UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

José Ailton Medeiros Siebra

ELABORAÇÃO DE UM CURSO ONLINE ABERTO E MASSIVO – MOOC DE INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA PARÁBOLA ATRAVÉS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Juazeiro do Norte – CE
2023

José Ailton Medeiros Siebra

ELABORAÇÃO DE UM CURSO ONLINE ABERTO E MASSIVO – MOOC DE INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA PARÁBOLA ATRAVÉS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Valdinês Leite de Sousa Júnior
Coorientadora: Erica Boizan Batista

Juazeiro do Norte – CE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

S571e Siebra, José Ailton Medeiros.

Elaboração de um Curso Online Aberto e Massivo – MOOC de introdução ao estudo da parábola através da função quadrática / José Ailton Medeiros Siebra. – 2023.

155 f.: il. color. 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Junior.
Coorientação: Prof. Dra. Érica Boizan Batista.

1. Matemática - Cursos Abertos Massivos Online (MOOCs). 2. Matemática - parábola. 3. Função quadrática. 4. Acesso à educação. I. Título.

CDD 510.785

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça - CRB 3/ 925

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ELABORAÇÃO DE UM CURSO ONLINE ABERTO E MASSIVO – MOOC DE INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA PARÁBOLA ATRAVÉS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

José Ailton Medeiros Siebra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 26 de julho de 2023.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
VALDINES LEITE DE SOUSA JUNIOR
Data: 24/08/2023 15:30:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

___

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Orientador- UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
ERICA BOIZAN BATISTA
Data: 24/08/2023 17:00:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

___

Profa. Dra. Érica Boizan Batista
Coorientadora- UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
CLARICE DIAS DE ALBUQUERQUE
Data: 24/08/2023 19:36:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

___

Profa. Dra. Clarice Dias de Albuquerque
Examinadora interna – UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
LEILYANNE SILVA DE MORAIS
Data: 24/08/2023 19:11:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

___

Profa. Ma. Leilyanne Silva de Moraes
Examinadora externa - SEDUC/CE

AGRADECIMENTOS

A Deus, Autor e Mantenedor da Vida.

À minha esposa que sempre me incentiva e torce para que eu progrida nos meus estudos.

Aos meus filhos Davi, Ana Maria e Levi, que parecem ter por certo que eu vou sempre conseguir.

Aos meus parentes e amigos que me sustentam com palavras e orações quando percebem que a luta não está fácil.

Aos meus colegas de trabalho pela torcida.

Aos meus colegas de curso, Anízio, Brito, José Carlos, Kennedy e Plácido, irmãos que eu não conhecia, e que me abraçaram como se tivéssemos nos separado no nascimento. Sempre presentes, sempre leais, sempre solícitos, sempre pacientes.

Aos meus professores, que com muita maestria me conduziram até aqui. Por repartirem seus saberes com responsabilidade, com dedicação, com paciência e com imparcialidade.

RESUMO

O acesso à educação de qualidade ainda é uma realidade muito distante para grande parte das pessoas ao redor do mundo. Por isso mesmo, muito pode ser feito para garantir a objetivação desse direito. A Educação Aberta propõe isso, oferecendo, além de outros instrumentos, os Cursos Online Abertos e Massivos – MOOC. O presente trabalho é a produção de um curso dessa natureza, que tem como tema a Introdução ao Estudo da Parábola através da Função Quadrática. O curso oferece slides, vídeo-aulas e apostilas que proporcionarão ao aluno se apropriar desse conteúdo que é estudado na Educação Básica, é obrigatório em concursos, e também é pré-requisito para as disciplinas de Cálculo do Ensino Superior. Ele estará disponível no site https:/poca.ufscar.br/, e o objetivo é dar ao maior número possível de pessoas acesso e apropriação desse conteúdo.

Palavras-chave: Acesso. Minicurso. Função Quadrática. Parábola. MOOC.

ABSTRACT

Access to quality education is still a very distant reality for a large part of the people around the world. For this very reason, much can be done to ensure the objectification of this right. Open Education proposes to this, offering in addition to other instruments, the Open and Massive Online Courses – MOOC. The present work is the production of a course of this nature, which has as its theme the Introduction to the Study of the Parable through the Quadratic Function. The course offers slides, video-lessons and handouts that will provide the student to appropriate this content that is studied in Basic Education, is required in competitions, and is also a prerequisite for the disciplines of Calculus of Higher Education. It will be available on the site https:/poca.ufscar.br/, and the goal is to give as many people as possible access and appropriation of this content.

Keywords: Access. Minicourse. Quadratic Function. Parabola. MOOC.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

1. INTRODUÇÃO

No livro O Homem Que Calculava, Malba Tahan nos conta a lenda do jogo de xadrez.

É interessante ver como um poderoso soberano sucumbe ao conhecimento despretensioso de um sábio súdito. Intimado pelo soberano a declarar o que deseja como recompensa pela invenção do fascinante jogo, o perspicaz súdito faz um pedido pelo qual o governante se torna refém de suas próprias palavras. Nem em dois mil séculos ele conseguiria ter a quantidade de 2^{63} grãos de trigos para honrar a palavra que emprenhara ao criador do jogo. (TAHAN, 2013).

Para Chauí

> ...os poderosos têm medo do pensamento, pois o poder é mais forte se ninguém pensar, se todo mundo aceitar as coisas como elas são, ou melhor, como nos dizem e nos fazem acreditar que elas são. Para os poderosos de Atenas, Sócrates tornara-se um perigo, pois fazia a juventude pensar. (CHAUI, 2000, p.45)

Será que são histórias como essa do livro de Malba Tahan que levam os poderosos a terem tanto medo dos sábios? Porventura é isso que motiva os detentores do poder a buscarem, de todas as formas que estiverem ao seu alcance, o domínio também do conhecimento?

Parece que muito antes de Francis Bacon, muitos outros perceberam que *scientia potestas est* - conhecimento é poder. (BAC0N, 1597).

O poder que o conhecimento dá não precisa ser necessariamente poder de dominação, mas é neste sentido que é utilizado repetidas vezes na história.

As potências mundiais sempre disputaram a dianteira no domínio do conhecimento em áreas específicas. Torna-se irremediavelmente dominador, o povo ou nação que tem as melhores técnicas de dominação, onde a força conta, mas tem menos importância do que o assenhoreamento de conhecimentos específicos, sejam eles bélicos, náuticos, econômicos, políticos, espaciais, ou de outra natureza estratégica qualquer.

Sendo o conhecimento um instrumento de dominação, é possível a sua democratização?

O movimento para uma Educação Aberta se propõe a buscar essa democratização. E como ele se caracteriza?

> Esse movimento emergente de educação combina a tradição de partilha de boas ideias com colegas educadores e da cultura da Internet, marcada pela colaboração e interatividade. Esta metodologia de educação é construída sobre a crença de que todos devem ter a liberdade de usar, personalizar, melhorar e redistribuir os recursos educacionais, sem restrições. Educadores, estudantes e outras pessoas que partilham esta crença estão unindo-se em um esforço mundial para tornar a educação mais acessível e mais eficaz. (DECLARAÇÃO DA CIDADE DO CABO, 2007)

No bojo do movimento para uma Educação Aberta surgem os Recursos Educacionais Abertos – REA, que além de outros produtos, oferecem os Cursos Online Abertos e Massivos – MOOC.

Este trabalho trata da elaboração de um MOOC com foco na introdução ao estudo da parábola por meio da função quadrática.

Escolhemos esse tema devido ao interesse em atender às demandas de alunos do nono ano do ensino fundamental, ensino médio e cursos superiores relacionados ao assunto. Especialmente os alunos que enfrentaram desafios e que tiveram suas necessidades de aprendizado agravadas durante a pandemia da COVID 19. Desafios estes que incluem o fechamento das escolas e a falta de acesso a recursos tecnológicos adequados para um ensino remoto de qualidade.

O MOOC foi estruturado dentro de uma abordagem rigorosa quanto à teoria, mas usando uma metodologia que o tornasse interessante e menos cansativo para quem quiser estudar por ele. É um minicurso que se propõe oferecer com qualidade, um conteúdo fundamental nas disciplinas de matemática na educação básica e cálculo no ensino superior. Através dele alunos, professores e qualquer pessoa que se interesse pelo assunto, terá em mãos um material de qualidade, o qual poderá ser acessado em qualquer lugar e em qualquer tempo, de forma gratuita.

A ideia de dividi-lo em unidades é para que se dê a opção de fazer o minicurso todo ou apenas as partes que o usuário ache necessárias. A primeira unidade trata das

EQUAÇÕES DO 2º GRAU, onde é abordado o conceito, tipos de equação e formas de resolvê-las. Na segunda unidade que trata das INEQUAÇÕES DO 2º GRAU, vê-se o conceito, tipos e formas de resolvê-las, bem como o estudante já perceberá que pode tratar o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$ como uma variável que queremos descobrir como se comporta para valores reais de x. E a última unidade tratará da FUNÇÃO QUADRÁTICA. Aqui o conceito de função será abordado a partir da junção dos conceitos de equação e inequação do segundo grau, e na construção do gráfico será introduzido o conceito de parábola, restringindo-se seu estudo apenas ao gráfico da função da quadrática. Apesar disto, o minicurso faz um *link* entre os dois conceitos, de tal forma que quando o aluno quiser estudar parábola como um tópico da Geometria Analítica, já esteja familiarizado, e, portanto, mais solícito para buscar compreender o comportamento desta figura geométrica em outros contextos diferentes da função do segundo grau.

Para cada uma das três unidades foi feita uma apresentação em *power point*. Também foi produzida uma videoaula para cada unidade. E, abrangendo as três unidades, foi produzida uma apostila que acompanha exercícios resolvidos e propostos.

O minicurso estará disponível no Portal de Cursos Abertos – PoCA, através do site https:/poca.ufscar.br/.

Neste trabalho dedicamos o segundo capítulo à metodologia. O terceiro capítulo tratará do uso de tecnologias no ensino. O Capítulo 4 explanará o referencial teórico adotado, onde serão analisados os Recursos Educacionais Abertos, com ênfase nos MOOC. E no quinto e último capítulo serão feitas as considerações finais.

Como a proposta principal é o minicurso, os apêndices constam de todos os slides produzidos para as três unidades e da apostila que é uma adaptação dos *slides* com mais exercícios resolvidos e propostos.

2. METODOLOGIA

Este trabalho consiste na elaboração de um MOOC (Curso Online Aberto e Massivo), cujo propósito é oferecer, principalmente para os alunos do Ensino Médio da Educação Básica e para os graduandos de áreas afins do Ensino Superior, a apresentação do Estudo da Parábola, tendo como escopo a Função Quadrática, passando ainda pelo estudo das Equações e Inequações do 2º Grau. Outro propósito do curso é servir de suporte para que professores possam apresentá-lo aos seus alunos como forma de reforço de suas aulas.

Para haver uma melhor apropriação dos conhecimentos presentes, procurou-se fazer um curso onde o estudante se identificasse ou se sentisse acolhido pelas charges que foram colocadas em alguns *slides*. Não é uma interação entre professor e aluno, mas do aluno com ele mesmo, descobrindo seu grau de entendimento do assunto, e sendo motivado a avançar no conhecimento.

Por outro lado, o curso não segue a sequência que geralmente vem nos livros didáticos: equação do 2º grau, função do 2º grau e inequação do 2º grau. A sequência adotada é equação do 2º grau, inequação do 2º grau e função do 2º grau. Essa abordagem visa proporcionar uma compreensão mais aprofundada ao aluno sobre o conceito de função quadrática, mostrando como ele resulta da união dos conceitos de equação e inequação do 2º grau.

Entendendo ainda que o aluno se apropria mais do conhecimento quando consegue perceber correlações entre os conteúdos, a Introdução ao Estudo da Parábola propriamente dita, é vista quando se aborda as características do gráfico da função quadrática.

De maneira que o curso é dividido em três unidades que estão interligadas dentro de um propósito maior que é introduzir o estudo da parábola, mas que podem ser vistas em separado sem prejuízo de finalidade própria.

Assim ficaram as unidades:

Unidade 1: Equações do 2º Grau;

Unidade 2: Inequações do 2º Grau; e

Unidade 3: Função Quadrática.

Também foram feitos vídeo aulas de cada unidade a partir dos slides produzidos, bem como uma apostila contemplando as três unidades, com o mesmo conteúdo dos slides, acrescentando-se exercícios resolvidos e exercícios propostos para que se possa praticar a teoria abordada nos outros materiais.

O minicurso abrangendo todos esses materiais será disponibilizado em uma plataforma de MOOC, e escolhemos a PoCA para esta finalidade, tendo em vista que este portal da Universidade Federal de São Carlos adota uma proposta de oferta de cursos que se coaduna com a nossa que é facilitar o acesso com qualidade para que o maior número possível de pessoas possam adquirir conhecimento.

3. O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Antes de tecermos comentários sobre o uso de tecnologias no ensino de matemática, faz-se necessário que analisemos alguns pontos tais como: a definição de tecnologia, o seu uso no ensino, e aí sim, analisarmos como ela está sendo utilizada no ensino de matemática, bem como aplicá-la ao estudo da parábola.

3.1. O Que é Tecnologia

Fazendo uma pesquisa básica percebemos que não há uma unanimidade na definição do que vem a ser tecnologia. Mas como nossa intenção é voltar o olhar para as tecnologias educacionais, ficaremos com a que nos parece ser mais aglutinadora.

Entendemos tecnologias educacionais como sendo todas aquelas que influenciam o processo ensino-aprendizagem, tornando-o mais eficaz.

Neste sentido, concordamos com Leite quando ele diz que a tecnologia se constitui de "todos os instrumentos que servem para realizar um trabalho pedagógico de construção do conhecimento." (LEITE. 2014).

Esta definição inclui tudo o que se soma à oralidade para se incorporar ao processo de ensino-aprendizagem no sentido de aperfeiçoá-lo.

Sendo assim, até mesmo os instrumentos mais simples como o giz e o pincel, utilizados para transmitir informações fomentando o ensino e a aprendizagem, podem ser considerados acessórios tecnológicos. Tais instrumentos são tão tecnológicos quanto o livro didático, o computador, a calculadora, o *tablet*, o projetor de *slides*, o retroprojetor, o *data show*, o celular.

A eficácia desses instrumentos não é determinada por sua idade (se é atual ou antigo), mas pelo uso adequado compatível com a ocasião que o exige.

Uma lousa e um pedaço de giz podem ser revolucionários para professores e alunos que tem como sala de aula a sombra de uma árvore. Já uma lousa digital pode ser inútil em uma sala de aula que não dispõe de alguém que saiba operá-la, ou é desprovida de internet.

Por outro lado, nenhum desses instrumentos funciona se não houver interesse em ensinar e interesse em aprender. Mas a falta de interesse é entrave para qualquer processo, e isto não é o nosso objeto de estudo.

Para efeito de melhor compreensão e tendo em mente a definição de Leite (2014), neste trabalho quando nos referirmos a tecnologia, entenda-se, tecnologias atuais, ou seja, aquelas que ganharam impulso a partir da segunda metade do século XX, as chamadas TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação), que na virada do século XXI, evoluíram para as TDIC (Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação).

3.2. O Uso da Tecnologia no Ensino

Não teceremos aqui argumentações quanto ao emprego dos termos TIC e TDIC. Mas, comete erro quem não os diferencia. E a justificativa é que a forma de conversão de sinais nas TIC é diferente das TDIC. Naquelas é analógico, nestas é digital.

Enquanto o termo TIC é mais apropriado para as tecnologias que fizeram a chamada Terceira Revolução Industrial, o termo TDCI abraça as tecnologias que estão fazendo a Quarta Revolução Industrial.

Se o avanço tecnológico contribui significativamente para a minimização dos problemas enfrentados pela humanidade para garantir sua subsistência, espera-se que isso também alcance a escola.

Percebemos, porém, que quando o professor se propõe a utilizar uma nova tecnologia na escola, invariavelmente é levado a lidar com problemas e desafios. Um dos desafios que este profissional tem de enfrentar é a resistência em abraçar o novo, que é justificada pelo fato de muitas vezes lhe apresentarem o novo como uma imposição, e não como um instrumento que facilitará o seu trabalho. Outro é o fato de muitas vezes a escola adquirir recursos tecnológicos, mas não possuir a infraestrutura adequada para o uso deles. E ainda precisamos equacionar o problema da formação continuada que muitas vezes não atende as demandas cotidianas, o da carga horária excessiva que não permite ao professor o tempo necessário para se aperfeiçoar e planejar sua prática, e o problema da alta rotatividade de programas (ensino médio regular, ensino médio integral, novo ensino médio, eleição de conteúdos prioritários, recuperação de aprendizagens, preparação para várias avaliações que usam metodologias diferentes), que se constitui em um ativismo que interfere negativamente na formação do aluno.

Para autores como Schwab, já estamos vivendo a Quarta Revolução Industrial proporcionada pelos avanços tecnológicos. No entanto, a escola continua em grande medida com o mesmo *modus operandi* da escola pré-revolução industrial do século XVIII.

De acordo com Schwab (2016) a Primeira Revolução Industrial teve como carro-chefe a máquina a vapor. A Segunda Revolução Industrial se deu com o surgimento da eletricidade no final do século XIX. A Terceira que começou na década de 1960 foi marcada pelo desenvolvimento dos semicondutores, da computação em mainframe, da computação pessoal e da internet.

O que é chamado de Quarta Revolução Industrial é revolução digital que teve início com os primeiros dias do século XXI.

Ainda segundo Schwab (2016), a tecnologia que impulsiona esta nova revolução afeta todas as áreas da ação humana e traz em seu arcabouço uma internet mais ágil, a apropriação da física quântica, as nano medidas, o desenvolvimento das IA (inteligência artificial), e o aprendizado de máquina, também chamado de aprendizagem automática.

Apesar do avanço tecnológico experimentado nos últimos anos, a escola de educação básica ainda utiliza técnicas rudimentares.

Isto não deveria causar estranheza se levarmos em conta que a máquina de tear da primeira revolução industrial conseguiu ultrapassar os limites da Europa apenas 120 anos após sua invenção. Que o acesso à eletricidade, a mesma que impulsionou a segunda revolução industrial ainda não é uma realidade mais de um bilhão de pessoas do planeta. Que a internet que impulsionou a terceira revolução industrial ainda não é desfrutada por mais da metade da população mundial.

No entanto, é estranho o fato de que muitas escolas têm acesso à eletricidade e à internet, e não percebemos uma melhora significativa na aprendizagem dos alunos, a despeito de serem visíveis os avanços em outras áreas como a industrial, a comercial, a da saúde, a empresarial, e até mesmo na área agrícola.

Parece que a escola não conseguiu usar o avanço tecnológico para impulsionar o seu principal produto: a aprendizagem. As avaliações internas e externas escancaram para a sociedade as feridas da escola.

É claro que nos países economicamente desfavorecidos, isto se torna mais evidente, mas não implica que a Educação Básica, – aquela que precede o Ensino Superior – não enfrente problemas também nos países com melhores condições econômicas.

Os dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, o PISA, para o nível de proficiência em leitura, matemática e ciências comprovam isso.

A tabela abaixo nos mostra o resultado do PISA em matemática de alguns países:

TABELA 1
MÉDIAS, INTERVALOS DE CONFIANÇA E PERCENTIS DAS PROFICIÊNCIAS DOS PAÍSES SELECIONADOS – MATEMÁTICA – PISA – 2018

PAÍS	RANKING[1]	MÉDIA	EP[2]	IC[3]	INTERDECIL[4]
Coreia	5-9	526	3,1	520-532	393-651
Canadá	10-16	512	2,4	507-517	392-629
Finlândia	12-18	507	2,0	503-511	399-612
Portugal	23-31	492	2,7	487-498	362-614
Média OCDE	-	489	0,4	489-490	370-605
Espanha	32-37	481	1,5	479-484	365-593
Estados Unidos	32-39	478	3,2	472-485	357-598
Uruguai	54-60	418	2,6	413-423	307-529
Chile	55-60	417	2,4	413-422	311-528
México	60-63	409	2,5	404-414	311-510
Costa Rica	61-66	402	3,3	396-409	308-499
Peru	62-67	400	2,6	395-405	293-511
Colômbia	66-70	391	3,0	385-397	290-499
Brasil	**69-72**	**384**	**2,0**	**380-388**	**277-501**
Argentina	70-73	379	2,8	374-385	272-489
Panamá	76-77	353	2,7	348-358	255-454
República Dominicana	78-78	325	2,6	320-330	236-417

Fonte: Elaborado por Daeb/Inep, com base em dados da OCDE.

Na tabela temos:

1. *Ranking*: intervalo no *ranking* considerando todos os países/economias participantes;

2. EP: estimativa de erro-padrão da média;

3. IC: intervalo de confiança da média;

4. Intervalo interdecil: intervalo em que o limite inferior é o percentil 10, e o superior, o percentil 90.

Já o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, que outra avaliação externa, em sua última edição em 2021, revelou, segundo a revista Exame, que em matemática temos a seguinte situação:

> Os dados do SAEB mostram que no 5.º ano do ensino fundamental 47% sabem o que é adequado para a série na disciplina. O índice cai para 18% no 9.º ano do fundamental e depois para 5% no 3º ano do médio. (OFÉLIA, 2021)

Estes resultados do PISA e do SAEB, mostram o quão estamos longe do ideal. E a constatação se agrava quando esses dados são cruzados com outros, pois esses cruzamentos expõem o quão disforme é a oferta de oportunidades aos estudantes brasileiros. O acesso à tecnologia, por exemplo, varia de região para região, de escola do setor público para escola do setor privado, entre escola urbana e escola rural, entre escola de periferia e escola de região central, entre ricos e pobres. Ou seja, a desigualdade que é marca da sociedade brasileira, se reflete no acesso aos meios educacionais.

A pandemia serviu para algumas coisas: escancarar essas desigualdades, mostrar que o acesso às TIC e às TDIC é indispensável, e que essas desigualdades de acesso devem ser enfrentadas ou irão se agravar a cada dia.

3.3. A Tecnologia no Ensino da Matemática Atualmente

A falta de tecnologias apropriadas para o ensino de matemática se tornou evidente em 2020 e 2021 devido ao fechamento parcial ou total das escolas por conta da pandemia da COVID 19.

Durante esses dois anos praticamente inteiros não houve aulas presenciais, e os problemas de aprendizagem se agravaram, apesar do esforço das redes de ensino de buscarem formas para os alunos se manterem focados.

As TIC e as TDIC se mostraram fatores determinantes para dirimir os estragos causados pelo coronavírus nos quesitos ensino e aprendizagem.

Os sistemas de ensino tiveram que se reestruturar em tempo recorde, para atender as novas demandas, e afetou de forma definitiva a forma de ensinar.

Da noite para o dia, a escola se viu obrigada a utilizar ferramentas que mantivessem pelo menos de forma mínima o contato dos estudantes com os conteúdos. Aparelhos como computadores, *tablets* e celulares, e as plataformas de ensino substituíram o quadro, o giz, o pincel, caderno e o lápis.

Não fosse a falta de acesso por parte da grande maioria de professores e alunos, e a dificuldade de manter os alunos focados e cumprindo rotinas, talvez tivéssemos avançado em dois anos, o que não avançaríamos em dez. Mas a soma desses fatores talvez nos tenha feito recuar mais do que os estudos desse problema feitos até agora, conseguiram apontar.

Mais uma vez estamos à mercê da tecnologia e capacidade humana de superar problemas para reverter os estragos causados por fatores inesperados. Desta vez, pela pandemia da COVID 19.

Como saldo, temos por parte da escola um acesso maior aos meios tecnológicos.

A escola pós pandemia tem acesso a uma internet mais potente, tem mais computadores, projetores, sistemas de multimídia e plataformas educacionais à sua disposição. Mais alunos possuem *tablets* e *chips* com acesso à internet móvel paga pelo governo. A comunicação com os diversos atores da comunidade escolar se tornou mais ágil através de aplicativos de comunicação social em rede.

O número de aplicativos e plataformas para ensinar matemática cresceu exponencialmente acompanhando o crescimento geral desses dispositivos.

Isto tudo deveria ser muito positivo, e é, mas infelizmente não perceberemos avanços significativos na aprendizagem dos alunos, pois o ensino de banco, a escola formal, ainda não possibilita o uso efetivo de tecnologias mais modernas. Os recursos que eram usados por professores e alunos no ensino remoto não se aplicam no dia a dia da escola. Em suas casas os professores dispõem de melhores recursos do que na escola, até mesmo porque se viram obrigados a adquirirem com seu próprio salário tais recurso para terem como ministrar aulas síncronas e assíncronas durante a pandemia. Muitos professores compraram celulares mais modernos, *notebooks*, lousa digitalizadoras, contrataram mais internet, tiveram que construir mini estúdios. E a própria infraestrutura da escola não permite muitas vezes o uso de alguns desses recursos, mesmo que o professor os leve para a escola.

Falta internet de qualidade (nem sempre está disponível quando o professor ou o aluno precisam), faltam instrumentos de multimídia em número satisfatório (apenas um número limitado de professores pode usar o projetor ao mesmo tempo), e no caso do Ceará, nem todo aluno consegue usar o *tablet* e o *chip* que recebeu da Secretaria de Educação do Estado.

Diante disto, o professor continua utilizando na maior parte do tempo o quadro e o livro didático.

3.4. As TDICs Aplicadas ao Ensino da Parábola

Sem sombra de dúvidas os aplicativos, as plataformas digitais e os *sites* interativos são os grandes aliados para a facilitação do ensino e da aprendizagem em matemática hoje.

Eles não isentam os seus usuários de terem conhecimentos básicos da estrutura da disciplina, mas potencializam os resultados desejados. Sem contar o fato de que são mais atrativos para a geração Z (classificação sociológica para as pessoas que nasceram a partir de 1995, as quais cresceram com a popularização da internet, e por isso mesmo chamados de nativos digitais).

Através destes meios é possível fazer a simulação de problemas e acompanhar a solução.

No que tange ao estudo da parábola podemos acessar desde a sua aplicação no estudo das funções quadráticas até o seu estudo geral em geometria analítica como um elemento das cônicas (figuras geométricas obtidas a partir de secções específicas no cone).

Um dos *softweres* mais conhecidos e utilizados atualmente é o GeoGebra. Criado em 2001, este *software* de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, mas muito mais aplicado no ensino médio e no ensino superior, possibilita ao seu usuário trabalhar geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo. Está disponível em *http://www.geogebra.org* e é usado em cerca de 190 países, tendo mais de 300.000 downloads mensais. Apesar disto, pode ser usado de forma *online* também.

Este *software* possibilita aos professores e alunos explorar, conjecturar e investigar conteúdos matemáticos.

Se introduzirmos nele uma função quadrática qualquer, ele nos dará o seu gráfico, sendo que ainda aparece uma janela com uma planilha contendo as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao gráfico. A partir daí são permitidas alterações no gráfico que modificam imediatamente as informações da janela algébrica criando um dinamismo que permite a professores e alunos fazer conjecturas e testar teses.

Já em relação ao estudo analítico da parábola, o GeoGebra nos permite ter uma visão mais detalhada de como interagem seus elementos principais: foco, diretriz, vértice.

Além dos aplicativos, as plataformas de ensino ampliaram a oferta de cursos tradicionais e dos Cursos Online Abertos e Massivos, os chamados MOOC.

Esta modalidade de curso aberto tem se mostrado uma ferramenta bastante promissora nos quesitos acesso, permanência e qualidade. Como os cursos são de baixo custo ou gratuitos e os alunos podem acessar quando e onde quiserem, isto permite que eles possam adequar seus horários e participar de forma ativa. Por outro lado, a necessidade de permanecer no mercado ou de zelar pelo nome da instituição, faz com que os fornecedores desses cursos zelem pela qualidade dos mesmos.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

Este trabalho adotou como referencial teórico a revisão literária de livros, artigos, dissertações e outras publicações que abordassem os temas Recursos Educacionais Abertos – REA, e os cursos na modalidade Curso Online Aberto e Massivo – MOOC.

4.1. Recursos Educacionais Abertos

As plataformas de busca da internet como *Google* e *Bing*, recentemente, começaram a disponibilizar para seus usuários a possibilidade de interação com *chatbots*[1].

Ao consultarmos o Google, por exemplo, sobre o que são Recurso Educacionais Aberto, dentre as várias possibilidades de consulta que ele oferece, também aparece a seguinte resposta do *ChatGPT*[2]:

> Recursos Educacionais Abertos (REA) são conteúdos educacionais disponibilizados gratuitamente na internet, que podem ser acessados, utilizados, adaptados e compartilhados livremente. São recursos como textos, imagens, vídeos, apresentações, jogos, softwares, entre outros, que possuem licenças abertas, permitindo que qualquer pessoa possa usá-los sem precisar pagar ou adquirir permissões.
> Os REA proporcionam maior liberdade e diversidade no acesso ao conhecimento, facilitando o aprendizado e a troca de informações entre educadores e alunos, ampliando o acesso à educação e estimulando a criação colaborativa de novos conteúdos. Eles podem ser utilizados em diferentes contextos educacionais, desde o ensino básico até o superior, além de serem uma alternativa para o ensino a distância. (CHATGPT, 2023. Acesso em 03/06/2023)

Apesar de sabermos que as respostas desta inteligência artificial não são de todo confiáveis, esta resposta é muito satisfatória, se compararmos com a definição dada pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura – UNESCO:

> Os REA ou *Open Educacion Resourses* (OER) são materiais de ensino, aprendizagem e investigação em qualquer suporte ou mídia, digital ou não, que estão sob domínio público ou são disponibilizados com licença aberta que permite acesso, uso, adaptação e redistribuição gratuita por terceiros, sem restrição ou com poucas restrições. (UNESCO, 2012, p. 1)

Esta é definição que adotaremos neste trabalho, porque tanto ela como também a

---

[1] *Chatbots* são algoritmos, mas conhecidos como robôs, que interagem em uma conversa (bate-papo) com seres humanos.

[2] *ChatGPT* ou *Generative Pre-treined Transformer* é uma plataforma de conversação de inteligência artificial criada pela empresa norte-americana OpenAI.

designação *Open Educational Resource* foram estabelecidos pela UNESCO no ano de 2002, em Paris, França, durante o Fórum sobre o Impacto da Disponibilização de Cursos Abertos na Educação Superior nos Países em Desenvolvimento, promovido por esta agência da Organização das Nações Unidas – ONU.

Cabe aqui tecer comentários sobre duas expressões-chave nesta definição: "domínio público" e "licença aberta".

A expressão "domínio público" é usada para dizer que uma obra está liberada para ser utilizada por qualquer pessoa, para uso individual ou não, até mesmo para cópias e adaptações, sem a necessidade de autorização do autor ou de seus representantes legais. É quando dizemos que a obra perde os seus direitos autorais, cujos critérios para tal perda são estabelecidos por leis próprias de cada país.

Ser de domínio público contribui significativamente para a democratização do acesso.

Mas o que dizer do que é publicado na internet?

Com o aumento gradativo da rede de conexão entre dispositivos eletrônicos que funcionam como computadores, milhões de pessoas têm acesso ao que é publicado na rede.

Com um simples comando podemos copiar e colar praticamente tudo. Como, então, saber sobre a legalidade desse ato?

Enquanto a chancela de domínio público dá tranquilidade a quem faz uso de obra assim caracterizada, a incerteza sobre a licença de uso é uma dor de cabeça para aqueles que não querem ser tidos como apropriadores indébitos de conteúdos privados.

Somos levados a pensar que tudo que é gratuito na internet, é de uso público, e que podemos utilizar indistintamente, desde que citemos a fonte. Ledo engano!

Ainda que seja para fins educativos, se não obtivermos autorização expressa do autor, não podemos utilizar, seja que conteúdo for. Até mesmo quando utilizam uma imagem para ilustrar seus trabalhos, professores e alunos são passivos de penas, se não estiverem utilizando conteúdos de licença aberta.

A maioria dos conteúdos gratuitos disponíveis na internet são de licença fechada.

Ou seja, precisam de autorização expressa do autor para o uso por terceiros. São os famosos *copyrights* – todos os direitos reservados, que são identificados pela letra C.

Por isso, antes de utilizar um conteúdo gratuito precisamos verificar se ele possui certificado de licença fechada, ou seja, se ele é um *copyright* (C), ou se ele possui certificado de licença aberta, sendo, portanto, um *Creative Commons*.

Creative Commons é um tipo de licença atribuída pelo próprio autor, especificando como seu trabalho pode ser utilizado pelo público. Tal licença é identificada pelas letras CC, e indica que ela é aberta.

E é aí que entra a segunda expressão-chave do conceito de Recursos Educacionais Abertos: "licença aberta".

Os REA são do tipo CC. Podem, portanto, ser utilizados por estudantes e professores de forma democrática e equitativa, ampliando as possibilidades de acesso. Isto é de fundamental importância, principalmente quando levamos em conta as desigualdades econômicas e as dificuldades de acesso à educação de qualidade.

Como a diminuição da diferença de classes pode implicar em menos poder de barganha por partes de alguns setores econômicos, o aumento dos REA pode se configurar como uma ameaça a esse *status quo*. Por isso mesmo, a despeito do desenvolvimento e do alcance da internet, os REA ainda são insipientes.

Felizmente, ainda que contrariando interesses econômicos, percebemos um avanço contínuo e mais rápido nos últimos anos. Tanto o setor público como os grandes conglomerados econômicos têm se sentido pressionados a dar uma resposta à sociedade em relação aos dados negativos em relação ao acesso e permanência do aluno na escola, seja na educação básica, seja no ensino superior.

No Brasil, o Plano Nacional de Educação – PNE, nas suas metas 5 e 7, incentiva a disponibilização de REA. Dentre os avanços identificados nesse aspecto, se destaca o Plano Nacional de Educação (PNE), que em suas metas 5 e 7, contempla o incentivo à produção de REA. Mas para termos uma ideia da pressão que o mercado editorial faz sobre a ampliação desses recursos, citamos o projeto de lei federal PL 1513/2011 que visa garantir que as compras públicas ou a contratação de serviços e materiais educacionais sejam regidas por meio de licenças abertas, permitindo a difusão e a ampliação do acesso a esses bens por toda a sociedade (FURTADO, 2019). Este projeto de lei foi aprovado na comissão de educação da Câmara dos Deputados, apenas no ano de 2018. Em 2019 foi aprovado na comissão de cultura, e no dia 25/05/2023, a comissão de Constituição e Justiça e de Cidadania o devolveu à mesa sem o parecer desta comissão. Ou seja, 12 anos após sua apresentação no plenário, em 02/06/2011, o projeto ainda se encontra sem definição.

O mercado de livros didáticos é bilionário. Em 2021, só o governo federal, através do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, comprou 1,9 bilhões de reais às editoras. E o que se questiona aqui não é o valor do investimento, pois ele é necessário, mas a sua natureza. Como investir tanto e não ter licenças específicas de uso desse material? Por que não atrelar à compra a exigência de que o material seja um Recurso Educacional Aberto?

As respostas a esses questionamentos esbarram no interesse econômico. Em 2012, o então deputado federal Ângelo Vanhoni, que mais tarde foi nomeado relator da comissão de educação do Congresso Nacional, já denunciava isto.

No entanto, a sociedade civil organizada, é, como sempre foi, uma excelente via para fazer as coisas acontecerem. E não poderia ser diferente em relação à democratização o saber.

Conteúdos abertos circulam cada vez mais na *web*. Entretanto, nasce um outro problema que está relacionado à qualidade desses conteúdos. Por isso, a necessidade de regulamentação dos REA. Afinal, a bandeira que queremos ver hasteada é a da educação de qualidade acessível a todos e a todas.

A partir do Fórum sobre o Impacto da Disponibilização de Cursos Abertos na Educação Superior nos Países em Desenvolvimento, da UNESCO, em 2002, avanços têm sido observados nesse sentido.

Outro marco importante foi a Declaração sobre Educação Aberta da Cidade do Cabo (2007). É baseado nas diretrizes deste documento que o governo brasileiro tem estruturado o debate sobre o tema, tomando como balizadores os seguintes eixos:

> - o acesso público a materiais educacionais em geral, bem como uma estratégia de educação aberta para incluir o indivíduo, a família, a comunidade e toda a sociedade no processo de aprendizagem e de produção colaborativa de conhecimento;
> - o ciclo econômico de produção de materiais educacionais e seu impacto no

> “direito de aprender dos cidadãos”;
> - os possíveis benefícios que os REA podem trazer para as estratégias de aprendizagem, para a produção de recursos educacionais mais apropriados à diversidade regional e aos padrões regionais de qualidade;
> - impacto dos recursos digitais, online e abertos no desenvolvimento profissional continuado dos professores. (SANTANA *et al*, 2012, p.43)

Em se tratando do governo brasileiro na direção da Educação Aberta, o passo mais decisivo foi a Portaria 451/2018 do MEC, que dentre outros, determina em seu artigo 7º que “os recursos educacionais voltados para a educação básica, produzidos com recursos financeiros do MEC, deverão ser sempre recursos educacionais abertos e, quando digitais, serão disponibilizados obrigatoriamente em sítios eletrônicos públicos”.

Outro ator que devemos destacar nesse processo são as Universidades, sobretudo como fontes de produção de conhecimento.

Exemplo disto é o Portal de Cursos Abertos - PoCA, da Universidade Federal de São Carlos, criado em 2018, que oferece cursos a distância, abertos e gratuitos, disponibilizados no Ambiente Virtual de Aprendizagem Moodle.

4.2. Cursos na Modalidade MOOC

No Brasil, a escola como direito de todos é uma conquista legal advinda com a Constituição de 1988. Já se vão 35 anos. Ao longo desse tempo, sempre com muita luta e pressão por parte da sociedade civil organizada, o Estado tem implementado políticas públicas com a finalidade de garantir aos brasileiros os direitos preconizados no texto constitucional, mais precisamente nos seus artigos 205 a 214.

A universalização do ensino é um dos direitos assegurados, mas este direito em si, não tem se mostrado suficiente. Isto porque a porta de acesso foi aberta, mas ainda falta muito a ser feito para que o aluno permaneça na escola.

Vários fatores concorrem para a permanência do aluno, seja na educação básica, seja no ensino superior. Porém, o mais preponderante é o econômico, segundo aponta o Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária – CENPEQ. A instituição ainda aponta que em 2021, 713.065 alunos abandonaram a educação básica, mas admite que este número pode ter sido bem maior porque algumas escolas não informaram o abandono por conta da inconsistência de dados devido a COVID-19. Desse número, mais da metade é do Ensino Médio. Nesta etapa escolar foram 381.883 os que abandonaram a escola. E um dos fatos que explica este número alarmante é que os estudantes do ensino médio são justamente aqueles que geralmente precisam contribuir com as despesas familiares, e por isso deixam a escola para trabalhar.

Se olharmos para outro estudo feito em agosto de 2022 pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada – IPEC, a pedido do Fundo das Nações Unidas para a Infância – UNICEF, percebemos a gravidade do abandono. A pesquisa aponta que 2 milhões de crianças e adolescentes de 11 a 19 anos haviam abandonado a escola neste ano.

Em relação ao ensino superior os dados são mais alarmantes, e nem todos concordam que foi a pandemia quem fez esse quadro piorar. Mas uma coisa é certa: qualquer estudo sobre evasão, aponta o fator econômico como uma das principais causas (COSTA, 2018)

O acesso e a flexibilidade de tempo e espaço de horários são necessidades que precisam ser supridas para essa gama de estudantes.

Entram como uma alternativa promissora para atender esta demanda os *Massive Open Online Courses – MOOCs* ou Cursos Online, Abertos e Massivos, em português. É como se define os cursos que qualquer pessoa pode fazer, de qualquer lugar e no seu tempo. Configuram-se, portanto, como uma boa forma de inclusão social.

O artigo Os Benefícios dos MOOCs no Auxílio ao Aprendizado traz uma lista dos benefícios mais citados:

> disseminação do conhecimento dos conteúdos de grandes universidades; custo financeiro zero; flexibilidade de tempo e espaço para realização dos cursos; contribuição colaborativa do conhecimento; imersão em tecnologias digitais, as quais são essenciais para quaisquer atividades contemporâneas; oferta de conteúdo variável, permitindo ser customizado de acordo com perfil e demanda particular de cada participante; estímulo a interação, tanto entre os colegas como entre os estudantes e os professores. (YAMAMOTO *et al*, 2015, https://altec2015.nitec.co/altec/papers/705.pdf, Consulta em 09/06/2023)

Quanto à invenção dos MOOCs não há um consenso. São apontadas pelo menos três possibilidades: um curso da Universidade de Manitoba, no Canadá, que reuniu duas mil e duzentas pessoas; um curso ministrado por Dave Cormier, da *University of Prince Edward*

Island, no Canadá, e Bryan Alexander, do *National Institute for Technology jn Liberal Education*, nos Estados Unidos; e um curso de Inteligência Artificial da Universidade de Stanford, ministrado por Sebastian Thurn. Os dois primeiros cursos aconteceram no ano de 2008, e o de Stanford em 2011.

No entanto, isto é o que menos importa. Independente de quem criou o primeiro MOOC, hoje, os cursos massivos neste formato são uma realidade cada vez mais presente, e têm suprido o anseio por conhecimento de milhões de pessoas ao redor do mundo. Eles têm sido um recurso importante para estudantes, profissionais que querem se aprender mais sobre seus ofícios, e por pessoas que querem aprender sobre outras áreas fora da sua atuação.

A *Bit Degree* que é uma plataforma de cursos online fez uma relação das dez melhores plataformas com essa finalidade no ano de 2023. São elas por ordem de melhor classificação em ordem decrescente: *Data Camp, Udacity, Udemy, EdX, Coursera, Skillshare, Linked in Learning, Bit Degree, Khan Academy*, e *Codecademy*. Analisando os prós e os contras de cada plataforma chegou-se a essa relação com as notas variando de 8,1 (mais baixa) a 9,8 (mais alta), numa escala de zero a dez. Dentre as plataformas elencadas, a única que oferece apenas cursos gratuitos é *Khan Academy*.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme mencionado anteriormente, o acesso e a permanência dos alunos na escola, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, continuam sendo desafios que muitos jovens não conseguem superar por conta própria.

Infelizmente, as políticas públicas voltadas para reverter essa situação ainda são insuficientes e enfrentam resistência por parte dos interesses que favorecem a manutenção do *status quo*.

Especialistas em educação como Tel Amiel (2012), Carolina Rossini (2012), Laura Rossi (2016), Paulo Freire (2009), Dermeval Saviani (2020) gritam aos quatro ventos que a democratização do conhecimento é necessária e urgente.

Como uma possibilidade para a democratização do ensino, e na esteira dos avanços na área das tecnologias da informação e da comunicação, surgem os Cursos Online, Abertos e Massivos, ou da forma como são costumeiramente chamados pela sigla inglesa: os MOOC.

Desde que surgiram, esses cursos têm ampliado o acesso, porque são gratuitos ou mais baratos que cursos convencionais, e possibilitado a permanência, pois algumas barreiras como dificuldade de mobilidade e falta de horários compatíveis são desfeitas com esta modalidade de ensino.

Essa abordagem é essencial para colocar em prática o que estabelece o artigo 205 da Constituição Federal: “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho”.

O acesso, a permanência e a apropriação do conhecimento são pilares fundamentais de um sistema de ensino de qualidade, os quais precisam ser garantidos através de projetos educacionais que disponibilizem os meios para que isso se efetive.

Em 2015 a Organização das Nações Unidas traçou Objetivos de Desenvolvimento Sustentável – ODS, para os 193 países associados alcançarem até

2030.

O ODS 4 trata das metas para uma educação inclusiva e de qualidade.

A oferta de bons materiais com licença aberta contribui significativamente para que se alcance essa Objetivo, e este trabalho é uma tentativa de contribuição neste sentido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

2,3 Milhões Abandonaram Curso Superior em 2021. Portal Geledés, 2023. Disponível em: <https://www.geledes.org.br/23-milhoes-abandonaram-curso-superior-em-2021/?gclid=CjwKCAjwm4ukBhAuEiwA0zQxk9h6LheqxqNhycTKyV7_OPTVTEKiY93u-KNu-WoTmXZpriK_iftNPhoCLUAQAvD_BwE>. Acesso em: 04/03/2023.

95% dos alunos saem do ensino médio sem conhecimento adequado em matemática. Exame. 2021. Disponível em: <95% dos alunos saem do ensino médio sem conhecimento adequado em matemática | Exame>. Acesso em: 20/10/2022.

ABARSCIO, A. L. Fernandes, et al. **Educação Aberta e o Direito Fundamental a Saúde em uma Sociedade Capitalista:** um estudo documental nas redes sociais em tempos de coronavírus. In: TERÇARIOL, Adriana Aparecida de Lima (org.); IKESHOJI, Elisangela Aparecida Bulla (org.); EVARISTO, Ingrid Santella (org.); GITAHY, Raquel Rosan Christino (org.). **O (re)inventar de práticas pedagógicas com as tecnologias digitais em tempos de pandemia:** da Educação Básica ao Ensino Superior. Jundiaí: Paco e Littera, Edição do Kindle, 2021.

ALCANTARA, Fabiana Silva de Paula; SILVA, Karina Huf dos Reis Zachias Soares da. **Objetos Educacionais Digitais e Recursos Educacionais Abertos:** um estudo teórico sobre o novo leitor. Revista Versalete. Curitiba, Vol. 6, nº 11, p. (40-56), jul.-dez., 2018. Disponível em: <http://www.revistaversalete.ufpr.br/edicoes/vol06-11/3.PAULA.%20Fabiana.%20HUF.%20Karina.%20Objetos%20Educacionais.pdf>.

ALVES, Lucineia. **Educação a distância: conceitos e história no Brasil e no mundo.** In: ABED, Associação Brasileira de Educação a Distância. **Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância**. V.10. São Paulo, ABED, 2011. Disponível em: <http://www.abed.org.br/revistacientifica/Revista_PDF_Doc/2011/Artigo_07.pdf

AMANTE, Lúcia; QUINTAS-MENDES, António. **Educação a distância, educação aberta e inclusão** - dos modelos transmissivos às práticas abertas. In: Revista PBCIB: Pesquisa Brasileira em Ciência da Informação e Biblioteconomia. v.13. n.2, p.49-65, jul./dez. João Pessoa: UFPB, 2018. Disponível em:< http://revista.ibict.br/inclusao/article/view/4172/3643>

AMIEL, Tel. **Educação aberta:** configurando ambientes, práticas e recursos educacionais. In: SANTANA, Bianca (org.); ROSSINI, Carolina (org.); PRETTO, Nelson De Lucca (org.). Recursos Educacionais Abertos: práticas colaborativas políticas públicas. 1. ed., 1 imp. São Paulo: Casa da Cultura Digital, 2012.

ANDRADE, Bernardino Carneiro de. **A Evolução Histórica da Resolução das Equações do 2º Grau**. 2000. Tese (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Cidade do Porto, Portugal, 2000.

As Melhores Plataformas de Aprendizagem Online de 2023. Bit Degree, 2023. Disponível em: <https://br.bitdegree.org/plataformas-de-ensino-online>. Acesso em: 03/05/2023

BACON, Francis. Meditationes Sacre. Londres. 1597.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações determinadas pelas Emendas Constitucionais de Revisão nos 1 a 6/94, pelas Emendas Constitucionais nos 1/92 a 91/2016 e pelo Decreto Legislativo no 186/2008. – Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2016. Disponível em: < https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf>

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF 1998.

BRASIL. **Projeto de Lei 1513/2011**. Câmara dos Deputados. 2015. Disponível em: <https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/fichadetramitacao?idProposicao=505535>. Acesso em: 15/04/2023.

BRASIL. **Portaria Nº 451, de 16 de Maio de 2018**. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://educacaoconectada.mec.gov.br/images/pdf/portaria_451_16052018.pdf>. Acesso em 23/02/2023.

CARDOSO, Isis Nalba Albuquerque; SILVA, Guilmer Brito. **Educação Híbrida e Aprendizagem Ubíqua: Os Dispositivos Móveis Como Recursos de Mediação**. Revista Prâksis, 2020. Disponível em: < https://periodicos.feevale.br/seer/index.php/revistapraksis/article/view/2161>. Acesso em: 13/10/2022.

CHAUI, Marilena. **Convite à Filosofia**. Ática, São Paulo, 2000.

COSTA, Adriano Ribeiro da. **A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA NO BRASIL: Concepções, histórico e bases legais.** In: Revista Científica da FASETE. V. 11, n. 12, p. 59-74. Paulo Afonso, UNIRIOS, 2017. Disponível em: < https://www.publicacoes.unirios.edu.br/index.php/revistarios/article/view/471>.

COSTA, Fabiana Pereira. **Acesso e Permanência no Ensino Superior: Uma Análise Para as Universidades Federais Brasileiras**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

COSTA Jr., Hélio Lemes. **Tempos Digitais:** Ensinando e Aprendendo com Tecnologia. Porto Velho: EDUFRO, Edição do Kindle, 2012.

COTTA, Alceu Júnior. **Novas Tecnologias Educacionais No Ensino de Matemática**: estudo de caso - Logo e do Cabri-Géomètre. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, 2002.

Dados de aprendizagem (Pisa): percentual de alunos com aprendizado adequado. QEdu Países. Disponível em: < https://paises.qedu.org.br/dados-de-aprendizagem/>. Acesso em: 20/12/2022.

DARTORA, Luiza Pereira; GARCIA, Érica Bohn; SILVA FILHO, Jorge Costa. **Ensino de Matemática em Tempos Pós-Pandemia**. In: ANDRÉ, Claudio (org.); SANTOS, Dayene Ferreira dos (org.); SILVA FILHO, Jorge Costa (org.); DARTORA, Luiza Pereira (org.). **Educação, Inclusão e Tecnologia:** práticas, perspectivas e reflexões. RIAC: Edição do Kindle, 2022.

Declaração da Cidade do Cabo para Educação Aberta: Abrindo a Promessa de Recursos Educativos Abertos. Iniciativa Educação Aberta, 2016. Disponível em: < https://aberta.org.br/portfolio/declaracao-de-cidade-do-cabo-para-educacao-aberta-abrindo-a-promessa- de-recursos-educativos-abertos/>. Acesso em: 10/03/2023.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. 2ª ed. SBM. Rio de Janeiro, 2017.

Dois Milhões de Crianças e Adolescentes de 11 a 19 Anos Não Estão Frequentando a Escola no Brasil, alerta UNICEF. UNICEF, 2022. Disponível em: <https://www.unicef.org/brazil/comunicados-de-imprensa/dois-milhoes-de-criancas-e-adolescentes-de-11-a-19-anos-nao-estao-frequentando-a-escola-no-brasil#:~:text=Um%20estudo%20inédito%2C%20realizado%20pelo,do%20total%20da%20amostra%20pesquisada>. Acesso em: 05/01/2023.

Em 2021 Foram Investidos R$ 1,9 Bilhão em Livros e Material Didático do PNLD. Ministério da Educação, 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/fnde/pt-br/assuntos/noticias/em-2021-foram-investidos-1-9-bilhao-em-livros-e-material-didatico-do-pnld>. Acesso em: 11/02/2023

Evasão escolar e o abandono: um guia para entender esses conceitos. Observatório de Educação, Ensino Médio e Gestão. Instituto Unibanco, 2021. Disponível em: <https://observatoriodeeducacao.institutounibanco.org.br/em-debate/abandono-evasao-escolar#:~:text=Deixar%20de%20frequentar%20as%20aulas,é%20entendida%20como%20evasão%20escolar.>. Acesso em: 20/10/2022.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade**. 32. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2009.

FURTADO, Débora; AMIEL, Tel. **Guia de bolso da educação aberta**. Brasília: Iniciativa Educação Aberta, 2019.

GONÇALVES, Rafaela. Após pandemia, aprendizado no Brasil piora em todos os níveis escolares. **Correio Brasiliense**, 17/09/2022. Acesso em 22/10/2022. Disponível em: <https://www.correiobraziliense.com.br/brasil/2022/09/5037496-apos-pandemia-aprendizado-no-brasil-piora-em-todos-os-niveis-escolares.html >

HACK, Josias Ricardo. **Introdução à Educação a Distância.** Florianópolis: LLV/CCE/UFSC, 2011.

Internet Já é Acessível em 90,0% dos domicílios do país em 2021. Agência IBGE de Notícias. 2022. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/34954-internet-ja-e-acessivel-em-90-0-dos-domicilios-do-pais-em-2021>. Acesso em: 21/10/2022.

LEITE, Lígia S. (Coord.). **Tecnologia educacional. Descubra suas possibilidades em sala de aula**. 8ª. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções**. SBM. Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2013.

MACEDO, Helder Rodrigues. **Estudo Sistemático das Parábolas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

MAYARA, Jéssika. **Brasileiros têm mais acesso à internet, TV e smartphone**. Estado de Minas, 15/04/2021. Acesso em: 18/05/2023. Disponível em:< https://www.em.com.br/app/noticia/tecnologia/2021/04/15/interna_tecnologia,1257304/brasileiros-tem-mais-acesso-a-internet-tv-e-smartphone-confira.shtml>.

MEDEIROS NETO, Benedito. **O Cidadão Contemporâneo Frente às Tecnologias da Informação e Comunicação**. 2. ed. Brasília: FAC-UnB, 2017.

NASCIMENTO, João Kerginaldo Firmino do. **Informática aplicada à educação**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

OFÉLIA, Leila. **Só 5% no 3º Ano do Médio Têm o Nível Esperado em Matemática**. Centro do Professorado Paulista, 24/02/2021. Disponível em: < https://cpp.org.br/so-5-no-3-ano-do-medio-tem-o-nivel-esperado-em-matematica/#:~:text=Os%20dados%20do%20Saeb%20mostram, no%203º%20ano%20do%20médio.>. Acesso em: 15/10/2022.

ONU. **Pacto Global de Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.** 2021. Disponível em: <https://www.internacional.df.gov.br/agenda-2030-objetivos-do-desenvolvimento-sustentavel/>. Acesso em 10/07/2023.

O Que São TICs e TDICs? Qual a Diferença Entre Eles? R7. 2020. Disponível em: <https://tecnologia.culturamix.com/internet/O Que São Tics E Tdics? Qual A Diferença Entre Eles? | Tecnologia - Cultura Mix>. Acesso em: 20/10/2022.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS - ONU. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**, 1948. Disponível em: < https://desinstitute.org.br/noticias/declaracao-universal-dos-direitos-humanos-como-surgiu-e-o-que-defende/?gclid=Cj0KCQjw9deiBhC1ARIsAHLjR2C-Ooal1yNVbs5MnvHJGBGfl6cjRWqVif1IBUbUEYrsWZp7-LyKAkYaArE3EALw_wcB>

Painel das Desigualdades Educacionais no Brasil. Cenpec, 2022. Disponível em: <https://desigualdadeseducacionais. cenpec.org.br>. Acesso em 23/03/2023

PoCA – Portal de Cursos Abertos. Aprimora Mente, 2022. Disponível em: <https://aprimoramente.com/info/poca-portal-de-cursos-abertos/553695>. Acesso em: 15/06/2022.

PRADO, Elza Maria dos Santos do. **Um Novo Olhar Sobre o Ensino de Equação e Função do Segundo Grau**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, RJ, 2014.

REA Foi Tema de Encontro para Acadêmicos da UniBrasil. Educa Digital, 2012. Disponível em: <https://www.cursolab.org.br/rea/rea-foi-tema-de-encontro-para-academicos-da-unibrasil/>. Acesso em: 13/03/2023.

Relatório do PISA. gov.br. 2018. Disponível em: <Resultados — Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira | Inep (www.gov.br)>. Acesso em 20/10/2022

SALGADO, Maria Umbelina Caiafa; AMARAL, Ana Lúcia. **Tecnologias da Educação:** ensinando e aprendendo com as TIC: guia do cursista**.** Brasília: Ministério da Educação, Secretária da Educação à Distância, 2008.

SAVIANI, Dermeval. **Escola e democracia: teorias da educação, curvatura da vara, onze teses sobre educação e política**. 21. ed. São Paulo: Cortez, 1989.

SAVIANI, Dermeval. **Vicissitudes e perspectivas do direito à educação no Brasil: abordagem histórica e situação atual**. Educação & Sociedade, v. 34, n. 124, p. 743-760, jul./set. 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/es/v34n124/06.pdf>. Acesso em: 22 de junho 2023

SCHWAB, Klaus. **A Quarta Revolução Industrial**. São Paulo: Edipro 2016.

SILVA, Carlos Alberto. **Educação Digital:** transformações e entraves. Oliveira: Edição do Kindle, 2017.

SILVA, Clecio Souto da. **AVA – Motivando e Ensinando a Matemática em Rede:** Educação a Distância, Ambiente Virtual de Aprendizagem, Motivação. São Paulo: Amazon.com, 2014.

SILVA, Jeyson Barbosa de Araújo. **Equações do 2º Grau: Sua História e Abordagens Didáticas**. 2019. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

SILVA, Marco. **Internet na Escola e Inclusão**. In: ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de (org); MORAN, José Manuel (org). **Integração das Tecnologias na Educação:** salto para o futuro. Brasília: SEED/MEC, 2005.

SILVEIRA, Rosemari Monteiro Castilho Foggiatto; BAZZO, Walter. **Ciência, tecnologia e suas relações sociais:** a percepção de geradores de tecnologia e suas implicações na educação tecnológica. Ciência & Educação, v. 15, n.3, p. 681– 694, 2009.

TAHAN, Malba. **O Homem Que Calculava**. 83ª ed. – Rio de Janeiro: Record, 2023.

UNICEF. **Cenário da Exclusão Escolar no Brasil:** Um alerta sobre os impactos da pandemia da COVID-19 na Educação. CENPEC Educação, 2021.

Uso de Aplicativos Continua a Crescer Mesmo Após o Pior Momento da Pandemia. Yahoo. 2022. Disponível em: <https://br.financas.yahoo.com/noticias/uso-de-aplicativos-continua-a-crescer-mesmo-apos-o-momento-mais-agudo-da-pandemia-182937736.html?guccounter=1&guce_referrer=aHR0cHM6Ly93d3cuZ29vZ2xlLmNvbS8&guce_referrer_sig=AQAAAG6zdfRQkZhw48ciAEIPC9kgnoONX7JVaiMFwTl_nnKG66FUop0ec3RDbtv5BXXOSjHGOXapgOzrIdGJrx3BL9x_8eER9zLYDMh_2hUHhTnm_xm5k1W_uTXsMLKs0cSOnUA_DGn1XctGz-P5lecGDHz5pb1PS5uTiHiIOOdZBKQDhtml?guccounter= >. Acesso em 21/10/2022.

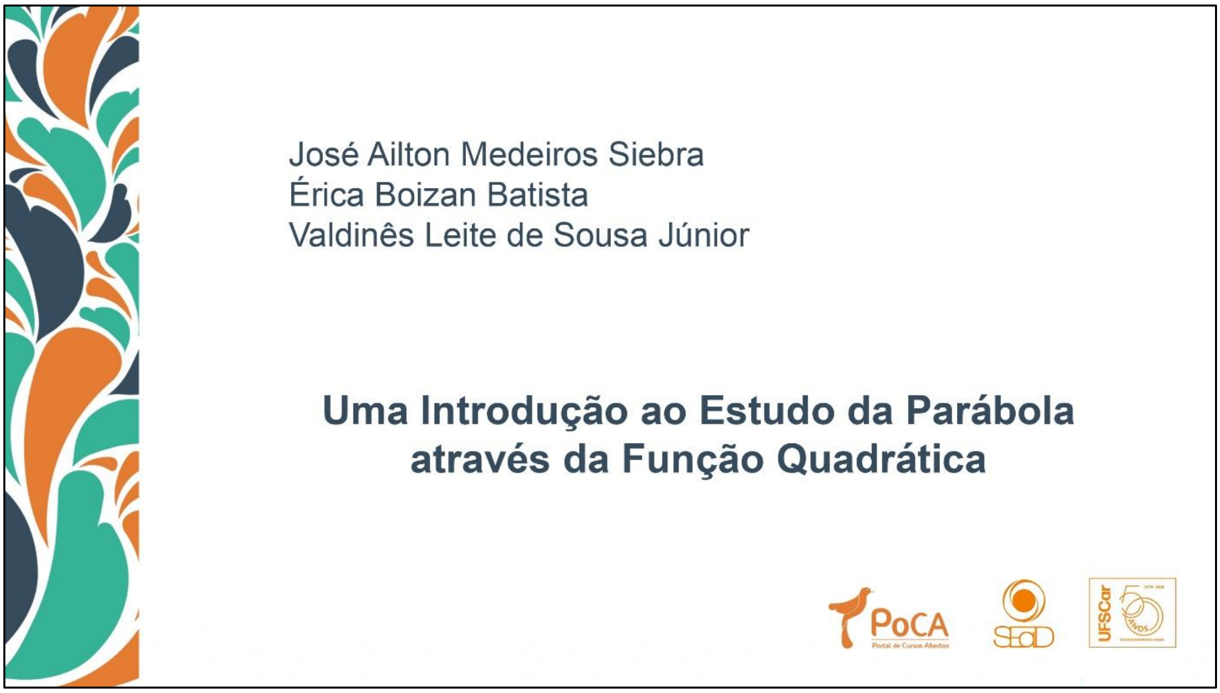
YAMAMOTO, Iara *et al*. **Os Benefícios dos MOOCs no Auxílio ao Aprendizado**. ALTEC BRASIL. PORTO ALEGRE, RS, 2015.

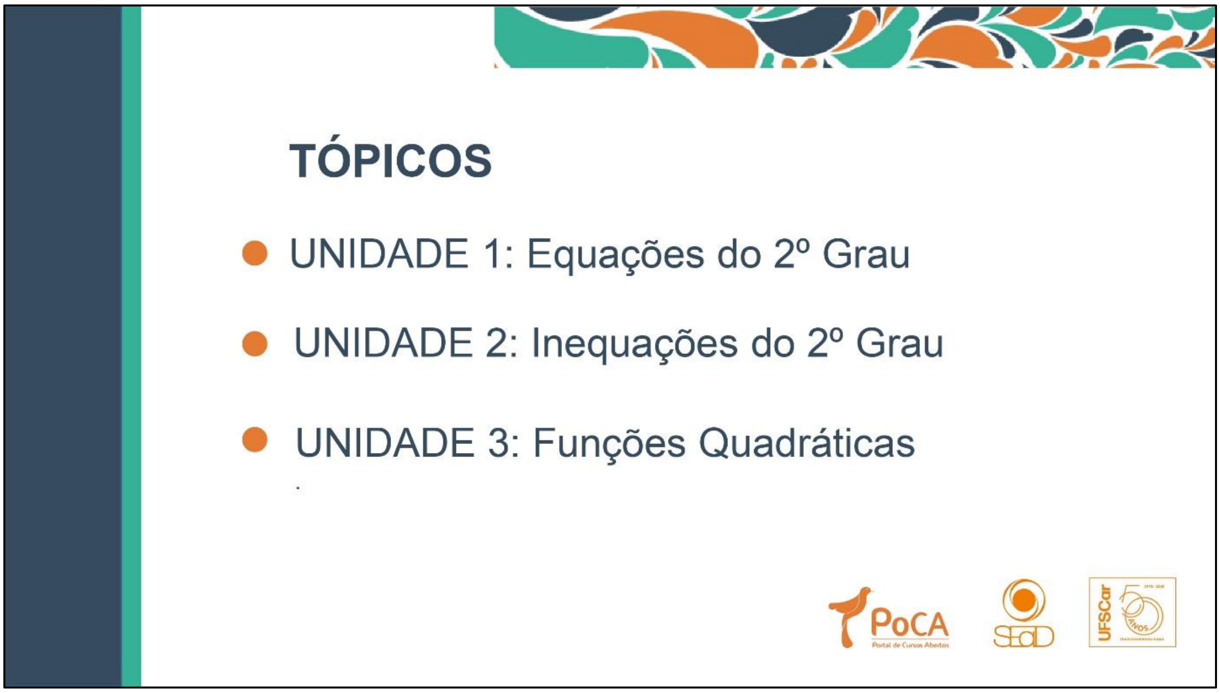
Apêndices:

A partir da próxima página estão anexados todos os materiais escritos para o minicurso Introdução ao Estudo da Parábola Através da Função Quadrática, na modalidade MOOC.

Este material está disponível também no Portal de Cursos Abertos, PoCA, da Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR, através do site https://poca.ufscar.br/.

A. Slides do Curso (Unidades 1, 2 e 3)





UNIDADE 1
Equações do 2º Grau

O que vem a ser isto?

1.1 Definição e Breve Histórico

1.1.1. Definição

A equação polinomial do segundo grau, também chamada de equação quadrática, ou ainda mais popularmente de equação do 2º grau, é uma sentença do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde x é a incógnita e $a, b,$ e c são os seus coeficientes, os quais são números reais, sendo $a \neq 0$.

1.1.2. Breve Histórico

Podemos dizer que a forma acima é o jeito ocidental atual de representar uma equação do segundo grau. Nem sempre foi assim. Aliás, em muitos casos os povos antigos nem mesmo tinham uma maneira formal de representar equações deste tipo. Os problemas eram de natureza prática e concreta, e muitas vezes eram apresentados e resolvidos de forma retórica, ou seja, verbal.

Existem registros de problemas envolvendo equações quadráticas, entre os egípcios, babilônicos e gregos, centenas de anos antes de Cristo.

Os gregos deram uma contribuição bastante significativa para o desenvolvimento da matemática, principalmente com a obra *Os* Elementos, de Euclides.

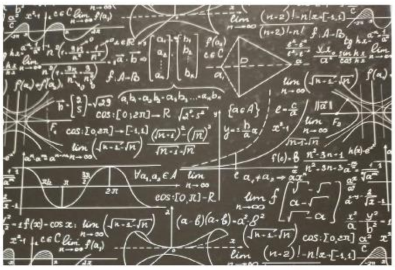
Outras contribuições importantes sobre métodos de resolver equações do segundo grau vieram dos indianos, dos árabes e dos chineses.

Já do lado ocidental, e mais recentemente, temos os estudos norteadores e bastante significativos de François Viète, Thomas Harriot e René Descartes. As contribuições destes se deu principalmente em relação à modernização dos símbolos representativos da equação.

Aliás, a forma que conhecemos hoje, que foi destacada no início deste tópico ($ax^2 + bx + c = 0$), é atribuída a Colin Maclaurin.

Fonte: http: //recordandomatematica. blogspot.com/2017/06/

Fonte: https://www.facebook.com/ telocuentoh/photos/a.110698353960763/32465627923 1635/?type=3



1.2. EQUAÇÕES INCOMPLETAS, EQUAÇÕES COMPLETAS E FORMAS DE RESOLVÊ-LAS

1.2.1. EQUAÇÕES INCOMPLETAS

Uma equação do 2º grau é dita incompleta quando falta o coeficiente *b* ou o *c* ou ambos. São portanto, equações incompletas:

- $ax^2 = 0$;
- $ax^2 + bx = 0$; e
- $ax^2 + c = 0$

Então, dada a equação do segundo grau completa $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, podemos ter os seguintes casos de equações incompletas, onde cada um apresenta peculiaridades de resolução:

- No primeiro caso temos:

$$\boldsymbol{ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0}$$

Mas é claro que podemos fazer a seguinte interpretação: se $ax^2 = 0$ e $a \neq 0$, então $x^2 = 0$, logo $x=0$.

Ex.: $3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

Portanto, quando uma equação do 2º grau for incompleta em *b* e *c*, ela terá apenas uma raiz, e esta será ZERO.

No segundo caso temos $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ com *c=0*, logo:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$$

Ora, $\boldsymbol{x}$ é um termo comum às duas parcelas da equação. Portanto, podemos reescrevê-la na forma fatorada, assim:

$$\boldsymbol{x \cdot (ax + b) = 0}$$

O que nos dá a clareza de que o produto indicado no primeiro membro dessa equação só será igual a zero, se $\boldsymbol{x = 0}$ ou $\boldsymbol{ax + b = 0}$

De $\boldsymbol{ax + b = 0}$**,** temos $\boldsymbol{ax = -b} \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}$

Portanto, quando uma equação do 2º grau é incompleta em *c*, ela terá duas raízes. A saber,

$$\boldsymbol{x' = 0 \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b}{a}}$$

Exemplo

$$5x^2 + 3x = 0$$

Solução:

Colocando $\boldsymbol{x}$ em evidência, temos:

$$x \cdot (5x + 3) = 0$$

Portanto, $x' = 0$ ou $5x + 3 = 0 \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x'' = -\frac{3}{5}$

Logo, o conjunto solução é

$$S = \left\{-\frac{3}{5}\ ; 0\right\}$$

No terceiro e último caso, se $ax^2 + bx + c = 0$ e ***b=0***, temos:

$$ax^2 + c = 0$$

Assim,

$$ax^2 = -c \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Se $-\frac{c}{a} > 0$ teremos dois valores simétricos para x.

Isto acontece sempre que a equação do 2º grau for incompleta em *b*.

Vejamos o exemplo:

$$6x^2 - 54 = 0$$

Solução:

$$6x^2 = 54 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{54}{6} = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

Portanto,

$$S = \{-3\ ;3\}$$

1.2.2. EQUAÇÃO COMPLETA

A forma geral da equação do 2º grau tal como conhecemos hoje ($ax^2 + bx + c = 0$) foi construída ao longo dos séculos por muitos estudiosos em muitas partes do mundo.

Antes tudo era escrito de forma literal, sem simbologia.

O francês Fraçois Viète (1540-1603) foi o primeiro a expressar em símbolos a fórmula geral de uma equação do segundo grau.

Olha só como era:

B in A área + C in A + D é igual a 0

O matemático inglês Thomas Harriot (1560-1621) introduziu o sinal de igualdade (=) e melhorou a fórmula para:

B in AA + C in A + D = 0

René Descartes (1596-1650) deu um grande passo apresentando a seguinte simbologia:

$x^2 . B + C . x + D = 0$

Entretanto, coube ao matemático inglês Colin Maclaurin (1698-1746) apresentar para o mundo em seu livro Álgebra o simbolismo que conhecemos hoje, o qual é uma forma que serve para resolver qualquer tipo de equação quadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Este Maclaurin parece que estava inspirado...

Ele saiu “inventando” coisa até descobrir um jeito de se chegar ao valor de x. Ou seja, um jeito de encontrar as raízes da equação.

- Primeiro ele isolou c:

$$ax^2 + bx = -c$$

- Depois ele multiplicou os dois membros por $4a$:

$$ax^2 + bx = -c \quad . (4a)$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

- A seguir ele somou b^2 aos dois membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

- Ele percebeu que no primeiro membro tinha um quadrado perfeito, pois

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$$

Isto no leva a

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Continuando...

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Como $b^2 - 4ac \geq 0$, temos:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

PORTANTO,

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Não é legal?

Porém, na realidade, Maclaurin apenas colocou em termos mais acessíveis o que muitos matemáticos já faziam desde tempos remotos.

Foi Bhaskara quem popularizou este método de resolver equações do 2º grau, ainda que sem a simbologia hoje utilizada.

Talvez, por isso, aqui no Brasil, a fórmula acima é chamada de FÓRMULA DE BHASKARA. E é assim que vamos chamá-la doravante.

Na fórmula:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a, *b* e *c* são chamados de coeficientes;

$b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante e simbolizado pela letra grega Δ (delta).

✓Se Δ>0, podemos observar na fórmula que *x* terá dois valores distintos;

✓Se Δ=0, a equação terá apenas um valor para *x*;

✓Se Δ<0, não teremos valores para *x* dentro do conjunto dos números reais.

... E O MELHOR: ESTA FÓRMULA RESOLVE TANTO EQUAÇÕES COMPLETAS COMO INCOMPLETAS.

Vamos ver como funciona???

Tomemos como exemplo a equação completa $2x^2 - 6x - 8 = 0$ para acharmos o seu conjunto solução.

Solução:

Se compararmos $ax^2 + bx + c = 0$ com $2x^2 - 6x - 8 = 0$, temos que $a = 2, b = -6 \; e \; c = -8$.

Colocando esses valores na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ fica

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot(-8)}}{2\cdot2} \Rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{36+64}}{4} \Rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{100}}{4}$$

$x = \frac{6\pm10}{4} \Rightarrow x' = \frac{6+10}{4} = \frac{16}{4} = 4$ e $x'' = \frac{6-10}{4} = \frac{-4}{4} = -1$. Logo,

$$S = \{-1\,;4\}$$

Agora vamos ver uma equação incompleta...

Achemos o conjunto solução da equação $5x^2 + 3x = 0$ que já foi trabalhado.

Solução:

Se compararmos $ax^2 + bx + c = 0$ com $5x^2 + 3x = 0$, temos que $a = 5, b = 3$ e $c = 0$.

Colocando esses valores na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ fica

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 5\cdot 0}}{2\cdot 5} \Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-0}}{10} \Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9}}{10}$$

$$x = \frac{-3\pm 3}{10} \Rightarrow x' = \frac{-3+3}{10} = \frac{0}{10} = 0 \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-3-3}{10} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

Logo,

$$S = \left\{-\frac{3}{5}\ ; 0\right\}$$

vamos brincar mais

Pela fórmula de Bhaskara, as raízes de uma equação do 2º grau são:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

O que será que acontece se somarmos essas raízes? Vejamos:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Então, podemos dizer que a soma das raízes de uma equação do 2º grau que designaremos por S é:

$$S = -\frac{b}{a}$$

Agora vamos ver o que acontece se multiplicarmos essas raízes:

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac}\,)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Então, podemos dizer que o produto das raízes de uma equação do 2º grau que designaremos por *P* é:

$$P = \frac{c}{a}$$

Ô brincadeirinha boa!!!
Vamos continuar...

COISA LEGAL

Como fica a equação ***ax²+bx+c=0*** se a dividirmos por ***a***? Vejamos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Conhecemos esses termos destacados de algum lugar???

Os termos em destaque são, respectivamente, $-S$ e *P*.

Portanto, podemos reescrever $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ da seguinte forma:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$$

Esta belezura foi estabelecida pelo matemático francês Albert Girard (1595 – 1632).

E, por isso, S e P são conhecidos como Relações de Girard.

Gostou? Tem mais...

Será se tem como escrevermos a equação do segundo grau na ***FORMA FATORADA?***

Vamos multiplicar a equação $x^2 - Sx + P = 0$ pelo coeficiente ***'a'*** para ver o que acontece.

Vejamos:

$$ax^2 - aSx + aP = 0$$
$$ax^2 - a(x' + x'')x + ax'.x'' = 0$$
$$ax^2 - axx' - axx'' + ax'x'' = 0$$

Se aplicarmos a regra do ***fator comum*** nas duas primeiras parcelas e nas duas últimas de $ax^2 - axx' - axx'' + ax'x'' = 0$, temos:

$$ax(x - x') - ax''(x - x') = 0$$

e aplicando fator comum novamente:

$$(x - x').(ax - ax'') = 0$$

$$(x - x').a.(x - x'') = 0 \quad \text{ou}$$

$$a.(x - x').(x - x'') = 0$$

Agora vamos ver como funciona...

A equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$ cujas raízes são 2 e 3, e que fazendo as devidas substituições na forma fatorada

$$\boldsymbol{a.(x - x').(x - x'') = 0} \qquad \textbf{fica}$$

$$\boldsymbol{2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0}$$

De fato, se efetuarmos a multiplicação, teremos:

$$\boldsymbol{2 \cdot (x^2 - 3x - 2x + 6) = 0}$$

$$\boldsymbol{2 \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0}$$

$$\boldsymbol{2x^2 - 10x + 12 = 0}$$

Por outro lado, ainda no exemplo $2x^2 - 10x + 12 = 0$ se quisermos descobrir as raízes através das relações de Girard temos:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-10)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{12}{2} = 6$$

Precisamos, então, encontrar dois números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 6.

Esses números são 2 e 3.

Portanto, as raízes da equação são 2 e 3.

PoCA
Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar

concluindo...

Qualquer equação do segundo grau da forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pode ser escrita também nas formas:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

e

$$a.(x - x').(x - x'') = 0$$

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS PARÁBOLAS

Equações do Segundo Grau

Resumo da apresentação

- Definição e breve histórico
- Equações completas e incompletas
- Curiosidades sobre forma de escrever uma equação quadrática

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. *Números e funções*. SBM. Rio de Janeiro, 2013.

ANDRADE, Bernardino Carneiro de. *A Evolução Histórica da Resolução das Equações do 2º Grau*. Porto: Universidade de Ciências do Porto, 2000

SILVA, Jeyson Barbosa de Araújo. *Equações de 2º grau: Sua História e Abordagens* Didáticas. João Pessoa: UFPB, 2019

José Ailton Medeiros Siebra
Érica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

Uma Introdução ao Estudo da Parábola através da Função Quadrática

TÓPICOS

- UNIDADE 1: Equações do 2º Grau
- UNIDADE 2: Inequações do 2º Grau
- UNIDADE 3: Funções Quadráticas

UNIDADE 2
Inequações do 2º Grau

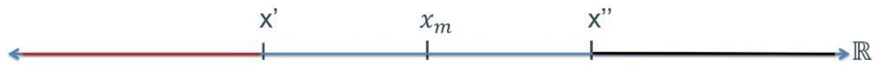
2.1. DEFINIÇÃO

Na palavra *inequação* o prefixo 'in' indica negação. Portanto, inequação é uma *NÃO EQUAÇÃO*.

A **inequação do segundo grau** é uma expressão do tipo $\boldsymbol{ax^2+bx+c\geq 0}$ ou $\boldsymbol{ax^2+bx+c\leq 0}$ ou $\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ ou $\boldsymbol{ax^2+bx+c<0}$, onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são números reais, sendo $a\neq 0$.

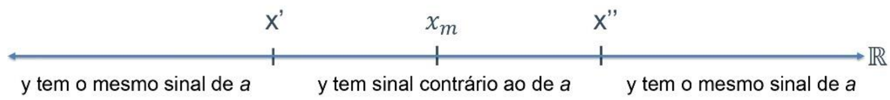
2.2. PARA ALÉM DAS RAÍZES

Portanto, temos uma inequação quando analisamos o que acontece com $ax^2 + bx + c$ para outros valores de x além daqueles para os quais a expressão se anula. Na reta isto fica assim:



2.3. CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS INEQUAÇÕES

Ao analisarmos essas três partes da reta, percebemos algumas características bem específicas:



1ª) Para valores de x no intervalo entre as raízes, a expressão assume valores sempre com sinal contrário ao do coeficiente *'a'* ;

2ª) Tanto antes de x' como depois de x'', ou seja, nos intervalos que não estão entre as raízes, a expressão assume valores sempre com sinal igual ao do coeficiente *'a'*;

3ª) Os valores que a expressão assume, são iguais para os números simétricos ao x_m, que é o valor médio do seguimento $\overline{x'x''}$; e

4ª) Chamando de y os valores que a expressão $ax^2 + bx + c$ assume de acordo com os valores de x, percebemos que o conjunto de todos os pontos - pares ordenados *(x,y)* -, forma uma curva com propriedades únicas chamada de

P A R Á B O L A

Esta curva vai existir independentemente de termos duas raízes reais, uma ou nenhuma.

Dependendo da quantidade de raízes, teremos as seguintes situações para a expressão $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$:

1) $\boldsymbol{a > 0 \; ou \; a < 0}$ e duas raízes: a expressão assumirá valores positivos e negativos;

2) $a > 0$ e uma raiz: a expressão, excetuando-se, na raiz, terá apenas valores positivos;

3) $a < 0$ e uma raiz: a expressão, excetuando-se, na raiz, terá apenas valores negativos;

4) $a > 0$ e nenhuma raiz real: a expressão assumirá apenas valores positivos;

5) $a < 0$ e nenhuma raiz real: a expressão assumirá apenas valores negativos.

Podemos, com esses dados, construir a seguinte tabela:

a	QUANTIDADE DE RAÍZES	VALORES DE $ax^2 + bx + c$
Positivo	nenhuma raiz real	positivos
	uma raiz	positivos e nulo
	duas raízes	positivos, negativos e nulo
Negativo	nenhuma raiz real	negativos
	uma raiz	negativos e nulo
	duas raízes	positivos, negativos e nulo

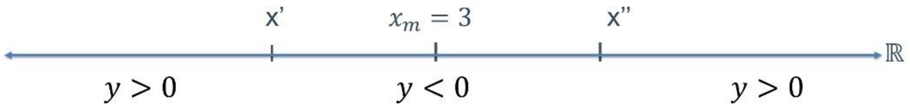
2.4. EXEMPLOS

Exemplo 1:

$$2x^2 - 12x + 10 \text{ onde } a > 0, x' = 1, x'' = 5, \text{e } x_m = 3$$

Atribuiremos valores para x menores do que 1, entre 1 e 5, e maiores que 5, para vermos como $2x^2 - 12x + 10$ se comporta. Para isso chamaremos a expressão de y e colocaremos esses valores na tabela:

x		$y = 2x^2 - 12x + 10$	Sinais de y e a
Menor que 1	**-2**	$\mathbf{2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 10 = 42}$	$\boldsymbol{a > 0}$ **e** $\boldsymbol{y > 0}$
Entre 1 e 5	**2**	$\mathbf{2 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 10 = -6}$	$\boldsymbol{a > 0}$ **e** $\boldsymbol{y < 0}$
Maior que 5	**8**	$\mathbf{2 \cdot (8)^2 - 12 \cdot (8) + 10 = 42}$	$\boldsymbol{a > 0}$ **e** $\boldsymbol{y > 0}$



Observemos que $x = 8$ é simétrico de $x = -2$ em relação a $x_m = 3$ já que para esses dois valores $y = 42$.

Exemplo 2:

$$-2x^2 + 12x - 10 \text{ em que } a < 0, x' = 1, x'' = 5, \text{e } x_m = 3$$

x		$y = -2x^2 + 12x - 10$	Sinais de y e a
Menor que 1	-2	$-2 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) - 10 = -42$	$a < 0$ e $y < 0$
Entre 1 e 5	2	$-2 \cdot (2)^2 + 12 \cdot (2) - 10 = 6$	$a < 0$ e $y > 0$
Maior que 5	8	$-2 \cdot (8)^2 + 12 \cdot (8) - 10 = -42$	$a < 0$ e $y < 0$

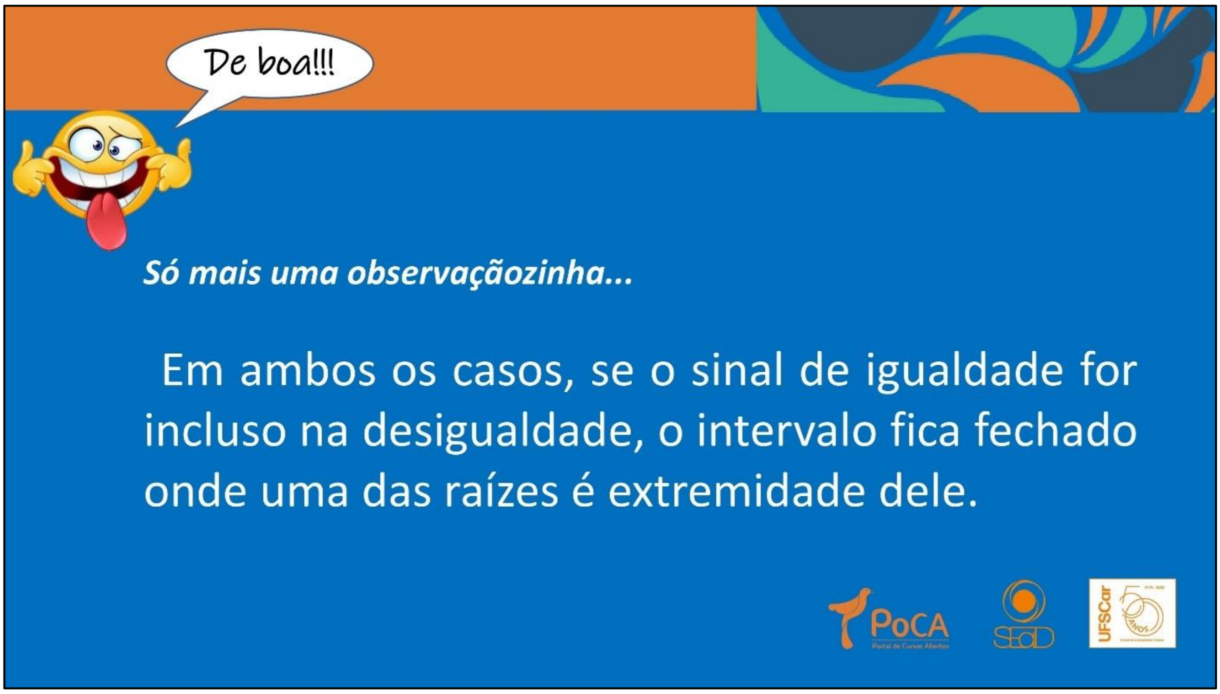
Observemos que, semelhante ao exemplo anterior, $x = 8$ é simétrico de $x = -2$ em relação a $x_m = 3$ já que para esses dois valores $y = -42$.

RESUMINDO O QUE ACABAMOS DE VER:

1) Se *a>0* , temos
   - *y>0* no intervalo $]-\infty; x'[$ e no intervalo $]x''; +\infty[$; e
   - *y<0* no intervalo $]x'; x''[$;

2) Se a<0, temos
   - *y>0* no intervalo $]x'; x''[$; e
   - *y<0* nos intervalos $]-\infty; x'[$ e $]x''; +\infty[$; e

Ô louco, meu!!!


De boa!!!
Só mais uma observaçãozinha...
Em ambos os casos, se o sinal de igualdade for incluso na desigualdade, o intervalo fica fechado onde uma das raízes é extremidade dele.
PoCA
Portal de Cursos Abertos
SEaD
UFSCar


Vamos praticar para descomplicar?
Oba! Vamoooooos!!!
PoCA
Portal de Cursos Abertos
SEaD
UFSCar

RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES

Acho que é melhor fazermos um *CHECKLIST* para facilitar nossa vida.

Passos para resolvermos inequações do 2º grau:

1. Desconsideramos a desigualdade e igualaremos a expressão a zero para podermos achar suas raízes;

2. Achadas as raízes, nós as colocamos na reta numérica;

3. Em seguida colocamos o sinal positivo ou negativo nos intervalos delimitados pelas raízes;

4. Escrevemos o conjunto solução estabelecido pelo(s) intervalo(s) cujo sinal estiver de acordo com o que a inequação pede ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$).

Observações importantes...

- É claro que não teremos intervalos quando não existir raízes reais. Neste caso, ou toda reta numérica será solução, ou a solução será vazia. Vai depender do que a inequação pede.

- E quando houver apenas uma raiz real, se o sinal de desigualdade não a incluir, ela ficará fora do conjunto solução.

Vamos ver como funciona...

Usaremos a expressão $2x^2 - 12x + 10$ com a qual já temos trabalhado para ver como ela se comporta com os sinais de desigualdade, e em seguida escrevermos o conjunto solução de cada caso a seguir

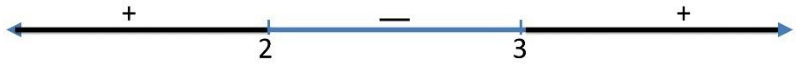
❖ $2x^2 - 12x + 10 > 0$

Passo 1: Desconsiderar a desigualdade e igualar a zero para achar as raízes:

$$2x^2 - 12x + 10 = 0$$

Sabemos que se multiplicarmos a equação por algum valor não alteramos o seu resultado. Portanto, para facilitar, podemos multiplicar a equação por ½, ou em outras palavras, dividi-la por 2, e obtemos $x^2 - 6x + 5 = 0$, cujas raízes são 2 e 3.

Passos 2 e 3: Colocar as raízes na reta numérica



Passo 4: Como o objetivo neste caso é sabermos onde a expressão é maior do que zero, portanto, positiva, colocamos no conjunto solução o(s) intervalo(s) onde o sinal é positivo.

Assim:

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{x} < \mathbf{2} \ \boldsymbol{ou} \ \boldsymbol{x} > \mathbf{3}\}$$ **ou S =** $]\infty_{-}; \mathbf{2}[\cup]\mathbf{3}; \infty_{+}[$

De forma análoga...

- $2x^2 - 12x + 10 \geq 0$

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2} \ \boldsymbol{ou} \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{3}\}$$ **ou S =** $]\infty_{-}; \mathbf{2}] \cup [\mathbf{3}; \infty_{+}[$

- $2x^2 - 12x + 10 < 0$

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \ \mathbf{2} < \boldsymbol{x} < \mathbf{3}\}$$ **ou S =** $]2; \mathbf{3}[$

E por último...

❖ $2x^2 - 12x + 10 \leq 0$

$\boldsymbol{S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}}$ **ou S =** $\boldsymbol{[2; 3]}$

Começou a clarear...

Pois vamos clarear de vez...

No slide 7 falamos que a curva formada por todos os pontos onde um polinômio do segundo grau é maior, menor ou igual a zero forma uma curva denominada PARÁBOLA.

Pois, bem! Esta curva é específica de polinômios do 2º grau, e pode se apresentar em qualquer posição no plano cartesiano. Mas, neste curso iremos tratar unicamente das parábolas que chamaremos de verticais, e que vão se apresentar de uma das formas a seguir:

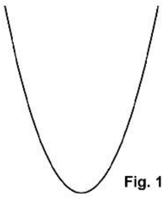


Fig. 1

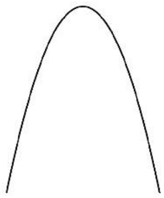


Fig. 2

A figura 1 é uma parábola de concavidade voltada para cima (CVC).

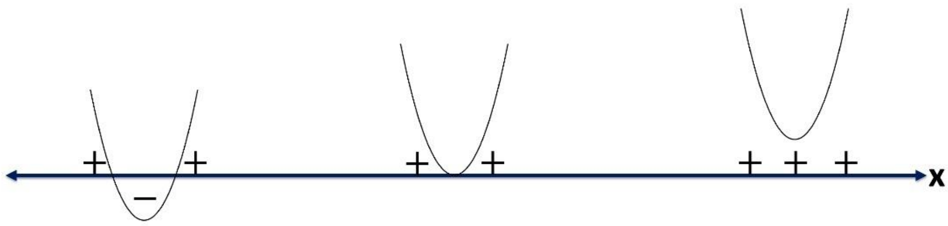
A figura 2 é uma parábola de concavidade voltada para baixo (CVB).

O que determina se a concavidade será voltada para cima ou para baixo é o sinal do coeficiente *a.*

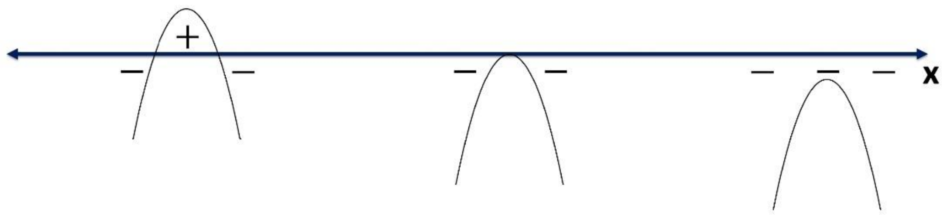
Se *a>0,* temos CVC.
Se *a<0*, temos CVB.

Portanto, ao analisarmos o comportamento da parábola em relação à reta que representa os valores que x assume em $ax^2 + bx + c$, temos os seguintes casos:

1) Se *a>0*



2)Se *a<0*



Ora, se entendemos que a parábola é formada por pontos (x;y), então fica fácil percebermos que a parte dela que fica acima do eixo x representa os valores positivos para y, e a parte que fica abaixo de do eixo x representa os valores negativos de y.

Agora tudo faz sentido!!!

PoCA Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS PARÁBOLAS

Inequações do Segundo Grau

Resumo da apresentação

- Definição
- Características Gerais
- Como resolver inequações
- Interpretação das posições da parábola em relação ao eixo das abscissas

PoCA Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1: Conjuntos e Funções.* 9ª edição. Editora Atual. São Paulo, 2013.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções*. SBM. Rio de Janeiro, 2013.

José Ailton Medeiros Siebra
Érica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

Uma Introdução ao Estudo da Parábola através da Função Quadrática

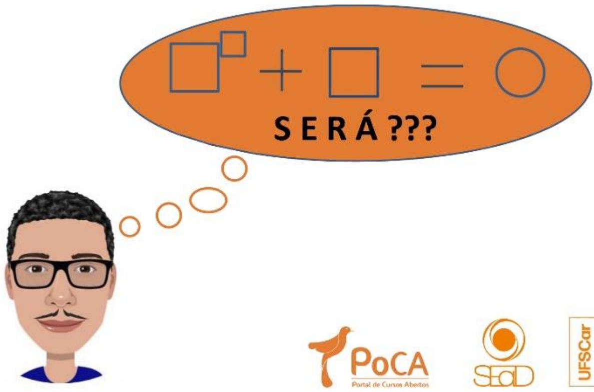
PoCA Portal de Cursos Abertos SEaD UFSCar

TÓPICOS

- UNIDADE 1: Equações do 2º Grau
- UNIDADE 2: Inequações do 2º Grau
- UNIDADE 3: Funções Quadráticas

PoCA Portal de Cursos Abertos SEaD UFSCar

UNIDADE 3
Funções Quadráticas



3.1 Conceito

Quando resolvemos uma *EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU*, estamos procurando o(s) valor(es) de *x* que anula(m) a sentença $ax^2 + bx + c$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Quando resolvemos uma *INEQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU*, estamos procurando além do(s) valor(es) que anula(m) a sentença $ax^2 + bx + c$, também os valores para os quais ela é positiva ou negativa:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$

3.1.1 Conceito intuitivo

Quando juntamos os conceitos de *EQUAÇÃO* e de *INEQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU*, estamos analisando o que acontece com a sentença $ax^2 + bx + c$ para todos os valores reais de *x*.

Podemos representar esses valores pela expressão

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ é $a\ variável\ independente$, $y \in \mathbb{R}$ é $variável\ dependente$, e os coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

3.1.2 Definição formal

Portanto, podemos definir *FUNÇÃO QUADRÁTICA* ou *FUNÇÃO DO 2º GRAU* como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ $(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ dada por

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c} \text{ ou } \boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.2. Gráfico

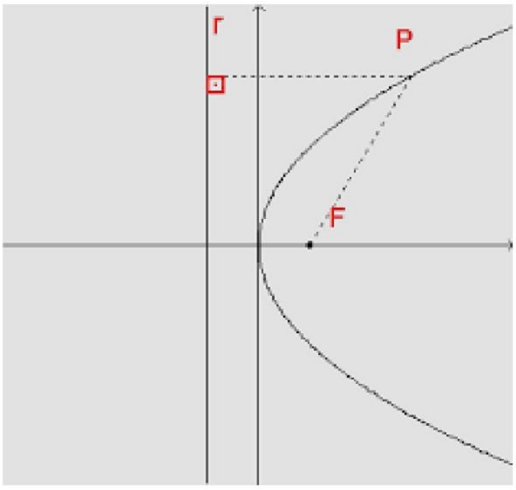
O gráfico da função quadrática, assim como o gráfico de qualquer função, é dado pela união dos pares ordenados $(x; y)$ no plano cartesiano.

No caso da **função quadrática**, a união destes pares ordenados (pontos), formará uma **PARÁBOLA**.

3.3. Parábola

A **PARÁBOLA** é o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância de uma reta (*diretriz*) e de um ponto (*foco*) fora dela.

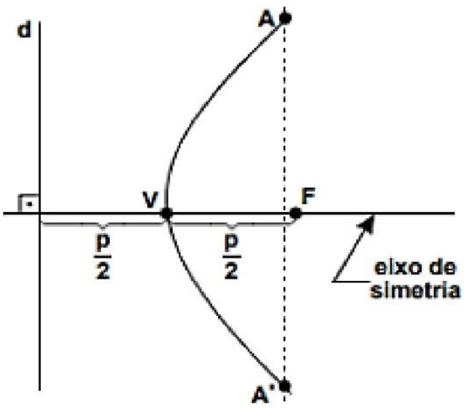
3.3 Parábola



r é a reta *diretriz;*
F é o *foco* e é um ponto fora da diretriz;
P é um ponto equidistante de r e F;

$$\boldsymbol{d(r\,,P) = d(F\,,P)}$$

3.3.1 Elementos e Características da Parábola

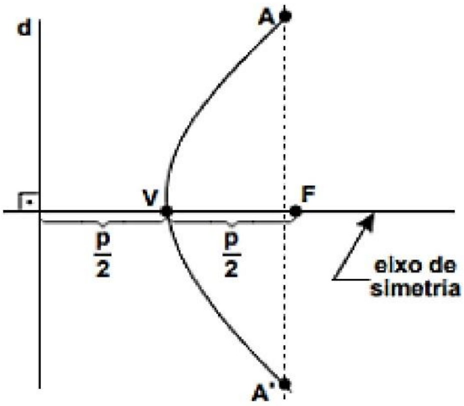


$\overleftrightarrow{\boldsymbol{VF}}$ é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz *d.* Ela é chamada de RETA FOCAL ;

V é o vértice. Ele pertence à reta focal, e é o ponto médio da distância $d_{F,d} = p$;

A reta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AA'}}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{VF}$ e os pontos A e A' são simétricos em relação a $\overleftrightarrow{VF}$.

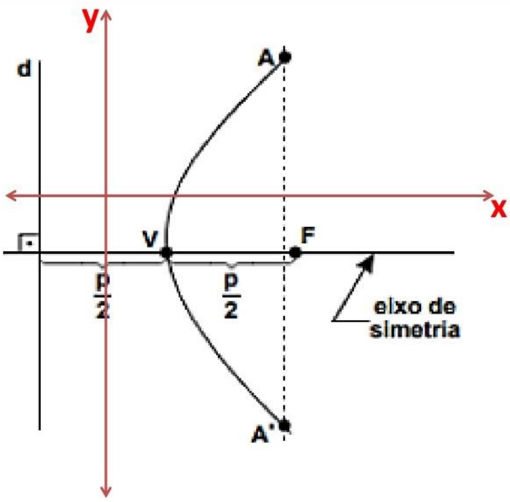
3.3.1 Elementos e Características da Parábola



Esta simetria acontecerá para quaisquer dois pontos da parábola que pertençam a uma reta paralela a $\overleftrightarrow{AA'}$. É por isso que $\overleftrightarrow{VF}$ é chamada de **eixo de simetria.**

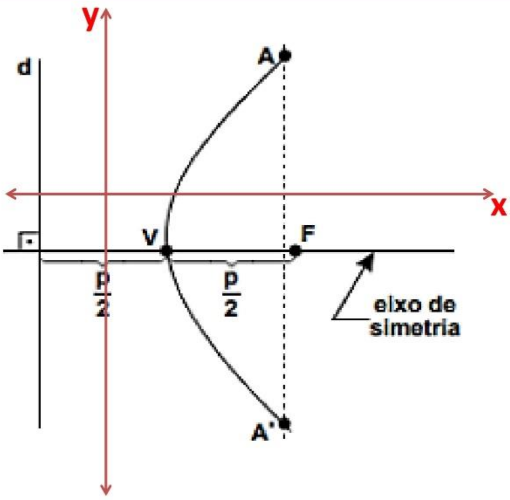
V é o ponto da parábola mais próximo de ***d***.

3. 4 Parábola e Gráfico da Função do 2º Grau



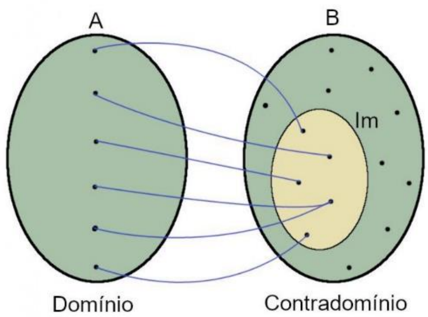
Tomemos o plano cartesiano e o eixo de simetria, paralelo ao eixo das abscissas (x), e perpendicular ao eixo das ordenadas (y).

3. 4 Parábola e Gráfico da Função do 2º Grau



Neste caso, a parábola da figura ao lado jamais representará o gráfico de uma função do 2º grau, uma vez que os pontos *A* e *A'* têm a mesma abscissa, e isto vai de encontro à definição de função.

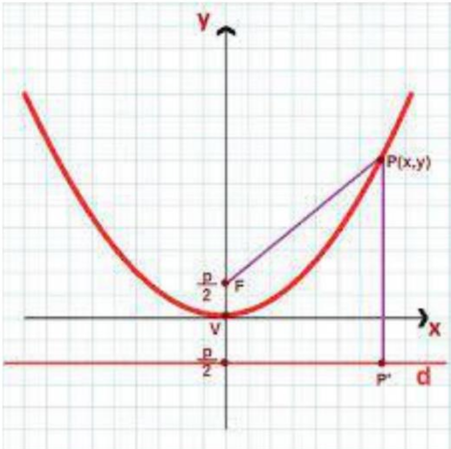
3. 4 Parábola e Gráfico da Função do 2º Grau



A definição de função nos diz que dados dois conjuntos ***A*** (domínio) e ***B*** (contradomínio), cada elemento de ***A*** se relaciona com **UM ÚNICO** elemento de ***B***.

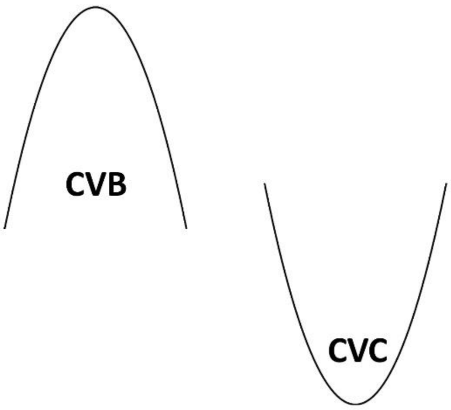
Logo, temos $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ se, e somente se, para cada $x \in A$ há um único $y \in B$.

3. 4 Parábola e Gráfico da Função do 2º Grau



Sendo assim, concluímos que para uma parábola representar o gráfico uma função do segundo grau, o seu eixo de simetria precisa ser perpendicular ao eixo das abscissas.

3. 4 Parábola e Gráfico da Função do 2º Grau



Portanto, em se tratando de gráfico de função do 2º grau, só teremos parábola de concavidade voltada para baixo (CVB) ou de concavidade voltada para cima (CVC).

3. 5 Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

Como já vimos, o eixo de simetria de uma parábola passa pelo seu vértice. Portanto, para construirmos o gráfico de uma função do 2º grau, é suficiente que conheçamos a concavidade da parábola, o vértice, e dois pontos simétricos quaisquer da mesma.

Esses pontos simétricos podem ser, inclusive, os dois pontos onde ela toca o eixo x, quando temos $\Delta > 0$.

3. 5 Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

Também já vimos que o ponto médio de duas raízes distintas na equação do 2º grau é dado por

$$x_M = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Este valor $-\frac{b}{2a}$ é a abscissa de todos os pontos que pertencem ao eixo de simetria da parábola.

3. 5 Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

Isto implica em dizer que dados dois pontos quaisquer com abscissas x_1 e x_2, se $f(x_1) = f(x_2)$, então esses pontos são simétricos em relação a $-\frac{b}{2a}$.

Como o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria, podemos concluir que a abscissa do vértice da parábola é $-\frac{b}{2a}$.

3. 5 Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

Assim,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

3. 5 Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

Logo, o vértice da parábola é dado por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

3. 5 Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

A concavidade da parábola é indicada pelo coeficiente a.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Neste caso o vértice será ponto de mínimo.

Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Neste caso o vértice será ponto de máximo.

3. 5 Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

Ora, se a parábola tiver ponto de mínimo, qualquer valor de y acima do valor mínimo, nos revelará dois pontos simétricos.

O mesmo acontece com valores abaixo do valor máximo. Eles também nos revelarão pontos simétricos.

3.5.1. EXEMPLOS

1- Esbocemos o gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 5}$

Primeiro passo: Achar as coordenadas do vértice

$$x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ ou } x_v = \frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$y_v = f(x_v) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4 \quad \text{ou}$$

$$y_v = -\frac{(-6)^2 - 4.1.5}{4} = -4$$

$$V = (3; -4)$$

3.5.1. EXEMPLOS

Segundo passo: Verificar a concavidade

Como $a = 1$, então temos a concavidade voltada para cima (CVC).

Terceiro passo: Encontrar dois pontos simétricos

Precisamos encontrar dois pontos simétricos ao eixo de simetria que é a reta $x = 3$, e cujas ordenadas sejam maiores que 5, que é o valor mínimo da função.

3.5.1. EXEMPLOS

Temos os pontos $(1; 0)$ e $(5; 0)$ que contêm as raízes da função. Mas vamos pegar outro.

Tomemos dois pontos cuja ordenada seja 5, já que $5 > -4$.

Assim,

$$x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x = 0$$

3.5.1. EXEMPLOS

Resolvendo a equação, temos:

$$x \cdot (x - 6) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x - 6 = 0$$

Portanto, $x' = 0$ **e** $x'' = 6$

Logo, os pontos que estamos procurando são

$$\mathbf{A = (0; 5) \text{ e } B = (6; 5)}$$

3.5.1. EXEMPLOS

Agora é só construir o gráfico!

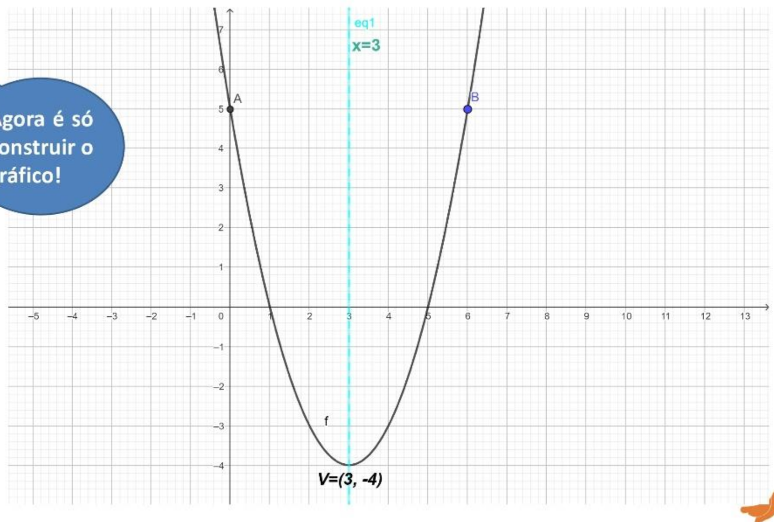


Gráfico construído no GEOGEBRA

BRAVO!!!

3.5.1. EXEMPLOS

2- Esbocemos o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 10x - 30$

Primeiro passo: Achar as coordenadas do vértice

$$x_v = 5$$

$$y_v = -\frac{(-20)}{-4} = -5$$

$$V = (5, -5)$$

3.5.1. EXEMPLOS

Segundo passo: Verificar a concavidade

Como $a = -1$ a concavidade da parábola é voltada para baixo (CVB)

Terceiro passo: Achar dois pontos simétricos ao eixo de simetria $x = 5$

Vamos achar dois pontos A e B que tenham ordenada um valor menor do que -5 que é o valor máximo da função.

Para $y = -2$, por exemplo, temos os pontos

$$A = (1, -21) \text{ e } B = (9, -21)$$

3.5.1. EXEMPLOS

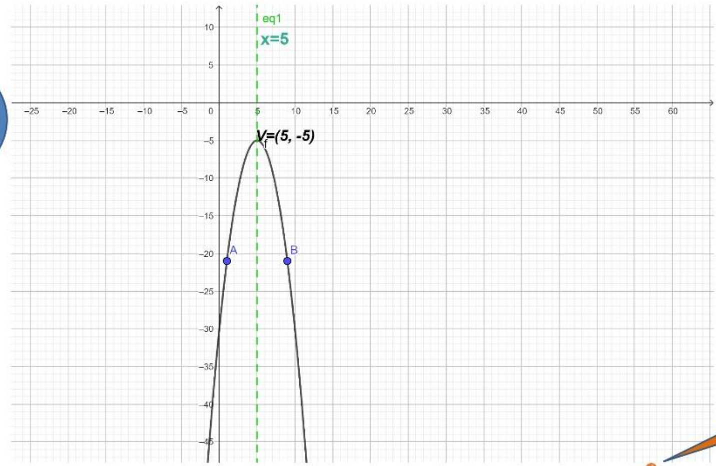


Gráfico construído no GEOGEBRA

BRAVO!!!

3.6. MAIS SOBRE OS COEFICIENTES *a, b* e *c*

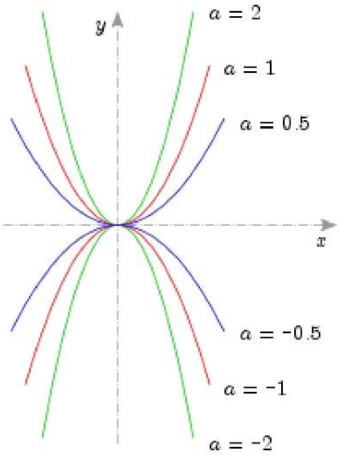
✓ **O coeficiente *a* além de indicar a concavidade também fala da abertura da parábola.**

Podemos observar que quanto menor for o valor absoluto de *a*, maior será a abertura da parábola. E, quanto maior for o valor absoluto de *a*, menor será a abertura da parábola.

Isto quer dizer que dependendo do valor absoluto de *a*, os pontos ficarão mais ou menos afastados do eixo de simetria.

3.6. MAIS SOBRE OS COEFICIENTES *a, b* e *c*

Vejamos um exemplo com a função $f(x) = ax^2$



Vixe, que coisa bonita!!! "Xonei"!

https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fca.wikipedia.org%2Fwiki%2FPar%25C3%25A0bola&psig=AOvVaw3jshmN-T8a3jkyENMmKHHJ&ust=1684080876639000&source=images&cd=vfe&ved=0CBEQjRxqFwoTCPih1bbY8v4CFQAAAAAdAAAAABAI

3.6. MAIS SOBRE OS COEFICIENTES *a, b* e *c*

✓ **O coeficiente *b* indica se a parábola tocará o eixo *y* na parte onde a função é crescente ou na parte onde ela é decrescente.**

Se $b > 0$ será na parte onde a função é crescente.

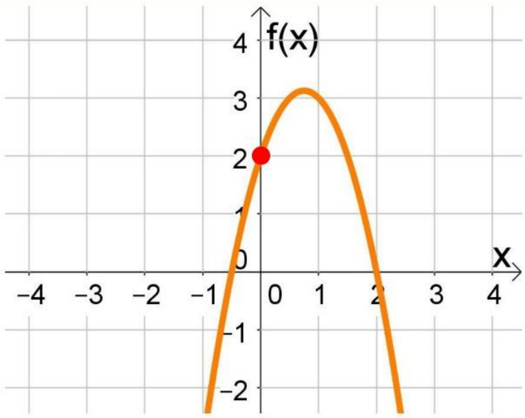
Se $b < 0$ será na parte onde a função é decrescente.

3.6. MAIS SOBRE OS COEFICIENTES *a, b* e *c*

- ✓ O coeficiente *c* indica a ordenada do ponto *(0,c)* que é o ponto onde a parábola toca o eixo y.

Veremos a seguir os gráficos das funções $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ e $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ para verificarmos o que acontece com a parábola devido ao valor dos coeficientes *b* e *c*.

3.6. MAIS SOBRE OS COEFICIENTES *a, b* e *c*

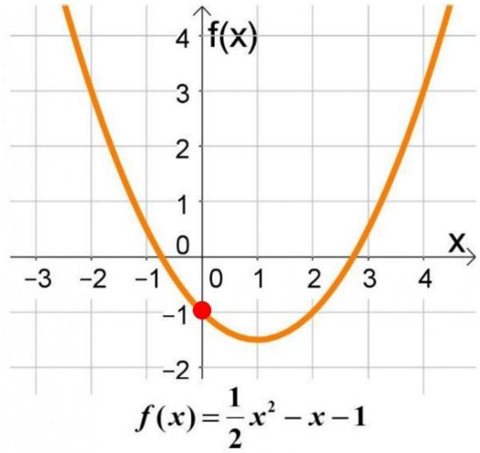


$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

https://www.dicasdecalculo.com.br/wp-content/uploads/2017/05/Fun%C3%A7%C3%A3o-do-2-grau.jpg *com alteração.*

Neste primeiro gráfico $b > 0$. Logo a parábola toca o eixo y com o seu lado crescente.
E como $c = 2$, é justamente no ponto (0, 2) que a parábola toca esse eixo, como está destacado em vermelho.

3.6. MAIS SOBRE OS COEFICIENTES *a, b* e *c*



Neste segundo gráfico $b < 0$. Logo a parábola toca o eixo y com o seu lado decrescente. E como $c = -1$, é justamente no ponto (0, -1) que a parábola toca esse eixo, como está destacado em vermelho.

https://www.dicasdecalculo.com.br/wp-content/uploads/2017/05/Fun%C3%A7%C3%A3o-do-2-grau.jpg *com alteração.*

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS PARÁBOLAS

Funções Quadráticas

Resumo da apresentação

- Definição a partir de equação e inequação
- Conceito e elementos da parábola
- Parábola e gráfico da função quadrática
- Construção do gráfico
- Particularidades dos coeficientes da função

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. *Números e funções*. SBM. Rio de Janeiro, 2013.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*. 2ª ed. SBM. Rio de Janeiro. 2017.

PRADO. Elsa Maria dos Santos do. *Um Novo Olhar sobre o Ensino de Equação e Função do Segundo Grau*. UENF: Goytacazes. 2014.

B. APOSTILA

Introdução ao Estudo da Parábola através da Função Quadrática

José Ailton Medeiros Siebra
Prof. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Profa. Erica Boizan Batista

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA PARÁBOLA ATRAVÉS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA[1]

1. Equação do Segundo Grau

1.1. Definição

A equação polinomial do segundo grau, também chamada de equação quadrática, ou ainda maispopularmente de equação do 2º grau, é uma sentença do tipo

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

onde x é a incógnita e $a, b,$ e c são os seus coeficientes, os quais são números reais, sendo $a \neq 0$.

1.1. Breve Histórico

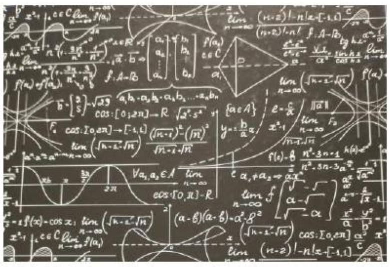
Podemos dizer que a forma acima é o jeito ocidental atual de representar uma equação do segundo grau. Nem sempre foi assim. Aliás, em muitos casos os povos antigos nem mesmo tinham uma maneira formal de representar equações deste tipo. Os problemas eram de natureza prática e concreta, e muitas vezes eram apresentados e resolvidos de forma retórica, ou seja, verbal.

Fonte: http: //recordandomatematica. blogspot.com/2017/06/

Existem registros de problemas envolvendo equações quadráticas, entre os egípcios, babilônicos e gregos, centenas de anos antes de Cristo.

[1] José Ailton Medeiros Siebra: professor da rede estadual de ensino do estado do Ceará, bacharel em Ciências Econômicas e Direito, mestrando em Matemática pelo PROFMAT;
Valdinês Leite de Sousa Júnior: Mestre em Matemática pela UFPI e Doutor em Matemática pela UFG
Erica Boizan Batista: Licenciada em Matemática, Mestre em Matemática, Doutora em Matemática

Fonte: https://www.facebook.com/telocuentoh/photos/a.110698353960763/324656279231635/?type=3



Os gregos deram uma contribuição bastante significativa para o desenvolvimento da matemática, principalmente com a obra *Os* Elementos, de Euclides.

Outras contribuições importantes sobre métodos de resolver equações do segundo grau vieram dos indianos, dos árabes e dos chineses.

Já do lado ocidental, e mais recentemente, temos os estudos norteadores e bastante significativos de François Viète, Thomas Harriot e René Descartes. As contribuições destes se deu principalmente em relação à modernizaçãodos símbolos representativos da equação.

Aliás, a forma que conhecemos hoje, que foi destacada no início deste tópico ($ax^2 + bx + c = 0$), é atribuída a Colin Maclaurin.

1.2. Equações incompletas, equações completas, e como resolvê-las

1.2.1. Equações incompletas

Uma equação do 2º grau é dita incompleta quando falta o coeficiente *b* ou o *c* ou ambos. São, portanto, equações incompletas:

- $ax^2 = 0$;
- $ax^2 + bx = 0$; e
- $ax^2 + c = 0$

Então, dada a equação do segundo grau completa $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, podemos ter os seguintes casos de equações incompletas, onde cada um apresenta peculiaridades de resolução:

- No primeiro caso temos $ax^2 + bx + c = 0$, onde $b = 0$ e $c = 0$, logo:

  $\boldsymbol{ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0}$

Mas é claro que podemos fazer a seguinte interpretação: se $\boldsymbol{ax^2 = 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 0}$, então $\boldsymbol{x^2 = 0}$, logo $\boldsymbol{x = 0}$.

Ex.: $3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

Portanto, quando uma equação do 2º grau for incompleta em b e c, ela terá apenas uma raiz, e esta será ZERO.

- No segundo caso temos $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ com *c=0*, logo: $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Ora, $\boldsymbol{x}$ é um termo comum às duas parcelas da equação. Portanto, podemos reescrevê-la na forma fatorada, assim:

$$\boldsymbol{x \cdot (ax + b) = 0}$$

O que nos dá a clareza de que o produto indicado no primeiro membro dessa equação só será igual a zero, se $\boldsymbol{x = 0}$ e/ou $\boldsymbol{ax + b = 0}$

De $\boldsymbol{ax + b = 0}$, temos $\boldsymbol{ax = -b} \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}$

Portanto, quando uma equação do 2º grau é incompleta em *c*, ela terá duas raízes. A saber,

$$x' = 0 \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b}{a}$$

Exemplo: $5x^2 + 3x = 0$

Solução:

Colocando $\boldsymbol{x}$ em evidência, temos:

$$\boldsymbol{x \cdot (5x+3) = 0}$$

Portanto, $\boldsymbol{x' = 0}$ ou $\boldsymbol{5x + 3 = 0 \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x'' = -\frac{3}{5}}$

Logo, o conjunto solução é

$$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{3}{5}\,;0\right\}}$$

- No terceiro e último caso, se $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **e *b=0***, temos: $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

Assim,

$$ax^2 = -c \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Se $-\frac{c}{a} > 0$ teremos dois valores simétricos para x.

Isto acontece sempre que a equação do 2º grau for incompleta em *b.*

Vejamos o exemplo $\boldsymbol{6x^2 - 54 = 0}$ **:**

Solução:

$6x^2 = 54 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{54}{6} = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

Portanto,

$$\boldsymbol{S = \{-3\,;3\}}$$

1.2.2. Equação Completa

A forma geral da equação do 2º grau tal como conhecemos hoje ($ax^2 + bx + c = 0$) foi construída ao longo dos séculos por muitos estudiosos em muitas partes do mundo.

Antes tudo era escrito de forma literal, sem simbologia.

O francês Fraçois Viète (1540-1603) foi o primeiro a expressar em símbolos a fórmula geral de uma equação do segundo grau.

Olha só como era:

B in A área + C in A + D é igual a 0

O matemático inglês Thomas Harriot (1560-1621) introduziu o sinal de igualdade (=) e melhorou a fórmula para:

B in AA + C in A + D = 0

René Descartes (1596-1650) deu um grande passo apresentando a seguinte simbologia:

$x^2 . B + C . x + D = 0$

Entretanto, coube ao matemático inglês Colin Maclaurin (1698-1746) apresentar para o mundo em seu livro Álgebra o simbolismo que conhecemos hoje, o qual é uma forma que serve para resolver qualquer tipo de equação quadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Este Maclaurin parece que estava inspirado...

Ele saiu "inventando" coisa até descobrir um jeito de se chegar ao valor de x. Ou seja, um jeito de encontrar as raízes da equação.

- Primeiro ele isolou *c* :

$$ax^2 + bx = -c$$

- Depois ele multiplicou os dois membros por *4a :*

$$ax^2 + bx = -c \quad . (4a)$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

- A seguir ele somou b^2 aos dois membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

- Ele percebeu que no primeiro membro tinha um quadrado perfeito, pois

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$$

Isto no leva a

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

Como $b^2 - 4ac \geq 0$, temos:

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

PORTANTO,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Não é legal?

Porém, na realidade, Maclaurin apenas colocou em termos mais acessíveis o que muitos matemáticos já faziam desde a antiguidade.

Foi Bhaskara quem popularizou este método de resolver equações do 2º grau, ainda que sem a simbologia hoje utilizada.

Talvez, por isso, aqui no Brasil, a fórmula acima é chamada de FÓRMULA DE BHASKARA. E é assim que vamos chamá-la doravante.

... E O MELHOR: ESTA FÓRMULA RESOLVE TANTO EQUAÇÕES COMPLETAS COMO INCOMPLETAS.

Na fórmula:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a, *b* e *c* são chamados de coeficientes;

$b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante e simbolizado pela letra grega Δ (delta).

- ✓ Se Δ>0, podemos observar na fórmula que *x* terá dois valores distintos;
- ✓ Se Δ=0, a equação terá apenas um valor para *x*;
- ✓ Se Δ<0, não teremos valores para *x* dentro do conjunto dos números reais.

Vamos ver como funciona???

Tomemos como exemplo a equação completa $2x^2 - 6x - 8 = 0$ para acharmos o seu conjunto solução.

Solução:

Se compararmos $ax^2 + bx + c = 0$ com $2x^2 - 6x - 8 = 0$, temos que $a = 2,\ b = -6\ e\ c = -8$.

Colocando esses valores na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ fica

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{4} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$x = \frac{6 \pm 10}{4} \Rightarrow x' = \frac{6+10}{4} = \frac{16}{4} = 4$ e $x'' = \frac{6-10}{4} = \frac{-4}{4} = -1$. Logo,

$$S = \{-1\ ;4\}$$

Agora vamos ver uma equação incompleta!

Achemos o conjunto solução da equação $5x^2 + 3x = 0$ que já foi trabalhado.

Solução:

Se compararmos $ax^2 + bx + c = 0$ com $5x^2 + 3x = 0$, temos que $a = 5,\ b = 3\ e\ c = 0$.

Colocando esses valores na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ fica

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{2 \cdot 5} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-0}}{10} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{10}$$

$$x = \frac{-3 \pm 3}{10} \Rightarrow x' = \frac{-3+3}{10} = \frac{0}{10} = 0 \ \text{ e } \ x'' = \frac{-3-3}{10} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

Logo,

$$S = \left\{-\frac{3}{5}\ ;0\right\}$$

Vamos continuar trabalhando!!!

Pela fórmula de Bhaskara, as raízes de uma equação do 2º grau são:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O que será que acontece se somarmos essas raízes? Vejamos:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Então, podemos dizer que a soma das raízes de uma equação do 2º grau que designaremos por S é: $S = -\frac{b}{a}$

Agora vamos ver o que acontece se multiplicarmos essas raízes:

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Então, podemos dizer que o produto das raízes de uma equação do 2º grau que designaremos por *P* é: $P = \frac{c}{a}$

Continuando...

Como fica a equação *ax²+bx+c=0* se a dividirmos por *a*?

Vejamos:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Conhecemos esses termos destacados de algum lugar???

Os termos em destaque são, respectivamente, $-S$ e *P*.

Portanto, podemos reescrever $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ da seguinte forma:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$$

Esta belezura foi estabelecida pelo matemático francês Albert Girard (1595 – 1632).

E, por isso, *S* e *P* são conhecidos como Relações de Girard.

Será se ainda é possível manipular essa expressão mais um pouco, colocando-a na *FORMA FATORADA*, por exemplo?

Vamos multiplicar a equação $x^2 - Sx + P = 0$ pelo coeficiente *'a'* para ver o que acontece.

Vejamos:

$$ax^2 - aSx + aP = 0$$
$$ax^2 - a(x' + x'')x + ax'.x'' = 0$$
$$ax^2 - axx' - axx'' + ax'x'' = 0$$

Se aplicarmos a regra do *fator comum* nas duas primeiras parcelas e nas duas últimas de $ax^2 - axx' - axx'' + ax'x'' = 0$, temos:

$$ax(x - x') - ax''(x - x') = 0$$

e aplicando fator comum novamente:

$$(x - x').(ax - ax'') = 0$$

$$(x - x').a.(x - x'') = 0 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{a.(x - x').(x - x'') = 0}$$

Agora vamos ver como funciona...

A equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$ cujas raízes são 2 e 3, e que fazendo as devidas substituições na forma fatorada

$$a.(x - x').(x - x'') = 0 \quad \text{fica} \quad 2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

De fato, se efetuarmos a multiplicação, teremos:

$$2 \cdot (x^2 - 3x - 2x + 6) = 0$$

$$2 \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Por outro lado, ainda no exemplo $2x^2 - 10x + 12 = 0$ se quisermos descobrir as raízes através das relações de Girard temos:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-10)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{12}{2} = 6$$

Precisamos, então, encontrar dois números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 6.

Esses números são 2 e 3.

Portanto, as raízes da equação são 2 e 3.

Qualquer equação do segundo grau da forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

pode ser escrita também nas formas:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{a.(x - x').(x - x'') = 0}$$

2. Inequação do Segundo Grau

2.1. Definição

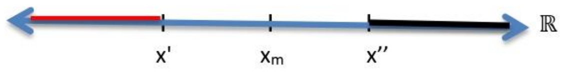
Na palavra *inequação* o prefixo 'in' indica negação. Portanto, inequação é uma *NÃO EQUAÇÃO*.

A inequação do segundo grau é uma expressão do tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$, onde *a*, *b* e *c* são números reais, sendo $a \neq 0$.

2.2. Para além das raízes

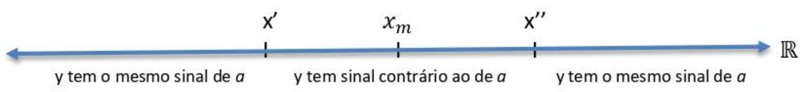
Portanto, temos uma inequação quando analisamos o que acontece com $ax^2 + bx + c$ para outros valores de x além daqueles para os quais a expressão se anula.

Na reta isto fica assim:



2.3. Características Gerais das Inequações

Ao analisarmos essas três partes da reta, percebemos algumas características bem específicas:



1ª) Para valores de x no intervalo entre as raízes, a expressão assume valores sempre com sinal contrário ao do coeficiente *'a'* ;

2ª) Tanto antes de x' como depois de x'', ou seja, nos intervalos que não estão entre as raízes, a expressão assume valores sempre com sinal igual ao do coeficiente *'a'*;

3ª) Os valores que a expressão assume, são iguais para os números simétricos ao x_m, que é o valor médio do seguimento $\overline{x'x''}$; e

4ª) Chamando de y os valores que a expressão $ax^2 + bx + c$ assume de acordo com os valores de x, percebemos que o conjunto de todos os pontos - pares ordenados *(x,y)* -, forma uma curva com propriedades únicas chamada de

P A R Á B O L A

Esta curva vai existir independentemente de termos duas raízes reais, uma ou nenhuma.

Dependendo da quantidade de raízes, teremos as seguintes situações para a expressão $ax^2 + bx + c$:

1) $a > 0\ ou\ a < 0$ e duas raízes: a expressão assumirá valores positivos e negativos;

2) $a > 0$ e uma raiz: a expressão, excetuando-se, na raiz, terá apenas valores positivos;

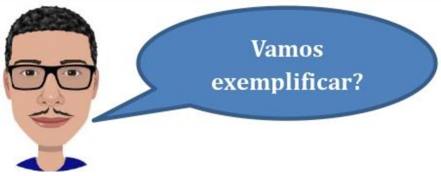
3) $a < 0$ e uma raiz: a expressão, excetuando-se, na raiz, terá apenas valores negativos;

4) $a > 0$ e nenhuma raiz real: a expressão assumirá apenas valores positivos;

5) $a < 0$ e nenhuma raiz real: a expressão assumirá apenas valores negativos.

Com esses dados, podemos construir a seguinte tabela:

a	QUANTIDADE DE RAÍZES	VALORES DE $ax^2 + bx + c$
Positivo	nenhuma raiz real	positivos
	uma raiz	positivos e nulo
	duas raízes	positivos, negativos e nulo
Negativo	nenhuma raiz real	negativos
	uma raiz	negativos e nulo
	duas raízes	positivos, negativos e nulo

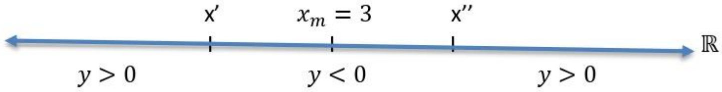


Exemplo 1:

$2x^2 - 12x + 10$ onde $a > 0,\ x' = 1,\ x'' = 5,$ e $x_m = 3$

Atribuiremos valores para *x* menores do que 1, entre 1 e 5, e maiores que 5, para vermos como $2x^2 - 12x + 10$ se comporta. Para isso chamaremos a expressão de *y* e colocaremos esses valores na tabela:

x		$y = 2x^2 - 12x + 10$	Sinais de y e a
Menor que 1	-2	$2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 10 = 42$	$a > 0$ e $y > 0$
Entre 1 e 5	2	$2 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 10 = -6$	$a > 0$ e $y < 0$
Maior que 5	8	$2 \cdot (8)^2 - 12 \cdot (8) + 10 = 42$	$a > 0$ e $y > 0$



Observemos que $x = 8$ é simétrico de $x = -2$ em relação a $x_m = 3$ já que para esses dois valores $y = 42$.

Exemplo 2:

$$-2x^2 + 12x - 10 \text{ em que } a < 0,\ x' = 1,\ x'' = 5,\ \text{e } x_m = 3$$

x		$\boldsymbol{y = -2x^2 + 12x - 10}$	**Sinais de** $\boldsymbol{y}$ **e** $\boldsymbol{a}$
Menor que 1	-2	$-2 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) - 10 = -42$	Menor que 1
Entre 1 e 5	2	$-2 \cdot (2)^2 + 12 \cdot (2) - 10 = 6$	Entre 1 e 5
Maior que 5	8	$-2 \cdot (8)^2 + 12 \cdot (8) - 10 = -42$	Maior que 5

Observemos que, semelhante ao exemplo anterior, $x = 8$ é simétrico de $x = -2$ em relação a $x_m = 3$ já que para esses dois valores $y = -42$.

RESUMINDO O QUE ACABAMOS DE VER:

1) Se *a>0* , temos
    - *y>0* no intervalo $]-\infty; x'[$ e no intervalo $]x''; +\infty[$; e
    - *y<0* no intervalo $]x'; x''[$;
2) Se a<0, temos
    - *y>0* no intervalo $]x'; x''[$; e
    - *y<0* nos intervalos $]-\infty; x'[$ e $]x''; +\infty[$

E, *só mais uma observaçãozinha...*

Em ambos os casos, se o sinal de igualdade for incluso na desigualdade, o intervalo fica fechado onde uma das raízes é extremidade dele.

2.4. Resolução de Inequações:

É melhor fazermos um *CHECKLIST* para facilitar nossa vida.

Passos para resolvermos inequações do 2º grau:

1. Desconsideramos a desigualdade e igualaremos a expressão a zero para podermos achar suas raízes;

2. Achadas as raízes, nós as colocamos na reta numérica;

3. Em seguida colocamos o sinal positivo ou negativo nos intervalos delimitados pelas raízes;

4. Escrevemos o conjunto solução estabelecido pelo(s) intervalo(s) cujo sinal estiver de acordo com o que a inequação pede ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$).

Observações importantes...

- É claro que não teremos intervalos quando não existir raízes reais. Neste caso, ou toda reta numérica será solução, ou a solução será vazia. Vai depender do que a inequação pede.

- E quando houver apenas uma raiz real, se o sinal de desigualdade não a incluir, ela ficará fora do conjunto solução.

Vamos ver como funciona...

Usaremos a expressão $2x^2 - 12x + 10$ com a qual já temos trabalhado para ver como ela se comporta com os sinais de desigualdade, e em seguida escrevermos o conjunto solução de cada caso a seguir:

- $2x^2 - 12x + 10 > 0$

Passo 1: Desconsiderar a desigualdade e igualar a zero para achar as raízes:

$$2x^2 - 12x + 10 = 0$$

Sabemos que se multiplicarmos a equação por algum valor não alteramos o seu resultado. Portanto, para facilitar, podemos multiplicar a equação por ½, ou em outras palavras, dividi-la por 2, e obtemos $x^2 - 6x + 5 = 0$, cujas raízes são 2 e 3.

Passos 2 e 3: Colocar as raízes na reta numérica

Passo 4: Como o objetivo neste caso é sabermos onde a expressão é maior do que zero, portanto, positiva, colocamos no conjunto solução o(s) intervalo(s) onde o sinal é positivo.

Assim:

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < 2 \; ou \; x > 3\}$ ou S = $]\infty_-; 2[\ \cup\ ]3; \infty_+[$

De forma análoga...

❖ $2x^2 - 12x + 10 \geq 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2 \; ou \; x \geq 3\}$ ou S = $]\infty_-; 2] \cup [\,3; \infty_+[$

❖ $2x^2 - 12x + 10 < 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} |\ 2 < x < 3\}$ ou S = $]2; 3[$

E por último...

❖ $2x^2 - 12x + 10 \leq 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} |\ 2 \leq x \leq 3\}$ ou S = $[2; 3]$

Vamos clarear de vez???

Já falamos que a curva formada por todos os pontos onde um polinômio do segundo grau é maior, menor ou igual a zero forma uma curva denominada PARÁBOLA.

Pois, bem! Esta curva é específica de polinômios do 2º grau, e pode se apresentar em qualquer posição no plano cartesiano. Mas, neste curso iremos tratar unicamente das parábolas que chamaremos de verticais, e que vão se apresentar de uma das formas a seguir:

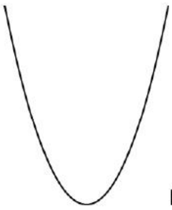


Fig. 1

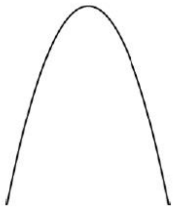


Fig.2

A figura 1 é uma parábola de concavidade voltada para cima (CVC).

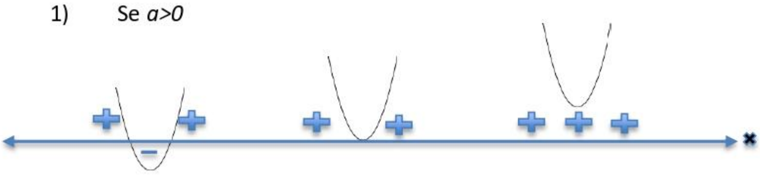
A figura 2 é uma parábola de concavidade voltada para baixo (CVB).

O que determina se a concavidade será voltada para cima ou para baixo é o sinal do coeficiente *a*.

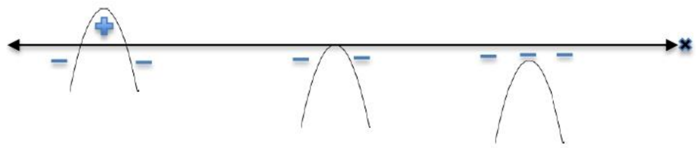
Se *a>0,* temos CVC. Se *a<0,* temos CVB.

Portanto, ao analisarmos o comportamento da parábola em relação à reta que representa os valores que x assume em $ax^2 + bx + c$, temos os seguintes casos:

1) Se *a>0*



2)Se *a<0*



Ora, se entendemos que a parábola é formada por pontos (x;y) do plano cartesiano, então fica fácil percebermos que a parte dela que fica acima do eixo x representa os valores positivos para y, e a parte que fica abaixo de do eixo x representa os valores negativos de y.

3. Função Quadrática e Parábola

3.1. Definição

Quando resolvemos uma *EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU*, estamos procurando o(s) valor(es) de *x* que anula(m) a sentença $ax^2 + bx + c$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Quando resolvemos uma *INEQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU*, estamos procurando além do(s) valor(es) que anula(m) a sentença $ax^2 + bx + c$, também os valores para os quais ela é positiva ou negativa:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$

Quando juntamos os conceitos de *EQUAÇÃO* e de *INEQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU*, estamos analisando o que acontece com a sentença $ax^2 + bx + c$ para todos os valores reais de *x*.

Podemos representar esses valores pela expressão $y = ax^2 + bx + c$ onde $x \in \mathbb{R}$ é $a\ variável\ independente,\ y \in \mathbb{R}$ é $variável\ \ dependente, e\ os\ coeficientes$ $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

Portanto, podemos definir *FUNÇÃO QUADRÁTICA* ou *FUNÇÃO DO 2º GRAU* como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ $(f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

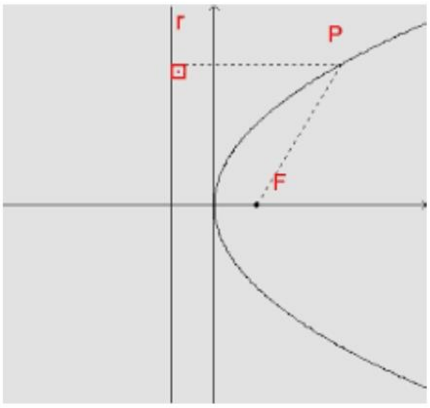
3.2. Gráfico

O gráfico da função quadrática, assim como o gráfico de qualquer função, é dado pela união dos pares ordenados $(x; y)$ no plano cartesiano.

No caso da função quadrática, a união destes pares ordenados (pontos), formará uma PARÁBOLA.

3.3. Parábola

A PARÁBOLA é o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância de uma reta (*diretriz*) e de um ponto (*foco*) fora dela.



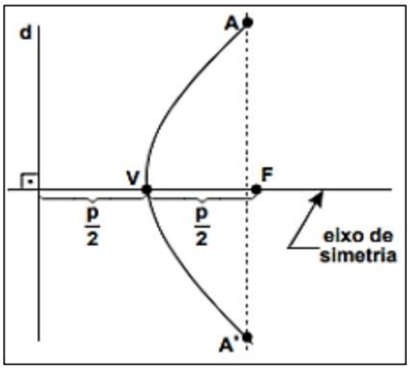
r é a reta *diretriz;*

F é o *foco* e é um ponto fora da diretriz;

P é um ponto equidistante de r e F;

$$d(r\ ,\ P) = d(F\ ,P)$$

3.3.1. Elementos e características da parábola



$\overleftrightarrow{VF}$ é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz *d.* Ela é chamada de RETA FOCAL;

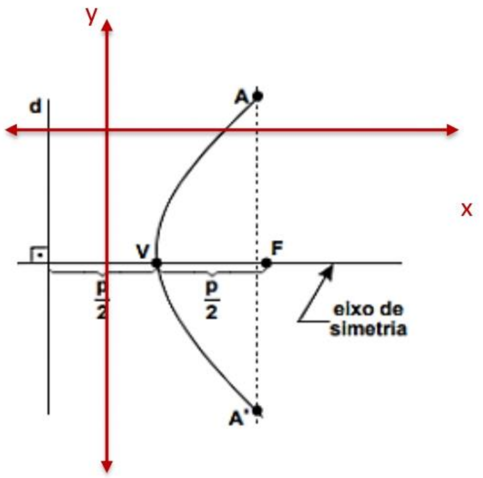
V é o vértice. Ele pertence à reta focal, e é o ponto médio da distância $d_{F,d} = p;$

A reta $\overleftrightarrow{AA'}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{VF}$ e os pontos A e A' são simétricos em relação a $\overleftrightarrow{VF}$.

A simetria acontecerá para quaisquer dois pontos da parábola que pertençam a uma reta paralela a $\overleftrightarrow{AA'}$. É por isso que $\overleftrightarrow{VF}$ é chamada de eixo de simetria.

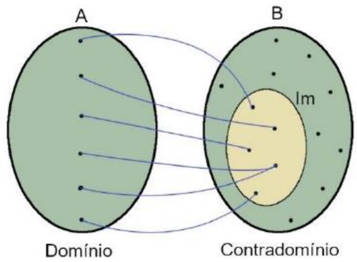
V é o ponto da parábola mais próximo de *d*.

3.4. Parábola e Gráfico da Função Quadrática



Tomemos o plano cartesiano e o eixo de simetria, paralelo ao eixo das abscissas (x), e perpendicular ao eixo das ordenadas (y).

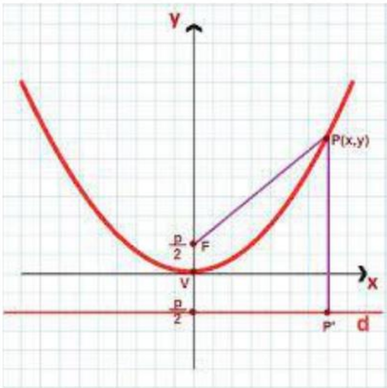
Neste caso, a parábola da figura ao lado jamais representará o gráfico de uma função do 2º grau, uma vez que os pontos A e A' têm a mesma abscissa, e isto vai de encontro à definição de função.



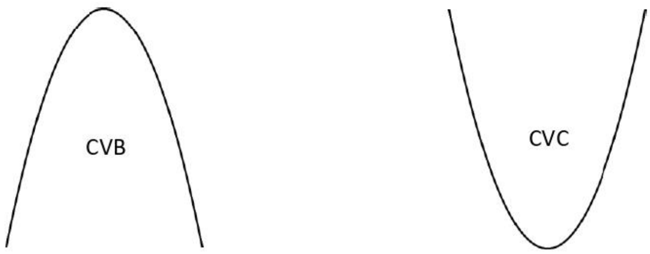
A definição de função nos diz que dados dois conjuntos A (domínio) e B (contradomínio), cada elemento de A se relaciona com UM ÚNICO elemento de B.

Logo, temos $f: A \rightarrow B$ se, e somente se, para cada $x \in A$ há um único $y \in B$.

Sendo assim, concluímos que para uma parábola representar o gráfico uma função do segundo grau, o seu eixo de simetria precisa ser perpendicular ao eixo das abscissas.



Portanto, em se tratando de gráfico de função do 2º grau, só teremos parábola de concavidade voltada para baixo (CVB) ou de concavidade voltada para cima (CVC).



3.5. Construção do Gráfico da Função do 2º Grau

Como já vimos, o eixo de simetria de uma parábola passa pelo seu vértice. Portanto, para construirmos o gráfico de uma função do 2º grau, é suficiente que conheçamos a concavidade da parábola, o vértice, e dois pontos simétricos quaisquer da mesma.

Esses pontos simétricos podem ser, inclusive, os dois pontos onde ela toca o eixo x, quando temos $\Delta > 0$.

Também já vimos que o ponto médio de duas raízes distintas na equação do 2º grau é dado por

$$x_M = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Este valor $-\frac{b}{2a}$ é a abscissa de todos os pontos que pertencem ao eixo de simetria da parábola.

Isto implica em dizer que dados dois pontos quaisquer com abscissas x_1 e x_2, se $f(x_1) = f(x_2)$, então esses pontos são simétricos em relação a $-\frac{b}{2a}$.

Como o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria, podemos concluir que a abscissa do vértice da parábola é $-\frac{b}{2a}$.

Assim,

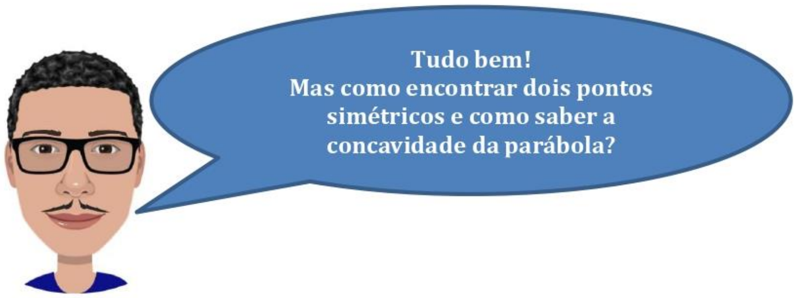
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo, o vértice da parábola é dado por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$



A concavidade da parábola é indicada pelo coeficiente a.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Neste caso o vértice será ponto de mínimo.

Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Neste caso o vértice será ponto de máximo.

Ora, se a parábola tiver ponto de mínimo, qualquer valor de y acima do valor mínimo, nos revelará dois pontos simétricos.

O mesmo acontece com valores abaixo do valor máximo. Eles também nos revelarão pontos simétricos.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1- Esbocemos o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Primeiro passo: Achar as coordenadas do vértice

$$x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ ou } x_v = \frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$y_v = f(x_v) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4 \quad \text{ou}$$

$$y_v = -\frac{(-6)^2 - 4.1.5}{4} = -4$$

$$V = (3; -4)$$

Segundo passo: Verificar a concavidade

Como $a = 1$, então temos a concavidade voltada para cima (CVC).

Terceiro passo: Encontrar dois pontos simétricos

Precisamos encontrar dois pontos simétricos ao eixo de simetria que é a reta $x = 3$, e cujas ordenadas sejam maiores que 5, que é o valor mínimo da função.

Temos os pontos $(1; 0)$ e $(5; 0)$ que contêm as raízes da função. Mas vamos pegar outro.

Tomemos dois pontos cuja ordenada seja 5, já que $5 > -4$.

Assim,

$$x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x = 0$$

Resolvendo a equação, temos:

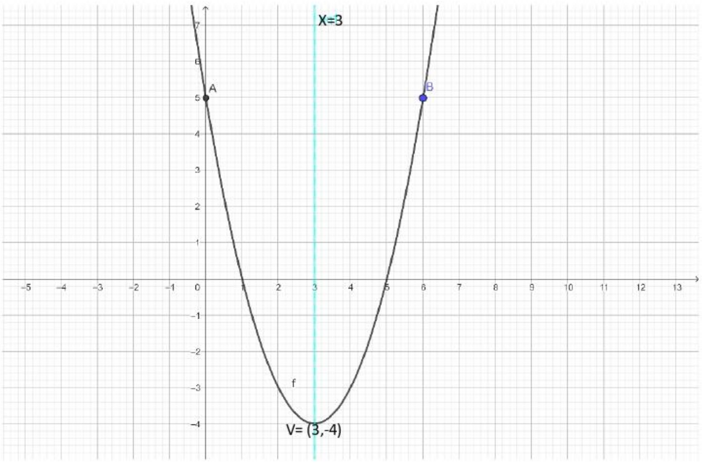
$$x \cdot (x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x - 6 = 0$$

Portanto, $x' = 0$ e $x'' = 6$

Logo, os pontos que estamos procurando são $\mathrm{A} = (0;5)$ e $\mathrm{B} = (6;5)$.

Agora é só colocar todos esses pontos no plano cartesiano e construir o gráfico.



Exemplo 2 - Esbocemos o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 10x - 30$

Primeiro passo: Achar as coordenadas do vértice

$$x_v = 5$$

$$y_v = -\frac{(-20)}{-4} = -5$$

$$V = (5,\ -5)$$

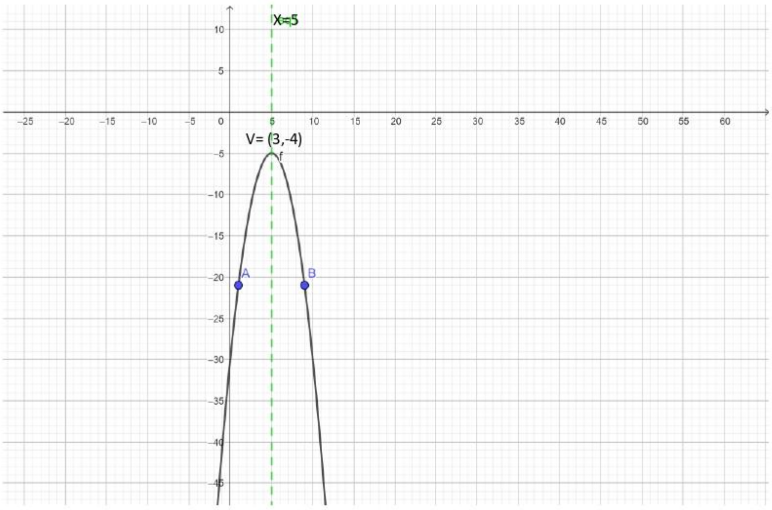
<u>Segundo passo</u>: Verificar a concavidade

Como $a = -1$ a concavidade da parábola é voltada para baixo (CVB)

<u>Terceiro passo</u>: Achar dois pontos simétricos ao eixo de simetria $x = 5$

Vamos achar dois pontos A e B que tenham ordenada um valor menor do que -5 que é o valor máximo da função.

Para $y = -2$, por exemplo, temos os pontos $A = (1, \ -21)$ e $B = (9, \ -21)$.



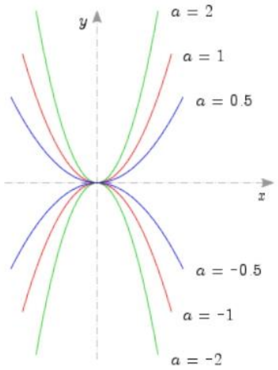
3.6. Informações preciosas dos coeficientes a, b e c

O coeficiente ***a*** além de indicar a concavidade também fala da abertura da parábola.

Podemos observar que quanto menor for o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola. E, quanto maior for o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola.

Isto quer dizer que dependendo do valor absoluto de a, os pontos ficarão mais ou menos afastados do eixo de simetria.

Vejamos um exemplo com a função $f(x) = ax^2$



https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fca.wikipedia.org%2Fwiki%2FPar%25C3%25A0bola&psig=AOvVaw3jshmN-T8a3jkyENMmKHHJ&ust=1684080876639000&source=images&cd=vfe&ved=0CBEQjRxqFwoTCPih1bbY8v4CFQAAAAAdAAAAABAI

O coeficiente ***b*** indica se a parábola tocará o eixo *y* na parte onde a função é crescente ou na parte onde ela é decrescente.

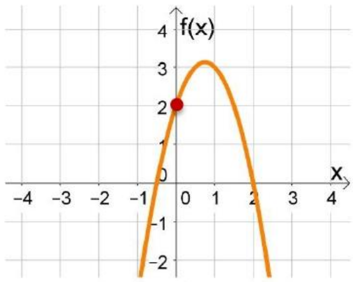
Se $b > 0$ será na parte onde a função é crescente.

Se $b < 0$ será na parte onde a função é decrescente.

O coeficiente ***c*** indica a ordenada do ponto *(0,c)* que é o ponto onde a parábola toca o eixo y.

Veremos a seguir os gráficos das funções

$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ e $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ para verificarmos o que acontece com a parábola devido ao valor dos coeficientes *b* e *c*.



$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

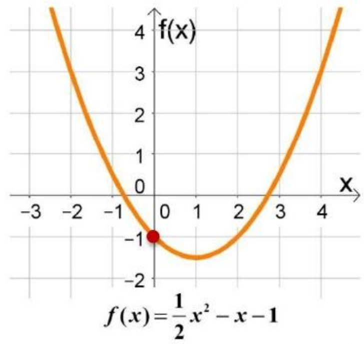
https://www.dicasdecalculo.com.br/wp-content/uploads/2017/05/Fun%C3%A7%C3%A3o-do-2-grau.jpg *com alteração.*

Neste primeiro gráfico $b > 0$. Logo a parábola toca o eixo y com o seu lado crescente.

E como $c = 2$, é justamente no ponto (0, 2) que a parábola toca esse eixo, como está destacado em vermelho.

Neste segundo gráfico $b < 0$. Logo a parábola toca o eixo y com o seu lado decrescente.

E como $c = -1$, é justamente no ponto (0, -1) que a parábola toca esse eixo, como está destacado em vermelho.



https://www.dicasdecalculo.com.br/wp-content/uploads/2017/05/Fun%C3%A7%C3%A3o-do-2-grau.jpg *com alteração.*

4. Exercícios resolvidos

Sobre equações completas e incompletas, relações de Girard e forma fatorada

1) Resolva as equações do segundo grau incompletas usando um método alternativo e a fórmula de Bhaskara.

a) $3x^2 = 0$
b) $6x^2 - 3x = 0$
c) $2x^2 - 7 = 0$

Resolução:

a) $3x^2 = 0$

- Método alternativo:

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Portanto, $S = \{0\}$

- Por Bhaskara:

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$$

Portanto, $S = \{0\}$

b) $6x^2 - 3x = 0$

- Método alternativo

$$3x \cdot (2x - 1) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \text{ ou } 2\mathrm{x} - 1 = 0$$

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou}$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Portanto, $S = \{0\,;1/2\}$

- Por Bhaskara

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 6 \cdot 0}}{2 \cdot 6} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{12} = \frac{3 \pm 3}{12}$$

$$x' = \frac{3 + 3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{3-3}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

Portanto, $S = \{0\ ;\ 1/2\}$

c) $2x^2 - 7 = 0$

- Método alternativo

$$2x^2 = 7 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Portanto, $S = \left\{\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}$

- Por Bhaskara

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{0 \pm \sqrt{56}}{4} = \frac{0 \pm 2\sqrt{14}}{4}$$

$$x' = \frac{0 + 2\sqrt{14}}{4} = \frac{2\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$x'' = \frac{0 - 2\sqrt{14}}{4} = -\frac{2\sqrt{14}}{4} = -\frac{\sqrt{14}}{2} = -\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Portanto, $S = \left\{\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}$

2) Resolva as equações do segundo grau a seguir por Bhaskara, pelas relações de Girard, dê a forma fatorada de cada uma delas:

a) $x^2 - 4 = 0$
b) $x^2 - 6x + 8 = 0$
c) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Solução:

a) $x^2 - 4 = 0$

- Por Baskara

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{0 \pm 4}{2}$$

$$x' = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x'' = \frac{0-4}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Portanto, $S = \{\pm 2\}$

- Relações de Girard

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

Vamos, então, procurar dois números que somados dá 0 e que multiplicados dá -4.

Esses números são -2 e 2.

Portanto, $S = \{\pm 2\}$

- Forma fatorada

A forma fatorada é dada por $a \cdot (x - x') \cdot (x - x'') = 0$

Como $x' = -2$ e $x'' = 2$, teremos:

$1 \cdot (x - (-2)) \cdot (x + 2) = 0$, logo, na forma fatorada, a equação fica:

$$(x + 2) \cdot (x - 2) = 0$$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

- Por Baskara

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x' = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, $S = \{2; 4\}$

- Relações de Girard

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{1} = 6$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$$

Vamos, então, procurar dois números que somados dá 6 e que multiplicados dá 8.

Esses números são 2 e 4.

Portanto, $S = \{2; 4\}$

- Forma fatorada

A forma fatorada é dada por $a \cdot (x - x') \cdot (x - x'') = 0$

Como $x' = 2$ e $x'' = 4$, teremos:

$1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) = 0$, logo, na forma fatorada, a equação fica:

$$(x - 2) \cdot (x - 4) = 0$$

c) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

- Por Baskara

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 60}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-51}}{4}$$

Como $\sqrt{-51} \nexists$ em $\mathbb{R}$, não teremos raízes reais.

Portanto, $S = \emptyset$

- Relações de Girard

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

Vamos, então, procurar dois números que somados dá 3/2 e que multiplicados dá 5/2.

Aqui cabe chamar sua atenção para uma coisa: esses números existem porque temos a soma e o produto deles, mas eles não fazem parte do conjunto dos reais. Sendo assim, é impossível resolver esta equação aplicando as relações de Girard para $\mathbb{R}$.

O conselho, então, é que quando tentarmos resolver uma equação aplicando soma e produto, se não descobrirmos logo o resultado, é melhor seguirmos outro caminho, para não perdermos tempo.

- Forma fatorada

A forma fatorada é dada por $a \cdot (x - x') \cdot (x - x'') = 0$

Como não existe em $\mathbb{R}$ x' e x'', então também não teremos neste conjunto a forma fatorada da equação.

<u>Sobre inequações:</u>

1) Dê o conjunto solução das inequações abaixo:

a) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

b) $2x^2 < 0$

c) $3x^2 - 4x + 12 \leq 0$

Solução:

a) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

- Achemos as raízes:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x' = 1 \text{ e } x'' = 4$$

- Coloquemos esses valores na reta numérica e coloquemos também os sinais correspondentes nos intervalos:

- Como queremos os valores de x para os quais $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, os intervalos cujos valores de x satisfazem a inequação são:

$$S = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

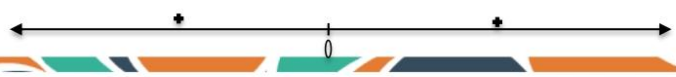
b) $2x^2 < 0$

- Achemos as raízes:

$$2x^2 = 0$$

$$x' = x'' = 0$$

- Coloquemos esse valor na reta numérica, bem como os sinais correspondentes. Como não temos intervalos, o sinal do coeficiente *a* valerá para toda a reta, exceto em zero que é o valor para o qual a expressão se anula.



- Como queremos os valores de x para os quais $2x^2 < 0$, percebemos que esses valores não existem em $\mathbb{R}$, pois só temos sinais positivos. Portanto,

$$S = \{\ \}$$

c) $3x^2 - 4x + 12 \leq 0$

- Achemos as raízes:

$$3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Como $\Delta = \sqrt{-128}$, não vai existir raízes em $\mathbb{R}$

- Coloquemos esses valores na reta numérica e coloquemos os sinais correspondentes nos intervalos:

- Como queremos os valores de x para os quais $2x^2 < 0$, percebemos que esses valores não existem em $\mathbb{R}$, pois só temos sinais positivos. Portanto,

$$S = \{\ \}$$

<u>Sobre função quadrática</u>

1) Esboce o gráfico das funções:

a) $y = x^2 - 4$

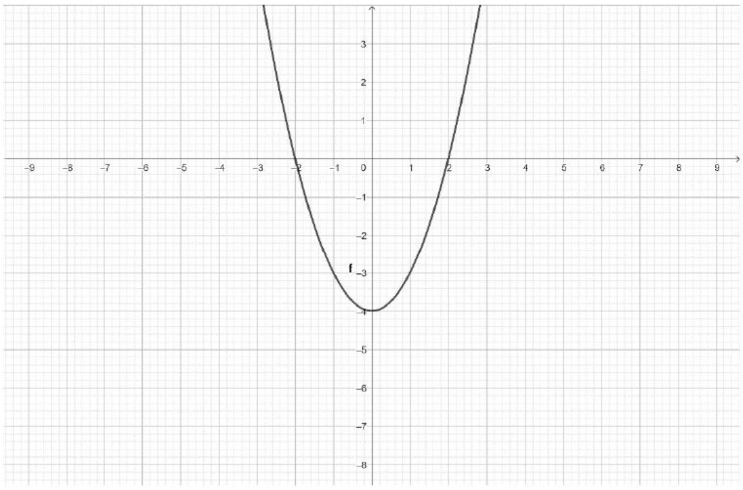
b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

c) $y = 2x^2 - 3x + 5$

Solução

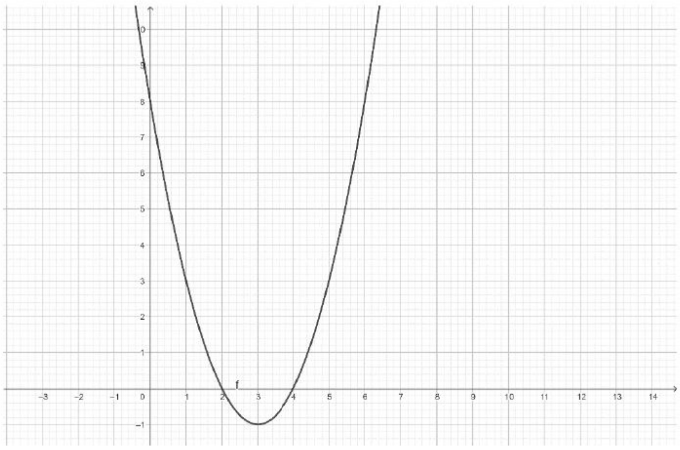
a) $y = x^2 - 4$

- As raízes são $x' = -2$ e $x'' = 2$
- O vértice é $V = (0; -4)$
- O gráfico da função toca o eixo *y* em (0; -4)



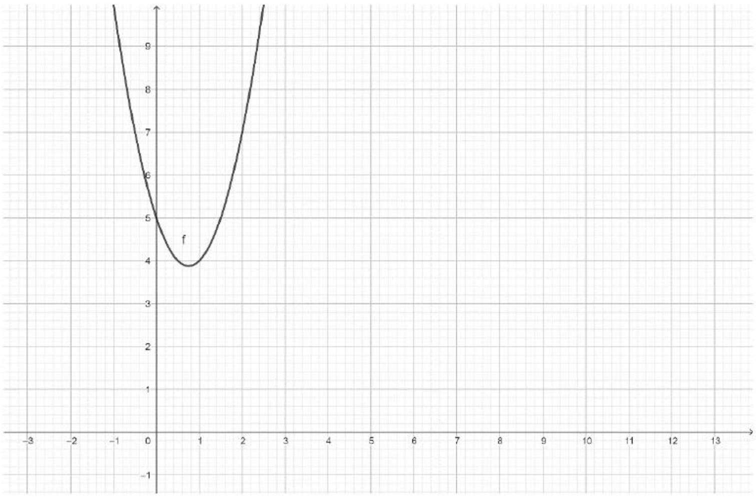
b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

- As raízes são $x' = 2$ e $x'' = 4$
- O vértice é $V = (3;\ -1)$
- O gráfico da função toca o eixo *y* em (0; 8)



c) $y = 2x^2 - 3x + 5$

- Não existem raízes em $\mathbb{R}$.
- As coordenadas do vértice são $(\frac{3}{4}; \frac{31}{8})$
- O gráfico toca o eixo y no ponto (0; 5)



5. Exercícios propostos

1) Dê o conjunto solução das sentenças a seguir:

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$

b) $x^2 - 7 = 0$

c) $4x^2 - 8x = 0$

d) $-5x^2 + 3x - 7 = 0$

e) $6x^2 - 6 \geq 0$

f) $-3x^2 + 7x > 0$

g) $x^2 < 0$

h) $x^2 - 1 \leq 0$

2) Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 3$

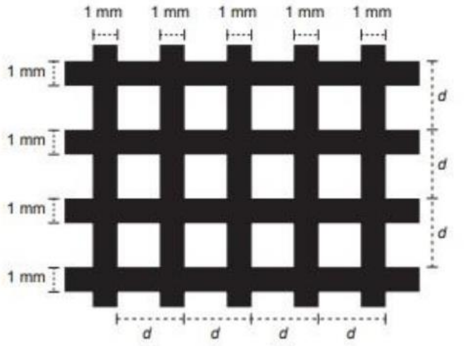
b) $y = 2x^2 + 7x - 3$

c) $f(x) = -3x^2 + 18$

d) $y = x^2 - 8x$

3) (ENEM 2015) Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d - 1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da mala, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

a) 22 b) 11 c) 113113 d) 4343 e) 23

6. Respostas dos exercícios propostos

1) a. $S = \{1; 2\}$

b. $S = \{\pm\sqrt{7}\}$

c. $S = \{0; 2\}$

d. $S = \emptyset$

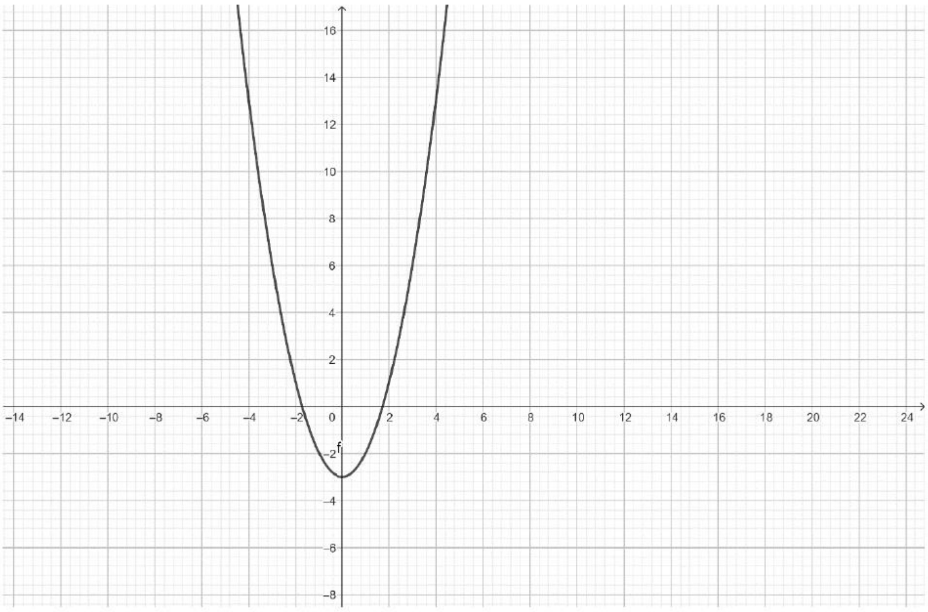
e. $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

f. $S = \left\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < \frac{7}{3}\right\}$

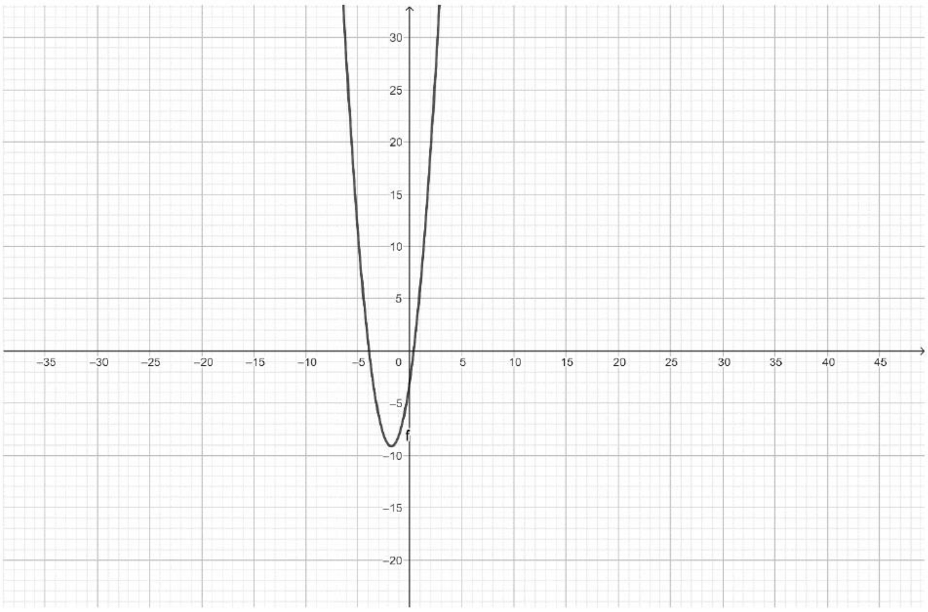
g. $S = \{\ \ \}$

h. $S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$

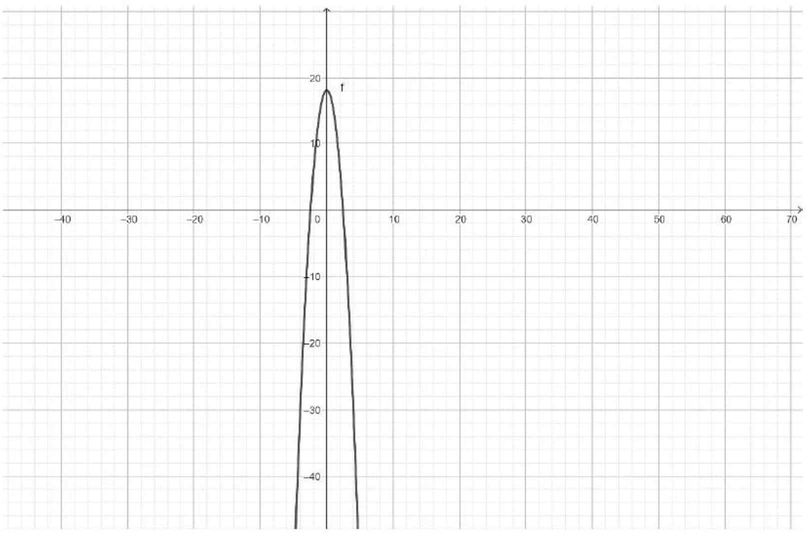
2) a.



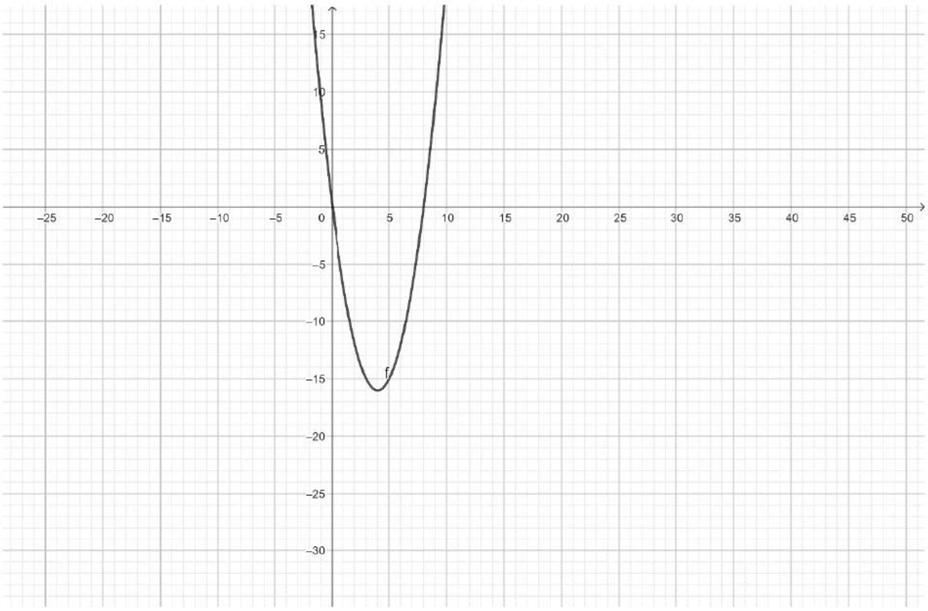
b.


30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
f
−35 −30 −25 −20 −15 −10 −5 5 10 15 20 25 30 35 40 45

c.


20
10
−10
−20
−30
−40
f
−40 −30 −20 −10 10 20 30 40 50 60 70

d.



3) Alternativa ‘a’

Referências Bibliográficas

ANDRADE, Bernardino Carneiro de. *A Evolução Histórica da Resolução das Equações do 2º Grau*. Porto: Universidade de Ciências do Porto, 2000

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*. 2ª ed. SBM. Rio de Janeiro. 2017.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1: Conjuntos e Funções.* 9ª edição. Editora Atual. São Paulo, 2013.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções*. SBM. Rio de Janeiro, 2013.

PRADO. Elsa Maria dos Santos do. *Um Novo Olhar sobre o Ensino de Equação e Função do Segundo Grau*. UENF: Goytacazes. 2014.

SILVA, Jeyson Barbosa de Araújo. *Equações de 2º grau: Sua História e Abordagens* Didáticas. João Pessoa: UFPB, 2019

PoCA
Portal de Cursos Abertos

PoCA
Portal de Cursos Abertos