Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

Aldeni Rosa da Silva

Por que usamos símbolos em Matemática?

Niterói-RJ

2013

ALDENI ROSA DA SILVA

POR QUE USAMOS SÍMBOLOS EM MATEMÁTICA?

Trabalho de conclusão de Curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Cecília de Souza Fernandez.

Niterói – RJ

2013

ALDENI ROSA DA SILVA

POR QUE USAMOS SÍMBOLOS EM MATEMÁTICA?

Trabalho de conclusão de Curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Aprovada em 10 de junho de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Cecília de Souza Fernandez – Orientadora
UFF

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
UFF

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva
UERJ

Profª. Drª. Ana Maria Luz Fassarela
UFF

Niterói – RJ
2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

S586 Silva, Aldeni Rosa da.

Por que usamos símbolos em matemática? / Aldeni Rosa da Silva

. – Niterói, RJ : [s.n.], 2013.

60 f.

Orientador: Prof.ªDrª.Cecília de Sousa Fernandes

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, 2013.

DEDICATÓRIA

À ***Denise Mont Serrat***, minha mulher – ***eu te amo*** – pelo esforço que ***multiplicamos***: eu para escrever e ela fazendo as ***múltiplas*** correções, dando sugestões e ainda mantendo o controle do lar.

À minha ***mãe*** e ***primeira professora*** que tive – ***Mariana Rosa*** (mãe biológica), ***Zeny Rosa*** (mãe-irmã), ***Elza Vianna*** (mãe-madrinha) e ***Aristeu*** (tio-pai Chumbinho) – agradeço pelas minhas raízes, por me ter ensinado ***Amar a Vida*** e por ter feito ***gostar de estudar***.

Homenagem ***especial*** a minha ***professora e orientadora – Cecília de Souza Fernandez*** – que em sala de aula conseguiu tirar leite de pedra e teve coragem de orientar uma pedra.

Homenagem ***especial*** a minha ***professora – Mirian Abdón*** – que em sala de aula conseguiu tirar leite de pedra e teve a paciência de ouvir minhas lamentações, não deixando que eu largasse o curso.

Homenagem ***especial*** aos meus ***professores – Dirce, Lhaylla, Carla, Alex, Mário, Humberto*** – que em sala de aula conseguiram tirar leite de pedra.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por todas as bençãos, saúde, força e perseverança para concluir este trabalho.

Agradeço a minha querida esposa, *Denise*, aos meus filhos, Talita, Nina, Aldenise e Aldeni, aos meus netos, Alan e Igor. Obrigado por vocês existirem em minha vida.

Agradecimento especial a minha professora e orientadora *Cecília de Souza Fernandez*, não só pelos conhecimentos matemáticos que me foram dados, mas também por sua dedicação, muito apoio e muita paciência em todos os momentos, sem os quais este trabalho jamais teria brotado. Haja regador! Muito obrigado!

Agradeço a professora *Mirian Abdón*, pelas palavras de ânimo, pelo incentivo e por sua ajuda num momento crucial dessa minha etapa, e, se essa ajuda, providencial, não tivesse ocorrido eu não teria terminado este curso. Muito obrigado!

Agradeço a *Paul Farsoun*, meu aluno e mais tarde se tornou meu professor.

Agradeço aos meus professores do mestrado, que conseguiram tirar leite de pedra, com quem tive a honra e o prazer de aprender (não sei se eles tiveram prazer em ensinar a uma pedra!). Também agradeço aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica durante toda a minha vida.

Agradeço e me sinto honrado de fazer parte da turma PROFMAT-2011. Embora eu sinta muito inveja da inteligência de vocês, fico agradecido por vocês me considerarem no mesmo nível. Muito obrigado pela união de nossa turma! Muito obrigado por me aturarem, me incentivarem, me ajudarem, ETC.! Muito obrigado, minha nova família!

Não posso terminar esse meu agradecimento sem mencionar o professor *Saponga*. Todos os professores que tive no PROFMAT gostavam, e, tinham o prazer de nos ensinar, mas quando o professor *Saponga* ia nos visitar eu sintia o seu orgulho pela nossa turma. Professor, desculpe eu ser a decepção da turma! Enquanto meus colegas estudavam uma hora, eu tinha que estudar 100! Muito obrigado por sentir orgulho de minha turma! Na próxima encarnação não o decepcionarei!

RESUMO

A Matemática existiu em toda a civilização antiga da qual se tem registros. Nestes registros, os historiadores constatam a utilização de uma simbologia, desenvolvida diferentemente pelos povos antigos. Atualmente, são vários os símbolos usados em Matemática, podendo ser entendidos quase que universalmente.

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns motivos razoáveis para o uso de símbolos em Matemática e apresentar a história do surgimento de alguns deles. Como são muitos, escolhemos tratar da história dos algarismos **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** e **9**, chamados de algarismos hindu-arábicos, e também dos símbolos atualmente usados para denotar as quatro operações aritméticas básicas, ou seja, os símbolos **+, –, ×** e **÷**. Estes símbolos aparecem nos livros didáticos desde as séries iniciais mas, em geral, nenhuma menção histórica do seu surgimento é feita. Também apresentamos a história do surgimento dos símbolos **sen, cos, tg**, que representam o **seno, o cosseno** e a **tangente** de um ângulo.

Palavras chaves: História da Matemática; Algarismos hindu-arábicos; Operações Aritméticas Básicas; Trigonometria; Ensino.

ABSTRACT

Mathematics existed in every ancient civilization of which there are records. In these records, historians notice the use of symbols, differently developed by ancient civilizations. Now a days, there are many symbols used in Mathematics, which can be recognizad almost universally.

The aim of this work is to present some reasonable reasons for the use of symbols in Mathematics and to present the history of the appearance of some of them. Since there are many of them, we choose to treat about the numbers **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** e **9**, called the indian-arabic numbers, and to treat about the symbols used now a days to denote the four basic arithmetic operations, that is, the symbols **+, –,** × and ÷. These symbols appear in textbooks since the beginning of elementary school but, in general, there is no mention of their appearance. We also present the history of the symbols **sin, cos, tg**, which are used to denote the **sine, cosine** and **tangent** of an angle.

Keywords: History of Mathematics; Indian-arabic numbers; Basic arithmetic operations; Trigonometry; Teaching.

Sumário

1. Introdução 10
2. Por que usamos símbolos em Matemática? 13
2.1. A escrita 13
2.2 A História da Matemática 16
2.3. O uso de símbolos na Matemática. 21
3. Os algarismos hindu-arábicos 24
3.1. A contagem 24
3.2. A base 10 26
3.3. Sistema hindu-arábico 28
4. Somar, subtrair, multiplicar e dividir: a matemática do cotidiano 32
4.1. Operações aritméticas básicas 32
4.2. Os símbolos +, –, x e ÷ 35
5. Símbolos da trigonometria 40
5.1. O que é trigonometria? 40
5.2. Notações do seno, cosseno e tangente 47
6. Considerações finais 50
7. Apêndice 51
8. Bibliografia 63

1. Introdução

Por que da escolha do tema *notação matemática* (*símbolos*) para o nosso trabalho?

Mais ou menos em dezembro de 1973 fiz o meu primeiro vestibular. A prova era dada pela *FUNDAÇÃO CESGRANRIO* (Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio) e era dividida em três *áreas*: *COMCITEC* (área tecnológica ou exata), *COMBIMED* (área de medicina ou biológica) e *COMSART* (área humana). No meu caso a prova era *COMCITEC*, pois fiz para FÍSICA.

Comecemos do início. Tive, sempre, a sorte de ter *excelentes professores*. Um desses excelentes professores foi a *Professora ALBA* (ou *ELBA*, não lembro). Naquela época era costume o professor acompanhar os seus alunos nas três séries do científico (hoje chamado de *Ensino Médio*). Eu estudava à noite no *Colégio Industrial Henrique Lage* e fazia o *Curso Técnico de Eletrotécnico*. O livro adotado era o "*Tijolinho*" (como costumávamos chamá-lo!), i.e., "*Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico*" do autor "*Manoel Jairo Bezerra*". Na página 155 do "*Tijolinho*", temos as palavras *conjunto, pertence, elemento, contém* (e só!). Nada de símbolos para representar, o que hoje chamamos, "*Teoria dos Conjuntos*".

Na página 156 do "*Tijolinho*", temos as palavras "*O Conjunto dos números inteiros*", não havendo um símbolo para esse conjunto. Também, neste livro, na página 157, temos que "*Correspondência é um conceito primitivo, não se define*", e mais conceitos matemático importantes como: "*Correspondência unívoca*" e "*Correspondência biunívoca*". Mas não há definição de *função sobrejetora, injetora e bijetora*. Nessa mesma página temos "*Números Racionais*", "*Números Irracionais*" e "*Números Reais*", sem nenhuma menção aos *símbolos*.

Nas páginas 165 até 178, o capítulo XI de *FUNÇÕES* do "*Tijolinho*", faz-se a definição de várias funções e seus gráficos, sem nenhuma menção aos *símbolos*.

Observemos que no "*Tijolinho*" *não são mencionados função modular*, *equação modular* e, muito menos, *inequação modular*. Na prova, que finalmente consegui encontrar, que está copiada abaixo, a questão 4 é uma inequação modular. Daí vocês podem imaginar uma prova escrita em grego!!!

Eis uma questão da prova:

> **"4) O conjunto solução da desigualdade $|x + 1| - |x| \leq x + 2$ é:**
>
> **(A) $[-3, 0] \cup [1, 73]$ (B) $\{x / x \leq 0\} \cup [3, 15]$ (C) $[-3, 0] \cup \{x / x \geq 0\}$ (D) $\{x / -5 < x < -1\} \cup \{x / 1 < x < 17\}$ (E) $[-4, 2] \cup [-2, 1]$ "**

As opções são terríveis para quem nunca viu tais notações. Nesta prova devia-se marcar a opção verdadeira. À íntegra da prova está num Apêndice no final deste trabalho.

Assim foi o meu primeiro vestibular em 1973, pela *CESGRANRIO* (já mencionado anteriormente). Eu pensava que estava preparado para qualquer prova de Matemática. A 'novidade' desse vestibular era que, pela 1ª vez, as questões eram de múltipla escolha (cada questão apresentava cinco opções onde uma, e somente uma era correta). A outra 'novidade', que fiquei sabendo na hora de fazer a prova, era a tal "Matemática Moderna". Imaginem o susto que levei!

A seguir, apresentamos uma citação do livro *Aritmética*, de Manuel Jairo Bezerra, sobre a introdução de uma nova simbologia na Matemática.

> Quando acabamos de escrever a primeira edição deste "Caderno de Matemática", em 31 de julho de 1963, a ***Matemática Moderna*** estava engatinhando na nossa Escola de Grau Médio e ainda não havia livros didáticos, iniciando essa renovação da Matemática. Não julgamos então aconselhável apresentar um trabalho auxiliar do livro texto, para alunos e mestres, introduzindo o que os livros de classe ainda não haviam introduzido.
>
> Prestamos essa satisfação aos mestres que, ao verem surgir por motivos independentes da nossa vontade, em 1965, o nosso Caderno de Aritmética escrito em 1963, estranharam que não tivéssemos, ao menos, feito uma referência à revolução que se processava no ensino da Matemática.
>
> Agora, entretanto, após três anos de experiências (em escolas de alguns Estados), apesar de sabermos que muitos professores ainda não se animaram ou não se dispuseram a introduzir o ensino da Matemática Moderna, estamos certos, também, de que muitas são as escolas onde os professores já tornaram esse ensino uma realidade, o que nos faz crer que se torna necessário apresentarmos exercícios, visando a esse ensino, mesmo que seja como um adendo, anexo ou complemento.
>
> E é como um complemento que propomos os exercícios que se seguem, que poderão ser feitos por aqueles que já tiveram a oportunidade de travar

> conhecimento com essa forma moderna de apresentar a Matemática. (BEZERRA, Manoel Jairo - Aritmética - 3. ed. - Rio de Janeiro: FENAME - MEC, 1965).

Por causa de toda a minha frustração em meu primeiro vestibular, tenho, desde então, muito interesse pela *história da Matemática* e, em particular, pela *história dos símbolos matemáticos.*

O objetivo deste trabalho é apresentar razões para o uso de símbolos em Matemática e apresentar a história de alguns símbolos matemáticos usados pelos alunos dos ensinos fundamental e médio.

No Capítulo 2 vamos apresentar um pouco sobre a origem da escrita, que marca o início da linha do tempo para a *História da Matemática*. Alguns historiadores concordam que ela se inicie por volta de 3.500 a.C. com o começo da escrita dos sumérios: a escrita cuneiforme. Também vamos apresentar a importância da *História da Matemática* e a necessidade de usarmos símbolos em Matemática.

No Capítulo 3 vamos tratar sobre os símbolos usados na contagem. De fato, os historiadores acreditam que o conceito de contagem é um conceito que, provavelmente, existiu mesmo antes das civilizações. Como os escritos datam a partir de 3.500 a.C., a palavra provavelmente não pode ser omitida. *Contar* é a mais simples ideia matemática e parece ser difícil acreditar que contar não tenha se originado com o ser humano.

No Capítulo 4 vamos tratar sobre os símbolos usados na aritmética. Somar e multiplicar, subtrair e dividir, são noções básicas e muito importantes para qualquer civilização. Os símbolos destas operações aparecem nos livros didáticos dos ensinos fundamental e médio, mas nenhuma menção é feita sobre a história deles.

No Capítulo 5 vamos apresentar os símbolos atualmente usados na trigonometria. Esses símbolos surgiram por volta do século XVIII e aparecem nos livros didáticos do ensino médio, também sem nenhuma menção sobre seu surgimento.

No Capítulo 6 faremos algumas considerações finais.

2. Por que usamos símbolos em Matemática?

2.1. A escrita

A Matemática existiu em toda a civilização antiga da qual se tem registros. Mas, em todas essas civilizações, ela estava no domínio de sacerdotes de alta hierarquia religiosa e de oficiais de médio posto do governo em vigência. Essas pessoas tinham como função usar e desenvolver a Matemática para praticar rituais religiosos, elaborar calendários, melhorar a arrecadação de impostos, além de utilizá-la para a atividade do comércio e construção civil. Embora a origem de muitos conceitos matemáticos se deu pela sua utilização nessas áreas, matemáticos sempre exercitaram sua curiosidade estendendo muitas ideias além das necessidades práticas. Contudo, como a Matemática era uma ferramenta de poder religioso e político, seus métodos eram transmitidos para os mais privilegiados, geralmente através de uma tradição oral. Dessa forma, os registros escritos sobre a Matemática antiga são raros e geralmente não oferecem muitos detalhes.

Recentemente, entretanto, muito esforço acadêmico tem sido feito para reconstruir a Matemática das civilizações antigas a partir de qualquer informação que possa ser achada. Naturalmente, muitos especialistas em História da Matemática não concordam em todos os pontos, mas existe bastante concordância para podermos afirmar que símbolos sempre fizeram parte da escrita em Matemática. De fato, a escrita é formada por símbolos ou desenhos. As pessoas que vivem em uma mesma comunidade compreendem o significado dos seus símbolos e se comunicam por meio deles. O domínio da escrita facilitou a comunicação e a contabilidade dos Estados. O rei de um império tinha de saber, por exemplo, a *quantidade* de sacas de trigo estocadas nos celeiros, *quantas* ovelhas havia numa determinada região governada por ele ou o *número* de funcionários que trabalhavam para o governo. Com a escrita, essas informações não precisavam mais ficar guardadas na memória. É importante observar que todas essas informações envolvem a noção de contagem, que é uma noção matemática. A figura a seguir (Figura 1) mostra a invenção da escrita em diferentes civilizações. É importante saber que as antigas civilizações[1] não vieram umas depois das outras. Pelo contrário, muitas coexistiram durante séculos e, embora localizadas em regiões diferentes, e por vezes distantes, mantiveram contato entre si.

[1]**Civilização**: por civilização chamamos a uma etapa do desenvolvimento de alguns povos sedentários, caracterizado pela existência de cidades, pelo excedente de produção agrícola (suficiente para alimentar os não agricultores) e pela especialização das atividades políticas, militares e religiosas, todas sustentadas pelos impostos pagos pelos agricultores.

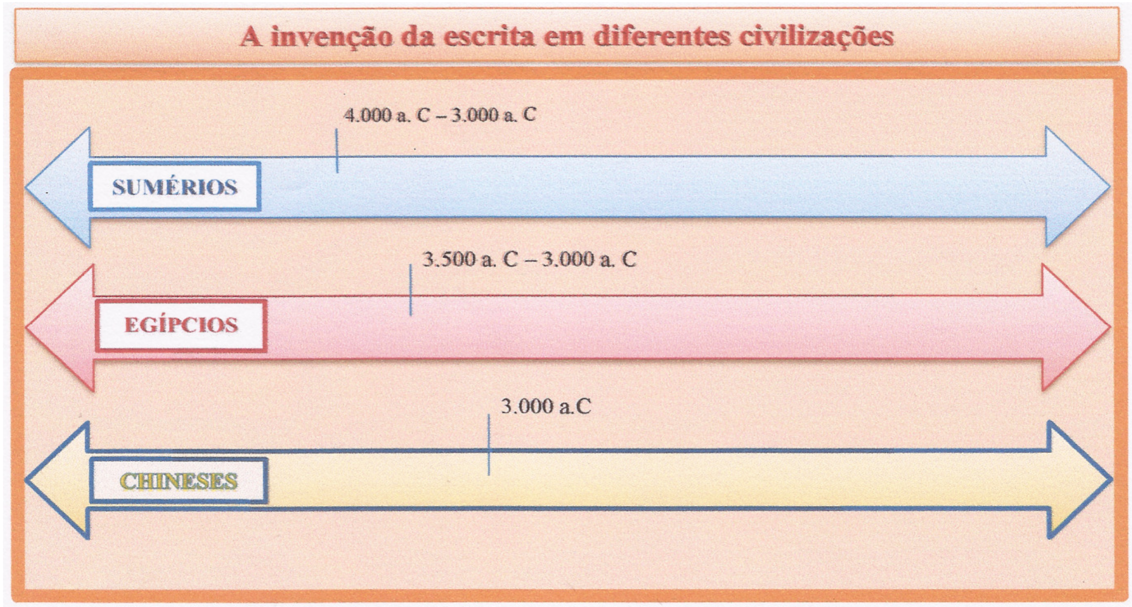


Figura 1

Como vimos, os povos foram inventando formas de se comunicar ao longo do tempo. Provavelmente, os sumérios e os egípcios inventaram a escrita na mesma época. Cada um desses povos criou seus próprios símbolos para registrar, por exemplo, as informações sobre as colheitas, o recebimento de impostos, a história de seus reis e de seus deuses. Observe na figura a seguir (Figura 2) um modelo sumério de símbolos gráficos.

Fonte: FERREIRA, Olavo Leonel. *Mesopotâmia:* o amanhecer da civilização. São Paulo: Moderna, 1998. (Coleção Desafios)

Figura 2

A civilização Suméria é a mais antiga civilização. Data de aproximadamente 4.000 a.C. No extremo sul da Mesopotâmia, entre os rios Tigre e Eufrates (área onde posteriormente se desenvolveu a civilização Babilônica que hoje corresponde ao sul do Iraque, entre Bagdad e o Golfo Pérsico), aí floresceram várias cidades sumérias.

Já a civilização Egípcia data de aproximadamente 3.500 a.C. Os egípcios criaram uma sociedade baseada no aproveitamento das águas do rio Nilo para a agricultura. No início, a sociedade egípcia era dividida em dois grandes reinos: um ao norte e o outro ao sul. Por volta de 3.300 a.C., o reino do sul venceu o do norte e o Egito se transformou num estado único. A administração deste território fez surgir a criação de um sistema de escrita – a escrita hieroglífica. Ao passarem a utilizar o papiro para fazer os seus registros, os egípcios desenvolveram um sistema de escrita mais rápido – a escrita hierática. Esses sistemas de escrita serão tratados no próximo capítulo.

2.2 A História da Matemática

"História" é uma palavra com dois significados. Falamos em história quando queremos nos referir a qualquer fato ocorrido no passado, como quando dizemos: "A independência do Brasil aconteceu em 1822". Nesse primeiro sentido, podemos dizer que a história é o **conjunto de fatos do passado**, de tudo o que já passou ou aconteceu.

Também falamos em história quando queremos nos referir ao trabalho do historiador, como quando dizemos: "Outro dia li um livro sobre a história do Brasil". Nesse segundo sentido, podemos dizer que a história é a **interpretação** do historiador sobre o passado. O historiador só conhece as partes do passado que têm registros preservados, que precisam ser interpretados. Cada historiador faz a sua reconstrução do que aconteceu, de acordo com seus conhecimentos, sua maneira de ver o mundo e etc. Por isso, os mesmos acontecimentos estudados por diferentes historiadores podem levar a conclusões também diferentes.

Assim acontece com a história da Matemática. Portanto, seus especialistas não concordam em todos os pontos. Entretanto existe bastante concordância para afirmarmos que símbolos sempre estiveram presentes na Matemática. A história desses símbolos faz parte da história da Matemática que é, muitas vezes, deixada de lado pela grande maioria dos professores dos ensinos fundamental e médio. Acreditamos que os professores do ensino básico precisam ter conhecimentos da história da Matemática para poderem motivar os seus alunos. De fato, segundo a M. A. A. (Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber.

Nas páginas a seguir apresentamos uma linha do tempo para a história da Matemática, de acordo com parte da bibliografia usada neste trabalho. Como não é possível dar as datas precisas dos fatos matemáticos descritos, os fatos apresentados ocorreram no intervalo de tempo entre os números acima da linha vermelha. Assim, por exemplo, os fatos matemáticos dispostos na "*coluna 1800*" ocorreram entre **1700** e **1900**, que são as datas das colunas anterior e posterior, respectivamente, da "coluna 1800". Na "coluna 2000", dispomos a apresentação da Matemática na atualidade, segundo o CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa), já que fica difícil apresentar os resultados mais importantes da área no final do século XX, uma vez que ela se encontra bastante ramificada.

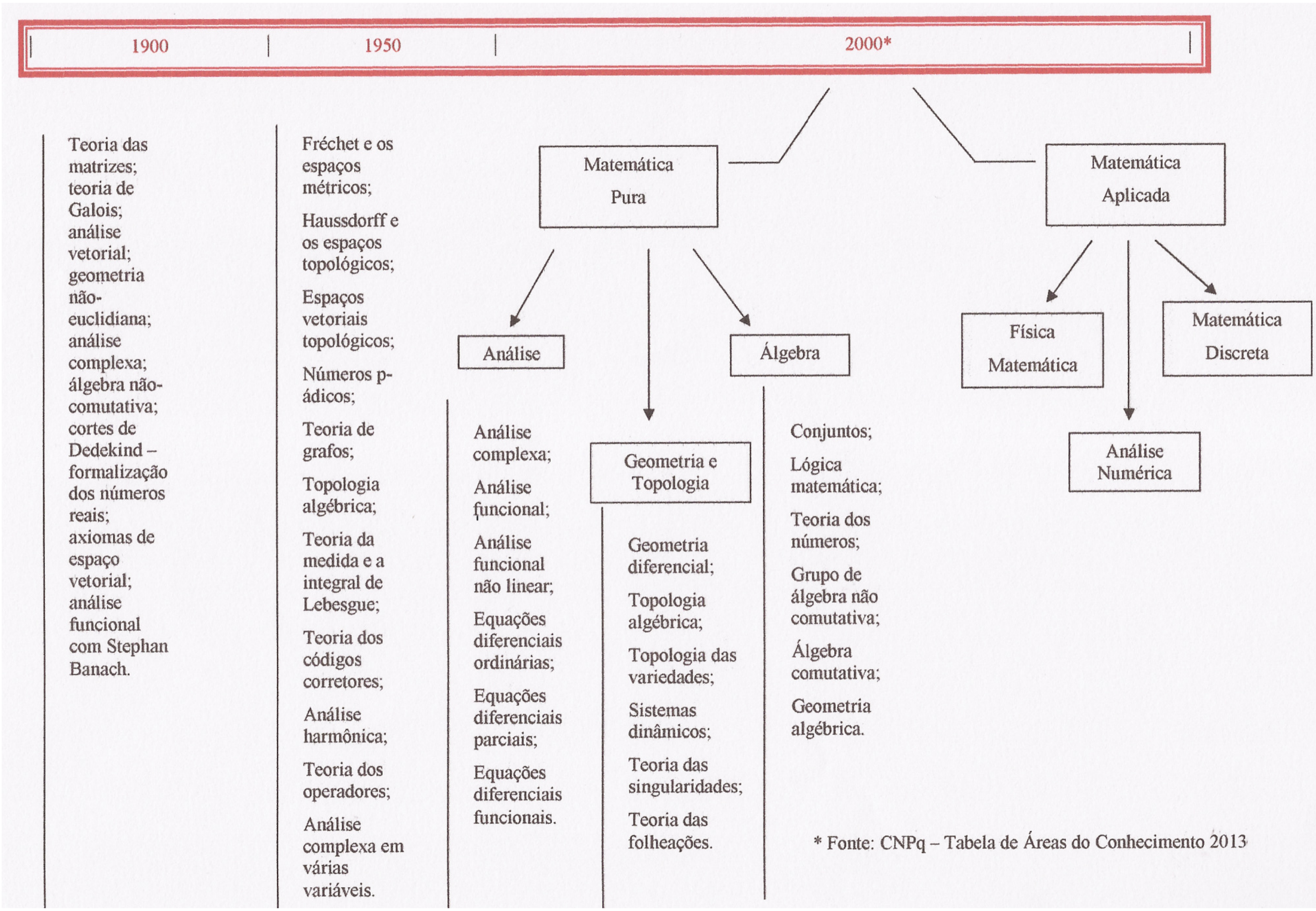
> "A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os

conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.” (PCN´s Ensino Fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 42).

Linha do tempo para a história da Matemática

3500 a.C.	2000 a.C.	1000 a.C.	500 a.C.	300 a.C.	200 a.C.	0
Origem da escrita; origem da escrita dos números; Contagem.	Ideias de áreas e volumes; equações lineares.	Equações quadráticas; sistemas com duas equações lineares.	Cálculos de raiz quadrada; teorema de Pitágoras; medida do círculo; Euclides e “Os elementos” – começo da geometria.	Algoritmo para raiz quadrada e raiz cúbica; sistemas até cinco equações lineares; ternos pitagóricos; volume de uma pirâmide.	Começo da trigonometria; seções cônicas; começo da Física teórica com Arquimedes.	Nascimento de Jesus Cristo – Origem do cristianismo.

500	1000	1500	1600	1700	1800
Diofantus e teoria dos números; desenvolvimento do sistema decimal hindu-arábico; primeiras tabelas com valores de tangente; números irracionais.	Geometria usada na Arquitetura; indução e o triângulo de Pascal; volumes de parabolóides; fórmula de Bháskara; sistemas de equações lineares.	Solução de equações polinomiais; descoberta das séries de potências para seno e cosseno; perspectiva; Viète e o simbolismo algébrico.	Física celeste com Kepler e Newton; logaritmos com Napier; invenção do cálculo com Newton e Leibniz; teoria dos números com Fermat; geometria analítica; geometria projetiva.	Derivada; áreas e volumes; problemas de máximo e mínimos; determinantes; Teorema Fundamental da Álgebra com Gauss; Teorema Fundamental do Cálculo com Newton e Leibniz.	Séries de Taylor; derivadas parciais; os irmãos Bernoulli e o problema da Braquistócrona; Euler com Álgebra, Teoria dos Números, Geometria e Topologia; desenvolvimento do cálculo de várias variáveis; lógica de Boole; integral de Riemann.



* Fonte: CNPq – Tabela de Áreas do Conhecimento 2013

2.3. O uso de símbolos na Matemática.

Como vimos, os símbolos foram usados nas civilizações antigas com as mais diversas finalidades. Atualmente isso também ocorre, pois os símbolos são elementos importantes no processo de comunicação. Embora existam símbolos que só são compreendidos dentro de um grupo ou contexto muito particular, como os símbolos religiosos e os símbolos nacionais, existem símbolos que são reconhecidos internacionalmente, como os símbolos cartográficos (Figura 3) e os símbolos matemáticos (Figura 4).

Exemplos de alguns símbolos cartográficos

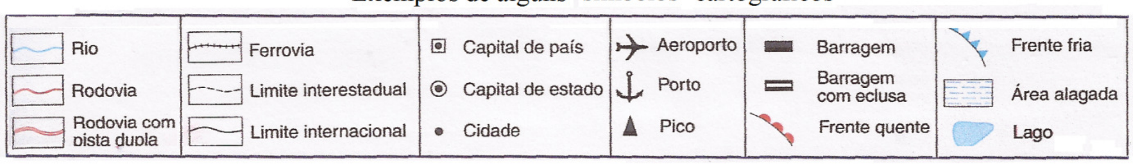


Figura 3

Exemplos de alguns símbolos matemáticos

$+$ **soma**	$-$ **subtração**	$\times$ **multiplicação**
$\div$ **divisão**	$=$ **igual**	$\bullet$ **multiplicação**
$<$ **menor que**	$>$ **maior que**	$\therefore$ **donde**
$\leq$ **menor ou igual**	$\geq$ **maior ou igual**	$\pi = 3{,}14159...$
$\wedge$ **e**	$\vee$ **ou**	$e = 2{,}71828...$
$\in$ **pertence**	$\notin$ **não pertence**	$\mid$ **tal que**
$\subset$ **está contido**	$\not\subset$ **não está contido**	$\forall$ **qualquer que seja**
$\cup$ **união**	$\cap$ **interseção**	$\neq$ **diferente**
$\%$ **porcentagem**	$\perp$ **ortogonal**	$\Rightarrow$ **implica**
$i = \sqrt{-1}$	$z = a + bi$ **complexo**	$\bar{z} = a - bi$ **conjugado**
ϕ **conjunto vazio**	$\approx$ **proporcional**	$\cong$ **aproximado**
$\operatorname{sen}\alpha$ **seno do ângulo** α	$\cos\alpha$ **cosseno do ângulo** α	$\operatorname{tg}\alpha$ **tangente do ângulo** α
$\frac{a}{b}$ **'a' dividido por 'b'**	$\sqrt[n]{\ }$ **raiz n-ésima**	$\Leftrightarrow$ **se e somente se**
$\lim\limits_{x\to\alpha}$ **limite de 'x' tendendo a** α	$y' = \frac{dy}{dx}$ **derivada**	$\int$ **integral**
$\vec{A} \bullet \vec{B}$ **produto escalar**	$\vec{A} \times \vec{B}$ **produto vetorial**	$\int_a^b dx$ **integral definida de 'a' até 'b'**

Figura 4

Da mesma maneira que os cartógrafos desenvolveram uma série de símbolos, aceitos internacionalmente na forma de convenção, para que um mapa possa ser compreendido independentemente do país em que foi produzido, os matemáticos também criaram uma série de símbolos, que podem ser entendidos por um matemático, independentemente de sua nacionalidade. De fato, em que idioma escrever a expressão

$$\mathbf{215 + 470 = 685}? \quad (1)$$

Como

"two hundred and fifteen plus four hundred and seventy is equal six hundred and eighty five"?

Ou como

"doscientos quince más cuatrocientos setenta es igual a seiscientos ochenta y cinco"?

Ou talvez como

"διακόσιες δεκαπέντε πάνω από τετρακόσια εβδομήντα ισούται με εξακόσιες ογδόντα πέντε"?

Pelo o exposto acima, acreditamos que os seguintes motivos são razoáveis para o uso de símbolos em Matemática:

1º) Os símbolos matemáticos permitem nos expressarmos matematicamente de maneira universal, sem nos preocuparmos com que idioma utilizar (*Idiomas são vários, mas Matemática é universal!*);

2º) A expressão em (1) é bastante clara, uma vez conhecidos os símbolos nela utilizados. Note que, ao usarmos palavras, o texto fica longo e, dessa forma, cansativo podendo, assim, aumentar a possibilidade de erros (*A simbologia matemática oferece clareza, ou seja, a simbologia matemática oferece um melhor entendimento em comparação com a descrição por palavras!*);

3º) Os símbolos matemáticos são importantes para o próprio desenvolvimento da Matemática. Imaginemos como efetuar cálculos se tivermos que escrever uma solução em parágrafos. Como desenvolver Álgebra sem usar o símbolo "**x**"? (*Símbolos são vitais para o próprio desenvolvimento da Matemática!*).

Observamos que um dos mais bem-sucedidos construtores de símbolos matemáticos usados na atualidade foi ***Euler*** [2]. *Euler* escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, em quase todos os seus escritos. Por exemplo, o uso definitivo da letra grega "**π**" para a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro é em grande parte devido a *Euler*, embora uma ocorrência anterior se encontre em 1706, um ano antes do nascimento dele. Foi a adoção do símbolo "**π**" por *Euler* em 1737, e mais tarde em seus muitos e populares livros texto, que o tornou largamente conhecido e usado.

Em geometria, álgebra, trigonometria e análise encontramos também símbolos de *Euler*, bem como terminologia e ideias. O uso das letras minúsculas **a, b, c** para os lados de um triângulo e das maiúsculas correspondentes **A, B, C** para os ângulos opostos vem de *Euler* (Figura 5), assim como a aplicação das letras **r, R** e **s** para o raio dos círculos inscritos e circunscrito e o semiperímetro do triângulo, respectivamente (Figura 6). O uso da letra "**Σ**" para indicar adição e a notação "*f* (x)" para denotar uma função de **x** são exemplos de outras notações de *Euler* usadas até hoje.

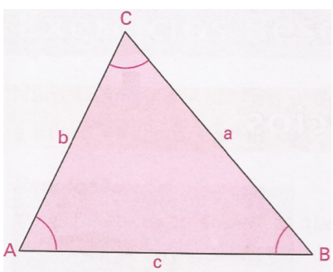


Figura 5

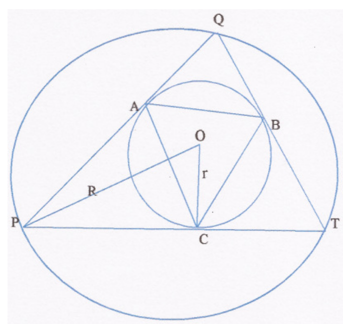


Figura 6

Nos capítulos a seguir vamos apresentar a história de alguns símbolos matemáticos. Como existem muitos símbolos usados em Matemática, vamos nos deter em apenas alguns. Dentre eles, os algarismos **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** e **9,** chamados de *algarismos hindu-arábicos*[3]. Também vamos apresentar a história dos símbolos **+, –, x, ÷,** símbolos das operações aritméticas básicas, e dos símbolos **sen, cos, tg,** que são símbolos que representam o *seno*, o *cosseno* e a *tangente* de um ângulo.

[2]***Leonhard Paul Euler*** (Suíça, 1707-1783) é considerado o matemático mais prolífero de toda a história. Era também astrônomo, físico, engenheiro e químico. A coleção completa dos livros e trabalhos científicos de *Euler* (mais de 870 artigos e livros) chega a mais de ointenta volumes. Ele deu grandes contribuições à geometria analítica, trigonometria, cálculo infinitesimal e teoria dos números, continuando a trabalhar mesmo depois de ter ficado quase cego em 1771. Sua prodigiosa memória permitia que realizasse complexos e longos cálculos mentais e, dessa forma, ditar seus artigos para seus filhos e outros, até a sua morte.

[3]**Hindu**: Devido à confusão entre *indianos ocidentais* (*índios*) e *indianos orientais* (*indianos*) é comum chamar-se estes últimos de ***hindu***. Embora essa distinção não seja estritamente correta, torna-se conveniente para evitar mal-entendidos.

3. Os algarismos hindu-arábicos

3.1. A contagem

Contar é a mais simples ideia matemática e, provavelmente, existia mesmo antes da civilização. Embora um estudo interessante pode ser feito sobre palavras para números em várias línguas, nos restringimos aqui para uma discussão de símbolos numéricos. Vários métodos de organização podem ser distinguidos na escrita destes símbolos. Um desses métodos é chamado de método de agrupamento. Na sua forma mais simples, um traço vertical, “ | ”, é usado para representar o número 1; repetições apropriadas são tomadas para representar números maiores.

Figura 7
Fonte: Eves, Howard – pág. 26

Uma das primeiras ocorrências datadas (= *registros*) de tal representação de números está em um osso fossilizado descoberto em Ishango no Zaire (a Figura 7 ao lado mostra as quatros vistas desse osso) e que usando a técnica de datação por carbono-14 foi datado por volta de 20.000 a.C. Não está claro o que os traços ou ranhuras representam, mas um estudioso que estudou o osso em detalhe acredita que representam uma contagem de certos períodos da lua. Que os povos primitivos usavam essa forma elementar de representação numérica para lidar com fenômenos astronômicos iria confirmar o que será visto em períodos de tempo muito mais tarde. De fato, parece que o desenvolvimento da Matemática caminhou lado a lado com o desenvolvimento da Astronomia. Artefatos semelhantes ao osso Ishango e que datam de aproximadamente o mesmo período, com grupos regulares de entalhes que talvez representam observações astronômicas, foram encontrados na Europa central também.

Um exemplo um pouco mais sofisticado do método de agrupamento de representação numérica foi desenvolvido pelos egípcios cerca de 3.500 a.C. Inicialmente, cada uma das seis primeiras potências de 10 foi representada por um símbolo diferente, começando com um variante do familiarizado traço vertical, “ | ”, para 1. Abaixo, apresentamos os símbolos egípcios para até 10^6 (Figura 8).

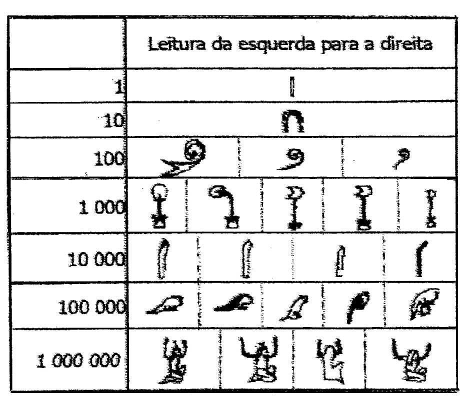
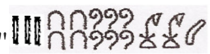


Figura 8

Arbitrários números inteiros foram então representados por repetições apropriadas dos símbolos acima. Por exemplo, para representar 12.643, os egípcios iriam escrever "". (Note-se que a prática usual era colocar os dígitos menores à esquerda.).

Embora existam várias hipóteses sobre a origem dos símbolos hieroglíficos acima, a que parece ter maior consenso entre os historiadores é a que se segue.

Uma barra vertical é o modo mais instintivo e rudimentar de representar a unidade, tendo por isso sido escolhido o bastonete para representar o algarismo 1. A dezena era simbolizada pelo desenho de um cordão que teria servido para juntar 10 bastonetes.

Para representar os algarismos 100 e 1000 usam-se a espiral e a flor de lótus, respectivamente, e uma justificativa possível para tais escolhas pode basear-se na analogia fonética entre as palavras para que eram designados estes números e os símbolos que os representam.

Como os egípcios tinham adotado um sistema de contagem manual apenas até 9999, foi então escolhido um dedo levantado e ligeiramente inclinado para simbolizar o número seguinte, a dezena de milhar.

Devido à existência de uma imensa quantidade de girinos no Nilo e à sua grande capacidade de reprodução, o girino foi escolhido para representar graficamente o algarismo 100 000.

Para a representação de 1 000 000, número que, pela sua grandeza, era merecedor de “respeito”, foi escolhido a representação de um homem com as mãos elevadas para o céu. Outra possível explicação, esta mais plausível, sugere que a representação escolhida, um homem admirando as estrelas e a sua imensidão, remete para a ideia de eternidade.

Para facilitar a escrita dos algarismos hieroglífos, detalhada e essencialmente decorativa, foi encontrado um sistema mais simples e rápido: os algarismos hieráticos (Figura 9). De fato, o sistema de numeração hieroglífica foi usado para escrever em paredes de templos ou esculpido em colunas. Mas quando se passou a escrever em papiros, precisou-se de uma forma mais simples de escrita.

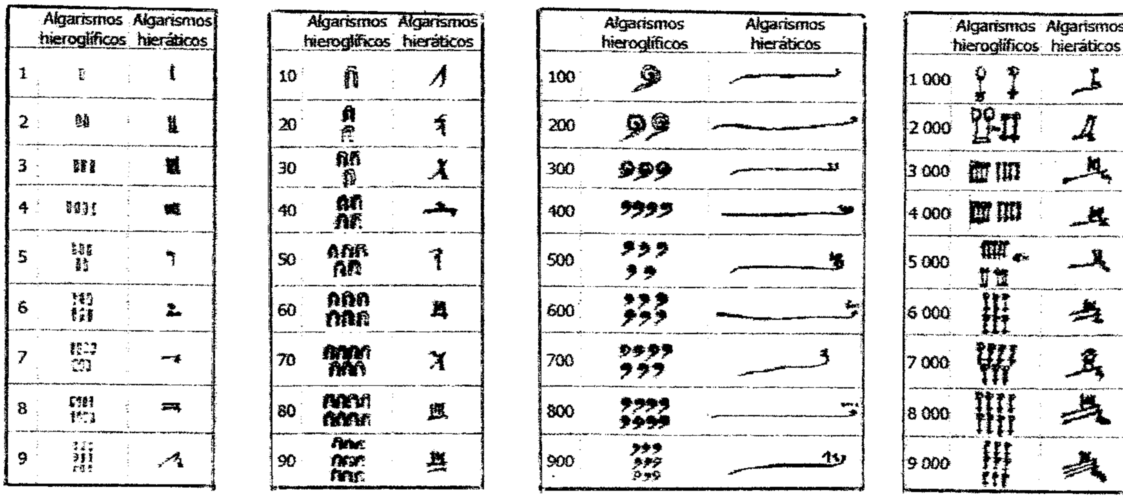


Figura 9

Abaixo temos um exemplo do quanto o sistema hierático veio facilitar a escrita dos números egípcios: a representação do número 3 577 (Figura 10).

na notação hieroglífica e na notação hierática

Figura 10

Sistemas hieráticos semelhantes foram usados em hebraico e grego. Nessas duas línguas, os símbolos específicos foram simplesmente as letras do alfabeto.

Terminamos esta seção observando que a palavra *hieroglífico*, significa relativo a hieróglifo, que por sua vez significa qualquer sinal ou caracter difícil de decifrar.

3.2. A base 10

Como vimos, para representar os números naturais, os egípcios usavam um sistema de numeração semelhante ao sistema usado atualmente, em quase todo mundo, chamado de sistema de numeração na base 10 ou sistema decimal posicional.

No sistema decimal posicional, todo número natural é representado por uma listagem horizontal dos algarismos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

acrescidos do símbolo **0** (*zero*), que representa a ausência de algarismo. Por serem dez os algarismos, o sistema é chamado decimal. O sistema é também chamado posicional, pois cada algarismo, além do seu valor intrínseco, tem um valor posicional que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Por exemplo, considere o número **312**. O valor relativo do algarismo **3** é **300**, o valor relativo do algarismo **1** é **10** e o valor relativo do algarismo **2** é **2**. Note que

$$\mathbf{312 = 300 + 10 + 2.}$$

Como

10 unidades = 1 dezena,

10 dezenas = 1 centena = 100 unidades,

10 centenas = 1 milhar = 1000 unidades,

312 representa 3 centenas, 1 dezena e 2 unidades. Ou seja, estamos contando de dez em dez! Portanto, cada algarismo de um número possui uma *ordem* contada da direita para à esquerda. Assim, no exemplo acima, **3** é de *3ª ordem*, **1** é de *2ª ordem* e **2** é de *1ª ordem*. Cada terna de ordens, também contadas da direita para à esquerda, forma uma *classe*. Damos a seguir os nomes das primeiras classes e ordens:

$$\textbf{1ª Classe: Classe das Unidades} \begin{cases} \textbf{unidades} - \textbf{1ª ordem} \\ \textbf{dezenas} - \textbf{2ª ordem} \\ \textbf{centenas} - \textbf{3ª ordem;} \end{cases}$$

$$\textbf{2ª Classe: Classe do Milhar} \begin{cases} \textbf{unidades de milhar} - \textbf{4ª ordem} \\ \textbf{dezenas de milhar} - \textbf{5ª ordem} \\ \textbf{centenas de milhar} - \textbf{6ª ordem;} \end{cases}$$

$$\textbf{3ª Classe: Classe do Milhão} \begin{cases} \textbf{unidades de milhão} - \textbf{7ª ordem} \\ \textbf{dezenas de milhão} - \textbf{8ª ordem} \\ \textbf{centenas de milhão} - \textbf{9ª ordem.} \end{cases}$$

Os sistemas de numeração posicional baseiam-se no seguinte Teorema, que não será provado aqui, pois foge do objetivo do presente trabalho. Para o leitor interessado em ler uma prova, damos [19] como referência.

> **Teorema**: *Sejam* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *números naturais, sendo* $\boldsymbol{b \geq 2}$. *Existem números naturais* $\boldsymbol{r_o, r_1, r_2, \ldots, r_n}$ *menores do que* $\boldsymbol{b}$, *determinados de modo único, tais que*
>
> $$\boldsymbol{a = r_n \,.\, b^n + \ldots + r_2 \,.\, b^2 + r_1 \,.\, b^1 + r_o \,.\, b^0},$$
>
> *sendo* $\boldsymbol{b^0 = 1}$.

Observemos que **$312 = 3 . 10^2 + 1 . 10^1 + 2 . 10^0$**.

A representação dada no Teorema acima é chamada de *expansão na base **b***. Quando ***b = 10***, essa expansão é chamada *expansão decimal*.

Terminamos esta seção observando que, pelo Teorema, temos que um número natural pode ser expandido em qualquer base. A escolha da base **10**, usada quase que universalmente, pode ter sido pelo fato de termos *dez dedos nas mãos* para nos auxiliar nos cálculos. Aliás, quem de nós, ainda hoje, não faz uso dos dedos das mãos para contar?

3.3. Sistema hindu-arábico

Nessa seção vamos discutir as origens de nosso sistema de numeração, o sistema decimal posicional, normalmente referido como o sistema hindu-arábico por causa de suas supostas origens na Índia e sua transmissão ao Ocidente por intermédio dos árabes. No entanto, as verdadeiras origens das componentes importantes deste sistema, que são os dígitos 1 a 9 em si, a noção do valor posicional e o uso do 0, estão, até certo ponto, perdidas. Vamos apresentar a seguir um resumo dos mais recentes achados históricos sobre o início e desenvolvimento destas três ideias.

Os símbolos para os nove primeiros números do nosso sistema de numeração têm suas origens no sistema de escrita Brahmi na Índia, que remonta a pelo menos ao tempo do Rei Ashoka (meados do século III a.C). Os números aparecem em vários decretos do rei fixados em pilares de toda a Índia. Existem registros suficientes, em continuidade cronológica, do desenvolvimento destas formas. Provavelmente, no século VIII, esses dígitos foram absorvidos pelos árabes durante as viagens islâmicas ao norte da Índia e sua conquista de grande parte do mundo mediterrâneo. Estes dígitos apareceram um século depois, na Espanha, e ainda mais tarde na Itália e no resto da Europa (Figura 11). A *invenção da imprensa* com tipos móveis, por ***Gutenberg*** (1398-1468), em meados do século XV, foi o catalisador que acabou derrubando a oposição à plena adoção dos novos números hindu-arábicos.

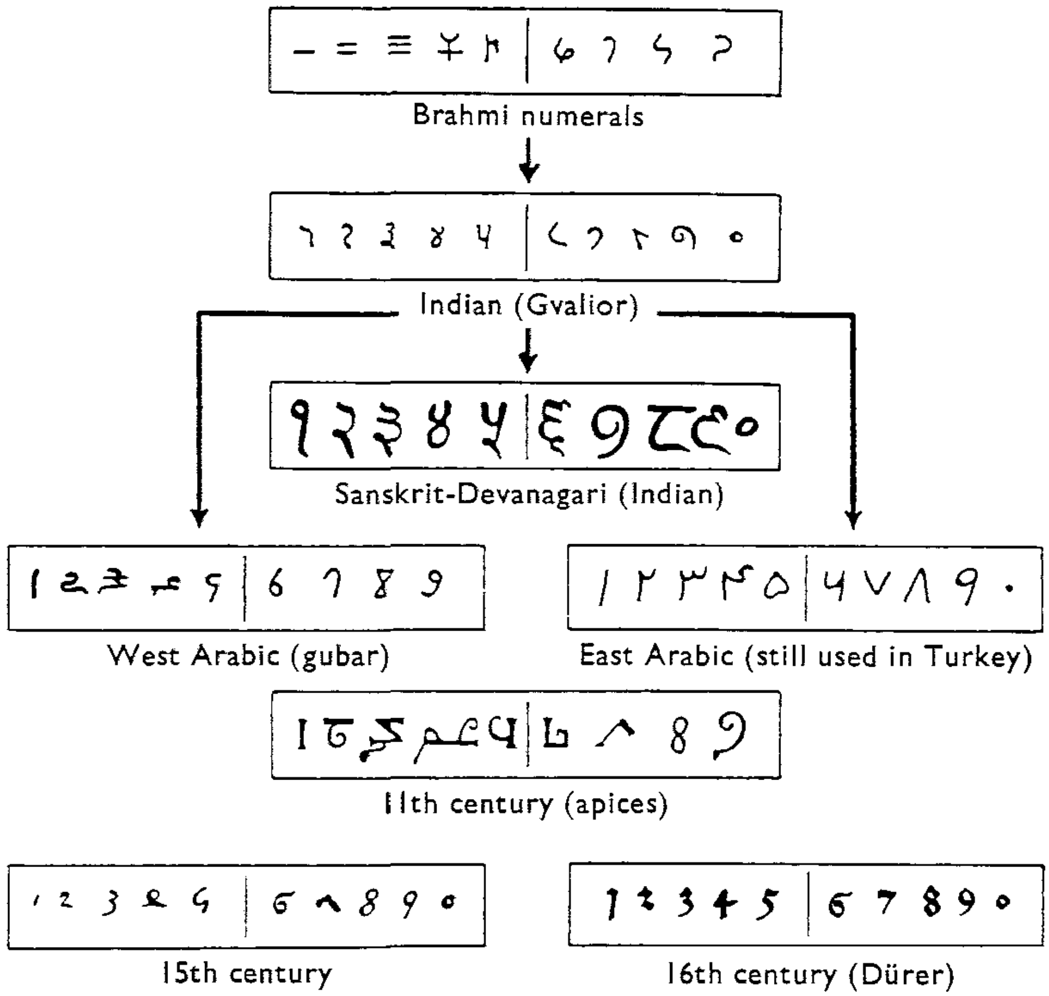


Fig. 11 The Family Tree of the Indian Numerals – Fonte: Karl Menninger-pág. 418

Mais importante do que a forma dos símbolos numéricos em si, no entanto, é o conceito de valor posicional e aqui as evidências são um pouco mais fracas. Os babilônios tinham um sistema de valor posicional, mas baseado em 60, ou seja, eles tinham um sistema de numeração na base 60. Embora este sistema tenha sido usado continuamente para fins astronômicos, é duvidoso que tinha muita influência sobre a escrita de números em outras situações. Os chineses, desde os primeiros tempos, tinham um sistema multiplicativo com base 10. Isto provavelmente foi derivado do ábaco chinês, que por si só continha colunas cada uma representando uma potência diferente de 10. Na Índia, embora houvessem símbolos para representar os números de 1 a 9, também haviam símbolos para representar os números de 10 a 90. Números maiores foram representados, como representados pelos chineses, pela combinação de um símbolo para 100 ou 1000 com um símbolo para um dos 9 primeiros números. Assim, nos primeiros séculos de nossa era, os hindus, como os chineses, utilizaram um sistema multiplicativo. ***Aryabhata*** (c. 475-c. 550), de fato, lista os nomes para as várias potências de dez em seu texto: "Dasa (10), sata (cem), sahasra (mil), ayuta (10.000), (dez mil) ..."

Por volta do ano 600, os hindus, evidentemente, deixaram de usar os símbolos para números maiores que 9 e começaram a usar os seus símbolos de 1 a 9 em nosso familiar sistema de numeração posicional. A mais antiga referência datada deste uso, no entanto, não vem da própria Índia. Em um fragmento de um trabalho de ***Severo Sebokht***, um sacerdote sírio, datado de 662, está a observação de que os hindus têm um valioso método de cálculo feito por meio de nove sinais. ***Severus*** fala apenas de nove sinais, e não há qualquer menção de um sinal para ***zero***. No entanto, no manuscrito de Bakhshali, um manuscrito matemático em condição bastante precária descoberto em 1881 em uma aldeia chamada Bakhshali no noroeste da Índia, os números são escritos utilizando o sistema posicional e um ***ponto*** para representar ***zero***. Este manuscrito parece datar do século VII. Talvez ***Severus*** não considera o ponto como um "símbolo ou sinal". Em outros manuscritos indianos do mesmo período, os números são escritos geralmente em um sistema posicional quase para acomodar a natureza poética dos documentos. Como por exemplo, no trabalho de ***Mahavira***, certas palavras são usadas para os números: lua para um, olho para dois, fogo para 3, e céu para 0. Então, a palavra fogo-céu-lua-olho seria para 2103 e lua-olho-céu-fogo seria 3021. Note que o valor posicional começa na esquerda com as unidades.

Curiosamente, a primeira inscrição datada usando o sistema posicional de valor decimal incluindo o ***zero*** são encontrados no Camboja. O ano 605 da era Saka é representado por três dígitos com um ***ponto*** no meio e o ano 608, por três dígitos com o nosso ***atual zero*** no meio (isto é por volta de 680, em nossa cronologia). O ponto como símbolo para o **0** aparece também no *Chiu-Chih li*, um trabalho astronômico chinês de 718, compilado por estudiosos indianos. Embora os verdadeiros símbolos para os outros dígitos indianos não sejam conhecidos, o autor dá detalhes de como o sistema posicional funcionava:

> Usando os numerais (indianos), multiplicação e divisão, são realizadas. Cada número é escrito em um traço. Quando um número é contado até 10, é avançado para um espaço mais elevado. Em cada lugar vago um ponto é sempre colocado. Assim, o número é sempre indicado em cada posição. Por conseguinte, não pode haver erro na determinação da posição. Com os números, o cálculo é fácil ... (KATZ, Victor J. – A History of Mathematics na Introduction – University of the District of Columbia)

A questão permanece. Por que motivo os hindus no início do século VII deixaram seu sistema multiplicativo próprio e introduziram o sistema posicional, incluindo um símbolo para ***zero***? Não podemos responder a isso definitivamente. Foi sugerido, no entanto, que as verdadeiras origens do sistema na Índia vêm do ábaco chinês. A placa de contagem (o ábaco) era um objeto portátil. Certamente, os comerciantes chineses que visitaram a Índia realizavam os seus cálculos com seus ábacos. Na verdade, como o sudeste da Ásia é a fronteira entre a cultura hindu e a influência chinesa, ele pode ter sido a área em que o intercâmbio ocorreu. O que pode ter acontecido é que os hindus ficaram impressionados com a ideia de usar apenas nove símbolos. Eles melhoraram o sistema chinês de contar hastes usando exatamente os mesmos símbolos para cada valor posicional ao invés de alternando dois tipos de símbolos em vários lugares. E já que eles precisavam escrever os números para serem hábeis nas operações, de alguma forma, em vez de apenas tê-los na placa de contagem (ábaco), eles foram forçados a usar um símbolo, o ponto e depois o círculo, para representar a coluna em branco da placa de contagem (ábaco). Se essa teoria estiver correta, é um pouco irônico que os cientistas indianos tenham retribuído o favor e trouxeram este novo sistema de volta para a China no início do século oitavo.

Em qualquer caso, certamente podemos colocar um sistema posicional decimal totalmente desenvolvido para números inteiros na Índia por volta do século VIII, embora a mais antiga inscrição definitivamente datada do sistema posicional decimal nos leva para o ano de 870. Bem antes disso, porém, este sistema tinha sido transmitido não apenas para a China, mas também a oeste de Bagdá, o centro da cultura islâmica em desenvolvimento.

4. Somar, subtrair, multiplicar e dividir: a matemática do cotidiano

4.1. Operações aritméticas básicas

Como vimos, a contagem é uma ideia matemática fundamental e parece ter surgido com o homem. Associada com a noção da contagem, temos a noção de agrupamento. A noção de agrupamento é obtida por um estágio mais avançado matematicamente do que a noção de contagem. De fato, agrupar é um importante avanço na contagem feita simplesmente colocando os objetos a serem contados, um ao lado do outro. Mais ainda, todos os sistemas de medidas são, na verdade, agrupamentos em ordem crescente. Por exemplo,

60 segundos = 1 minuto

60 minutos = 1 hora

24 horas = 1 dia **1000 miligramas = 1 grama**

30 dias = 1 mês **1000 gramas = 1 quilo**

12 meses = 1 ano e **1000 quilos = 1 tonelada**.

Os sistemas de medidas são ideias matematicamente mais sofisticadas do que os agrupamentos e, por isso, não serão tratados aqui.

Como exemplo de um "*agrupamento de 10 em 10*" temos a numeração dos egípcios e como exemplo de um "*agrupamento de 5 em 5*" temos a numeração dos romanos (Figura 12).

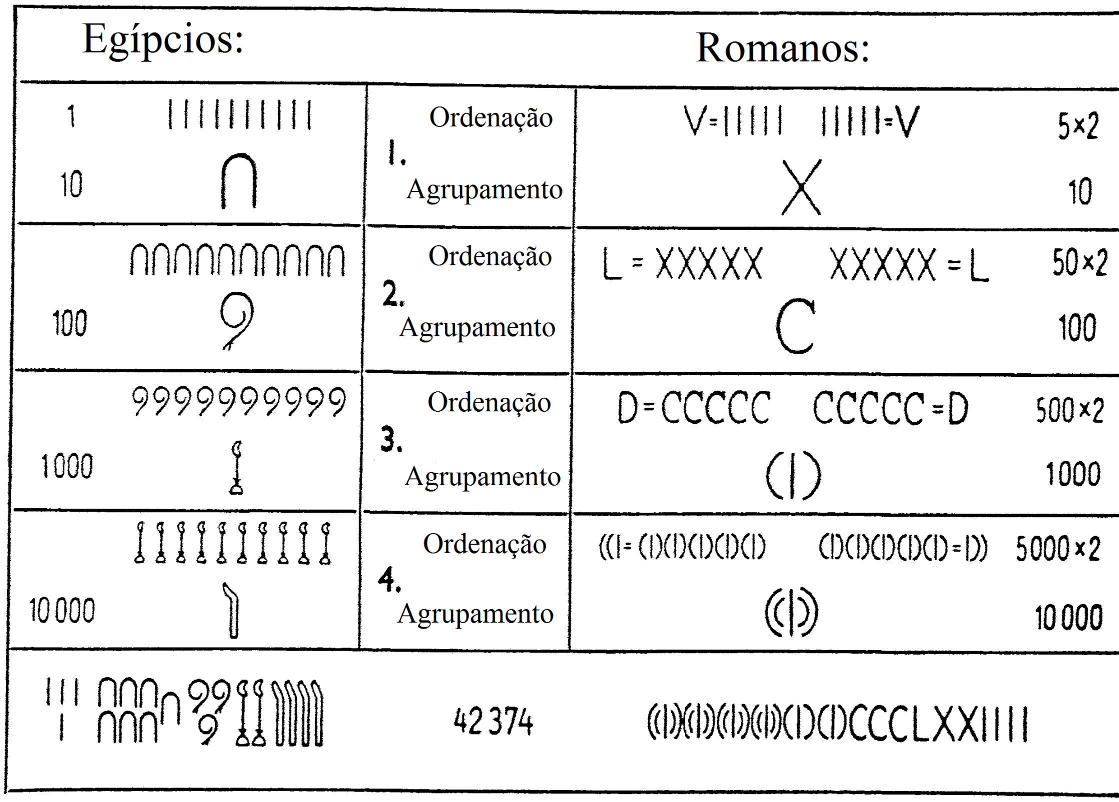


Figura 12

O "*agrupamento de 10 em 10*", feito pelos egípcios, se mostrou mais eficiente que o "*agrupamento de 5 em 5*", feito pelos romanos. Por que? Isto se deu pelo desenvolvimento de regras para se efetuar as operações aritméticas básicas: *adição, subtração, multiplicação* e *divisão*. De fato, uma vez desenvolvido um sistema de numeração, uma próxima etapa é desenvolver regras para usar estes números de forma a resolver situações cotidianas. *Adicionar* ou *agregar* e *perder* ou *retirar* parecem ser situações vividas por qualquer grupo de seres humanos. Assim, as antigas civilizações desenvolveram regras para as quatro operações aritméticas básicas, já que estas operações faziam (e fazem) parte da matemática do cotidiano. Essas regras são consideradas os primeiros algoritmos que foram desenvolvidos pela humanidade.

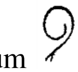
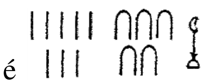
Um *algoritmo* é um procedimento desenvolvido para produzir uma resposta para um determinado tipo de problema. Os povos antigos produziram algoritmos de todos os tipos para lidar com diferentes problemas. De fato, a matemática antiga é caracterizada pelos algoritmos, enquanto que a matemática grega[4] é caracterizada por justificativas formais do porquê um algoritmo funcionar. Ou seja, observação, ensaio e erro faziam parte da matemática antiga, mas foi na matemática grega que se estabeleceu a ideia de *demonstração*.[5]

Vejamos a seguir como os egípcios realizavam a operação de *adição*. Eles combinavam as unidades, as dezenas, as centenas e assim por diante. Quando um grupo de dez símbolos iguais apareciam, eles os substituiam por um próximo símbolo. Assim, por exemplo, para adicionar **275** e **783**, eles colocavam juntos os números

 e 

para obter

 .

Como tem-se **15** **'s**, substituía-se dez deles por um . Isso então formava dez para o anterior. Como dez  equivalem a , a resposta final é  ou **1058**. A *subtração* era feita de forma análoga. Neste caso, quando era necessário "pegar emprestado", um dos símbolos se converteria em dez para o próximo símbolo à esquerda.

Observamos que os algoritmos dos egípcios para as operações de *adição* e de *subtração* são parecidos com os algoritmos usados atualmente. Até o final do quinto ano do Ensino Fundamental, as crianças já conhecem algoritmos para somar, subtrair, multiplicar e dividir. A diferença está nos símbolos usados para denotar as operações. É sobre isto que trata a próxima seção.

[4]A história grega tem origem por volta de 2.000 a.C. Contudo, a matemática grega tem seu auge entre 600 a.C. e 300 a.C., com os matemáticos *Tales, Pitágoras* e *Euclides*.

[5]Em Matemática não basta intuir; é preciso demonstrar. Demonstrar significa comprovar a veracidade ou a falsidade de uma afirmação. O produto da demonstração é o que chamamos de prova. Uma prova que demonstra a veracidade de uma afirmação consiste em um encadeamento de deduções que mostram que o resultado afirmado é uma consequência lógica e indiscutível de resultados matemáticos já aceitos como verdadeiros. Uma prova que demonstra a falsidade de uma afirmação, em geral, consiste na apresentação de um contra-exemplo. Um contra-exemplo é um exemplo onde o que é afirmado não acontece.

4.2. Os símbolos +, –, x e ÷

Um certo número de papiros[6] egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no *British Museum* (exceto uns poucos fragmentos que estão no *Brooklyn Museum*). Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, *Henry Rhind* e por isso é conhecido como *Papiro Rhind*, ou, menos freqüentemente, chamado *PAPIRO AHMES* em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. (Figura 13). O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 a.C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de *Imhotep*, o lendário arquiteto e médico do faraó *Zoser*, que supervisionou a construção de sua pirâmide há cerca de 4000 anos.

Figura 13

Fonte: Papiro de Rhind – ***Eves*** – página 74

[6]**Papiro** ou **papiro-do-egito** é uma planta de grande porte chamada de *cyperus papyros*. Com as hastes das folhas dessa planta se fabricava o *papiro*, material sobre o qual se escrevia. Ocorre na África, às margens alagadiças do rio Nilo, sendo até hoje cultivada no sul da Itália (Sicília) para produzir papiro de uso artístico.

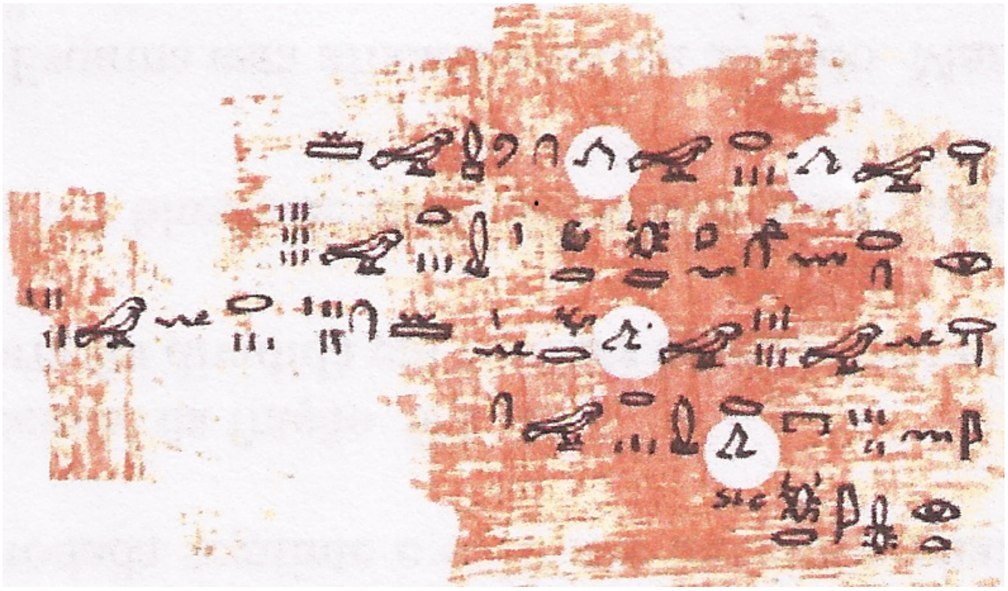


Figura 14

Fonte: Símbolos para a soma e subtração no Papiro de Rhind – G. G. Garbi – pág. 14

É no Papiro Rhind que se encontram os mais antigos símbolos para as operações de adição e de subtração. Para denotar <u>*mais*</u>, os egípcios usavam o símbolo , que é um par de pernas caminhando da esquerda para a direita. Para denotar <u>*menos*</u>, os egípcios usavam o símbolo , que é um par de pernas caminhando da direita para a esquerda (ver Figura 14).

Ao longo da história, vários símbolos foram utilizados para representar as operações de adição e subtração. O monge alemão *Jordanus Nemorarius*, por volta do ano 1200, empregou os símbolos *p* e *m* para indicar as operações de adição e de subtração. O símbolo *p* vem da palavra "*plus*" e o símbolo *m* vem da palavra "*minus*". As palavras "*plus*" e "*minus*" são palavras do latim, antigo idioma originado na península italiana, que significam *mais* e *menos*, respectivamente. Embora esses símbolos tivessem sido bastante difundidos na Idade Média, já que o livro de *Jordanus* intitulado *De elementis arismetic artis* é um tratado em Aritmética que se tornou referência nesta época, estes símbolos caíram em desuso.

Para facilitar a atividade comercial da Europa, em expansão no século XV, muitos símbolos matemáticos novos foram criados e muitos símbolos matemáticos já existentes foram substituídos. De fato, os comerciantes europeus precisavam de novas técnicas para calcular, assim como símbolos matemáticos, para lidarem com as novas circunstâncias econômicas.

Foram usados pela primeira vez, em 1489, por *John Widman*[7], em sua obra *Aritmética Comercial* (*Rechnung auff allen Kauffmanschafften*), os símbolos "+" e "–", para *mais* e *menos*, respectivamente. É bastante provável que "+" seja uma contração da palavra latina "*et*", que significa "*e*", que era usada frequentemente para indicar adição e é possível que "–" decorra do símbolo "$\overline{\mathrm{m}}$", que era usado na época para denotar *menos*. *Michael Stifel* [8] começou a empregar os símbolos "+" e "–" como sinais das operações de adição e subtração da forma usada atualmente.

Atualmente, para se representar as operações de multiplicação e divisão, usamos os símbolos "×" e "÷", respectivamente. Para a multiplicação, se usa também um "*ponto*". E para a divisão, se usam também os símbolos ":", "–" (barra horizontal) e "/" (barra inclinada). Assim, por exemplo

$$4 \times 5 \quad \text{e} \quad 4 . 5$$

simbolizam a multiplicação de 4 por 5, e

[7] *Johann Widman* (1460-1526) nasceu em Eger, Bohemia, que hoje é chamada de Cheb, República Checa. Publicou o livro mencionado acima em Leipzig. Este livro é considerado o mais antigo livro onde aparecem os símbolos "+" e "–" para operações de adição e subtração. Entretanto, há preservados em Dresden, Alemanha, manuscritos produzidos anos antes por autores alemães desconhecidos que já continham esses sinais. Alguns historiadores entendem que tais símbolos não foram usados por *Widman* para expressar operações mas apenas para representar excesso ou falta de peso em caixas de mercadorias que deveriam ter pesos exatos.

[8] *Michael Stifel* (1486-1567), o maior algebrista alemão do século XVI, nasceu em Esslinger, e morreu em Jena. Foi educado em um mosteiro de sua terra natal, tornando-se, depois, um ministro protestante. *Stifel* é dito como o grande popularizador dos símbolos "+" e "–" para operações de adição e subtração como utilizamos atualmente. Sua obra matemática mais conhecida é "*Arithmetica integra*", publicada em 1544. Divide-se em três partes dedicadas, respectivamente, aos *números racionais*, *números irracionais* e *álgebra*.

$$4 : 5, \quad 4 \div 5, \quad \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad 4/5$$

simbolizam a divisão de 4 por 5.

Embora se encontre na literatura informação sobre os algoritmos usados pelos povos antigos para realizar as operações de multiplicação e divisão, não encontramos informação sobre os símbolos usados pelos povos antigos. No que se segue, vamos apresentar a história do surgimento dos símbolos atualmente utilizados. Vamos começar com a operação de multiplicação.

O sinal de multiplicação "×" é atribuído ao matemático inglês *William Oughtread* (1574-1660), que o empregou pela primeira vez em seu livro *Clavis Mathematical*, publicado em 1631. Já o ponto ".", como símbolo para indicar a multiplicação, foi usado pela primeira vez pelo matemático alemão *Gottfried Leibniz* (1646-1716). De fato, *Leibniz* usou sistematicamente o ponto para a multiplicação.

> Em 29 de julho de 1698, *Leibniz* escreveu em uma carta para *Jean Bernoulli*: "eu não gosto de '×' como um símbolo para a multiplicação, porque é confundida facilmente com 'x'; frequentemente eu relaciono o produto entre duas quantidades por um 'ponto'. Daí, ao designar a relação (razão) uso não um ponto, mas dois pontos, que eu uso também para a divisão". (*Eves*, 1992, pág. 349)

Observamos que também é usual escrever "xy" ou "ab" para indicar a multiplicação de 'x' por 'y' ou a multiplicação de 'a' por 'b'. O precursor dessa simbologia para indicar a multiplicação foi o matemático francês *René Descartes* (1596-1650).

Como já mencionamos, para a operação de divisão usamos os símbolos ":", "÷", "–" e "/". O símbolo ":" foi proposto por *William Oughtred* também em seu livro *Clavis Mathematical*. Já o símbolo "÷", que surgiu em 1659, é atribuído ao matemático suíço *John Rahn* (1622-1676), que o usou em seu livro *Teutsche Algebra*. Tal símbolo tornou-se conhecido na Inglaterra alguns anos mais tarde quando os trabalhos de *Rahn* foram traduzidos. O símbolo "/" para indicar a divisão foi sugerida, em 1845, pelo matemático indiano, mas de família inglesa, *Augustus De Morgan* (1806-1871).

Já o símbolo "–", é mais antigo do que o símbolo "/". Ele foi introduzido no século XIII pelo matemático italiano *Leonardo Fibonacci* (1170-1240), que o aprendeu com os árabes. De fato, o pai de *Leonardo* era um rico comerciante italiano, que tinha negócios com cidades localizadas no norte da África. *Leonardo* passou muito tempo de sua juventude nesta região da África, que era dominada pela cultura árabe. A civilização islâmica desenvolveu uma cultura baseada na religiosidade e alcançou grande desenvolvimento científico e artístico. De fato, os árabes estabeleceram uma espécie de ponte cultural com a Grécia antiga. Além de traduzir textos gregos e latinos, em especial de filósofos como *Platão* (427-347 a.C.) e *Aristóteles* (384-322 a.C.), os árabes deram um enorme impulso a diversas áreas do conhecimento. Na Matemática, muitos foram os avanços na Álgebra e na Trigonometria. Em sua juventude, *Leonardo* aprendeu árabe, estudando Matemática com professores islâmicos.

Terminamos observando que grande parte do conhecimento matemático existente na Europa no fim da Alta Idade Média[9] advém da cultura islâmica. As trocas comerciais e o crescente intercâmbio entre indivíduos e povos distintos possibilitaram um intercâmbio cultural e o desenvolvimento de um mentalidade orgulhosa dos novos conhecimentos científicos e artísticos. Tudo isso contribuiu para a transformação do ensino na Europa. Várias universidades foram fundadas. A mais antiga delas, a de Bolonha, na Itália, foi fundada em 1088. Depois outras se formaram nas grandes cidades europeias: Paris e Montpellier (França), Oxford e Cambridge (Inglaterra), Salamanca (Espanha), Roma e Nápoles (Itália) e Coimbra (Portugal). E nessas universidades, surgiram e trabalharam os maiores matemáticos do mundo.

[9] Alta Idade Média: O período histórico conhecido como Idade Média durou aproximadamente mil anos. A Idade Média pode ser dividida em duas partes: a chamada Alta Idade Média, período entre os séculos V e X, e a chamada Baixa Idade Média, período entre os séculos X e XV.

5. Símbolos da trigonometria

5.1. O que é trigonometria?

Mesmo quando os primeiros humanos viviam de caça de pequenos animais e colheita de frutas, eles estavam constantemente olhando o céu. Imagine uma pessoa que sabe onde nasce o Sol e onde ele se põe, sem contudo saber que ele nasce no leste e se põe no oeste! Se o Sol está do lado que nasce, ainda é de manhã. Se o Sol está do lado que se põe, é a parte da tarde (Figuras 15.a e 15.b).

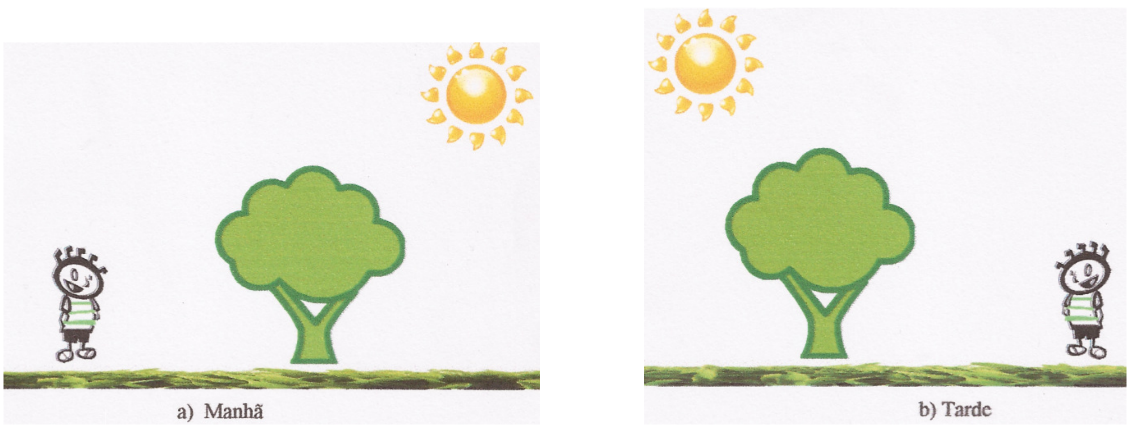


Figura 15

Mas, e a ***trigonometria***, o que é?

Considere a figura a seguir (Figura 16).

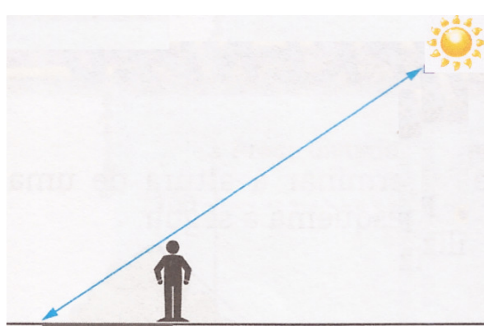


Figura 16

As figuras acima sugerem um efeito que deve ter levado a uma função pois eles faziam a ***razão*** (divisão) entre o tamanho da sombra de uma haste e o tamanho da haste para saber a hora naquele instante.

Essa observação deu origem aos primeiros relógios de Sol, chamados *gnômons*. Gnômon é um ponteiro ou outro instrumento que marca a altura do Sol pela direção ou pelo comprimento de sua sombra no plano horizontal e, por conseguinte, a hora do dia. A figura abaixo (Figura 17) mostra uma tabela grega (século IV a.C. aproximadamente), onde se associa o término de uma hora específica do dia ao comprimento da sombra.

Fim da hora	Sombra durante mês equinocial[10]
1	25
2	15
3	11
4	8
5	6
Meio-dia	5

Figura 17

Diversas tabelas foram construídas pelos povos antigos. Apresentamos apenas uma tabela do povo grego. Mas, analisando-se essas tabelas, observamos que uma aplicação prática da constatação de que a sombra de uma vara é alongada ao amanhecer, reduzindo-se a um mínimo ao meio-dia, para novamente alongar-se à medida que a tarde avança, mostra que, há pelo menos três milênios, o homem usou uma *função* para fazer corresponder a um dado tempo um único valor do comprimento da sombra. Usando a linguagem moderna, a função envolvida nas chamadas tabelas de "*sombra estendida*" é a função trigonométrica $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}}$.

Para entermos melhor, consideremos a Figura 18 a seguir. Conhecido o comprimento da vara, que representamos por **R**, vamos chamar de **s** a medida da sombra por ela projetada pela incidência dos raios solares. Temos então:

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{s}} \Rightarrow \mathbf{s} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}}.$$

[10] *Equinocial* significa: relativo a ou próprio de equinócio. Os meses equinociais são Junho e Dezembro.

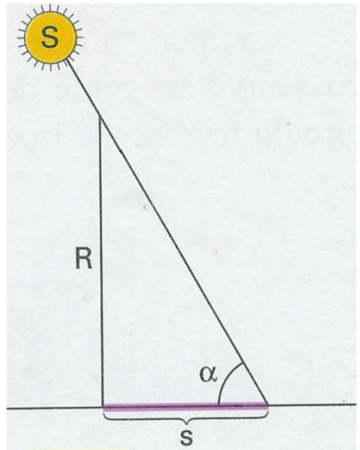


Figura 18

Assim, o que os antigos registravam em suas tabelas de sombra era o inverso da *tangente* do ângulo de incidência dos raios solares, dependendo também do tamanho **R** do gnômon utilizado. Eis aqui o início da trigonometria.

Apesar de menos usuais, na *Idade Média* surgiram as tabelas de "*SOMBRA REVERSA*", como aquela projetada por um *gnômon horizontal* sobre um *plano vertical*, conforme se vê na Figura 19.

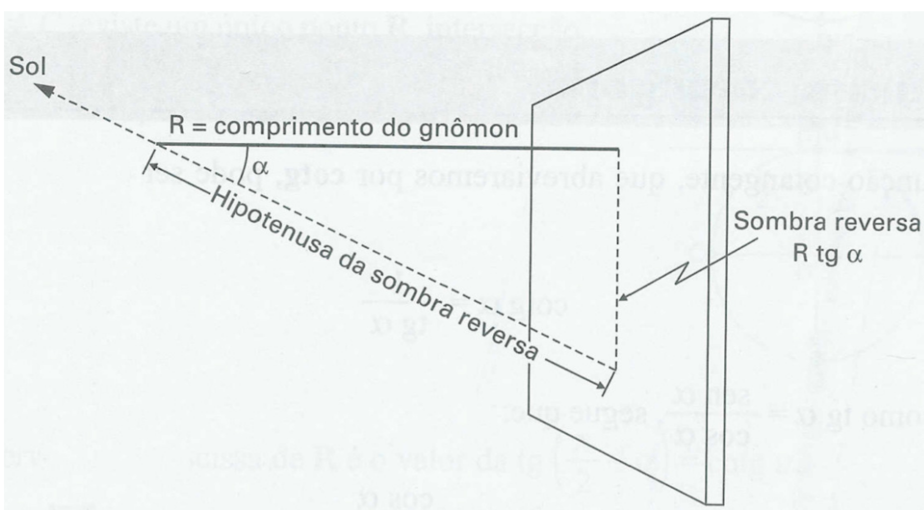


Figura 19

Eram *tabelas* de *R.tg* α e, mais uma vez, o ângulo correspondia à altura do Sol.

As medidas chamadas de "*hipotenusa da sombra*" raramente foram tabuladas, mas estão explicitamente definidas e aplicadas em cálculos encontrados em *sânscrito* e em *árabe*.

Vamos calcular os *valores das hipotenusas da* "*sombra estendida*" (h_e) e da "*sombra reversa*" (h_r) conforme indicam as Figuras 20 e 21:

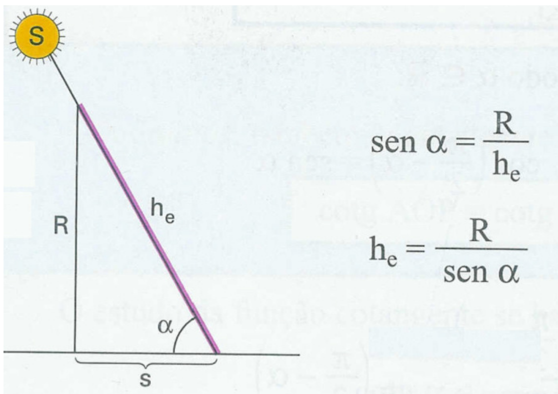


Figura 20

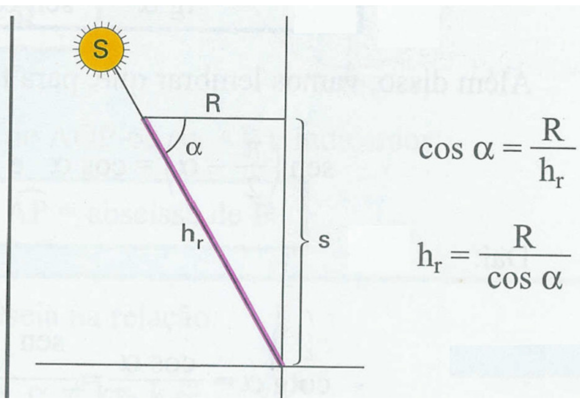


Figura 21

Em linguagem moderna, essas duas novas *funções* $\frac{1}{\cos\alpha}$ e $\frac{1}{\text{sen }\alpha}$, são, respectivamente, *SECANTE de* α e *COSSECANTE de* α e representadas por:

"*sec* α" e "*cossec* α", ou seja $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ e $\text{cossec }\alpha = \frac{1}{\text{sen }\alpha}$.

No século IX, quando todas as modernas *funções trigonométricas* já eram conhecidas, surgem as *tabelas* em que *R* é considerado *unitário*, ou seja $R = 1$. Dessa forma, os valores nas *tabelas* passam a corresponder aos que usamos hoje em dia. Esse feito é devido aos matemáticos árabes *Abu'l Wefa* (940-998) e *Al-Biruni* (973-1048).

A palavra *trigonometria* tem etimologia grega: *tri* + *gonos* + *metron* = *três* + *ângulos* + *medida*. Ela consiste essencialmente em associar a cada ângulo "α", certos números como "*cos* α" (*cosseno* de α) e "*sen* α" (*seno* de α). Cada um desses números representa, de certo modo, uma espécie de "medida" daquele ângulo. Melhor dizendo, esses números constituem um grande passo à frente nos estudos das chamadas "relações métricas" nos triângulos porque estas, tradicionalmente, estabelecem fórmulas que relacionam entre si comprimentos de segmentos (tais como lados, alturas, bissetrizes, etc.), enquanto que as chamadas funções trigonométricas relacionam ângulos com lados. De fato, as primeiras noções trigonométricas estão ligadas às relação existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo (Figura 22).

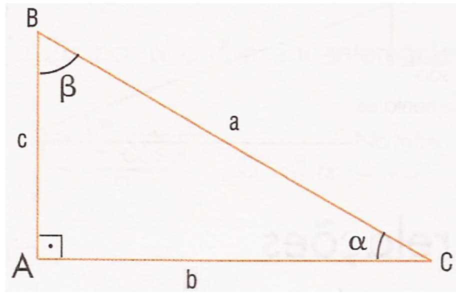


Figura 22

$$\mathbf{sen}\,\beta = \frac{\textbf{cateto oposto a } \beta}{\textbf{hipotenusa}};\quad \mathbf{cos}\,\beta = \frac{\textbf{cateto adjacente a } \beta}{\textbf{hipotenusa}};\quad \mathbf{tg}\,\beta = \frac{\textbf{cateto oposto a } \beta}{\textbf{cateto adjacente a } \beta};$$

$$\mathbf{cosec}\,\beta = \frac{1}{\mathbf{sen}\,\beta};\qquad \mathbf{sec}\,\beta = \frac{1}{\mathbf{cos}\,\beta};\qquad \mathbf{cotg}\,\beta = \frac{1}{\mathbf{tg}\,\beta}.$$

Com o surgimento do *Cálculo Infinitesimal* e, posteriormente, de seu prolongamento teórico, a *Análise Matemática*[11], surgiu uma nova dimensão às noções básicas da Trigonometria, como seno, cosseno e às noções associadas de tangente, secante, etc. Para isso, foi indispensável considerar as funções cos t e sen t definidas para todo número real t. Ou seja, é preciso falar em cosseno e seno de um número real, em vez de um ângulo. Essa transição é feita por meio de uma função E, chamada a *função de Euler*. O domínio da função de Euler é o conjunto R dos números reais. Seu contra-domínio é o círculo unitário do plano, que representaremos por S^1. Assim, a cada número real t, a função E faz corresponder um ponto E (t) do círculo S^1.

Agora definiremos a função E: R $\rightarrow$ S^1. Dado o número real t > 0, medimos no círculo S^1, a partir do ponto U = (1, 0), um arco de comprimento t, sempre percorrendo o círculo no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, ou seja, o sentido que nos leva de (1,0) a (0,1) pelo caminho mais curto em S^1). A extremidade final deste arco é o ponto que chamaremos de E(t). Se for t < 0, E(t) será a extremidade final de um arco de comprimento –t, medido a partir do ponto U = (1, 0), no sentido negativo de S^1 (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio).

[11]*Análise Matemática* é o ramo da matemática que lida com os conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial, integral, medidas, limites, séries infinitas e funções analíticas. Surgiu da necessidade de prover formulações rigorosas às idéias intuitivas do cálculo, sendo hoje uma disciplina muito mais ampla, tais tópicos são tratados em uma subdivisão chamada análise real. Se a Análise surgiu do estudo dos números e funções reais, sua abrangência cresceu de forma a estudar os números complexos, bem como espaços mais gerais, tais como os espaços métricos, espaços normados e os espaços lineares topológicos. Embora seja difícil definir exatamente o que seja *análise matemática* e delinear precisamente seu objeto de estudo, pode-se dizer grosseiramente que a análise se dedica ao estudo das propriedades topológicas em estruturas algébricas.

Observe que, como o comprimento de S^1 é igual a 2π, se tivermos $t > 2\pi$ ou $t < -2\pi$, para descrevermos um arco de comprimento t a partir do ponto U = (1, 0) teremos de dar mais de uma volta ao longo de S^1. Em particular, se $t = 2k\pi$, onde k é um inteiro (positivo, negativo ou nulo), temos $E(2k\pi) = U$. Mais geralmente, para qualquer $t \in R$, vale $E(t + 2k\pi) = E(t)$, quando k é um inteiro qualquer.

A função de Euler $E: R \to S^1$ consiste em envolver a reta R, pensada como um fio inextensível, sobre um círculo S^1 (imaginado como um carretel) de modo que o ponto $0 \in R$ caia sobre o ponto $U = (1, 0) \in S^1$.

Com auxílio da função $E : R \to S^1$, podemos definir o cosseno e o seno de um número real t. Dado $t \in R$, seja $E(t) = (x, y)$. Poremos cos t = x e sen t = y (Figura 23).

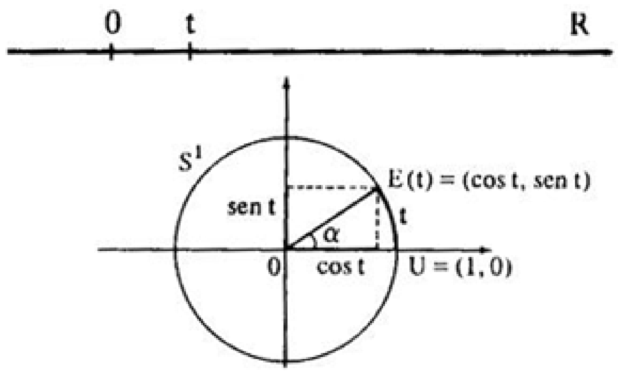


Figura 23

Portanto, x = cos t é a abscissa e y = sen t é a ordenada do ponto E(t). Todas as propriedades de cos t e sen t resultam desta definição.

Quando $0 < t < \pi$, notamos que $\cos t = \cos \alpha$ e $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \alpha$, onde α é o ângulo que tem o vértice na origem e cujos lados são o semi-eixo positivo das abscissas e a semi-reta que sai da origem e passa pelo ponto E(t). Esta observação estabelece a conexão entre o cosseno e o seno de um número, por um lado, e o cosseno e o seno de um ângulo, por outro lado.

A função de Euler $E : R \to S^1$, possibilitando considerar cos t e sen t como funções da variável real t, abriu para a *Trigonometria* as portas da *Análise Matemática* e de inúmeras aplicações importantes às *Ciências Físicas*. Uma propriedade fundamental dessas funções é que elas são *periódicas*, isto é, para todo $t \in R$, temos $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$. Isto se exprime dizendo que 2π é o período das funções cos t e sen t.

Ora, a periodicidade é uma circunstância presente em quase tudo que nos cerca, desde o movimento de um planeta em torno do Sol, ou de um elétron ao redor do núcleo, ou as batidas do nosso coração. Periodicidade é uma ideia muito próxima de oscilação (ou vibração). A noção de oscilação está presente nas cordas de um violino e na corrente alternada que usamos em nossas casas. As funções periódicas são o instrumento matemático adequado para descrever fenômenos periódicos.

Dado o evidente interesse que se tem por entender fatos como os acima citados, não é difícil perceber a enorme importância das funções trigonométricas na Matemática e na Física, principalmente depois que o matemático francês *Joseph Fourier* (1768-1830) mostrou (em 1822), no seu consagrado estudo sobre a transmissão do calor, que toda função pode, sob hipóteses bem razoáveis, ser obtida por uma soma infinita cujos termos são senos ou cossenos ("série de Fourier"). Isto foi o ponto de partida da chamada *Análise de Fourier* ou, mais geralmente, da *Análise Harmônica*. Não iremos nos estender mais sobre este assunto aqui, pois foge do objetivo de nosso trabalho.

5.2. **Notações do seno, cosseno e tangente**

O uso de símbolos para se representar as relações trigonométricas parece ter se iniciado por volta de 1580, com o físico e matemático dinamarquês *Thomas Fincke* (1561-1656). É dele o uso dos símbolos "*sin.*", "*tan.*", "*sec.*", "*sin.com.*", "*tan.com.*" e "*sec.com.*" para designar, respectivamente, *seno, tangente, secante, cosseno, cotangente* e *cossecante*, que apareceram em seu livro *Geometria rotundi*. Observamos que *Fincke* não usava as notações acima de maneira uniforme. Em seu livro, podemos encontrar também as notações "*sin.an.*", "*sin.ang.*", "*tang.*", "*sin.compl.*", "*sin.com.an.*", "*sin.comp.*", entre outras.

Símbolos diferentes aos usados por *Fincke* são encontrados em outros livros editados na época. Como exemplo, no livro *Canon triangulorum* do matemático belga *Adriaan van Roomen* (1561-1615), encontra-se o símbolo "*S.*" para denotar *seno*, o símbolo "*P.*" para denotar tangente e o símbolo "*T.*" para denotar secante. Podemos justificar os símbolos usados por *Adriaan*: ele usava as palavras *seno*, *proseno* e *transinuosa* para *seno*, *tangente* e *secante*, respectivamente. Essas palavras já tinham sido usadas anteriormente pelo matemático francês *François Viète* (1540-1603). De fato, em 1571 *Viète* publicou vários resultados e símbolos sobre Trigonometria.

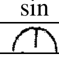
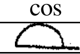
Mais tarde, em 1632, *Outghtred* publicou o livro *Círculo de Proporção*, que continha os símbolos "*sin*" e "*s*" para *seno*, "*tan*" e "*t*" para *tangente*, "*sec*" e "*se*" para *secante*, "*sco*" para *cosseno*, "*tco*" para *cotangente* e "*seco*" para *cossecante*. Note que se omitiu o ponto, que fora usado anteriormente por vários matemáticos, como *Fincke* e *Adriaan* já citados. Em 1657, *Outghtred* publicou o livro *Trigonometria* em latim e em inglês. Em ambos os livros, ele usava os símbolos "*s*", "*t*", "*sco*" e "*tco*" em certos trechos e usava os símbolos "*sin*", "*tan*", "*sec*" e "*cotan*" em outros trechos.

Como vimos, vários símbolos foram usados para denotar as relações trigonométricas no século XVII. Porém, se fazia necessário criar uma simbologia única, compreendida por um grande número de leitores de Matemática. No século XVIII, o uso de símbolos para se denotar as relações trigonométricas se tornou unânime em todo o continente europeu. Porém, os símbolos ainda diferiam. Parece que apenas nos meados do século XIX, os símbolos usados em trigonometria se tornaram mais universais, no sentido de haver uma concordância em sua utilização. A seguir, apresentamos alguns dos símbolos trigonométricos usados no século XVIII e alguns dos símbolos trigonométricos usados no século XIX. As informações abaixo apresentadas foram traduzidas das páginas 166, 167 e 170 do livro "*A History of Mathematical Notations*", vol. 2, de *Florian Cajori*.

Símbolos trigonométricos usados no século XVIII

Data	Autor	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante
1704	W. Leybourn	s	cs	t	ct	....	....
1706	W. Jones	s	*s*	t	*t*	ſ	ʃ
1753	W. Jones	s	ṡ	t	ṫ	f	ḟ
1714	J. Wilson	S, s	Σ, σ	T, t	𝒯	....	....
1714	E. Wells	s	σ	t	....	....	....
1720	J. Kresa	S.	S.2.	T.	T.2.	Sec.	S.2.
1726	J. Keill	S.	Cos.	T.	Cot.	....	....
1727	Ph. Ronayne	S	Σ	T	τ	ʃ	σ
1727	F.C. Maier	S, s	C, c	T, t	....	....	....
1729	L. Euler	ʃ	co ʃ, cos	....	....	....	....
1730	J. Ward	S	Σ	𝒯	𝒯c	....	....
1737	Th. Simpson	Sine	Co-sine	Tangent	Co-tangent	Secant	....
1750	Th. Simpson	Sin.	Co-ʃ.	Tang.	Cot., Cot.	....	Co-seca.
1748	L. Euler	sin.	cos.	tang.	cot.	sec.	cosec
1753	L. Euler	sin, sn	cos, cs	tang, tag, tng, tg	……………	....	....
1755	C. E. L. Camus	S.	co-S.	T	co-T	Séc.	co-Séc.
1758	A. G. Kästner	sin	cos, Cos, cosin	tang, Tang	Cot	sec, Sec	cosec
{1754, 1763}	D'Alembert	Sin., sin, sin	Cos., cos., cos	tang.	cot.	....	....
1762	E. Waring	s, S, σ. sin.	....	Tan.	....	Sec	Sec Com
1765	A. R. Mauduit	s	c	t	𝒯	S	*S*
1767	J. A. Segner	sin.	cos.	tan.	cot.	....	....
1768	D. F. Rivard	sin.	....	tang.	....	séc	....
1770	P. Steenstra	S.	Cos.	T.	CoT., Cot.	....	....
1770	S. Klügel	sin	cos	tang	cot	sec	cosec
1772	C. Scherffer	sin.	cos.	tang.	cot.	sec.	……………
1772	G. de Koudon	sin.	cos.	tang.	....	sec	cosèc
1772	O. Gherli	Sen	Cos.	Tang.	Cot.	Sec	Cosec
1774	J. Lagrange	sin	cos	tang, tang.	....	....	....
1774	Sauri	sin.	co-sin.	tang.	co-tang.	séc.	co-séc.
1778	L. Bertrand	sin.	cos.	tang.	cot.	sec.	cosec.
1782	P. Frisius	sin.	cos.	tang.	cot.	sec.	cosec.
1782	P. Ferroni	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sec.	Cosec.
1784	G. Vega	sin	cos	tang	cot	sec	cosec
1786	J. P. de Gua	Σ, Π, Γ σ, π, γ	S, P, G s, p, g	⅃Σ, ⅃Π, ⅃Γ ⅃σ, ⅃π, ⅃γ	⅃S, ⅃P, ⅃G ⅃s, ⅃p, ⅃g	ΓΣ, ΓΠ, ΓΓ Γσ, Γπ, Γγ	ΓS, ΓP, ΓG Γs, Γp, Γg
1786	J. B. J. Delambre	sin.	cos.	tang.	cot.	séc.	coséc.
1786	A. Cagnoli	sin.	cos.	tang.	cot.	séc.	coséc.
1787	D. Bernoulli	sin.	cos.	tang.	....	....	....
1787	J. J. Ebert	Sin.	Cos.	Tang., T.	Cot.	....	....
1788	B. Bails	sen.	cos., cosen.	tang.	cotang.	secante	cosec.
1790	J. A. Da Cunha	sen	cos	tang	cot.	sec	cosec
1794	P. Paoli	sen.	cos.	tang.	cot.	sec.	cosec.
1795	S. l'Huilier	sin.	cos.	tang.	cot.	sec	....
1795	Ch. Hutton	sin., s.	cosin., s'	tan., t.	cotan., t'	....	....
1797	E. Bézout	sin.	cos.	tang.	cot.	séc.	……………
1799	von Metzburg	Sin., S.	Cos.	T.	Cot.	Sec.	Cosec.
1800	J. F. Lorenz	sin	cos	tang	cot	....	....

Símbolos trigonométricos usados no século XIX

Data	Autor	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante
1803	S. F. Lacroix	sin	cos	tang	cot	séc	cocéc
1811	S. D. Poisson	sin.	cos.	tan.	....	....	....
1812	J. Cole	sin.	cos.	tan.	cot.	sec.	cosec.
1813	A. L. Crelle	sin	cos	tang	cotan, cot	sec	cosec
1814	P. Barlow	sin.	cos.	tan.	cot.	sec.	cosec.
1814	C. Kramp	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	....	....
1817	A. M. Legendre	sin	cos	tang	cot	séc	cosèc
1823	J. Mitchell	sin.	cos.	tan.	cotan.	sec.	cosec.
1823	G. U. A. Vieth	sin.	cos.	tang.	cot.	sec.	....
1826	N. H. Abel	sin	cos	tang	....	....	....
1827	J. Steiner	....	....	tg	....	....	....
1827	C. G. J. Jacobi	sin	cos	tg, tang.	cotg	....	....
1829	M. Ohm	Sin	Cos	Tg	Cotg	Sec	Cosec
1830	W. Bolyai	ⓢ x	Ⓢ x	ⓣ x	Ⓣ x	Ⓢ x	Ⓙ x
1836	J. Day	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
1840	A. Cauchy	sin	cos	tang	....	....	....
1861	B. Peirce	sin.	cos.	tang.	cotan.	sec.	cosec.
1862	E. Loomis	sin.	cos.	tang.	cot.	sec.	cosec.
1866	F. M. Pires	Sen	Cos	tg	Cot	....	....
1875	J. Cortazar	sen	cos	tg	cot	....	....
1875	I. Todhunter	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
1880	J. A. Serret	sin	cos	tang	....	....	....
1881	Oliver, Wait, e Jones	sin	cos	tan	cot	sec	csc
1886	A. Schönflies	....	....	tg	ctg	....	....
1890	W. E. Byerly	sin	cos	tan	ctn	sec	csc
1893	O. Stolz	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
1894	E. A. Bowser	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
1895	C. L. Dodgson			....	....	....	....
1897	G. A. Wentworth	sin	cos	tan	cot	sec	csc
1903	G. Peano	sin, s	cos, c	tng, t	/tng	/cos	/sin
1903	Weber, Wellstein	sin	cos	tg	cotg	sec	cosec
1911	E. W. Hobson	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
1913	Kenyon, Ingold	sin	cos	tan	ctn	sec	csc
1917	L. O. de Toledo	sen	cos	tg	ctg	sec	cosec
1911	A. Pringsheim, J. Molk	sin	cos	tg	cot	séc	cosèc
1921	H. Rothe	sin	cos	tg	cot	sec	cosec
1921	G. Scheffers	sin	cos	tg	ctg	....	....

6. Considerações finais

Neste trabalho, pode-se conhecer parte da história da Matemática sobre os símbolos matemáticos usados pelos povos antigos e sobre os símbolos matemáticos usados na atualidade, cujo maior colaborador foi *Leonhard Euler*.

Uma vez conhecidos os símbolos usados em Matemática, eles permitem nos expressar de maneira universal e mais clara. Também são vitais para o desenvolvimento desta ciência, pois os símbolos facilitam as manipulações, principalmente algébricas, que se tornariam excessivamente laboriosas sem o uso de notações. Infelizmente, a história da Matemática e, em particular, a história do surgimento dos símbolos matemáticos, não é apresentada junto com conteúdos matemáticos em sala de aula e, muito menos, nos livros didáticos. Acreditamos que o interesse dos alunos por um determinado conteúdo matemático pode aumentar significativamente se pudermos apresentar notas históricas sobre o assunto. Por exemplo, os alunos certamente ficarão perplexos em saber que os algoritmos, que eles aprendem para somar e subtrair, já eram conhecidos anos antes de Cristo. Ou, então, em saber que os algarismos "*hindu-arábicos*", que eles aprendem facilmente, levaram séculos para surgirem.

Com o presente trabalho, esperamos contribuir para um melhor entendimento da importância da simbologia usada em Matemática e do surgimento de alguns símbolos.

7. Apêndice

Prova de Matemática – COMCITEC – 1973

1. Num tetraedro, duas arestas não concorrentes são perpendiculares, têm o mesmo comprimento **a**, e são ambas perpendiculares ao segmento de comprimento **b** que une os seus pontos médios. O volume do tetraedro é:

(A) $\mathbf{\frac{ab^2}{6}}$ (B) $\mathbf{\frac{ab^2}{12}}$ (C) $\mathbf{\frac{a^2b}{6}}$ (D) $\mathbf{\frac{a^2b^2}{b-a}}$

(E) diferente dos quatros valores acima

2. Dada a equação $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$, tem-se que:

(A) admite 4 raízes reais irracionais

(B) admite 8 raízes reais

(C) não admite raízes reais

(D) admite 4 raízes reais inteiras

(E) as 4 afirmativas anteriores são falsas

3. O ponto B(5, 12) é um dos vértices de um triângulo ABC. Uma reta que contém G, ponto médio de AB, e é paralela ao lado AC, intercepta o terceiro lado no ponto H(10, 2). Tem-se, então, para C:

(A) (−15, 18) (B) (–20, 6) (C) (20, 16) (D) (15, −8)

(E) duas soluções possíveis

4. O conjunto solução da desigualdade $\mathbf{|x + 1| - |x| \leq x + 2}$ é:

(A) $[-3, 0] \cup [1, 73]$ (B) $\{x / x \leq 0\} \cup [3, 15]$ (C) $[-3, 0] \cup \{x / x \geq 0\}$
(D) $\{x / -5 < x < -1\} \cup \{x / 1 < x < 17\}$ (E) $[-4, 2] \cup [-2, 1]$

5. A equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in R$.

(A) possui sempre raiz não real (B) pode não ter raiz real

(C) pode ter apenas uma raiz imaginária

(D) tem pelo menos uma raiz real

(E) não satisfaz a nenhuma das quatro afirmativas acima

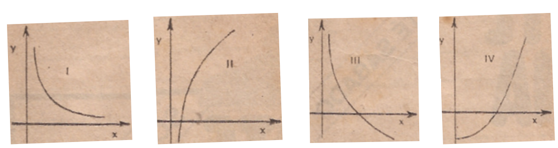
6. Considere um paralelogramo ABCD. Sendo M o ponto médio do lado AD e O o ponto de interseção do segmento MC com a diagonal BD, tem-se:

(A) $\mathbf{\frac{DO}{OB}=\frac{1}{3}}$ (B) $\mathbf{\frac{DO}{OB}=\frac{\sqrt{2}}{3}}$ (C) $\mathbf{\frac{DO}{OB}=\frac{2}{3}}$ (D) $\mathbf{\frac{DO}{OB}=\frac{1}{2}}$
(E) $\mathbf{\frac{DO}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

7. 12 pontos são distribuídos no plano de tal maneira que não haja entre eles 3 pontos colineares. O número de retas diferentes determinadas pelos 12 pontos:

(A) está entre 50 e 100 (B) é maior do que 30 e menor do que 40 (C) é maior do que 200 (D) é maior do que 100 e menor do que 150 (E) não satisfaz a nenhuma das respostas anteriores.

8. Nos gráficos abaixo, representam-se, no eixo horizontal, os valores de **x** e, no eixo vertical, seus logaritmos em uma base **a < 1**. O que melhor representa a função $\boldsymbol{log_a\, x}$ é:



(A) II (B) I (C) III (D) IV

(E) nenhum dos gráficos acima é representativo da função $\boldsymbol{log_a\, x}$

9. A função $P(x) = |x^2 + x - 1|$ é estritamente menor do que 1 para os valores de x em:

(A) $[-2, -1]\cup[0, 1]$ (B) $(-2, -1)\cup(0, 1)$ (C) $[-2, -1]\cup(0, 1)$
(D) $(-2, -1)\cup[0, 1]$ (E) $[-2, 1]$

10. O primeiro termo de uma progressão geométrica é $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ e o seu quarto termo é $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{256}}$. Representando-se por **n** e $\mathbf{n_o}$, números inteiros positivos e por $\mathbf{S_n}$ a soma dos **n** primeiros termos, tem-se:

(A) para cada número real M escolhido existe n tal que $S_n > M$

(B) $S_n < 0{,}55$ para todo n

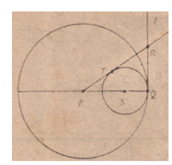
(C) existe algum n_o tal que para todo $n > n_o$ se tenha $0{,}55 < S_n < 0{,}58$

(D) para cada número real M escolhido existe n tal que $S_n < M$

(E) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

11. Sejam α e β raízes da equação $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Tem-se então que:

(A) α/β é raiz da equação (B) $\alpha + \beta$ é raiz da equação
(C) $\alpha.\beta$ é raiz da equação (D) α^2 é raiz da equação
(E) as quatro afirmativas anteriores são falsas.



12. Na figura dada, as circunferências de centros P e S são ambas tangentes à reta L no mesmo ponto Q e a reta que passa por P e R tangencia a circunferência menor no ponto T. Sendo os raios das circunferências respectivamente 8 m e 3 m, a medida do segmento QR é: (A) 4 m (B) 6 m (C) 8 m (D) 2 m

(E) diferentes dos quatro valores anteriores

13. Considerando as funções do R^2 no R^2:

$$\mathbf{T:\Re^2 \to \Re^2 \qquad S:\Re^2 \to \Re^2}$$
$$\mathbf{T(x,y) = (y,x) \quad S(x,y) = (x+1,y)}$$

$$\mathbf{P:\Re^2 \to \Re^2 \qquad Q:\Re^2 \to \Re^2}$$
$$\mathbf{P(x,y) = (ax+by, cx+dy) \quad Q(x,y) = (xy, y)}$$

onde a, b, c, d são números reais, conclui-se que:

(A) Apenas duas são lineares (B) todas são lineares

(C) Apenas uma é linear (D) Nenhuma é linear

(E) Somente uma não é linear.

14. Considere as seguintes afirmações sobre um sistema de 2 equações lineares homogêneas a 3 incógnitas:

1 – o sistema possui alguma solução diferente de (0, 0, 0)

2 – se (x, y, z) e (x', y', z') são soluções, então (x + x', y + y', z + z') também é solução

3 – se (x, y, z) é solução e λ é um número real qualquer, então (λx, λy, λz) é solução

Tem-se que:

(A) as três afirmativas são falsas (B) apenas uma afirmativa é falsa

(C) apenas uma afirmativa é verdadeira (D) as três afirmativas são verdadeiras (E) um sistema de duas equações lineares a três incógnitas nunca é homogêneo

15. Seja $\boldsymbol{f}: R^2 \to R^2$ a função dada por $\boldsymbol{f}$ **(x, y) = (x – 2y, – 2x + 4y)**. Então o conjunto dos pontos que a função $\boldsymbol{f}$ transforma no ponto (0, 0)

(A) contém somente o ponto (2, 1) (B) contém somente o ponto (0, 0)

(C) contém todos os pontos de uma única reta (D) contém todos os pontos de um plano (E) não contém nenhum ponto do plano

16. Dado o sistema de equações $\begin{cases} \mathbf{rx + y + z = 1} \\ \mathbf{x + ry + z = 1} \\ \mathbf{x + y + rz = -2} \end{cases}$

onde **r** é um número real, tem-se que:

(A) o conjunto solução é finito e não vazio, para r = – 2

(B) o conjunto solução contém uma infinidade de pontos do espaço para r = 1 (C) o conjunto solução é vazio para r = 2 (D) o conjunto solução contém um único ponto do espaço para r ≠ 1 e r ≠ – 2 (E) o conjunto solução é vazio, qualquer que seja r.

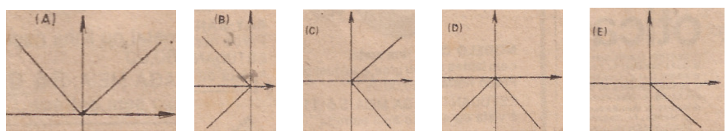
17. Os valores de ***k*** para os quais a reta que passa pelos pontos (k, 3) e (–2, 1) é paralela à reta determinada pelos pontos (5, k) e (1, 0):

(A) não são todos racionais (B) são todos positivos
(C) não são todos inteiros (D) são todos negativos
(E) não satisfazem a nenhuma das 4 afirmativas anteriores.

18. Nos gráficos abaixo os pontos do domínio são marcados no eixo horizontal e os da imagem no eixo vertical. O gráfico que melhor pode representar a função $f: R^+ \to R$

$$x \mapsto f(x) = -|x|$$

onde R^+ é o conjunto dos reais não negativos, é:



19. Os vetores (–2, t, 1) e (–t, t, 4) do R^3 são ortogonais:

(A) Para um único valor de t (B) Para qualquer valor de t
(C) Para apenas dois valores de t (D) Para nenhum valor de t
(E) Para um número de valores de t finito e maior do que 2.

20. Os vetores $(\alpha, 1)$ e $(-1, \alpha)$ do R^2 são linearmente independentes para

(A) nenhum valor de α (B) todo valor de α
(C) somente um valor de α (D) apenas dois valores de α
(E) um número maior que 2 e finito de valores de α

21. Se **|sen x| = tg x**, então, sendo **k** inteiro:

(A) $x = \frac{k\pi}{2}$ (B) $x = 2k\pi$ (C) $x = k\pi$ (D) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$
(E) $x = (2k + 1)\pi$

22. Considere o sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 5x_2 - x_3 = c \end{cases}$. Então:

(A) O sistema possui solução quaisquer que sejam a, b, c.

(B) O sistema possui solução apenas quando a = b = c = 0.

(C) O sistema possui solução se e somente se 2a – b + c = 0.

(D) O sistema possui solução única quando a = b = c = 0.

(E) As quatro afirmativas anteriores são falsas.

23. A igualdade $\mathbf{\cos\theta = \cos 2\theta}$

(A) É verdadeira para um número infinito de valores de θ.

(B) É falsa para todo θ. (C) É verdadeira para todo θ. (D) É verdadeira para um único valor de θ. (E) Não satisfaz a nenhuma das afirmativas acima.

24. Sendo dado que **x** pertence ao intervalo real [0, π], a equação

$\mathbf{sen^2\, 2x + sen\, 2x = 0}$

(A) Não admite solução (B) Admite uma infinidade de soluções (C) Admite uma solução única (D) Admite três soluções (E) Não satisfaz a nenhuma das quatro afirmativas anteriores.

25. Sendo dado que $\dfrac{\mathbf{sen\,(180^0 - x)\cos(90^0 - x)}}{\mathbf{tg\,(360^0 - x)\cos(180^0 + x)}} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$ tem-se necessariamente:

(A) |cos x| = 1/2 (B) x = 60^0 (C) $90^0 < x < 180^0$ (D) tg x = $-\sqrt{\mathbf{3}}$
(E) As quatro afirmativas anteriores são falsas.

26. Seja **S** a área do círculo que tem o centro no ponto (3, 4) e é tangente à reta **y = x/2**. Tem-se então:

(A) $15 \leq S \leq 16$ (B) $S < 15$ (C) $S - 15 < 16 - S$
(D) $13 < S \leq 14$ (E) $S = 4\pi$

27. Dado um cubo de aresta **a**, o ângulo sob o qual um observador situado no centro do cubo vê a diagonal de uma das faces é:

(A) Um ângulo cuja tangente é $2\sqrt{\mathbf{2}}$

(B) Um ângulo cujo seno é $2\sqrt{\mathbf{2}}/3$

(C) Um ângulo cujo cosseno é $-1/3$

(D) Um ângulo cuja secante é $-\sqrt{\mathbf{3}}$

(E) Um ângulo cujo seno é $\sqrt{\mathbf{2/3}}$.

28. Sendo dada a função $\boldsymbol{f}: R^2 \to R^2$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{2x - 3y, 4x + y})$$

e sendo L_1 a reta x = 0 e L_2 a reta y = 0, então o maior dos ângulos formados por $f(L_1)$ e $f(L_2)$ é:

(A) arc tg 5 (B) arc tg (–7) (C) arc tg $(-\sqrt{2}/10)$ (D) $\pi/2$

(E) diferente dos quatro valores anteriores.

29. A razão entre os logaritmos de 16 e 4 numa base qualquer é:

(A) 0,25 (B) 0,5 (C) 4 (D) 2
(E) Um número que depende da base escolhida.

30. Sendo dados os conjuntos

M = {a, e, i, o}

A = {(a, a), (e, e), (i, i), (o, o), (e, a), (a, o)}

B = {(a, a), (e, e), (i, i), (e, o)}

C = {(a, a), (e, e), (i, i), (o, o), (i, e), (a, e), (e, i), (a, i)}

onde a, e, i, o são objetos diferentes, tem-se que:

(A) $A \cap C$ não é uma relação de ordem em M

(B) $A \cap B$ é uma relação de ordem em M

(C) $B \cup C$ é uma relação de ordem em M

(D) A é uma relação de ordem em M

(E) $A \cup B$ é uma relação de ordem em M

31. Seja $\mathcal{Z}$ o conjunto dos inteiros. Dados $A = \{x \in \mathcal{Z} \mid |x| \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathcal{Z} \mid 1 \leq |x| \leq 3\}$, tem-se que:

(A) A x B tem 9 elementos (B) $A \cap B$ tem 4 elementos

(C) $A \cup B$ tem 9 elementos (D) $A \cap B$ tem 2 elementos

(E) As quatro afirmativas anteriores são falsas.

32. Sejam dadas as funções m = {(5, 2), ($\frac{3}{4}$, 0), (2, $\frac{1}{9}$), (12, 5), (0, 0)} e n = {(5, 2), (0, 0), (6, $\frac{1}{4}$), ($\frac{1}{9}$, 0)}. Considere as afirmações:

1) não existe a função n.m

2) não existe a função m.n

3) m é uma função bijetora de R em R

4) a função m.n.m não existe

5) todas as afirmativas anteriores são falsas

Então

(A) Todas são corretas (B) Somente duas são corretas

(C) Somente uma é correta (D) Todas são falsas

(E) Somente três são corretas.

33. Uma elipse está centrada na origem, tem os seus eixos sobre os eixos coordenados e é tangente simultaneamente a $x^2 + y^2 = 4$ e a $x^2 + y^2 = 9$. Na determinação desta elipse verifica-se que

(A) a solução é $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ (B) não há solução

(C) a solução é $4x^2 + 8y^2 = 36$ (D) a solução é $(x – 3)^2 + (y – 2)^2 = 1$

(E) há mais de uma solução.

34. O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de um plano P e de uma reta perpendicular a P é:

(A) um conjunto com um único elemento (B) uma superfície cilíndrica (C) uma superfície cônica (D) um feixe de quatro retas concorrentes (E) um conjunto diferente dos quatro anteriores.

35. Seja f uma função de R em R tal que f(2) = 7, f(9) = 3, f(0) = 0, f(5) = 16 e f(7) = 4; seja g uma outra função de R em R tal que a imagem de cada ponto **x** do seu domínio seja **2x + 3**. Então, chamando-se h a função composta $g \circ f$, tem-se que

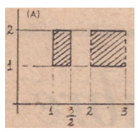
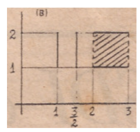
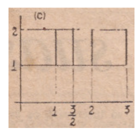
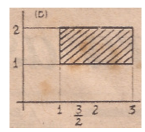
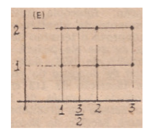
(A) h(1) = 16 (B) h(9) = 9 (C) h(2) = 49 (D) não existe essa função h (E) nada se pode afirmar pois a lei de formação de f não é conhecida.

36. Determinando-se os pares (x, y) de números reais que satisfazem às condições $\mathbf{y = x^2 + 2x, x^2 + y^2 \leq 1, y = x}$, tem-se:

(A) dois pares (B) nenhum par (C) três pares
(D) uma infinidade de pares (E) um único par.

37. Dados os conjuntos $A = \{1, \frac{3}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < x < 3\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x \leq 2\}$, o gráfico de A x B é melhor representado por:

38. Um segmento da reta se move de tal modo que seus extremos pertencem a duas retas perpendiculares. O ponto médio do segmento descreve:

(A) uma parábola (B) uma hipérbole (C) uma elipse
(D) uma reta (E) uma circunferência.

39. Dada a inequação $(3x - 2)^3 (x - 5)^2 (2 - x)\, x > 0$, tem-se que a solução é:

(A) $\{x \,/\, x < 2/3 \text{ ou } 2 < x < 5\}$ (B) $\{x \,/\, 2/3 < x < 2 \text{ ou } x < 0\}$
(C) $2/3 \leq x \leq 2$ (D) $2/3 < x < 5$ (E) diferente das quatro anteriores

40. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Sejam ainda os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -1 < x \leq 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, se

$D = \{(x, y) \in A \times B \,/\, y \geq x + 4\}$, tem-se que

(A) D = A x B (B) D tem dois elementos
(C) D tem um elemento (D) D tem três elementos

(E) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

41. Sejam P, Q e R pontos de uma circunferência de centro O, tais que P e Q estão do mesmo lado do diâmetro que passa por R. Sabendo que $\mathbf{O\hat{R}P} = 20^0$ e $\mathbf{R\hat{O}Q} = 80^0$, tem-se que o ângulo $\mathbf{P\hat{Q}O}$:

(A) Mede 20^0 (B) Mede 40^0 (C) Depende das posições de P e Q (D) Mede 50^0 (E) Mede 60^0.

42. Dados $\mathbf{a} \in \mathcal{Z}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{Z}$, onde $\mathcal{Z}$ é o conjunto dos inteiros, considere os números **d** e **m**, respectivamente máximo divisor comum de **a** e **b** e mínimo múltiplo comum de **a** e **b**.

Se $A = \{x \in \mathcal{Z} / x$ é divisor de $\mathbf{a}\}$ e $B = \{x \in \mathcal{Z} / x$ é divisor de $\mathbf{b}\}$, então:

(A) quaisquer que sejam a e b, $m \notin A \cap B$ (B) $d \in A \cap B$ e se $y \in A \cap B$ (C) se $x \in A \cap B$ e $y \in A \cap B$, então $xy \in A \cap B$ (D) se $x \in A \cup B$, então $m \leq x$

(E) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

43. Um paralelogramo tem um vértice na origem O e lados OA e OB, onde A = (1, 2, 3) e B = (2, 1, 3). A área desse paralelogramo é: (A) $\sqrt{\mathbf{57}}$ (B) $\sqrt{\mathbf{60}}$ (C) $\sqrt{\mathbf{59}}$ (D) $\sqrt{\mathbf{61}}$

(E) diferente das quatro anteriores.

44. É dado que $\boldsymbol{\theta}$ pertence ao intervalo $(-\pi, \pi)$. Considerando as afirmações:

1. Conhecendo somente sen θ é possível determinar univocamente sen $(\theta/2)$

2. Conhecendo somente cos θ é possível determinar univocamente cos 2θ

3. Conhecendo somente sen θ é possível determinar univocamente cos θ

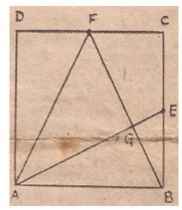
4. Conhecendo somente sen θ e cos θ é possível determinar univocamente $(\theta/2)$

(A) as afirmações 2 e 4 são verdadeiras (B) as afirmações 1 e 4 são verdadeiras (C) as afirmações 1, 2 e 3 são falsas (D) todas as afirmações são falsas (E) a afirmação 1 é verdadeira e as afirmações 2 e 4 são falsas.

45. O conjunto dos pontos $z = x + iy$ do plano complexo que satisfazem $|z - 1|^2 = 2x$ e $y \geq 2$ é

(A) o conjunto vazio (B) uma região não limitada do plano
(C) todos os pontos $x + iy$ tais que $y \geq 2$ (D) uma reta

(E) diferente das quatro anteriores.



46. Na figura ao lado ABCD é um quadrado, E e F são pontos médios dos lados BC e CD. A razão entre as áreas dos triângulos AGF e BEG é:

(A) $3\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 5 (D) $2\sqrt{3}$

(E) Nenhuma das quatro anteriores.

47. Seja um losango cuja diagonal maior mede 10 cm. Sabendo que a razão entre a área do losango e a área do círculo inscrito é $\frac{2a}{3\pi}$ o comprimento da diagonal menor será:

(A) 7,5 cm (B) 5 cm (C) 10 cm (D) 2 cm

(E) Nenhuma das quatro anteriores.

48. Sendo dado que $\mathbf{M} = \frac{\textbf{sen } \mathbf{2460^0} \; . \; \mathbf{\cos(1110^0}}{\textbf{tg } \mathbf{2205^0}}$, tem-se que

(A) $M = -3\sqrt{2}/4$ (B) $M = -3/8$ (C) $M = -1/8$ (D) $M = 0$

(E) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

49. Uma circunferência está inscrita em um triângulo isósceles de 10 cm de altura. Supondo que se aumenta indefinidamente a área desse triângulo sem alterar a sua altura, o comprimento da circunferência tende para

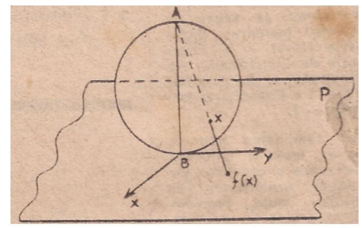
(A) 10π cm (B) 100π cm (C) o infinito (D) $10\pi\sqrt{3}$ cm

(E) um valor diferente dos quatro anteriores.

50. Seja AB um diâmetro de uma esfera tangente a um plano P no ponto B. Seja E o conjunto dos pontos da superfície esférica que são distintos de A. Considere a função $\boldsymbol{f} : \mathrm{E} \to \mathrm{P}$

$$\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

onde $\boldsymbol{f}\ (\mathbf{x})$ é o ponto de interseção da reta definida por A e x com o plano P (vide figura). Dentre as afirmações abaixo, a falsa é:



(A) a função é injetora

(B) a função é sobrejetora

(C) a função é bijetora

(D) a função leva circunferências em circunferências

(E) a função leva pontos simétricos em relação ao diâmetro AB em pontos simétricos em relação ao ponto B.

8. Bibliografia

[1] ALENCAR FILHO, Edgard . *Teoria Elementar dos Conjuntos* . 13. ed - São Paulo: Livraria Nobel, 1972.

[2] BAUMGART, John K. . *História da Álgebra* . Tradução: Hygino H. Domingues - São Paulo: Editora Atual, 1992.

[3] BEZERRA, Manoel Jairo . *Aritmética* . 3. ed. - Rio de Janeiro: FENAME - MEC, 1965.

[4] BEZERRA, Manoel Jairo . *Curso de Matemática* . 26. ed. - São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970.

[5] BEZERRA, Manoel Jairo; et al - *Geometria 1* - 2. ed. - Rio de Janeiro: FENAME - MEC, 1970.

[6] BOCHEŃSKI, I. M. . *A History of Formal Logic* . University of Notre Dame Press – 1961.

[7] BOURBAKI, Nicolas . *Elements of the History of Mathematics* . Second Printing 1999 – Springer-Verlag.

[8] BOURBAKI, Nicolas . *Éléments d' Histoire des Mathématiques* . Collection Histoire de la pensée IV – Nouvelle Édition Augmentée – Hermann, Paris 1974.

[9] BOYER, Carl B. . *História do Cálculo* . Tradução: Hygino H. Domingues - São Paulo: Editora Atual, 1992.

[10] BOYER, Carl B. . *História da Matemática* . 2. ed. - Revista por Uta C. Merzbach - Tradução: Elza F. Gomide - São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

[11] CAJORI, Florian . *A History of Mathematical Notations* . The Open Court Publishing Company Chicago-Illinois – vol. 1 e 2 – 1930.

[12] CAJORI, Florian . *Uma História da Matemática* . Editora Ciência Moderna, 2007.

[13] CASTRUCCI, Benedito . *Elementos de Teoria dos Conjuntos* . 6. ed. - São Paulo: Livraria Nobel, 1973.

[14] CHACE, Arnold Buffum . *The Rhind Mathematical Papyrus* . The National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, Virginia 22091 – Printed in the United States of Amarica, 1979.

[15] COSTA, Celso; FIGUEIREDO, Luiz M. Silva de . *Tópicos de Matemática e Atualidade* (Livro-texto 4) . Rio de Janeiro: UFF / CEP - EB, 2006.

[16] DIEUDONNÉ, Jean . *A Formação da Matemática Contemporânea* . Publicações Dom Quixote-Lisboa – 1990.

[17] EVES, Howard . *História da Geometria* . Tradução: Hygino H. Domingues - São Paulo: Editora Atual, 1992.

[18] GARBI, Gilberto Geraldo . *A rainha das Ciências* . São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

[19] HEFEZ, Abramo . *Elementos de Aritmética* . 2. ed. - IMPA, 2006.

[20] IMENES, Luiz Márcio . *A Numeração Indo-Arábica* . São Paulo: Editora Scipione, 1989.

[21] KATZ, Victor J. . *A History of Mathematics: an introduction* . Harper Collins College Publishers, 1993.

[22] LIMA, Elon Lages . *Matemática e Ensino* . 2. ed. - Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2003.

[23] LIMA, Elon Lages . *Meu Professor de Matemática e outras histórias* . 4. ed. - Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004.

[24] MAOR, Eli . ***e*: *A História de um número*** . 4. ed. – RJ e São Paulo: Editora Record, 2008-FNDE.

[25] MENNINGER, Karl . *Number Words and Number Symbols; A Cultural History of Numbers* . The M.I.T. Press – Second Printing, July 1970.

[26] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. . *Cálculo* . vols. 1 e 2 - 2. ed. - Tradução: André Lima Cordeiro, Et al - Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1983.

[27] NEUGEBAUER, Otto . *The Exact Sciences in Antiquity* . Princeton University Press, 1952 – New Jersey.

[28] OLIVERO, Mário . *História da Matemática Através de Problemas* (Livro-texto 1) . Rio de Janeiro: UFF / CEP - EB, 2005.

[29] *PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Ensino Fundamental – Ciências da Natureza, matemáticas e suas tecnologias* – MEC, 1998, pág. 42.

[30] RUSSELL, Bertrand . *Introdução à Filosofia Matemática* . 3. ed. - Tradução: Giasone Rebuá - Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

[31] TAHAN, Malba (**= *Professor JÚLIO CÉSAR de MELO e SOUSA***) . *Matemática Divertida e Curiosa* . 25. ed. – Rio de Janeiro e São Paulo: Editora Record, 2008-FNDE.