importante na verificação do formato da circunferência do táxi. Os alunos identificaram pontos equidistantes ao centro e comprovaram, pela definição de circunferência, que este lugar geométrico na geometria do táxi é um quadrado.

Por fim, foi utilizado ainda o GeoGebra para auxiliar a comprovação do valor do π na circunferência do táxi. OS alunos sabiam que ele é obtido por meio da razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. Contudo, o questionamento feito inicialmente era como determinar o comprimento da circunferência e o diâmetro de um quadrado?

Porém, foi demonstrado a relação existente entre o perímetro e a diagonal. Na geometria do táxi estes equivalem respectivamente ao comprimento da circunferência e o diâmetro. Comprovando assim que o π possui um valor maior na geometria do táxi do que na geometria euclidiana.

Na fase final da pesquisa, foi aplicada a verificação de aprendizagem, em seguida ocorreu a fase de analise das respostas dos alunos. A partir disso foram construídos os resultados da pesquisa que avaliaram as notas dos alunos antes e depois do participação deles no projeto.

A dissertação foi assim dividida: o Capítulo 2 possui 05 seções, onde foram abordadas a origem da Geometria do Táxi, noções básicas de métrica, além da análise das distâncias entre dois pontos, construção da circunferência e a determinação do π nas duas geometrias. O Capítulo 3 possui 07 seções que trazem as informações sobre os componentes da pesquisa. Inicialmente, houve a descrição do público da pesquisa e as avaliações que foram realizadas. Em sequência é discutido a importância da utilização do Google Earth e do GeoGebra no ensino e aprendizagem dos alunos nos cálculos da distância, na construção da circunferência e na determinação do π. Por fim, foram analisadas as respostas dos alunos na verificação de aprendizagem. O capítulo 04 culmina com as considerações finais.

2 A Geometria do Táxi

A evolução da Geometria que conhecemos hoje se fundamentou no trabalho que Euclides realizou ao compilar seus estudos na obra Elementos[1], uma obra composta por 13 livros sendo que no livro I, classificado por muitos estudiosos como o mais importante entre os livros, ele relacionou 35 definições, 5 postulados e 12 axiomas.

> Contrariamente à impressão muito difundida, os Elementos de Euclides não tratam apenas de geometria — contêm também bastante teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de 465 proposições distribuídas em 13 livros. Os textos de geometria plana e espacial da escola secundária americana trazem basicamente o material que se encontra nos Livros I, III, IV, VI, XI e XII dos Elementos.(EVES, 2011, Pág. 169)

Não existe um consenso sobre o objetivo de Euclides ao escrever a obra Elementos, mas no decorrer dos séculos seus ensinamentos foram difundidos e utilizados por todo o mundo como base para o ensino de geometria e da álgebra além de ser base para o desenvolvimento de outros trabalhos matemáticos.

> Não sabemos se Euclides escreveu os Elementos para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos; e os Elementos foram muito usados no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios. No século XIX já havia outros livros de Geometria, didaticamente mais adequados ao ensino, notadamente o livro de Legendre, que teve muitas edições em várias línguas, inclusive o português. Esse livro foi muito usado nas escolas brasileiras por quase todo o século XIX (BONGIOVANNI; JAHN, 2010, p3)

Segundo Pina (2000, pág. 101), Euclides utilizou os 04 primeiros postulados para provar as primeiras 28 proposições e somente a partir da 29ª foi utilizado o V postulado para provar os demais. Por esta razão grandes matemáticos como Gauss, Bolyai, Lobachevsky, Reimann e Hermann Minkowski esfossaram-se para demostrar o V postulado a partir dos quatro primeiros mas não obtiveram sucesso, contudo os resultados obtidos serviram de suporte para desenvolverem de outras geometrias não euclidianas como a geometria hiperbólica, esférica e a geometria do táxi, tema do presente estudo.

Nesse contexto, Leivas (2013) confirma o entendimento anterior.

[1] Os Elementos é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escritos pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.. Ele engloba uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições. (A Enciclopédia Viva, 2023)

> (...) matemáticos do século XIX perceberam que esse postulado era independente dos quatro primeiros e que havia sistemas geométricos em que ele, da forma como enunciado por Euclides, não se coadunava, sendo substituído por outro, o qual possibilitava criar um sistema geométrico consistente e perfeitamente compatível. Isso fazia parte da denominada crise dos Fundamentos da Matemática, pois a concepção de mundo não era mais a euclidiana. LEIVAS (2013, p. 648)

Para Viana (Folha de São Paulo, 2018), a crise dos fundamentos da matemática levanta a discussão da importância na utilização do método axiomático na antiguidade, pois a partir deles, demais afirmações da geometria plana foram deduzidos e demostrados, esse pensamento mostrava que axiomas não são verdadeiros ou falsos, mas em algum sentido físico, são apenas pontos de partida convenientes para desenvolver a teoria matemática.

Prova disto, foi a abertura da evolução matemática com a discussão da comprovação do V postulado, lembrando que um postulado não deve ser provado para ser aceito, até porque pela sua definição, um postulado é uma proposição aceita sem a necessidade de sua demostração.

> [...] alguns matemáticos como Lobachevski (1792-1856), Bolyai (1802-1860), Gauss (1777-1855) e Riemann (1826-1866) obtiveram grande destaque no desenvolvimento das Geometrias não euclidianas, mesmo recebendo críticas, por seus pares. Os motivos que levaram esses grandes matemáticos a iniciar um trabalho nesta área foi o fato de não considerarem o quinto postulado de Euclides como verdade absoluta. (FERNANDES, 2017, p. 22).

E assim confirma-se a máxima de Cantor quando afirma que a "essência da matemática reside na sua liberdade", somente quando questionamos algo abrimos a oportunidade para sua evolução.

Na sequência foi estudada a origem da geometria do táxi criada por Hermann Minkowski, as definições básicas de métrica e espaços métricos, finalizando o capitulo com o comparativo entre as métricas euclidiana e a do táxi.

2.1 Origem da Geometria do Táxi

A origem da Geometria do Táxi, assim como das demais geometrias não-euclidianas, tem como fundamento principal a busca pela demonstração do V postulado de Euclides. No passar dos séculos não houve controvérsia na aceitação dos quatro primeiros postulados descritos por Euclides em sua obra os Elementos, contudo o postulado das paralelas foi por muito tempo um assunto que provocou discórdia entre os matemáticos.

Segundo Pina (2000, pág. 102), os 05 postulados foram adaptados para uma melhor compressão e descritos na forma que Euclides utilizou nas demostrações. "As alterações realizadas entre parênteses representam a forma na qual Euclides realmente os utilizou nas provas dos teoremas".

> i) Pode-se traçar uma (única) reta (segmento) por quaisquer dois pontos;
> ii) Pode-se continuar (de modo único) uma reta infinitamente;
> iii) Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio;
> iv) Todos os ângulos retos são iguais;
> v) Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos. (PINA, 2000)

Como dito anteriormente, o V postulado foi aquele que mais causou discórdia entre os matemáticos ao longo do tempo, pois muitos acreditam ser um teorema, e desta forma, poderia ser provado a partir dos quatro primeiros. E desta tentativa de prová-lo, construíram-se novas geometrias, onde apenas os quatros primeiros postulados de Euclides são aceitos.

> O quinto postulado do livro I (a relação entre "axiomas e postulados" não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado "axioma das paralelas", de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta dada e uma só. As tentativas de reduzir esse axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adaptá-lo como um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas (STRUIK, 1989, p.92)

Ainda sobre o tema é importante citar o mito de Euclides, que afirmava em meados do século XIX que toda sua produção era uma verdade inquestionável.

> O mito de Euclides é a crença de que os livros de Euclides têm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega a conhecimento certo, objetivo e eterno. Mesmo agora parece que a maior parte das pessoas com instrução acredita no mito de Euclides. Até o meio ou fim do século dezenove, o mito reinava sem desafios. (DAVIS E HERSH, 1985, P.366).

Contudo, os questionamentos feitos pelos matemáticos aos postulados euclidianos ocasionaram uma evolução do conceito de geometria existente há época, passando agora a se aceitar outras geometrias, por exemplo, Hiperbólica, elíptica, esférica, do táxi, dentre outras.

A Geometria do Táxi possui outras nomenclaturas como Geometria do Percurso ou de Distância de Manhatan, mas todas se baseiam no mesmo fundamento de sua métrica. Tendo como fundamento, o deslocamento do taxista durante uma corrida de um ponto a outro de uma cidade, dificilmente ele chegará ao seu percurso em linha reta. A menos que não faça nenhuma curva e os pontos de origem e chegada estejam na mesma rua ou avenida.

> [...] é uma forma de geometria em que a usual métrica da geometria euclidiana é substituída por uma nova métrica em que a distância entre dois pontos é a soma das diferenças absolutas de suas coordenadas. A métrica do táxi é também conhecida como distância L1, ou distância de Manhattan, com variações correspondentes no nome da geometria. O último nome faz alusão ao formato quadriculado da maior parte das ruas na ilha de Manhattan. Tal configuração faz com que a menor distância a ser percorrida por um carro que vai de um ponto a outro na cidade tenha como valor aquele número fornecido pela métrica L1 (WIKIPÉDIA, 2023) [25]

É sabido que para calcularmos a menor distância euclidiana entre dois pontos bastaria seguir uma linha reta, contudo na maioria dos casos não é possível aplicar essa relação e calcular essa menor distância por conta de obstáculos intransponíveis entre esses pontos como casas e prédios.

Caso os pontos estejam em regiões abertas seria possível traçar essa linha reta, mas tratando-se de uma cidade tal tarefa não seria possível tendo em vista as casas, prédios e quarteirões esses são exemplos dos obstáculos citados anteriormente.

O matemático e físico alemão Hermann Minkowski (1864-1909) desenvolveu esta geometria por meio de estudos sobre topologia, sendo o responsável pelo surgimento da geometria do táxi que teve grande influência nas descobertas de seu aluno Albert Einstein.

Para Noronha (2006, p. 26), essa geometria só foi apresentada pela primeira vez, por Karl Menger(1902-1985) no ano de 1952 durante uma exposição no museu de ciência de Chicago, em um trabalho intitulado You Will Like Geometry (Você vai gostar de Geometria) e foi nessa apresentação que ela ficou conhecida como "taxicab geometry" ou seja, foi quando se usou o termo Geometria do Táxi pela primeira vez.

2.1.1 Por que a Geometria do Táxi é uma Geometria Não Euclidiana?

Até aqui foi afirmado que a geometria do táxi faz parte de uma das geometrias não euclidianas. Estas são caracterizadas por não aceitarem o V postulado de Euclides, conhecido como postulado das paralelas.

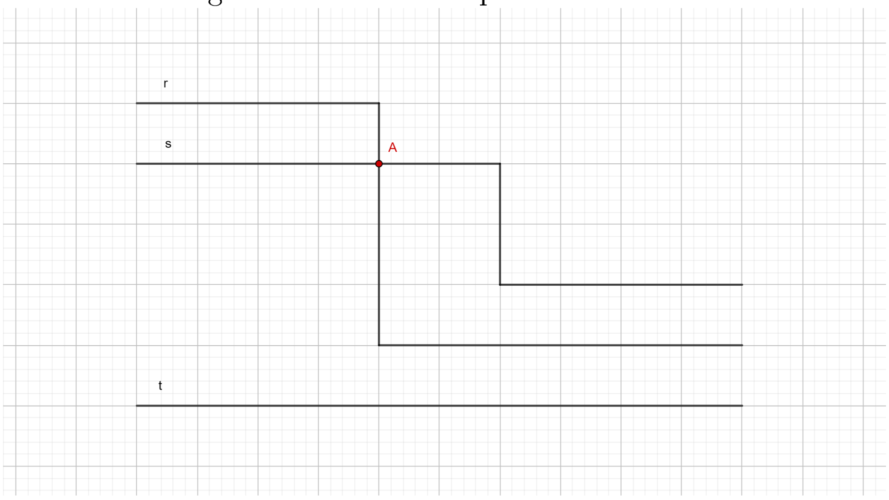
Desta forma, foi analisado o entendimento deste postulado na geometria do táxi. Para isso é necessário lembrar que na geometria euclidiana, a reta é um conceito primitivo, sua definição é aceita como um conjunto formado por infinitos pontos.

Na Geometria do Táxi a reta se apresenta com formato diferente, podendo ou não coincidir com a reta da geometria euclidiana, pois se assemelha aos percursos de um táxi durante uma corrida.

> a reta é a união de viagens diretas, ou seja é uma viagem estendida, no sentido de que se considera sempre o caminho mais curto entre 2 pontos quaisquer dessa viagem. (ABREU; BARROSO; MIRANDA, 2005)

Percebe-se que as representações de retas são diferentes nas duas geometrias, razão pela qual o V postulado não se confirma na geometria do táxi. Observe na Figura 1 que as retas r e s se comportam como retas paralelas em relação a reta t, pois não possuem pontos comuns com t.

Figura 1: Retas r e s paralelas a reta t



Fonte: <Do próprio autor>

Além disso as retas r e s possuem um ponto de intersecção A, ou seja, possuem um ponto em comum, desta forma contraria o V postulado, pois este afirma que por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela a ela. E no exemplo dado existem duas retas paralelas a reta t que passam pelo mesmo ponto A.

2.2 Noções Básicas de Métrica

A partir deste ponto será abordado noções de métrica, o estudo inciará pelas definições de métrica e de espaço métrico seguindo pela demostração da desigualdade triangular. Essas definições servirão de base teórica para o estudo das métricas da geometria euclidiana e do táxi.

Para a escrita das definições e demostrações a seguir foi utilizado como principal fonte bibliográfica a obra Espaços métricos [15] do autor Elon Lages Lima.

2.2.1 Espaço Métrico

Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

i) $d(x, y) = 0$, se $x = y$; (nulidade)

ii) $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$; (positividade)

iii) $d(x, y) = d(y, x)$; (simetria)

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (desigualdade triangular).

A desigualdade triangular tem origem no fato de que, no plano cartesiano, o comprimento de um dos lado de um triângulo não é maior que a soma dos outros dois.

Definição 2.1. Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto e d uma métrica em M. Usualmente será utilizada a expressão "o espaço métrico M", ficando subentendido qual a métrica d a ser considerada.

A seguir, será apresentado algumas definições e resultados que serão utilizados nos exemplos posteriores.

2.2.2 Valor Absoluto

O valor absoluto de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Geometricamente, $|x|$ é a distância do número real x até a origem. Além disso, segue da definição acima que

$$|xy| = |x| \cdot |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.1 (Desigualdade Triangular)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então,*

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{1}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $ab \geqslant 0$.

Demonstração. Pela definição de valor absoluto, os dois lados da desigualdade são não negativos. Então, se mostrarmos que

$$|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2,$$

teremos o resultado desejado, pois basta extrair a raiz quadrada de ambos os lados que chegamos na desigualdade (1). Temos que

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2 \\ &\leq |a|^2+2|ab|+|b|^2 \\ &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2, \end{aligned}$$

pois $ab \leq |ab|$. No caso em que $ab \geqslant 0$, teremos $ab = |ab|$. Logo ocorrerá a igualdade. Reciprocamente, se ocorrer a igualdade, $|ab| = ab$, então $ab \geqslant 0$. □

Exemplo 2.1. A reta, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um exemplo importante de espaço métrico. Será mostrado que a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $d(x,y) = |x-y|$ é uma métrica no conjunto $\mathbb{R}$, chamada métrica usual da reta. A função d fornece a distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos

i) $d(x,x) = |x-x| = 0$;

ii) $d(x,y) = |x-y| > 0$, se $x \neq y$;

iii) Temos dois casos a considerar:

- se $x \geqslant y$, então $d(x,y) = |x-y| = x-y = -(y-x) = |y-x| = d(y,x)$;
- se $x < y$, então $d(x,y) = |x-y| = -(x-y) = y-x = |y-x| = d(y,x)$.

Portanto, $d(x,y) = d(y,x)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

iv) Observe que

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| \\ &= |x-y+y-z| \\ &\leq |x-y|+|y-z| \\ &= d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

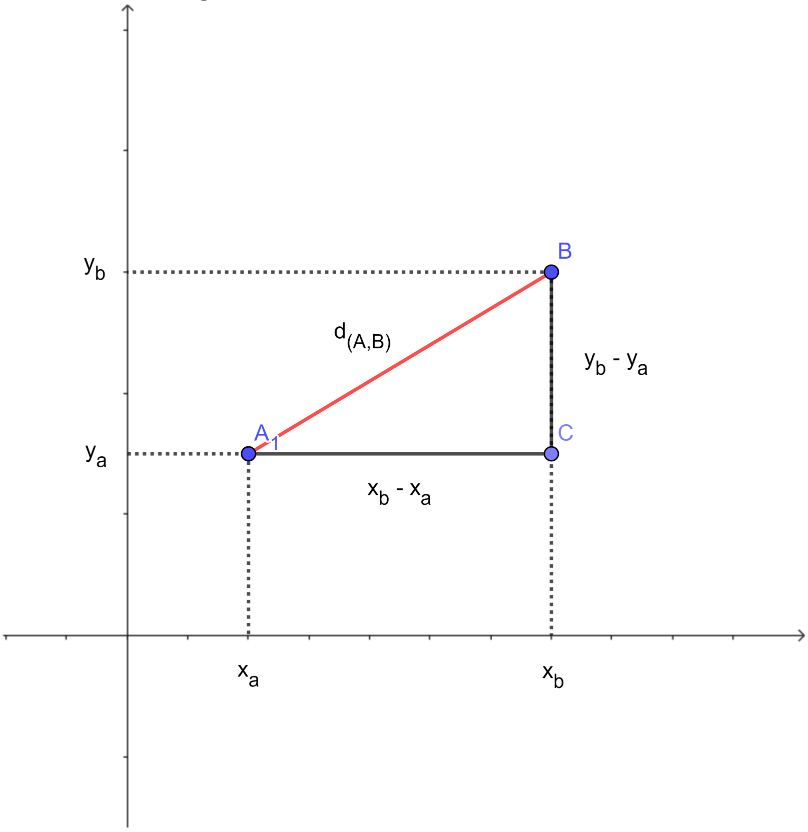
2.3 Métrica da Geometria Euclidiana no Plano

Quando se fala em distância entre dois pontos na geometria euclidiana, visualiza-se a representação dos pontos como pares ordenados no plano cartesiano da forma $P = (x,y)$. Desta forma, considerando dois pontos A e B de coordenadas $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, tem-se que, se os pontos estiverem sob uma linha imaginária paralela aos eixos, será efetuado o módulo da diferença das coordenadas. Contudo, se os pontos pertencerem a uma reta imaginária oblíqua em relação aos eixos, deverá ser calculado a distância aplicando a relação a seguir

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}, \tag{2}$$

Na Figura 2 é possível visualizar uma representação geométrica para esta distância.

Figura 2: Distância de dois pontos



Fonte: <Do próprio autor>

Ademais, será apresentado a demonstração dos itens **i) - iv)** da definição de métrica abordada na seção 2.2.1.

i) Note que, $d_e(A, A) = 0$. De fato, pela definição, temos

$$d_e(A, A) = \sqrt{(x_a - x_a)^2 + (y_a - y_a)^2} = 0.$$

ii) Agora, veja que se $A \neq B$ então $d_e(A, B) > 0$. De fato, tem-se $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo $(x_a - x_b)^2 > 0$ ou $(y_a - y_b)^2 > 0$. Portanto,

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} > 0.$$

iii) Observe que

$$\begin{aligned} d_e(A,B) &= \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \\ &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ &= d_e(B,A). \end{aligned}$$

iv) Por fim, será provado a desigualdade triangular. Inicialmente, note que para quaisquer números reais x, y, z e w temos

$$\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)} \geqslant xz + yw.$$

De fato, infere-se que

$$(xw - yz)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2w^2 - 2xwyz + y^2z^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2w^2 + y^2z^2 \geqslant 2xwyz.$$

Logo,

$$(x^2+y^2)(z^2+w^2) = x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 \geqslant x^2z^2 + 2xwyz + y^2w^2 = (xz+yw)^2.$$

Como os dois membros da desigualdade anterior são positivos, então

$$\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)} \geqslant \sqrt{(xz+yw)^2} = |xz+yw|.$$

Por outro lado, $xz + yw \leq |xz + yw|$. Portanto, $\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)} \geqslant xz + yw$.

Por fim, tome $x = x_a - x_c, y = y_a - y_c, z = x_c - x_b$ e $w = y_c - y_b$, para obter

$$\begin{aligned} [d_e(A,C) + d_e(C,B)]^2 &= (\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+w^2})^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2(\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{z^2+w^2}) + z^2 + w^2 \\ &\geq x^2 + y^2 + 2(xz+yw) + z^2 + w^2 \\ &= (x+z)^2 + (y+w)^2 \\ &= (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 \\ &= [d_e(A,B)]^2. \end{aligned}$$

Portanto, $d_e(A,B) \leq d_e(A,C) + d_e(C,B)$. Com isso, conclui-se que d_e é uma métrica.

2.3.1 Circunferência na Geometria Euclidiana

Defini-se a circunferência como um conjunto de pontos $P = (x, y)$ e centro $O = (o_1, o_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$ por

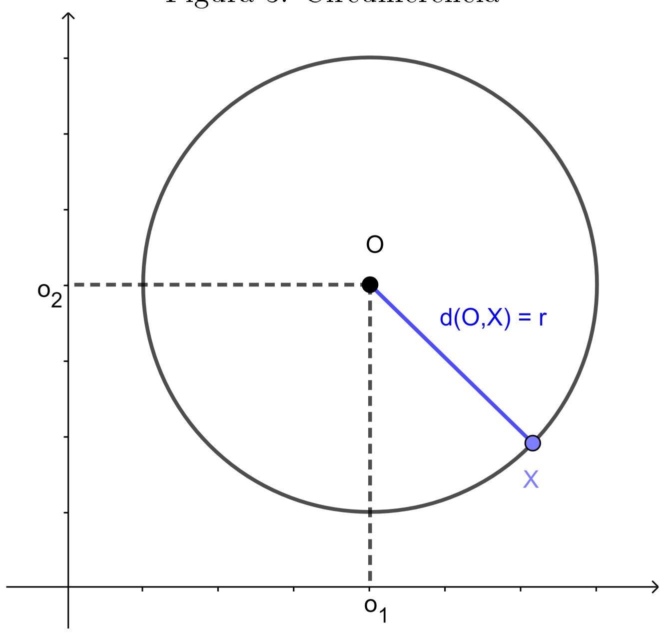
$$C(O, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ d((x, y), (o_1, o_2)) = r\}. \tag{3}$$

Desta forma, pode-se deduzir que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a definição acima obedecem a seguinte equação:

$$d((x, y), (o_1, o_2)) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - o_1)^2 + (y - o_2)^2} = r \Leftrightarrow (x - o_1)^2 + (y - o_2)^2 = r^2.$$

Geometricamente, $(x - o_1)^2 + (y - o_2)^2 = r^2$ representa a circunferência de centro $O = (o_1, o_2)$ e raio r, conforme a Figura 3.

Figura 3: Circunferência



Fonte: <Do próprio autor>

As interpretações geométricas de distância e circunferência também foram analisadas na geometria do táxi, fazendo assim, um comparativo dos conceitos nas duas geometrias.

2.4 Métrica da Geometria do Táxi

A métrica da geometria do táxi, denotada por d_t, representa a distância do percurso feito por um táxi entre dois pontos de uma cidade.

Utilizando os pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, será possível demonstrar que a relação

$$d_t(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|. \tag{4}$$

é uma métrica, pois satisfaz os itens **i) - iv)** da definição vista na seção 2.2.1.

i) Pela definição (4), temos

$$d_t(A, A) = |x_a - x_a| + |y_a - y_a| = 0.$$

ii) Considere $A \neq B$, então $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo, $|x_a - x_b| > 0$ ou $|y_a - y_b| > 0$. Portanto,

$$d_t(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| > 0.$$

iii) Agora, será provado que $d_t(A, B) = d_t(B, A)$. De fato,

$$\begin{aligned} d_t(A, B) &= |x_a - x_b| + |y_a - y_b| \\ &= |x_b - x_a| + |y_b - y_a| \\ &= d_t(B, A). \end{aligned}$$

iv) Por fim, a desigualdade triangular será demonstrada. Usando a desigualdade (1), temos

$$|x_a - x_b| + |y_a - y_b| \leq |x_a - x_c| + |y_a - y_c| + |x_c - x_b| + |y_c - y_b|.$$

Logo, concluí-se que

$$d_t(A, B) \leq d_t(A, C) + d_t(C, B).$$

Desta forma, fica provado que a função d_t definida em (4) é uma métrica.

2.4.1 Circunferência na Geometria do Táxi

Por definição, a circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão equidistantes de um ponto dado chamado de centro conforme visto em (3). Ao ler a definição acima, a imagem que é inicialmente lembrada equivale a Figura 3. Contudo, esta figura corresponde a circunferência apenas na geometria euclidiana.

Para KRAUSE(1986) a geometria do táxi é assim definida:

> [..] a geometria do táxi é quase igual à geometria das coordenadas euclidianas. Os pontos são iguais, as linhas são iguais, os ângulos são medidos da mesma maneira. Apenas a função distância é diferente. A distância do táxi não é determinada em linha reta, mas sim como um táxi dirigiria. Contamos quantos blocos ele teria que percorrer horizontal e verticalmente. Os segmentos pontilhados sugerem uma rota de táxi.(KRAUSE, 1986, pág. 11)

Na geometria do táxi, a construção da circunferência assim como de outras figuras é diferente. A definição como um lugar geométrico é a mesma, porém a figura formada como um conjunto de pontos que estão a mesma distância de um centro terá o formato daquilo que é conhecido como um quadrado na geometria euclidiana.

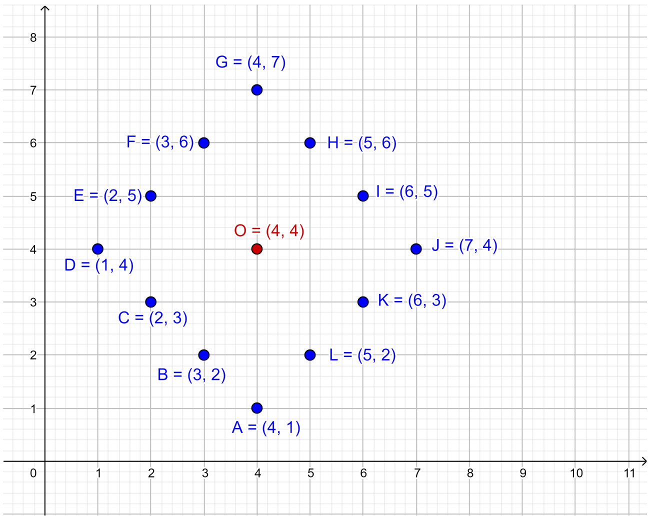
Sobre a circunferência euclidiana e do táxi, CÉSAR(2010) ensina que:

> [...] a circunferência euclidiana tem infinitos pontos. A distância de qualquer um de seus pontos ao centro é chamado de raio da circunferência. Na Geometria Táxi o universo é o conjunto de retas horizontais e verticais. A circunferência será formada por pontos. CÉSAR(2010, pág. 63)

Conforme os ensinamentos de CÉSAR(2010) é possível construir a circunferência na geometria do táxi no plano cartesiano a partir de alguns pontos que seguem a definição. Na Figura 4, os pontos A, $B, ...,$ L, formam a circunferência do táxi de raio 3 e centro $O = (4, 4)$. Note que, a disposição dos pontos lembra a figura do quadrado, onde os pontos A, D, G, J são os seus vértices. Além disso, todos os pontos citados satisfazem a equação

$$d_t((x, y), (4, 4)) = 3 \Leftrightarrow |x - 4| + |y - 4| = 3. \tag{5}$$

Figura 4: Pontos da circunferência na Geometria do táxi.



Fonte: <Do próprio autor>

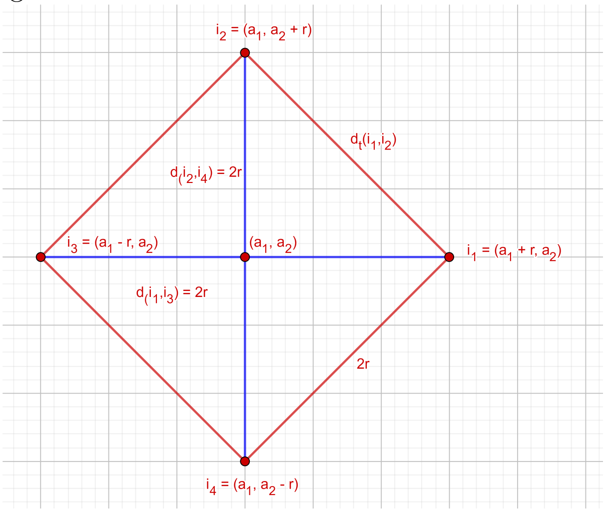
De forma mais didática e comparando com a geometria euclidiana, é possível observar que ao ligar os pontos identificados acima é observada a figura que é conhecida como o quadrado da geometria euclidiana, pois os seus lados possuem a mesma medida e são formados por segmentos de retas perpendiculares entre si.

Para OLIVEIRA(2015), os pontos $P(x, y)$ que satisfazem a equação

$$|x - a_1| + |y - a_2| = r \tag{6}$$

representam geometricamente os lados de um quadrado de diagonais medindo $2r$, paralelos aos eixos coordenados, centro em $A = (a_1, a_2)$ e com vértices nos pontos $i_1 = (a_{1+r}, a_2), i_2 = (a_1, a_{2+r}), i_3 = (a_{1-r}, a_2)$ e $i_4 = (a_1, a_{2-r})$. Desta forma, também é possível verificar que o lugar geométrico dos pontos do plano construídos pela equação 6 é equivalente ao quadrado da geometria euclidiana, conforme Figura 5.

Figura 5: Circunferência na Geometria do táxi.

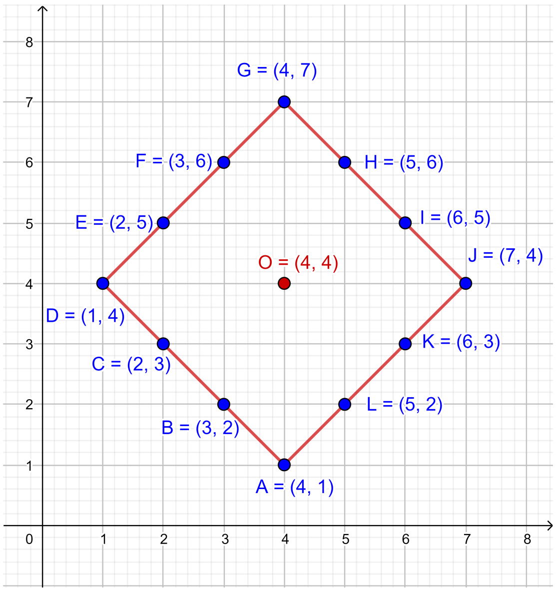


Fonte: <Do próprio autor>

Ainda para CÉSAR (2010), a circunferência do táxi pode ser construída no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ que conhecemos se modificarmos o espaço a ser trabalhado:

> Se modificamos o conjunto universo, considerando agora o espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$, poderemos ligar os pontos $A, B, ..., L$. A figura obtida é uma circunferência táxi, de raio 3, conforme Figura 6 ela é formada por infinitos pontos. CÉSAR(2010, pág. 64)

Figura 6: Circunferência na Geometria do táxi.



Fonte: <Do próprio autor>

Importante destacar que a figura encontrada ao ligar os pontos não é simplesmente um quadrado, pois esta figura terá uma forma diferente em cada geometria, razão pela qual se falou em vários pontos, que a circunferência do táxi assemelha-se a figura que é conhecida como o quadrado da geometria euclidiana.

Após analisar as definições de distância foi verificado qual a relação existe entre a distância de dois pontos nas geometrias euclidiana e do táxi.

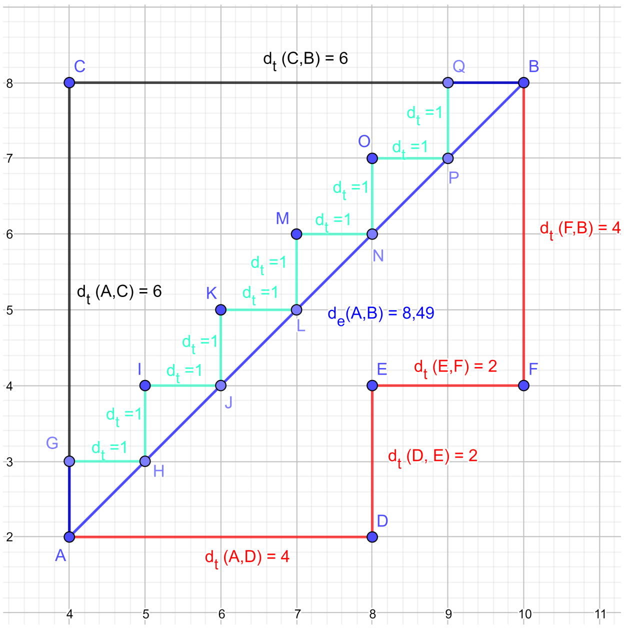
2.5 Relação entre a Distância de Dois Pontos na Geometria do Táxi e a na Geometria Euclidiana

Nesta seção será realizado um comparativo entre a distância na geometria euclidiana d_e e a geometria do táxi d_t. Para facilitar a compreensão geométrica será utilizada a Figura 7, onde foram aplicadas as duas distâncias simultâneas no mesmo plano cartesiano.

Analisando a Figura 7 é possível perceber claramente que o caminho mais curto entre os pontos A e B está traçado numa linha reta na cor azul, cuja distância euclidiana corresponde a $d_e(A, B) = 8,49$, contudo não é possível realizar este percurso em linha reta pela cidade, tendo em vista as casas e quarteirões existentes.

Contudo, observando os caminhos indicados pelas cores preto, verde e vermelho, observa-se que são percursos pelas vias, ou seja, caminhos possíveis de serem percorridos.

Figura 7: Geometria Euclidiana x Geometria do táxi.



Fonte: <Do próprio autor>

Note que, a Figura 7, está sobre o plano cartesiano e os pontos em destaque possuam coordenadas $A = (4, 2)$ e $B = (10, 8)$. Logo, é possível calcular as distâncias euclidiana $d_e(A, B)$ e do táxi $d_t(A, B)$. Para isso será utilizado o valor aproximado de $\sqrt{2} = 1,41$,

$$\begin{aligned} d_e(A, B) &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ &= \sqrt{(10 - 4)^2 + (8 - 2)^2} \\ &= 6\sqrt{2} \\ &= 8,49. \end{aligned}$$

Agora será efetuado o cálculo da distância na geometria do táxi.

$$\begin{aligned} d_t(A, B) &= |x_b - x_a| + |y_b - y_a| \\ &= |10 - 4| + |8 - 2| \\ &= 12. \end{aligned}$$

Observe que a distâncias do táxi sugerida é dada por $d_t(A, B) = 12$ e a $d_e(A, B) = 8,49$, que é única. Logo, verifica-se que no exemplo $d_t(A, B) \geqslant d_e(A, B)$, contudo é necessário verificar se esta relação é verdadeira em todos os casos.

Tomando os pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e ainda que $|x_b - x_a| \geqslant 0$ assim como $|y_b - y_a| \geqslant 0$, tem-se

$$|x_b - x_a| \cdot |y_b - y_a| \geqslant 0.$$

Portanto,

$$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + 2 \cdot |x_b - x_a| \cdot |y_b - y_a| \geqslant (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Dai,

$$(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|)^2 \geqslant (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Logo,

$$\sqrt{(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|)^2} \geqslant \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Desta forma, conclui-se

$$|x_b - x_a| + |y_b - y_a| \geqslant \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Isto prova que $d_t(A, B) \geqslant d_e(A, B)$. Agora será analisado os casos em que a igualdade ocorre. Tal fato ocorrerá em duas situações:

i) Quando os pontos são coincidentes $A = B$, desta forma a $d_t(A, B) = 0$ assim como $d_e(A, B) = 0$, portanto as distâncias são iguais;

ii) Quando os pontos pertencem a uma mesma reta paralela aos eixos, supondo que $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ sejam pontos distintos do plano cartesiano, tem-se

$$d_t(A, B) = d_e(A, B).$$

Dai,

$$|x_b - x_a| + |y_b - y_a| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Portanto,

$$(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|)^2 = (\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2})^2.$$

Logo,

$$|x_b - x_a|^2 + 2 \cdot |x_b - x_a| \cdot |y_b - y_a| + |y_b - y_a|^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Desta forma, conclui-se que,

$$|x_b - x_a| \cdot |y_b - y_a| = 0 \Leftrightarrow |x_b - x_a| = 0 \ \text{ ou } \ |y_b - y_a| = 0.$$

A partir do cálculo acima é possível concluir que $x_b = x_a$ ou $y_b = y_a$. Logo os pontos pertencerão a uma reta suporte paralela ao eixo y ou ao eixo x .

3 A Importância do Uso de Softwares no Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática.

Ao iniciar um conteúdo matemático o professor deve sempre buscar maneiras de apresentar o assunto de tal forma que rompa com a tradicional aula expositiva. É certo que isso não é uma tarefa fácil, alguns professores ao tentam inovar podem encontrar dificuldades, como falta de aparato tecnológico nas escolas ou a falta de incentivo.

É fato que ao implementar as ferramentas tecnologias nos meios educacionais os alunos demostram mais interesse pelo conteúdo, uma vez que grande parte deles já vivem neste "universo digital" durante todo o seu dia. Pois, grande parte dos alunos possuem um smartphone, aparelho que conecta os alunos ao mundo digital em menos de 3 cliques.

O uso da informática por meio de softwares que facilitem ou auxiliem o ensino de matemática traz um interesse maior por parte dos alunos, que por sua vez, ficam mais curiosos para entender como um software pode trazer uma informação que poderá ser utilizada durante uma aula de matemática.

> A forma de integração entre Informática e Matemática possui inúmeras vertentes, ficando a critério do profissional da educação escolher qual delas irá seguir, mas uma boa opinião engloba os softwares matemáticos e os jogos computacionais que envolvem situações matemáticas concretas.(TATIANE. 2011, pág. 29)

Um dos objetivos do ensino de matemática é realizar a sua ligação com os meios tecnológicos e levar os alunos a observarem que estes meios são movidos por relações matemáticas. Desta forma, buscar mudar o padrão consolidado na mente de alguns alunos que tem a matemática como uma matéria cheia de fórmulas que precisam ser decoradas.

Atualmente, o desafio do professor é criar metodologias que relacionem o mundo real, físico, com o meio tecnológico. Pois os alunos já estão inseridos neste meio. Autores como GAUDÊNCIO(2000, p. 76) já trazem esse ensinamento. Com o decorrer das séries os conteúdos matemáticos vão se tornando mais complexos, desta forma, os alunos que já possuem um prazer em estudar a matéria acham os conteúdos mais interessantes e desafiadores. Contudo, aqueles que apresentam dificuldades de aprendizagem, veem estes novos conteúdos como mais difíceis.

O uso das ferramentas tecnológicas tem por objetivo facilitar a compreensão dos conteúdos, veja o exemplo do uso do computador para o estudo das funções:

> As principais vantagens dos recursos tecnológicos, em particular o uso de computadores, para o desenvolvimento do conceito de funções seriam, além do impacto positivo na motivação dos alunos, sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador das tarefas de resolução de problemas. A utilização de computadores no ensino provocaria, a médio e longo prazo, mudanças curriculares e de atitude profundas uma vez que, com o uso da tecnologia, os professores tenderiam a se concentrar mais nas ideias e conceitos e menos nos algoritmos (GAUDÊNCIO, 2000, p. 76).

Desta forma, todas as ferramentas que possibilitem a aprendizagem dos conteúdos devem ser utilizadas. Sobre a matemática e as tecnologias, PEREIRA(2012, p. 7) e outros autores corroboram sobre o tema.

> Estudar Matemática, na maioria das escolas, é considerado um desafio pelos estudantes. Enquanto alguns se destacam, muitos têm dificuldades para compreender determinados tópicos e desenvolver habilidades necessárias para a resolução de problemas, à medida que esses vão ficando mais complexos e exigindo mais do estudante. Assim, o principal objetivo de incorporar as tecnologias de informação, nesse processo, é minimizar as dificuldades proporcionando o entendimento dos temas apresentados com ferramentas alternativas. (PEREIRA et al., 2012, p. 7).

Por essa razão, os softwares utilizados no projeto são de fácil operacionalidade, fazendo com que os alunos possam utilizá-los sem grandes dificuldades. Desta forma, com a utilização dos softwares, espera-se que os alunos consigam realizar os cálculos propostos. Um exemplo daquilo que foi executado é o cálculo da distância entre dois pontos, não é um assunto novo, muitos softwares já realizam essa tarefa. Contudo, no Google Earth é possível realizar esta operação de forma simples, mostrando aos alunos, além do valor da distância, o trajeto que eles podem percorrer até chegar ao ponto desejado.

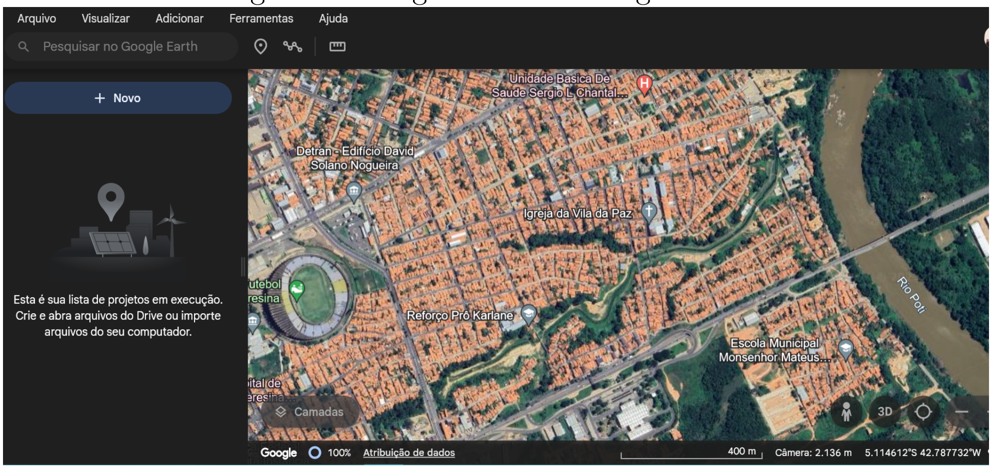
3.1 Conhecendo o Software Google Earth.

Antes de iniciar as atividades propostas com os alunos é importante conhecer um pouco mais sobre os softwares que foram utilizados e entender o porque da sua escolha. Como o primeiro a ser utilizado foi o Google Earth, será realizada uma breve descrição da sua utilização.

> Google Earth é um programa de computador cuja função é apresentar um modelo tridimensional do globo terrestre, construído a partir de um mosaico de imagens de satélite obtidas de fontes diversas, imagens aéreas (fotografadas de aeronaves) e GIS 3D. Desta forma, o programa pode ser usado simplesmente como um gerador de mapas bidimensionais e imagens de satélite ou como um simulador das diversas paisagens presentes no Planeta Terra. Com isso, é possível identificar lugares, construções, cidades, paisagens, entre outros elementos. (WIKIPÉDIA, 2023) [26]

A Figura 8 mostra a tela inicial do software Google Earth, que é um parceiro da educação matemática de longa data, sua utilização não é nova, ele traz um conjunto de ferramentas que possibilita uma vasta pesquisa de locais em todo o mundo e a possibilidade de efetuar cálculos de distâncias, percursos e outras funcionalidades.

Figura 8: Imagem do site Google Earth.



Fonte: <https://earth.google.com>

No projeto, os alunos foram levados ao laboratório de informática onde tiveram acesso aos computadores para a localização das escolas no software. Esta etapa teve como objetivo, calcular as distâncias entre as escolas e construir percursos entre elas. Além disso, os alunos construíram percursos entre suas residências e as escolas.

3.2 Conhecendo o Software GeoGebra.

O GeoGebra e um software com funções diferentes do Google Earth, contudo cada programa foi utilizado em um momento diferente da pesquisa e o resultado final foi muito satisfatório. A seguir será visto um pouco das funcionalidades do GeoGebra.

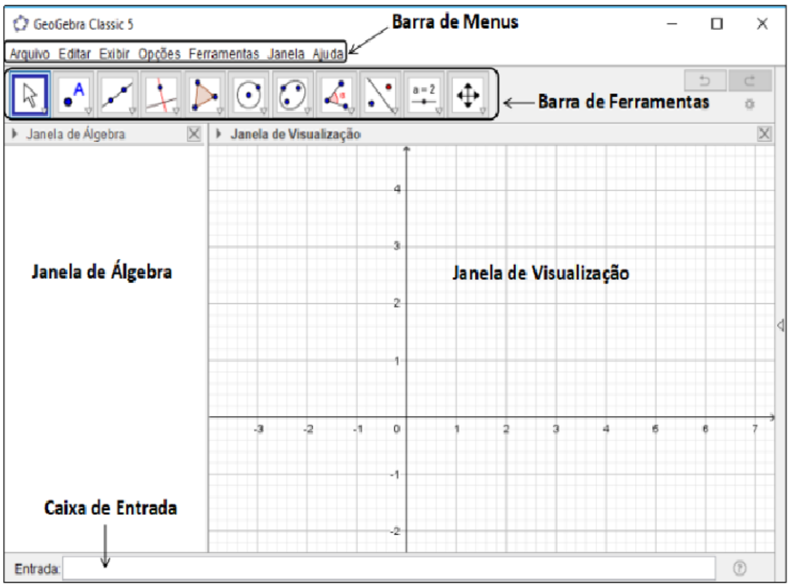
> GeoGebra (aglutinação de Geometria e Álgebra) é um aplicativo computacional livre (GNU) de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI (Graphical User Interface) e é desenvolvido em linguagem Java, que lhe permite o uso em várias plataformas. Frequentemente utilizado no ensino. (WIKIPÉDIA, 2023) [27]

Ainda sobre o Geogebra, Basniak e Estevam (2014) dentre outros autores e professores, apontam a importância do software ser livre e gratuito para download, isso faz com que uma infinidade de pessoas tenham acesso a essa plataforma matemática.

> Basniak e Estevam definem o Geogebra como “um software de Matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único GUI (do inglês, Graphical User Interface, ou do português Interface Gráfica do Utilizador)”. Basniak e Estevam (2014) afirmam que o Geogebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001, caracterizando-se como um software livre, que está disponível de forma gratuita na internet, no site www.geogebra.org, para diversos tipos de sistemas operacionais.(BASNIAK; ESTEVAM. 2014, Pág. 13)

Após a compreensão da sua importância, o projeto teve sua continuidade com a apresentação do software. BASNIAK; ESTEVAM. 2014, Pág. 14, traz a tela inicial com as suas partes, juntamente com os operadores que podem ser utilizados para a construção das funções ou figuras geométricas e ainda a explicação de cada uma das funcionalidades.

Figura 9: Tela inicial do GeoGebra



Fonte: <(BASNIAK; ESTEVAM. 2014, Pág. 14)>

Veja como SOUSA, 2017. f. 49, explica as funções do software.

1. A Barra de Menus é o local onde se concentram diversas funcionalidades do GeoGebra, onde é possível salvar o projeto ou até mesmo alterar as configurações gerais do software.

2. A Barra de Ferramentas concentra os principais comandos a serem utilizados no GeoGebra, na construção de diversas representações matemáticas.

3. Na Janela de Álgebra é o local onde são exibidas as coordenadas, equações e medidas dos objetos criados na janela de visualização.

4. Na Janela de Visualização é o local onde são criadas as representações gráficas, a partir da seleção dos comandos na Barra de Ferramentas.

5. A Caixa de Entrada é o local onde são inseridos os comandos através da digitação.

Ao iniciar o software, os alunos visualizaram a tela inicial conforme a Figura 9, a partir dela iniciaram a verificação dos cálculos realizados em sala.

4 Componentes da Pesquisa de Campo

Para iniciar a pesquisa é necessário entender sobre este processo, para isso será utilizada a definição dada por Lakatos e Marconi.

> Pesquisa de campo é aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema, para o qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou, ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles. (LAKATOS; MARCONI, p.186, 2003)

Com base nestes ensinamentos, o presente capítulo traz a execução do projeto realizado em sala, com 24 alunos da 3ª série do ensino médio da Unidade Escolar Nossa senhora da Paz, uma escola da rede estadual do Piauí localizada no bairro Vila da Paz em Teresina.

Este projeto buscou mostrar aos alunos uma geometria diferente daquilo que eles estão acostumados a estudar na educação básica. A geometria do táxi é uma das geometrias não euclidiana que eles podem utilizar no seu cotidiano. Para isto, foram utilizados os conteúdos expostos para fundamentar as etapas da execução do projeto, além de justificar as discussões que foram levantadas em sala sobre a localização de pontos, os cálculos da distância entre dois pontos, a construção da circunferência e a determinação do valor do π na geometria do táxi e na geometria euclidiana.

As definições básicas de métrica e espaços métricos fundamentam as demais relações utilizadas, tanto na geometria euclidiana como na geometria do táxi, além disto, as operações abordadas tem como objetivo fazer com que os alunos percebessem que a geometria está presente no meio em que eles vivem.

Além disso foi discutido sobre a importância da utilização de fatores externos para o ensino de matemática, ao nosso sentir todas as disciplinas deveriam adotar esse pensamento, onde o conhecimento está além das quatro paredes da sala de aula.

Para iniciar a pesquisa, foram realizadas 03 perguntas aos alunos, que tiveram como objetivo fazer com que eles percebessem qual o tema que seria estudado. Em seguida foi aplicada a Avaliação Diagnóstica C, onde foram analisados quais os conhecimentos prévios eles possuíam antes de iniciar o uso dos softwares. Estas respostas foram fundamentais para a construção do plano de aula 1 (ver 4.3.1), em seguida ocorreu a apresentação dos softwares Google Earth e o GeoGebra aos alunos para que iniciassem a sua operação.

Durante a primeira parte do projeto foi utilizado o Google Earth. Já o GeoGebra foi utilizado na etapa seguinte, onde os alunos utilizaram para calcular e comparar as distâncias, construir e comparar as circunferências e determinar o valor do π nas geometrias euclidiana e do táxi. Para isto também foi construído o plano de aula 2 (ver 4.4.1), que trouxe as etapas de forma detalhada, demostrando como ocorreu sua execução.

Ao final da execução foi realizada a verificação de aprendizagem D com o objetivo de comprovar a compreensão dos conteúdos abordados, desta forma analisar se os objetivos traçados foram alcançados.

No próximo capítulo serão mostradas as etapas da realização da pesquisa, as avaliações que foram realizadas ao longo da execução do projeto assim como os resultados obtidos e a possibilidade da sua realização nas demais escolas.

4.1 Público da Pesquisa

O público alvo da pesquisa foi composto por 24 alunos da 3ª série do ensino médio da Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz localizada em Teresina-PI. O ambiente da pesquisa ocorreu no laboratório de informática da própria escola conforme Figura 10.

Figura 10: Alunos no laboratório de informática

Fonte: <Do próprio autor>

No primeiro momento os alunos foram questionados sobre a maneira que utilizavam a geometria no seu cotidiano, para isso foram feitas 03 perguntas:

1. Quais os elementos geométricos básicos que vocês conhecem?

2. De que forma vocês determinariam a distância entre a sua residência e a escola?

3. Como vocês escolheriam um percurso entre a sua casa e a escola?

As perguntas realizadas aos alunos tiveram como objetivo leva-los a refletir sobre a utilização da geometria no seu dia a dia. E a pensarem sobre a maneira que eles aplicavam estes conhecimentos básicos no seu cotidiano.

Após essa reflexão, os alunos começaram a utilizar os computadores para acessar os software. Neste momento foi orientado que buscassem um navegador e localizassem o Google Earth, pois este seria o primeiro software a ser utilizado.

Em seguida foi realizada a avaliação diagnostica C com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema a ser discutido, as perguntas formuladas foram simples e objetivas.

4.2 Avaliação Diagnóstica

Os alunos foram submetidos a duas avaliações, a primeira foi a Avaliação Diagnóstica C e a segunda foi a Verificação de Aprendizagem D. A partir deste ponto será analisado o desempenho que os alunos obtiveram na avaliação diagnostica C. A seguir seguem as questões que compuseram esta atividade.

Inicialmente foi solicitado que os alunos observassem a Figura 11, pois corresponde a uma parte do mapa que mostra o bairro Vila da Paz onde estão localizadas a Igreja da Vila da Paz (Complexo da Fundação Nossa Senhora da Paz) e a Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz.

Figura 11: Mapa entre as escolas

Fonte: <Do próprio autor>

Com base na imagem os alunos deveriam utilizar a posição da Igreja da Vila da Paz (Complexo da Fundação Nossa Senhora da Paz) e da Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz para responder as questões que seguem.

1. O que você entende por distância?
2. Como você calcularia a distância entre dois pontos?
3. Qual o percurso que você escolheria da Fundação Nossa Senhora da Paz até a Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz?
4. O que é uma circunferência?
5. O que você entende por comprimento de uma circunferência?
6. Qual o valor do número π(pi) e como é possível determiná-lo?

Após a aplicação da avaliação diagnóstica C foi iniciada a etapa de análise das respostas dos alunos. Ao todo, 24 alunos participaram da atividade.

4.2.1 Análise das Respostas dos Alunos

Os alunos que participaram da pesquisa pertencem a 3ª série do ensino médio. Por esta razão, acredita-se que já tenham um certo conhecimento sobre geometria plana e geometria analítica. Contudo não houve nenhuma revisão anterior a avaliação.

Sobre o que eles entendiam por distância, a grande maioria afirmou que seria o tamanho do deslocamento entre dois pontos ou que seria o percurso entre dois pontos dados, que poderia ser medido em metros ou quilômetros.

Sobre como calculariam a distância entre dois pontos, alguns alunos responderam que efetuariam o cálculo pela geometria analítica, baseado-se nas coordenadas dos dois pontos e pela relação

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

dessa forma, fariam o cálculo da distância euclidiana no plano cartesiano. Outros ainda lembraram da aplicação do Teorema de Pitágoras também com o mesmo fundamento analítico.

Sobre o percurso que os alunos escolheriam para se descolarem da Fundação Nossa Senhora da Paz até a Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz, o interessante nesta resposta foi que nenhum deles arriscou-se em afirmar que seguiria o caminho mais curto respondido na questão anterior. Todos os alunos começaram a descrever um percurso possível pelas ruas do bairro onde eles saiam de uma das escolas até a outra.

A partir disto, foi possível observar, que o conhecimento sobre a geometria do táxi, mesmo que de forma intuitiva, já começava a ser cultivado na mente de cada um deles, mesmo sem perceber eles já estavam sob a métrica da geometria do táxi, calculando a distância entre dois pontos de forma a construir o percurso entre eles.

Quando perguntados sobre o que eles entendiam por circunferência, de forma geral os alunos responderam que são figuras perfeitamente planas e redondas representadas por um raio e um centro dado, como por exemplo um anel, um bambolê ou a borda de uma pizza.

Quanto ao que eles entendiam por comprimento de uma circunferência, responderam que correspondia ao seu contorno, ou perímetro. Alguns também lembraram que o comprimento era igual a $2\pi r$.

Por fim, foi perguntado sobre o valor do número π e como seria possível determiná-lo. Alguns alunos responderam que seria aproximadamente $3,14$ e poucos lembravam que o π tem sua origem na razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência.

A partir das respostas coletadas é possível perceber que os alunos possuem um conhecimento básico sobre o tema. Desta forma, acreditava-se que ao serem envolvidos com a pesquisa e com os softwares que seriam utilizados teriam a oportunidade de estudar um conteúdo novo com novas ferramentas. Estas impressões e expectativas iniciais da pesquisa foram respondidas e apresentadas nos resultados da pesquisa (ver4.6).

4.3 A Utilização do Software Google Earth Em Sala de Aula.

Para iniciar esta etapa da pesquisa foram analisadas as resposta dos alunos para a construção do primeiro plano de aula que contempla as etapa do projeto que será desenvolvida.

4.3.1 Construção do Plano de aula 1.

O plano de aula a seguir aborda a utilização do software Google Earth como ferramenta no ensino-aprendizagem da geometria do táxi. Para isso, foram considerados a posição no mapa de cada escola para efetuar o cálculo da distância entre elas, assim como a construção do percurso ligando as duas escolas. Segue o plano construído.

1) Objetivos

1.1) Geral
Utilizar as ferramentas do software Goole Earth para compreender os fundamentos da geometria do táxi em paralelo com os fundamentos da geometria euclidiana.

1.2) Específicos
• Compreender os conceitos de distância pela geometria plana e pela na geometria do táxi;
• Analisar as informações fornecidas pelo software Google Earth, determinar a diferença entre as distâncias nas duas geometrias, verificar qual é a menor distância e qual delas é possível percorrer.

2) Conteúdo programático
• Distância entre dois pontos na geometria euclidiana e do táxi;

3) Metodologia
O conteúdo será ministrado por meio de aulas práticas que ocorrerão no laboratório de informática onde os alunos serão incentivados a ter um pensamento construtivos dos conceitos que serão discutidos.

4) Recursos Didáticos
• Quadro branco;
• Pincéis;
• Apagador;
• Lista de exercícios;
• Material multimídia: Notebook, mouse, data show, tv e passador de slides;
• Software Educacional: Google Earth.

5) Procedimentos Metodológicos

- Localizar no mapa fornecido pelo software Google Earth as duas escolas da UESNP;
- Calcular a menor distância em linha reta entre as escolas;
- Calcular o menor percurso possível entre as escolas;
- Determinar a diferença entre os valores encontrados e perceber qual é a maior.

6) Verificação da Aprendizagem

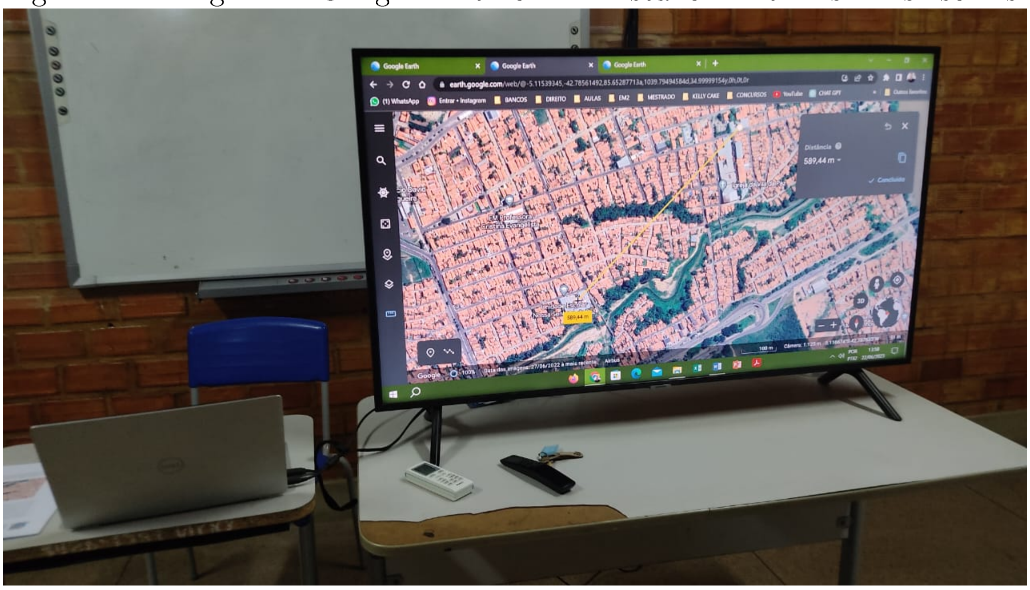
A avaliação será realizada a partir das atividades realizadas em classe por meio do software Google Earth, onde serão verificados os cálculos de distância nas duas geometrias abordadas.

Tomando como base a sequência acima do plano de aula, as atividades práticas com os alunos foram iniciadas a partir do cálculo da distância entre dois pontos por meio do software Google Earth.

4.3.2 Localização das Escolas e a Distância Entre Elas.

A Figura 12 mostra a tela inicial do programa com as suas funcionalidades. No canto superior esquerdo é possível ver uma lupa, nela são inseridos os lugares que podem ser pesquisados, além disso pode ser criado rotas onde o mapa leva o navegador de um ponto a outro.

Figura 12: Imagem do Google Earth com a distância entre as duas escolas.



Fonte: <Do próprio autor>

Os alunos iniciaram o uso do software localizando a Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz por meio da ferramenta lupa, ela consegue identificar os pontos no mapa por um simples nome de referência.

Em seguida localizaram a outra unidade que compõe a escola, a Fundação Nossa Senhora da Paz, com essas informações conseguiram por meio das ferramentas do software calcular a distância entre elas.

Figura 13: Alunos utilizando o software Google Earth

Fonte: <Do próprio autor>

A partir disto, foram orientados a determinar a distância entre as escolas, conforme é visto na Figura 13. Em seguida deveriam responder se conseguiriam percorrer a distância encontrada.

Essa pergunta gerou um grande questionamento e para alguns alunos um questionamento inédito, pois 04 alunos responderam que jamais tinham pensado nessa hipótese. Contudo, sabiam que a menor distância entre dois pontos é uma caminho em linha reta.

4.3.3 Construção dos Percursos Entre as Escolas.

Os alunos começaram a buscar a menor distância possível dada pelo Google Earth. A Figura 14 mostra a tela de um dos alunos buscando esta menor distância, ou seja, eles buscaram o menor percurso euclidiano para satisfazer a ideia que tinham sobre distância entre dois pontos.

Figura 14: Distância encontrada pelos alunos

Fonte: <Do próprio autor>

Após aprenderem a operar o software foi lançado o desafio de percorrer a menor distância que eles tinham encontrado. Neste ponto começaram a surgir os primeiros questionamentos sobre a impossibilidade de percorrer a menor distância encontrada. Uma vez que encontraram a distância euclidiana representada por um segmento de reta.

Logo após, foi solicitado aos alunos que buscassem no software a menor distância possível para se descolar entre as escolas. Para isso utilizaram a prática do seu dia-a-dia conforme percebe-se na Figura 15 quando percorreram o caminho que já conheciam.

Figura 15: Distância encontrada pelos alunos

Fonte: <Do próprio autor>

Oo alunos comprovaram, que a menor distância entre as escolas que eles poderiam percorrer foi maior que a primeira distância determinada(a euclidiana). Fato este que despertou o interesse em buscar novos percursos cada vez menores entre as escolas.

No segundo momento da aula, os alunos foram novamente desafiados a descobrir a menor distância que eles poderiam percorrer entre as escolas, seguem os percursos que dois alunos construíram conforme as Figuras 16 e 17.

Figura 16: Percurso entre as escolas pela geometria do táxi 1

Fonte: <Do próprio autor>

Figura 17: Percurso entre as escolas pela geometria do táxi 2

Fonte: <Do próprio autor>

Esta fase foi o ápice da execução do projeto, pois os alunos perceberam que a menor distância euclidiana entre dois pontos não era necessariamente uma distância possível de ser percorrida, diferente dos percursos que eles realizavam todos os dias. Assim perceberam que todos os dias praticavam a distância do táxi e concluíram que a matemática não é feita apenas de teorias e conceitos, mas que ela pode ser vivenciada todos os dias no seu cotidiano.

Para finalizar esta fase de análises e construções de percursos, foram realizadas discussões entre os alunos orientados pelo professor, com objetivo de observar os valores encontrados para as distâncias euclidiana e a do táxi. Os alunos começaram a perceber que em todos os percursos construídos a distância do táxi era maior que a distância euclidiana.

4.4 A Utilização do Software GeoGebra em Sala de Aula.

Para a próxima etapa também foi desenvolvido um novo plano de aula que traz o detalhamento da próxima etapa do projeto. Neste ponto, os alunos visualizaram no software GeoGebra os cálculos que foram realizados em sala e comprovaram todas as discussões realizadas de forma prática.

4.4.1 Construção do Plano de aula 2.

Após trabalhar os conceitos e comparativos entre as teorias de distâncias euclidiana e do táxi, foi abordado, a partir deste ponto, a segunda parte prática realizada no laboratório de informática. Aqui os alunos continuaram trabalhando com o auxílio do GeoGebra o cálculo da distância entre dois pontos, a construção das circunferências e o valor de π na geometria euclidiana e do táxi. Segue o plano construído.

1) Objetivos

1.1) Geral

Utilizar as ferramentas do Geogebra e o sistema de coordenadas do plano cartesiano para compreender os fundamentos da geometria do táxi em paralelo com os fundamentos da geometria euclidiana.

1.2) Específicos

- Compreender os cálculos das distâncias entre dois pontos na Geometria euclidiana e na Geometria do táxi;
- Analisar a construção das circunferências formadas a partir da ideia de lugar geométrico e das equações de distância nas geometrias euclidiana e do táxi;
- Determinar o valor de π nas geometrias euclidiana e do táxi.

2) Conteúdos programáticos

- Distância entre dois pontos na geometria euclidiana e do táxi;
- Circunferência;
- O valor de π na circunferência.

3) Metodologia

O conteúdo será ministrado por meio de aulas práticas que ocorrerão no laboratório de informática onde os alunos serão incentivados a ter um pensamento construtivos dos conceitos que serão discutidos.

4) Recursos Didáticos

- Quadro branco;
- Pincéis;
- Apagador;
- Lista de exercícios;
- Material multimídia: Notebook, mouse, data show e passador de slides;
- Software Educacional: Geogebra;

5) Procedimentos Metodológicos

- Calcular a distância euclidiana e a do táxi com o auxílio do plano cartesiano e a sobreposição de ambas no mesmo plano utilizando o software Geogebra;
- Construir as circunferência euclidiana e do táxi a partir das suas equações e sobrepô-las no mesmo plano cartesiano para que os alunos visualizem a diferença entre elas utilizando o software Geogebra;
- Calcular o comprimento das circunferências euclidiana e do táxi.

- Determinar o valor do π nas geometrias euclidiana e do táxi a partir da razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro e perceber a diferença entre os valores encontrados.

6) Verificação da Aprendizagem

A avaliação será realizada a partir das atividades realizadas em classe por meio dos softwares Google Earth e GeoGebra, onde serão verificados os cálculos de distância nas duas geometrias abordadas assim como a construção das circunferência e a determinação do valor do π.

Este segundo plano de aula traz as atividades práticas que os alunos realizaram com o auxílio do software GeoGebra na determinação das distâncias, construção das circunferências e na determinação do valor do π.

4.4.2 Distância Entre Dois Pontos: Geometria Euclidiana x Geometria do Táxi

Para realizar esta etapa da pesquisa os alunos utilizaram o software GeoGebra no laboratório de informática onde tiveram acesso aos computadores e utilizaram a versão on line do software conforme mostra Figura 18

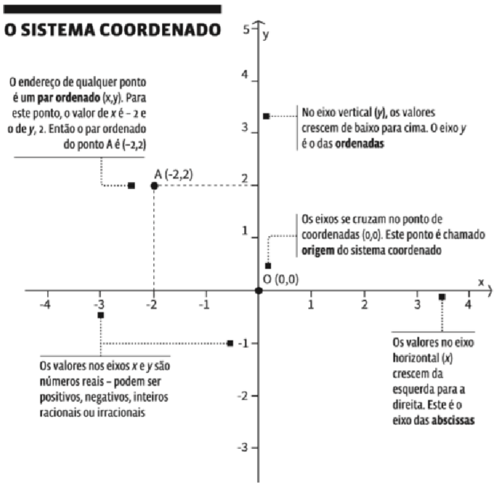
Figura 18: Alunos utilizando o software GeoGebra

Fonte: <Do próprio autor>

Contudo, antes de realizar a parte prática com o software, a aula foi iniciada retomando os conceitos básicos do plano cartesiano, como a construção dos eixos das abscissas e das ordenadas, dividindo o plano em quatro quadrantes assim como teorizou René Descartes.

Relembrando que cada ponto P no plano cartesiano é um par ordenado de coordenadas $P = (x, y)$, onde cada valor de x é denominado abscissa e cada valor de y a ordenada. Além disso, cada quadrante terá sua representação conforme os valores de cada eixo, conforme Figura 19.

Figura 19: Representação do Plano Cartesiano de René Descartes



Fonte: <https://guiadoestudante.abril.com.br/curso-enem/geometria-a-logica-do-quadriculado/>

A posição dos pontos no plano cartesiano determinam os sinais de suas coordenadas, desta forma a posição dos quadrantes se dá da seguinte forma:

1. Quadrante I. Na região superior direita, onde os valores das abscissas e das ordenadas são positivos;

2. Quadrante II. Na região superior esquerda, onde os valores das abscissas são negativos e das ordenadas são positivos;

3. Quadrante III. Na região inferior esquerda, onde os valores das abscissas e das ordenadas são negativos;

4. Quadrante IV. Na região inferior direita, onde os valores das abscissas são positivas e das ordenadas são negativas.

Deste ponto em diante, os alunos utilizaram o GeoGebra para visualizarem as relações das distâncias e as circunferências nas geometrias estudadas.

Na Seção 2.3 foi verificado que a métrica da geometria euclidiana dada por

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

que calcula a distância entre dois pontos. Já na seção 2.4, foi verificado que a métrica da geometria do táxi, que se dá pela métrica

$$d_t(A, B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|.$$

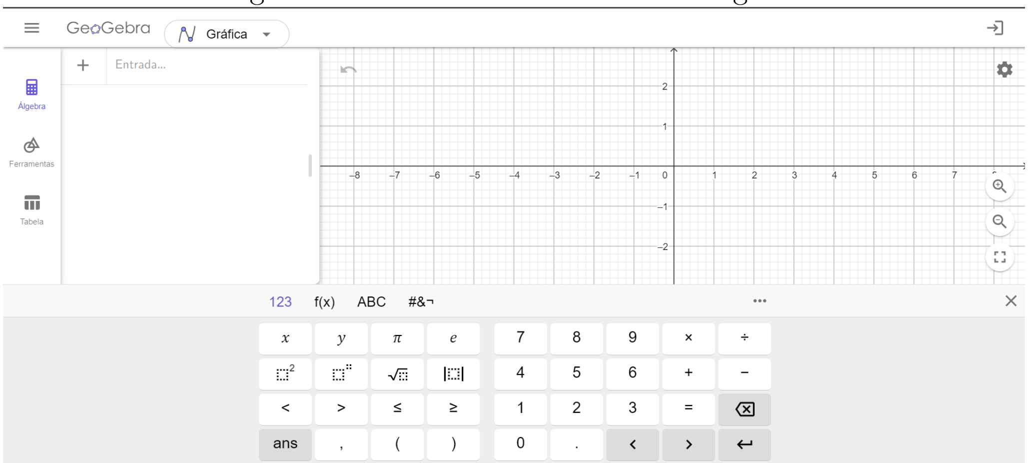
Antes da verificação pelo GeoGebra, foi realizado em sala o cálculo da distância euclidiana a partir dos pontos $A = (1, 1)$, $B = (6, 6)$ onde foi encontrado o valor $d_e = 7,07$.

Para este cálculo, foi utilizado o valor aproximado de $\sqrt{2} = 1,41$, conforme detalhamento a seguir.

$$\begin{aligned} d_e(A,B) &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ &= \sqrt{(6-1)^2 + (6-1)^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot 25} \\ &= 7,07 \end{aligned}$$

Logo após, foi iniciado o software pelo site do Geogebra[2], conforme a Figura 20 onde foi apresentando a tela inicial para os alunos começarem a manuseá-lo.

Figura 20: Tela inicial do site do Geogebra

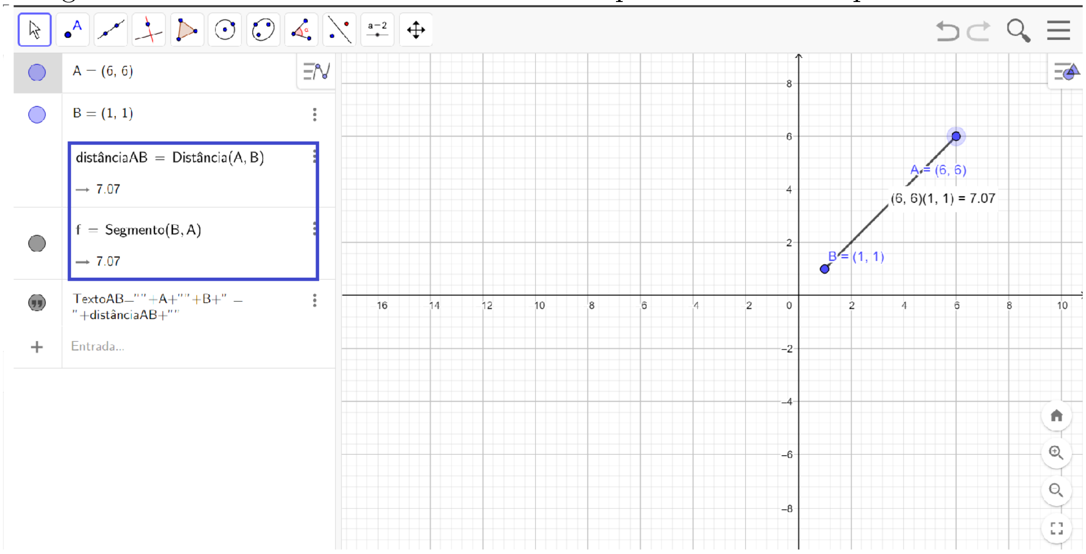


Fonte: $< https://www.geogebra.org/calculator >$

[2] https://www.geogebra.org/calculator

Para verificar o valor encontrado em sala, foi construído no GeoGebra o segmento $\overline{AB}$ conforme as coordenadas dos pontos $A = (1, 1)$, $B = (6, 6)$. A Figura 21 relaciona os pontos e o comprimento de $\overline{AB}$ que será chamado de distância euclidiana entre os pontos A e B, $d_e(A, B)$. Conforme destacado no software $d_e(A, B) = 7,07$.

Figura 21: Distância euclidiana entre dois pontos calculada pelo GeoGebra



Fonte: $< https : //www.geogebra.org/calculator >$

Desta forma os alunos tiveram um experiencia prática, onde visualizam que o valor inicialmente calculado em sala, foi confirmado pelo software.

A ideia principal desta etapa é fazer com que os alunos retomem a ideia vista no Google Earth, pois sabendo que essa é a menor distância entre dois pontos, não é sempre possível percorrê-la. Razão pela qual, será necessário estabelecer outros critérios de medida ou de percurso que se possa mover do ponto A ao ponto B. E por fim, calcular a sua distância.

Como realizado no caso anterior da distância euclidiana d_e, antes da realizar a verificação pelo GeoGebra, os cálculos da distância do táxi d_t foram realizados em sala utilizando os mesmos pontos $A = (1, 1)$ e $B = (6, 6)$. onde foi encontrado o valor $d_t(A, B) = 10$, conforme detalhamento a seguir.

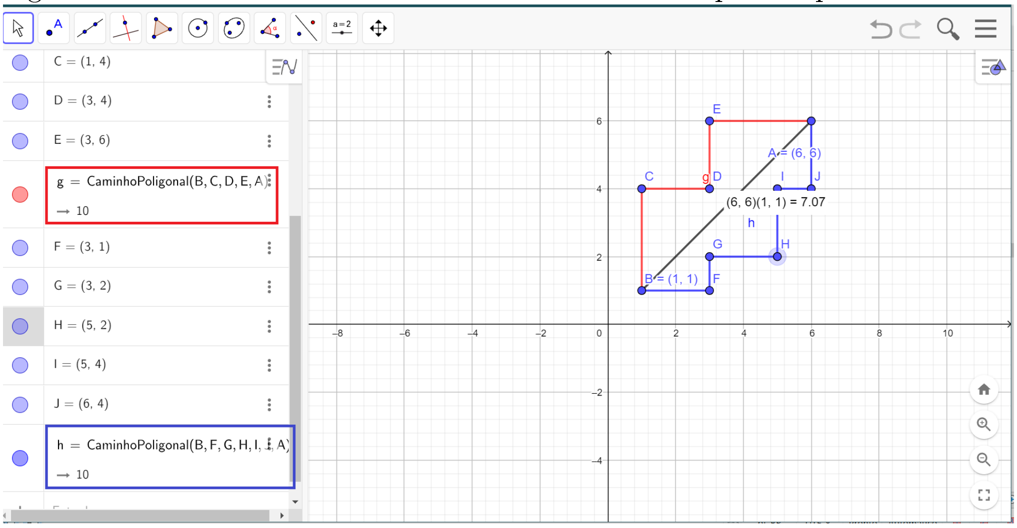
$$\begin{aligned} d_t(A, B) &= |x_b - x_a| + |y_b - y_a| \\ &= |6 - 1| + |6 - 1| \\ &= 10 \end{aligned}$$

Para a verificação destes cálculos, foi construído no GeoGebra as distâncias do táxi d_t conforme a Figura 22, onde é possível perceber que os dois percursos (azul e vermelho) criados entre os pontos A e B possuem o mesmo valor, ou seja, o valor da distância do percurso entre A e B pela geometria do táxi corresponde a 10.

Ainda pela Figura 22 é possível realizar o comparativo entre as distâncias euclidiana

$d_e(A, B)$ e a do táxi $d_t(A, B)$. Foram utilizados os mesmos pontos $A = (1, 1)$ e $B = (6, 6)$ com o objetivo de verificar que a menor distância euclidiana é única, porém na geometria do táxi são inúmeras com a mesma medida.

Figura 22: Distância do táxi x euclidiana entre dois pontos pelo GeoGebra



Fonte: $< https://www.geogebra.org/calculator >$

Para realizar este comparativo, foram construídos na Figura 22 dois percursos (azul e vermelho) que correspondem as distancias do táxi $d_t(A, B)$ entre as coordenadas $A = (1, 1)$ e $B = (6, 6)$. Note que, esta nova construção foi realizada sobre a Figura 21 que continha o segmento $\overline{AB}$ que corresponde a $d_e(A, B)$.

Com o objetivo de comparar a $d_e(A, B) = 7,07$ e a $d_t(A, B) = 10$, verifica-se no exemplo que

$$d_t(A, B) \geqslant d_e(A, B).$$

conforme demonstrado na seção 2.5.

Nas duas próximas seções serão comparados os elementos da circunferência assim como a sua construção com os fundamentos das geometrias euclidiana e a do táxi.

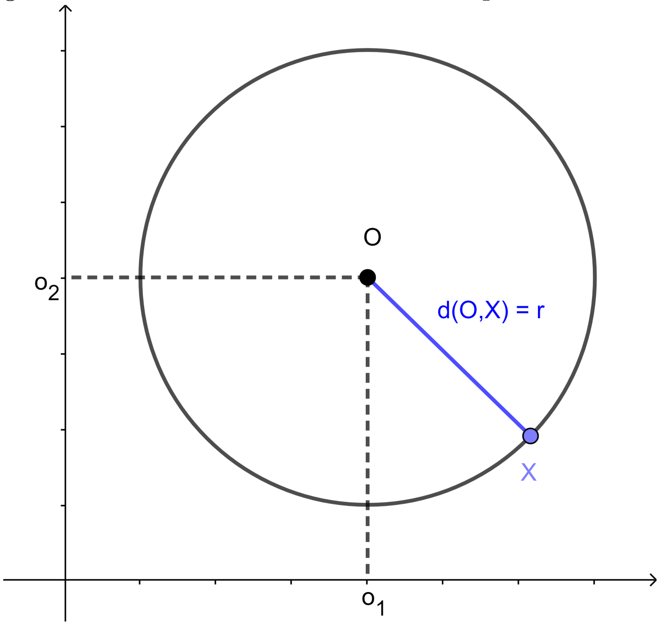
4.4.3 Construção da Circunferência Euclidiana.

Por definição, a circunferência é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano que estão a mesma distância de um ponto $O(o_1, o_2)$ chamado de centro, ou seja, $d(P, O) = r(raio)$, e na geometria euclidiana possui como equação reduzida a relação

$$(x - o_1)^2 + (y - o_2)^2 = r^2.$$

Ao inserir as coordenadas do centro $O(o_1, o_2)$ e o raio r, o GeoGebra constrói uma circunferência com sua equação reduzida. A partir disto, foi construída a Figura 23 nela é possível perceber que todos os pontos que formam a circunferência são equidistantes do centro.

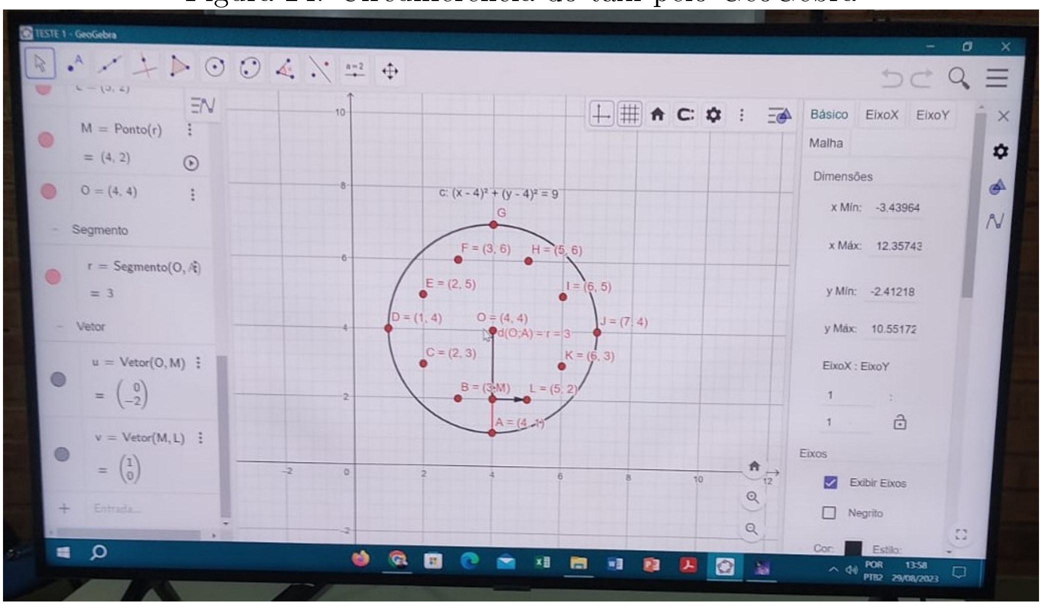
Figura 23: Circunferência euclidiana pelo GeoGebra



Fonte: <Do próprio autor>

Para exemplificar as informações acima com os alunos, foi tomado um centro de coordenadas $O = (4, 4)$ e um raio $r = 3$ para construir uma circunferência euclidiana no GeoGebra e determinar sua equação reduzida.

Figura 24: Circunferência do táxi pelo GeoGebra



Fonte: <Do próprio autor>

A partir do centro $O = (4, 4)$ e raio $r = 3$ informados anteriormente, obtêm-se a equação reduzida da circunferência pela relação

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2.$$

Logo, a equação construída pelo GeoGebra conforme a Figura 24 será

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

4.4.4 Construção da Circunferência do Táxi

Verificar se a distância entre pontos do plano a um ponto dado como centro são iguais é mostrar que esta distância corresponde ao raio da circunferência a que estes pontos pertencem. Para isso foram utilizados a definição (4) da métrica da geometria do táxi, os pontos da forma $P = (x, y)$, o centro $O = (o_1, o_2)$ e a relação

$$d_t((x, y), (o_1, o_2)) = r \Leftrightarrow |x - o_1| + |y - o_2| = r.$$

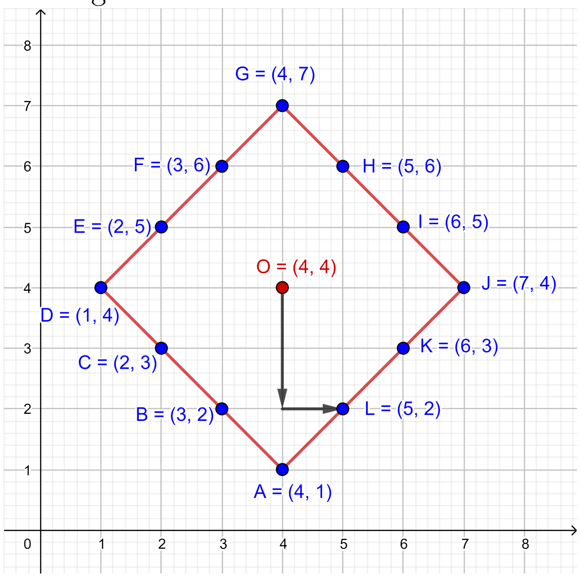
Para facilitar a compreensão foram utilizados os mesmos dados que construíram a circunferência euclidiana para a construção da circunferência do táxi, ou seja, será tomado um ponto $O = (4, 4)$ para o centro e um raio $r = 3$. O objetivo é mostrar que a circunferência aqui construída não será mais circular como a euclidiana.

Esta afirmação se baseia na impossibilidade de percorrer o caminho por cima da malha quadriculada do plano cartesiano, ou seja, só é possível construir os lados pelo contorno da malha quadriculada que representa o percurso entre os pontos dados e o centro.

A Figura 24 tem como objetivo construir o lugar geométrico dos planos do plano equidistantes do centro na geometria do táxi. Para isso foram criados, com os alunos, os pontos no plano cartesiano $A = (4, 1), B = (3, 2), C = (2, 3), D = (1, 4), E = (2, 5), F = (3, 6), G = (4, 7), H = (5, 6), I = (6, 5), J = (7, 4), K = (6, 3), L = (5, 2)$ de tal forma que a distância de cada um deles até o centro $O = (4, 4)$ tenha exatamente 3 unidades contornando a malha quadriculada. Além disto, estes pontos pertencem a percursos que não podem cruzar a malha quadriculado, mas todos eles devem ser encontrados no contorno da malha.

A partir disto, os alunos calcularam a distância de cada um desses pontos em relação ao centro $= (4, 4)$. Contudo, foi discutido que tal distância não seria linear, mas seria determinado pelo contorno da malha constante no plano cartesiano. Na Figura 25 essa distância é representada pelo segmento que une os pontos $O = (4, 4)$ e $L = (5, 2)$. Em seguida foi observado pelo GeoGebra a distância entre cada um dos vértices ao centro.

Figura 25: Circunferência do táxi



Fonte: <Do próprio autor>

Os cálculos a seguir mostram como os alunos determinaram a distância do táxi, d_t entre cada vértice e o centro.

1. Distância pela geometria do táxi $d_t(A, O)$ onde A=(4,1) e O=(4,4):
   $d_t(A, O) = |x_o - x_a| + |y_o - y_a|$
   $d_t(A, O) = |4 - 4| + |4 - 1|$
   $d_t(A, O) = 3$

2. Distância pela geometria do táxi $d_t(B, O)$ onde B=(3,2) e O=(4,4):
   $d_t(B, O) = |x_o - x_b| + |y_o - y_b|$
   $d_t(B, O) = |4 - 3| + |4 - 2|$
   $d_t(B, O) = 3$

3. Distância pela geometria do táxi $d_t(C, O)$ onde C=(2,3) e O=(4,4):
   $d_t(C, O) = |x_o - x_c| + |y_o - y_c|$
   $d_t(C, O) = |4 - 2| + |4 - 3|$
   $d_t(C, O) = 3$

4. Distância pela geometria do táxi $d_t(D, O)$ onde D=(4,1) e O=(4,4):
   $d_t(D, O) = |x_o - x_d| + |y_o - y_d|$
   $d_t(D, O) = |4 - 4| + |4 - 1|$
   $d_t(D, O) = 3$

5. Distância pela geometria do táxi $d_t(E, O)$ onde E=(2,3) e O=(4,4):
   $d_t(E, O) = |x_o - x_e| + |y_o - y_e|$
   $d_t(E, O) = |4 - 2| + |4 - 3|$
   $d_t(E, O) = 3$

6. Distância pela geometria do táxi $d_t(F,O)$ onde F=(3,6) e O=(4,4):
   $d_t(F,O) = |x_o - x_f| + |y_o - y_f|$
   $d_t(F,O) = |4-3| + |4-6|$
   $d_t(F,O) = 3$

7. Distância pela geometria do táxi $d_t(G,O)$ onde G=(4,7) e O=(4,4):
   $d_t(G,O) = |x_o - x_g| + |y_o - y_g|$
   $d_t(G,O) = |4-4| + |4-7|$
   $d_t(G,O) = 3$

8. Distância pela geometria do táxi $d_t(H,O)$ onde H=(5,6) e O=(4,4):
   $d_t(H,O) = |x_o - x_h| + |y_o - y_h|$
   $d_t(H,O) = |4-5| + |4-6|$
   $d_t(H,O) = 3$

9. Distância pela geometria do táxi $d_t(I,O)$ onde I=(6,5) e O=(4,4):
   $d_t(I,O) = |x_o - x_i| + |y_o - y_i|$
   $d_t(I,O) = |4-6| + |4-5|$
   $d_t(I,O) = 3$

10. Distância pela geometria do táxi $d_t(J,O)$ onde J=(7,4) e O=(4,4):
    $d_t(J,O) = |x_o - x_j| + |y_o - y_j|$
    $d_t(J,O) = |4-7| + |4-4|$
    $d_t(J,O) = 3$

11. Distância pela geometria do táxi $d_t(K,O)$ onde K=(6,3) e O=(4,4):
    $d_t(K,O) = |x_o - x_k| + |y_o - y_k|$
    $d_t(K,O) = |4-6| + |4-3|$
    $d_t(K,O) = 3$

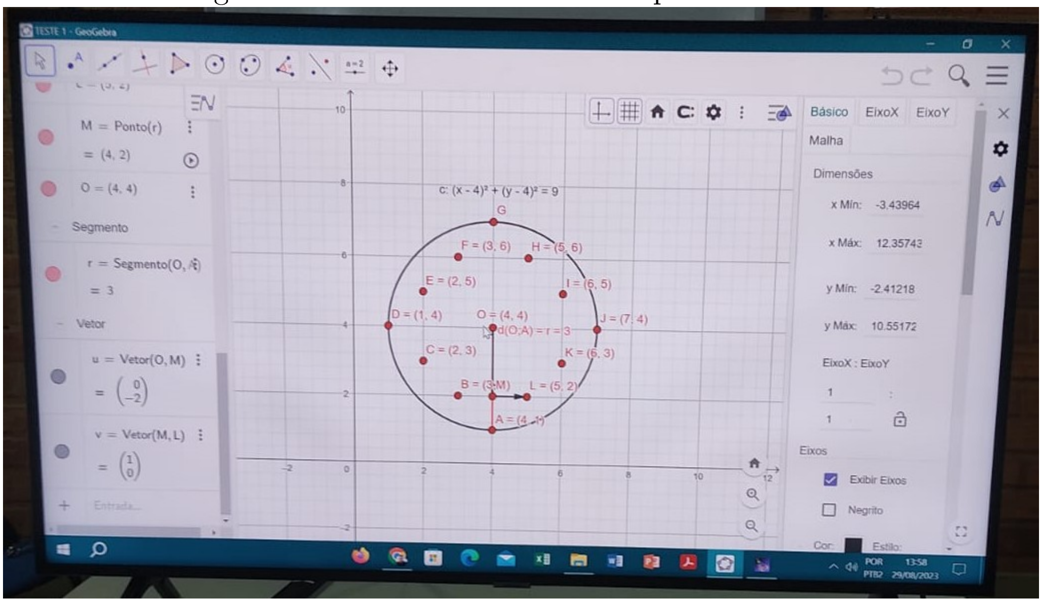
12. Distância pela geometria do táxi $d_t(A,O)$ onde L=(5,2) e O=(4,4):
    $d_t(L,O) = |x_o - x_l| + |y_o - y_l|$
    $d_t(L,O) = |4-5| + |4-2|$
    $d_t(L,O) = 3$

Observe que em todas as operações realizadas o resultado obtido foi igual 3 unidades. Desta forma os alunos perceberam que todos os pontos analisados estão a mesma distância do centro, formando um lugar geométrico de pontos do plano equidistantes do centro, ou seja, uma circunferência.

A partir destes cálculos foi mostrado aos alunos que o lugar geométrico não é o mesmo em todas as geometrias. Note que, mesmo com a igualdade das distâncias encontradas, os pontos não pertencem a circunferência euclidiana construída na Figura 26.

No caso em análise, a circunferência da Figura 26 pertence a geometria euclidiana de centro $O = (4, 4)$ e raio 3, diferente da imagem que começa a ser formada com a posição dos pontos, esta imagem é equivalente ao quadrado da geometria euclidiana, conforme Figura 27.

Figura 26: Circunferência do táxi pelo GeoGebra



Fonte: <Do próprio autor>

Para continuar a análise do lugar geométrico e da figura que foi construída, os alunos calcularam as distâncias do táxi $d_t(A, D)$, $d_t(D, G)$, $d_t(G, J)$, $d_t(J, A)$ e $d_t(A, G)$, $d_t(J, D)$ para analisar o valor que seria encontrado.

1. Determinação da distâncias do táxi $d_t(A, D)$, $d_t(D, G)$, $d_t(G, J)$ e $d_t(J, A)$ a partir das coordenadas dos pontos $A = (4, 1), D = (1, 4), G = (4, 7), J = (7, 4)$.

$$\begin{aligned} d_t(A, D) &= |x_d - x_a| + |y_d - y_a| \\ &= |1 - 4| + |4 - 1| \\ &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_t(D, G) &= |x_g - x_a| + |y_g - y_a| \\ &= |4 - 4| + |7 - 1| \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_t(G, J) &= |x_j - x_g| + |y_j - y_g| \\ &= |7 - 4| + |4 - 7| \\ &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_t(J, A) &= |x_a - x_j| + |y_a - y_j| \\ &= |4 - 7| + |1 - 4| \\ &= 6 \end{aligned}$$

A realização destes cálculos tem como objetivo comprovar a igualdade entre as distâncias do táxi $d_t(A, D)$, $d_t(D, G)$, $d_t(G, J)$ e $d_t(J, A)$. Por enquanto, busca-se mostrar que as distâncias equivalem a um quadrilátero de lados iguais, ou seja, mostrar que ao ligar os pontos A, B, C, D determina-se os lados de um quadrilátero com medidas iguais a 6.

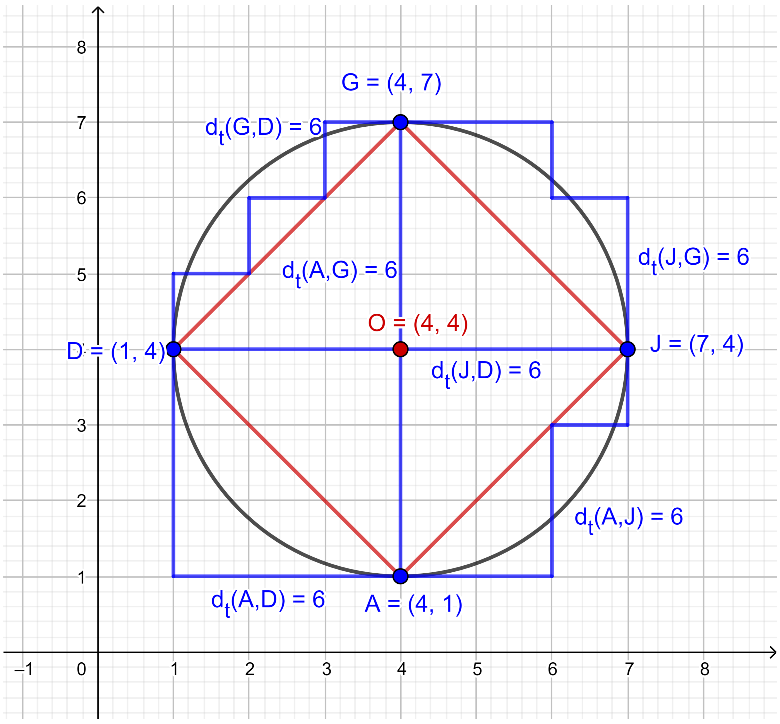
2. Determinação das distâncias do táxi $d_t(A, G)$ e $d_t(J, D)$ a partir das coordenadas dos pontos $A = (4, 1), D = (1, 4), G = (4, 7)$ e $J = (7, 4)$.

$$
\begin{aligned}
d_t(A, G) &= |x_g - x_a| + |y_g - y_a| \\
&= |4 - 4| + |7 - 1| \\
&= 6
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
d_e(J, D) &= \sqrt{(x_d - x_j)^2 + (y_d - y_j)^2} \\
&= |1 - 7| + |4 - 4| \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Os cálculos anteriores buscam comprovar a igualdade entre as distâncias $d_t(A, G)$ e $d_t(J, D)$. Por enquanto, buscam mostrar que os vértices A, G, J, D formam as diagonais de um quadrilátero, ou seja, mostram que as distâncias correspondem as diagonais de um quadrilátero com medida 6.

Após a realização dos cálculos anteriores em sala, ocorreu a visualização das distâncias com o auxilio do GeoGebra, conforme Figura 27.

Figura 27: Elementos da Circunferência do Táxi Construído no GeoGebra 1



Fonte: <Do próprio autor>

Note que todos os lados do quadrilátero possuem distâncias do táxi $d_t = 6$ (mesmo construindo percursos diferentes) e suas diagonais também possuem distâncias do táxi

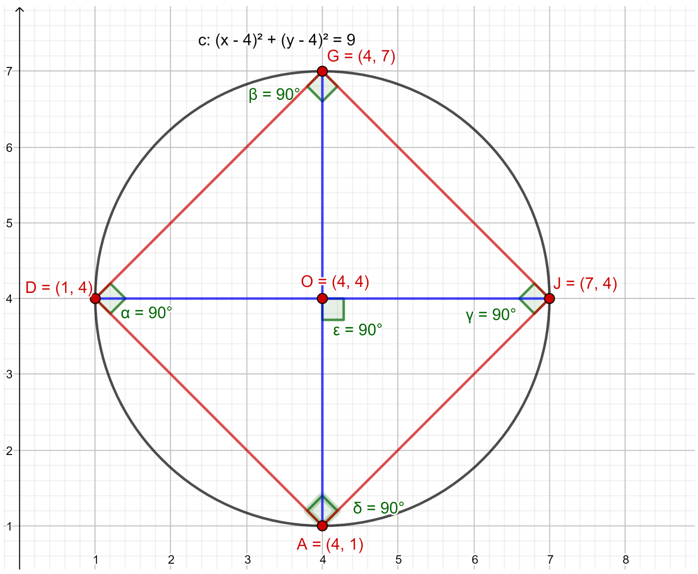
$d_t = 6$. Note ainda que a diagonal do quadrado é igual ao dobro do raio da circunferência euclidiana, conforme verifica-se na Figura 27.

Em seguida foi construída a Figura 28 onde é possível comprovar que os ângulos internos deste quadrilátero e os ângulos formados por suas diagonais são retos, ou seja, iguais a 90°.

Depois das informações obtidas, os alunos foram levados a refletir sobre qual figura geométrica foi formada, uma vez que foi possível provar a partir dos cálculos realizados anteriormente e com o auxílio do GeoGebra que o quadrilátero observado possui:

1. segmentos congruentes, comprovados por meio da distância do táxi, logo possui lados com medida igual a 6;
2. 4 ângulos internos retos
3. as diagonais congruentes e perpendiculares, com medidas iguais a 6;
4. diagonais com comprimento igual ao dobro do raio $(2r)$ da circunferência circunscrita conforme Figura 27.

Figura 28: Elementos da Circunferência do Táxi Construído no GeoGebra 2



Fonte: <Do próprio autor>

Pelas Figuras 27 e 28 os alunos conseguiram concluir que o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a mesma distância do centro na geometria do táxi corresponde ao quadrado da geometria euclidiana.

A importância destas observações com os alunos e os softwares, se dá, pelo fato das figuras geométricas terem formatos diferentes em cada geometria. Por esta razão, frisou-se que a circunferência como lugar geométrico que se conhece, tem um formado diferente na geometria do táxi, ela equivale a figura conhecida como quadrado na geometria euclidiana.

4.4.5 O Valor de π na Geometria do Táxi.

É sabido que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é uma constante. Na geometria euclidiana este valor coincide com o número irracional $\pi = 3,141592...$. Na geometria do táxi foi visto que esta constante resultará em um valor diferente, que inicialmente, será denotado por π_t.

Para determinar o valor do π_t na geometria do táxi, é calculado a razão entre o comprimento da circunferência do táxi pelo seu diâmetro. Essa informação para os alunos não é nova, a novidade para eles é o fato que a circunferência do táxi corresponde ao quadrado que é conhecido na geometria euclidiana, conforme Figuras 27 e 28.

Desta forma, o comprimento da circunferência será equivalente ao perímetro do quadrado e o diâmetro equivalente a sua diagonal com comprimento igual ao dobro do raio $(2r)$ da circunferência circunscrita conforme Figura 27.

Para determinar o perímetro será efetuada a soma dos quatro lados do quadrado e para o diâmetro será calculado o valor de sua diagonal.

Estes cálculos já foram realizados (ver 1) e os valores encontrados para os lados foram

$$d_t(A, D) = d_t(D, G) = d_t(G, J) = d_t(J, A) = 6.$$

Desta forma, o valor do perímetro será dado por:

$$\begin{aligned} 2P &= \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GJ} + \overline{JA} \\ &= 6 + 6 + 6 + 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

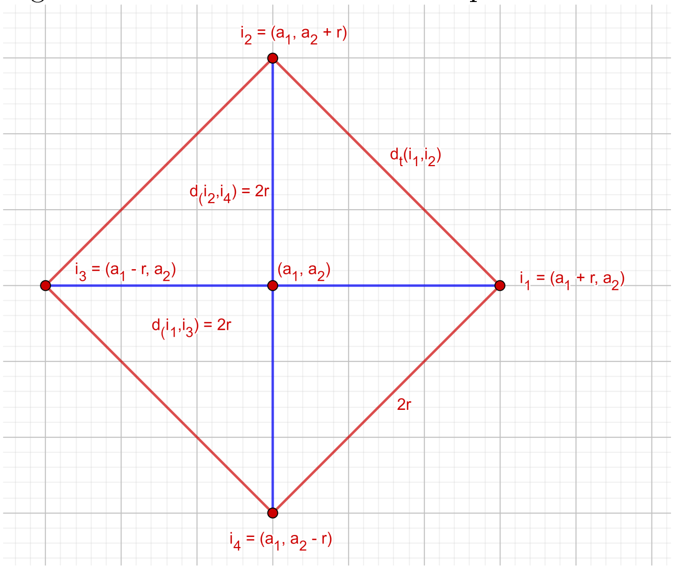
Sobre o valor da diagonal, este também foi calculado por meio das distâncias das diagonais (ver 2) $d_t(A, G) = d_t(J, D) = 6$. Logo o valor do π_t corresponde a:

$$\pi_t = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \frac{\text{perímetro do quadrado}}{\text{diagonal}} = \frac{24}{6} = 4.$$

No exemplo acima $\pi_t = 4$, contudo deve-se verificar se essa relação será verdadeira em todos os casos. Par isso foi construída com os alunos a Figura 29.

A figura traz a circunferência do táxi de centro $A = (a_1, a_2)$ e raio r, cujo vértices possuem coordenadas $i_1 = (a_{1+r}, a_2), i_2 = (a_1, a_{2+r}), i_3 = (a_{1-r}, a_2)$ e $i_4 = (a_1, a_{2-r})$. Desta forma, observa-se que o valor da diagonal do quadrado é $2r$, ou seja, possui valor igual ao diâmetro da circunferência.

Figura 29: Circunferência do táxi pelo GeoGebra



Fonte: <Do próprio autor>

Pela Figura 29, foi calculado o valor do lado do quadrado por meio da d_t de dois vértices consecutivos. E em seguida calculado o seu Perímetro.

$$
\begin{aligned}
d_t(i_1, i_4) &= |x_{i_1} - x_{i_4}| + |y_{i_1} - y_{i_4}| \\
&= |a_1 + r - a_1| + |a_2 - a_2 + r| \\
&= 2r
\end{aligned}
$$

Logo o Perímetro $2P = 4 \cdot 2r = 8r$.

Desta forma é possível determinar π_t pela razão abaixo já conhecida, pois a diagonal já é determinada por $2r$.

$$
\pi_t = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \frac{\text{Perímetro do quadrado}}{\text{diagonal}} = \frac{8r}{2r} = 4
$$

.

Por fim, a geometria do táxi tem suas próprias características, que diferem um pouco da geometria euclidiana e exatamente por isso que se torna tão interessante trabalha-la junto com os alunos. Na história do desenvolvimento científico deve-se sempre buscar novos meios, pois novos caminhos levam a novos conhecimentos. Razão pela qual não se deve jamais parar de se perguntar o porquê das coisas. Pois este é o incansável questionamento que faz a ciência se desenvolver!

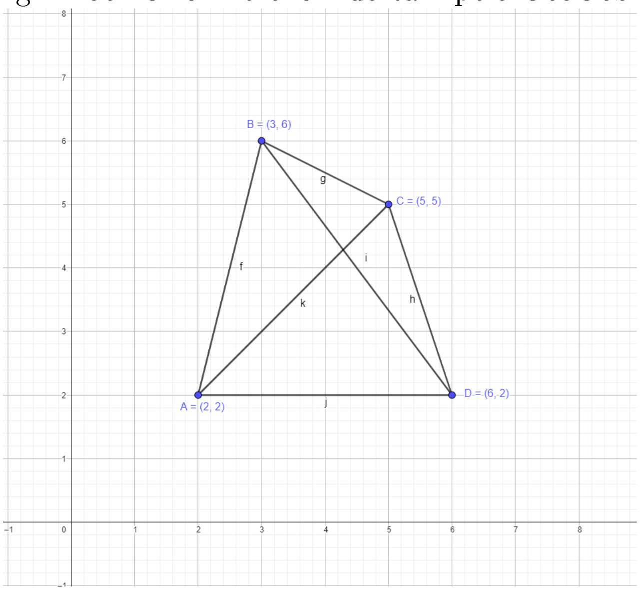
4.5 Verificação de Conteúdo

Após a execução do projeto em sala, onde os alunos inicialmente realizarem a Avaliação Diagnóstica C, trabalharam temas básicos de geometria plana e analítica, utilizaram os softwares Google Earth e Geogebra, foi realizada a Verificação de Aprendizagem D.

Esta avaliação teve como objetivo comprovar se os alunos compreenderam o conteúdo abordado. E desta forma, analisar a evolução entre as duas avaliações realizadas e verificar o nível de aprendizagem dos alunos. Estas foram as questões apresentadas aos alunos:

Com base nos conceitos estudados até aqui sobre a geometria euclidiana e a geometria do táxi, utilize o plano cartesiano da Figura 30 para responderem as questões 1 a 4.

Figura 30: Circunferência do táxi pelo GeoGebra



Fonte: <Do próprio autor>

1. Determine as distâncias euclidianas $d(A, B)$, $d(B, C)$ e $d(D, A)$.

2. Determine as distâncias do táxi $d(A, B)$, $d(B, C)$ e $d(D, A)$.

3. Construa uma circunferência do táxi de centro $A = (3, 3)$ e raio igual a 2.

4. Utilize a circunferência do táxi da questão anterior para determinar o valor do π_t.

A partir da aplicação da verificação de aprendizagem realizada com os alunos, foi possível analisar as respostas dos 24 alunos. A aplicação do teste ocorreu no laboratório de informática conforme Figura 31.

4.5.1 Análise das Respostas dos alunos

A partir de agora será analisada as respostas dos alunos a partir dos conhecimentos adquiridos sobre o tema.

Figura 31: Alunos Respondendo a Verificação de Conteúdo

Fonte: <Do próprio autor>

Depois de terem revisado os conteúdos básicos sobre o plano cartesiano, o sistema de coordenadas e os pares ordenados, os alunos não tiveram dificuldade em identificar os pontos no plano cartesiano e calcular a distância euclidiana e a distância do táxi.

Na resolução da segunda questão associaram a ideia do percurso entre as malhas quadriculadas, fato que não trouxe grandes dificuldades na resolução da questão.

Em relação a construção da circunferência do táxi, a análise foi interessante, tendo em vista que os alunos passaram toda a vida escolar conhecendo a circunferência na forma circular. Quando foram desafiados a construir uma circunferência que teria a forma de um quadrado, eles ficaram diante de um grande dilema.

Porém, após a primeira construção onde conseguiram perceber que as distâncias/percursos construíam os lados, perceberam que a construção seria possível e bem interessante.

E assim foi feito, após conseguirem construir o quadrado, veio outro desafio, a determinação do π, uma vez que já era de conhecimento deles que o seu valor é encontrado por meio da razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. Ocorre que, no quadrado não é visualizado o comprimento ou o seu diâmetro, porém após a orientação, ficou fácil relacionar o comprimento da circunferência com o perímetro do quadrado e o diâmetro com a diagonal do quadrado.

Outra discussão levantada foi o resultado da quarta questão, onde encontraram um valor de π diferente daquilo que já estavam acostumados, aquilo que foi chamado de π_t. Para todos os alunos, o valor de π era aproximadamente igual a $3,14$. Desta forma, determinar um $\pi_t = 4$ e aceitar um valor diferente foi um desafio.

De modo geral, a resolução dos alunos foi bastante satisfatória. Foi possível identificar que as questões onde os alunos apresentaram mais dificuldades foram aquelas que envolveram a construção da circunferência do táxi e a da determinação do π_t. Contudo, após a resolução foi realizado o comentário da verificação de aprendizagem onde foi possível esclarecer as dúvidas restantes.

Por fim, perceberam que o tema tratava-se de uma geometria diferente, onde o mais importante na observação da distância não é um linha reta, tendo em vista que, em alguns casos, na geometria do táxi esse fato é impossível. O mais importante foi perceber que a distância é dada pelo percurso possível a ser percorrido.

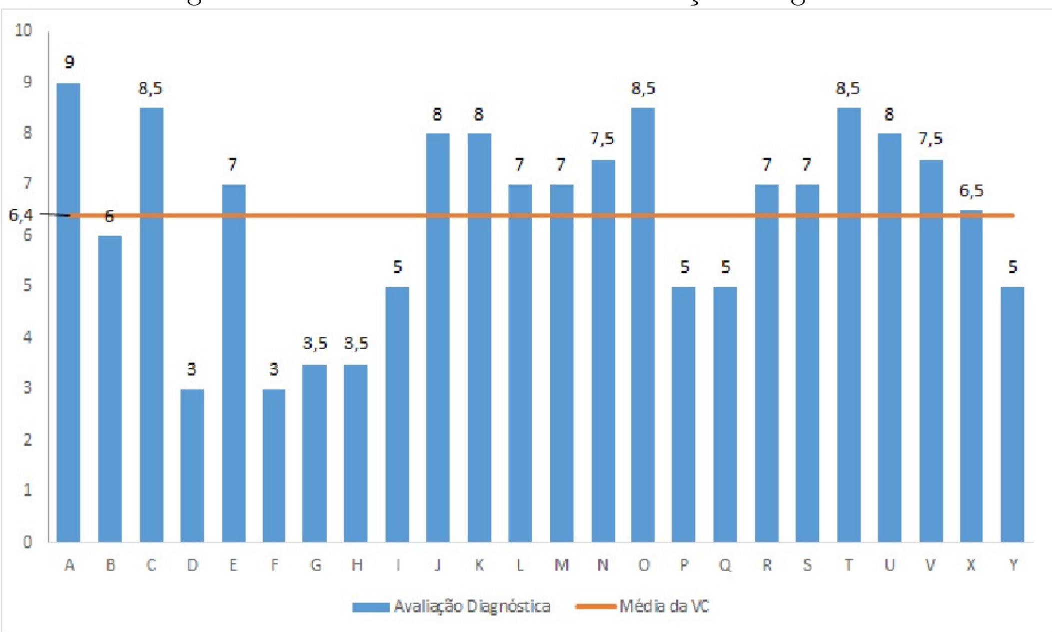
4.6 Dos Resultados da Pesquisa

A pesquisa foi realizada com 24 alunos da 3ª série do ensino médio da Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz. No primeiro momento foram informados que participariam de um projeto de pesquisa ao qual seria trabalhado uma geometria que eles ainda não tinha estudado na escola e todos ficaram bastante interessados.

Por esta razão, a primeira atividade a ser realizada foi a Avaliação Diagnostica C. Seu objetivo foi identificar qual o nível de conhecimento prévio que eles teriam sobre o assunto. Após a execução do projeto com os alunos, foi realizada a Verificação de Aprendizagem D com o objetivo de verificar se os alunos teriam uma maior facilidade na compreensão dos conteúdos após o uso dos softwares. E com isso analisar se o seu uso é um facilitar no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Após a correção da Avaliação Diagnostica C, verificou-se que a média entre as notas foi de $6,4$ pontos, conforme é possível observar no gráfico da Figura 32 que traz a marcação horizontal em laranja indicando esta média.

Figura 32: Gráfico das notas da Avaliação Diagnóstica



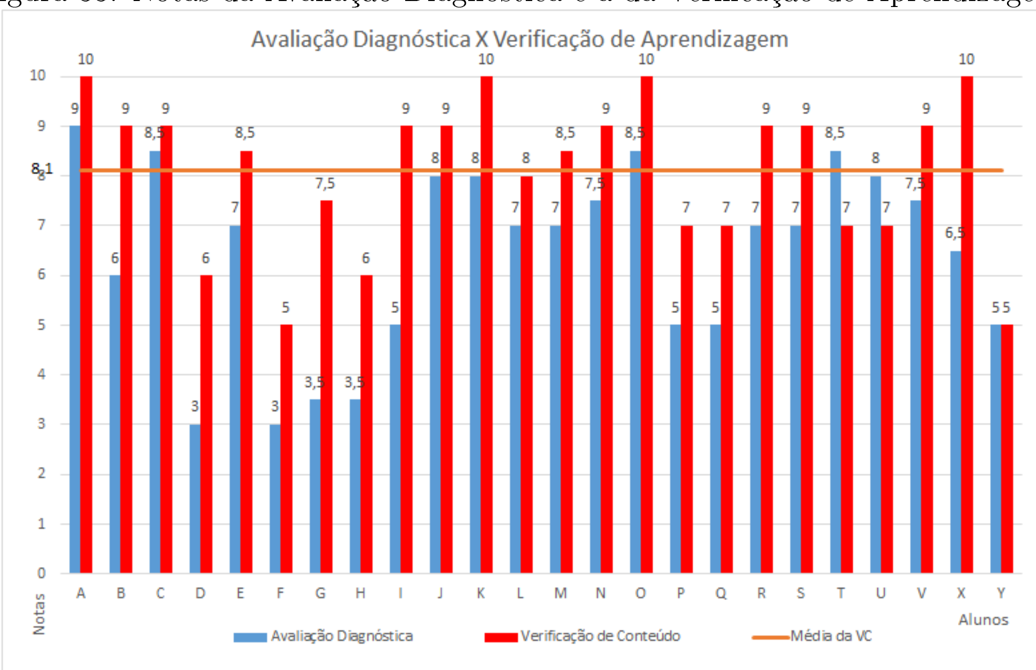
Fonte: <Do próprio autor>

Percebe-se ainda que os alunos obtiveram um desempenho bem variados. Ao serem questionados sobre os conteúdos da avaliação diagnostica C, 10 alunos afirmaram que já tinham um conhecimento prévio do assunto mesmo que de forma superficial.

Quando perguntados se já tinham estudando sobre os conhecimentos básicos de geometria afirmaram que não lembravam ou que já fazia muito tempo que tinham estudado aquele assunto.

Após a aplicação do projeto com a apresentação dos softwares, a realização das atividades e a aplicação da verificação de conteúdo, houve uma melhora significativa entre as médias dos alunos conforme representado no gráfico da Figura 33. Tendo em vista, que na avaliação diagnostica C os alunos obtiveram uma média de $6,4$ pontos e na verificação de aprendizagem D obtiveram uma média de $8,1$ pontos.

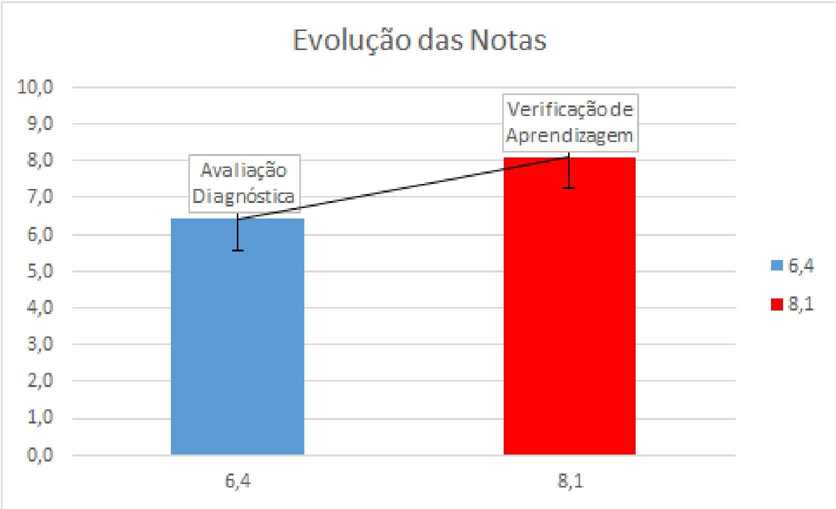
Figura 33: Notas da Avaliação Diagnóstica e a da Verificação de Aprendizagem



Fonte: <Do próprio autor>

Desta forma, é possível efetuar uma análise mais concreta sobre a aprendizagem dos alunos que participaram do projeto. Ao comparar as suas médias na Avaliação Diagnostica C e na verificação de Aprendizagem D. Desta forma, verifica-se um aumento qualitativo de 27% sobre a média geral dos alunos que participaram do projeto.

Figura 34: Evolução entre a Avaliação Diagnóstica e a Verificação de Aprendizagem



Fonte: <Do próprio autor>

Pela Figura 34 é possível visualizar a evolução dos alunos durante a execução do projeto. Note ainda que obtiveram um aumento significativo em suas notas após a verificação de aprendizagem.

As avaliações foram compostas por questões diferentes, com o objetivo de acompanhar a aprendizagem dos alunos com o uso de softwares. Além disso observou-se que ao retirar os alunos da tradicional sala de aula e levá-los para o laboratório de informática foi um fator fundamental para facilitar a sua compreensão do conteúdo.

Desta forma, verificando que os alunos obtiveram um resultado melhor em uma avaliação com um grau de dificuldade superior e que o interesse entre eles cresceu assim como a sua motivação em continuarem evoluindo os seus estudos, é possível concluir que o projeto contribuiu de forma positiva no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

5 Considerações Finais

Trabalhar a geometria do táxi com os alunos da 3ª série do ensino médio foi um grande desafio, pois os mesmos deveriam lembrar dos conceitos básicos da geometria euclidiana e estabelecer as relações necessárias com a geometria do táxi.

O projeto que deu início a presente dissertação teve como objetivo inicial mostrar para os alunos uma geometria diferente daquela que já era conhecida e estudada por eles. E ainda verificar se o uso de softwares tem o poder de auxiliar no processo de ensino-aprendizagem facilitando ou não a absorção de conteúdos matemáticos.

Alguns alunos afirmam que a geometria não é de fácil compreensão, tendo em vista que alguns problemas só conseguem ser resolvidos por meio de construções geométricas auxiliares. Contudo, a geometria tem uma beleza contagiante, como disse Johannes Kepler: "A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la."

Com esse pensamento os professores de matemática devem buscar maneiras de mostrar aos alunos que a geometria está em todos os lugares, basta um pouco de sensibilidade para perceber e relacionar com o conteúdo que está sendo trabalhado em sala de aula. Essa relação com o seu cotidiano é exatamente o que os alunos esperam.

O ensino da geometria assim como de toda a matemática não deve se limitar a rigidez do quadro e da posição em fila dos alunos em sala de aula, ela é bem maior que isso, o seu ensino deve invadir o mundo que está ao nosso redor. Na própria sala de aula podemos observar as paredes, o chão, o teto, colunas, pilares e as próprias carteiras para iniciar uma aula de geometria a partir da sua relação com os entes primitivos.

Por esta razão se deu a escolha do tema, a geometria do táxi tem suas particularidades, mas não se trata de um conteúdo de difícil compreensão ou que necessite de conhecimentos prévios complexos que tornem seu estudo complicado. Pelo contrário o estudo da geometria do táxi é muito interessante e de fácil compreensão, pois a maioria dos alunos estuda apenas a geometria euclidiana durante a vida escolar, acreditando que a matemática é limitada aos conteúdos programáticos do ensino fundamental e médio.

Um dos objetivos deste projeto, foi desmistificar a teoria da geometria do táxi para os alunos com o objetivo de mostrar que eles são capazes de aprender um conteúdo matemático novo, mesmo sem nunca terem estudado algo a respeito.

Ademais, este trabalho não tem como único objetivo demostrar teoremas ou métricas da geometria euclidiana e da geometria do táxi, ou ainda ser um ponto final na análise e aplicação do tema. Pelo contrário, esta dissertação tem como principal objetivo ser um ponto contínuo para o estudo da geometria do táxi, e ainda que possa ser utilizado como fonte de pesquisa para demais projetos que venham a analisar e construir trabalhos de pesquisa ou de campo a partir dos pontos aqui abordados.

Não se pode duvidar que a influência dos trabalhos de Euclides na matemática são indiscutíveis. Contudo, todo conhecimento deve ser questionado, caso contrário não haveria a evolução da ciência. Se Gauss, Lobachevsky, Reimamn e Minkowski tivessem aceitado todas as afirmações de Euclides e de outros matemáticos as geometrias hiberbólica, esférica e do táxi não existiriam e se deixaria de ter variam explicações e demostrações que se tem hoje.

Com esse importante exemplo da evolução matemática, esta pesquisa trouxe as definições e demostrações básicas de métrica e espaços métricos que fundamentaram as métricas euclidiana e do táxi que serviram de alicerce para a execução das atividades realizadas com os alunos em sala.

Durante a execução desta pesquisa, foi possível perceber, que o papel do professor é fundamental para desconstruir o pensamento de auto-sabotagem que existe na mente de alguns alunos que acreditam não serem capazes de aprender qualquer assunto relacionado a matemática.

Não faz parte da atuação do professor permitir que os alunos por si só desistam do conhecimento matemático sem ao menos tentar, sem que o detentor do conhecimento e das estratégias de ensino busque mecanismos que relacionem o conteúdo que está sendo visto em sala de aula com o cotidiano dos alunos.

As atividades iniciais que foram propostas e realizadas pelos alunos na plataforma do Google Earth já indicaram que o projeto seria bem recebido por eles. Essa percepção é fundamental para o professor identificar quais ferramentas e metodologias deve utilizar para facilitar a aprendizagem dos alunos.

Um fato muito importante que chamou a atenção dos alunos foi a construção dos percursos, quando perceberam que eles exercitavam os conceitos básicos da geometria todos os dias no caminho de casa à escola, perceberam que aquele assunto não seria tão difícil de entender quando achavam a primeira vista que seria.

Os alunos entenderam que os questionamentos abrem uma grande possibilidade para o conhecimento. E uma das aulas que levantou mais questionamentos e perguntas dos alunos foi a construção da circunferência do táxi, onde foi construído um lugar geométrico de pontos no plano que estão a mesma distância do centro e não é aquela figura circular conhecida, mas que este lugar pode resultar em outra figura, como a de um quadrado.

Ao relacionar o meio tecnológico que eles já estão inseridos a um conteúdo matemático, todos eles demostram interesse em participar das atividades e já perguntam o que devem fazer, razão pela qual em vários momentos foi realizado os cálculos em sala e visualizado nos softwares.

A utilização dos softwares matemáticos foi muito importante, pois o Google Earth e o GeoGebra mostraram pra os alunos que é possível ver uma matemática mais palpável, uma geometria mais real. E mais, a partir da utilização destes softwares os conteúdos que foram abordados em sala, foram fixados de forma mais clara na mente dos alunos, prova disso, foi a evolução das notas nas avaliações aplicadas.

Por fim, conclui-se que todos os conteúdos matemáticos podem e devem ser contextualizados, ou seja, relacionar aquilo que esta sendo ensinado com o cotidiano dos alunos é um fator primordial no processo de ensino-aprendizagem matemático. O professor deve sempre buscar mecanismos e metodologias de ensino que facilitem a compreensão e o aprendizagem dos alunos. Além disso, foi indiscutível a melhoria da absorção dos conteúdos pelo alunos após a utilização dos softwares Google Earth e GeoGebra, pois proporcionaram uma maior percepção e visualização do conteúdo matemático pelos alunos.

Referências

[1] ABREU, João Francisco de; BARROSO, Leônidas Conceição (Org.) **Geografia, modelos de análise espacial e GIS.** Belo Horizonte: PUC-Minas, 2003. p. 231.

[2] BASNIAK. Maria Ivete,ESTEVAM. Everton José Goldoni. **GeoGebra e a matemática da educação básica G345 frações, estatística, círculo e circunferência** / organização Maria Ivete Basniak, Everton José Goldoni Estevam – Curitiba: Ithala, 2014.

[3] BONGIOVANNI, Vicenzo; JAHN, Ana Paula. **De Euclides às geometrias não euclidianas.** Revista Iberoamericana de Educatíon Matemática, São Paulo, v. 1, n. 22, p.37-51, jun. 2010.

[4] CÉSAR, Sulamita Maria Comini. **Geometria Táxi: Uma investigação através de atividades didáticas. 2010.** 96 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universicade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. Disponível em: http://www1.pucminas.br/ Acesso em: 17 jan. 2020

[5] CRUZ, Edivaldo Oliveira da. **Geometria do táxi: a táxi-elipse.** 2015. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/scav2/gettcc3.php?id=76693. Acesso em: 15 jan. 2020.

[6] DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática.** Portugal: Gradiva, 1995. 401p.

[7] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[8] EUCLIDES. **Elementos de Euclides**. versão latina de FREDERICO COMMANDINO.São Paulo: Edições Cultura, 1944 ISBN - Não indicado Fonte: Biblioteca do Clube de Engenharia da Bahia Obra digitalizada por: Neuziton Torres Rapadura - neuzitontr@terra.com.br Colaboração voluntária

[9] FERNANDES, Denise Aparecida Perini. **LUGARES GEOMÉTRICOS NAS GEOMETRIAS EUCLIDIANA X TÁXI: Conceitos e Possibilidades de Abordagem no Ensino. 2017.** 111 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/scav2/gettcc3.php?id=150880681. Acesso em: 15 jan. 2020

[10] GAUDÊNCIO, R. **Um Estudo Sobre a Construção do Conceito de Função.** Natal: Universidade Federal UFRN, 2000. (Tese de Doutorado), Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/zetetike/include/getdoc.php?id=184article=59mode=pdf> Acesso em: 20 jul. 2009.

Disponível:<https://guiadoestudante.abril.com.br/curso-enem/geometria-a-logica-do-quadriculado> Acesso em 25 de jul 2023.

[11] IMPA. **A crise dos fundamentos da matemática** Disponível em: <https://impa.br/noticias/a-crise-dos-fundamentos-da-matematica/>. Acesso em 25 de jul 2023.

[12] KRAUSE, Eugene F.. **táxicab Geomtry: An adventure in non-euclidean geometry.** New Iork: Dover, 1986.

[13] LAKATOS, Eva Maria. MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

[14] LEIVAS, J. C. P. **Geometrias não euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. Educação Matemática** Pesquisa: revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática, v. 15, n. 3, p. 647–670, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/ 16187>. Acesso em: 14 jul. 2020.

[15] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1993. 299 p.

[16] MOL, Rogério Santos. **Introdução à História da Matemática.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducaoahistoriadamatematica.pdf. Acesso em: 18 maio 2020.

[17] NORONHA, Claudianny Amorim. **As geometrias urbanas e isoperimétrica: uma alternativa de uso em sala de aula.** 2006. 190 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/14544. Acesso em: 04 out. 2018.

[18] PEREIRA, Leonardo Romão et. al. **O uso da tecnologia na educação, priorizando a tecnologia móvel**. 2012. Disponível em: http://www.senept.cefetmg.br/galerias/ Anais2012/GT-02/GT02-014.pdf. Acesso em: 26 set. 2020.

[19] PINA, Romildo da Silva. O v axioma de Euclides. Revista da Olimpíada, Goiânia, n. 1, p. 101-108, 2000.

[20] PORTAL EDUCAÇÃO. **Informática na Educação: Vantagens.** Disponível em: <https://siteantigo.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/conteudo/informatica/5379>. Acesso em 15 de jan 2020.

[21] STRUIK, D.J.(1989) **História Concisa das Matemáticas.** Gradiva."

[22] TATIANE Scarpari Conzatti. **A CIÊNCIA DA MATEMÁTICA EM AMBIENTES INFORMATIZADOS E SEM AMBIENTES INFORMATIZADOS.** 2011. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2011

[23] UOL EDUCAÇÃO. **Geometria euclidiana - História e os axiomas** Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/geometria-euclidiana-historia-e-os-axiomas.htm?cmpid=copiaecola>. Acesso em 20 de jun 2023.

[24] VALENTE, José Armando. O computador na Sociedade do Conhecimento. São Paulo, SP: USP, 1999.

[25] WIKIPEDIA.**Geometria do táxi** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometriadotáxi>. Acesso em 30 de jun 2023.

[26] WIKIPEDIA.**Google Earth** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/GoogleEarth>. Acesso em 30 de jun 2023.

[27] WIKIPEDIA.**GeoGebra** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geogebra>. Acesso em 30 de jun 2023.

A Plano de Aula 1

Plano de aula referente a execução da pesquisa de campo na turma do 3ª série do ensino médio na UENSP escola pública estadual do Piauí sobre o conteúdo Geometria do Táxi.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Plano de Aula

Dados de Identificação	
Escola:	Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz
Professor:	Emmanoel Campello da Luz
Orientador:	Prof. Dr. Natã Firmino
Disciplina:	Matemática
Série:	3ª série do Ensino Médio
Tema:	O Uso do Google Earth e do GeoGebra no Ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI.
Conteúdo:	Geometria
Data:	06 e 08 de junho de 2023
Duração :	04 horas aulas

1) Objetivos

1.1) Geral

Utilizar as ferramentas do Google Earth para compreender os fundamentos da geometria do táxi em paralelo com os fundamentos da geometria euclidiana com os alunos da 3ª série do ensino médio.

1.2) Específicos

- Compreender os conceitos de distância pela geometria plana e pela na geometria do táxi;
- Analisar por meio das informadas fornecidas pelo programa Google Earth a diferença entre as distâncias nas duas geometrias e verificar qual é a menor e qual podemos percorrer.

2) Conteúdos programáticos

- Distância entre dois pontos na geometria euclidiana e do táxi;
- Razão entre distâncias.

3) Metodologia

O conteúdo será ministrado por meio de aulas práticas intercalando entre a sala de aula e o laboratório de informática onde os alunos serão incentivamos a ter um pensamento construtivos dos conceitos que serão discutidos com o objetivo de formar os conceitos.

4) Procedimentos Metodológicos

- Localizar no mapa fornecido pelo software as duas escolas da UESNP;
- Calcular a menor distância em linha reta entre as escolas;
- Calcular o menor percurso possível entre as escolas;
- Determinar a razão entre os valores encontrados e perceber qual é a maior.

5) Recursos Didáticos

- Quadro branco;
- Pincéis;
- Apagador;
- Lista de exercícios;
- Material multimídia: Notebook, mouse, data show e passador de slides;
- Software Educacional: Google Earth, GeoGebra.

6) Verificação da Aprendizagem

A avaliação será realizada a partir de exercícios de classe que, além de servir como instrumento avaliador, também servirá para enriquecer o tema e fornecer mais exemplos e situações práticas. Além disso, com o desenvolvimento do tema em sala, será feita uma atividade avaliativa ao final das aulas, para fins de verificação de aprendizagem.

7) Referências

1. MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Softwares Educacionais. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1247/>. Acesso em: 26 de Novembro de 2019.

2. LIMA, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio.Volume 02. Elon Lages Lima, Paulo Cézar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. 7 ed.Rio de Janeiro: SBM, 2016.

B Plano de Aula 2

Plano de aula referente a execução da pesquisa de campo na turma do 3ª série do ensino médio na UENSP escola pública estadual do Piauí sobre o conteúdo Geometria do Táxi.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Plano de Aula

Dados de Identificação	
Escola:	Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz
Professor:	Emmanoel Campello da Luz
Orientador:	Prof. Dr. Natã Firmino
Disciplina:	Matemática
Série:	3 série do Ensino Médio
Tema:	O Uso do Google Earth e do GeoGebra no Ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI.
Conteúdo:	Geometria
Data:	27 e 29 de Dezembro de 2019
Duração :	04 horas aulas

1) Objetivos

1.1) Geral

Utilizar as ferramentas do GeoGebra e o sistema de coordenadas do plano cartesiano para compreender os fundamentos da geometria do táxi em paralelo com os fundamentos da geometria euclidiana com os alunos da 3ª série do ensino médio.

1.2) Específicos

• Compreender os cálculos das distâncias entre dois pontos na Geometria Plana e pela na Geometria do táxi;

• Analisar a construção das circunferências formadas a partir da ideia de lugar geométrico e das equações de distância nas geometrias euclidiana e do táxi

• Determinar o valor de π nas geometrias euclidiana e do táxi.

2) Conteúdos programáticos

- Distância entre dois pontos na geometria euclidiana e do táxi;
- Circunferência;
- O valor de π na circunferência.

3) Metodologia

O conteúdo será ministrado por meio de aulas práticas intercalado entre a sala de aula e o laboratório de informática onde os alunos serão incentivamos a ter um pensamento construtivos dos conceitos que serão discutidos com o objetivo de formar os conceitos.

4) Procedimentos Metodológicos

- Calcular a distância euclidiana e a do táxi com o auxílio do plano cartesiano e a sobreposição de ambas no mesmo plano utilizando o software GeoGebra;
- Construir as circunferência euclidiana e do táxi a partir das suas equações e sobrepô-las no mesmo plano cartesiano para que os alunos visualizem a diferença entre elas utilizando o programa GeoGebra;
- Calcular o comprimento das circunferências euclidiana e do táxi.
- Determinar o valor do π nas geometrias euclidiana e do táxi a partir da razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro e perceber a diferença entre os valores encontrados.

5) Recursos Didáticos

- Quadro branco;
- Pincéis;
- Apagador;
- Lista de exercícios;
- Material multimídia: Notebook, mouse, data show e passador de slides;
- Software Educacional: Google Earth, GeoGebra;

6) Verificação da Aprendizagem

A avaliação será realizada a partir de exercícios de classe que, além de servir como instrumento avaliador, também servirá para enriquecer o tema e fornecer mais exemplos e situações práticas. Além disso, com o desenvolvimento do tema em sala, será feita uma atividade avaliativa ao final das aulas, para fins de verificação de aprendizagem.

7) Referências

1. MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Softwares Educacionais. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1247/>. Acesso em: 26 de Novembro de 2019.

2. LIMA, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio.Volume 02. Elon Lages Lima, Paulo Cézar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. 7 ed.Rio de Janeiro: SBM, 2016.

C Avaliação Diagnóstica

Avaliação diagnóstica referente a execução da pesquisa de campo realizada com a turma da 3ª série do ensino médio na UENSP escola pública estadual do Piauí sobre o conteúdo Geometria do Táxi.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dados de Identificação	
Escola:	Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz
Professor:	Emmanoel Campello da Luz
Orientador:	Prof. Dr. Natã Firmino
Disciplina:	Matemática
Série:	3ª série do Ensino Médio
Conteúdo:	O Uso do Google Earth e do GeoGebra no Ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI.
Subtema:	Geometria
Data:	13 de junho de 2023
Duração :	02 horas aulas

Avaliação Diagnóstica

Figura 35: Mapa entre as escolas

Fonte: <Do próprio autor>

Observe que a imagem que corresponde ao bairro Vila da Paz onde estão localizadas a Fundação Nossa senhora da Paz juntamente com a Igreja da Vila da Paz e a Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz.

Com base nestas informações utilize a posição de cada uma para responder as questões que seguem.

1. O que você entende por distância?

2. Como você calcularia a distância entre dois pontos?

3. Qual o percurso que você escolheria da Fundação Nossa Senhora da Paz até a Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz?

4. O que é uma circunferência?

5. O que você entende por comprimento de uma circunferência?

6. Qual o valor do número π(pi) e como é possível determiná-lo?

D Verificação de Aprendizagem

Verificação de aprendizagem referente a execução da pesquisa de campo realizada com a turma da 3ª série do Ensino Médio da UESNP sobre o conteúdo da Geometria do Táxi.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROP

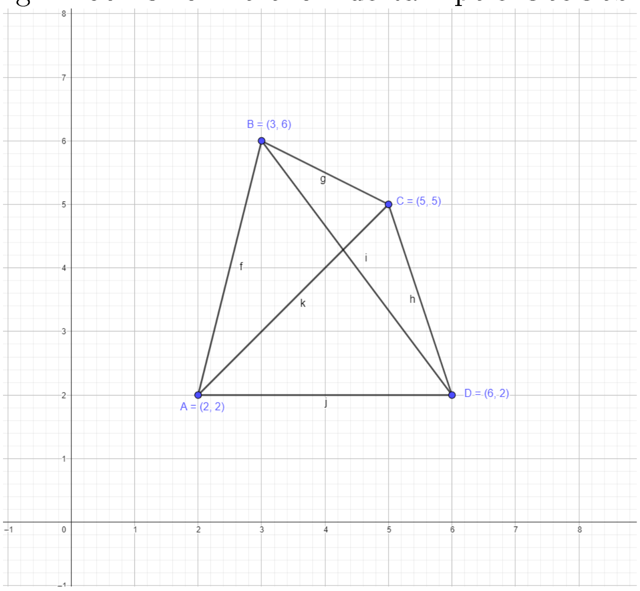
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dados de Identificação	
Escola:	Unidade Escolar Nossa Senhora da Paz
Professor:	Emmanoel Campello da Luz
Orientador:	Prof. Dr. Natã Firmino
Disciplina:	Matemática
Série:	3ª série do Ensino Médio
Conteúdo:	O Uso do Google Earth e do GeoGebra no Ensino da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana: uma abordagem com alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública de Teresina-PI.
Subtema:	Geometria
Data:	22 de agosto de 2023
Duração :	02 horas aulas

Verificação de Aprendizagem

Com base nos conceitos estudados até aqui sobre a geometria euclidiana e a geometria do táxi, utilize o plano cartesiano abaixo para responderem as questões 1 a 4.

Figura 36: Circunferência do táxi pelo GeoGebra



Fonte: $< https : //www.geogebra.org/calculator >$

1. Determine as distâncias euclidianas $d(A, B)$, $d(B, C)$ e $d(D, A)$.
2. Determine as distâncias do táxi $d(A, B)$, $d(B, C)$ e $d(D, A)$.
3. Construa uma circunferência do táxi de centro $A = (3, 3)$ e raio igual a 2.
4. Utilize a circunferência do táxi da questão anterior para determinar o valor do π_t.