



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-  
BRASILEIRA**

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ENIO MÁRCIO SÁ MACIEL**

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DO  
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA**

**REDENÇÃO-CE  
2023**

ENIO MÁRCIO SÁ MACIEL

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DO  
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

REDENÇÃO-CE  
2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Maciel, Enio Marcio sa.

M152a

Aprendizagem significativa no ensino médio através do  
laboratório de matemática / Enio Marcio sa Maciel. - Redenção,  
2023.

115fl: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Matemática - Ensino médio. 2. Laboratório de matemática. 3.  
Ensino aprendizagem. 4. Aprendizagem significativa. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 510

---

**ÊNIO MÁRCIO SÁ MACIEL**

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 18/08/2023

**BANCA EXAMINADORA**

**Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

**Dra. Danila Fernandes Tavares**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

**Dr. Tiago Gadelha de Sousa**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE



Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL JORGE PONTES DIOGENES, PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 19/08/2023, às 12:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **DANILA FERNANDES TAVARES, PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 21/08/2023, às 06:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **TIAGO GADELHA DE SOUSA, Usuário Externo**, em 21/08/2023, às 10:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0740930** e o código CRC **9441C6FE**.

---

*Dedico esse trabalho a todos que me apoiam na missão de repassar tais conhecimentos, em especial meu pai, in memoriam, que com certeza vibraria com esse novo patamar profissional que me lancei.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pelo grande feito, porque realmente achava bem impossível alcançar esse título tão sonhado por muitos docentes. Diante de tantos compromissos, dentre eles uma jornada de muitas horas na escola, além dos compromissos com a família de três filhos, ter que me deslocar semanalmente para a universidade que fica em outra cidade, foi realmente desafiador.

Agradeço a todos que diretamente ou não contribuíram para minha jornada, meus colegas de curso, que por muitas vezes foram decisivos no meu desempenho nas disciplinas do curso, aos professores da universidade que de maneira eficiente conduziram os conteúdos em suas aulas e trabalhos.

O meu agradecimento especial ao Prof. Dr. Rafael Diógenes, que é sem dúvida um professor muito competente e didático, também muito organizado e comprometido com as orientações. Agradeço sua confiança e incentivo em todos os momentos de estudos que tivemos.

A banca examinadora deste trabalho, Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares e Prof. Dr. Tiago Gadelha de Sousa, pela disponibilidade em ajudar na avaliação do nosso trabalho. Agradeço também ao CAPES pela bolsa de estudos que com certeza traz tranquilidade no processo.

Aos meus amigos do mestrado, por todo apoio e troca de experiências, em especial, aos meus amigos Jefferson Mascaranheas, Ricardo Sandro, Artur Maximiano e Alneyr Gomes.

*“É muito pouco o que sabemos e é imenso o que ignoramos”*

*Laplace*

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar aos docentes de Matemática a importância de aulas práticas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática para alunos do Ensino médio, por meio da aprendizagem significativa, de maneira particular, pelo uso do laboratório de Matemática. Para isto, são apresentados os índices dos desempenhos dos alunos em Matemática no Brasil, além de concepções de alguns estudiosos; e por fim trabalhos experimentados com os alunos no formato de oficinas, tentando assim dimensionar as deficiências e dificuldades, bem como as possíveis contribuições que os professores podem trazer para um letramento matemático otimizado e eficiente.

**Palavras-chave:** Aprendizagem significativa. Laboratório de matemática.



## **ABSTRACT**

The objective of this work is to show Mathematics teachers the importance of practical classes in the teaching-learning process of Mathematics for high school students, by means of meaningful learning, in particular, through the use of the Mathematics laboratory. For this, it is presented the indexes of the performances of the students in Mathematics in Brazil, besides conceptions of some scholars and finally works experimented with the students in the format of workshops, thus trying to measure the deficiencies and difficulties, as well as the possible contributions that the teachers can bring to an optimized and efficient mathematical literacy.

**Keywords:** Meaningful learning. Math Lab.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Variações temporais do desempenho dos estudantes brasileiros nas últimas seis edições do PISA em relação à edição atual .....	22
<b>Figura 2</b> - Intervalos de confiança da diferença das médias do Brasil, Matemática – PISA 2018 e ciclos anteriores .....	23
<b>Figura 3</b> - Médias, intervalos de confiança e percentis dos escores por dependência administrativa, Matemática – PISA 2018.....	26
<b>Figura 4</b> - Médias, intervalos de confiança e percentis dos escores por localização, Matemática – PISA 2018.....	26
<b>Figura 5</b> - Médias, intervalos de confiança e percentis dos escores por localização, Matemática – PISA 2018.....	27
<b>Figura 6</b> - Intervalos de confiança dos escores médios das regiões brasileiras, Matemática – PISA 2018.....	27
<b>Figura 7</b> - Desenhar triângulo e dividir os ângulos internos. ....	34
<b>Figura 8</b> - Recortar os ângulos e alinhar formando um ângulo raso .....	35
<b>Figura 9</b> - Uma visão esquemática do contínuo aprendizagem significativa - aprendizagem mecânica .....	40
<b>Figura 10</b> - Pirâmide da aprendizagem.....	53
<b>Figura 11</b> - Teodolito profissional.....	54
<b>Figura 12</b> - Aluno executando medição de ângulos .....	56
<b>Figura 13</b> - Materiais utilizados.....	57
<b>Figura 14</b> - Passo 01 (teodolito) .....	58
<b>Figura 15</b> - Passo 02 (teodolito) .....	59
<b>Figura 16</b> - Passo 03 (teodolito) .....	59
<b>Figura 17</b> - Passo 04 (teodolito) .....	60
<b>Figura 18</b> - Passo 05 (teodolito) .....	60
<b>Figura 19</b> - Passo 06 (teodolito) .....	61
<b>Figura 20</b> - Produto final (teodolito) .....	61
<b>Figura 21</b> - Prática com teodolito .....	62
<b>Figura 22</b> - Medição do passo médio .....	62
<b>Figura 23</b> - Cálculos de alturas.....	63
<b>Figura 24</b> - Atividade respondida (aula de campo) .....	64
<b>Figura 25</b> - Tetraedros .....	68

<b>Figura 26</b> - Tetraedro.....	69
<b>Figura 27</b> - Pipa tetraédrica .....	70
<b>Figura 28</b> - Materiais pipa tetraédrica .....	70
<b>Figura 29</b> - Esquema de amarração dos canudos.....	71
<b>Figura 30</b> - Aluno prendendo canudos .....	72
<b>Figura 31</b> - Aluna colando papel de seda .....	73
<b>Figura 32</b> - Tesselações na natureza.....	75
<b>Figura 33</b> - Tesselação nos animais.....	75
<b>Figura 34</b> - Isometria da colmeia.....	76
<b>Figura 35</b> - Mosaico sol.....	76
<b>Figura 36</b> - Obra de Escher.....	77
<b>Figura 37</b> - Simetria da borboleta.....	78
<b>Figura 38</b> - Reflexão.....	78
<b>Figura 39</b> - Flocos de neve com rotação de $60^\circ$ .....	79
<b>Figura 40</b> - Flor com cinco eixos de simetria cuja rotação é de $72^\circ$ .....	79
<b>Figura 41</b> - Rotação .....	80
<b>Figura 42</b> - Artesanato indígena .....	81
<b>Figura 43</b> - Translação.....	81
<b>Figura 44</b> - Passo 01: Tesselação.....	82
<b>Figura 45</b> - Passo 2: Tesselação.....	83
<b>Figura 46</b> - Passo 3: Tesselação.....	83
<b>Figura 47</b> - Gatos .....	84
<b>Figura 48</b> - Silhueta gatos.....	84
<b>Figura 49</b> - Alunos produzindo “tesselação” por rotação.....	85
<b>Figura 50</b> - Alunos produzindo “tesselação” por translação .....	86
<b>Figura 51</b> - Alunos iniciando silhuetas .....	87
<b>Figura 52</b> - Alunos preenchendo suas tesselações.....	88
<b>Figura 53</b> - Acabamento de painéis tesselação.....	88
<b>Figura 54</b> - Trabalhos finalizados pela turma A .....	89
<b>Figura 55</b> - Trabalhos finalizados pela turma B .....	89
<b>Figura 56</b> - Espiral de Teodoro.....	92
<b>Figura 57</b> - Espiral de Teodoro – passo 01 .....	92
<b>Figura 58</b> - Espiral de Teodoro – passo 02.....	93
<b>Figura 59</b> - Espiral de Teodoro – passo 03.....	94
<b>Figura 60</b> - Espiral de Teodoro – passo 04.....	94

<b>Figura 61</b> - Espiral de Teodoro – passo 05 .....	95
<b>Figura 62</b> - Espiral de Teodoro inacabado .....	95
<b>Figura 63</b> - Espiral de Teodoro 1.....	96
<b>Figura 64</b> - Espiral de Teodoro 2.....	96
<b>Figura 65</b> - Melhor espiral da turma A.....	97
<b>Figura 66</b> - Melhor espiral da turma B .....	97
<b>Figura 67</b> - Passo 01 espiral Geogebra .....	98
<b>Figura 68</b> - Passo 02 espiral Geogebra .....	99
<b>Figura 69</b> - Passo 03 espiral Geogebra .....	99
<b>Figura 70</b> - Passo 04 espiral Geogebra .....	100
<b>Figura 71</b> - Passo 05 espiral Geogebra .....	100
<b>Figura 72</b> - Passo 06 espiral Geogebra .....	101
<b>Figura 73</b> - Espiral – áreas de triângulo.....	101
<b>Figura 74</b> - Arcos da espiral .....	102
<b>Figura 75</b> - Arcos da espiral .....	104
<b>Figura 76</b> - Aros externos no Geogebra .....	105
<b>Figura 77</b> - Turma A construindo espiral .....	106
<b>Figura 78</b> - Alunos turma B construindo espiral .....	106

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1</b> - Enquete – Teodolito caseiro.....	66
<b>Gráfico 2</b> - Enquete: Pipa tetraédrica.....	74
<b>Gráfico 3</b> - Tesselação .....	90
<b>Gráfico 4</b> - Espiral de Teodoro .....	107

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> - Descrição e percentual de estudantes por nível de proficiência em Matemática – PISA 2018.....	24
---	----

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 - Poliedros .....</b>	<b>68</b>
-----------------------------------	-----------

## SUMÁRIO

1.	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	18
2.	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	21
2.1.	A SITUAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL SEGUNDO DADOS DO PROGRAMA INTERNACIONAL DE AVALIAÇÃO DE ESTUDANTES – PISA .....	21
2.2.	OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO (PCNEM) E O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA:.....	28
2.2.1.	<b>O recurso aos jogos segundo os PCNEM</b> .....	29
3.	<b>O PAPEL DO LABORATÓRIO NO ENSINO DE MATEMÁTICA</b> .....	31
3.1.	CONCEPÇÕES DO USO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA .....	33
3.2.	LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO .....	34
3.2.1.	<b>Laboratório de Matemática e Aprendizagem Significativa.</b> .....	39
3.2.1.1.	<i>A aprendizagem significativa de um ponto de vista piagetiano.</i> .....	43
3.2.2.	<b>O Laboratório de Matemática e os Temas Transversais</b> .....	45
3.2.3.	<b>O Laboratório de Matemática como sala de aula inovadora</b> .....	46
4.	<b>OFICINAS E PRÁTICAS DE LABORATÓRIO</b> .....	54
4.1.	OFICINA 01: TEODOLITO CASEIRO PARA CALCULAR ALTURAS INACESSÍVEIS. ....	54
4.2.	OFICINA 02 - PIPA TETRAÉDRICA .....	66
4.3.	OFICINA 03 - REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS USANDO “TESSELAÇÃO” .....	74
4.3.1.	<b>Tesselações na natureza</b> .....	75
4.3.2.	<b>Tesselações nas artes</b> .....	76
4.3.3.	<b>Tesselações no plano euclidiano</b> .....	77
4.3.4.	<b>Técnicas de “tesselação”:</b> .....	82
4.3.5.	<b>Etapas oficina “tesselação”:</b> .....	87
4.3.6.	<b>Alguns outros trabalhos finalizados pela turma</b> .....	89



4.4.	OFICINA 04 – ESPIRAL PITAGÓRICO .....	90
4.4.1.	<b>Uso didático do espiral de Teodoro.....</b>	<b>92</b>
4.4.2.	<b>Elementos geométricos na espiral de Teodoro .....</b>	<b>98</b>
4.4.3.	<b>Alunos utilizando Geogebra:.....</b>	<b>106</b>
5.	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>108</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>1100</b>
	ANEXO A .....	113
	ANEXO B.....	114
	ANEXO C .....	115
	ANEXO D .....	116

## INTRODUÇÃO

Oferecer ao aluno capacidade de “empregar a Matemática” é uma das metas do Letramento matemático. Essa definição de “empregar” seria em outras palavras dar significado ao conteúdo matemático que se ensina aos alunos. Mas de que jeito isso poderia ser feito de verdade?

A aprendizagem significativa não é aquela que o estudante nunca esquece. O fato de esquecer é um processo natural que deriva do desuso daquele determinado conteúdo. Por exemplo lembrar como funciona o processo da soma de frações através do uso do MMC, pra muitos adultos que já não frequentam mais a escola, é uma situação perfeitamente normal. O que se espera é que, caso necessite, esse mesmo adulto consiga reaver esse conhecimento de forma rápida caso necessário.

De acordo com Sousa, Almeida e Andrade (2021), as dificuldades vivenciadas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática causam preocupação, pois o estudo desta disciplina é um dos responsáveis por estimular o raciocínio lógico, desenvolver a capacidade de resolver problemas e ser umas das ciências com grande aplicabilidade no cotidiano. Logo, há a necessidade de desenvolver estratégias didáticas e metodológicas cada vez mais diversificadas e que atendam às necessidades dos discentes, tendo em vista o desenvolvimento da sociedade, marcado principalmente pelo avanço da tecnologia.

O laboratório de matemática possibilita a aprendizagem por descoberta. Isso implica que o aluno primeiramente descobre o que vai aprender. Porém, não é preciso descobrir para aprender com significado. Ainda é preciso ter as duas condições citadas anteriormente: conhecimento prévio e predisposição para aprender. No ensino médio e superior predomina fortemente a aprendizagem receptiva, onde o aluno “recebe” a informação em sua forma final. Essa recepção pode ser de maneira tradicional, como através de livros, aulas expositivas ou uma experiência de laboratório. Mas isso não implica passividade, pois na aprendizagem receptiva requer muita atividade cognitiva para relacionar novos conhecimentos com aqueles já existentes. É bem curioso pensar por que na faculdade se tem tantos laboratórios, nas mais diversas áreas e disciplinas; provavelmente porque são eficientes como meios de aprendizagem significativa.

A média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, 2018 foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da OCDE (492), (MEC, 2019). Levantamento do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) 2021 mostra que somente 5% dos estudantes

do Ensino Médio da rede pública têm aprendizado considerado adequado em matemática (MEC, 2022). Em 2019, eram 7%.

Há muito tempo, nesses 21 anos de magistério, tenho tentado implementar o laboratório de Matemática por onde lecionei; mas confesso que parei e reiniciei várias vezes; os motivos são os mais diversos, desde falta de estrutura e material até mesmo descrédito das gestões; mas sempre fui convicto de que se aprendia mais e com significado quando se construía algo em torno dos conteúdos. Fui professor por vários anos da disciplina de laboratório de Matemática; ficava totalmente na minha reponsabilidade a criação e elaboração dos materiais, pois a disciplina não contara com a disponibilidade de livros ou apostilas disponíveis nas editoras, o que se via era, no final de cada capítulo, uma sugestão de experimento que muitas vezes não se dava muita atenção.

Aliando meu interesse pelo laboratório com a necessidade de se elevar os índices de aprendizagem em Matemática, decidi que este seria o tema principal do trabalho. Muitos professores de Matemática são alheios as práticas de laboratório; portanto essa pesquisa ajudará a divulgar essa temática.

Sendo assim, a pesquisa tem por objetivo geral a divulgação de questões relacionadas ao laboratório de Matemática: Concepções, materiais e funcionamento. Os objetivos específicos seriam mostrar como o laboratório pode funcionar, tornar o mesmo aplicável e de baixo custo e descrever o desenvolvimento de algumas oficinas realizadas.

O trabalho está dividido em seis capítulos, conforme descrição a seguir. O segundo capítulo relata a situação do ensino de Matemática no Brasil mostrando desempenho do Brasil nos últimos dois Programas internacionais de Avaliação de Estudantes – PISA; traz ainda a descrição dos parâmetros curriculares nacionais e o processo de ensino - aprendizagem de Matemática segundo o mesmo. No capítulo três temos o papel do laboratório de Matemática no ensino de Matemática, concepções sobre uso do laboratório de Matemática e sua aplicação no ensino médio, desenvolvendo aprendizagem significativa, discutindo temas transversais como ética e meio ambiente e ainda desenvolvendo o que se denomina sala de aula inovadora.

Já no capítulo quatro foi feita uma explanação detalhada das oficinas realizadas com os alunos, bem como as estatísticas dos resultados. Nas considerações finais discutiu-se sobre o uso otimizado do laboratório de Matemática, da mesma forma, explanou-se sobre a importância da formação do professor para a adoção de modelos pedagógicos apropriados ao uso de novas metodologias em sala de aula.

Segundo Carbonell (2002, p.16), “a nova cidadania exige, outro tipo de conhecimento e uma participação mais ativa, não podendo limitar o aluno a ler, escrever, contar e receber passivamente um banho de cultura geral.”

Os resultados indicaram que o uso do laboratório de Matemática é uma ferramenta importante no contexto educacional, possibilitando ao aluno uma aprendizagem limpa e com significado, além de trazer bem estar e satisfação durante todo o processo de ensino-aprendizagem. A inovação com uso do laboratório de Matemática torna a escola um lugar mais democrático e atrativo; estimula as experiências e interações e amplia a autonomia pedagógica, pois a inovação sempre acontece através do intercâmbio entre as pessoas.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo esquematiza a situação do ensino de Matemática no Brasil segundo dados do Programa internacional de avaliação de estudantes – PISA 2018, e ainda o que os parâmetros curriculares nacionais estabelecem em relação ao ensino de Matemática.

### 2.1. A SITUAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL SEGUNDO DADOS DO PROGRAMA INTERNACIONAL DE AVALIAÇÃO DE ESTUDANTES – PISA 2018

Estudar matemática é sem dúvida uma tarefa que requer antes de mais nada gosto pelo conteúdo. As estatísticas apresentam resultados ruins e sem dúvida insatisfatórios, levando em conta idade, série e conteúdo. Mesmo alunos com idade compatível não tem rendimento satisfatório, o que é motivo de muita preocupação no geral. A seguir, apresentamos dados do PISA, que estão baseados no documento MEC (2019).

Cerca de 14.017 estudantes brasileiros, com faixa etária de 15 anos, participaram do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, 2022, que aconteceu no período de 18 de abril a 31 de maio, com resultados previstos para dezembro de 2023. A avaliação, que foi realizada de forma eletrônica, mostrou que o Brasil trouxe resultados satisfatórios, com números que superaram a taxa mínima de 80% da participação exigida pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE, responsável pelo estudo.

Realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE, o PISA é um estudo comparativo internacional responsável por oferecer informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos 15 anos. A partir dos resultados do programa internacional, cada país tem a oportunidade de avaliar os conhecimentos e as habilidades de seus estudantes em comparação aos outros países, de modo a planejar políticas públicas educacionais para melhorar a qualidade e eficácia do sistema de ensino.

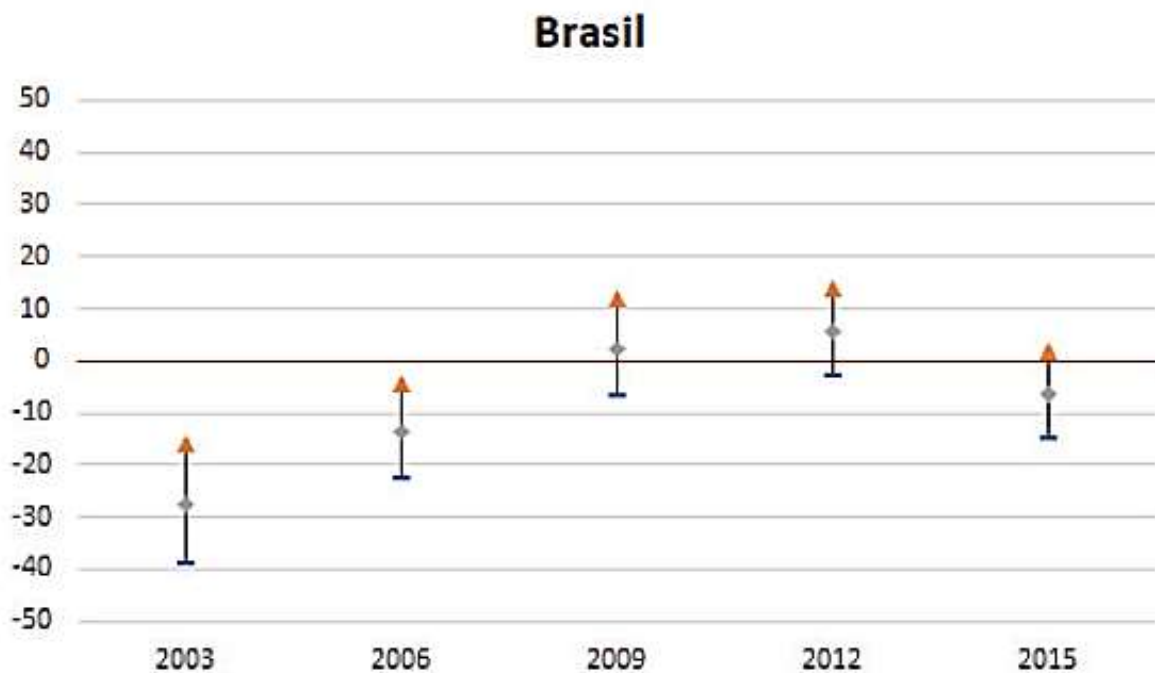
O PISA é responsável por avaliar três domínios em todas as edições ou ciclos, são eles: leitura, matemática e ciências. A cada edição o programa avalia um domínio principal, desse modo os estudantes são submetidos a avaliações com questões específicas da área do conhecimento, e os questionários se concentram na coleta de informações relacionadas à aprendizagem nesse domínio. Além de avaliar os três domínios citados acima, o PISA avalia

domínios chamados inovadores, como Resolução de Problemas, Letramento Financeiro e Competência Global.

A média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, 2018 foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da OCDE (492). A métrica para a escala de Matemática, estabelecida em 2003, baseou-se em uma média dos países da OCDE de 500 pontos, com desvio-padrão de 100 pontos.

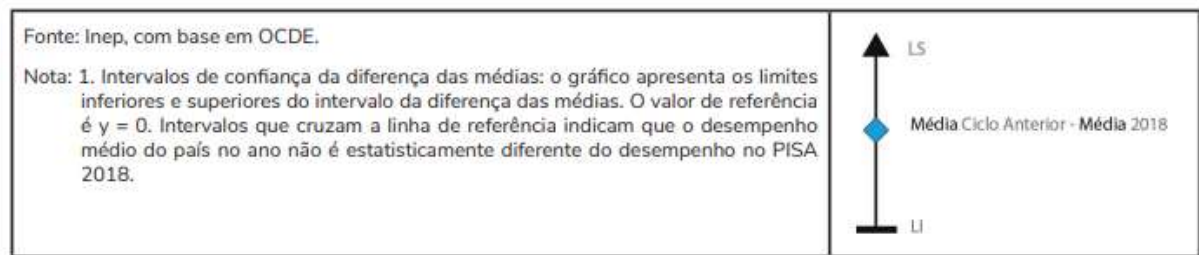
Embora a média de proficiência do Brasil tenha aumentado de 377 em 2015 para 384 em 2018, esses valores não são estatisticamente diferentes quando se consideram os intervalos de confiança que gira em torno de 8 pontos (380 – 388). Verifica-se no Pisa 2018 que a média de proficiência do Brasil em Matemática melhorou no período de 2003 a 2018, porém, a maior parte dessa melhora ocorreu até 2009. Desde então, a média de proficiência em Matemática vem oscilando em torno de 385 pontos.

**Figura 1** - Variações temporais do desempenho dos estudantes brasileiros nas últimas seis edições do PISA em relação à edição atual



Fonte: [www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias\\_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018](http://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018)

**Figura 2** - Intervalos de confiança da diferença das médias do Brasil, Matemática – PISA 2018 e ciclos anteriores



Fonte: [www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias\\_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018](http://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018)

Outra maneira de analisar os resultados apresentados pelos países no PISA é por meio dos níveis de cada escala de proficiência. Aproximadamente 31,8% dos estudantes brasileiros alcançaram o Nível 2 ou acima em Matemática, em contraste a 76,0% dos estudantes dos países da OCDE. O percentual de estudantes em cada país/economia que alcançam cada nível de proficiência indica quão bem os países conseguem fomentar a excelência em seus sistemas educativos. Segundo a OCDE, atingir pelo menos o Nível 2 é particularmente importante, uma vez que este é considerado o nível básico de proficiência que se espera de todos os jovens, a fim de que possam tirar proveito de novas oportunidades de aprendizagem e participar plenamente da vida social, econômica e cívica da sociedade moderna em um mundo globalizado.

O letramento matemático demanda o uso de competências matemáticas em vários níveis, abrangendo desde a realização de operações básicas até o raciocínio e as descobertas matemáticas. Exige o conhecimento e a aplicação de conteúdos matemáticos extraídos de áreas como: estimativa, mudança e crescimento, espaço e forma, raciocínio quantitativo, incerteza, dependências e relações.

Letramento em Matemática pode também ser definido como a capacidade de formular, empregar e interpretar a matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos.

Com isso, buscando facilitar a interpretação dos resultados, o PISA estabeleceu em cada área de avaliação vários níveis de desempenho, baseados na classificação da pontuação associada às habilidades que os estudantes devem possuir para alcançar a pontuação correspondente. A classificação tem por objetivos: permitir catalogar o desempenho dos estudantes e descrever o que são capazes de fazer.

A escala, conforme Quadro 1, apresenta a pontuação que delimita os níveis de proficiência definidos pelo PISA em cada um dos três domínios avaliados. Os níveis vão de 1 a 6, em Matemática; e para cada nível tem-se a descrição do que os alunos que o atingem são capazes.

**Quadro 1** - Descrição e percentual de estudantes por nível de proficiência em Matemática – PISA 2018

Nível	Score mínimo	Características das tarefas
6	669	Os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de problemas complexos, e são capazes de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações, e transitar entre elas com flexibilidade. Evidenciam um pensamento e um raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão junto com um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais para desenvolver novas abordagens e estratégias que lhes permitam lidar com situações novas. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas às constatações, interpretações e argumentações que elaboram; são ainda capazes de explicar por que razão estas são adequadas à situação original.
5	607	Os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Conseguem trabalhar estrategicamente, utilizando um vasto e bem desenvolvido conjunto de habilidades de pensamento e de raciocínio, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. Começam a refletir sobre suas ações e são capazes de formular e de comunicar suas interpretações e raciocínios.
4	545	Os estudantes são capazes de trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos em situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e de integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Conseguem utilizar seu conjunto limitado de habilidades e raciocinar com alguma perspicácia em



		contextos diretos. São capazes de construir e de comunicar explicações e argumentos com base em suas interpretações, argumentos e ações.
3	482	Os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servirem de base à construção de um modelo simples ou à seleção e aplicação de estratégias simples de resolução de problemas. São capazes de interpretar e de utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas. Demonstram alguma capacidade para lidar com porcentagens, frações e números decimais, e para trabalhar com relações de proporcionalidade. Suas soluções indicam que eles se envolvem em interpretações e raciocínios básicos.
2	420	Os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferências diretas. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação. Conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicos para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados.
1	358	Os estudantes são capazes de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas. Conseguem realizar ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados.
		A OCDE não especifica as habilidades desenvolvidas.

Fonte: [www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias\\_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018](http://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018)

A maioria dos estudantes brasileiros que participaram do PISA 2018 se encontra no Nível 1 ou abaixo dele (68,1%). Todos os países e economias participantes do PISA têm estudantes que se encontram nesses níveis, mas as maiores proporções de estudantes nessa situação são encontradas nos países com menor desempenho.

Para se ter um fiel retrato do desempenho dos jovens brasileiros no PISA 2018, é preciso uma análise do desempenho geral por tipo de escola, bem como uma análise em relação às 5 regiões geográficas.

De acordo com a Figura 3, verifica-se que a média de proficiência em Matemática dos estudantes da rede estadual foi de 374, e da municipal, 314, diferença estatisticamente significativa. Cabe ressaltar que a rede estadual representa 68% dos participantes do PISA 2018.

Nesta edição, os alunos das escolas particulares tiveram maior média de proficiência (473) que os das federais (469), diferença que, assim como em 2015, não é estatisticamente significativa.

**Figura 3** - Médias, intervalos de confiança e percentis dos escores por dependência administrativa, Matemática – PISA 2018

DEPENDÊNCIAS ADMINISTRATIVAS	N	%	MÉDIA	EP <sup>1</sup>	IC <sup>2</sup>
Brasil	10.691	100,0	384	2,0	380-388
Particular	1.381	15,6	473	5,4	463-484
Federal	279	2,5	469	12,5	444-494
Estadual	7.732	68,3	374	2,0	370-378
Municipal	1.299	13,7	314	3,2	308-321

Fonte: [www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias\\_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018](http://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018)

Quando se comparam os tipos de localização, observa-se que a média de proficiência dos estudantes brasileiros das escolas urbanas no PISA 2018 é estatisticamente superior à dos das escolas rurais (diferença de 35 pontos).

**Figura 4** - Médias, intervalos de confiança e percentis dos escores por localização, Matemática – PISA 2018

LOCALIZAÇÃO	N	%	MÉDIA	EP <sup>1</sup>	IC <sup>2</sup>
Brasil	10.691	100,0	384	2,0	380-388
Urbana	10.271	95,1	385	2,2	381-390
Rural	420	4,9	350	10,95	329-371

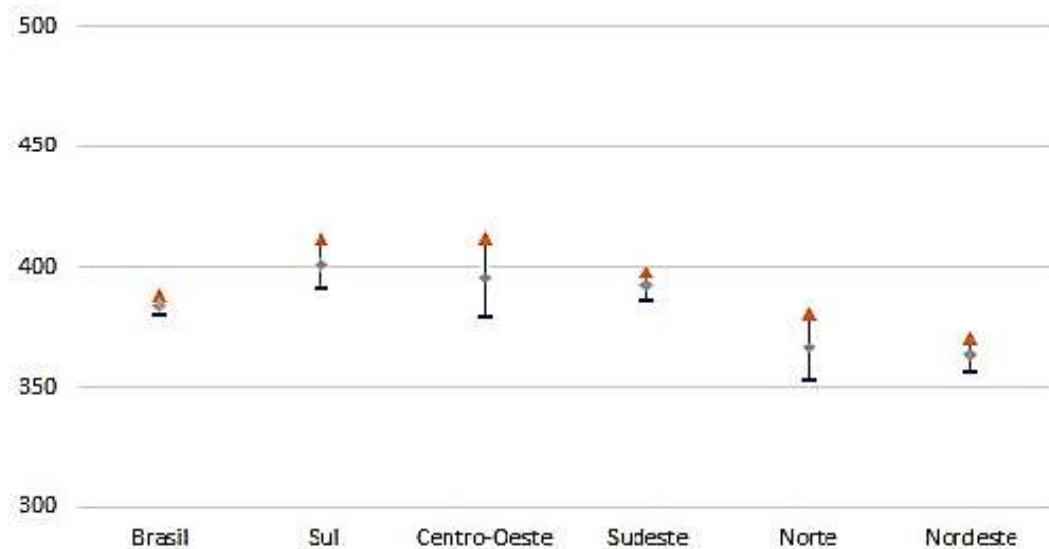
Fonte: [www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias\\_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018](http://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018)

A Figura 4 apresenta os resultados por região geográfica na escala de Matemática do PISA 2018, enquanto a Figura 5 indica os resultados médios de cada região e o resultado médio do Brasil no PISA 2018, considerando os intervalos de confiança. A análise desses dados revela que as regiões Norte e Nordeste apresentam médias de proficiência significativamente menores que a do Brasil; Centro-Oeste e Sudeste apresentam médias iguais à do Brasil; Sul apresenta média maior que a do Brasil.

**Figura 5** - Médias, intervalos de confiança e percentis dos escores por localização, Matemática – PISA 2018

REGIÃO	N	%	MÉDIA	EP <sup>1</sup>	IC <sup>2</sup>
Brasil	10.691	100,0	384	2,0	380-388
Sul	1.523	14,9	401	5,3	391-412
Centro-Oeste	813	6,7	396	8,4	379-412
Sudeste	4.060	42,6	392	3,1	386-398
Norte	982	8,5	366	7,1	352-380
Nordeste	3.313	27,3	363	3,7	356-371

Fonte: [www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias\\_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018](http://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018)

**Figura 6** - Intervalos de confiança dos escores médios das regiões brasileiras, Matemática – PISA 2018

Fonte: [www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias\\_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018](http://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias_1/confira-o-relatorio-final-do-pisa-2018)

Em relação a aprendizagem na educação básica, é bem urgente a necessidade de melhorar o ensino de matemática afim de atender os requisitos do Ministério da Educação. Com isso, o laboratório de Matemática entra como um instrumento ativo para o alcance dessa meta. Seria possível treinar um médico sem deixa-lo experimentar? treinar um jogador de futebol só na teoria?

Aprender matemática só na abstração é uma tarefa bem difícil para todo e qualquer aluno. A necessidade do encontro da teoria e a prática, com a finalidade de alcançar o pleno desenvolvimento das competências e habilidades, seria talvez uma excelente estratégia para o alcance dos resultados de aprendizagem dos nossos alunos.

O Laboratório de Ensino de Matemática é o espaço adequado e indispensável como metodologia ativa pra se ensinar Matemática; nele há um ambiente favorável à aproximação da matemática teórica com a matemática prática; a utilização de materiais reutilizáveis é uma

opção que torna o trabalho ainda mais louvável. Portanto, a utilização do laboratório de Matemática permite ao professor o planejamento e a execução da aula com maior qualidade, tornando-o capaz de fomentar nos seus alunos a curiosidade, a criatividade e a participação nas aulas, fazendo-os sujeitos ativos nos processos de aprendizagem. As atividades desenvolvidas no laboratório de matemática devem permitir aos alunos, além da aprendizagem, a experimentação, o que leva a aprendizagem significativa, respondendo à pergunta tão comum: “pra que serve matemática?”.

## 2.2. OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO (PCNEM) E O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), a área de Matemática no ensino fundamental está pautados em princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos. Dentre eles:

- A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.
- O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.
- Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão e em última instância, a base da atividade matemática.

### 2.2.1. O recurso aos jogos segundo os PCNEM

Além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um “fazer sem obrigação externa e imposta”, embora demande exigências, normas e controle.

No jogo, mediante a articulação entre o conhecido e o imaginado, desenvolve-se o autoconhecimento, ou seja, até onde se pode chegar. Os jogos são as ações que os estudantes repetem sistematicamente, mas que possuem um sentido funcional, isto é, são fontes de significados e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema. Essa repetição funcional também deve estar presente na atividade escolar, pois é importante no sentido de ajudar o aluno a perceber regularidades.

Por meio dos jogos, os alunos não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia: os significados das coisas passam a ser imaginados por eles. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtores de linguagens, criadores de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações.

Além disso, passam a compreender e a utilizar convenções e regras que serão empregadas no processo de ensino e aprendizagem. Essa compreensão favorece sua integração num mundo social bastante complexo e proporciona as primeiras aproximações com futuras teorizações.

Em estágio mais avançado, os alunos aprendem a lidar com situações mais complexas (jogos com regras) e passam a compreender que as regras podem ser combinações arbitrárias que os jogadores definem; percebem também que só podem jogar em função da jogada do outro (ou da jogada anterior, se o jogo for solitário). Os jogos com regras têm um aspecto importante, pois neles o fazer e o compreender constituem faces de uma mesma moeda.

A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Nesse sentido, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver.

São inúmeros os jogos que podem ser utilizados no laboratório de matemática, inclusive jogos feitos pelos próprios alunos com materiais diversos, dentre eles tangram, torre de hanoi, dominós diversos, roletas, dentre muitos outros.

Quanto a seleção de conteúdos, o PCNEM diz que a Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.

Além disso, se o trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Por fim, os PCNEM trazem orientações didáticas específicas para cada área da matemática, no caso de “espaço e forma”, fala-se em atividades geométricas que podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras, recortes, espelhos, empilhamentos, ou pela modelagem de formas em argila ou massa.

Construir maquetes e descrever o que nelas está sendo representado é também uma atividade muito importante, especialmente no sentido de dar ao professor uma visão do domínio geométrico de seus alunos.

O PCNEM deixa bem claro que o ensino de Matemática deve ser apresentado de forma prática e não simplesmente aulas expositivas, onde a escola acaba se tornando um depósito de pessoas que ao longo dos anos vão hostilizando e até mesmo duvidando da importância da matemática e de outras disciplinas em nossas vidas.

### 3. O PAPEL DO LABORATÓRIO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo será abordado o papel do laboratório de Matemática no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, tendo como objetivo esclarecer a real função e aplicabilidade do laboratório de Matemática nas escolas de ensino Médio, e ainda conhecer algumas concepções do seu uso segundo alguns estudiosos como Lorenzato (2009), Rêgo e Rêgo (2006) e Taham (1962).

A necessidade de renovação do ensino de Matemática tornou-se bem urgente nas últimas décadas; a busca por uma melhor qualidade de ensino tem evoluído diante de algumas dificuldades enfrentadas por professores no ato do ensino e pelos alunos na hora da aprendizagem. Afim de vencer tais dificuldades, surge a necessidade de se implantar laboratórios de matemática em todos os níveis de ensino como uma ferramenta auxiliadora desse processo.

Segundo Lucena (2017), o laboratório de Matemática é um ambiente de recursos pedagógicos que permite aos professores elaborar e estruturar procedimentos metodológicos úteis, capazes de tornar o ensino eficaz na compreensão dos princípios básicos matemáticos; Podendo ser visto como um espaço de construção do conhecimento, tanto individual, como coletivo. Nesse espaço, professores e alunos podem dar expansão à sua criatividade, dinamizar o trabalho e enriquecer as atividades de ensino-aprendizagem, tornando o processo muito mais dinâmico, prazeroso e eficaz.

A inclusão de atividades práticas nas aulas de Matemática pode ser uma das vertentes fundamentais, como meio de se conseguir uma melhor qualidade na aprendizagem da Matemática, no que diz respeito à construção do conhecimento. Pois, mais do que obter um bom desempenho em exercícios pré-definidos, ou a memorização de fórmulas, um dos objetivos centrais do ensino da Matemática é conseguir que os alunos desenvolvam uma compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos. Através dessa compreensão, os alunos poderão ser capazes de conseguir o que se denomina como pensamento matemático avançado.

O laboratório, portanto, é um ambiente propício para estimular no aluno o gosto pela matemática, a perseverança na busca de soluções e a confiança em sua capacidade de aprender e fazer matemática. Além de contribuir para a construção de conceitos, procedimentos e habilidades matemáticas, pode propiciar também a busca de relações, propriedades e regularidades, estimulando o espírito investigativo. Por isso, deve ser neste local da escola onde se respira matemática o tempo todo, promovendo um ambiente permanente de busca e descoberta.

De acordo com as práticas feitas e algumas leituras de trabalhos na mesma linha (LUCENA; 2017 e LORENZATO; 2009), percebemos que um bom laboratório de Matemática precisa contemplar alguns critérios:

- Ambiente próprio, organizado e pronto para trabalhos focados;
- Participação efetiva de todo corpo docente de Matemática;
- Divulgação dos trabalhos realizados, em forma de projetos, mostra de Matemática ou algo similar.

O laboratório precisa ter objetivos bem definidos para que não se faça o “uso pelo uso” do mesmo. Quanto ao ambiente escolar, precisa ser um espaço dotado de recursos adequados ao ensino-aprendizagem, promovendo aulas de acordo com as novas tendências educacionais. Esse espaço deve também possibilitar atividades individuais e coletivas, promovendo a investigação e elaboração de projetos. Por fim, a escola deve incentivar reflexões sobre a importância do ensino de Matemática e a utilização da informática como ferramenta de ensino de Matemática e a utilização de materiais de baixo custo ou recicláveis.

Pretende-se ainda que o laboratório seja capaz de desenvolver a curiosidade e gosto do aluno pela Matemática; potencializando maior participação e incentivando o raciocínio abstrato, dentre outras competências em atividades interdisciplinares.

Quanto aos professores, o laboratório poderá promover a construção e elaboração de materiais didáticos, divulgar trocas de experiências e promover a interdisciplinaridade. Esses objetivos certamente seria apenas uma amostra, pois ao longo do processo muitos outros se revelam, dando sustentação ao processo de ensino-aprendizagem.

O papel do professor é fundamental e assume aspectos diversificados. Um destes aspectos é incentivar e valorizar as pequenas descobertas dos alunos; um outro, pode ser utilizar a sua vivência, buscando sistematizar nos experimentos utilizados elementos obtidos, que possam ser evidenciados, chamando a atenção dos alunos para regularidade, deixando o aluno perceber o erro e corrigir o mesmo na medida do possível.

Cabe ao docente o estímulo do raciocínio livre e consciente de seus alunos na busca de levantar hipóteses e chegar às conclusões, a partir de discussões produtivas com os demais colegas. Vale salientar, no entanto, que a utilização de materiais concretos deve ser cuidadosa para que não haja exagero na concretização, de modo que se evite manipulações óbvias levando ao aluno ao desinteresse.



O laboratório de Matemática é um ambiente privilegiado, que se explorado adequadamente, pode promover melhoras importantes na aprendizagem dos alunos, como por exemplo, desenvolver no aluno habilidades de resolução de problemas.

Processos como classificar, conjecturar, analisar, interpretar, dentre outros são outras habilidades que podem ser citadas. Segundo LIMA (1999)

Apesar de alguma inovação nos métodos de ensino, tem-se ficado muito aquém do que seria desejável – por vários motivos; um deles é a gestão de espaços educativos e recursos materiais nas escolas. E quando se refere ao ambiente físico, ressalta que: “Nas aulas de Matemática, ainda prevalece o espaço da sala de aula ‘normal’, isto é, apenas mesas, cadeiras e o quadro de giz, na forma tradicional, e (nem sempre) um retroprojektor (LIMA, 1999, p.112)

Portanto, a partir dessa argumentação, pode-se afirmar que o recurso a abordagens laboratoriais é precisamente uma forma de conseguir uma aprendizagem matemática significativa. Os educadores matemáticos devem procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, desenvolvendo a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas.

É fato que se precisa facilitar a aproximação dos conteúdos ensinados na escola formal e os conhecimentos adquiridos através do cotidiano dos alunos, levando-se a uma mudança de percepção da significação que a matemática tem nas nossas vidas. Talvez assim pode-se responder aos porquês dos alunos da necessidade de se estudar Matemática.

Certamente o laboratório propiciará, dentre outras coisas, uma melhor relação interpessoal professor-aluno, gerando um ambiente mais salutar dentro da sala de aula, caracterizado por uma maior dinâmica do ensino, motivação, participação, interação social e respeito mútuo.

### 3.1. CONCEPÇÕES DO USO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Segundo Lorenzato (2009) afirma que o laboratório compreende o espaço onde os professores podem realizar os seus planejamentos, ministrar as suas aulas de matemática, aplicar avaliações, tirar as dúvidas de seus alunos. Além disso, podem, junto aos alunos, realizar exposições, olimpíadas e atividades de experimentação, pesquisa e construção de materiais instrucionais. E no que diz respeito à escola, o laboratório representa o espaço que centraliza toda a atividade matemática. É o lugar onde os professores encontram e produzem subsídios para aproximar a matemática da vida dos alunos, tornando-a mais compreensível.

O Laboratório, para Tahan (1962), é definido como uma sala ambiente, disponível ao professor, onde o ensino de Matemática aconteceria com o auxílio de materiais adequados à efetiva aprendizagem. O autor relata os principais componentes do espaço físico de um laboratório, tanto de mobiliário quanto de materiais concretos didáticos. É importante destacar que esse Laboratório de Matemática em meados do século XX, descrito por Tahan (1962), apresenta muita semelhança com os Laboratórios de Ensino de Matemática mais recentes.

Os autores Rêgo e Rêgo (2006), mostraram o desenvolvimento e o uso de alguns materiais didáticos no ensino de matemática, em que defendem a importância de um Laboratório de Ensino de Matemática, tanto em escolas de educação básica quanto em instituições de ensino superior. Observaram, ainda, que existe um distanciamento entre a teoria e a prática, ou seja, os alunos não conseguem relacionar os conteúdos teóricos de matemática com aplicações práticas do dia a dia. Assim, espera-se com a construção do laboratório criar um elo entre teoria e prática, a fim de promover o desenvolvimento da criatividade, do raciocínio, da capacidade de organização do pensamento e comunicação entre os alunos.

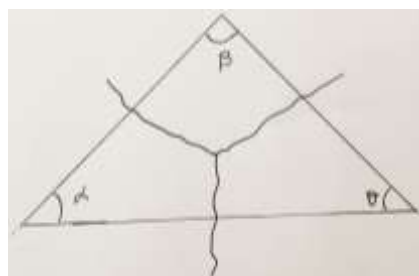
### 3.2. LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Para que o laboratório tenha real utilização dentro do processo de ensino-aprendizagem de matemática, os professores devem perceber a importância da utilização desse espaço nas aulas. A título de experimentação, é possível verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale  $180^\circ$ , utilizando uma simples ilustração de um triângulo em uma folha de papel; Basta separar os ângulos recortando com tesoura e juntar os mesmos de maneira que forme os  $180^\circ$  (veja as figuras 7 e 8). A mesma prática pode se estender para um quadrilátero e também com polígonos com 5, 6 ou mais lados.

#### **Prática Soma dos ângulos internos de um triângulo:**

*Passo 01:* Desenhar triângulo e dividir os ângulos internos.

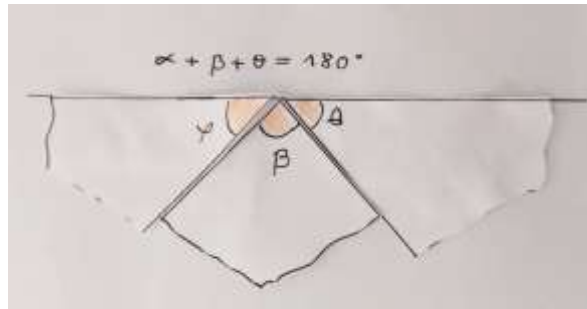
**Figura 7** - Desenhar um triângulo e dividir os ângulos internos.



Fonte: Autor

*Passo 02:* Recortar os ângulos e alinhar formando um ângulo raso.

**Figura 8** - Recortar os ângulos e alinhar formando um ângulo raso



Fonte: Autor

É possível observar como o laboratório de Matemática contribui, tanto para o professor como para o aluno, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem da Matemática. É possível refletir como as concepções que o professor de Matemática tem a respeito do mesmo podem interferir no modo como irá orientar e executar as suas atividades didático-pedagógicas a partir deste espaço, podendo ampliar ou reduzir as suas potencialidades.

Mais quais características deve apresentar o Laboratório de Ensino de Matemática, que o torna eficaz como instrumento de aprendizagem?

O Laboratório de Matemática, antes de tudo, deve ser um espaço democrático de aprendizagem. Isso significa que todos podem aprender e ensinar nele. A partir desta compreensão, a construção desse lugar, na escola, deve contemplar algumas considerações como: acontecer de forma continuada, sem momento de conclusão e todo corpo docente deve estar envolvido, inclusive os pais dos alunos podem e devem participar da construção do laboratório a fim de melhorar o espaço físico e a construção do mesmo, é importante que sejam estabelecidos critérios e direcionamentos na escolha dos jogos, livros e materiais concretos, a fim de que esses possam contemplar as competências de cada conteúdo escolhido.

Para atender essa construção do laboratório de forma continuada, é necessário está pesquisando e diversificando as práticas realizadas, cada material depois de pronto passa a fazer parte do acervo do laboratório, podendo ser utilizado em outras turmas. Uma sugestão caso não haja uma sala própria para o laboratório, seria um armário de canto mantido na própria sala de aula convencional.

Qualquer que seja a atividade escolar, é preciso envolvimento de todos os professores, gestores e pais. Até porque, sabe-se que o processo de ensino - aprendizagem,

acontece de forma interdisciplinar e contextualizada. Os administradores da escola, entretanto, podem viabilizar políticas de funcionamento institucional que democratizem o espaço escolar no sentido de construir, utilizar e divulgar o mesmo, assim como promover a distribuição de verbas de modo a contemplar a compra de material para esse laboratório. Os alunos e pais podem contribuir para a realização de atividades, como oficinas e exposições, fortalecendo a relação existente entre a matemática escolar e o saber advindo de suas atividades cotidianas. Quanto maior o envolvimento da comunidade escolar, maior será a multiplicidade de saberes relacionados à matemática nos elementos concretos que constituem o laboratório.

No Ensino Médio, o laboratório de Matemática pode promover atividades que objetivem desenvolver o raciocínio para a resolução de problemas que envolvam conteúdos de geometria, trigonometria e matemática aplicada. A análise e a interpretação de dados, através das múltiplas linguagens que podemos usar no apoio ao ensino da Matemática, entre elas: gráfica, geométrica, estatística, pictórica, língua materna e a específica da matemática, devem ser objetivos alcançados pelos alunos por intermédio da utilização do laboratório.

O laboratório de Matemática pode ajudar o professor a ser criativo e dinâmico no ensino de matemática. O trabalho do professor requer, além da competência e domínio do conteúdo, a capacidade de elaborar, criar e promover situações de aprendizagem diversificadas para seus alunos. O laboratório representa um espaço propício à formação integral do professor. Com a utilização das práticas, o professor será capaz de tornar-se mais cooperativo para o trabalho em equipe; pesquisador no que se refere ao conteúdo matemático e ao domínio do fazer didático-pedagógico; criativo, podendo agir sobre os instrumentos de ensino e, conseqüentemente, autônomo no exercício da sua profissão.

Entretanto, precisamos ressaltar os preconceitos e limitações impostas à utilização do espaço do laboratório. A construção e manutenção do laboratório tem custo financeiro para a escola, mas muitos materiais de baixo custo, ou até mesmo destinados à reciclagem, podem ser utilizados por professores e alunos em oficinas de produção de materiais didáticos. Além disso, é um excelente momento para oportunizar a capacidade criativa de cada sujeito e a conscientização para a sustentabilidade. Materiais como madeiras de demolição, paletes, canos, garrafas pet, canudos, palitos de picolé, dentre outros são utilizados de forma intensa e admirável nas práticas do laboratório.

Para se ensinar Matemática através do laboratório, é preciso que o professor tenha uma boa formação. A eficiência da metodologia utilizada pelo professor, em sala de aula, está em função da sua capacidade didático-pedagógica e da sua competência com o conteúdo a ser ensinado; isso somente se consegue por meio de uma boa formação inicial e continuada.

O laboratório não deve ser inserido em salas de aula numerosas. A dicotomia entre quantidade e qualidade na educação brasileira tem sido amplamente discutida por pesquisadores da área. Entre eles, podemos citar Esquinsani (2013, p.583), que nos traz as seguintes reflexões sobre o assunto: “Se a educação é um direito, a sua garantia concretiza-se apenas com o acesso à escola? Há o respeito pelo direito à educação quando desprovido de indicadores mínimos de qualidade? Educação sem qualidade não seria um direito pela metade?”.

Sabemos que situações de ensino precisam ser acompanhadas pelo professor com certa proximidade dos alunos; o professor deve conhecer o potencial dos alunos, as suas habilidades, os conhecimentos prévios construídos dentro e fora da escola, a fim de que este professor possa mediatizar situações de aprendizagem que se aproximem da realidade dos alunos. Nesse caso, temos que concordar com o fato de que tanto maior seja a quantidade de alunos em sala menor será a qualidade de ensino. Na realidade do laboratório, essa regra de três permanece inversamente proporcional, isto é, com um número menor de alunos, o professor terá condições de propor atividades que envolvam experimentação, manipulação de objetos, análise de conceitos matemáticos e aplicação da Matemática em situações do dia a dia.

Atividades como estas proporcionam ao aluno uma participação ativa, de modo que os tornam protagonistas no processo de aprendizagem. Ao contrário do que se acabou de afirmar, nas salas de aula com número elevado de alunos, as atividades desempenhadas no laboratório, em sua maioria, ficam restritas a situações de observação, substituindo o “fazer” pelo “ver”. Esse caso, portanto, se apresenta como uma limitação do laboratório, mas não como impedimento à sua utilização no contexto escolar. O professor poderá, ainda, propor o trabalho em equipes, com atividades de pesquisa e coleta de dados nos diferentes espaços da escola, com posterior apresentação dos dados obtidos pelas equipes no laboratório ou na sala de aula.

Outra limitação do uso do laboratório seria que nem todos os conteúdos do programa de Matemática podem ser ensinados através do laboratório. O professor deve ter competência e sensibilidade na escolha da metodologia a ser usada em cada aula de Matemática. A diversidade de metodologias e métodos de ensino deve ser compatível com as múltiplas especificidades dos alunos e dos conteúdos que constituem o programa da disciplina. Um único método de ensino, ainda que seja a utilização do laboratório, é insuficiente para garantir a aprendizagem de todo o programa.

O Laboratório de Matemática possibilita “o uso pelo uso”, daí quando o professor utiliza o mesmo com o intuito de apenas proporcionar uma “aula diferente” para os seus alunos, ele alimenta o preconceito “do uso pelo uso”. Isso quer dizer que a sua aula não necessariamente está objetivando a aprendizagem do conteúdo matemático, mas apenas a utilização desse espaço

como lúdico e sem a real intencionalidade do ensino. Para desmistificar esse tipo de preconceito, é preciso planejar uma situação de aprendizagem traçando os objetivos os quais pretende atingir em colaboração com seus alunos na utilização do laboratório.

Uma vez entendidas as limitações do laboratório e estratégias para ter sucesso na utilização do mesmo, é preciso também conhecimento do professor sobre os materiais didáticos que o mesmo irá utilizar no dia a dia das aulas práticas. É importante destacar que, para que os alunos aprendam matemática de forma significativa, não basta que o professor disponha de um laboratório equipado com uma enorme variedade de materiais didáticos. É preciso, acima de tudo, que o professor saiba utilizar corretamente esses materiais aos quais tem acesso. Nesse sentido, a atuação do professor é determinante para o sucesso ou para o fracasso escolar de seus alunos.

A escolha do material didático feita pelo professor de matemática, no intuito de constituir uma ferramenta de ensino-aprendizagem, deve ser pensada de modo muito particular, atentando para as especificidades de cada turma de alunos. É necessário que, para cada aula planejada com a utilização de materiais didáticos, o professor possa realizar os seguintes questionamentos: é necessário o uso do material como mediador da aprendizagem, nesta aula? Qual seria o material mais apropriado? O material didático escolhido para a aula é conveniente para o trabalho com a matemática nesta sala de aula ou precisará sofrer adaptações? O professor deve estar capacitado a trabalhar com o material didático não somente na sua apresentação original, mas também necessita perceber quando o material didático precisará passar por adaptações com a finalidade de melhorar o desempenho do professor no gerenciamento da aprendizagem dos alunos.

Os materiais didáticos manipuláveis devem ser escolhidos pelo professor, principalmente pela observação dos objetivos a serem atingidos durante a aula, pois a natureza exploratória do material manipulável pode variar de acordo com a sua estrutura. Existem aqueles mais rígidos que permitem pouca interação do aluno, como por exemplo os sólidos geométricos construídos em madeira, enquanto materiais como o ábaco e os jogos de tabuleiro, devido à sua capacidade dinâmica, são mais propícios às atividades de manipulação para a investigação de propriedades matemáticas.

É fácil perceber que materiais recicláveis são bem aceitos, até porque muitos dos alunos já têm consciência e percebem que trabalhar com esses materiais de baixo custo é uma ótima forma de se preservar o meio ambiente.

O material didático deve apresentar algumas propostas na prática de projetos interdisciplinares e transversais nas aulas de matemática. Um bom material didático

manipulável deve representar claramente o conceito matemático, ser motivador, proporcionar uma boa base para a abstração e, se possível, deve ter características que viabilizem o seu uso para alunos de diferentes níveis escolares, na abordagem de diversos conteúdos matemáticos.

### **3.2.1. Laboratório de Matemática e Aprendizagem Significativa.**

Uma aprendizagem é significativa quando há interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, onde esses novos conhecimentos adquirem significado para o aluno e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade, esses elementos são indícios de que existe, então, uma aprendizagem significativa.

Por exemplo, um aluno que vivencia de alguma maneira cálculos de porcentagem, dando descontos na loja de ferramentas de seu pai, consegue entender com mais facilidade conteúdos como cálculo de taxas percentuais, prazos e capitais; e aquele cálculo que ele fazia de uma forma trivial pode ser otimizado, caso ele utilize fator de atualização. Essa segurança adquirida pelo aluno pode levá-lo a cálculos mais sofisticados quando se passa a estudar juros compostos.

É certo que, se tenho um conhecimento e não encontro aplicabilidade para ele no meu dia-a-dia, é natural que acabe esquecendo; porém, posso acessar esse conteúdo facilmente, se ele foi aprendido de forma significativa. Como exemplo, podemos tomar a seguinte situação: ao levar certo aluno ao laboratório de matemática e trabalhar com o mesmo a construção de sólidos geométricos a partir das planificações, esse aluno consegue perceber claramente a relação de Euler, conferindo que  $V + F = A + 2$ . Com o passar dos anos, ao perder contato rotineiro com a fórmula, é natural que ele perca o acesso a esse aprendizado. Futuramente, ao ingressar na faculdade de arquitetura, esse aluno se depara com a disciplina de desenho técnico e consegue retomar a tal relação de Euler sem grandes dificuldades, pois aprendeu na escola de forma significativa.

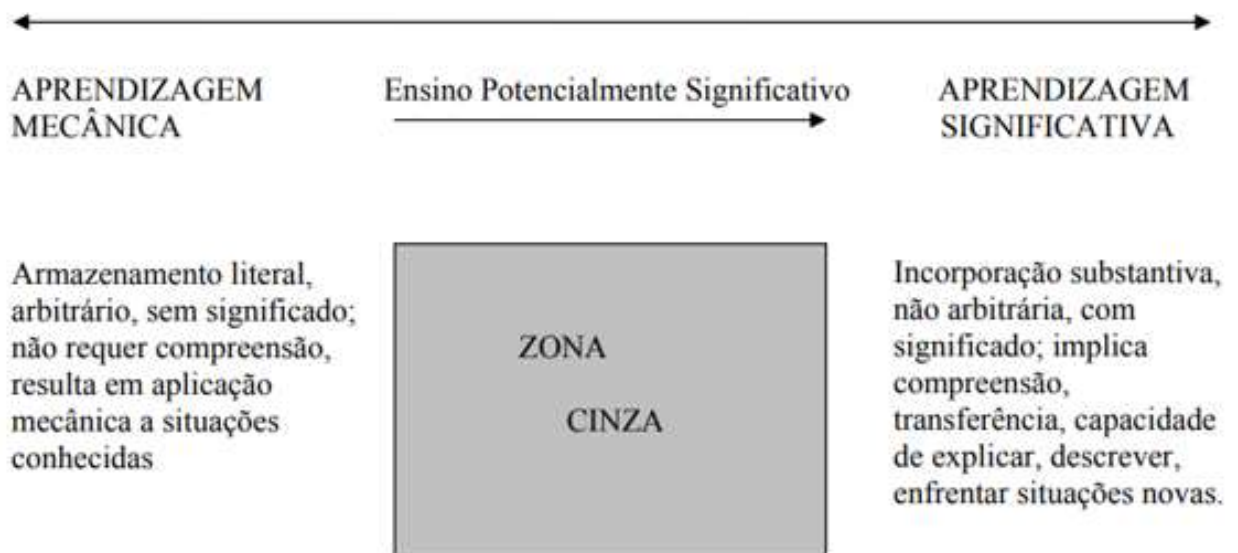
No momento que levo o aluno ao laboratório de matemática e confecciono sólidos geométricos com esse aluno, estamos sim tornando esse aprendizado aceso em sua mente e, mesmo depois de um tempo sem estudar sólidos, será possível reaprendê-lo rápido.

Segundo Moreira (2011), nossa cabeça está cheia de subsunçores, que seriam, então, conhecimentos prévios especificamente relevantes para a aprendizagem de outros conhecimentos. Uns já bem firmes, outros ainda frágeis, mas, em fase de crescimento, uns muito usados e outros encolhendo.

Podemos enumerar duas condições para se ter resultados com aprendizagem significativa. Em primeiro lugar, seria ter um material de aprendizagem potencialmente significativo e, em segundo lugar, ter um aluno predisposto a aprender. Nesse caso, o caráter lúdico do laboratório de matemática pode ser esse gatilho que despertará esse aluno para essa aprendizagem. Nesse caso, não há uma necessidade premente do aluno gostar de matemática, mas sim que ele tenha disposição em pegar o que ele já sabe e modificar, enriquecer, dando significado a essa matemática. Vale lembrar que a escola tradicional valoriza muito a aprendizagem memorística e sem significado, sendo muito fácil perceber que aulas inovadoras são sim bem recebidas pelos alunos, já que eles passam a interagir de forma produtiva nas aulas.

A aprendizagem que prevalece nas escolas, além de memorística, é também mecânica, aquela sem significado, que serve para a realização das provas e depois é deletada. O aluno do 7º ano, estudando equação do 1º grau, aprende que deve separar letras de números, mas ele não adquiriu a compreensão de que nada impede que letras podem ficar à direita da igualdade e números à esquerda, propriedade reflexiva. Segundo Moreira (2011), há uma “zona cinza” entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, conforme verificamos na Figura 9.

**Figura 9** - Uma visão esquemática do contínuo aprendizagem significativa - aprendizagem mecânica



Fonte: Moreira (2011)

A transição da aprendizagem mecânica para a aprendizagem significativa não é natural. Quando se aprende mecanicamente, é provável que se mantenha assim. Aprender dando



significado é progressivo, o aluno passa a assimilar cada vez mais e com mais precisão, o que dá à mesma satisfação em estar estudando conteúdos que lhe são apresentados.

O laboratório de matemática possibilita a aprendizagem por descoberta. Isso implica que o aluno primeiramente descobre o que vai aprender. Porém, não é preciso descobrir para aprender com significado. Ainda é preciso ter as duas condições citadas anteriormente: conhecimento prévio e predisposição para aprender. No ensino médio e superior predomina fortemente a aprendizagem receptiva, onde o aluno “recebe” a informação em sua forma final. Essa recepção pode ser de maneira tradicional, como através de livros, aulas expositivas ou uma experiência de laboratório. Mas isso não implica passividade, pois na aprendizagem receptiva requer muita atividade cognitiva para relacionar novos conhecimentos com aqueles já existentes. É bem curioso pensar por que na faculdade se tem tantos laboratórios, nas mais diversas áreas e disciplinas, provavelmente porque são eficientes como meios de aprendizagem significativa.

A aprendizagem significativa não é aquela que o estudante nunca esquece, o fato de esquecer é um processo natural que deriva do desuso daquele determinado conteúdo; lembrar como funciona o processo da soma de frações através do uso do MMC, pra muitos adultos que já não frequentam mais a escola, é uma situação perfeitamente normal. O que se espera é que, caso necessite, esse mesmo adulto consiga reaver esse conhecimento de forma rápida se necessário.

Na aprendizagem significativa, ao contrário da aprendizagem mecânica, o esquecimento é lento e residual, podendo ser reativado se preciso em um tempo relativamente curto. Mas em se tratando de algo mecânico, a sensação é que esse conhecimento nunca foi aprendido, daí nem podemos falar em reaprender. Imagine que ao ensinar a um aluno mecanicamente as razões trigonométricas, fazendo exemplos genéricos e fazendo com que o aluno repita vários exemplos similares, esse estudante chegará na série seguinte relatando que ainda não conhece o que seria um seno, um cosseno ou uma tangente. Paralelo a isso um outro grupo de alunos é levado para o laboratório, onde são apresentados as razões trigonométricas e na sequência aplico esses conceitos na construção de um teodolito caseiro, podendo acessar alturas inacessíveis. É bem provável que esse grupo que experimentou poderá lembrar tais informações de maneira mais eficiente e significativa dos respectivos conteúdos.

No início, a vantagem da aprendizagem significativa sobre a mecânica é a compreensão, o significado, a capacidade de transferência a situações novas (na aprendizagem mecânica o sujeito é capaz de lidar apenas com situações conhecidas, rotineiras). Mais tarde, a vantagem está na maior retenção e na possibilidade de reaprendizagem (que praticamente não

existe quando a aprendizagem é mecânica) em muito menos tempo do que a aprendizagem original.

O conteúdo curricular deveria, inicialmente, ser mapeado conceitualmente de modo a identificar as ideias mais gerais, mais inclusivas, os conceitos estruturantes, as proposições-chave do que vai ser ensinado. Essa análise permitiria identificar o que é importante e o que é secundário, supérfluo, no conteúdo curricular.

Ao longo de todo o curso de uma disciplina, por exemplo, os conteúdos gerais e específicos devem ser trabalhados em uma perspectiva de diferenciação e integração, de descer e subir, várias vezes, nas hierarquias conceituais.

Em um episódio de ensino e aprendizagem, a professora ou professor apresenta aos alunos os significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino e que ela ou ele já domina. Apresentar aqui não significa aula expositiva, nem passividade de parte dos alunos, os quais devem “devolver” ao docente os significados que estão captando. Se estes significados não forem aqueles contextualmente aceitos na matéria de ensino, cabe ao professor ou professora apresentá-los novamente, provavelmente de outra maneira, aos alunos, como por exemplo, desenvolvendo práticas no laboratório de matemática.

No entanto, não é o que acontece normalmente no ensino de qualquer disciplina na escola. Os conteúdos estão listados em um programa que é seguido linearmente, sem idas e voltas, sem ênfases, e que deve ser cumprido como se tudo fosse importante, ou como se os aspectos mais importantes devessem ficar para o final. O resultado desse enfoque é, geralmente, aprendizagem mecânica.

Os livros didáticos têm organização linear, muitas vezes cronológica, começando com o mais simples e terminando com o mais complexo, ou mais difícil. É uma organização lógica, não psicológica, mas do ponto de vista cognitivo, a aprendizagem significativa será facilitada se o aprendiz tiver uma visão inicial do todo, do que é importante para, então, diferenciar e reconciliar significados, critérios, propriedades, categorias, etc.

Muitas vezes, o aluno tem conhecimentos prévios adequados, mas não percebe a relacionabilidade e a discriminabilidade entre esses conhecimentos e os novos que lhe estão sendo apresentados nas aulas e nos materiais educativos. Nesse caso é imprescindível que se use recursos instrucionais que mostrem essa relacionabilidade e discriminabilidade, ou seja, como os novos conhecimentos se relacionam com os anteriores e como se diferenciam deles. Nesse contexto, o uso do laboratório poderia ser esse facilitador que traria para o aluno essa percepção; basta adequar as atividades realizadas de maneira coerente.

Na geometria de posição por exemplo, o aluno tem visão tridimensional como todo ser humano tem, mas ao desenvolver a construção da pipa tetraédrica, ele pode apurar essa percepção dos objetos em três dimensões. Conseguirá entender de fato a relação existente entre número de vértices, faces e arestas (relação de Euler), pois estará com seus “canudinhos” em mãos montando um tetraedro.

Outro recurso extremamente importante na facilitação da aprendizagem significativa é a linguagem. O homem vive na linguagem. Portanto, a linguagem é essencial na facilitação da aprendizagem significativa. O aluno muitas vezes rejeita o conteúdo matemático por conta da linguagem estranha que muitas vezes utilizamos, daí cabe ao professor utilizar sinônimos ou recorrer a materiais concretos para mostrar esses entes matemáticos pro aluno. Mostrar por exemplo, com um sólido em mãos, quem é o vértice, quem é a face e quem seriam as arestas.

No cotidiano escolar a avaliação exige “provas” de que o aluno “sabe ou não sabe; promovendo de forma predominante a aprendizagem mecânica, pois não entra na questão do significado, da compreensão, da transferência. Se o aluno sabe resolver um problema, definir algo, listar as propriedades de um sistema, isso é algo positivo, mesmo que não tenha entendido o problema, a definição ou o sistema.

A avaliação da aprendizagem significativa implica outro enfoque, porque o que se deve avaliar é compreensão, captação de significados, capacidade de transferência do conhecimento a situações não-conhecidas, não-rotineiras. Avaliar dentro do Laboratório de matemática torna tudo isso possível; o professor está vendo o progresso do aluno, está vendo se ele é participativo e interessado, ficando assim claro se o aluno absorveu o que foi explanado, tornando a avaliação mais fiel.

Enfim, podemos perceber que se de fato o professor adotar as práticas de laboratório, ele estará sim facilitando a aprendizagem significativa, avaliando corretamente seus alunos e promovendo momentos lúdicos e agradáveis para sua turma.

### **3.2.1.1. A aprendizagem significativa de um ponto de vista piagetiano.**

De acordo com a teoria de Piaget, a construção do conhecimento só ocorre no decorrer do tempo, por etapas. O teórico inicia seus estudos por meio da percepção dos reflexos de um recém-nascido, passando por inúmeros estágios de desenvolvimento que faz com que o indivíduo crie progressivas estruturas mentais que o levarão a gerar um pensamento crítico.

Moreira (1997) considera que são quatro os conceitos fundamentais da teoria de Piaget:

- Assimilação: acontece quando o indivíduo agrega novas informações aos esquemas já existentes. É a harmonia entre um elemento do meio externo e uma estrutura cognitiva que encontrar-se no sujeito. Assim, o sujeito aprendiz consegue ampliar os esquemas cognitivos que ele já possui.
- Acomodação: É o processo em que as estruturas cognitivas do aprendiz se modificam mediante a assimilação de novos esquemas provenientes do meio externo.
- Adaptação: é a concordância entre a assimilação e a acomodação. Quando existe a acomodação, o sujeito da aprendizagem buscará inserir o estímulo na estrutura cognitiva, ocorrendo assim a acomodação.
- Equilibração: É o processo de invariabilidade entre a assimilação e a acomodação, permitindo a adaptação do sujeito ao meio externo, possibilitando a formação de um raciocínio multiforme.

É por intermédio da equilibração que a informação recebida é convertida em conhecimento mediante a relação entre o meio sociocultural e físico.

Piaget não enfatiza o conceito de aprendizagem. Sua teoria é de desenvolvimento cognitivo, não de aprendizagem. Ele prefere falar em aumento de conhecimento. Nesta perspectiva, só há aprendizagem (aumento de conhecimento) quando o esquema de assimilação sofre acomodação. (MOREIRA, 1997, p. 22)

Levando em conta as ideias de Piaget, o autor levanta um questionamento: teria, então, sentido falar em aprendizagem significativa em um enfoque Piagetiano? A resposta é sim, mediante a analogia entre o esquema de assimilação e o subsunçor.

Caso o material instrutivo não seja potencialmente significativo, a aprendizagem significativa não acontecerá. Semelhantemente, caso não aconteça uma assimilação, a acomodação será prejudicada, não havendo conseqüentemente a acomodação.

Assimilar e acomodar podem ser interpretados em termos de dar significados por subordinação ou por super ordenação. Naturalmente, isso não quer dizer que os esquemas de Piaget e os subsunçores de Ausubel sejam a mesma coisa. Trata-se somente de uma analogia que permite dar significado ao conceito de aprendizagem significativa em um enfoque piagetiano. (MOREIRA, 1997, p. 22)

É possível, portanto, interpretar a assimilação, a acomodação e a equilibração piagetianas em termos de aprendizagem significativa. Sendo os subsunçores de Ausubel algo análogo aos esquemas de Piaget.

### **3.2.2. O Laboratório de Matemática e os Temas Transversais**

Dentre as potencialidades do uso de materiais didáticos manipuláveis, podemos destacar o fato de eles oportunizarem o trabalho com projetos na escola. Aliando essas duas ferramentas de ensino-aprendizagem – materiais didáticos e projetos, existe um campo fértil à aplicação de projetos com o caráter da transversalidade, conforme orienta os parâmetros curriculares nacionais (PCNs) de Matemática.

Os projetos proporcionam contextos que geram a necessidade e a possibilidade de organizar os conteúdos de forma a lhes conferir significado. É importante identificar que tipos de projetos exploram problemas cuja abordagem pressupõe a intervenção da Matemática, e em que medida ela oferece subsídios para a compreensão dos temas envolvidos.

Alguns temas transversais relevantes segundo os PCNs:

- Ética - Isso ocorrerá na medida em que o professor valorizar a troca de experiências entre os alunos como forma de aprendizagem, promover o intercâmbio de ideias como fonte de aprendizagem, respeitar ele próprio o pensamento e a produção dos alunos e desenvolver um trabalho livre do preconceito de que Matemática é um conhecimento direcionado apenas para poucos indivíduos talentosos. A construção de uma visão solidária de relações humanas a partir da sala de aula contribuirá para que os alunos superem o individualismo e valorizem a interação e a troca, percebendo que as pessoas se complementam e dependem umas das outras.
- Orientação Sexual - Ao ensino de Matemática cabe fornecer os mesmos instrumentos de aprendizagem e de desenvolvimento de aptidões a todos, valorizando a igualdade de oportunidades sociais para homens e mulheres.
- Meio Ambiente - A compreensão das questões ambientais pressupõe um trabalho interdisciplinar em que a Matemática está inserida. A quantificação de aspectos envolvidos em problemas ambientais favorece uma visão mais clara deles, ajudando na tomada de decisões e permitindo intervenções necessárias (reciclagem e reaproveitamento de materiais, por exemplo).

- Saúde - As informações sobre saúde, muitas vezes apresentadas em dados estatísticos, permitem o estabelecimento de comparações e previsões, que contribuem para o autoconhecimento, possibilitam o autocuidado e ajudam a compreender aspectos sociais relacionados a problemas de saúde.
- Pluralidade Cultural - A construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses.

A transversalidade se caracteriza pela abordagem de temas que se preocupam com a formação integral do aluno, como saúde, ética, meio ambiente, orientação sexual e pluralidade cultural. Já a interdisciplinaridade se caracteriza como uma abordagem feita a uma temática, não necessariamente ligada aos temas transversais, mas que se fundamenta e justifica sob os múltiplos olhares das diversas disciplinas escolares. A exemplo disso, podemos citar a realização de uma oficina de leitura, interpretação e construção de poemas matemáticos. Um projeto como este abrangeria as disciplinas de português, matemática e redação, podendo haver ainda, um cruzamento com a disciplina de artes, no caso de serem realizadas apresentações ou encenações dos alunos para cada poema estudado. Pelo caráter abrangente da transversalidade, podemos perceber que os projetos que a contemplam carecem da perspectiva interdisciplinar para a sua efetiva execução no contexto da escola.

O professor pode, ainda, realizar na escola, na sala de aula, ou no laboratório de matemática, uma enquete com os alunos que aponte para os possíveis temas de interesse deles e que possa, portanto, ser escolhido para dar nome ao projeto.

### **3.2.3. O Laboratório de Matemática como sala de aula inovadora**

No meio educacional “mudança” é a palavra de ordem. Metodologias ativas, inovação, competências, novas tecnologias, tudo para se fazer diferente do que se fazia no passado. O acesso universal à informação, proporcionado pela internet e das mídias digitais, transformou radicalmente a sociedade e, com ela, a forma de se relacionar, consumir, trabalhar, aprender e, até mesmo, viver.

A educação não pode permanecer a mesma. O que serviu no passado não obrigatoriamente servirá no presente e, certamente, não será adequado no futuro. Hoje, um estudante de curso superior, ao se formar, é capaz de lembrar (em média) 40% do que lhe foi ensinado, mas não é capaz de colocar em prática nem 10% desses ensinamentos.

A aula expositiva é uma ótima maneira de ensinar, mas uma péssima maneira de aprender. Em uma exposição, o estudante sai com a falsa impressão de que aprendeu muito, mas, na verdade, aprendeu quase nada. Ele apenas teve contato com muitas informações; pode até tê-las compreendido, mas isso não significa que tenha aprendido, pois o aprendizado efetivo exige aplicabilidade do conhecimento compreendido para que ele possa ser cognitivo e permanente.

A aula expositiva é um elemento necessário no contexto educacional, mas deve ser complementar e secundária no processo de aprendizagem. A conscientização dessas premissas junto aos educadores tem levado a um crescente interesse pela compreensão das chamadas metodologias ativas de aprendizagem, que nada mais são do que métodos para tornar o estudante protagonista do seu processo de aprendizagem, e não mais elemento passivo na recepção de informações.

As atividades pedagógicas de uma instituição de ensino devem ser orientadas a apresentar forte contextualização e correlação com a realidade, com o intuito de aplicar conteúdos efetivamente significativos para o desenvolvimento de competências úteis e necessárias à realização profissional e pessoal do estudante.

Aprender de maneira isolada não confere ao aluno a capacidade de aplicar o conhecimento. Para ser capaz de transferir o conhecimento a situações reais, os estudantes precisam aprender as estratégias cognitivas e os procedimentos. Nada melhor para desenvolver as estratégias cognitivas e habilidades correlacionadas do que a necessidade de solucionar ou resolver um desafio ou problema real e autêntico utilizando metodologias ativas de aprendizagem, sendo aí sem dúvida onde o laboratório de Matemática se insere de forma louvável e indiscutível.

Ao conversar com os alunos sobre os objetivos de aprender matemática, umas das queixas seria o distanciamento do conteúdo proposto com a vida pessoal e profissional e dos recursos pedagógicos pouco atraentes.

Mesmo diante de tantos avanços tecnológicos e científicos, o modelo de aula continua predominantemente oral e escrito, assim como os recursos utilizados. As metodologias quando mudam, ganham uma nova roupagem por meio da utilização de instrumentos audiovisuais, como a inserção de filmes, vídeos e apresentações gráficas e projetores

multimídia. Já os alunos continuam a receber o conteúdo passivamente e cada vez mais esperam tudo produzido pelos professores.

Diante desse contexto, pergunta-se: Quais estratégias pedagógicas podem auxiliar o professor e tornar as aulas mais significativas?

Segundo Carbonell (2002, p. 16), relata que

[...] não se pode olhar para trás em direção à escola ancorada no passado em que se limitava ler, escrever, contar e receber passivamente um banho de cultura geral. A nova cidadania que é preciso formar exige, desde os primeiros anos de escolarização, outro tipo de conhecimento e uma participação mais ativa. (CARBONELL, 2002, p. 16)

É preciso criar condições de ter uma participação mais ativa dos alunos, mudanças da prática e de estratégias que garantam a organização de um aprendizado contextualizado e com significado; Sendo a inovação uma das formas de mudar e transformar o aprendizado. Pesquisas indicam que aprender precisa acontecer de forma significativa, e é por isso que se faz necessário estabelecer caminhos que levem à inovação no ensino, de modo a chegar cada vez mais próximo de metodologias que maximizem o potencial de aprendizagem do aluno.

Inovar significa fazer o novo, renovar, ter novas ideias, ou mesmo aplicar uma ideia já conhecida em um novo contexto. A inovação no âmbito educacional deve ser compreendida de modo mais amplo. De acordo com os estudos de Carbonell (2002, p. 19), a inovação educacional trata-se de

[...] um conjunto de intervenções, decisões e processos, com certo grau de intencionalidade e sistematização, que tratam de modificar atitudes, ideias, culturas, conteúdos, modelos e práticas pedagógicas. E, por sua vez, introduzir, em uma linha renovadora, novos projetos e programas, materiais curriculares, estratégias de ensino aprendizagem modelos didáticos e outra forma de organizar e gerir o currículo, a escola e a dinâmica da classe. (CARBONELL, 2002, p. 16)

Quando o professor se apresenta como o único detentor do conhecimento, ele impossibilita o aluno de participar de maneira mais ativa, deixando o aluno com medo de errar e conseqüentemente de participar.

A inovação com uso do laboratório de Matemática torna a escola um lugar mais democrático e atrativo; estimula as experiências e interações e amplia a autonomia pedagógica, pois a inovação sempre acontece através do intercâmbio entre as pessoas.

Ao escrever acerca da necessidade de se inovar as práticas pedagógicas na sala de aula, não se pode deixar de mencionar os principais autores que defenderam, desde o século XX, uma educação pautada na aprendizagem por meio de metodologias mais ativas.

Jonh Dewey, nos anos 1930, já enfocava a necessidade de estreitar a relação entre teoria e prática, pois defendia que o aprendizado ocorre se inserido no contexto diário do aluno.



Para ele, a função da educação é a de propiciar uma reconstrução permanente das experiências dos estudantes articulada com a vida.

[...] o processo educativo não pode ter fins elaborados fora dele próprio. Os seus objetivos se contêm dentro do processo e são eles que o fazem educativo. Não podem, portanto, ser elaborados senão pelas próprias pessoas que participam do processo. O educador, o mestre, é uma delas. A sua participação na elaboração desses objetivos não é um privilégio, mas a consequência de ser, naquele processo educativo, o participante mais experimentado, e, esperemos, mais sábio. (DEWEY apud TEIXEIRA, 1957, p. 21).

Segundo Dewey (1967), o pensamento não pode ocorrer isolado da ação, cabendo ao professor apresentar os conteúdos na forma de questões ou problemas, e não dar de antemão respostas ou soluções prontas. A ideia é criar condições para que o aluno possa raciocinar e elaborar os conceitos que, posteriormente, irá confrontar com o conhecimento sistematizado, sendo o laboratório de Matemática o palco ideal para essa concepção ser colocada em prática.

Segundo a obra de Kilpatrick (1975), o aprendizado precisa partir de problemas reais, do cotidiano dos estudantes. Para o autor, todas as atividades curriculares podem realizar-se por meio de projetos, sem a necessidade de uma organização diferenciada.

As propostas pedagógicas de Dewey (1976) e Kilpatrick (1975) foram disseminadas no Brasil principalmente por Anísio Teixeira e Lourenço Filho. Naquela época, os conceitos científicos não eram construídos juntamente com os alunos, que deveriam apenas memorizar os conhecimentos aprendidos. Desse modo, impossibilitava uma melhor inserção e participação dos estudantes em seus ambientes sociais. Nesse sentido, o ideário da Escola Nova veio para contrapor o ensino tradicional, colocando o aluno no centro do processo e enfatizando a necessidade do protagonismo durante a aprendizagem.

Ausubel (1982) confirma as ideias de Dewey (1976), Decroly (1929) e Kilpatrick (1975), ao propor que os conhecimentos prévios dos alunos devem ser valorizados, para que a aprendizagem seja realmente significativa. De acordo ainda com Ausubel (1982), para que o aprendizado possa ocorrer, há duas principais condições: o aluno precisa ter engajamento para aprender e o conteúdo escolar precisa ser potencialmente significativo, ou seja, articulado com a vida e as hipóteses do estudante.

Atualmente essas teorias fornecem subsídios para uma pedagogia centrada na criatividade e na atividade discente, em uma perspectiva de construção do conhecimento, do protagonismo, do autodidatismo, da capacidade de resolução de problemas, do desenvolvimento de projetos, da autonomia e do engajamento no processo de ensino-aprendizagem por meio das metodologias de abordagem ativa.

Lembrando que o processo de ensino-aprendizagem é algo complexo, não acontecendo de forma linear, demanda ações planejadas, para que os alunos possam se aprofundar e ampliar os significados mediante sua participação e protagonismo.

Ao inserir o laboratório de Matemática, estamos diante de uma prática pedagógica capaz de garantir aos alunos uma aprendizagem sólida, dando aos mesmos condições de enfrentar com criticidade as mudanças atuais da informação e do conhecimento.

Para que o estudante assuma uma postura mais ativa, deixando de ser mero receptor de conteúdos, buscando deter conhecimentos relevantes e com significado, os processos educativos também precisam mudar.

A escola inteira precisa adotar o laboratório de Matemática, tendo que se organizar e contribuir para que ele funcione de fato. Pois é lá onde atividades integradoras da prática com a teoria irão se concretizar, o fazer e o refletir, de forma sistematizada, envolvendo todas as áreas e contribuindo na escolha profissional do aluno.

Hernández e Ventura (1998) defendem que o currículo deve ser organizado com base na transdisciplinaridade e que o trabalho com projetos deve ser amplamente contemplado.

A transdisciplinaridade é uma concepção de relações entre as disciplinas que busca compreender o novo, isto é, resolver problemas com a cooperação dos conhecimentos científicos. Na educação, ela ainda é um caminho a si trilhar.

Para Hernández e Ventura (1998), a proposta é vincular as aprendizagens às necessidades reais e à uma visão global da realidade, a que chamam Projeto de Trabalho, enfoque integrador da construção de conhecimentos, que transgrede o formato da educação tradicional, essencialmente transmissiva e organizada por saberes compartimentados e selecionados pelo professor. Os autores enfatizam que o projeto não é uma metodologia, mas uma forma de refletir sobre a escola e sua função.

Mazur (2015), referência mundial em aprendizagem ativa, considerado um dos professores mais inovadores, também prova que atividades envolventes geram mais desempenho acadêmico. Professor de física de Harvard, insatisfeito com o aprendizado de seus alunos, modificou a forma como ensinava e decidiu abolir a transmissão de conteúdos em sua sala de aula. Passou o conteúdo teórico para ser abordado em casa, enquanto os alunos respondiam perguntas e discutiam seus conhecimentos com outros colegas por meio do computador, e, em sala de aula, o professor trabalhava as mesmas lições, mas de forma aplicada e prática. O resultado foi que todos os alunos começaram a aprender muito mais.

Essa experiência gerou um método amplamente conhecido e atualmente utilizado em muitas faculdades e universidades de todo mundo – o *peer instruction* (aprendizado entre pares) e a *flipped classroom* (sala de aula invertida).

Enquanto existir o modelo tradicional de ensino, baseado unicamente no ensino do conteúdo do livro didático e em exercícios de fixação, que ainda acontece em quase todas as classes do mundo, alunos e professores desmotivados para o aprendizado continuarão sendo gerados. Além dessas metodologias sugeridas por Mazur (2015), o uso do laboratório de Matemática é onde acontecerá essa ruptura do tradicional, pois o aluno precisará agir, falar, perguntar e dar sugestões.

O modelo de educação para o século XXI, discutido na Declaração Mundial sobre Educação Superior (ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA, 1998), defende a necessidade do aprimoramento dos projetos educacionais e aponta para a busca de novas posturas, visando à formação de uma mão de obra qualificada, atendendo, assim, às demandas da sociedade.

O próprio documento defende que é importante que as novas tecnologias ofereçam oportunidades de renovar o conteúdo dos cursos e dos métodos de ensino e ampliem o acesso à educação superior, embora reforce que novas tecnologias e informações não tornam os docentes dispensáveis. As metodologias ativas de aprendizagem se apresentam como uma alternativa com grande potencial para atender às demandas e desafios da educação atual, proporcionando ao aluno a capacidade de transitar de maneira autônoma, tornando-se também capaz de enfrentar e resolver problemas e conflitos do campo profissional.

As pessoas estão cada vez mais conectadas, existem redes de comunicação que transmitem as notícias de forma muito rápida e eficaz. Juntamente com essas modificações, a Educação também se vê na condição de mudar seus métodos de ensino - aprendizagem. É preciso entender que o aluno de hoje não precisa se esforçar muito, pois aquela aula perdida pode facilmente ser vista na internet, são dezenas de vídeos do mesmo assunto a disposição, tendo vários professores explicando aquele mesmo conteúdo de diferentes formas, cada um usando sua metodologia.

Há tempos pesquisas mostram a desmotivação dos alunos em uma aula tradicional, inclusive um estudo de Blight (2000), mostra que a frequência cardíaca dos alunos, com o passar do tempo da aula tradicional, reduz bastante.

Quando o aluno é levado ao laboratório provavelmente ele sairá da inércia, será incentivado a se mexer, a produzir algo, a colaborar com os demais já que tudo é feito em

equipe. No laboratório o aluno se torna protagonista e com certeza seus batimentos não diminuirão no decorrer da aula.

É muito provável que no momento que o professor traz uma oficina voltada para construção de pipas, e dentro dessa prática explora vários conceitos como sólidos geométricos, números de vértices, faces, arestas, relação de Euler, dentre outros aspectos, o aluno se sentirá envolvido e começa a assimilar conteúdos que de forma de aula expositiva seria pra ele um sacrifício.

Não podemos confundir modernização com metodologia ativa de aprendizagem; os diversos recursos tecnológicos podem sim reforçar ainda mais a consagração do professor como dono do conhecimento, mantendo o aluno como mero receptor e memorizador do conhecimento. O uso da tecnologia não é, portanto, uma metodologia ativa de aprendizagem.

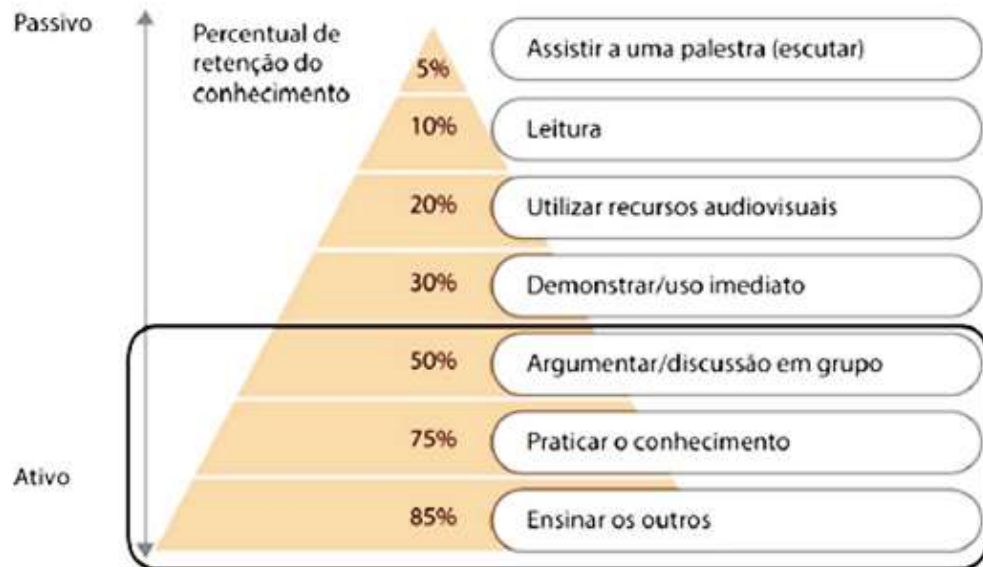
As metodologias ativas de aprendizagem estão alicerçadas na autonomia, no protagonismo do aluno. Têm como foco o desenvolvimento de competências e habilidades, com base na aprendizagem colaborativa e na interdisciplinaridade, o que faz do laboratório de matemática um palco perfeito pra esse protagonismo do aprendiz.

Segundo Camargo (2018), as metodologias ativas de aprendizagem, proporcionam:

- Protagonismo do aluno;
- Desenvolvimento de competências para vida profissional e pessoal;
- Transdisciplinaridade e criatividade;
- Visão empreendedora;
- Novo posicionamento do professor como mediador;
- Instigação a ideias e descobertas, eliminando o hábito de memorizar sem significado;

A demanda hoje em dia seria de métodos de ensino centrados no aluno, onde se aplica a combinação de ideias relacionadas ao ensino personalizado e a aprendizagem baseada no domínio de conteúdo. Ao se montar uma oficina de um determinado conteúdo, visamos individualizar aquele aprendiz e aproveitar conhecimentos prévios que o aluno detenha.

O uso de metodologias ativas é sem dúvida um diferencial no processo de ensino - aprendizagem. A pirâmide de aprendizagem de Dale (1969) mostra bem esse fato.

**Figura 10** - Pirâmide da aprendizagem

Fonte: Dale (1969)

A pirâmide de aprendizagem de Dale (1969) apresenta sete formas diferentes de aprendizagem. As quatro primeiras, que são assistir a uma palestra ou aula expositiva (5%), fazer uma leitura (10%), utilizar recursos audiovisuais (20%) ou demonstrar algo (30%), remetem à aula tradicional. Na base da pirâmide, situam-se outras três maneiras, que são argumentar, praticar o conhecimento e ensinar os outros. Estas últimas referem-se às metodologias ativas de ensino. Observa-se, portanto, que o aluno desenvolve mais competências e habilidades e retém mais conhecimentos por meio de práticas interativas e colaborativas de ensino.

É notório que o modelo tradicional não retém conhecimento, não torna a aprendizagem significativa. É fácil encontrar relatos de ex-alunos que nem sequer lembram daquilo que foi ensinado pelos professores, deixando o ensino bem distante da realidade.

Portando a aula expositiva se mostra incompatível com a necessidade atual; o aluno contemporâneo é exigente, seletivo e se cansa rápido; aulas de cinquenta minutos ou mais puramente expositivas são inapropriadas e desgastantes. No momento em que levamos o aluno ao laboratório a aula se torna prazerosa e os próprios alunos relatam que a aula passa depressa, ou seja, como eles se encontram envolvidos, não ficam preocupados com o tempo de aula. Acontece inclusive que muitas vezes a aula acaba indo além do tempo estabelecido pela escola.

## 4. OFICINAS E PRÁTICAS DE LABORATÓRIO

A dinâmica do laboratório de matemática é bem diversificada, dentre as atividades que podemos desenvolver temos as oficinas, onde durante um período maior de tempo, planejado pelo professor, pode-se trabalhar conceitos, práticas e experimentos de maneira bem eficiente. Inclusive ao final de cada oficina desenvolvida com os alunos, foram realizadas enquetes, onde os alunos revelariam se detinham algum conhecimento prévio do conteúdo abordado, se acharam interessante e de fácil compreensão as aulas ministradas nas oficinas.

### 4.1. OFICINA 01: TEODOLITO CASEIRO PARA CALCULAR ALTURAS INACESSÍVEIS

O teodolito é um instrumento óptico utilizado por engenheiros, agrimensores, topógrafos e antigos navegadores para medir ângulos horizontais e verticais e calcular distâncias inacessíveis. O mesmo é montado num tripé, com indicadores de nível, permitindo uma total liberdade de rotação horizontal ou vertical. A composição básica do teodolito consiste em duas partes, a óptica e a mecânica. Utilizam-se de lentes e prismas no seu interior que ao desviar o raio de luz permite uma rápida e simples leitura dos limbos graduados em graus, minutos e segundos.

**Figura 11** - Teodolito profissional



Fonte: [http://es.123rf.com/imagenes-de-archivo/surveying\\_the\\_site.html](http://es.123rf.com/imagenes-de-archivo/surveying_the_site.html)

A fim de atender a necessidades como demarcações territoriais e elaboração de mapas, surgiram instrumentos de geodesia. Segundo Granato, Miranda (2011), há registros evidenciais sobre atividades relacionadas a geodesia que datam de 3000 anos a.C., e se entrelaçam a história da trigonometria. Momento esse em que as civilizações do Egito e da Babilônia precisaram dividir terras, construir estradas e determinar algumas distâncias.

Na Mesopotâmia e no Egito Antigo, registram-se as primeiras evidências materiais de instrumentos para esse fim, conforme afirmam Granato e Miranda,

“Suas evidências materiais mais antigas vêm da Mesopotâmia e do Egito Antigo, onde agrimensores trabalhavam nas planícies inundadas dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, irrigando, medindo, registrando, e valorando terra agricultável. Tinham função também na construção de monumentos, assegurando que as estruturas fossem eretas e devidamente alinhadas” (GRANATO; MIRANDA, 2011, p.19).

Os estudos no campo de trigonometria e geometria aliado ao uso de dispositivos mecânicos (ferramentas) como: cordas de nós, prumos, círculos graduados e arcos setoriais, representavam e caracterizavam a geodesia até o século XVI. Tais instrumentos vinham sendo utilizados das formas mais variadas.

Desde os primórdios da civilização até os dias atuais, o homem sempre teve a necessidade e curiosidade de buscar conhecer distâncias inacessíveis. Na realidade, são relativamente poucas as distâncias que podem ser medidas de forma direta usando um instrumento de medida básico, como uma trena. A trigonometria nos dá suporte matemático para praticamente todas as distâncias que desejamos conhecer. Quando existe a necessidade da realização de estudos topográficos de determinada área ou região e até mesmo analisar dimensões ou distância entre dois pontos inacessíveis, como largura de um rio e altura de objetos, torna-se necessário o uso do teodolito para a realização de medidas indiretas, que serão aplicadas a conceitos da trigonometria e geometria.

Podemos associar os conhecimentos de trigonometria ao uso do teodolito e da trena como meios de ensino para medir uma distância inacessível, transcrevendo observações de ângulos ou medidas de distâncias relativamente pequenas para o papel com o auxílio de transferidor (representando o teodolito) e a régua (representando a trena). Dessa forma será iniciada a concretização do conhecimento abstrato de trigonometria para a realidade dos alunos.

Compreende-se que a contextualização de conceitos matemáticos com o cotidiano do aluno facilita a formulação de novos conhecimentos e a relação destes com os conhecimentos anteriores; o PCNEM destaca que esta é uma forma bastante significativa para o desenvolvimento global do educando.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2000, p. 111).

Portanto o professor pode propor a seus alunos a construção de um teodolito, com o intuito de facilitar a visualização de conceitos trigonométricos, onde serão explorados os espaços físicos ao seu redor, assim instigando a curiosidade do aluno e associando-a a compreensão do raciocínio lógico e cognitivo. Esse tipo de atividade pode servir para contextualizar os problemas que envolvem cálculos de medidas e alturas com conceitos básicos da trigonometria, fazendo com que dessa forma o processo de ensino possa superar a concepção baseada nas repetições e memorizações, deixando de lado a mecanização do aprendizado e facilitando a compreensão com relação aos conceitos, interpretações e resoluções de problemas, além das possíveis interações entre alunos-alunos e alunos-professor.

No intuito de demonstrar algumas aplicações práticas e cotidianas da trigonometria, vamos apresentar um projeto voltado para construção e manuseio de um teodolito caseiro para ser utilizado em aulas práticas para calcular medidas inacessíveis e resolver problemas triangulares por meio dos conceitos abordados na trigonometria. Essa atividade permitirá aos alunos compreender a aplicabilidade dos conceitos trabalhados e a importância que a Matemática tem em nosso cotidiano.

Na Figura 12 podemos observar um aluno realizando medição de uma altura inacessível; após a coleta das alturas, o mesmo irá com sua equipe se concentrar na realização dos devidos cálculos.

**Figura 12** - Aluno executando medição de ângulos



Fonte: Elaboração própria



Quando os conteúdos matemáticos não são contextualizados em sala de aula, aumenta a dificuldade de entendimento dos mesmos pelos alunos. Eles acham que não faz sentido estudar aquilo que está proposto, não sabem aplicá-los em situações práticas e isso leva-os a se distanciarem cada vez mais da disciplina. No intuito de demonstrar algumas aplicações práticas e cotidianas da trigonometria, vamos apresentar um projeto voltado para construção e manuseio de um teodolito caseiro para ser utilizado em aulas práticas para calcular medidas inacessíveis, resolvendo problemas triangulares por meio dos conceitos abordados na trigonometria. Essa atividade permitirá aos alunos compreender a aplicabilidade dos conceitos trabalhados e a importância que a Matemática tem em nosso cotidiano.

Como objetivos da oficina temos:

- construir um teodolito usando material reciclado;
- aprender a manusear o teodolito;
- aplicar os conhecimentos trigonométricos para fazer cálculos de medidas propostas, através de dados coletados com o aparelho;
- resolver problemas práticos propostos e mostrar ao aluno a importância que a Matemática tem em nosso cotidiano e dentro das mais diversas áreas profissionais.

### **Materiais utilizados na construção do teodolito caseiro:**

**Figura 13** - Materiais utilizados



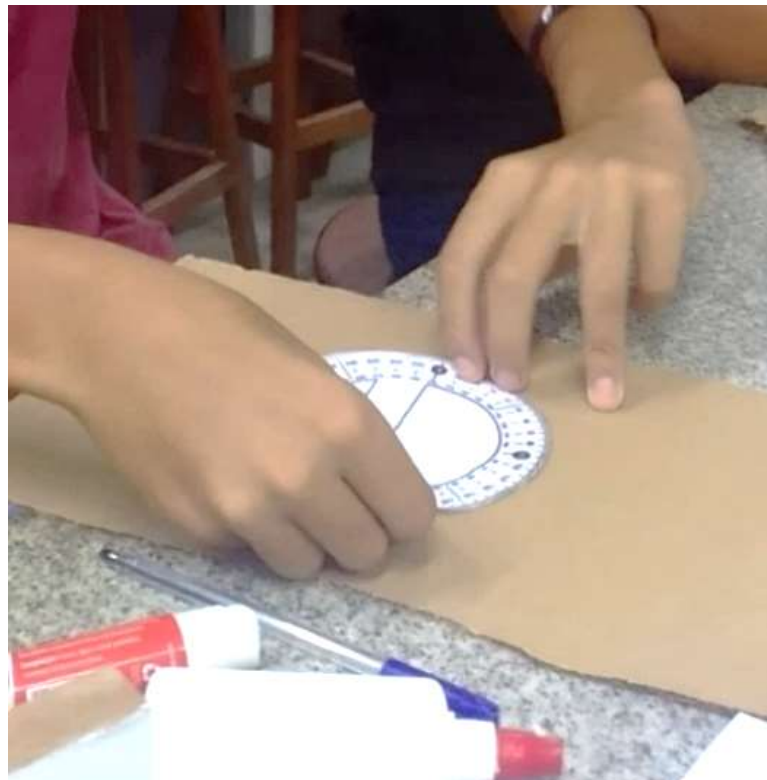
Fonte: Elaboração própria

- Madeira tipo compensado
- Papelão
- Cano pvc de ½
- Garrafas pet
- Fita gomada
- Pregos, tachinhas e parafusos
- Cola branca
- Arames e prendedores de plástico
- Transferidor impressos
- Cabos de vassoura

### Montagem do teodolito:

**Passo 01** - Recortar os transferidores impressos e colar no papelão.

**Figura 14** - Passo 01 (teodolito)



Fonte: Elaboração própria

**Passo 02** - Prender com pregos a base de madeira, em forma de L;

**Figura 15** - Passo 02 (teodolito)



Fonte: Elaboração própria

**Passo 03** - Prender com tachinhas o transferidor na base de madeira;

**Figura 16** - Passo 03 (teodolito)



Fonte: Elaboração própria

**Passo 04** - Prender firme com parafuso a pecinha de pvc que dará rotatividade a luneta;

**Figura 17** - Passo 04 (teodolito)



Fonte: Elaboração própria

**Passo 05** - Após prender a calha de pvc, prender o cano pvc com fita e presilhas;

**Figura 18** - Passo 05 (teodolito)



Fonte: Elaboração própria

**Passo 06** - Cortar a garrafa pet e prender as pernas do tripé (opcional);

**Figura 19** - Passo 06 (teodolito)



Fonte: Elaboração própria

**Produto final:** teodolito caseiro da turma de 1º ano do EEM Telina Matos Pires.

**Figura 20** - Produto final (teodolito)



Fonte: Elaboração própria



### Prática com teodolito:

Concluída a etapa de confecção dos teodolitos pelas equipes, seguiu-se com as mesmas para uma área externa da escola, onde enquanto um aluno visualiza o ponto da leitura, um outro aluno faz as anotações e um terceiro aluno fará as medições usando seu passo médio.

**Figura 21** - Prática com teodolito



Fonte: Elaboração própria

Na Figura 21 temos duas alunas executando a leitura dos ângulos; uma das observações que tornou a prática interessante foi a troca dos resultados entre as equipes, podendo assim perceber que apesar de serem de altura e passo médio diferentes, as alturas dos objetos medidos tendiam a dar resultados aproximados.

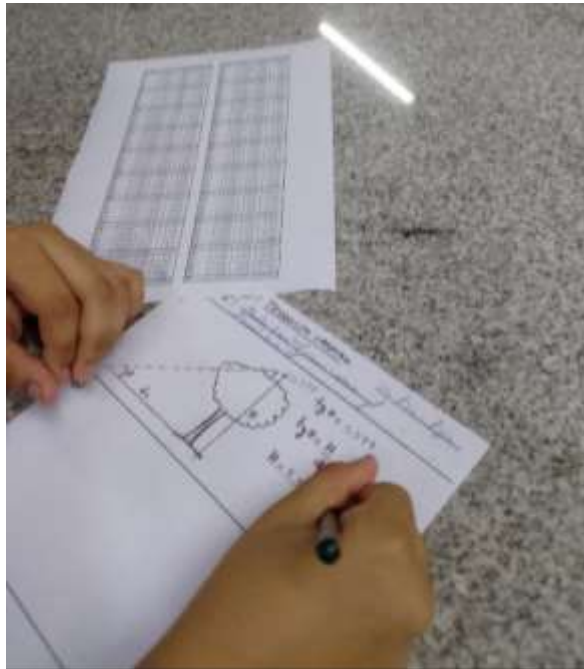
**Figura 22** - Medição do passo médio



Fonte: Elaboração própria

No chão da sala, com o auxílio de uma fita métrica, mensuramos a passada do aluno(a) que ficará responsável pela medição da distância do teodolito até o objeto desejado. Lembrando ainda que a altura do aluno(a), será somada à altura calculada. Muito louvável a interação com o aluno, que se mostra bem mais disposto a aprender e satisfeito em estar percebendo a matemática que antes era sem sentido para o mesmo.

**Figura 23** - Cálculos de alturas



Fonte: Elaboração própria

Concluído o trabalho de campo, tudo que foi coletado será agora usado na atividade. Cada equipe fará seu relatório e uma tabela trigonométrica é usada para retirar os devidos valores das tangentes que ajudará no cálculo das distâncias. Os resultados são conferidos e comparados entre as equipes, isso possibilita a percepção de que mesmo com medidas tanto de ângulos como de distâncias diferentes, os resultados estiveram sempre próximos.

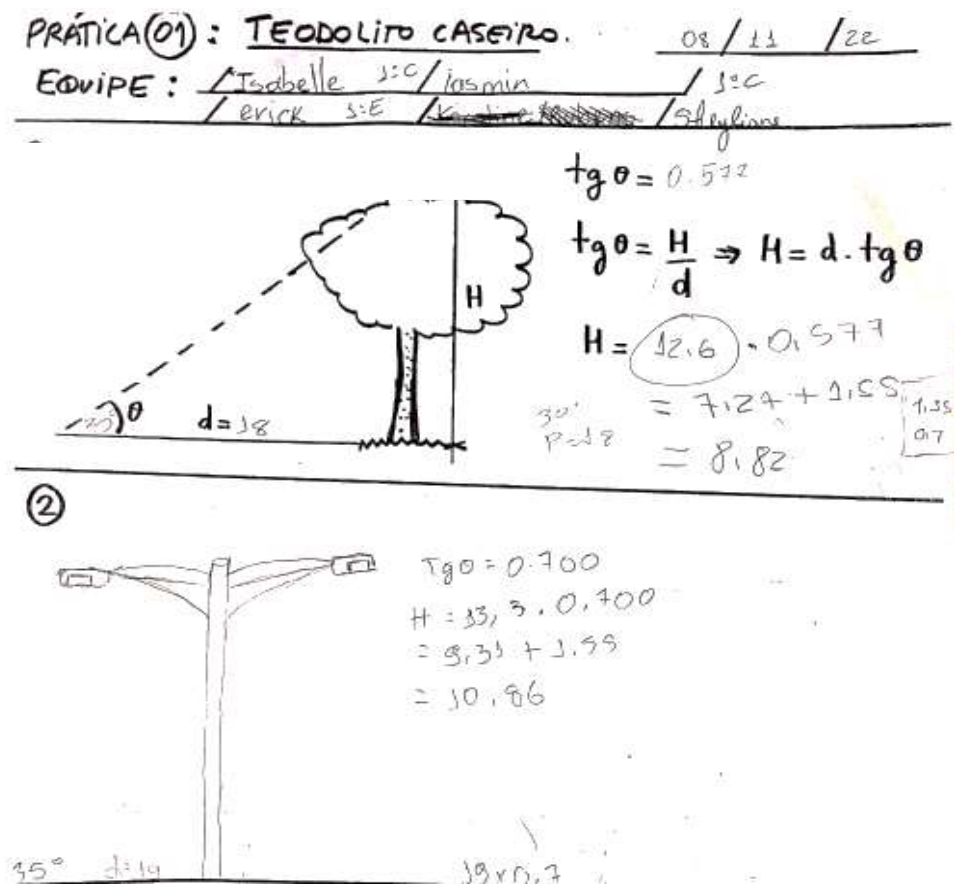
Com o desenvolvimento do projeto, sendo esses alunos oriundos de 2 anos de ensino remoto, acredito que foi muito relevante esse momento atípico onde os mesmos puderam confeccionar e utilizar o teodolito e colocar em prática os conhecimentos adquiridos na disciplina de Matemática através das medições de ângulos horizontais e verticais e calcular as medidas propostas em cada situação e lembrando sempre, aos alunos, de que se trata de um aparelho rústico que possui uma margem de erro nas medições, mas que não deixa de ser um aparelho científico artesanal utilizado em triângulos, sejam retângulos ou não. Desta forma, pode-se perceber que a construção e manuseio do material didático no ensino de trigonometria foram fundamentais para a concretização dos conhecimentos adquiridos na teoria, promovendo

à compreensão e aplicabilidade dos conceitos trabalhados e a importância que a Matemática tem em nosso cotidiano. Vale ressaltar que as relações em geral são melhoradas consideravelmente, aluno-aluno, aluno-professor e principalmente aluno-matemática.

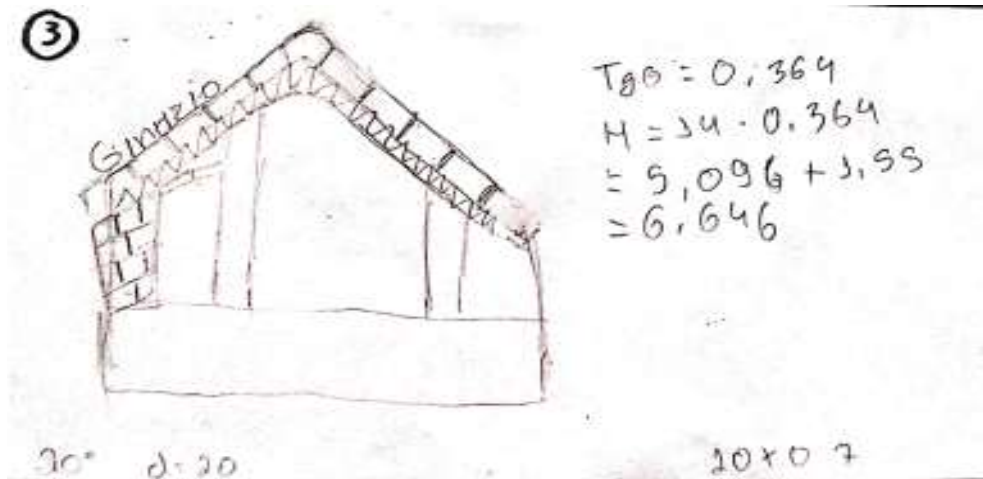
Na atividade respondida pelo aluno, o mesmo iria escolher um objeto alto o suficiente; visualizar o ponto mais alto e fazer a leitura com auxílio do transferidor; paralelo a isso o aluno(a) que mediu o “passo médio” irá caminhar do teodolito até o objeto desejado; um terceiro aluno(a) estará tomado nota dos dados. Enfim retornamos ao laboratório e com auxílio da calculadora ou tabela trigonométrica se realizam os cálculos. Foram escolhidos três objetos de alturas inacessíveis: uma árvore, um poste de iluminação pública e uma cobertura de um ginásio.

### Atividade respondida pelos alunos após saída a campo:

Figura 24 - Atividade respondida (aula de campo)







Fonte: Elaboração própria

### Relatórios e enquetes sobre a atividade:

Foi realizada uma enquete, disponível no Anexo A, onde os alunos responderam se tinham conhecimento prévio do conteúdo de trigonometria explorado; o que os mesmos acharam de ir a campo fazer medições e na sequência realizar os devidos cálculos e se eles consideram relevantes estudar com práticas de laboratório.

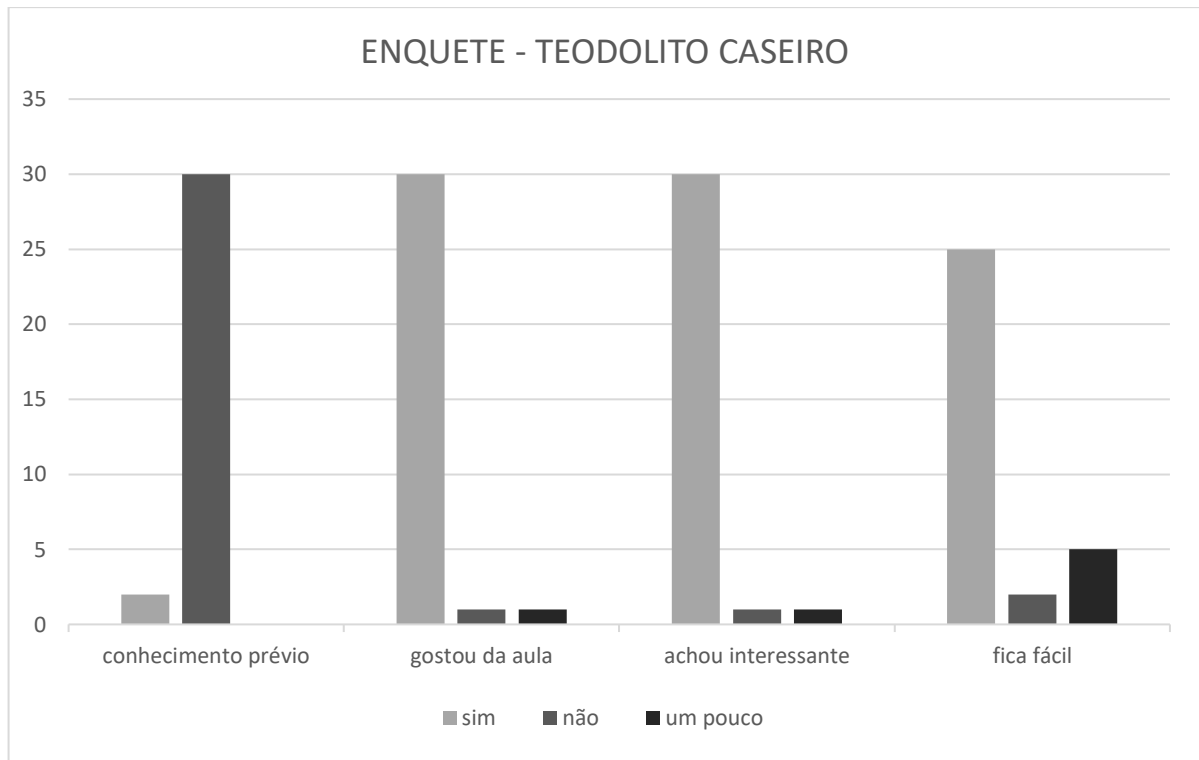
Segundo um aluno de uma turma de 1º ano relatou o seguinte: “Sobre a atividade que fizemos eu gostei bastante desse tipo de ensino prático”

Sobre o trabalho que fizemos eu gostei bastante desse tipo de ensino prático

Outra aluna relatou que: “Eu gostei muito da ideia, pois com a prática os alunos aprendem mais porque fica mais interessante”

Eu gostei muito da ideia, pois com a prática os alunos aprendem mais porque fica mais interessante

Das enquetes respondidas tem-se que:

**Gráfico 1** - Enquete – Teodolito caseiro

Fonte: Elaboração própria

De acordo com os resultados estatísticos, temos que quase 94% não tinha nenhum conhecimento sobre o conteúdo; vale ressaltar que esses alunos cursaram o 8º ano e 9º ano remotamente, o que com certeza agravou a situação, e quanto a gostar da aula, achar interessante temos os mesmos 94% e achar fácil temos quase 78% dos alunos entrevistados. Foram entrevistados 32 alunos.

#### 4.2. OFICINA 02 - PIPA TETRAÉDRICA

A Geometria está presente em diversos aspectos do cotidiano das pessoas. Diariamente, elas se deparam com ferramentas, instrumentos e objetos das mais diversas formas geométricas. Imagine as seguintes situações: encaixar as peças de uma máquina corretamente; utilizar a ferramenta adequada para solucionar um problema hidráulico ou elétrico; utilizar a forma proporcional ao bolo desejado. Em todas essas situações, é necessário realizar a leitura e a representação da realidade para agir sobre ela. Esta é uma competência que somente se pode concretizar com o conhecimento geométrico, não só de figuras planas, mas, principalmente, dos sólidos geométricos. Afinal, os objetos que cercam as pessoas, no mundo real, são tridimensionais.

## Poliedros de Platão

Diz-se que um poliedro é de Platão se, e somente se:

- em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas;
- toda face tiver o mesmo número de arestas;
- for válida a relação de Euler.

Considerando, então, **m** o número de arestas que concorrem em um vértice, e **n** o número de arestas de uma face de um poliedro de Platão, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- I. nº. de vértices do poliedro =  $V$  (todos com **m** arestas);
- II. nº. de faces do poliedro =  $F$  (todas com **n** arestas);
- III. dobro do número de arestas do poliedro =  $2A = m \cdot V = n \cdot F$ , ou seja:

$$V = \frac{2A}{m} \text{ e } F = \frac{2A}{n}$$

I. Relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$

$$\frac{2A}{m} + \frac{2A}{n} = A + 2$$

Dividindo – se os termos dessa igualdade por  $(2A)$ , obtém-se:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

Como  $\frac{1}{A}$  é positivo, tem se que:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

Sabe-se que **m** e **n** são inteiros positivos maiores ou iguais a 3 (os ângulos poliédricos têm, no mínimo, três arestas; uma face tem, no mínimo, três lados). Nessas condições, analisando essa última desigualdade, obtêm-se cinco, e apenas cinco, pares ordenados  $(m, n)$  que a satisfazem.

Isso mostra que existem cinco, e apenas cinco, classes de poliedros de Platão, que estão listadas na tabela a seguir.

**Tabela 1 - Poliedros**

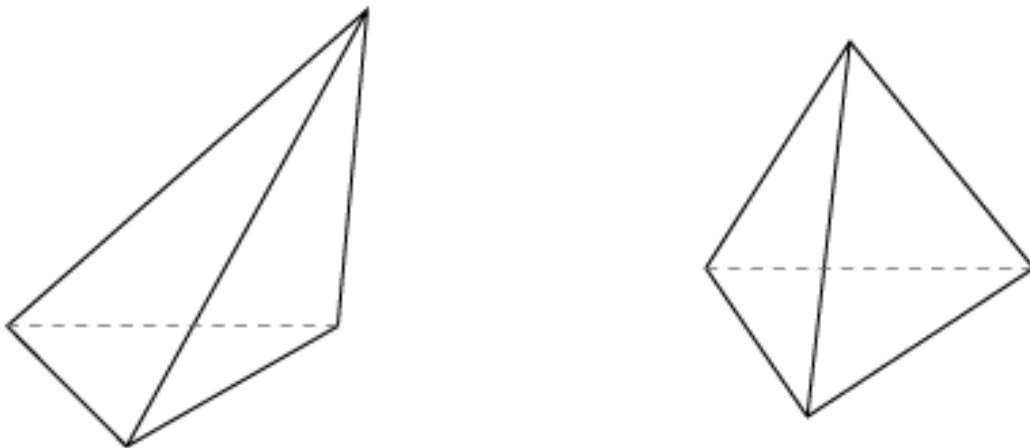
<b>M</b>	<b>N</b>	<b>A</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>Nome</b>
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	hexaedro
4	3	12	6	8	octaedro
3	5	30	20	12	dodecaedro
5	3	30	12	20	icosaedro

Fonte: portalsas.com.br

Para o caso do poliedro de Platão obtido quando  $m = 3$  (cada vértice tem três arestas) e  $n = 3$  (cada face com três arestas), tem-se  $V = \frac{2A}{3}$  e  $F = \frac{2A}{3}$ . Substituindo esses valores na relação de Euler, obtém-se:

$$\frac{2A}{3} + \frac{2A}{3} = A + 2 \text{ então temos } A = 6, V = 4 \text{ e } F = 4 \text{ (tetraedro)}$$

Nos poliedros de Platão, as faces e os vértices podem ser diferentes entre si; contanto que tenham a mesma quantidade de arestas, elas podem ter tamanhos diferentes. Os dois poliedros representados a seguir, por exemplo, são de Platão e pertencem à mesma classe (tetraedro).

**Figura 25 - Tetraedros**

**Arestas e vértices congruentes**

Fonte: portalsas.com.b

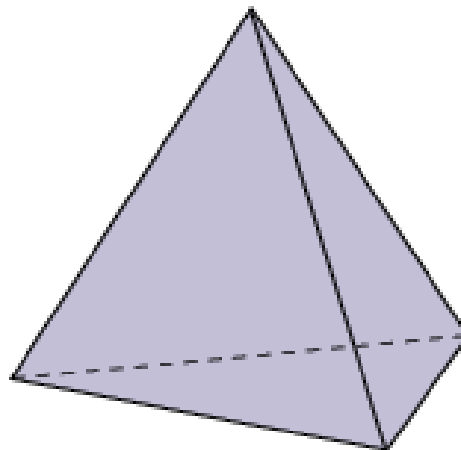
## Poliedros regulares

Um poliedro é regular se, e somente se, forem obedecidas as seguintes condições:

- suas faces são polígonos regulares congruentes entre si;
- seus ângulos poliédricos (região limitada por todas as faces que incidem em cada vértice) são congruentes entre si.

Sendo os poliedros regulares convexos, a relação de Euler é satisfeita e, portanto, são regulares os poliedros de Platão que apresentam faces congruentes e vértices congruentes entre si. Nesse caso, existem cinco, e apenas cinco, tipos de poliedros regulares, sendo o tetraedro um deles, sólido esse que fundamenta a estrutura da pipa tetraédrica que será objeto de estudo na oficina pelos alunos.

**Figura 26** - Tetraedro



Fonte: portalsas.com.br

$m=3$  (vértices triédricos)

$n=3$  (faces triangulares)

$V=4$  (quatro vértices)

$F=4$  (quatro faces)

A pipa tetraédrica é uma excelente aplicação de um dos sólidos de Platão, o *tetraedro*. Trata-se de uma estrutura formada por um grupo de tetraedros menores, que de maneira uniforme sempre formarão um tetraedro maior.

**Figura 27** - Pipa tetraédrica

Fonte: Elaboração própria

Uma atividade lúdica como essa pode contribuir com a aprendizagem do aluno que se identifica com a ideia e se sente desafiado a atingir o resultado final, que seria além de construir a pipa, colocar a mesma pra voar com sua equipe. A motivação em se pensar uma atividade a qual associasse o lúdico com conceitos abstratos, e que fosse capaz de atrair o interesse dos alunos, foi o que motivou a realização da oficina. Sendo possível abordar nessa atividade, diversos conceitos da Matemática, como ponto, reta, plano, vértices, faces, arestas, além de levantar questões de medidas, áreas e volumes. Uma das ideias centrais por trás da oficina era oportunizar aos alunos espaços de construção de saberes, de forma ativa, participante como protagonista, e que pudessem vivenciar o lúdico instigando e promovendo aprendizados. Ainda sendo possível favorecer momentos de interação alunos-alunos e alunos-professor.

**Materiais necessários para sua confecção:****Figura 28** - Materiais pipa tetraédrica

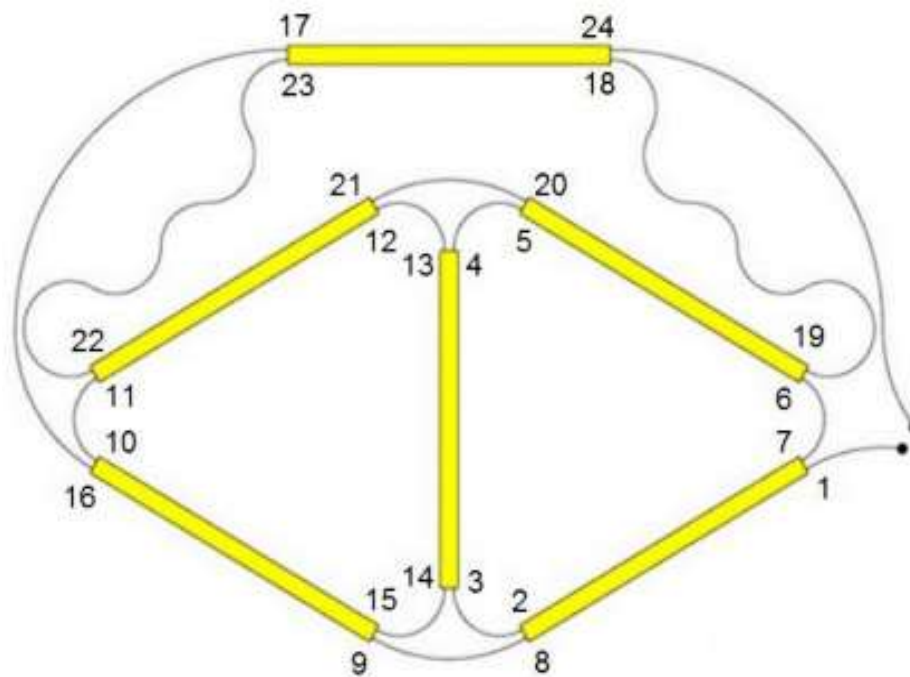
Fonte: Elaboração própria

- 24 canudos de plástico
- linha nº 10
- papel de seda colorido
- cola branca
- Esquema de amarração dos canudos (figura 29)

Iniciamos com uma breve apresentação da oficina aos alunos; questionamos os mesmos se lembram sobre plano, reta, ponto, espaço, geometria plana e espacial, poliedros, tetraedros, vértices, faces e arestas, etc.; construímos exemplares da pipa, em meio a discussões e reflexões; abordamos possíveis experiências com aquele material; aplicamos um questionário avaliativo-reflexivo. Os materiais de uso para montagem de cada pipa foram: 24 canudos por pipa, linha de pipa, folhas de seda coloridas, cola branca.

Cada equipe recebe o material citado acima, além de um esquema de montagem da pirâmide impresso, para que os mesmos possam se orientar como com um único pedaço de linha consigam amarrar todo o tetraedro.

**Figura 29** - Esquema de amarração dos canudos



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog>

Para a realização da oficina, dispomos cerca de 4 pirâmides prontas a fim de agilizar o processo, que é trabalhoso, e tendo em mente que a montagem da pirâmide é um pouco complicada. Foram impressos vários esquemas como esse da Figura 29 e distribuídos para as equipes; esquema esse que considerei muito útil também em outros aspectos como raciocínio lógico, estratégia e paciência.

De início, construímos uma pipa junto com os alunos, tomando a frente; em seguida, os alunos foram convidados a construírem sem nosso auxílio. O desempenho dos alunos foi bom, pois conseguiram aprender rápido o passo a passo da pipa e se divertiram no momento da construção. Não foi possível seguir fielmente o roteiro elaborado, porém conseguimos abordar todos os elementos propostos.

**Figura 30** - Aluno prendendo canudos



Fonte: Elaboração própria

Na Figura 30 temos um aluno finalizando o tetraedro, passando a linha pelos canudos segundo o esquema da Figura 29; na sequência na Figura 31, temos alunos colando papel de seda em apenas duas das faces do tetraedro.



**Figura 31** - Aluna colando papel de seda



Fonte: Elaboração própria

Acredito que nossos objetivos com a oficina foram alcançados, sobretudo pelas ricas observações de interação entre os alunos e perceber como eles se sentiram motivados e envolvidos com a atividade. Foi de grande valia, principalmente, a participação colaborativa de dois alunos que se dispuseram a nos ajudar, pois nos fez perceber que os nossos objetivos de promover a interação entre os alunos e despertar o interesse teriam sido alcançados. Observamos alunos dispostos a ensinar os demais colegas a construir a pipa e a analisar questões de geometria que iam surgindo.

Conseguimos observar que envolver situações matemáticas com material lúdico é possível; de acordo com o que analisamos nas respostas dos questionários; os próprios alunos acham que ensinar Matemática com dinâmicas e oficinas faz com que eles aprendam com mais facilidade e interesse, visto que eles podem associar isso com a realidade no cotidiano. Além do aprendizado relatado pelos alunos, destacamos que os próprios alunos contribuíram com a aprendizagem de seus colegas, estabelecendo um processo de partilha de conhecimentos.

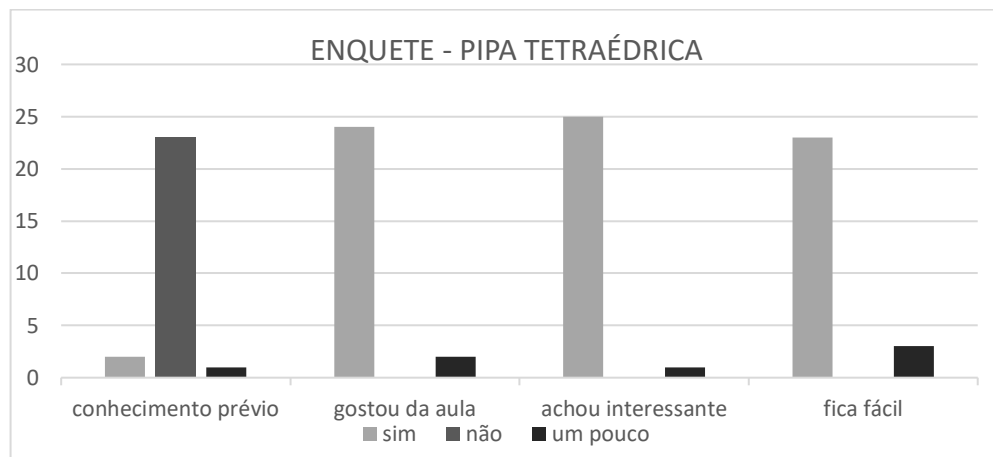
Contudo, é visível que existe certa dificuldade por parte dos alunos em associar conceitos básicos da geometria em situações mais concretas, o que denuncia que é necessário estabelecer a conexão entre os saberes trazidos pela escola e o mundo que nos cerca. Isso nos motiva a criar mais atividades voltadas para o ensino utilizando materiais lúdicos, buscando deixar mais natural aos alunos identificar e relacionar saberes, pois a partir do momento que os alunos podem manusear os objetos, eles são incentivados a absorver e aprender, sendo por esses materiais atraídos e motivados.

### Relatórios e enquetes sobre a atividade:

Foi realizada uma enquete, disponível no Anexo B, onde os alunos responderam se tinham conhecimento prévio do conteúdo explorado, o que os mesmos acharam de ir a campo fazer medições e na sequencia realizar os devidos cálculos e se eles consideram relevantes estudar com práticas de laboratório.

Das enquetes respondidas tem-se que:

**Gráfico 2** - Enquete: Pipa tetraédrica



Fonte: Elaboração própria

De acordo com os resultados estatísticos temos que mais de 88% não tinha nenhum conhecimento sobre o conteúdo e quanto a gostar da aula, achar interessante e fácil temos quase 92% em média dos alunos entrevistados. Foram entrevistados 26 anos.

#### 4.3. OFICINA 03 - REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS USANDO TESSELAÇÃO

Segundo Leitão (2015), as tesselações estão presentes na história da humanidade desde quando o homem começou a cobrir os pisos e paredes de suas casas com pedras. As mais antigas peças de ladrilho conhecidas datam de 5000 anos a.c e foram encontradas no Egito. Os Romanos e outros povos mediterrâneos retratavam pessoas e animais em suas decorações com mosaicos. Os árabes, por motivos religiosos, não utilizavam a figura humana ou animal em seus mosaicos introduzindo aí os formatos geométricos em seus luxuosos arabescos. Na maioria dessas aplicações o que mais interessava era a estética, as análises matemáticas dessas estruturas é algo bem recente, sendo iniciado por volta de 1600 pelo astrônomo Joannes Kepler, o primeiro a estudar pavimentações do plano.

Com o passar do tempo o emprego das tesselações vem deixando de ter apenas caráter estético e tem se tornado mais abrangente no campo da ciência com aplicação, por

exemplo, em problemas de empacotamento esférico, nos tecidos celulares de plantas e animais, nas estruturas cristalinas, na criação de códigos corretores de erros e criptografias, impressão em 3D de próteses humanas e nas engenharias e arquitetura em decorações de ambientes, seja em pisos, paredes ou objetos decorativos.

#### 4.3.1. Tesselações na natureza

A matemática é uma ciência que busca a compreensão das leis que regem a natureza, e a simetria é uma das características analisadas que mais chama atenção do homem, pela harmonia e beleza. A simetria ou assimetria das tesselações são comuns em plantas como na casca do abacaxi e das pinhas, e em animais recobertos por uma pele toda segmentada com peças que se encaixam harmonicamente umas nas outras como podemos perceber nas escamas do peixe, no casco do jabuti e do tatu, na pele do jacaré e da girafa e nas colmeias de algumas abelhas.

**Figura 32** - Tesselações na natureza



Fonte: <https://br.pinterest.com>

**Figura 33** - Tesselação nos animais



Fonte: <https://br.pinterest.com>

**Figura 34 - Isometria da colmeia**



Fonte: <https://br.pinterest.com>

#### **4.3.2. Tesselações nas artes**

Tesselações nas artes está associada a mosaico, que consiste no recobrimento de superfícies com ladrilhos como na Figura 35, pedras, tacos de madeira ou outros revestimentos. Essa arte é uma técnica antiga presente nas civilizações assíria, babilônia, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões presentes em pisos, tetos e painéis de parede atestando a relação entre padrões e arte da decoração. Utilizada ainda hoje, com finalidade decorativa, essa técnica é encontrada em pisos, paredes, quadros, tapetes, tampos de mesa, entre outros.

**Figura 35 - Mosaico sol**

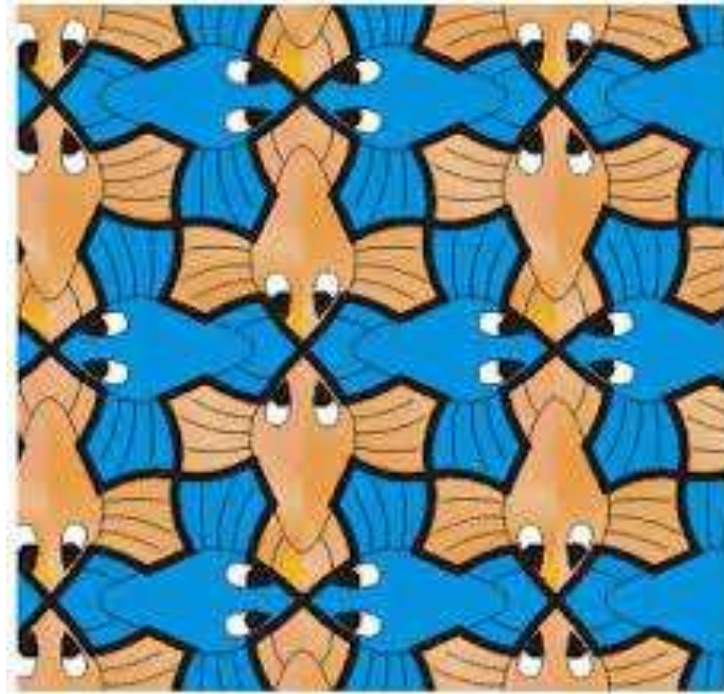


Fonte: <https://br.pinterest.com>

Maurits Cornelis Escher é um dos artistas gráficos mais famosos do mundo, ele explorou em algumas de suas obras Tesselações com figuras curiosamente matemáticas. A obra

de Escher é um exemplo concreto de como as imagens podem facilitar a compreensão de assuntos aparentemente complexos. Através das suas pavimentações como na Figura 36, ele consegue exemplificar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões, tornando-as mais simples aos nossos olhos.

**Figura 36** - Obra de Escher



Fonte: <http://www.mcescher.com/>

### 4.3.3. Tesselações no plano euclidiano

Tesselar o plano euclidiano significa cobri-lo com figuras que se encaixem perfeitamente não havendo sobreposições, nem espaços vazios entre elas, de modo que a superfície particionada seja igual ao tamanho total. Com isso alguns conceitos básicos como polígonos, vértices, lados, ângulos internos, polígonos convexos e regulares e transformações geométricas serão provavelmente redefinidos.

As transformações geométricas quando geram figuras congruentes, conservando características como medidas de ângulos, área e dimensões são chamadas de isometrias; e quando a imagem gerada é semelhante a inicial, sendo uma redução ou uma ampliação da mesma, chama-se homotetia. Ressaltaremos aqui somente as isometrias.

São isometrias euclidianas as reflexões, as rotações e as translações.



## Reflexão

A simetria de reflexão, também conhecida como axial, acontece por meio de uma reta chamada eixo de simetria, onde os pontos da figura original e seus correspondentes na figura refletida têm a mesma distância até o eixo. Podemos observar esse tipo de simetria facilmente na natureza e na arquitetura, por exemplo.

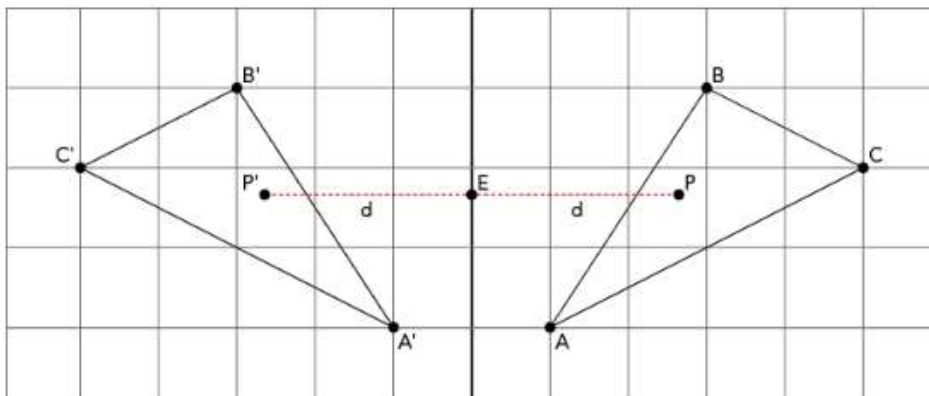
**Figura 37** - Simetria da borboleta



Fonte: <https://livrosdigitais.portalsas.com.br>

Na Figura 38, o  $\triangle A'B'C'$  foi obtido do  $\triangle ABC$  por meio de uma reflexão em relação ao eixo na vertical. Qualquer ponto  $P$  do  $\triangle ABC$  tem um correspondente  $P'$  no  $\triangle A'B'C'$ .

**Figura 38** - Reflexão



Fonte: [portalsas.com.br](http://portalsas.com.br)

O ponto  $P'$  é a imagem de  $P$  por reflexão em relação ao eixo vertical, e ambos estão à mesma distância desse eixo. Portanto,

$$PE \cong P'E, AB \cong A'B, AC \cong A'C' \text{ e } BC \cong B'C'$$

## Rotação

A simetria por rotação acontece quando um giro orientado de uma figura é realizado em torno de um ponto chamado centro de rotação. A rotação também produz figuras simétricas como no caso de uma flor e um floco de neve, por exemplo.

**Figura 39** - Flocos de neve com rotação de  $60^\circ$



Fonte: <https://livrosdigitais.portalsas.com.br>

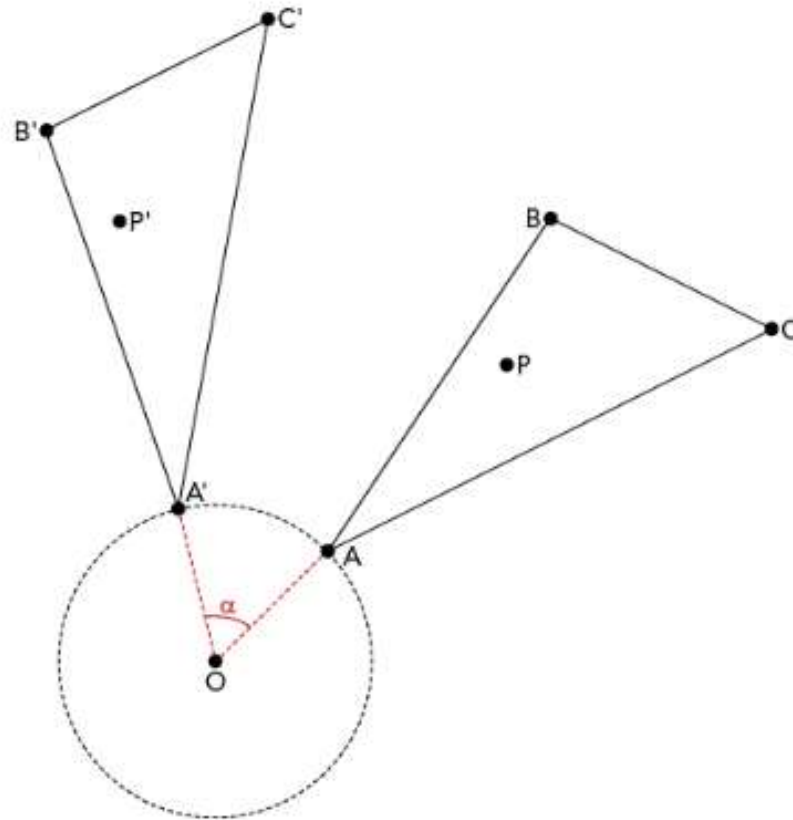
**Figura 40** - Flor com cinco eixos de simetria cuja rotação é de  $72^\circ$



Fonte: <https://livrosdigitais.portalsas.com.br>

Na Figura 41, o  $\triangle A'B'C'$  foi obtido do  $\triangle ABC$  por meio de uma rotação em torno do ponto  $O$  no sentido anti-horário. Qualquer ponto  $P$  do  $\triangle ABC$  tem um correspondente  $P'$  no  $\triangle A'B'C'$ . Seja qual for o ponto da figura, temos que:

Figura 41 - Rotação



Fonte: <https://livrosdigitais.portalsas.com.br>

$$\angle P\hat{O}P' = \angle A\hat{O}A' = \angle B\hat{O}B' = \angle C\hat{O}C' = \alpha$$

## Translação

A simetria por translação se assemelha a uma espécie de movimento da figura sobre uma reta em determinada direção, sem que ela seja alterada. A translação pode ser observada com frequência nas artes, a exemplo de vasos de cerâmica e grafismos indígenas.



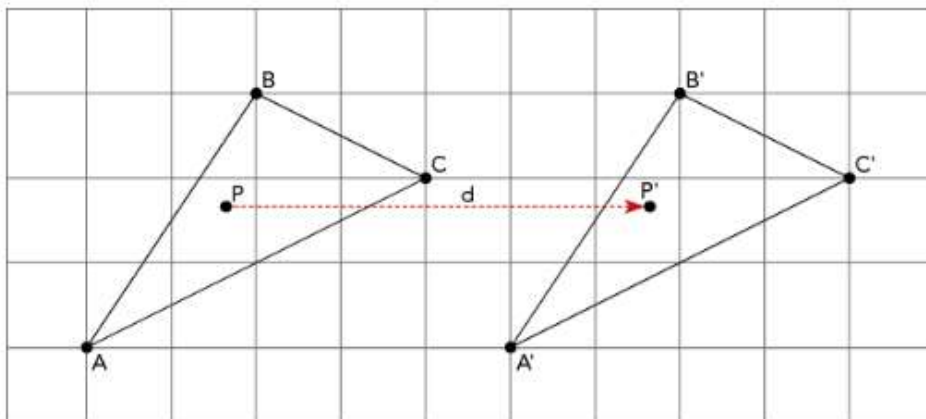
**Figura 42** - Artesanato indígena



Fonte: [https://www.artesol.org.br/doca\\_leite](https://www.artesol.org.br/doca_leite)

Na Figura 43, o  $\triangle A'B'C'$  foi obtido do  $\triangle ABC$  por meio de uma translação na qual o ponto P se move em linha reta até o ponto P'. O vetor de módulo  $d$  indica a direção (horizontal) e o sentido (da esquerda para a direita). Os pontos P e P' são extremos de um segmento orientado de P para P', cuja distância é  $d$ .

**Figura 43** - Translação



Fonte: <https://livrosdigitais.portalsas.com.br>

A distância entre pontos correspondentes é sempre a mesma. Na Figura 43, chegamos à conclusão de que:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow PP' = AA' = BB' = CC' = d$$

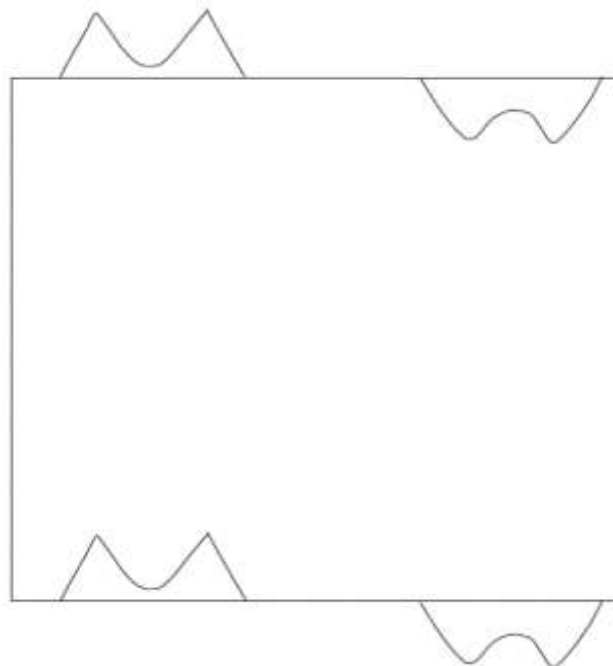
#### 4.3.4. Técnicas de Tesselação

Pavimentações são formas repetidas de ladrilhos e podem ser feitas usando várias formas de base. As formas comuns usadas são triângulos equiláteros, losangos e quadrados. A forma da base deve se encaixar bem, sem espaços entre as peças individuais.

Para de ter êxito na confecção da tesselação é necessário entender como os desenhos podem se encaixar perfeitamente evitando a superposição e os espaços vazios; a seguir descreveremos tais etapas na confecção de um exemplar que formam gatos.

**Etapa 01:** selecione a forma do ladrilho base

**Figura 44** - Passo 01: Tesselação

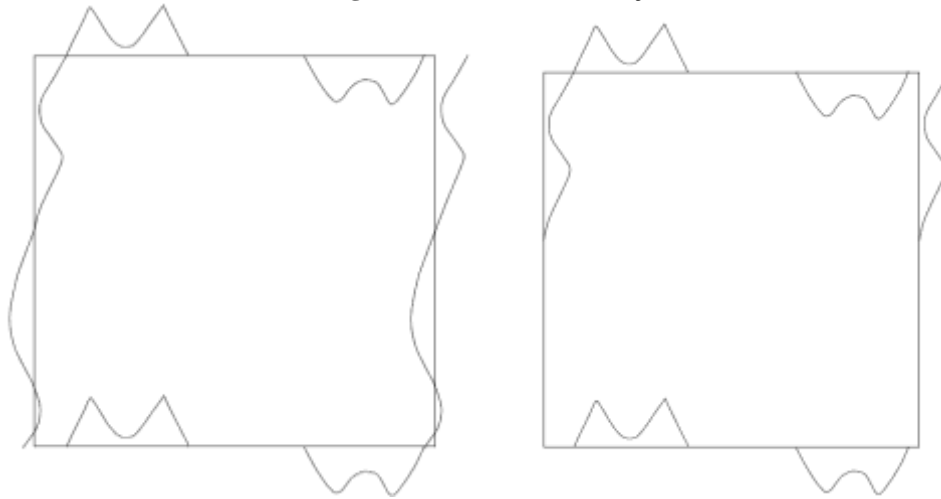


Fonte: <https://br.pinterest.com/rajindrasingh/tesselation>

- Use uma forma de base quadrada.
- Modifique o quadrado usando a técnica da translação - removendo uma parte de um lado da forma base e deslizando para o lado oposto.
- Desenhe orelhas de gato na parte inferior e deslize as formas da orelha até o topo do quadrado = translação.
- Para se ter dois tipos diferentes de gatos; desenhe um par de orelhas de cabeça para baixo e deslize até o fundo do quadrado. O segundo par de orelhas se tornará um gato magro.

### Etapa 02: moldando as laterais do gato

**Figura 45** - Passo 2: Tesselação

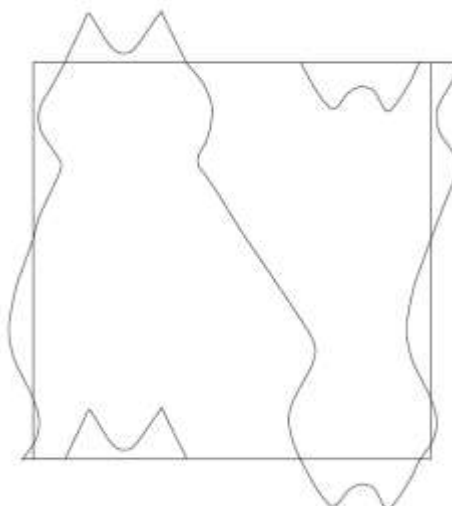


Fonte: <https://br.pinterest.com/rajindrasingh/tesselation>

- Depois de colocar as orelhas, selecione as partes dos lados do quadrado para formar parte de uma silhueta de gato (contorno).
- Desenhe um lado da cabeça do gato gordo e deslize ou transfira-o para o outro lado do quadrado, onde se tornará a perna do gato magro de cabeça para baixo.
- Desenhe o lado do gato gordo e deslize-o para se tornar o lado da cabeça do gato magro.

### Etapa 03: finalize as formas de gato

**Figura 46** - Passo 3: Tesselação



Fonte: <https://br.pinterest.com/rajindrasingh/tesselation>

- Desenhe o lado restante dos gatos - fica no centro do quadrado. A curva superior define a cabeça do gato gordo e o flanco do gato magro. A curva Inferior define o flanco do gato gordo e a cabeça do gato magro.
- Feche a parte inferior das patas dianteiras do gato.
- Corte formas de gato no material desejado.

#### Etapa 04: Decore os Gatos

Figura 47 - Gatos



Fonte: <https://br.pinterest.com/rajindrasingh/tesselation>

#### Etapa 05: Método alternativo para mosaico

Figura 48 - Silhueta gatos



Fonte: <https://br.pinterest.com/rajindrasingh/tesselation>

Se você não gosta de desenhar, mas prefere tesouras, pode pegar um quadrado de cartolina e literalmente cortar partes de um lado e prendê-las com fita adesiva no outro lado do quadrado.

#### **Materiais necessários na Oficina:**

- Papelão ou cartolina;
- Fita crepe;
- Tesoura;
- Lápis comum;
- Pincéis;
- Tinta PVA de artesanato;



**Figura 49** - Alunos produzindo “tesselação” por rotação



Fonte: Elaboração própria

Representar objetos de três dimensões em um plano bidimensional utilizando ainda a técnica da “*tesselação*” e, a partir das projeções, determinar distâncias, ângulos, áreas e volumes em suas verdadeiras grandezas. Na Figura 49 alunas fazendo preenchimento do mosaico que foi construído por rotação em torno de um ponto.

O ensino de geometria descritiva é fundamental para a arquitetura, a engenharia, o design de interiores e o design de produtos; quanto maior for o seu conhecimento, mais poderá ser extraído dos programas de CAD e das modelagens em 3D, que exigem o domínio de medidas, curvaturas e ângulos exatos.

Dentro dos cursos de artes visuais, ela tem o intuito de desenvolver a habilidade espacial dos alunos e, conseqüentemente, exercitar o hemisfério direito do cérebro. Muitos cursos superiores de design gráfico, ao reformarem suas grades (estruturas) curriculares, têm eliminado a geometria descritiva, substituindo-a por disciplinas mais condizentes com outras funções específicas, como ilustrações digitais e softwares artísticos de modelagem tridimensional, uma vez que estes podem não requerer precisão geométrica.

A modelagem tridimensional comporta, em seu entendimento e construção, os conceitos da geometria descritiva. Para gerar maquetes virtuais de qualidade, é necessário o conhecimento de conteúdo específicos da geometria descritiva, como, por exemplo, a localização de pontos através de coordenadas (X, Y, Z) em suas formas absolutas ou relativas.

Os alunos num primeiro momento, divididos em equipes, confeccionam no papelão o molde do desenho escolhido, depois de tudo medido e conferido, reproduzem o mesmo na parede e em seguida irão pintar o 3D, percebendo assim de que maneira as dimensões se apresentam corretamente. Na Figura 50 alunos finalizando mosaico feito por translação.

**Figura 50** - Alunos produzindo tesselação por translação



Fonte: Elaboração própria

Nossos objetivos com a oficina foram alcançados, sobretudo pelas ricas observações de interação entre os alunos sendo possível perceber como eles se sentiram motivados e envolvidos com a atividade. Observamos alunos dispostos a ensinar os demais colegas, melhorando assim as relações entre eles e tornando o ambiente agradável e participativo.

Ensinar Matemática com arte faz com que eles aprendam com mais facilidade e interesse, visto que eles podem associar isso com a realidade no cotidiano. Além do aprendizado relatado pelos alunos, destacamos que os próprios alunos contribuíram com a aprendizagem de seus colegas, estabelecendo um processo de partilha de conhecimentos.

Existe certa dificuldade por parte dos alunos em associar conceitos básicos da geometria em situações mais concretas e na arte, o que denuncia que é necessário estabelecer a conexão entre os saberes trazidos pela escola e o mundo que nos cerca.

#### 4.3.5. Etapas oficina Tesselação:

**Passo 01:** Alunos divididos em equipes iniciando marcações

**Figura 51** - Alunos iniciando silhuetas

Fonte: Elaboração própria





**Passo 02:** Preenchimento da area definida**Figura 52** - Alunos preenchendo suas tesselações

Fonte: Elaboração própria

**Passo 03:** Fazer acabamentos e retirar fita crepe**Figura 53** - Acabamento de painéis tesselação

Fonte: Elaboração própria



#### 4.3.6. Alguns outros trabalhos finalizados pela turma

**Figura 54 - Trabalhos finalizados pela turma B**



Fonte: Elaboração própria

**Figura 55 - Trabalhos finalizados pela turma A**



Fonte: Elaboração própria

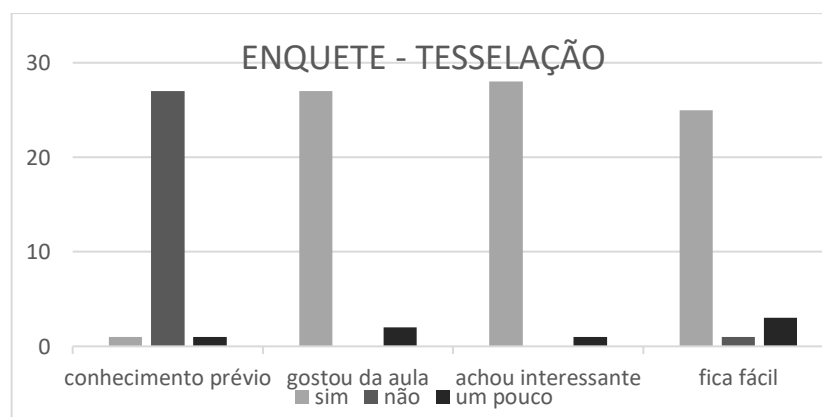
Na Figura 55 temos mosaicos variados, usando técnicas aprendidas e testadas nas aulas, vale ressaltar que a tesselação permite que o aluno crie e desenvolva suas próprias silhuetas, podendo assim explorar elementos da natureza como folhagens e florais e elementos da própria geometria como cubos e sólidos diversos.

### Relatórios e enquetes sobre a atividade:

Foi realizada uma enquete, disponível no Anexo C, onde os alunos responderam se tinham conhecimento prévio do conteúdo explorado, o que os mesmos acharam de ir a campo fazer medições e na sequência realizar os devidos cálculos e se eles consideram relevantes estudar com práticas de laboratório.

De acordo com a enquete realizada:

Gráfico 3 - Tesselação



Fonte: Elaboração própria

De acordo com os resultados estatísticos temos que mais de 93% não tinha nenhum conhecimento sobre o conteúdo e quanto a gostar da aula, achar interessante tivemos uma média de 94% e temos quase 86% dos alunos entrevistados que consideram fácil. Foram entrevistados 29 alunos.

#### 4.4. OFICINA 04 – ESPIRAL PITAGÓRICO

##### A lenda do espiral

Surgiu entre os estudiosos da espiral uma curiosidade, porque que Teodoro não prolongou a espiral além da raiz quadrada de 17?

Paul Naim (1998),

“defende a ideia de que não havia necessidade, pois haveria apenas mais voltas seguindo a mesma estrutura com elementos já definidos”. Já Van Der Waerden (1961), “pensava que Teodoro haveria apresentado de forma geométrica, cada caso

separadamente, o primeiro até  $\sqrt{17}$ , e o segundo caso  $\sqrt{18}$ , percebido assim que o caso  $(\sqrt{18})^2$ . Ainda uma terceira teoria levantada seria de que Teodoro não teria condições de encontrar uma espiral perfeita, já que a espiral não fecha na primeira volta.” (Paul Naim, 1998)

A partir do 9º ano, o aluno tem contato com radiciação e teorema de Pitágoras, podendo nesse momento se aprender melhor conhecimentos aritméticos e algébricos, usados nas simplificações de raízes, geometricamente com a simples abordagem da espiral de Teodoro. Em seguida se faria o desdobramento de outros assuntos, como proporcionalidade entre algumas raízes e estudo da irracionalidade de algumas raízes quadradas.

Ainda os alunos poderão perceber que apesar da  $\sqrt{2}$  ser irracional, sendo infinito e não periódico, ela tem um tamanho determinado em qualquer unidade de comprimento escolhida.

Para ensino médio é possível mostrar a distribuição de números irracionais, referentes a raízes quadradas, ao longo da reta numérica real, fazendo uso do rebatimento da hipotenusa sobre a reta. Podendo também se abordar a geometria.

A construção manual da espiral é de fácil entendimento, muito embora, o processo requeira alguma paciência e bom uso do material, no nosso caso palitos de picolé e fita crepe. A construção da espiral pitagórica ou de raízes quadradas, como é chamada por alguns autores, recebe tal denominação pois ela é construída pela montagem consecutivas e pode ser apresentado como  $(\sqrt{17})^2 + (\sqrt{1})^2$ .

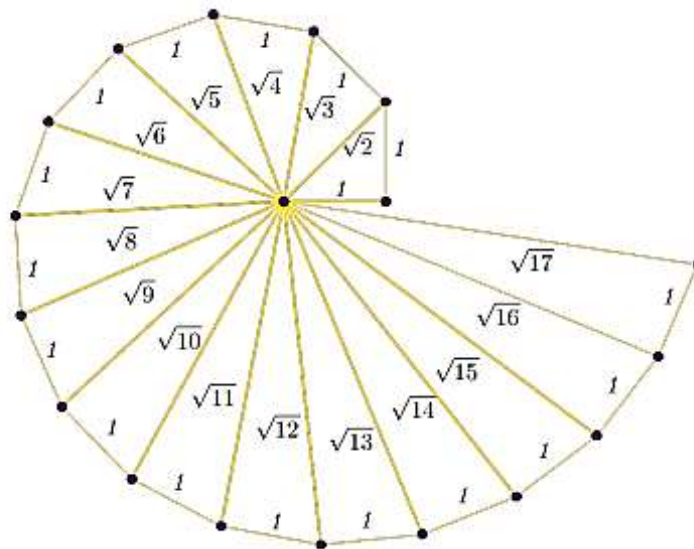
#### **Material necessário na Oficina:**

- Palitos de picolé
- Cola quente
- Tinta PVA de artesanato
- Fita crepe.

#### 4.4.1. Uso didático da espiral de Teodoro

Podemos construir a espiral de Teodoro através dos seguintes passos:

**Figura 56** - Espiral de Teodoro



Fonte: Gonçalves Jr (2015)

**Passo 01:** Escolhe-se um tamanho qualquer como unidade de comprimento; utilizando 2 palitos de picolé presos nas extremidades. Obtemos o primeiro cateto, que equivale a  $\sqrt{1}$ ;

**Figura 57** - Espiral de Teodoro – passo 01



Fonte: Elaboração própria

**Passo 02:** No final do segmento palito, levanta-se um novo segmento perpendicular, com medida igual à unidade de comprimento escolhida. Obtemos o segundo cateto do primeiro triângulo;

**Figura 58** - Espiral de Teodoro – passo 02



Fonte: Elaboração própria

**Passo 03.** Fechamos o triângulo, traçando a hipotenusa agora com 3 palitos presos nas extremidades, obtemos um segmento cujo comprimento é  $\sqrt{2}$ ;

**Figura 59** - Espiral de Teodoro – passo 03



Fonte: Elaboração própria

**Passo 04:** Levanta-se um novo segmento perpendicular à hipotenusa do primeiro triângulo, e com medida igual à unidade de comprimento adotada;

**Figura 60** - Espiral de Teodoro – passo 04



Fonte: Elaboração própria

**Passo 05:** Fechamos o segundo triângulo, e essa hipotenusa equivale a  $\sqrt{3}$ ;

**Figura 61** - Espiral de Teodoro – passo 05



Fonte: Elaboração própria

**Passo 06:** Agora, basta repetirmos os passos 4 e 5, várias vezes.

**Figura 62** - Espiral de Teodoro inacabado



Fonte: Elaboração própria



**Figura 63** - Espiral de Teodoro 1



Fonte: Elaboração própria

Nas Figuras 63 a 66 temos espirais finalizadas pelas turmas, onde podemos perceber a perfeição nos acabamentos, sem mencionar a satisfação dos alunos em aprender o conteúdo de uma forma tão diferente.

**Figura 64** - Espiral de Teodoro 2



Fonte: Elaboração própria



**Figura 65** - Melhor espiral da turma A – 2º ano



Fonte: Elaboração própria

**Figura 66** - Melhor espiral da turma B – 2º ano



Fonte: Elaboração própria

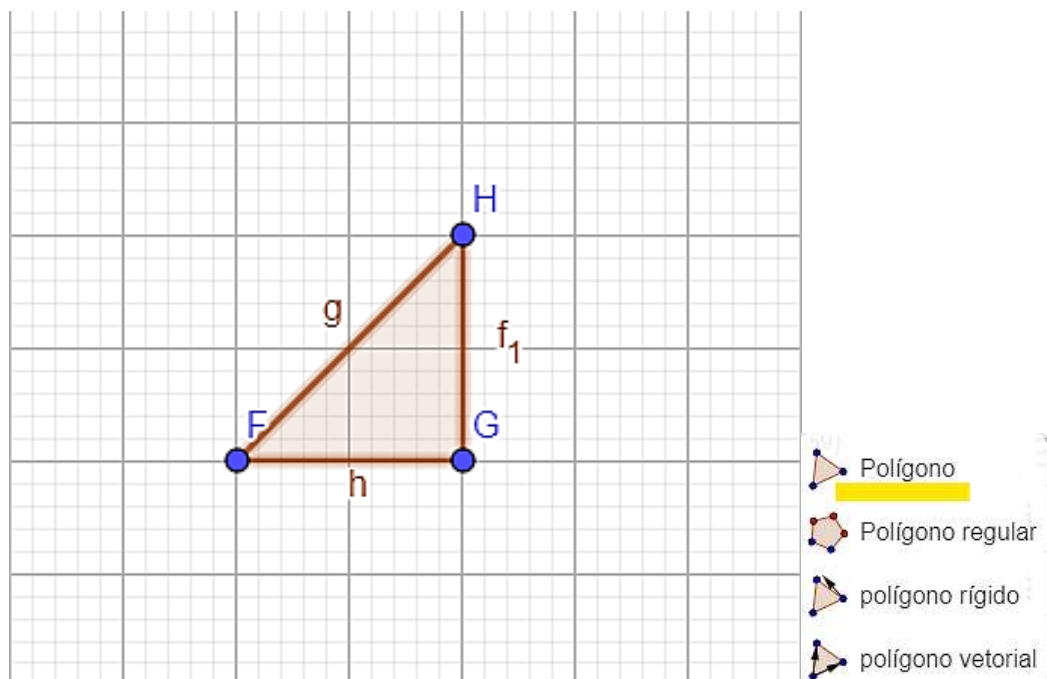
#### 4.4.2. Elementos geométricos na espiral de Teodoro

Podemos observar ainda as estruturas formadas pelos elementos geométricos que podemos obter, por meio do espiral, tais como círculos, triângulos e arcos de circunferência.

##### Atividade 01: Construção da espiral no *Geogebra clássico*

**Passo 01:** Desenhar um triângulo retângulo isósceles usando ferramenta “*polígono*”

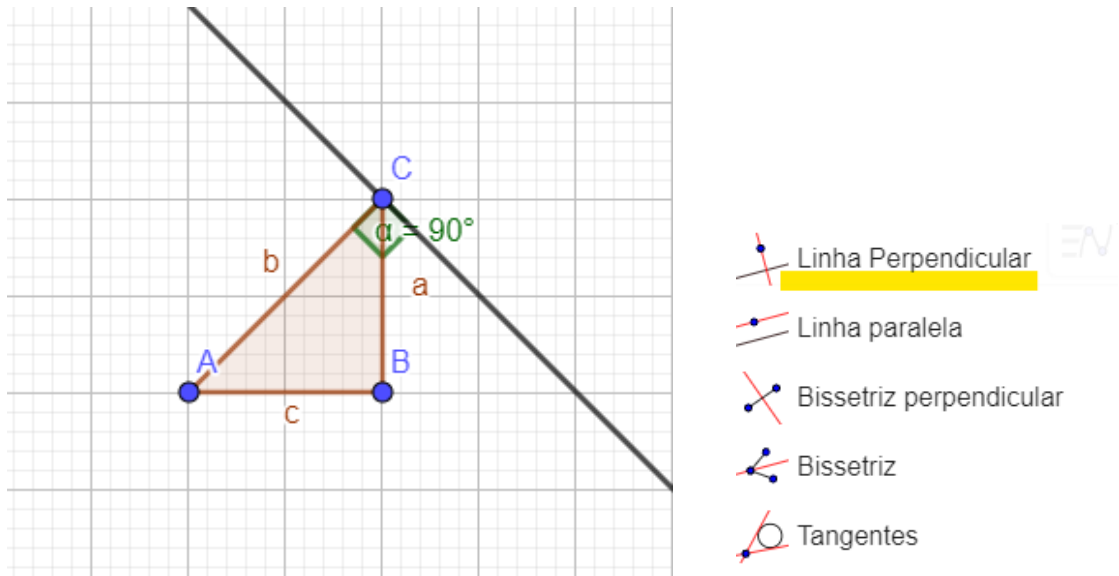
Figura 67 - Passo 01 espiral Geogebra



Fonte: Elaboração própria

**Passo 02:** traçar uma reta perpendicular em C, usando ferramenta “*linha perpendicular*”

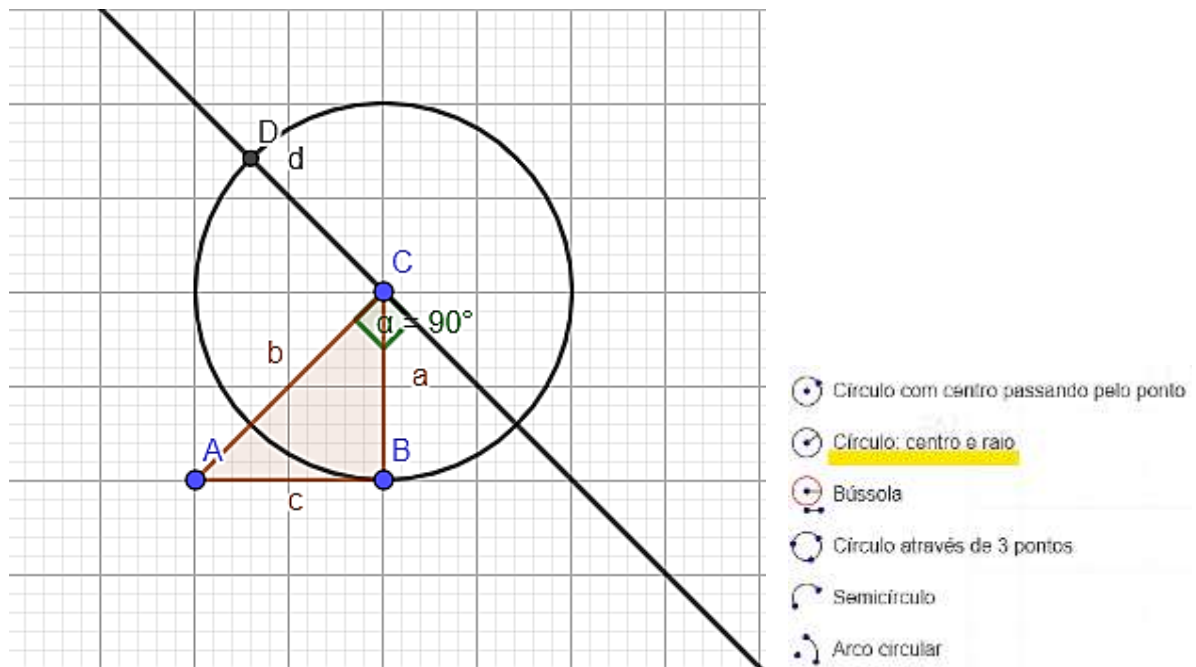
Figura 68 - Passo 02 espiral Geogebra



Fonte: Elaboração própria

**Passo 03:** Traçar a perpendicular em C, usando a ferramenta “círculo: centro e raio”.

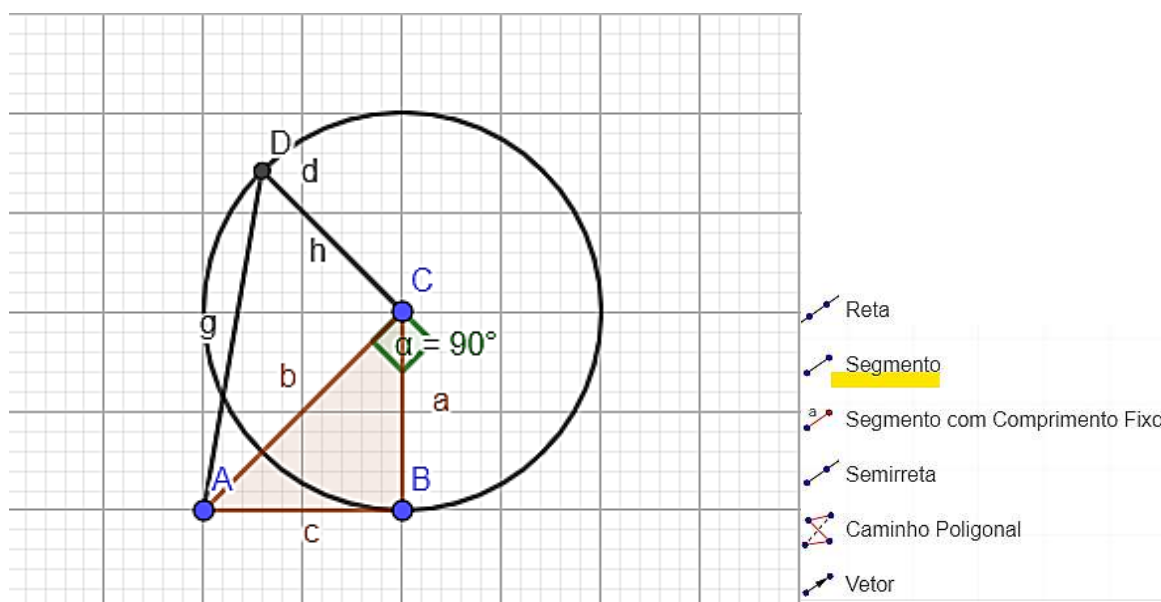
Figura 69 - Passo 03 espiral Geogebra



Fonte: Elaboração própria

**Passo 04:** Fechar o polígono ACD, usando a ferramenta “Segmento”.

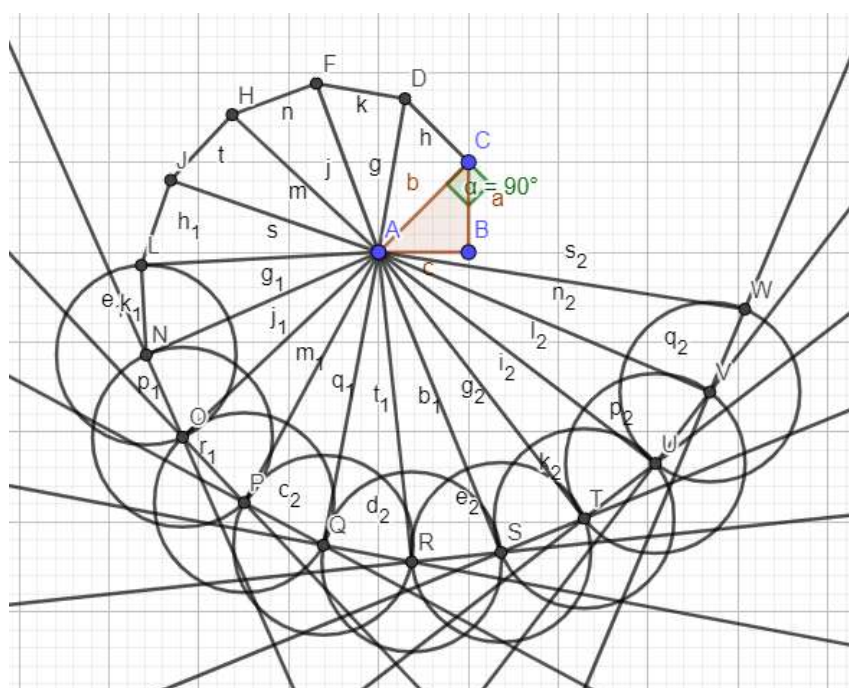
**Figura 70** - Passo 04 espiral Geogebra



Fonte: Elaboração própria

**Passo 05:** Repetir passos 3 e 4 sucessivas vezes até espiral fechar.

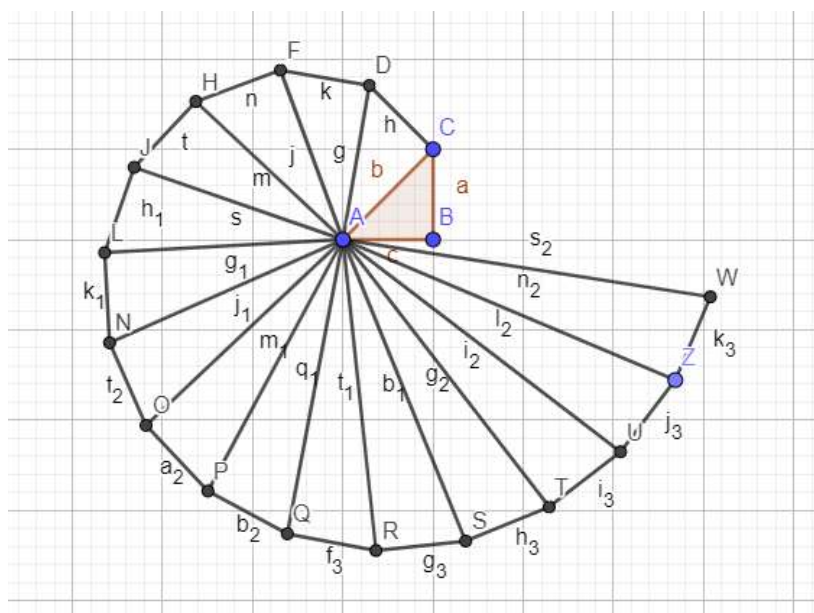
**Figura 71** - Passo 05 espiral Geogebra



Fonte: Elaboração própria

**Passo 06:** Ocultar os círculos e as perpendiculares.

**Figura 72** - Passo 06 espiral Geogebra

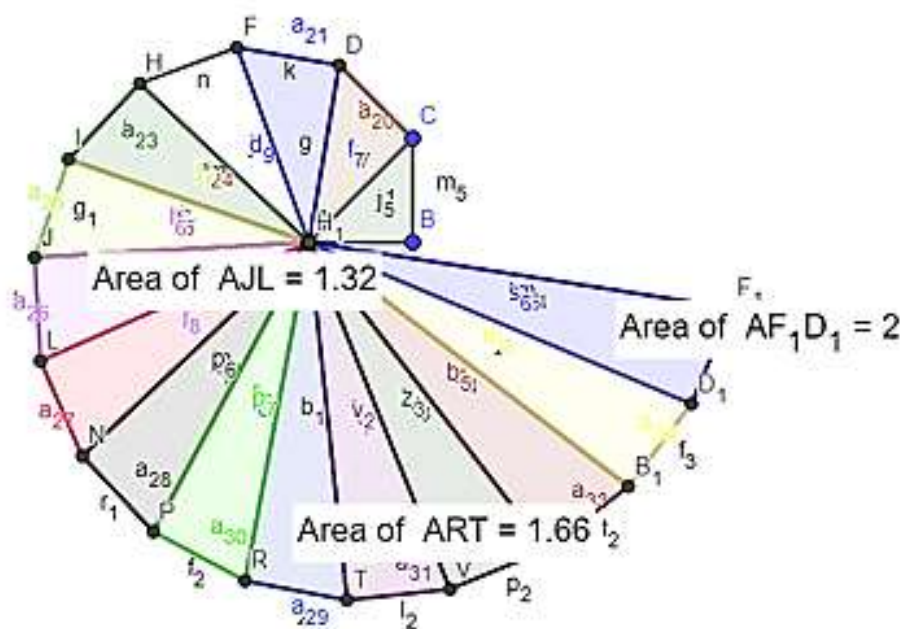


Fonte: Elaboração própria

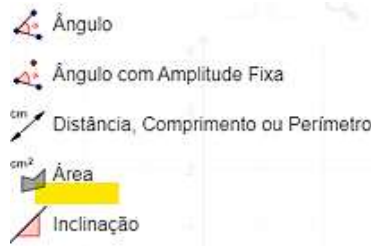
### Atividade 02: Áreas dos triângulos

Calcular as áreas de todos os triângulos construídos, comparando os resultados com as demais equipes. Podemos utilizar o Geogebra para conferir cálculos feitos manualmente.

**Figura 73** - Espiral – áreas de triângulo



“Ferramenta área”



Fonte: Elaboração própria

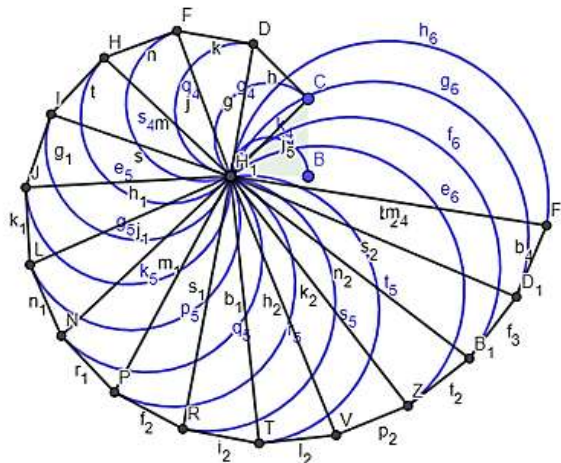
- $S_1 = \frac{(1 \times 1)}{2} = \frac{1}{2} \text{ua}$
- $S_2 = \frac{(\sqrt{2} \times 1)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ua}$
- $S_3 = \frac{(\sqrt{3} \times 1)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ua}$
- $S_4 = \frac{(\sqrt{4} \times 1)}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} \text{ua}$
- $S_5 = \frac{(\sqrt{5} \times 1)}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ua}$
- $S_{Tn} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots S^n$

**Atividade 03: Arcos internos**

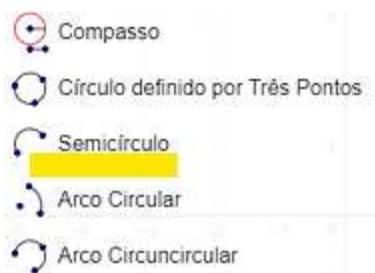
Uma das construções que podemos obter com a espiral são arcos sobre as hipotenusas, formando uma bela estrutura geométrica como se pode observar na figura abaixo.

**Passo único:** utilizando a ferramenta “*semicírculo*” basta seleccionar dois pontos diametralmente

**Figura 74 - Arcos da espiral**



“Ferramenta semicírculo”



Fonte: Elaboração própria

Cada arco é construído em cima das hipotenusas, logo, a medida do raio corresponde a  $\frac{\sqrt{n}}{2}$ , temos que se  $c = 2\pi r$ , então  $c = \pi\sqrt{n}$ .

- Arco 1,  $c = \pi\sqrt{2}$ .
- Arco 2,  $c = \pi\sqrt{3}$ .
- Arco 3,  $c = \pi\sqrt{4}$ .
- Arco 4,  $c = \pi\sqrt{5}$  ... Arco k,  $c = \pi\sqrt{k + 1}$ .

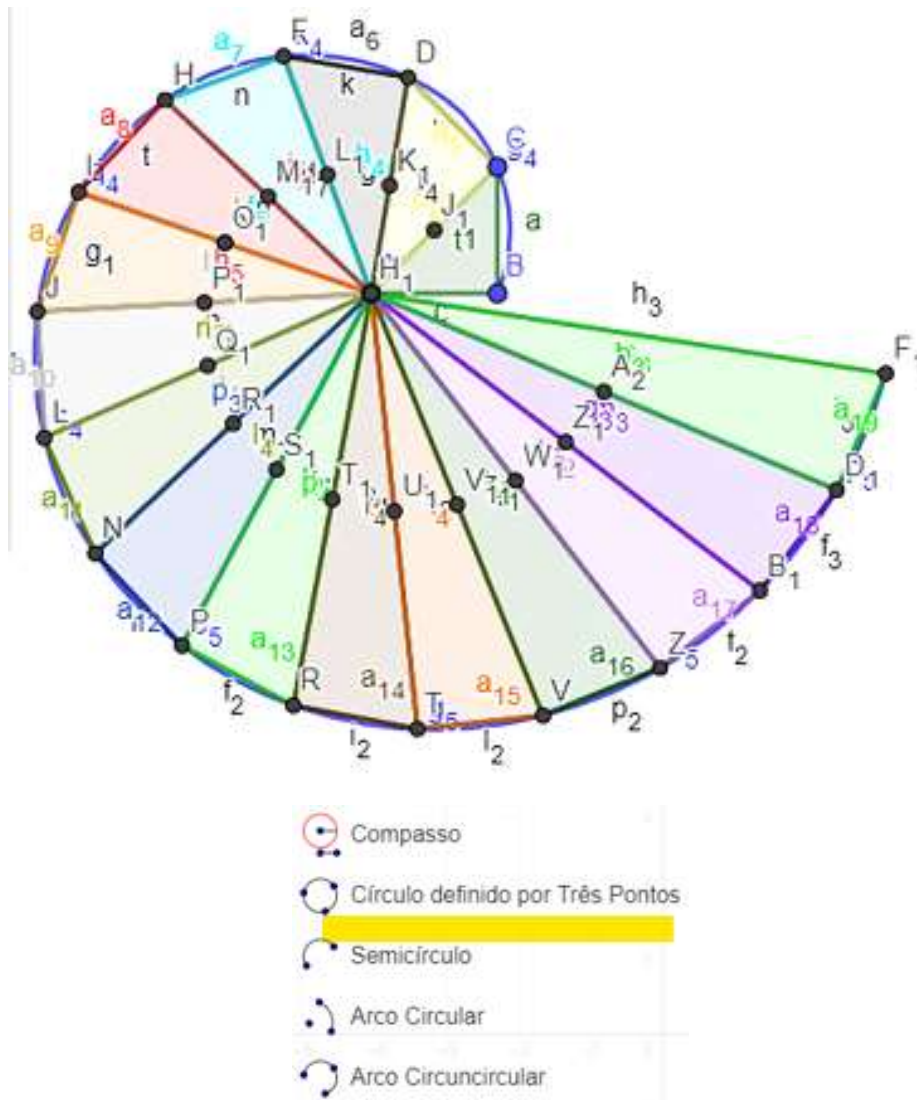
**Atividade 04: Arcos externos**

Um outro arco encontrado que podemos estudar no espiral, é de que a cada três pontos consecutivos, no caso, os vértices externos do triângulo, podemos determinar um arco de uma circunferência cujo comprimento se aproximará de 2.

**Passo 01:** Utilize a ferramenta “círculo definido por 3 pontos” e selecione 3 pontos consecutivos.



**Figura 75 - Arcos da espiral**

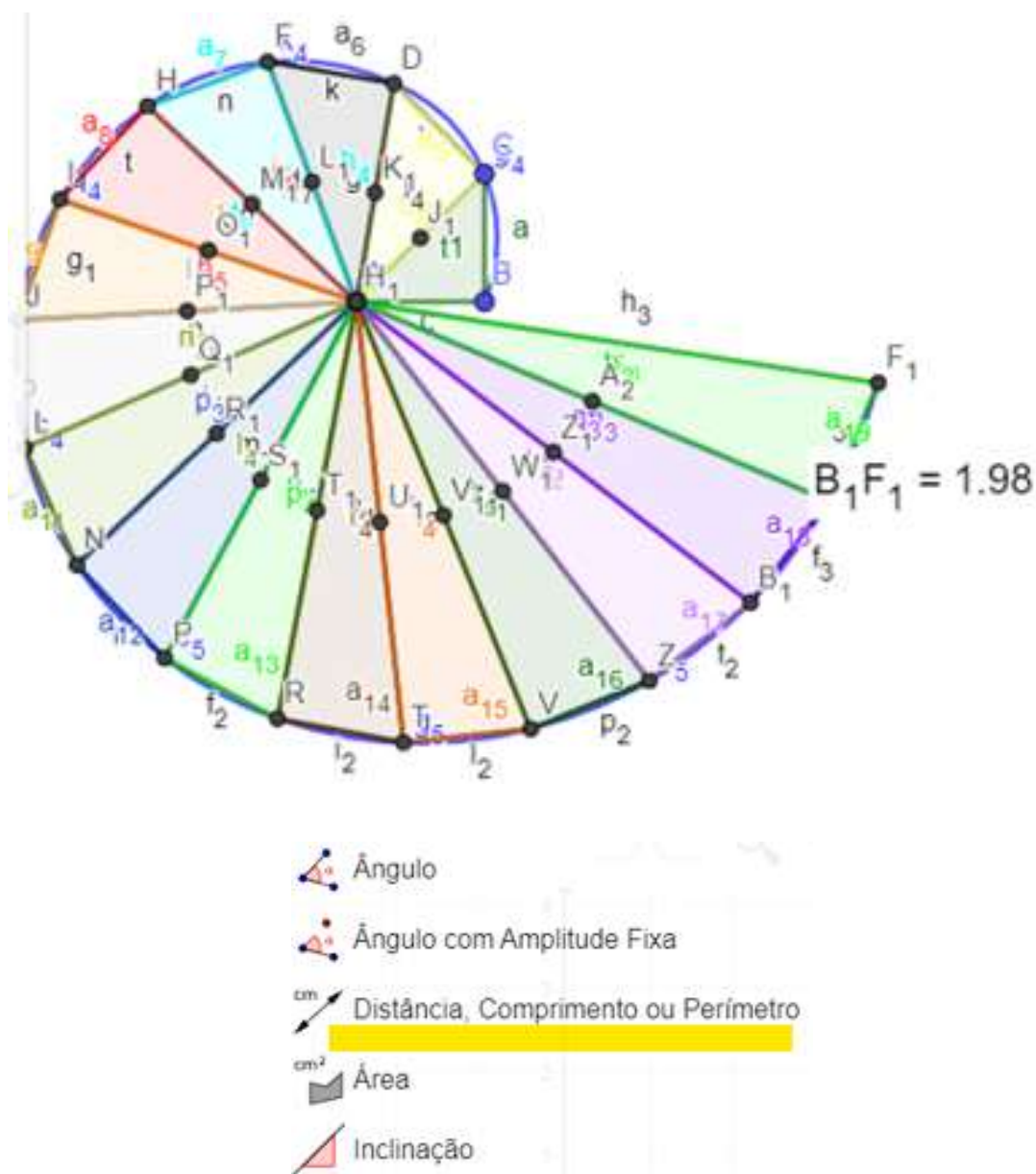


Fonte: Elaboração própria

**Passo 02:** Utilize a ferramenta “distance or length” e confira a distância dos três últimos pontos consecutivos



**Figura 76** - Arcos externos no Geogebra

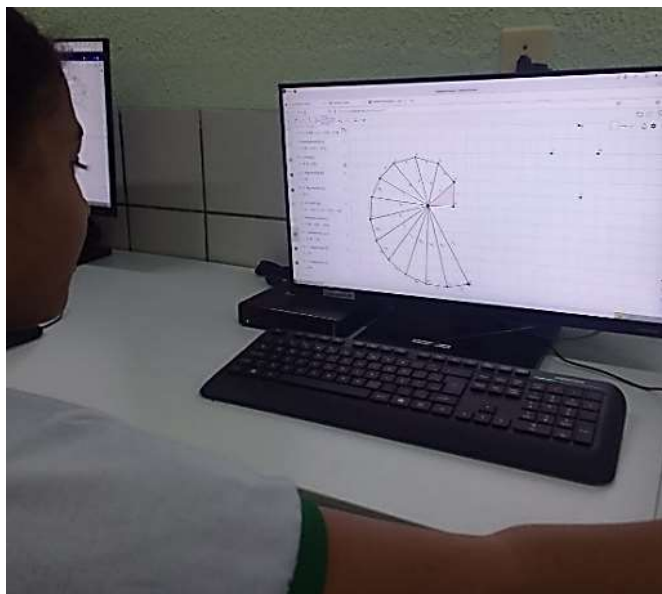


Fonte: Elaboração própria

Como os catetos dos periféricos da espiral têm medidas iguais a unidade de comprimento, é evidente que se continuarmos desenhando a espiral, esses arcos tenderão a ter comprimento iguais a duas unidades.

#### 4.4.3. Alunos utilizando Geogebra

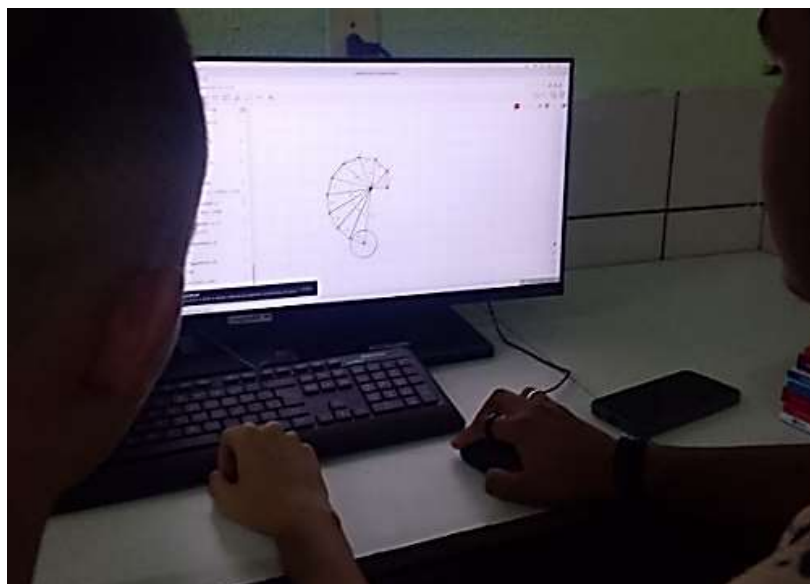
**Figura 77** - Turma A construindo espiral



Fonte: Elaboração própria

Tivemos a oportunidade de levar turma para uma experimentação no laboratório de informática, figuras 77 e 78, onde os mesmos puderam aprender de maneira razoável a construir o espiral no programa Geogebra.

**Figura 78** - Alunos turma B construindo espiral



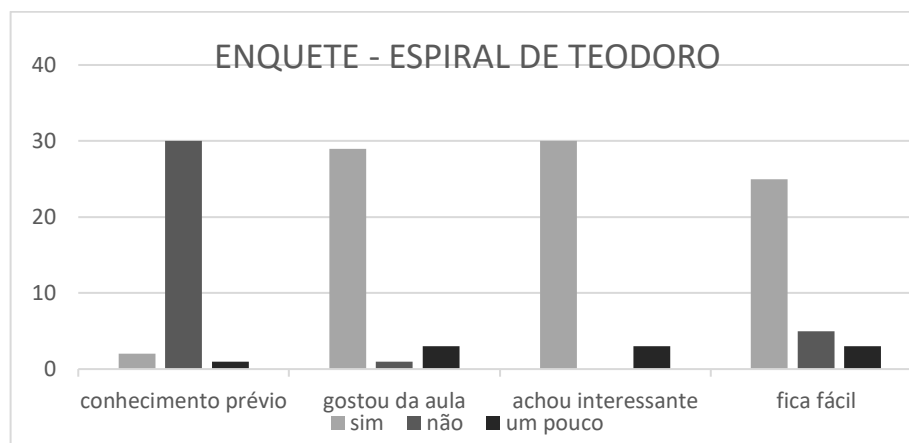
Fonte: Elaboração própria

**Relatórios e enquetes sobre a atividade:**

Foi realizada uma enquete, disponível no Anexo D, onde os alunos responderam se tinham conhecimento prévio do conteúdo explorado, o que os mesmos acharam de ir a campo fazer medições e na sequência realizar os devidos cálculos e se eles consideraram relevantes estudar com práticas de laboratório.

Da enquete realizada, temos que:

**Gráfico 4 - Espiral de Teodoro**



Fonte: Elaboração própria

De acordo com os resultados estatísticos temos que mais de 90% não tinha nenhum conhecimento sobre o conteúdo e quanto a gostar da aula e achar interessante temos os mesmos 90%, porém tivemos em torno de 75% que consideraram fácil. Foram entrevistados 33 alunos.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa realizada teve como objeto de estudo as contribuições do Laboratório de Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. De acordo com as pesquisas, a média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no programa internacional de avaliação de estudantes em 2018 foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos países da organização.

Tentando elevar o interesse, bem como o desempenho dos alunos em Matemática, insere-se a utilização do Laboratório de Ensino de Matemática como uma ferramenta eficiente para esse fim. Desse modo, buscou-se na Literatura as concepções, possibilidades e limitações do Laboratório de Ensino de Matemática e também as próprias práticas realizadas com alunos das turmas que leciono.

Buscou-se investigar a importância e contribuição de um Laboratório de Ensino de Matemática, bem como as potencialidades dos materiais manipulativos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, tendo como foco principal o uso otimizado do laboratório em todas as séries do ensino médio.

Idealizou-se a construção de um laboratório sustentável, onde a maior parte dos materiais utilizados nas oficinas sejam recicláveis, com isso contemplou-se temas transversais como ética, saúde e meio ambiente. As oficinas realizadas foram muito proveitosas e com elas pode-se perceber os prós e contras, mas pode-se dizer que o saldo é positivo, ou seja, temos mais vantagens e benefícios, que prejuízos. A construção dos materiais utilizados pelos próprios alunos é mais interessante, pois proporciona descobertas e caminhos próprios para solucionar os problemas.

Não se acredita que o Laboratório de Ensino de Matemática seja o único caminho nem tão pouco seja a solução para superar todas as dificuldades no ensino e aprendizagem da Matemática, mas entende-se que pode ser um ponto de partida para a aplicação de metodologias alternativas, visando tornar as aulas mais motivadoras e com resultados mais satisfatórios, tornando a aprendizagem significativa e dinâmica. Vale ressaltar que atualmente as distrações com as telas e redes sociais deixam os alunos dispersos e desconcentrados, sendo preciso que ocorram mudanças urgentes nas metodologias de ensino de Matemática. O aluno contemporâneo não consegue ficar muito tempo focado, pois a informações na vida dele em geral, acontece de maneira instantânea, sendo pouco absorvidas. O laboratório de Matemática funcionaria como um meio de indicar para o aluno que é possível aprender Matemática sim. A partir no momento que os mitos e medos forem superados, entende-se que ficará mais fácil

prosseguir no processo de ensino-aprendizagem da Matemática com outras metodologias, inclusive aulas expositivas.

## REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.
- BLIGH, D. A. *What's the use of lectures?* San Francisco: Jossey-Bass, 2000.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.
- BRASIL. **Ministério da Educação. Proposta de diretrizes para a formação inicial de professores da educação básica**, em cursos de nível superior. (2000)  
Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/sesu/arquivos/pdf/ed\\_basdire.pdf](http://portal.mec.gov.br/sesu/arquivos/pdf/ed_basdire.pdf) . Acesso em: 05 de janeiro de 2023
- CARBONELL, J. **A aventura de inovar: a mudança na escola**. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- CALDEIRA, Ademir Donizeti, Ana Paula dos Santos Malheiros, and João Frederico da Costa de Azevedo. *Modelagem em Educação Matemática*. Autentica, 2011.
- CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. **A sala de aula inovadora-estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo**. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.
- DALE, E. **Edition of audio-visual methods in teaching**. 3rd ed. New York: Dryden, 1969.
- DEWEY, J. *Experiência e educação*. 2. ed. São Paulo: Nacional, 1976. v. 131.
- DECROLY, Ovide. **Problemas de psicología y de pedagogía**. 1929.
- ESQUINSANI, R.S.S. **Educação e qualidade: duas faces de um mesmo direito**. Revista Diálogo Educacional. Curitiba, v. 13. n. 39. p. 583-603, maio/ago. 2013.
- GONÇALVES JUNIOR, Eduardo Manuel. **Aspectos Computacionais na Geometria da Espiral de Teodoro**. 2015. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, 2015.
- HERNÁNDEZ, Fernando, and Montserrat VENTURA. **"Os projetos de trabalho: uma forma de organizar os conhecimentos escolares."** Artes Médicas, 1998.
- GRANATO, Marcus; MIRANDA, Luiz Roberto Martins de. **A restauração na trajetória de um teodolito do acervo do MAST**. Anais do Museu Paulista: História e Cultura Material, v. 19, p. 279-312, 2011.
- KILPATRICK, Zachary M. **Amebic colitis mistaken for inflammatory bowel disease**. *Archives of Internal Medicine*, v. 135, n. 5, p. 681-685, 1975.
- LIMA, E.. **Sobre o Ensino da Matemática**. Revista do Professor de Matemática, n 28, p. 5, 2 quadrimestre de 1999.
- LUCENA, R. da S. **Laboratório de ensino de matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.
- LEITÃO, Maria Robevânia. **Tesselações no ensino de geometria euclidiana**. 2015.

LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 2.ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

LEFRANÇOIS, Guy R. **Teorias da Aprendizagem**: o que o professor disse. 2. ed. São Paulo: Cengage, 2019.

MAZUR, E. **Peer instruction**: a revolução da aprendizagem ativa. Porto Alegre: Penso, 2015.

MASINI, Elcie F. Salzano; MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa na escola**. Curitiba, PR: Crv, 2017.

MEC, **Ministério da Educação**. Relatório do Brasil PISA 2018. Brasília: Inep, 2019.

MEC, **Ministério da Educação**. Resultado Saeb 2021. Brasília: Inep, 2022.

MORAES, Maria Cândida. **Transdisciplinaridade, criatividade e Educação**: fundamentos antológicos e epistemológicos. São Paulo: Papyrus, 2015.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: LF Editorial, 2011.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa subversiva**. Série-Estudos-Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB, 2006.

MOREIRA, M.A., Caballero, M.C. e Rodríguez, M.L. (orgs.) (1997). **Actas del encuentro internacional sobre el aprendizaje significativo**. Burgos, España. 1997

OBMEP, Clube de Matemática da. Atividade: **PIPA, uma brincadeira séria** – Construção da pipa tetraédrica. 2018. Disponível em: <https://www.obmep.org.br> . Acesso em: 05 jan. 2023.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA. *Declaração mundial sobre Educação Superior no século XXI*: visão e ação. Piracicaba: UNIMEP, 1998.

PINTEREST, Site. Técnicas de tesselação. 2023. Disponível em: <https://br.pinterest.com/rajindrasingh/tesselation> . Acesso em: 25 mar. 2023.

RÊGO, R. M. RÊGO, R. G **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de Matemática**. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores- Campinas. SP: Autores Associados, 2006.

SAS (2023). Poliedros. Disponível em: <https://livrosdigitais.portalsas.com.br>. Acesso em: 10 mar. 2023.

SOUSA, Naiara Alves de; ALMEIDA, Hianne Maravilha Dantas e Sousa; ANDRADE, Francisco José de. **Um estudo reflexivo sobre a utilização do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) como alternativa metodológica**. Revista Educação em Debate, Fortaleza, ano 43, n. 84, p. 186-200, jan./abr. 2021.

TAHAN, M. **Didática da Matemática**. v.2. São Paulo, SP: Saraiva, 1962.

## ANEXO A

### 1. ENQUETE: TEODOLITO CASEIRO

NOME: \_\_\_\_\_ SÉRIE: \_\_\_\_\_

(RELATÓRIO FINAL)

- VOCÊ TINHA CONHECIMENTO SOBRE AS RAZÕES SENO, COSSENO E TANGENTE?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ GOSTOU DE CONSTRUIR O TEODOLITO NO LABOATÓRIO DE MATEMÁTICA?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ ACHOU INTERESSANE IR FORA RETIRAR MEDIDAS?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ CONSIDERA QUE FICA MAIS FÁCIL APRENDER MATEMÁTICA DESSA FORMA PRÁTICA?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- ESCREVA ALGO SOBRE O TRABALHO QUE RELIZAMOS.



**ANEXO B****2. ENQUETE: REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS USANDO TESSELAÇÃO**

NOME: \_\_\_\_\_ SÉRIE: \_\_\_\_\_

(RELATÓRIO FINAL)

- VOCÊ TINHA CONHECIMENTO SOBRE TESSELAÇÃO?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ GOSTOU DE CONSTRUIR OS PAINÉIS USANDO A TÉCNICA?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ ACHOU INTERESSANTE CONSTRUIR OS PAINÉIS EM EQUIPE?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ CONSIDERA QUE FICA MAIS FÁCIL APRENDER MATEMÁTICA DESSA FORMA PRÁTICA?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- ESCREVA ALGO SOBRE O TRABALHO QUE RELIZAMOS.

## ANEXO C

### 3. ENQUETE: PIPA TETRAÉDRICA

NOME: \_\_\_\_\_ SÉRIE: \_\_\_\_\_

(RELATÓRIO FINAL)

- VOCÊ TINHA CONHECIMENTO SOBRE TETRAEDROS?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ GOSTOU DE CONSTRUIR A PIPA TETRAÉDRICA?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ ACHOU INTERESSANTE CONSTRUIR A PIPA EM EQUIPE?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- VOCÊ CONSIDERA QUE FICA MAIS FÁCIL APRENDER MATEMÁTICA DESSA FORMA PRÁTICA?  
( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
- ESCREVA ALGO SOBRE O TRABALHO QUE REALIZAMOS.

**ANEXO D****4. ENQUETE: ESPIRAL PITAGÓRICO**

NOME: \_\_\_\_\_ SÉRIE: \_\_\_\_\_

(RELATÓRIO FINAL)

- VOCÊ TINHA CONHECIMENTO SOBRE O TEOREMA E PITÁGORAS?
  - ( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
  
- VOCÊ GOSTOU DE CONSTRUIR A ESPIRAL NO LABOATÓRIO DE MATEMÁTICA?
  - ( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
  
- VOCÊ ACHOU INTERESSANE CONSTRUIR A ESPIRAL EM EQUIPE?
  - ( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
  
- VOCÊ CONSIDERA QUE FICA MAIS FÁCIL APRENDER MATEMÁTICA DESSA FORMA PRÁTICA?
  - ( ) SIM ( ) NÃO ( ) UM POUCO
  
- ESCREVA ALGO SOBRE O TRABALHO QUE RELIZAMOS.