UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROVAS COMBINATÓRIAS DE IDENTIDADES ENVOLVENDO COEFICIENTES BINOMIAIS COM APLICAÇÃO EM QUESTÕES DE VESTIBULARES.

CHARLES JENNINGS DA SILVEIRA SOARES

MANAUS, SETEMBRO
2023

CHARLES JENNINGS DA SILVEIRA SOARES

PROVAS COMBINATÓRIAS DE IDENTIDADES ENVOLVENDO COEFICIENTES BINOMIAIS COM APLICAÇÃO EM QUESTÕES DE VESTIBULARES.

Dissertação de mestrado apresentado à Universidade do Estado do Amazonas como parte dos requesitos necessários para obtenção do título de mestre no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEA.

Orientador: Prof. Dr. Almir Cunha da Graça Neto
Coorientador: Prof. Msc. Alessandro Monteiro

MANAUS, SETEMBRO
2023

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

S676pp Soares, Charles Jennings da

Provas combinatórias de identidades envolvendo coeficientes binomiais com aplicação em questões de vestibulares / Charles Jennings da Soares. Manaus : [s.n], 2023.

61 f.: color.; 30 cm.

Dissertação - Profmat UEA - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2023.

Inclui bibliografia

Orientador: Neto, Almir Cunha da Graça

Coorientador: Menezes, Alessandro Monteiro de

1. provas. 2. combinatórias. 3. identidades. I. Neto, Almir Cunha da Graça (Orient.). II. Menezes, Alessandro Monteiro de (Coorient.). III. Universidade do Estado do Amazonas. IV. Provas combinatórias de identidades envolvendo coeficientes binomiais com aplicação em questões de vestibulares

CHARLES JENNINGS DA SILVEIRA SOARES

PROVAS COMBINATÓRIAS DE IDENTIDADES ENVOLVENDO COEFICIENTES BINOMIAIS COM APLICAÇÃO EM QUESTÕES DE VESTIBULARES.

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade do Estado do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEA.

Manaus, 22 de Setembro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Almir Cunha da Graça Neto
Universidade do Estado do Amazonas

Profa. Dra. Kelly Alves Marães de Almeida
Universidade do Estado do Amazonas

Prof. Dr. Kelvin Souza de Oliveira
Universidade Federal do Amazonas

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pois sem ele não somos nada e graças a Deus tive forças para chegar até esse momento da realização de um sonho.

Agradeço à minha família que sempre me incentivou nos estudos e sempre acreditou no meu potencial.

Agradeço aos meus pets, que são minhas filhas, Chimbica e Minerva, pois boa parte do mestrado ocorreu durante o período da pandemia e as duas foram muito companheiras e de fundamental importância para minha caminhada.

Agradeço a todo o corpo docente do Departamento de Matemática da UEA - Universidade do Estado do Amazonas, e em especial ao meu orientador Almir Neto, que esteve presente em toda a minha trajetória acadêmica desde a graduação até o mestrado, sempre me dando todo suporte necessário e também ao meu coorientador Alessandro Monteiro.

Agradeço ao meu cunhado, YIri Sato, que fez mestrado em odontologia no mesmo período em que cursei o mestrado em matemática, e dessa maneira um dava força para o outro para alcançar o almejado título de mestre.

Agradeço também ao colega Elias, que me ajudou com o Latex para elaboração da dissertação.

Agradeço aos meus colegas de curso e a todos os meus amigos que com certeza também contribuíram para que eu conseguisse concluir mais essa etapa.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

RESUMO

A análise combinatória é um dos conteúdos de Matemática do Ensino Básico mais importantes e por esse motivo propomos a ideia de provas combinatórias de identidades binomiais com o viés na resolução de problemas. Através dos conhecimentos prévios da teoria de combinatória, envolvendo assim o princípio aditivo, o princípio multiplicativo, juntamente com o conhecimento das definições de permutações, arranjos e combinações, aplicamos estratégias diferenciadas para realizar as provas combinatórias e através delas elaborar a resolução dos mais variados tipos de problemas de contagem, focando nos problemas de vestibulares, ENEM e concursos. Inicialmente foi apresentada toda a teoria básica da análise combinatória, tendo o intuito de construir as provas combinatórias de identidades binomiais sempre utilizando um problema para isso. Desta maneira, o objetivo foi tornar o estudo da análise combinatória mais atrativo e de fácil entendimento.

Palavras chaves: Análise Combinatória. Resolução de problemas. Provas Combinatórias. Princípio Aditivo. Princípio Multiplicativo. Permutações. Arranjos. Combinações. Identidades Binomiais.

ABSTRACT

Combinatorial analysis is one of the most important contents of Basic Education Mathematics and for this reason we propose the idea of combinatorial proofs of binomial identities with the bias in problem solving. Through the previous knowledge of the theory of combinatorics, thus involving the additive principle, the multiplicative principle, together with the knowledge of the definitions of permutations, arrangements and combinations, we apply differentiated strategies to perform the combinatorial tests and through them elaborate the resolution of the most varied types of counting problems, focusing on the vestibular problems. Initially, the whole basic theory of combinatorial analysis was presented, with the intention of making the combinatorial proofs of binomial identities always using a problem for this. Thus, the objective was to make the study of combinatorial analysis more attractive and easy to understand.

Keywords: Combinatorial Analysis. Problem solving. Combinatorial Proofs. Additive Principle. Multiplicative Principle. Permutations. Arrangements. Combinations. Binomial Identities.

Sumário

Introdução

De que maneiras os alunos do Ensino Básico conseguiriam entender a formalidade das demonstrações algébricas? Será que a resolução de exercícios matemáticos utilizando provas combinatórias ajudariam no entendimento desses alunos?

Provas combinatórias aplicadas na resolução de exercícios permitem que a abstração algébrica e sua formalidade sejam mais facilmente compreendidos pelos alunos do Ensino Básico. E quando se aliam a essas demonstrações a resolução de exercícios o entendimento é ainda maior.

A finalidade do trabalho é justamente mostrar que através das demonstrações combinatórias e/ou bijetivas de identidades binomiais e a aplicação das identidades em exercícios, o aluno terá um melhor entendimento de um conteúdo que é tão mal compreendido no Ensino Básico que é a Análise Combinatória. Para (MORGADO, 2006), essa dificuldade dos alunos se dá pela maneira mecânica com que a Análise Combinatória é ensinada limitando-se a simplesmente decorar as fórmulas e empregá-las em situações padronizadas sem despertar no aluno o hábito de analisar cada problema.

Os aspectos históricos a respeito dos coeficientes binomiais juntamente com todas as definições e teoremas utilizados para mostrar as identidades são de fundamental importância para os alunos do Ensino Básico compreenderem onde os estudos sobre Análise Combinatória se iniciaram, quais matemáticos tiveram grande importância para a área, além de saber aplicar as identidades demonstradas nos exercícios.

No capítulo inicial desse trabalho, será feita uma análise histórica de como a Análise Combinatória surgiu, quais matemáticos tiveram contribuição para o estudo do tema.

No capítulo 2, serão apresentados os princípios fundamentais utilizados na Combinatória, que servirão como base para demonstrar as identidades binomiais bem como o tipo de demonstração que será utilizada. O método de demonstração utilizado é a prova combinatória, que consiste em realizar mais de uma contagem para um mesmo problema mostrando assim que existe uma bijeção entre as contagens.

No capítulo 3, serão realizadas várias provas combinatórias de diversas identidades binomiais que assim como foi citado no parágrafo anterior, nas provas combinatórias são feitas mais de um tipo de contagem para um determinado problema, mostrando assim uma bijeção entre essas contagens. Por exemplo, podemos citar um resultado muito famoso bem estudado no Ensino Básico: o binômio de Newton. Para $n \geq 0$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Para demonstrar, vamos imaginar que em uma classe de n alunos, cada aluno tem a opção de resolver um dos x diferentes problemas de matemática ou um dos y diferentes problemas de língua portuguesa. Quantos resultados diferentes são possíveis?

Contagem 1: Como cada aluno tem $(x+y)$ escolhas possíveis para qual problema irá resolver e como são n alunos, dessa forma existem $(x+y)^n$ modos de solucionar o problema.

Contagem 2: Para $0 \leq k \leq n$, existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher k estudantes para resolver um problema de matemática e como existem x problemas de matemática então existem x^k maneiras para decidir quais problemas de matemática cada um dos k alunos deve resolver. Os $n-k$ estudantes que sobram devem resolver um problema de língua portuguesa e como existem y problemas de português para serem resolvidos, o total de maneiras de decidir quais problemas cada um dos $n-k$ alunos deve resolver será dado por y^{n-k}.

No capítulo 4, serão aplicadas algumas das identidades binomiais para resolver Questões de vestibulares, ENEM e concursos.

No capítulo final, serão apresentadas as provas combinatórias do Pequeno Teorema de Fermat e do Teorema de Wilson, teoremas esses que foram estudados ao longo do curso de mestrado, mas não com um caráter combinatório.

Capítulo 1

Aspectos históricos e conceituais

Como disserta (RODA, 2018), a combinatória começa desde antes de qualquer registro histórico na Antiguidade, mas que foi através do matemático grego Arquimedes, que viveu no século III a.C. que se passou a ter conhecimento a respeito dos problemas de contagem. De acordo com (MORGADO, 2006) o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória.

De acordo com (LLOYD, 1990), a contagem e suas aplicações têm sido destacadas, começando pelas civilizações mais antigas, por exemplos onde a memorização era tida como uma propriedade, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue:

> “Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens tem ao todo?” (VASQUEZ, 2004).

Mas a Combinatória começa a tomar forma mesmo a partir do século XVII com o matemático Blaise Pascal e sendo complementada por Pierre de Fermat. Quis o acaso que durante uma viagem a cidade de Poitom, Pascal encontrasse Antoine Goumbaud, famoso jogador da época, com habilidade notável para resolver problemas matemáticos, Goumbaud apresentou a Pascal um problema que havia fascinado os jogadores desde a idade Média e que vários matemáticos como Tartaglia e Cardano já haviam discutido. O problema se baseia no fato de dois jogadores, com igual perícia, são interrompidos enquanto jogam um jogo de azar por uma certa quantia de dinheiro. Dada a pontuação do jogo naquela altura, como deve ser dividida a aposta? O problema deixou Pascal encantado e mais tarde Pascal apresentou o problema a

Fermat e assim se desencadeou uma troca de correspondências entre Pascal e Fermat que se tornou histórica. As cartas trocadas entre ambos, contendo reflexões sobre resoluções de problemas de jogos de azar são consideradas os documentos fundadores da teoria das probabilidades.

É nítido como nós, seres humanos, sentimos a necessidade de contar desde muito cedo. Uma criança que aprende a contar de 1 até 10 ganha os aplausos de seus pais e os deixa orgulhosos. Embora muitos adultos afirmem que têm dificuldade em Matemática, jamais admitem a incapacidade de contar. Contar é uma de nossas primeiras ferramentas, e é hora de apreciar todo o seu poder matemático.

Com o intuito de dar suporte às provas bijetivas e combinatórias são necessários alguns conceitos fundamentais previamente estabelecidos como: o Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo, a definição de fatorial, permutações, arranjos e combinações.

1.1 Análise Combinatória e seus princípios

Com o intuito de dar suporte às provas bijetivas e combinatórias serão necessários alguns conceitos previamente estabelecidos como: o Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo, a definição de fatorial, permutações, arranjos e combinações.

As provas combinatórias podem ser muito práticas e eficientes pois, diferente das provas algébricas, conseguimos obter bijeções através de contagens, por isso a importância desse tema para os alunos do Ensino Básico, tendo em vista a grande dificuldade que muitos deles encontram em problemas de matemática. Pois de acordo com a Base Nacional Comum Curricular deve-se “conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;” (BRASIL, 2020)

A combinatória tem inúmeras aplicações em design experimental, teoria de probabilidade, teoria dos jogos e ciência da computação. Para (BEELER, 2015), algumas questões que surgem em combinatória incluem:

(i) Se você tem cinco livros e quer colocar três em uma estante, de quantas maneiras isso pode ser feito?

(ii) Se você tem n livros e quer colocar k em uma estante, de quantas maneiras isso seja feito?

(iii) Quantas palavras de comprimento n podem ser construídas a partir do alfabeto a,b tal que nenhuma palavra tem dois a's adjacentes?

(iv) Em uma mão de pôquer de cinco cartas, quantas maneiras existem de se obter uma trinca?

(v) De quantas maneiras n casais podem se sentar em volta de uma mesa circular (com $2n$ lugares) tal que os sexos devem alternar?

(vi) De quantas maneiras n casais podem se sentar em volta de uma mesa circular (com $2n$ lugares) de modo que os sexos se alternem e ninguém possa se sentar ao lado seu próprio cônjuge?

(vii) Se n pessoas verificarem seus chapéus no teatro e os ingressos da reclamação forem perdidos, de quantas maneiras os chapéus podem ser distribuídos de forma que ninguém receba seu próprio chapéu?

A resolução dessas questões pode muitas vezes começar simplesmente listando todas as possibilidades. Na verdade, enquanto você está aprendendo combinatória, você deve começar esses problemas listando todas as possibilidades. Como exemplo, vamos resolver o problema (i). Uma pergunta óbvia ocorre: devemos nos preocupar com a ordem dos três livros ou simplesmente quais livros são colocados na prateleira? Uma pergunta menos óbvia é: os livros são todos diferentes?

Para este exemplo, assumiremos que os livros são distintos e que nos importamos com qual ordem os livros são colocados na estante. Por simplicidade, denotaremos os livros $\{A, B, C, D, E\}$. Como a ordem é importante, a combinação ABC denotará a colocação de Livro A à esquerda da prateleira, Livro B no meio e Livro C à direita. Começaremos listando todas as combinações que começam com $A : ABC, ABD, ABE, ACB, ACD$, $ACE, ADB, ADC, ADE, AEB, AEC, AED$.

As combinações restantes (em ordem alfabética) são: BAC, BAD, BAE, BCA, BCD, BCE, BDA, BDC, BDE, BEA, BEC, BED, CAB, CAD, CAE, CBA, CBD, CBE, CDA, CDB, CDE, CEA, CEB, CED, DAB, DAC, DAE, DBA, DBC, DBE, DCA, DCB, DCE, DEA, DEB, DEC, EAB, EAC, EAD, EBA, EBC, EBD, ECA, ECB, ECD, EDA, EDB, EDC.

A vantagem dessa abordagem é que ela é intuitiva. Na verdade, no ensino fundamental os alunos (com tempo suficiente) poderiam resolver esse problema por enumeração. No entanto, isso tem uma grande desvantagem pois embora funcione bem o suficiente para números pequenos, não seria razoável usar essa abordagem para valores maiores. Por exemplo, se você tem 10 livros e quer colocar cinco na estante, então há mais de 30.000 maneiras possíveis de colocar os livros na estante. A esse respeito, temos na Base Nacional Comum Curricular: "(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore." (BRASIL, 2018)

1.2 Conceitos iniciais

1.2.1 Conjuntos

Nesta seção iremos falar sobre conjuntos, que é um conteúdo de preparação para entender o conceito de cardinalidade que será utilizado para definir uma função bijetiva. O conceito de bijeção se faz muito necessário nesse trabalho, pois é através desse conceito que se faz uma prova combinatória que é o objetivo dessa dissertação.

Um conjunto é uma coleção de objetos distintos. Os objetos no conjunto são muitas vezes referidos como os elementos do conjunto. Por exemplo, se $A = \{3, 4, 6, 8, 15\}$, então os elementos de A são $3, 4, 6, 8$ e 15. Se A é um conjunto e x é um elemento de A, isso é denotado por $x \in A$. Um conjunto com exatamente k elementos é chamado de k-conjunto ou conjunto de k-elementos. Por outro lado, se x não é um elemento de A, então denotamos isso por $x \notin A$.

Conjuntos são definidos pelos elementos que eles contêm. O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é o conjunto sem elementos. Os elementos de um conjunto não se restringem apenas a números, eles podem ser objetos, pessoas ou qualquer outra coisa. É importante observar também que em um conjunto a ordem dos elementos não é importante, então $\{3, 4, 6, 8, 15\}$ e $\{6, 15, 3, 4, 8\}$ são o mesmo conjunto.

Sejam A e B conjuntos. Se, para todo $x \in B$, temos que $x \in A$, então dizemos que B é um subconjunto de A. Isso é denotado por $B \subset A$. Se $B \subset A$ e $A \subset B$, então os dois conjuntos são iguais. Isso é denotado por $A = B$.

Observação: O conjunto vazio, $\varnothing$, por vacuidade, é um subconjunto de todo conjunto e todo conjunto é um subconjunto de si mesmo. Por exemplo, seja o conjunto $A = \{3, 4, 6, 8, 15\}$. Note que $\varnothing, \{3, 4\}, \{6, 8, 15\}$ e $\{3, 4, 6, 8, 15\}$ são todos subconjuntos de A.

Muitas vezes é conveniente simplesmente descrever um conjunto em vez de listar todos os seus elementos. Por exemplo, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ é o conjunto dos primeiros cinco números naturais pares. Em outros casos, uma representação simbólica pode ser mais apropriada. Por exemplo, $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ pode ser representado por $C = \{2x + 1 \mid x = 0, 1, \ldots, 5\}$. Isso é especialmente importante ao lidar com conjuntos grandes. De particular interesse para combinatorialistas é a cardinalidade de um conjunto. A cardinalidade de um conjunto A, sendo A um conjunto finito, é o número de elementos em A. A cardinalidade do conjunto A é denotada $|A|$. Exemplo: Seja dado o conjunto $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, a cardinalidade de B é $|B| = 5$.

1.2.2 Funções

Uma função de A em B, representada por $f : A \to B$, é uma correspondência que associa, a cada elemento de A, um único elemento de B. Os elementos de B, que estão associados a algum elemento de A, são chamados imagens da função. Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, domínio e contradomínio da função.

Exemplo 1. *Dados os conjuntos $A = \{a_1, a_2\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, quantas funções de A em B podem ser construídas?*

Nesse exemplo, dado o pequeno número de elementos em A e B, podemos dar a solução para esse problema, construindo todas as 9 funções de A em B, que são ilustradas na figura 1.1.

Podemos, no entanto, resolver esse problema de uma outra maneira. Vejamos.

Como uma função de A em B é formada tomando cada elemento de A e associando a eles um elemento de B, então para o elemento a_1, temos 3 possibilidades de escolha da imagem, para o elemento a_2, temos também 3 possibilidades, logo, pelo princípio multiplicativo, o número de funções de A em B, é $3 \cdot 3 = 9$.

Seguindo o raciocínio usado na resolução desse exemplo, podemos generalizar: dados os conjuntos finitos A e B, sendo m e n os números de elementos de A e B, respectivamente, temos que o número de funções de A em B, é $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m$.

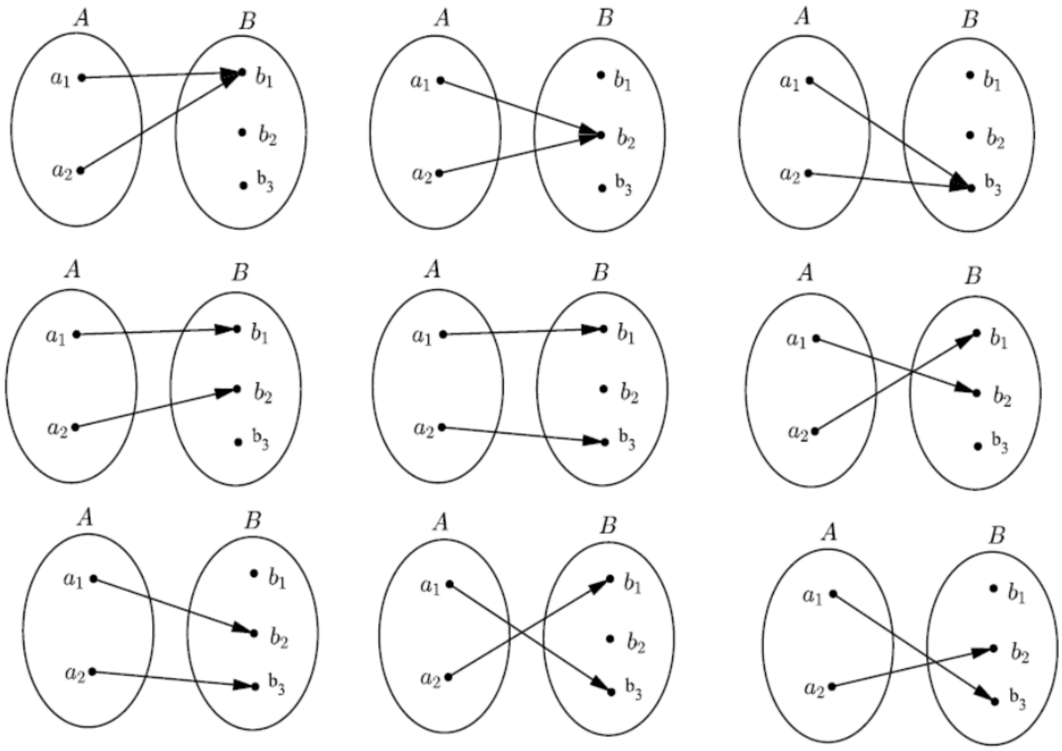


Figura 1.1: Funções de A em B

Teorema 1.2.1. *Sejam A e B conjuntos e f uma função de A em B.*

(i) Se f é injetiva, então $|A| \leq |B|$.

(ii) Se f é sobrejetiva, então $|A| \geq |B|$.

(iii) Se f é uma bijeção, então $|A| = |B|$.

Demonstração. Suponhamos que $|A| = n$, com $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Note que $f(A) = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$. Por definição, como f é uma função de A em B, segue-se que $f(A) \subseteq B$.

(i) Como f é injetiva, segue que para $i \neq j$, temos que $f(a_i) \neq f(a_j)$. Portanto, existem n elementos distintos em $f(A)$. Como $f(A) \subseteq B$, segue que $n = |f(A)| \leq |B|$.

(ii) Como f é uma função sobrejetiva de A a B, segue que para todo $b \in B$ existe $a_i \in A$ (não necessariamente único) tal que $f(a_i) = b$. Portanto, $B \subseteq f(A)$. Segue que $|B| \leq |f(A)| \leq n$.

(iii) Decorre imediatamente de (i), (ii). $\square$

1.2.3 O método da prova combinatória

A prova combinatória pode ser reduzida a um problema de contagem normalmente enumerado de duas maneiras diferentes que geram o mesmo resultado para o problema. Uma prova combinatória exibe uma bijeção específica entre o conjunto de interesse e dois ou mais conjuntos menores. Normalmente, os conjuntos menores serão mais fáceis de contar do que os conjuntos de interesse. Idealmente, serão conjuntos que já foram contados.

Existem várias vantagens para este método de prova. Em uma prova combinatória, evitam-se manipulações algébricas complicadas e dão uma indicação clara de por que o resultado é verdadeiro. Fazendo um comparativo da prova combinatória com a prova por indução, na prova por indução é necessário que se saiba o resultado onde se quer chegar previamente enquanto que na prova combinatória não se faz necessário. Em uma prova combinatória, um resultado é descoberto e provado simultaneamente. Muitas identidades que serão apresentadas aqui podem ser provadas usando indução matemática ou manipulação algébrica. Infelizmente, esses métodos podem ser muito confusos e não dar qualquer indicação de por que o resultado é verdadeiro.

Por esse motivo, as provas combinatórias costumam ser mais fáceis de lembrar a longo prazo. Finalmente, muitas provas combinatórias "condicionam" o conjunto considerando alguma restrição nos elementos do conjunto. Assim sendo, não é incomum descobrir identidades combinatórias novas ou inesperadas, condicionando um conjunto de maneira inteligente.

1.2.4 Princípio Multiplicativo

Agora, provaremos os princípios fundamentais da análise combinatória que são o princípio multiplicativo e aditivo, que serão utilizados recorrentemente nas demonstrações das identidades.

Teorema 1.2.2. ***(Princípio Multiplicativo)*** *Suponha que existam n conjuntos denotados por $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Se os elementos podem ser selecionados de cada conjunto independentemente, então o número de maneiras de selecionar um elemento de cada conjunto é dada por $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.*

Demonstração. Basta perceber que os elementos selecionados são elementos do conjunto $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. A cardinalidade desse conjunto é $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$. $\square$

De acordo com (SANTOS, 2007), uma maneira de enunciar o princípio multiplicativo é: se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$.

Para elucidar o princípio multiplicativo, pode-se observar os exemplos a seguir:

Exemplo 2. *Maria vai sair com suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou* 2 *saias e* 3 *blusas. Vejamos de quantas maneiras ela pode se arrumar.*

Solução: Maria terá que tomar as seguintes decisões:

d_1 : Escolha da saia - 3 possibilidades

d_2 : Escolha da blusa - 2 possibilidades

Maria dispõe de $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2, ou seja, 6 possibilidades diferentes de se vestir.

Exemplo 3. *Um restaurante prepara* 4 *pratos quentes (frango, peixe, carne assada, salsichão),* 2 *saladas (verde e russa) e* 3 *sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?*

Solução: Esse e outros problemas da análise combinatória podem ser representados pela conhecida árvore de possibilidades ou grafo. Veja como o cardápio do restaurante pode ser representado pela árvore de possibilidades.

Observe que nesse problema existem três níveis de decisão:

- d_1: escolher um dentre os 4 tipos de pratos quentes.
- d_2: escolher uma dentre as 2 variedades de salada.
- d_3: escolher uma das 3 sobremesas oferecidas.

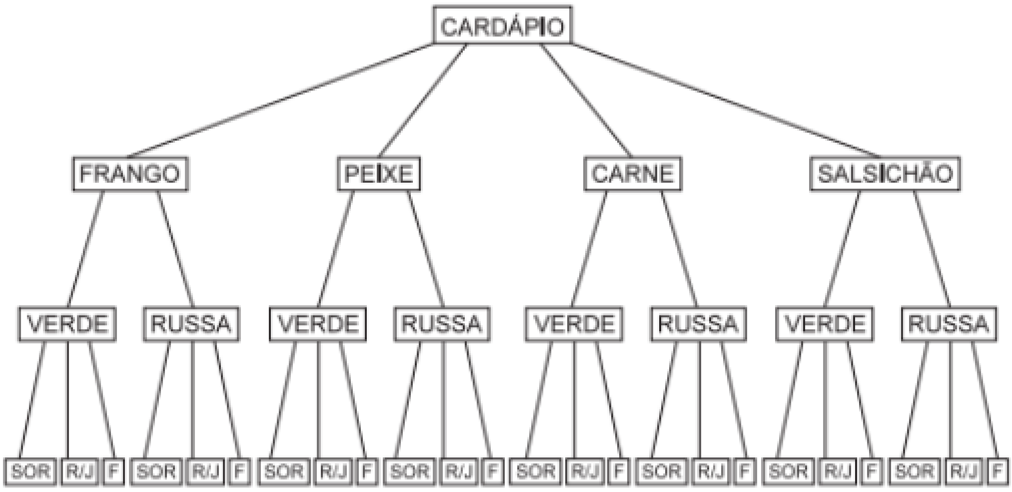


Figura 1.2: Árvore de possibilidades

Conclui-se que existem $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ maneiras de tomar as três decisões, ou seja, 24 opções de cardápio.

A representação gráfica em árvore de possibilidades é muito ilustrativa. Nela é possível ver claramente os três níveis de decisão d_1, d_2 e d_3, consultando os vários tipos de cardápios possíveis. Observe que, percorrendo as opções dadas pelos segmentos à esquerda da árvore, o cardápio ficaria frango/salada verde/sorvete enquanto que, escolhendo os segmentos à direita, seria salsichão/salada russa/ frutas. No entanto, o objetivo é saber as combinações possíveis e calcular o número total de possibilidades sem precisar enumerá-las, pois muitas vezes isso será impossível devido ao grande número de opções e/ou de decisões envolvidos num problema.

As técnicas da análise combinatória, como o princípio multiplicativo, fornecem soluções gerais para atacar certos tipos de problema. No entanto, esses problemas exigem engenhosidade, criatividade e uma plena compreensão da situação descrita. Portanto, é preciso estudar bem o problema, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter perfeita consciência dos dados e da resolução que se busca.

O Princípio Multiplicativo é uma generalização dos dois exemplos citados acima.

1.2.5 Princípio Aditivo

Teorema 1.2.3. ***(Princípio Aditivo)*** *Suponhamos que existam n conjuntos, mutuamente disjuntos, denotados por $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Então,*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_j| = \sum_{j=1}^{n} |A_j|.$$

Demonstração. A prova será por indução sobre n.

Se $n = 1$, então o resultado é claro, pois $|A_1| = |A_1|$.

Agora suponhamos que para algum n, os conjuntos mutuamente disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ satisfaçam:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_j| = \sum_{j=1}^{n} |A_j|.$$

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e A_{n+1} conjuntos mutuamente disjuntos. Assim, $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} A_i$ e A_{n+1} são conjuntos disjuntos. Dessa maneira, tem-se que: $|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_j| = |\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_j| + |A_{n+1}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |A_j| + |A_{n+1}| = \sum\limits_{j=1}^{n+1} |A_j|$.

Alternativamente, se $x \in A_i$, então $x \notin A_j$ para $j \neq i$. Portanto, x é contado uma vez por $|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_j|$ e uma vez por $\sum\limits_{j=1}^{n} |A_j|$. De forma similar, se $x \notin A_i$ para todo i, então x é contado zero vezes em ambos os lados da equação. $\square$

O princípio aditivo pode ser resumido da seguinte forma: suponha que existam n eventos. O i-ésimo evento pode ocorrer de a_i maneiras. Se dois eventos não podem ocorrer simultaneamente, em outras palavras, são disjuntos, então existem $a_1 + \cdots + a_n$ maneiras que exatamente um dos eventos podem ocorrer.

Ainda, segundo (SANTOS, 2007), o princípio aditivo pode ser mais facilmente enunciado da seguinte forma: se A e B são dois conjuntos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, com A e B tendo, respectivamente p e q elementos, então $A \cup B$ tem $p+q$ elementos.

Veja o exemplo a seguir que ilustra o princípio aditivo.

Exemplo 4. *Em uma loja de conveniência há 6 sabores de picolé e 3 sabores de salgados. Suponha que João só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que João pode fazer?*

Solução: Ou João escolhe um sabor de picolé entre os 6 ou um tipo de salgado dentre os 3. Portanto João pode fazer 9 pedidos diferentes.

Nesse problema podemos identificar os conjuntos:

- $A = \{x|\ x\ \acute{e}\ picol\acute{e}\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$.
- $B = \{x|\ x\ \acute{e}\ salgado\} = \{S_1, S_2, S_3\}$.
- $A \cup B = \{x|\ x\ \acute{e}\ picol\acute{e}\ ou\ x\ \acute{e}\ sagado\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, S_1, S_2, S_3\}$.

Definição 1.2.1. *(Permutação Simples): Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como permutação simples cada uma das sequências ordenadas, formada pelos n elementos de X. O número de permutações simples de n objetos é denotado por:*

$$P(n) = n!$$

Para se obter a fórmula $P(n)$, pode-se raciocinar da seguinte maneira:

Pelo princípio multiplicativo, existem n modos de escolher o elemento que ocupará o primeiro lugar, uma vez tomada essa decisão, tem-se $n-1$ modos de se escolher o segundo, $n-2$ modos para se escolher o terceiro, e assim por diante, até que haja apenas um único modo de se escolher o último elemento. Portanto,

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Definição 1.2.2. *(Arranjo Simples): Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como arranjo simples dos n elementos, tomados k a k, com k menor do que ou igual a n, cada um dos agrupamentos formados por k elementos, distintos entre si pela ordem ou pela espécie, do conjunto X. O número de arranjos simples pode ser obtido pela fórmula:*

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

A fórmula acima pode ser alcançada partir da aplicação do Princípio Multiplicativo, visto que para se formar um agrupamento ordenado de k elementos, o primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras, e assim sucessivamente até se ter $(n-k+1)$ maneiras de se escolher o k-ésimo elemento, ou seja,

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

onde $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$.

Definição 1.2.3. *(Combinação Simples): Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como combinações simples dos n elementos, tomados k a k, com k menor do que ou igual a n, cada um dos agrupamentos formados por k elementos, distintos entre si, do conjunto X, ou como o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos. O número de combinações simples pode ser obtido pela fórmula:*

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ainda pelo princípio multiplicativo é possível determinar a fórmula $C_{n,k}$, pois semelhante ao raciocínio utilizado para arranjo simples, tem-se n modos de escolher o primeiro elemento, $(n-1)$ modos de escolher o segundo elemento, e assim sucessivamente, até $(n-k+1)$ modos de escolher o k-ésimo elemento. Agora, é importante observar que foram contados mais agrupamentos do que se deveria contar, pois para conjuntos, a ordem não importa. Portanto, é necessário dividir pelo número de formas de ordenar estes k elementos que foram escolhidos de forma ordenada, ou seja, por $k!$. Dessa maneira, tem-se:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

onde $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$.

1.2.6 Coeficientes binomiais

Os coeficientes binomiais são quase sempre definidos como a resposta para um problema de contagem. Especificamente, definimos $\binom{n}{k}$ como o número de subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, ..., n\}$. Dito de outra forma, $\binom{n}{k}$ conta as maneiras de selecionar uma comissão de k alunos de uma classe de n alunos onde a ordem da seleção não é importante.

Por definição temos, para $n \geq 0$, $\binom{n}{0} = 1$ e para $k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$.

Coeficientes binomiais têm uma fórmula algébrica simples $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Exemplo 5. *Quantas comissões de tamanho 2 podem ser formadas com 4 elementos?*

Solução: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto com os elementos da comissão. Listaremos todas as comissões de tamanho 2 que podem ser formadas a partir desse conjunto.

$B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$

Utilizando o coeficiente binomial, verificamos que o total de comissões de tamanho 2 que podem ser formadas é igual a 6.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6.$$

Capítulo 2

Abordagem, as estratégias de investigação e os procedimentos técnicos

Quanto à abordagem, a pesquisa é do tipo qualitativa. A abordagem utilizada será quantitativa pois "têm o objetivo de mostrar dados, indicadores e tendências observáveis, ou produzir modelos teóricos abstratos com elevada aplicabilidade prática. Suas investigações evidenciam a regularidade dos fenômenos." ((MINAYO, 2008) apud GUERRA, 2014, p. 10). Serão explicados os conceitos, teoremas e respectivas demonstrações relacionados ao tema de provas combinatórias e algébricas de identidades envolvendo coeficientes binomiais.

Quanto à estratégia da investigação de pesquisa utilizado do ponto de vista do pesquisador será explicativa, conforme destaca (GIL, 2018) "Este é o tipo de pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas. Por isso mesmo é o tipo mais complexo e delicado, já que o risco de cometer erros aumenta consideravelmente."

Quanto ao procedimento técnico a pesquisa será bibliográfica "com o intuito de levantar um conhecimento disponível sobre teorias, a fim de analisar, produzir ou explicar um objeto sendo investigado. A pesquisa bibliográfica visa então analisar as principais teorias de um tema, e pode ser realizada com diferentes finalidades" (CHIARA, 2008).

Diante das abordagens bibliográficas, esse estudo caracteriza-se primeiramente na verificação e na análise de materiais teóricos utilizando o método indutivo, onde a partir da análise de dados de pesquisas bibliográficas sobre as provas bijetivas e combinatórias, poderá se fazer uma investigação e contribuição a respeito do tema. Consiste ainda na utilização do método histórico, fazendo um breve relato sobre como e onde começaram a ser desenvolvidas tais provas bijetivas e combinatórias e por fim provar algumas identidades binomiais de combinatória e o Pequeno Teorema de Fermat e o Teorema de Wilson.

2.1 PCN e BNCC

Em relação à Combinatória, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) já recomendam para o 1º e 2º ciclos "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos e permutações e, principalmente, o princípio fundamental da contagem" e para o 3º e 4º ciclos referindo-se aos problemas de contagem "o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação no cálculo de probabilidade" (BRASIL, 1998).

No que diz respeito aos livros didáticos serão utilizados como norteadores, de acordo com a PNLD 2021, os livros: Conexões – Matemática e suas Tecnologias (LEONARDO, 2020) e Diálogo – Matemática e suas Tecnologias (TEIXEIRA, 2020). Sendo que ambos colaboram para o desenvolvimento das capacidades de resolver problemas e compreender conceitos matemáticos, estabelecendo relações entre diferentes temas da disciplina, em especial a Combinatória, e outras áreas do conhecimento, além de utilizar o estudo da matemática como ferramenta de leitura, interpretação e análise da realidade.

Na etapa 3 a proposta didática para o ensino médio consistirá na utilização de uma das tendências em educação matemática que é a resolução de problemas onde o aluno poderá fazer o uso das provas combinatórias e algébricas na resolução dos exercícios propostos a partir dos teoremas e identidades apresentadas na teoria utilizada como base.

Capítulo 3

Provas Combinatórias de Identidades Binomiais

Nesta seção[1], serão apresentadas em um primeiro momento provas combinatórias simples de identidades de coeficientes binomiais e gradualmente serão apresentadas provas combinatórias de identidades mais complexas. A ideia dessas demonstrações é sempre apresentar duas contagens diferentes para um mesmo problema mostrando assim que há uma bijeção entre as duas contagens.

Identidade 1. *Para* $0 \leq k \leq n$*,*

$$n! = \binom{n}{k} k!(n-k)!.$$

Demonstração. De quantas maneiras os números de 1 a n podem ser organizados em uma lista?

Contagem 1: Existem $n!$ maneiras, pois o primeiro número pode ser escolhido de n maneiras, o próximo número pode ser escolhido de $(n-1)$ maneiras, e assim por diante.

Contagem 2: Condição sobre os primeiros k números em nossa lista.

Existem, por definição, $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher qual dos n números aparece entre os k primeiros. Uma vez escolhidos, existem $k!$ maneiras de organizá-los, seguidos por $(n-k)!$ maneiras de organizar os elementos restantes. Portanto, os números de 1 a n podem ser arranjados em $\binom{n}{k} k!(n-k)!$ maneiras. □

[1] As identidades apresentadas a seguir são de acordo com a obra de (BENJAMIN; QUINN, 2003)

Identidade 2. *Para $0 \leq k \leq n$, temos que:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demonstração. De quantas maneiras pode-se criar uma comissão com k estudantes de uma classe de n estudantes?

Contagem 1: Por um lado, existem $\binom{n}{k}$ comissões com k estudantes de uma classe com n estudantes.

Contagem 2: Por outro lado, pode-se escolher $n-k$ estudantes para se excluir dessa comissão, isso pode ser feito de $\binom{n}{n-k}$ maneiras. □

Identidade 3. *Para $0 \leq k \leq n$ (exceto para $n = k = 0$), temos que:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. De quantas maneiras pode-se criar uma comissão com k estudantes de uma classe com n estudantes?

Contagem 1: Assim como na Identidade 1, existem $\binom{n}{k}$ comissões com k estudantes.

Contagem 2: Condição sobre a pertinência do n-ésimo aluno na comissão. Há $\binom{n-1}{k}$ comissões que excluem o estudante n e $\binom{n-1}{k-1}$ que incluem o estudante n. □

Junto com as condições iniciais $\binom{0}{0} = 1$ e $\binom{n}{k} = 0$ para $n < k$ pode ser usado para gerar coeficientes binomiais em uma tabela conhecida como triângulo de Pascal como mostra a figura 1. Embora as identidades anteriores sejam fáceis de provar usando a fórmula algébrica $\binom{n}{k}$ dada na Identidade 1, a próxima identidade não é nada óbvia a partir da definição fatorial de $\binom{n}{k}$. Pode-se observar que a soma à esquerda é finita, pois $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$.

Identidade 4. *Para $n \geq 0$,*

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Demonstração. De quantas maneiras podemos criar uma comissão (de qualquer tamanho) em uma turma com n alunos?

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Tabela 3.1: Triângulo de pascal

Contagem 1: Como para $0 \leq k \leq n$, existem $\binom{n}{k}$ comissões de tamanho k, existem $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}$ tais comissões.

Contagem 2: Decidindo, aluno por aluno, se deve ou não colocar esse aluno na comissão. Como existem duas possibilidades para cada aluno (estar ou não na comissão), existem 2^n comissões possíveis. $\square$

Identidade 5. *Para* $n \geq 1$,

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

Demonstração. De quantas maneiras podemos criar uma comissão com um número par de estudantes de uma classe de n estudantes?

Contagem 1: Como para $0 \leq 2k \leq n$, existem $\binom{n}{2k}$ comissões de tamanho $2k$, existem $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}$ tais comissões.

Contagem 2: Os primeiros $n-1$ estudantes podem ser livremente escolhidos para estar ou não na comissão. Uma vez que essas escolhas são feitas, o destino do n-ésimo aluno é completamente determinado para que o tamanho final da comissão seja um número par. Consequentemente, existem 2^{n-1} dessas comissões. Pode-se observar também que a Identidade 5 e a identidade 6 implicam que exatamente metade de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ são pares. Consequentemente metade deles deve ser ímpar e isso é equivalente a dizer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$. $\square$

Identidade 6. *Para* $0 \leq k \leq n$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. De quantas maneiras podemos criar uma comissão de tamanho k de alunos de uma classe de n estudantes onde um dos membros da comissão é designado como presidente?

Contagem 1: Existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher a comissão e então k maneiras de escolher o presidente. Portanto existem $k\binom{n}{k}$ resultados possíveis.

Contagem 2: Primeiramente seleciona-se o presidente de uma classe de n alunos, ou seja, existem n possibilidades para isso, depois dos $n-1$ alunos que sobraram seleciona-se $k-1$ estudantes para completar os membros da comissão. Logo, isso pode ser feito de $n\binom{n-1}{k-1}$ maneiras. □

Identidade 7. *Para* $n \geq 1$*,*

$$\sum_{k\geq 0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Demonstração. De quantas maneiras podemos criar uma comissão de qualquer tamanho de uma classe de n alunos, onde um dos membros da comissão será o presidente?

Contagem 1: Para uma comissão de tamanho k, onde $0 \leq k \leq n$, existem $k\binom{n}{k}$ tais comissões. Ao todo, temos $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ resultados possíveis.

Contagem 2: Primeiro seleciona-se o presidente de uma classe de n alunos, então dos $n-1$ alunos restantes, existem 2^{n-1} maneiras de escolher um subconjunto deles para formar o restante da comissão. Dividindo-se ambos os lados da identidade 7 por 2^n permite com que seja dada uma prova combinatória diferente para a identidade obtida equivalente:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

□

Identidade 7. 1. *Para* $n \geq 1$*,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

Demonstração. Qual é o tamanho médio de um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$?

Contagem 1: Soma-se o tamanho de todos os subconjuntos e divide-se pelo total de subconjuntos. Uma vez que para $0 \leq k \leq n$ existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamanho k e existem 2^n subconjuntos ao todo, o tamanho médio do subconjunto é $\sum_{k=0}^{n} \frac{k\binom{n}{k}}{2^n}$.

Contagem 2: Deixa-se lado a lado cada subconjunto com seu complementar. Como cada par possui n elementos então cada par complementar possui uma média de $\frac{n}{2}$ elementos. Portanto o tamanho médio do subconjunto é $\frac{n}{2}$. □

Identidade 8. *(Identidade de Vandermonde) Para* $m \geq 0$*,* $n \geq 0$*,*

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}.$$

Demonstração. De uma turma de $m+n$ alunos, sendo m homens e n mulheres, de quantas maneiras se pode formar uma comissão de tamanho k?

Contagem 1: Por um lado, existem $\binom{m+n}{k}$ comissões.

Contagem 2: Por outro lado, para $0 \leq j \leq k$, escolhendo-se primeiramente os homens pode-se formar uma comissão com j homens de $\binom{m}{j}$ maneiras, então os $k-j$ membros restantes podem ser escolhidos entre as n mulheres de $\binom{n}{k-j}$ maneiras. □

Identidade 9. *Para* $n \geq 0$*,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Demonstração. Em uma classe de n alunos, cada aluno tem a opção de resolver um dos x diferentes problemas de Matemática ou um dos y diferentes problemas de Prtugu es. Quantos resultados diferentes são possíveis?

Contagem 1: Como cada aluno tem $(x+y)$ escolhas para qual problema resolver, existem então $(x+y)^n$ resultados possíveis.

Contagem 2: Para $0 \leq k \leq n$, existem $\binom{n}{k}$ maneiras quais k estudantes escolheram resolver um problema de matemática, como existem x problemas de matemática, logo existem x^k maneiras para decidir quais problemas de matemática cada um dos k alunos deve resolver e os $n-k$ estudantes que sobram devem resolver um problema de português, como existem y problemas de português para serem resolvidos, o total de maneiras de decidir quais problemas de português cada um dos $n-k$ alunos deve resolver será dado por y^{n-k}. $\square$

Identidade 10. *Para* $0 \leq m \leq k \leq n$*,*

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Demonstração. Em uma turma de n alunos, de quantas maneiras podemos escolher uma comissão de tamanho k que contenha uma subcomissão de tamanho m?

Contagem 1: A comissão, de tamanho k, pode ser escolhida de tamanho k pode ser escolhida de $\binom{n}{k}$ maneiras, então a subcomissão pode ser escolhida de $\binom{k}{m}$ maneiras.

Contagem 2: Primeiramente deve-se escolher os m alunos que farão parte da comissão e da subcomissão. Isso pode ser feito de $\binom{n}{m}$ maneiras. Dos $n-m$ alunos restantes, os $k-m$ alunos que estarão na comissão porém não estarão na subcomissão podem ser escolhidos de $\binom{n-m}{k-m}$ maneiras. $\square$

Definição 3.0.1. *Um número inteiro* $d > 0$ *é o máximo divisor comum de dois inteiros* a *e* b *se possuir as seguintes propriedades:*

- d *é divisor comum de* a *e* b*;*
- d *é divisível por todo divisor comum de* a *e* b*.*

Iremos usar a notação $mdc(a, b)$ para representar o máximo divisor comum entre os inteiros a e b.

Corolário 1. *Para* $0 < m \leq k < n$*,* $\binom{n}{m}$ *e* $\binom{n}{k}$ *têm um fator comum não trivial . Isto é, o mdc* $\left(\binom{n}{m}, \binom{n}{k}\right) > 1.$

Demonstração. Supondo, por contradição, que $\binom{n}{m}$ e $\binom{n}{k}$ sejam relativamente primos. Pela identidade 11, $\binom{n}{m}$ divide $\binom{n}{m}\binom{k}{m}$, mas como $\binom{n}{m}$ e $\binom{n}{k}$ não tem fatores comuns $\binom{n}{m}$ divide $\binom{k}{m}$, mas isso é absurdo, pois é combinatorialmente claro que $\binom{n}{m}$ é maior que $\binom{k}{m}$. $\square$

Identidade 11. *Para* $0 \leq k \leq n$*,*

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demonstração. Quantos subconjuntos com $k+1$ elementos estão contidos no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$?

Contagem 1: Por um lado, tem-se $\binom{n+1}{k+1}$ subconjuntos.

Contagem 2: A ideia é fixar o maior elemento para o subconjunto. Um subconjunto de tamanho $k+1$ tendo o $m+1$ como maior elemento pode ser criado de $\binom{m}{k}$ maneiras já que o maior elemento $m+1$ já está selecionado e, portanto, sobrando m elementos para escolher dentre os k elementos restantes. Dessa maneira, desde que esse $m+1$ possa ser tão pequeno quanto $k+1$ e tão grande quanto $n+1$, existem $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k}$ subconjuntos de tamanho $k+1$ no total. □

Identidade 12. *Para* $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$*,*

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k}\binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

Demonstração. Quantos subconjuntos de tamanho $2k+1$ estão contidos no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}$?

Contagem 1: Por um lado, existem $\binom{n+1}{2k+1}$ subconjuntos de tamanho $2k+1$ escolhidos entre $n+1$ elementos.

Contagem 2: A ideia é que o termo mediano já esteja no subconjunto. Em um subconjunto de tamanho $2k+1$ o elemento mediano será o elemento de posição $(k+1)$, com k elementos abaixo dele e k elementos acima dele. Por exemplo, no conjunto $\{1, 3, 6, 9, 14\}$, o elemento mediano é o 6. Portanto o número de subconjuntos de tamanho $2k+1$ com elemento mediano $m+1$ é $\binom{m}{k}\binom{n-m}{k}$. Como $m+1$ pode variar de $k+1$ a $n+1-k$, dessa maneira prova-se que podem ser escolhidos de $\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k}\binom{n-m}{k}$ maneiras. □

3.1 Combinação Completa

Nesta secção serão analisadas as identidades envolvendo a quantidade $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, que será chamada de combinação completa de n elementos tomados k a k, que conta as maneiras de selecionar k objetos de um conjunto de n elementos, onde a ordem não é importante, mas a repetição é permitida. Por exemplo, as 20 possíveis combinações completas de tamanho 3 que podem ser criadas a partir do conjunto $\{1,2,3,4\}$ estão ilustradas na tabela a seguir.

$\left(\!\binom{4}{3}\!\right) = 20$	$\binom{4}{3} = 4$
$\{1,1,1\}$ $\{1,2,3\}$ $\{2,2,2\}$ $\{2,4,4\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,1,2\}$ $\{1,2,4\}$ $\{2,2,3\}$ $\{3,3,3\}$	$\{1,2,4\}$
$\{1,1,3\}$ $\{1,3,3\}$ $\{2,2,4\}$ $\{3,3,4\}$	$\{1,3,4\}$
$\{1,1,4\}$ $\{1,3,4\}$ $\{2,3,3\}$ $\{3,4,4\}$	$\{2,3,4\}$
$\{1,2,2\}$ $\{1,4,4\}$ $\{2,3,4\}$ $\{4,4,4\}$	

Tabela 3.2: Combinações completas de tamanho 3 do conjunto $\{1,2,3,4\}$.

Por outro lado, $\binom{n}{k}$ conta o número de maneiras de selecionar k objetos de um conjunto de n elementos, onde a ordem também não é importante, porém a repetição não é permitida. Na figura acima, pode-se observar os 4 subconjuntos de tamanho 3 onde os elementos não repetem.

A combinação completa $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ conta também o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k$. Para $0 \leq i \leq n$, x_i conta o número de vezes que o i-ésimo objeto é escolhido. A seguir serão mostradas maneiras de interpretar $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Eleições: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ conta as maneiras pelas quais k votos podem ser alocados para n candidatos. Nesse caso, x_i conta o número de votos recebidos pelo candidato i.

Bolas de sorvete: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ conta as maneiras de escolher k bolas de sorvete de n sabores possíveis, onde é permitida a repetição de sabores, e a ordem das bolas nos potes não é importante. Nessa situação, x_i indica quantas vezes o sabor i é escolhido.

Sequências não decrescentes: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ conta as sequências inteiras positivas $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ onde $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k \leq n$. Aqui x_i denota o número de i's na sequência.

Estudantes e tampinhas: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ conta as maneiras pelas quais pode-se distribuir k tampinhas idênticas entre n estudantes. Os estudantes podem receber qualquer número de tampinhas incluindo a possibilidade de não receber tampinhas. Nesse caso, x_i representa o número de tampinhas dadas ao estudante i.

Convenientemente, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ pode ser expresso em termos de coeficientes binomiais.

Serão apresentadas a seguir três provas combinatórias da identidade fundamental.

Identidade 13. *Para* $n \geq 0$ *e* $k \geq 0$*,*

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Demonstração. De quantas maneiras pode-se distribuir k tampinhas idênticas para n estudantes?

Contagem 1: Usando a definição de combinação completa, isso pode ser feito de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ maneiras.

Contagem 2: Cada alocação pode ser representada com "estrelas e barras". Especificamente, cada alocação pode ser representada como um arranjo de k estrelas, onde cada uma representa uma tampinha, e $n-1$ barras que servirão como as divisoras entre cada estudante. Por exemplo, ao distribuir 10 tampinhas para 4 estudantes, o arranjo de 10 estrelas e 3 barras dados na tabela 3.3 representa a situação em que os estudantes $1, 2, 3$ e 4 recebem $3, 2, 0$ e 5 tampinhas, respectivamente. Cada um desses arranjos envolve a colocação de $n+k-1$ objetos em uma linha e decidindo quais k desses elementos serão tampinhas. No exemplo da figura, as tampinhas estão colocadas nas posições $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12$ e 13.

$*$	$*$	$*$	$\vert$	$*$	$*$	$\vert$	$\vert$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Tabela 3.3: Estrelas e barras - tampinhas e estudantes.

$\square$

Alternativamente, podemos dar uma prova bijetiva para a identidade.

Conjunto 1: Seja S o conjunto das sequências inteiras positivas $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ onde $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k \leq n$. Pela interpretação citada anteriormente, $|S| = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Conjunto 2: Seja T o conjunto das sequências inteiras positivas $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ onde $1 < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_k \leq n + k - 1$. Cada elemento de T pode ser pensado como um subconjunto de k elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n+k-1\}$, logo $|T| = \binom{n+k-1}{k}$.

Bijeção: Para a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_k)$ em S, seja $b_i = a_i + i - 1$, para $i = 1, 2, 3; k$. É fácil ver que a sequência resultante $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ está em T. Por exemplo, quando $n = 10$ e $k = 6$ a sequência não decrescente $(1, 1, 2, 3, 5, 8)$ em S gera a sequência $(1, 2, 4, 6, 9, 13)$. Como esse procedimento é reversível, ou seja, $a_i = b_i - i + 1$, segue que $|S| = |T|$.

Há ainda uma terceira maneira de provar a identidade 14, mas antes será preciso provar a identidade 15.

Identidade 14. *Para* $0 \leq n \leq m$*,*

$$\left(\!\binom{n}{m-n}\!\right) = \binom{m-1}{n-1}.$$

Demonstração. De quantas maneiras pode-se distribuir m votos entre n candidatos, onde cada candidato tenha pelo menos 1 voto?

Contagem 1: Como cada candidato deve ter pelo menos 1 voto, pode-se considerar que, inicialmente, cada candidato já tenha 1 voto. Dessa maneira, sobram ainda $m - n$ votos para serem distribuídos entre os n candidatos. Portanto existem $\left(\!\binom{n}{m-n}\!\right)$ maneiras de se fazer isso.

Contagem 2: As estrelas e as barras serão contadas de uma forma um pouco diferente. Inicia-se tomando m estrelas cada uma delas representando um voto, mas como cada candidato deve ter pelo menos um voto, não se pode colocar duas barras seguidas e nem barras no início ou no final. Em outras palavras, existem $m-1$ lugares onde se pode colocar $n-1$ barras divisoras, ou seja, isso pode ser feito de $\binom{m-1}{n-1}$ maneiras. Por exemplo, na tabela 3.4 a seguir os candidatos $1, 2, 3$ e 4 têm $5, 2, 1$ e 2 votos, respectivamente.

$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$\mid$	$*$	$*$	$\mid$	$*$	$\mid$	$*$	$*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Tabela 3.4: Estrelas e barras - votos e candidatos.

□

Agora fazendo $m = n + k$, a identidade 15 implica na identidade 14.

Identidade 15. *Para* $n \geq 1$ *e* $k \geq 0$*,*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right).$$

Demonstração.

Conjunto 1: Dado o conjunto S, que representa o número de maneiras de representar k estrelas e $n-1$ barras. Como já interpretado anteriormente, $|S| = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$.

Conjunto 2: Dado o conjunto T, que representa o número de maneiras de organizar k barras e $n-1$ estrelas. Pela mesma interpretação, $|T| = \left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right)$.

Bijeção: Ao transformar estrelas em barras e barras em estrelas, se estabelece uma bijeção entre S e T. Portanto, $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right)$. □

Identidade 16. *Para* $n \geq 0$ *e* $k \geq 0$*, exceto para* $n = k = 0$*.*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$$

.

Demonstração. De quantas maneiras pode-se escolher k bolas de sorvete de n sabores diferentes?

Contagem 1: Por um lado, existem $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ maneiras de escolher k bolas de sorvete de n sabores diferentes.

Contagem 2: Deve-se utilizar a ideia de o n-ésimo sabor estar ou não selecionado. No primeiro caso, coloca-se uma colher do n-ésimo sabor em um pote e seleciona-se as $k-1$ colheres restantes de $\left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$ maneiras. No segundo caso, o n-ésimo sabor não será selecionado, dessa forma, as k bolas de sorvete podem ser selecionados dentre os outros $n-1$ sabores de $\left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$ maneiras. □

Identidade 17. $k\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = n\left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right).$

Demonstração. De quantas maneiras podemos criar uma sequência não decrescente $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq n$ e sublinhar um dos elementos?

Contagem 1: Existem $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ maneiras de criar a sequência e então k maneiras de escolher o termo que será sublinhado, portanto existem $k\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ possibilidades de se fazer isso tudo.

Contagem 2: Primeiramente, determina-se o valor que será sublinhado, existem n escolhas para isso. Suponha que o valor sublinhado é r, em seguida cria-se uma sequência não decrescente de $k-1$ elementos entre 1 e $n+1$. Existem $\binom{n+1}{k-1}$ dessas sequências. Quaisquer r's escolhidos ficarão à esquerda do r sublinhado. Quaisquer $(n+1)$'s escolhidos serão escolhidos em r's e serão colocados à direita do r sublinhado. Portanto, existem $n\left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right)$ tais sequências ao todo. Por exemplo, se $n = 5$, $k = 9$ e o valor sublinhado é $r = 2$, então a sequência de 8 termos $(1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6)$ gera a sequência de 9 termos $(1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5)$.

$\square$

Identidade 18. *Para* $k \geq 1$*,*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \sum_{m=1}^{n} \left(\!\!\binom{m}{k-1}\!\!\right).$$

Demonstração. De quantas maneiras podemos criar uma sequência não decrescente $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq n$?

Contagem 1: Como já explanado anteriormente, pode ser feito de $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ maneiras.

Contagem 2: Condição em a_k, o maior elemento da sequência. Para $1 \leq m < n$, o número dessas k-sequências onde $a_k = m$ é igual ao número de $(k-1)$-sequências $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq m$. Uma vez que existem $\left(\!\!\binom{m}{k-1}\!\!\right)$ dessas sequências, e como $1 \leq m < n$, então existe um total de $\sum\limits_{m=1}^{n} \left(\!\!\binom{m}{k-1}\!\!\right)$ sequências.

$\square$

Identidade 19. *Para* $n \geq 0$*,*

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n+1}{m}\!\!\right).$$

Demonstração. De quantas maneiras m votos podem ser distribuídos para $n+1$ candidatos?

Contagem 1: Por um lado, usando a definição, os m votos podem ser distribuídos entre os $n+1$ candidatos de $\left(\!\!\binom{n+1}{m}\!\!\right)$ maneiras.

Contagem 2: Se os n primeiros candidatos receberem um total de k votos, isso poderá ser feito de $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ maneiras, e o candidato $n+1$ recebe os $m-k$ votos restantes. Considerando $0 \leq k \leq m$, o número total de maneiras de distribuir os m votos entre os $n+1$ candidatos é $\sum_{k=0}^{m} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$.

□

Identidade 20. *Para* $n \geq 0$*,*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{m}{k-m}\!\!\right).$$

Demonstração. De quantas maneiras k tampinhas idênticas podem ser distribuídas entre n estudantes?

Contagem 1: Como já usualmente mostrado, isso pode ser feito de $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ maneiras.

Contagem 2: Para $0 \leq m \leq n$, se houver exatamente m estudantes que recebem tampinhas, existem $\binom{n}{m}$ maneiras de selecioná-los e cada um deles receber uma tampinha e então existem $\left(\!\!\binom{m}{k-m}\!\!\right)$ maneiras de distribuir as $k-m$ tampinhas restantes entre esses estudantes.

□

Capítulo 4

Exercícios de Aplicações das Identidades

Nessa secção, algumas das identidades demonstradas na secção anterior serão aplicadas para resolver exercícios[1] de vestibulares como Enem, UEA, entre outros. Veremos como o uso das identidades tornam as soluções para os problemas bem suscintas e de fácil compreensão.

1. *(Esc. Naval 2017) Calcule o número de soluções inteiras não negativas de* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ *nas quais pelo menos* 3 *incógnitas são nulas, e assinale a opção correta.*

$a)3.332$

$b)3.420$

$c)3.543$

$d)3.678$

$e)3.711$

Solução: Como existe a restrição de que pelo menos 3 incógnitas são nulas é equivalente dizer de que no máximo 3 incógnitas não serão nulas. Desse modo pode-se utilizar a identidade 20, porém fazendo m variar de 0 até 3, sendo m a quantidade de incógnitas não nulas, n o número total de incógnitas e $k = 20$ representando o resultado da equação. Desse modo, teremos que resolver

[1]que podem ser encontrados em ⟨http://www.superprofessor.com.br/⟩

$$\sum_{m=0}^{3}\binom{n}{m}\left(\!\!\binom{m}{k-m}\!\!\right)=\sum_{m=0}^{3}\binom{6}{m}\left(\!\!\binom{m}{20-m}\!\!\right)$$
$$=\binom{6}{0}\left(\!\!\binom{0}{20}\!\!\right)+\binom{6}{1}\left(\!\!\binom{1}{19}\!\!\right)+\binom{6}{2}\left(\!\!\binom{2}{18}\!\!\right)+\binom{6}{3}\left(\!\!\binom{3}{17}\!\!\right).$$

Agora utilizando a identidade 13 para resolver as combinações completas:

$$\binom{6}{0}\binom{19}{20}+\binom{6}{1}\binom{19}{19}+\binom{6}{2}\binom{19}{18}+\binom{6}{3}\binom{19}{17}=0+6+285+342=3711.$$

Logo a resposta para o problema está na alternativa e).

2. *(Enem PPL 2020) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas. Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro. De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por:*

$a)5$

$b)5\cdot 3$

$c)\dfrac{5!}{(5-3)!}$

$d)\dfrac{5!}{(5-3)!2!}$

$e)\dfrac{5!}{(5-3)!3!}$

Solução: Para resolver essa questão pode-se utilizar a identidade 3. Por um lado, para saber a quantidade de trios possíveis dentre 5 possíveis flores tem-se: $\binom{5}{3}=\dfrac{5!}{(5-3)!3!}=10$ e por outro lado a contagem pode ser feita de modo que uma determinada flor esteja ou não entre as 3 escolhidas. Por exemplo, há $\binom{4}{3}$ escolhas possíveis considerando que a margarida não esteja entre as escolhidas e existem $\binom{4}{2}$ escolhas possíveis considerando que a margarida esteja entre as esciolhidas. Dessa maneira existem $\binom{4}{3} + \binom{4}{2}$ maneiras de escolher o trio de flores para compor o canteiro. O mesmo valeria para qualquer uma das outras flores. Ou seja, $\binom{4}{3} + \binom{4}{2} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 4 + 6 = 10$. Logo, a alternativa correta é a letra $d)$.

3. *(EsPCEx 2022) Um grupo de alunos de Cálculo I da EsPCEx é constituído por* 8 *homens e* 4 *mulheres. Três desses alunos são selecionados ao acaso, sem reposição, para apresentarem um trabalho sobre aplicação da Integral. A probabilidade de que nessa escolha ao menos dois sejam homens é igual a:*

$a)\frac{7}{55}$

$b)\frac{13}{55}$

$c)\frac{14}{55}$

$d)\frac{36}{55}$

$e)\frac{42}{55}$

Solução: Para calcular a probabilidade de um evento ocorrer deve-se encontrar a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. O número de casos possíveis é correspondente ao número de comissões com 3 alunos que podem ser formadas e para encontrar esses trios possíveis pode-se utilizar a identidade 8. Por um lado, o número de trios pode ser encontrado de $\binom{8+4}{3} = \binom{12}{3} = 220$. Por outro lado, a contagem pode ser feita selecionando primeiro os homens que farão parte dessa comissão de 3 pessoas e o restante das vagas selecionando as mulheres. Isso pode ser feito como segue $\sum_{j=0}^{3} \binom{8}{j}\binom{4}{3-j} = \binom{8}{0}\binom{4}{3} + \binom{8}{1}\binom{4}{2} + \binom{8}{2}\binom{4}{1} + \binom{8}{3}\binom{4}{0} = 220$. Para o número de casos favoráveis deve-se levar em conta o que o problema quer, e o problema quer que ao menos 2 homens sejam escolhidos, então isso pode ser feito de $\sum_{j=2}^{3} \binom{8}{j}\binom{4}{3-j} = \binom{8}{2}\binom{4}{1} + \binom{8}{3}\binom{4}{0} = 168$. Então a probabilidade de 3 alunos serem selecionado tendo ao menos 2 homens na equipe é $\frac{168}{220} = \frac{42}{55}$. Portanto a alternativa correta é a letra $e)$.

4. *(IFCE 2019) Cada banca de um determinado concurso é constituída de* 3 *examinadores dos quais* 1 *é o presidente. Duas bancas são iguais somente se tiverem os mesmos membros e o mesmo presidente. Dispondo de* 20 *examinadores, a quantidade de bancas diferentes que podem ser formadas é:*

$a)800$

$b)1140$

$c)6840$

$d)609$

$e)3420$

Solução: Para resolver essa questão pode-se utilizar a identidade 6. Existem $\binom{20}{3}$ maneiras de escolher a comissão e então 3 maneiras de escolher o presidente. Portanto existem $3\binom{20}{3} = 3420$ resultados possíveis. Por outro lado, pode-se primeiramente selecionar o presidente dessa classe de 20 alunos, ou seja, existem 20 possibilidades para isso, depois dos $(20-1)$ alunos que sobraram seleciona-se $(3-1)$ estudantes para completar os membros da comissão. Logo, isso pode ser feito de $20\binom{20-1}{3-1} = 20\binom{19}{2} = 3420$ maneiras. Logo, a alternativa correta é a letra $e)$.

5. *(Puc – RS 2018) Uma família mudou-se da zona rural para uma cidade grande, onde os pais e seus* 10 *filhos deverão morar numa casa de três quartos. Os dez filhos deverão ocupar dois quartos, sendo* 6 *filhos num quarto e* 4 *filhos em outro quarto. De quantos modos os filhos poderão ser separados dessa forma?*

$a)6! + 4!$

$b)6! \cdot 4!$

$c)\dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$

$d)\dfrac{10!}{6!}$

Solução: Pode-se utilizar a identidade 2 para a resolução dessa questão. Existem $\binom{10}{6} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$ maneiras de escolher 6 filhos dentre os 10 filhos para ocupar um dos quartos o que seria equivalente a escolher $10-6=4$ filhos para não estar no primeiro quarto e logicamente, isso pode ser feito de $\binom{10}{10-6} = \binom{10}{4} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$ maneiras. Portanto a alternativa correta é a letra $c)$.

6. *(UFSM – 2014) Para cuidar da saúde muitas pessoas buscam atendimento em cidades maiores onde há centros médicos especializados e hospitais mais equipados muitas vezes o transporte até essa cidade é feito por vans disponibilizados pelas prefeituras. Em uma van com* 10 *assentos viajaram* 9 *passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os nove passageiros podem ocupar suas poltronas na van?*

$a)4.032$

$b)36.288$

$c)40.320$

$d)362.880$

$e)403.20$

Solução: Para resolver esse problema pode-se utilizar a identidade 1. Existem $9!$ maneiras desde que o primeiro passageiro pode ser escolhido de 9 maneiras, o próximo passageiro pode ser escolhido de 8 maneiras, e assim por diante até que sobre apenas um passageiro. Ou seja, $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$. Outra forma de raciocinar seria selecionar os passageiros que estão entre os primeiros k nesse arranjo. Existem $\binom{9}{k}$ maneiras de escolher qual dos 9 passageiros aparece entre os primeiros k. Uma vez escolhidos, existem $k!$ maneiras de organizá-los, seguidos por $(9-k)!$ maneiras de organizar os passageiros restantes. Portanto, os passageiros de 1 a 9 podem ser arranjados em $\binom{9}{k} k!(9-k)! = \dfrac{9!}{k!(9-k)!} \cdot k!(9-k)! = 9! = 362880$ maneiras. Portanto a alternativa correta está na letra $d)$.

7. *(IFPE – 2016) O auditório do IFPE, Campus Vitoria de Santo Antão, tem formato retangular e dispõe de quatro aparelhos de ar-condicionado instalado em cada uma de suas quatro paredes. Em todos os eventos, pelo menos um aparelho deve estar ligado para a refrigeração do ambiente. De quantos modos diferentes este auditório pode ser refrigerado?*

$a)4$

$b)16$

$c)8$

$d)64$

$e)15$

Solução: : Para resolver essa questão pode-se utilizar a identidade 4. Como para $0 \leq k \leq 4$, existem $\binom{4}{k}$ maneiras de escolher k ar-condicionados que estarão ligados, existem $\sum\limits_{k=0} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1+4+6+4+1 = 16$ maneiras.

Porém, como o problema exige que pelo menos um aparelho deve estar ligado deve-se excluir $\binom{4}{0} = 1$, que representa as possibilidades em que nenhum aparelho estaria ligado. Portanto, existem $16-1 = 15$ possibilidades de que ao menos 1 aparelho esteja ligado. Por outro lado, pode-se decidir, aparelho por aparelho, se o mesmo deve ou não estar ligado. Como existem duas possibilidades para cada aparelho (estar ou não ligado), existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ possibilidades. Porém, deve-se excluir a possibilidade em que todos os 4 aparelhos estariam desligados $(16-1)$ ficando assim com 15 possibilidades de que ao menos um aparelho esteja ligado. Dessa forma, a alternativa correta para essa questão é a letra $e)$.

8. *(Enem 2022) A World Series é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão. Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre* $\frac{1}{2}$ *Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da World Series?*

$a)\dfrac{35}{64}$

$b)\dfrac{40}{64}$

$c)\dfrac{42}{64}$

$d)\dfrac{44}{64}$

$e)\dfrac{52}{64}$

Solução: Para resolver essa questão pode-se utilizar a identidade 9, que é conhecida como teorema binomial e é uma identidade bem importante sendo muito usada para resolver problemas de probabilidade e aplicada em outras áreas do conhecimento como a Biologia, no estudo da Genética. Para esse problema, deve-se reconhecer o que cada uma das incógnitas da identidade 9 irá representar:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

x: representa a probabilidade de um dos times vencer

y: representa a probabilidade do outro time vencer

n: representa o total de partidas

Dessa forma, tem-se que:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \frac{1}{2}^k \cdot \frac{1}{2}^{6-k} = 1$$

O total de partidas é considerado 6 e não 7 pois já é considerado a vitória de um dos times no primeiro jogo e como o time que venceu a primeira partida precisa vencer, no mínimo, mais 3 partidas dentre as 6 restantes para ser campeão, tem-se que a probabilidade desse time ser campeão é:

$$1-\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6-\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5-\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1-\frac{1}{64}-\frac{6}{64}-\frac{15}{64}=\frac{42}{64}.$$

Portanto, a alternativa correta está na letra $c)$.

9. *(Enem 2017) Numa avenida existem* 10 *semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de* $\frac{2}{3}$ *e a de acusar a cor vermelha é de* $\frac{1}{3}$ *Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos. Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?*

$a)\dfrac{10\cdot 2}{3^{10}}$

$b)\dfrac{10\cdot 2^9}{3^{10}}$

$c)\dfrac{2^{10}}{3^{100}}$

$d)\dfrac{2^{90}}{3^{100}}$

$e)\dfrac{2}{3^{10}}$

Solução: Para essa questão também pode-se utilizar a identidade 9.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

x: representa a probabilidade do farol acusar a cor verde.

y: representa a probabilidade do farol acusar a cor vermelha.

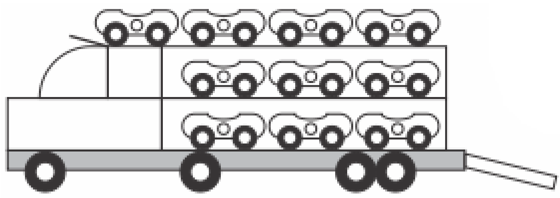
n: representa a quantidade total de semáforos.

Porém, como o problema pede a probabilidade de que o motorista tenha avistado exatamente um sinal na cor verde, basta tomar $k = 1$. Dessa maneira tem-se:

$$\binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} = \binom{10}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{10-1} = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}.$$

Portanto a alternativa correta está na letra $a)$.

10. *(Enem 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

$a) C_{6,4}$

$b) C_{9,3}$

$c) C_{10,4}$

$d)6^4$

$e)4^6$

Solução: Para resolver essa questão pode-se utilizar a identidade 14:

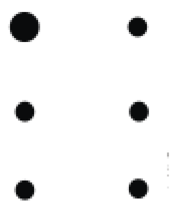
$$\left(\binom{n}{m-n}\right) = \binom{m-1}{n-1}.$$

onde n representa as cores e m representa o total de carrinhos. Dessa forma, obtém-se:

$$\left(\binom{4}{10-4}\right) = \binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3}.$$

Dessa forma, a resposta correta está na letra $b)$.

11. *(Enem 2005) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por*



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é

$a)12.$

$b)31.$

$c)36.$

$d)63.$

$e)720.$

Solução: Para resolver essa questão pode-se utilizar a identidade 4. Como para $0 \leq k \leq 6$, existem $\binom{6}{k}$ maneiras de escolher k pontos que estarão destacados entre os demais, existem $\sum\limits_{k=0} \binom{6}{k} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ maneiras. Porém, como o problema exige que pelo menos um ponto deve estar destacado entre os demais, deve-se excluir $\binom{6}{0} = 1$, que representa a possibilidade em que nenhum ponto esteja destacado. Portanto, existem $64 - 1 = 63$ possibilidades de que ao menos 1 ponto esteja destacado entre os demais. Por outro lado, pode-se decidir, ponto por ponto, se o mesmo deve ou não estar destacado. Como existem duas possibilidades para cada ponto (estar ou não destacado), existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ possibilidades. Porém, deve-se excluir a possibilidade em que todos os 4 aparelhos estariam desligados $(64 - 1)$ ficando assim com 63 possibilidades de que ao menos um ponto esteja destacado. Dessa forma, a alternativa correta para essa questão é a letra $d)$.

12. *(ESA 2022) A expressão que fornece o número de anagramas da palavra SARGENTO, onde as vogais aparecem em ordem alfabética, é:*

$a)\dfrac{8! - 5!}{3!}$

$b)\dfrac{8!}{3!}$

$c)8!$

$d)\dfrac{8! - 3!}{5!}$

$e)8! - 3!$

Solução: Como as vogais devem estar em ordem alfabética deve-se considerar o diagrama a seguir.

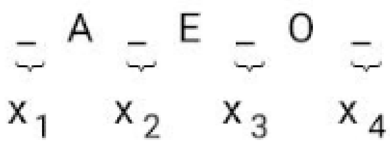


Figura 4.1: Representação em ordem alfabética.

Se x_1, x_2, x_3 e x_4 denotam a quantidade de letras que podem ser colocadas em cada um dos espaços em branco e as letras que restam são: S, R, G, N e T, então o número de maneiras de ocupar esses espaços corresponde ao número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$. Logo, pode-se usar a identidade 13 para resolver a questão.

$$\left(\!\!\binom{4}{5}\!\!\right) = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!}.$$

Ademais, pode-se permutar as letras que serão colocadas nos espaços em branco de $P_5 = 5!$ maneiras. Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot 5! = \dfrac{8!}{3!}$

Portanto, a alternativa correta é a letra $b)$.

13. *(FGV 2022) Um garoto brinca com um conjunto de 7 blocos que podem ser inseridos em 3 hastes distintos. Os blocos e as hastes possuem, dois a dois, cores distintas. Na brincadeira o garoto pode colocar os blocos em uma ou mais hastes e a ordem dos blocos nas hastes e a cor da haste em que cada bloco foi colocado diferencia cada montagem feita. O número de montagens distintas que esse garoto poderá fazer usando os 7 blocos é*

$a)30240.$

$b)105840.$

$c)181440.$

$d)211680.$

$e)236880.$

Solução: Usando a identidade 13, tem-se:

$$\left(\!\!\binom{3}{7}\!\!\right) = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!\cdot 2!} = 36$$

Como os blocos possuem cores distintas, o número de montagens possíveis é:

$$36\cdot 7! = 36\cdot 5040 = 181440.$$

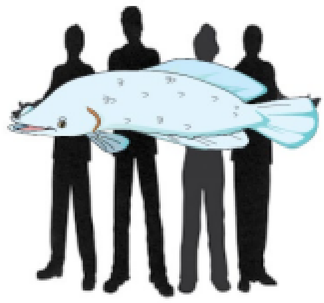
Portanto, a alternativa correta é a letra $c)$.

14. - *(UEA – 2015) Observe a imagem em que quatro pessoas posicionadas lado a lado seguram um exemplar de pirarucu.*

O número de diferentes maneiras que essas pessoas poderiam estar posicionadas nessa sequência para a produção da imagem é

$(A)20.$

$(B)24.$



$(C)16.$

$(D)12.$

$(E)28.$

Solução: Para resolver esse problema pode-se utilizar a identidade 1. Existem $4!$ maneiras de posicionar as 4 pessoas. Outra maneira de resolver o problema seria selecionar as pessoas que estão entre os primeiros k nesse arranjo. Existem $\binom{4}{k}$ maneiras de escolher qual das 4 pessoas aparece entre os primeiros k. Uma vez escolhidos, existem $k!$ maneiras de organizá-los, seguidos por $(4-k)!$ maneiras de organizar as pessoas restantes. Portanto, essas pessoas podem ser arranjados de $\binom{4}{k}k!(4-k)! = \frac{4!}{k!(4-k)!} \cdot k!(4-k)! = 4! = 24$ maneiras.

Portanto a alternatica correta está na letra $b)$.

15. *(UEA 2018 - Conhecimentos específicos) Deseja-se formar uma comissão composta de três membros. Sabendo-se que as escolhas devem ser feitas dentre um grupo de* 10 *pessoas, o número de diferentes comissões que poderão ser formadas é igual a*

$(A)480.$

$(B)720.$

$(C)630.$

$(D)120.$

$(E)240.$

Solução: Pode-se utilizar a identidade 2 para a resolução dessa questão. Existem $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$ maneiras de escolher 3 membros para comissão dentre as 10 pessoas o que é equivalente a escolher $10-3=7$ pessoas para não estar na comissão, ou seja, há $\binom{10}{10-3} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$ possibilidades para isso.

Para essa questão pode-se utilizar também a identidade 3. Por um lado, para saber a quantidade de comissões com 3 pessoas que se pode formar dentre as 10 possíveis pessoas faz-se: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = 120$ e por outro lado a contagem pode ser feita de modo que uma determinada pessoa esteja ou não entre as 3 escolhidas. Por exemplo, há $\binom{9}{3}$ escolhas possíveis considerando que uma determinada pessoa não esteja entre as escolhidas e existem $\binom{9}{2}$ escolhas possíveis considerando que essa pessoa esteja entre as escolhidas. Dessa maneira, existem $\binom{9}{3} + \binom{9}{2}$ maneiras de escolher as 3 pessoas para compor a comissão. Ou seja, $\binom{9}{3}+\binom{9}{2} = \frac{9!}{3! \cdot 6!}+\frac{9!}{2! \cdot 7!} = 84 + 36 = 120$.

Portanto, a resposta correta está na letra $d)$.

16. *(UEA 2019 - Conhecimentos específicos) Em uma clínica trabalham* 9 *enfermeiros. O número de equipes distintas, constituídas cada uma por* 3 *enfermeiros, que podem ser formadas para plantões em finais de semana é*

$(A) 126.$

$(B) 252.$

$(C) 168.$

$(D) 84.$

$(E) 336.$

Solução: Para resolver esse problema pode-se utilizar as mesmas identidades usadas no problema anterior, as identidades 2 e 3. Usando a identidade 2, existem $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ maneiras de escolher 3 enfermeiros para equipe dentre os 10 enfermeiros, o que é equivalente a escolher $9-3=6$ enfermeiros para não estar na equipe, ou seja, há $\binom{9}{9-3} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$ possibilidades para isso. Agora usando a identidade 3, tem-se por um lado, que a quantidade de equipes com 3 enfermeiros que se pode formar dentre os 9 enfermeiros disponíveis é $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ e por outro lado, a contagem pode ser feita de modo que um determinado enfermeiro esteja ou não entre os 3 escolhidos. Por exemplo, há $\binom{8}{3}$ escolhas possíveis considerando que um determinado enfermeiro não esteja entre os escolhidos e existem $\binom{8}{3}$ escolhas possíveis considerando que esse enfermeiro esteja entre os escolhidos. Dessa maneira, existem $\binom{8}{3} + \binom{8}{2}$ maneiras de escolher os 3 enfermeiros para compor a equipe. Ou seja,

$\binom{8}{3} + \binom{8}{2} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 56 + 28 = 84.$
Portanto, a alternativa correta é a letra $d)$.

17. *(UFPR 2022) Após pagar o valor da conta da pizzaria, Ana, Beatriz e Carlos voltaram para casa. No caminho, ninguém se recordava de quanto foi exatamente o valor da conta. Ana lembrava que a conta deu um valor inteiro e menor que 200 reais. Beatriz lembrava que deu um valor maior que 50 reais. Carlos lembrou que a soma dos algarismos do valor da conta dava 6. Admitindo que todos estavam certos, quantos são os valores possíveis para a conta?*

$(A)6.$

$(B)7.$

$(C)8.$

$(D)9.$

$(E)10.$

Solução: Os valores possíveis com 2 algarismos são 51 e 60. Já os valores possíveis com 3 algarismos são da forma $1xy$. Assim, deve-se ter $x + y = 5$. Ora, mas o número de soluções inteiras e não negativas dessa equação podem ser encontradas através da identidade 13. Dessa maneira, faz-se:

$$\left(\binom{2}{5}\right) = \binom{2+5-1}{5} = \binom{6}{5} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6.$$

Agora juntando as soluções com 2 algarismos comas soluções com 3 algarismos, o total de soluções é $2 + 6 = 8$.

Portanto, a alternativa correta é a letra $c)$.

18. *(UFSM 2022) Para a composição da comissão de formatura de Veterinária de 2021 da UFMS, há 8 estudantes, sendo 5 homens e 3 mulheres. A comissão deverá ser composta por 6 estudantes. Se 2 mulheres são de caráter obrigatório estar na comissão, o número de possibilidades para a composição da comissão de formatura é:*

$(A)5.$

$(B)8.$

$(C)25.$

$(D) 56.$

$(E) 120.$

Solução: Por um lado, a comissão com 6 estudantes escolhidos entre 8 pessoas, sendo 5 homens e 3 mulheres, é dada por $\binom{5+3}{6} = \binom{8}{6} = 28$. Por outro lado, a contagem pode ser feita selecionando primeiro os homens que farão parte dessa comissão de 3 pessoas e o restante das vagas selecionando as mulheres. Isso pode ser feito como segue $\sum_{j=0}^{6}\binom{5}{j}\binom{3}{6-j} = \binom{5}{0}\binom{3}{6} + \binom{5}{1}\binom{3}{5} + \binom{5}{2}\binom{3}{4} + \binom{5}{3}\binom{3}{3} + \binom{5}{4}\binom{3}{2} + \binom{5}{5}\binom{3}{1} + \binom{5}{6}\binom{3}{0} = 0+0+0+10+15+3+0 = 28.$

Essa seria a resposta para o problema caso não houvesse a condição de que deve haver pelo menos 2 mulheres na comissão. Porém, como o problema pede que ao menos 2 mulheres sejam escolhidas, então isso pode ser feito de $\sum_{j=0}^{4}\binom{5}{j}\binom{3}{6-j} = \binom{5}{0}\binom{3}{6} + \binom{5}{1}\binom{3}{5} + \binom{5}{2}\binom{3}{4} + \binom{5}{3}\binom{3}{3} + \binom{5}{4}\binom{3}{2} = 0+0+0+10+15 = 25.$

Portanto, a alternativa correta é a letra $c)$.

19. *(ESPM 2019) O número de soluções naturais da equação* $2^{x-1} \cdot 2^{y+7} \cdot 2^{z-6} = 32$ *é igual a:*

$(A) 21.$

$(B) 12.$

$(C) 15.$

$(D) 32.$

$(E) 18.$

Solução: $2^{x-1+y+7+z-6} = 2^5 \to 2^{x+y+z} = 2^5 \to x+y+z = 5$

Como o problema quer soluções naturais, agora é só usar a identidade 13 para resolver a equação acima. Dessa maneira, tem-se que

$$\left(\binom{3}{5}\right) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra $a)$.

20. *(UCS 2016- adaptada) Um supermercado está selecionando, entre* 15 *candidatos que se apresentaram,* 3 *funcionários para desempenhar a função de "caixa" e entre os* 3 *selecionados será selecionado um chefe de "caixa". De quantas maneiras diferentes pode ser feita essa escolha?*

$(A) 5.$

$(B) 45.$

$(C) 215.$

$(D) 360.$

$(E) 1365.$

Solução: Para resolver essa questão pode-se usar a identidade 10. Primeiramente existem $\binom{15}{3}$ maneiras de escolher as 3 pessoas que serão os caixas entre as 15 pessoas disponíveis e depois existem $\binom{3}{1}$ maneiras de escolher o chefe entre esses 3. Ou seja, há $\binom{15}{3}\binom{3}{1} = 1365$ maneiras de fazer isso. Por outro lado, pode-se primeiramente escolher entre as 15 pessoas quem será o chefe entre os 3 caixas e entre os $15 - 1 = 14$ membros restantes escolhem-se os outros $3 - 1 = 2$ caixas restantes. Isso pode ser feito de $\binom{15}{1}\binom{14}{2} = 1365$ maneiras. Logo, a alternativa correta é a letra $e)$.

Capítulo 5

Prova Combinatória do Pequeno Teorema de Fermat e do Teorema de Wilson

Ao longo do curso de mestrado, estudamos tanto o Pequeno Teorema de Fermat quanto o Teorema de Wilson, porém foram utilizadas apenas Teoria aritmética dos números para realizar tais demonstrações. Entretanto, nesta seção, serão usados apenas argumentos combinatórios para demonstrar [1] os mesmos teoremas.

Teorema 5.0.1. ***(Pequeno Teorema de Fermat).*** *Se p é um número primo e n é um número inteiro positivo, então:*

$$p \mid (n^p - n).$$

Demonstração. Vamos imaginar que queremos formar correntes de p contas coloridas cada, e que temos contas suficientes em mãos para nos permitir o uso ilimitado de cada uma das n cores. Então, quantas correntes diferentes podemos fazer? Pelo princípio multiplicativo, é óbvio que se pode ter n^p diferentes correntes, pois cada corrente pode ser escolhida exatamente de n maneiras, e existem p escolhas para cada corrente. Podemos notar também que entre as n^p correntes que podem ser formadas, n correntes possuem somente uma cor. Por exemplo, vamos particularizar um caso em que $n = 3$ e $p = 3$. Nessa situação, $n^p = 3^3 = 27$, ou seja, existem 27 correntes distintas que podem ser formadas, das quais podemos observar que 3

[1] Que podem ser encontrados na obra de (SANTOS, 2005)

delas tem contas da mesma cor. Então, podemos organizar as 24 outras correntes em 8 grupos de 3 correntes onde cada uma dessas 3 correntes pode ser obtida uma da outra removendo uma conta da parte de cima e colocando-a na parte de baixo da corrente. Quando fazemos isso, estamos gerando uma nova corrente, porém a pulseira resultante é a mesma. Veja as figuras abaixo:

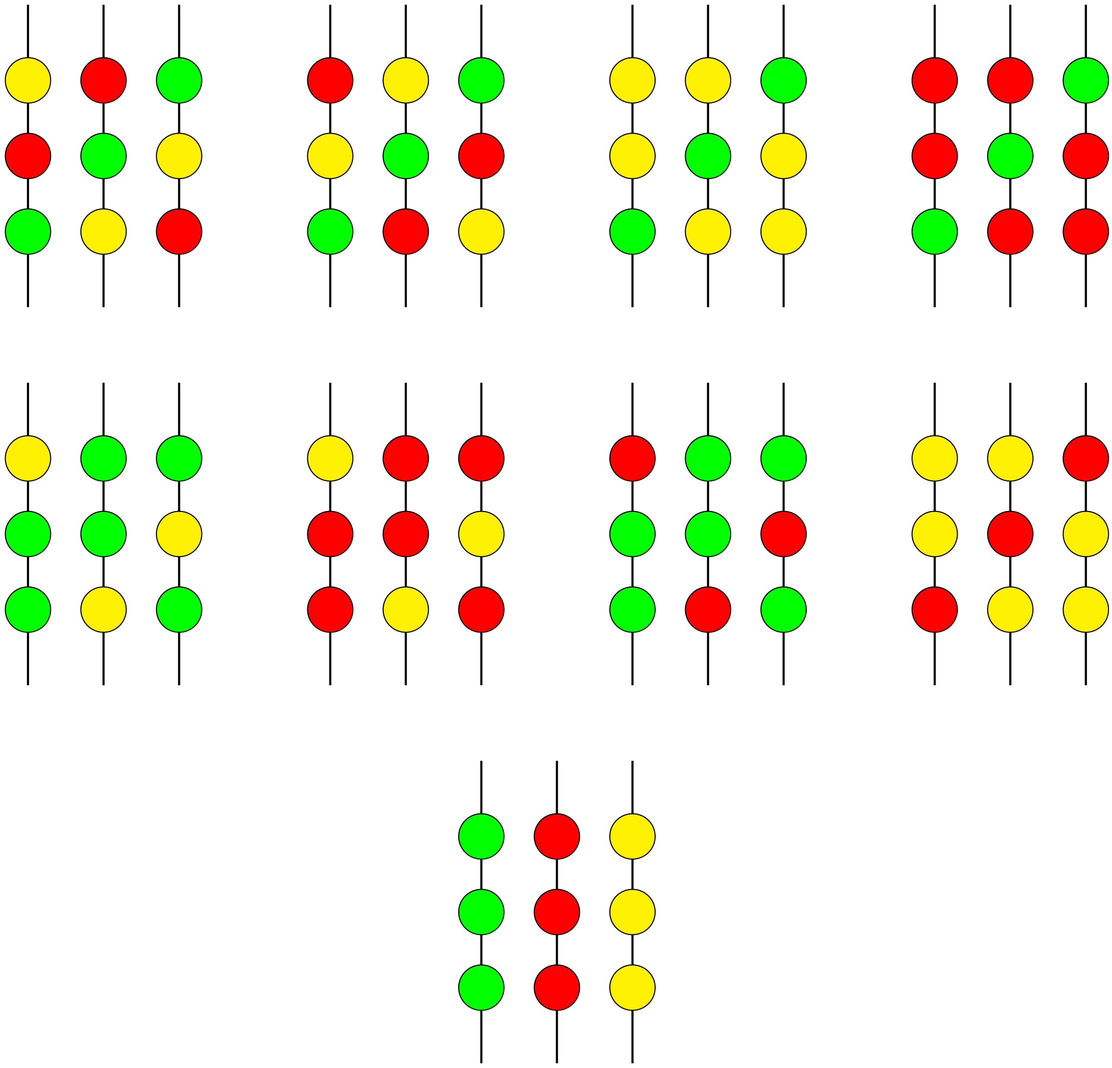


Figura 5.1: Correntes de 3 contas utilizando 3 cores.

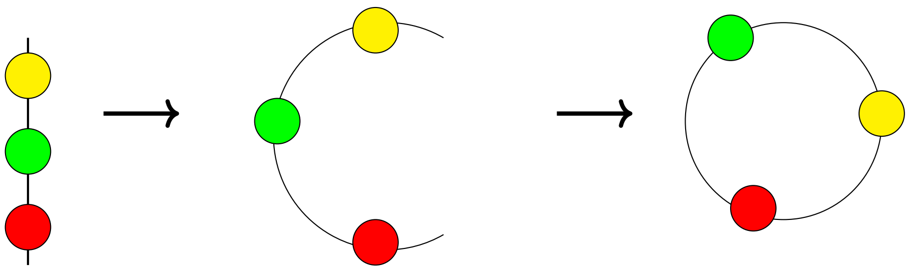


Figura 5.2: Pulseira resultante.

Seja k o número mínimo de vezes que essa alteração pode ser repetida antes que a corrente original seja refeita. Fica fácil notar que $k > 1$, já que consideramos correntes que não têm uma única cor. Como o número mínimo de cores disponíveis é 2, já que apenas uma cor não pode formar uma corrente de cores diferentes, após uma troca de $2 \cdot k$, a pulseira original será reduplicada, e o mesmo acontecerá com $3 \cdot k, 4 \cdot k$, etc. De acordo com o algoritmo da divisão euclidiana, existe um único q e r tal que $p = qk + r \quad (0 \leq r < k)$. Como uma corrente é reproduzida após qk alterações e também após p etapas, serão necessárias r etapas após a qk-ésima etapa para obter uma reprodução das cores que se tinha inicialmente. Como $r < k$ e k é o menor inteiro positivo de etapas para se obter uma reprodução da coloração inicial, então $r = 0$. Dessa maneira, $p = qk$ e portanto, $k = p$ pois k é maior que 1 e p é primo. Como consequência, as $n^p - n$ correntes podem ser agrupadas em grupos de p correntes cada, e é claro que cada grupo gera uma pulseira diferente. Desta forma, o número de pulseiras N multiplicado por p fornece o número de correntes que não são formadas de uma única cor. Como já vimos anteriormente, o número de correntes que não tem uma única cor é dado por $n^p - n$, então podemos concluir que $p \cdot N = (n^p - n)$, logo $p \mid (n^p - n)$. □

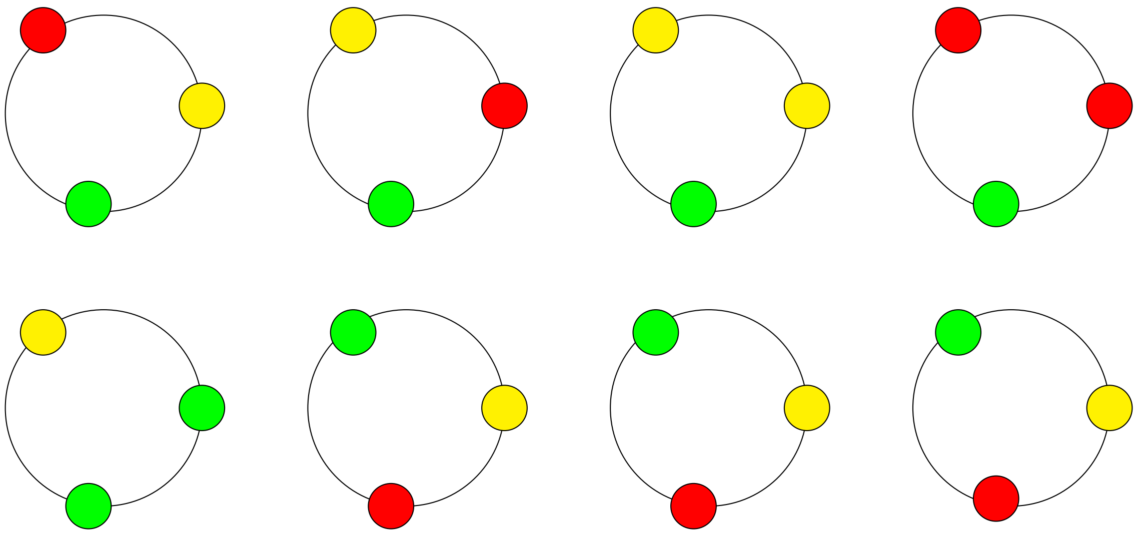


Figura 5.3: Pulseiras Resultantes.

Teorema 5.0.2. *(**Wilson**).*

Se p é primo então $(p-1)! \equiv -1 (mod\, p)$.

Demonstração. Analisando primeiramente para o caso $p = 2$ o resultado é óbvio, pois $(2-1)! \equiv -1(mod\ 2)$. Vamos considerar, dessa maneira, que p seja ímpar. Consideramos então p pontos distribuídos em um círculo de modo que eles o dividem em p arcos iguais. Quanto são os polígonos que podemos formar unindo esses pontos (cruzamento de arestas são permitidos). Tais polígonos são chamados de p-ágonos estrelados pelo fato de seus vértices serem os de um polígono regular convexo de p lados. É fácil verificar que o número de polígonos é $p!$, pois temos p escolhas para o primeiro vértice, $(p-1)$ para o segundo, $(p-2)$ para o terceiro e assim sucessivamente até o último vértice. No entanto, esses p-ágonos podem ser escritos de $2 \cdot p$ maneiras diferentes, ou seja, podemos iniciar a contagem em qualquer um dos p vértices e escolher entre as duas arestas daquele vértice como a inicial. Então, na verdade obtemos $\frac{p!}{2p}$ diferentes p-ágonos.

Por exemplo, vamos particularizar o caso em que $p = 5$. A figura a seguir ilustra os 12 pentágonos estrelados.

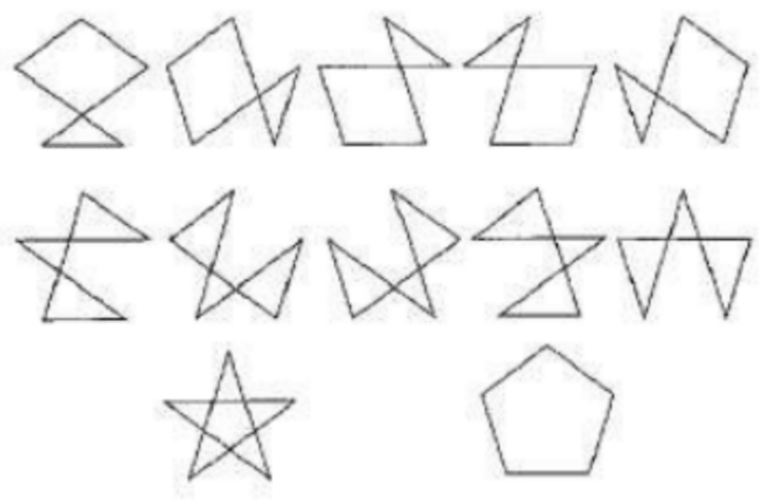


Figura 5.4: Pentágonos estrelados.

Dos $\frac{p!}{2p}$ p-ágonos, exatamente $\frac{p-1}{2}$ não ficam alterados, quando submetidos a uma rotação de $\frac{2\pi}{p}$ radianos. O valor de $\frac{p-1}{2}$ é devido a escolha de um vértice para começar a construir o p-ágono, e ao fazer isso, restam exatamente $p-1$ vértices, então ao traçar um diâmetro desse primeiro vértice, teremos a mesma quantidade de vértices de cada lado desse diâmetro, sendo essa quantidade par. Perceba que essa rotação nada mais é que sair de um ponto, dos p pontos que dividem a circunferência, e ir para o ponto seguinte. Esses, são chamados de p-ágonos estrelados regulares, pelo fato de que são estrelas de p pontos onde cada ponto é vértice de um ângulo de

$\dfrac{(2k+1)\pi}{p}$ radianos, onde $0 \leq k < \dfrac{p-1}{2}$.

No exemplo que particularizamos, ou seja, $p = 5$, existem 2 desses p-ágonos regulares. Os restantes $\dfrac{p!}{2p} = \dfrac{p-1}{2}$ p-ágonos estrelados pertencem, obviamente, a conjuntos de p elementos onde os membros de cada conjunto podem ser obtidos de um único elemento por sucessivas rotações de 2π radianos. A ideia de que existem p elementos em cada conjunto é similar como na demonstração do Pequeno Teorema de Fermat, onde foi mostrado que cada pulseira é oriunda de p sequências de contas. Logo, o número total de conjuntos é:

$$\frac{\dfrac{p!}{2p} - \dfrac{(p-1)}{2}}{p} = \frac{(p-1)! - (p-1)}{2p}.$$

Como $2p \mid [(p-1)! - p + 1]$, então $p \mid [(p-1)! + 1]$. $\square$

Considerações Finais

Geralmente, os professores de Matemática do Ensino Básico iniciam suas aulas de análise combinatória com a explicação da teoria, ou seja, passando as fórmulas de permutações, arranjos, combinações, além de outras, para somente após toda teoria aplicá-la na resolução de exercícios. Nesta dissertação, foi apresentado que é possível fazer isso em conjunto, isto é, através de um problema, geralmente do cotidiano do aluno, desenvolver a teoria e demonstrar identidades matemáticas.

Essa metodologia de ensino da análise combinatória provoca um interesse muito maior por parte dos alunos na disciplina, visto que, eles mesmos percebem que a Matemática está em tudo o que eles fazem, está no dia a dia de cada um.

Concluímos também, que com a utilização de provas combinatórias, que exigem do aluno desenvolver estratégias diferentes para resolver um problema, é muito mais produtivo do que simplesmente decorar fórmulas e identidades, visto que, foram demonstradas muitas identidades onde cada uma exigia estratégias diferentes para sua resolução e posterior aplicação nos exercícios de vestibular.

Mostramos também que o Pequeno Teorema de Fermat e Wilson podem ser demonstrados combinatorialmente evidenciando que na matemática existem muitos artifícios e métodos para a resolução de problemas.

Dessa forma, com o que foi apresentado nesse trabalho, esperamos que os alunos apreciem mais a Análise Combinatória e desmistifiquem a ideia de que é um conteúdo difícil de aprender para os alunos e de ensinar para os professores.

Referências Bibliográficas

BEELER, A. R. ***An Introducion to Combinatorics and Its Applications.*** Switzerland: Springer, 2015.

BENJAMIN, A.; QUINN, J. ***Proofs that Really Count. The Art of Combinatorial Proof.*** Washigton, DC: Mathematical Association of America, 2003.

BRASIL. ***Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental.*** Brasília: [s.n.], 1997.

BRASIL. ***Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental.*** Brasília: [s.n.], 1998.

BRASIL. ***Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.*** [S.l.]: Brasília, 2018.

BRASIL. ***Guia de Livros Didático: PNLD 2021: Conexões – Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2020a.*** [S.l.: s.n.], 2020.

CHIARA, I. et al. ***Normas de documentação aplicadas à área de Saúde.*** Rio de Janeiro: E-papers, 2008.

GIL, C. ***Como elaborar projetos de pesquisa.*** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

LEONARDO. ***BRASIL. Guia de Livros Didático: PNLD 2021: Conexões – Matemática e suas Tecnologias.*** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2020.

LLOYD, R. W. E. ***Combinatorics.*** Rio de Janeiro: SBM, 1990.

MINAYO, S. ***O desafio do conhecimento.*** 4. ed. São Paulo: Hucitec, 2008.

MORGADO, A. et al. ***Análise Combinatória e Probabilidade – com as soluções dos exercícios.*** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

RODA, T. ***Análise Combinatória: Uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas.*** Dissertação (mestrado em ensino de ciências exatas). São Carlos: UFSCar, 2018.

SANTOS, J. ***Introdução à teoria dos números.*** 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

SANTOS, J. ***Introdução à Análise Combinatória.*** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

TEIXEIRA. ***BRASIL. Guia de Livros Didático: PNLD 2021: Conexões – Matemática e suas Tecnologias.*** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2020.

VASQUEZ, F. N. C. ***Análise Combinatória: Alguns Aspéctos históricos e uma Abordagem Pedagógica.*** Recife: Tese (VIII Encontro Nacional de Educação Matemática) —UFPE, 2004.