UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Anízio Noronha Menezes Neto

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA ABERTA: Elaboração de um Curso Aberto Massivo Online – MOOC para contribuir com a promoção do acesso à aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Juazeiro do Norte – CE.
2023.

Anízio Noronha Menezes Neto

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA ABERTA: Elaboração de um Curso Aberto Massivo Online – MOOC, para contribuir com a promoção do acesso à aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Erica Boizan Batista
Coorientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Jr.

Juazeiro do Norte – CE.
2023.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

M543a Menezes Neto, Anízio Noronha.

Aprendizagem matemática aberta: elaboração de um curso aberto massivo online – MOOC para contribuir com a promoção do acesso à aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas / Anízio Noronha Menezes Neto. – 2023. 155 f.: il. color. 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2023.

Orientação: Profa. Dra. Erica Boizan Batista
Coorientação: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Junior.

1. Matemática - Cursos Abertos Massivos Online (MOOCs). 2. Funções exponenciais. 3. Funções logarítmicas. 4. Tecnologias - aprendizagem matemática. I. Título.

CDD 510.785

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

ANÍZIO NORONHA MENEZES NETO

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA ABERTA: Elaboração de um Curso Aberto Massivo Online – MOOC, para contribuir com a promoção do acesso a aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 14 de julho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
ERICA BOIZAN BATISTA
Data: 10/08/2023 16:29:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Erica Boizan Batista
CCT/UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
STEVE DA SILVA VICENTIM
Data: 10/08/2023 13:13:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim
CCT/UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
VALDINES LEITE DE SOUSA JUNIOR
Data: 04/08/2023 12:20:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
CCT/UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
GILSON DO NASCIMENTO SILVA
Data: 03/08/2023 16:01:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Gilson do Nascimento Silva
UFPI

ABSTRACT

This work aims to carry out an exploratory study about the impact of new information and communication technologies on education, especially in Mathematics education. Through bibliographical research, we seek to analyze how Digital Information and Communication Technologies (TDICs) can improve the quality of education, promote equity and democratize access to education through practices such as Distance Education, Virtual Learning Environments, Open Education Online, Open Educational Resources and Massive Open Online Courses (MOOCs). In addition, we have developed a MOOC on Exponential and Logarithmic Functions, aiming to provide a high quality educational tool to promote mathematics learning.

Keywords: Massive Open Online Courses – MOOCs. Exponential Functions. Logarithmic Functions. Technologies and Mathematics Learning.

Dedico este trabalho à minha amada Silvana, companheira de lutas, auxiliadora e sempre apoiadora; presente em todos os momentos para me amparar e não deixar desistir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Deus, sem o qual nada poderia ter realizado.

À minha esposa Silvana, por todo carinho, paciência e incentivo.

Ao meus pais, Seu Noronha (*in memorian*) e Dona Fransquinha, que me educaram e sempre me incentivaram a estudar, fazendo tudo o que podiam para que assim fosse.

Aos meus colegas de turma, Aílton, Brito, José Carlos, Kennedy e Plácido, pela parceria nas batalhas, ao longo das quais se tornaram amigos que levarei para toda vida.

À minha sobrinha e filha do coração Mirella, pelas alegrias e paciência para aguardar enquanto estudava.

A cada um dos meus professores no PROFMAT, pela dedicação, respeito e apoio.

À professora Erica Boizan Batista e ao professor Valdinês Leite de Sousa Júnior, pela orientação.

Ao meu primo e amigo Nelson Noronha, pelo acolhimento e hospedagens nas jornadas.

Aos colegas da EEMTI Ana Noronha, pela compreensão nas ausências e viagens.

Aos amigos, pelo incentivo e pelo carinho com que me motivaram.

Aos colegas da SEDUC e do Grupo de Ensino e Pesquisa em Matemática – GEPEMAC pelo apoio e pelos momentos de estudo para o ENQ.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A educação é um direito de todos. Este fato é indiscutível do ponto de vista legal, social e humano, todavia, quando se refere ao cumprimento desse dever por parte do Estado, da sociedade e até mesmo da família, há alguns pontos dissonantes entre a realidade e o ideal da oferta de uma educação de qualidade para todos.

Ainda que haja investimentos na educação através do acesso à escola, a creches, a cursos técnicos e a universidades, independentemente do fato de, por vezes, tais investimentos poderem ser considerados insuficientes ou mal aplicados, tem-se questões profundas a serem observadas como obstáculos à plena oferta da educação, relativas às graves desigualdades sociais no Brasil, que dificultam o acesso igualitário e democrático, com equidade de oportunidades de aprendizagem e de permanência na escola. Por vezes o acesso é possível para muitas crianças e jovens, entretanto, a permanência na escola e a aprendizagem não são de fato asseguradas.

Segundo o Observatório Nacional da educação, a evasão escolar se assevera na adolescência. Observa-se que, em 2019, 7% dos jovens brasileiros de 15 a 17 anos não estavam na escola, de acordo com a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD - 2019), do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. E, no mesmo ano, tem-se, no Brasil, em torno de um milhão e cem mil crianças e adolescentes em idade escolar, de 4 a 17 anos, fora da escola.

Conforme a Unicef (2021), com base nos dados do PNAD-2019, dentre as crianças e adolescentes fora da escola, em 2019, a grande maioria é pertencente a famílias com renda *per capta* de até meio salário-mínimo, e quanto menor a renda, maior a evasão escolar. E, ainda segundo a Unicef, a pandemia de Covid-19 veio a agravar essa situação, fazendo com que mais de cinco milhões de crianças e adolescentes em idade escolar ficassem sem nenhum acesso à educação em 2020.

Gonçalves (2022), aponta que, de acordo com Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), os índices de aprendizagem na educação básica no Brasil, que já eram considerados baixos, segundo a avaliação realizada após o auge da pandemia de Covid-19, pioraram em todos os níveis avaliados, tanto em Língua Portuguesa quanto em Matemática.

Por outro lado, é possível perceber como as novas Tecnologias Digitais da Informática e Comunicação (TDICs) permeiam a vida cotidiana e influenciam as relações sociais. Atualmente, o acesso a um computador portátil, o smartfone, é algo comum para a grande maioria da população, bem como o acesso à internet. Conforme Mayara (2021), em matéria publicada no jornal Estado de Minas, os dados do PNAD-19 evidenciam que o aparelho de telefonia móvel está presente em 94,3% dos domicílios brasileiros e que em 99,5% desses domicílios o aparelho é utilizado para acessar a internet.

> “A popularização da internet e dispositivos móveis, conexão sem fio e redes sociais, tornam a tecnologia cada vez mais próxima de cada pessoa. É comum encontrar pessoas utilizando dispositivos móveis em escolas, em shoppings, em restaurantes, em bares e até mesmo no trabalho. Aliás, muitas organizações orientam que seus colaboradores utilizem seus próprios dispositivos na realização de ações profissionais e processos corporativos. Ao mesmo tempo em que adultos utilizam cada vez mais recursos tecnológicos para o auxílio de atividades pessoais e profissionais, a tecnologia entra na vida das crianças e adolescentes cada vez mais cedo.” (SILVA, 2017, p. 46)

De acordo com Garcia (2020, p. 30), “as conexões à internet, a aplicativos e a mídias digitais empreendem novos ritmos à vida cotidiana. Redes fixas e móveis articulam cenários, estabelecem vínculos, abortam distâncias e horário e projetam perspectivas inovantes”.

No contexto da pandemia de Covid-19, com as restrições dadas pelo isolamento social, a implementação de estudos remotos foi necessária, e embora tenha sido excludente, posto que nem todos os estudantes possuem acesso a tecnologias como smartfones, computadores e internet, a utilização de tais recursos minimizou os efeitos nocivos para a aprendizagem escolar e para o desenvolvimento de milhões de estudantes brasileiros. Estando o próprio autor entre àqueles que necessitaram de tais tecnologias durante os períodos de isolamento, não somente enquanto professor da educação básica, mas também como estudante no PROFMAT.

A partir das observações acima, surgem, então, reflexões acerca do papel das tecnologias digitais e da internet como ferramentas para a promoção da aprendizagem, sobretudo de forma remota, como aconteceu nos períodos de isolamento social rígido. Mesmo com a decretação do fim dos períodos de isolamento social, reflete-se como o estudo online poderia beneficiar na busca por aprendizagem pessoas com dificuldades de acesso a educação formal, ou presencial, sejam quais forem as razões. Faz-se, então, o seguinte questionamento: como a utilização de Recursos Educacionais Abertos, os princípios da Educação Aberta ou os Cursos Abertos Online Massivos, poderiam ser promotores da democratização do acesso ao conhecimento?

A partir de tais inquietações, pensa-se em como associar tais tecnologias aos conhecimentos adquiridos ao longo do PROFMAT de modo a beneficiar estudantes da educação básica, não somente em uma escola, mas a todos que possam ter acesso a estas tecnologias, na busca autônoma de aprendizagem. É nesta inquietação, nesta reflexão, que está o nascedouro da ideia de elaborar um Curso Aberto Massivo Online, MOOC, sobre o tema Funções Exponenciais e Logarítmicas.

O curso se compõe de quatro unidades nas quais se revisitam as operações de potenciação e os logaritmos, com suas propriedades, expandindo-se o estudo às Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas. O curso permanecerá disponível no PoCA (Portal de Cursos Abertos) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), contando com uma apostila com definições, demonstrações, exemplos e exercícios, uma apresentação digital e uma videoaula para cada unidade, além de uma avaliação de aprendizagem, com questões de múltipla escolha, na própria na plataforma.

2. METODOLOGIA

Realizou-se, inicialmente, um estudo bibliográfico com o objetivo de se compreender como a evolução das tecnologias, sobretudo das Tecnologias Digitais da Informática e Comunicação, as TDICs, tem afetado a sociedade, principalmente no que concerne à educação e às formas de aprender, tendo em vista a intrínseca relação existente entre os modos de produção e trabalho de uma época, a cultura e as demandas sociais de conhecimento e aprendizado, no que se relaciona ao mercado de trabalho, formação acadêmica e ao estilo de vida.

Através da pesquisa bibliográfica se procurou entender qual o papel das tecnologias na promoção da educação e, com destaque, no ensino da Matemática.

Assim sendo, buscou-se compreender como a Educação à Distância (EaD) e os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVAs) poderiam ser utilizados de modo a promover a autonomia na busca pela aprendizagem, como os princípios da Educação Aberta e a utilização de Recursos Educacionais Abertos (REA) cooperam para a democratização do acesso à educação e, de que modo as Práticas Educacionais Abertas (PEA) e a criação de Cursos Abertos Massivos Online (MOOCs) podem fomentar a disseminação de conhecimento e a equidade de oportunidades de estudo para todas as pessoas, independentemente de recursos financeiros, localização geográfica ou indisponibilidade de tempo para estudo presencial ou síncrono.

Realizou-se, com o propósito de ajudar na promoção de acesso ao conhecimento matemático básico e contribuir para o favorecimento da equidade de condições de aprendizagem matemática autônoma, a produção de um Curso Aberto Massivo Online, MOOC, sobre o tema Funções Exponencias e Logarítmicas. Este curso será disponibilizado de forma aberta (gratuita, livre para reprodução, sem pré-requisitos para a inscrição, sem limitações de horário ou tempo), sem restrição ao número de inscrições e totalmente online. O curso será ofertado, de forma contínua e sem a necessidade de tutoria, através do Portal de Cursos Abertos (PoCA) da Universidade Federal de São Carlos – UFSCar.

O curso é composto de duas unidades, cada uma com duas subunidades. A divisão das unidades e subunidades e o detalhamento dos conteúdos apresenta-se descrita no quadro a seguir.

Detalhamento do MOOC Funções Exponenciais e Logarítmicas

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS		
UNIDADES	SUBUNIDADES	DETALHAMENTO DO CONTEÚDO
Potenciação e Função Exponencial.	Potenciação: revisitando o conteúdo e recompondo saberes.	• Potência de expoente natural. • Potência de expoente inteiro negativo. • Raiz enésima aritmética. • Potência de expoente racional. • Potência de expoente irracional. • Potência de expoente real.
	Função Exponencial.	• Definição de Função Exponencial. • Gráfico da Função Exponencial. • Propriedades da Função Exponencial. • Equação Exponencial. • Inequação Exponencial.
Logaritmos e Função Logarítmica.	Logaritmos.	• Definição de Logaritmo. • Logaritmo decimal. • Propriedades dos logaritmos. • Sistemas de Logaritmos. • Resolução de Equações e Inequações Exponenciais.
	Função Logarítmica.	• Definição de Função Logarítmica. • Gráfico da Função Logarítmica. • Propriedades. • Equação Logarítmica. • Inequação Logarítmica.

O curso foi idealizado para a realização com um tempo mínimo de dez horas de estudo, sendo estruturado com a utilização de linguagem simples e acessível, sem, no entanto, renunciar à devida correção e formalidade de definições, de modo que estudantes da educação básica o tenham como uma ferramenta acessível e de qualidade.

Cada subunidade conta com uma apresentação, em formato de arquivo PDF, e uma videoaula, que ficarão disponíveis através do PoCA. As apresentações e videoaulas são elaboradas com as definições teóricas, algumas demonstrações, exemplos de aplicação e resolução de exercícios.

Entre os materiais de apoio há uma apostila em formato de ebook, que também ficará disponível no PoCA, em arquivo do tipo PDF. Essa apostila conta com o detalhamento mais aprofundado dos conteúdos, demonstrações e exercícios com resoluções.

Após a conclusão dos estudos, o cursista poderá realizar uma avaliação objetiva, por meio da qual poderá diagnosticar a necessidade de rever algum tópico e, após a aprovação, obter um certificado. É interessante salientar que, dada a natureza livre do curso, o estudante poderá refazê-lo, inclusive a avalição, quantas vezes considerar necessárias.

Desse modo, o curso se constitui em uma ferramenta aberta online de aprendizagem para utilização por estudantes e professores da educação básica, seja em escolas, ou de forma autônoma, para aprendizagem por grupos ou individualmente, com objetivo de auxiliar na dinâmica escolar, de reforço ou recomposição de aprendizagens, ou ainda como preparação para vestibulares e para o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio).

3. O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O mundo no qual vivemos em muitos aspectos se assemelha àquele em que nossos avós viveram, estudaram, aprenderam e trabalharam. Entretanto, a cultura, a tecnologia, as relações sociais se transformam ao longo do tempo. Portanto, é de grande importância a reflexão acerca dessas mudanças, para, enquanto educadores, não se permanecer, amparados nas semelhanças e sombras do passado, apegados a antigas práticas educacionais e fechados às novas demandas dos indivíduos e da sociedade atual.

Com o intuito de evidenciar a necessidade da reflexão supra proposta, considere-se, por exemplo, que as formas como as pessoas se comunicam e interagem socialmente, graças a internet e às redes sociais, são muito diferentes de como se fazia a bem pouco tempo atrás.

Outro fator relevante para essa reflexão, por exemplo, é no que concerne às relações de trabalho e às demandas de formação profissional. Citando-se a título de exemplo, o fato observado de que até o início da década de 1990, havia procura pelos indispensáveis cursos de datilografia, pois, até então, um bom datilógrafo teria emprego quase garantido, e que atualmente tal profissão e tais cursos já não existem.

Portanto, percebe-se como as transformações proporcionadas pela tecnologia têm ocorrido por toda parte; no modo como se realizam as operações bancárias e de comércio, passando do chegue ao Pix e das idas ao mercado ao *e-commerce,* do *marketing* tradicional, hoje, coexistindo com o digital, bem como das redes sociais assumindo papel relevante como espaço para os movimentos sociais e políticos, do crescimento da produção e difusão do conhecimento científico e acadêmico, dentre tantas outras mudanças.

Para Giddens (2012) e Gabriel (2014) (apud VILAÇA; ARAÚJO, 2016, p. 19) a vida em sociedade, consideradas as práticas e relações sociais de diferentes naturezas, entre as quais se incluem as práticas educacionais, tem sido influenciada pela atual tecnologia, sobretudo os dispositivos móveis de comunicação e a internet.

Assim sendo, ao refletir sobre tais mudanças, se conclui que a sociedade do tempo presente apresenta demandas no mercado de trabalho, na produção do conhecimento, nas relações sociais e na educação, que são diferentes daquelas apresentadas a apenas algumas décadas ou até mesmo anos.

3.1. Uma breve consideração acerca dos efeitos das TDIC's na sociedade e cultura.

Como afirmam Adrián e Llano (2006, p. 19), "os meios tecnológicos são uma parte essencial da cultura. Seu desenvolvimento teve fortes efeitos sobre as sociedades e gerou importantes mudanças na maneira de viver dos seres humanos."

Conforme Silveira e Bazzo (2009, p. 682):

> "A tecnologia tem se apresentado como o principal fator de progresso e de desenvolvimento. No paradigma econômico vigente, ela é assumida como um bem social e, juntamente com a ciência, é o meio para a agregação de valores aos mais diversos produtos, tornando-se a chave para a competitividade estratégica e para o desenvolvimento social e econômico de uma região."

Em determinadas épocas históricas, grandes avanços técnicos propiciam enormes transformações econômicas, sociais e culturais, que são tão intensas que historicamente costumam se chamar de revoluções, com a Agrícola, no período Neolítico, e a Industrial, apontada entre 1760 e 1840. Para Toffler, (apud ADRIÁN; LLANO, 2006), vivemos em um desses tempos de grandes mudanças, propiciado pelo desenvolvimento das tecnologias digitais.

> "Uma nova civilização está emergindo em nossas vidas. [...] essa nova civilização traz consigo novos estilos familiares; formas diferentes de trabalhar, amar e viver; uma nova economia; novos conflitos políticos; e, além de tudo, uma consciência modificada." (TOFFLER, apud ADRIÁN; LLANO, 2006, p. 21)

Logo, é algo facilmente observável e sustentado por diversos autores que o desenvolvimento tecnológico transforma a sociedade e a cultura, de modo que, com o acentuado desenvolvimento das Tecnologias Digitais da Informática e Comunicação, TDIC's, a partir segunda metade do século XX, há profundas transformações na sociedade, na cultura e nos meios de produção contemporâneos.

> A Era da Informação está, inegavelmente, produzindo efeitos muito maiores que a Revolução Industrial; um tipo de "quebra" está para acontecer. Está surgindo um novo tipo de comunidade, não uma cultura. A diferença entre uma cultura e uma comunidade é que a cultura é unilateral – pode-se absorvê-la lendo-se sobre ela, observando-a, mas em uma comunidade é preciso investir. Em uma nova comunidade haverá novos métodos de comunicar-se, de divertir-se, de comprar e, obviamente, de educar-se. (COSTA Jr., 2012, p. 22)

Ao analisar a influência da chamada Cibercultura, Lévy (1999) aborda as mutações sociais e culturais que acompanham a evolução técnica contemporânea a partir da exposição das grandes tendências dessa evolução. Tendo como um dos pontos de reflexão as consequências da evolução técnica sobre as relações de saber e os sistemas de ensino.

Portanto, em uma sociedade que se renova a cada dia, transformando-se no compasso das evoluções tecnológicas, sobretudo, nas últimas décadas, das TDIC's, com demandas de aprendizagem próprias de cada período histórico, é necessário refletir a prática docente, tanto em relação às metodologias quanto aos objetivos, considerando a influência e aplicabilidade destas novas tecnologias na vida e no trabalho docente.

3.2. Breve consideração acerca dos reflexos das transformações sociais causadas pelas tecnologias digitais na educação escolar

Para Pozo (2002, apud SALGADO; AMARAL, 2008, p. 29) "vivemos em uma sociedade da aprendizagem, na qual aprender constitui uma exigência social crescente que conduz a um paradoxo: cada vez se aprende mais e cada vez se fracassa mais na tentativa de aprender". Assim, mostra-se como contraditório o fato de termos tanta produção de conhecimento científico e tanto acesso à informação, por meio das TDIC's, e índices alarmantes de fracasso na educação escolar no Brasil, como se evidencia por meio dos resultados das avaliações educacionais.

Consideremos, como indicador desse fato, o resultado do Pisa, uma avaliação internacional da educação realizada a cada três anos e coordenada pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Na avaliação de 2018, se constatou que o percentual de estudantes brasileiros que chegam aos 15 anos de idade com aprendizado adequado em cinco áreas: matemática, leitura, ciências, resolução colaborativa de problemas e educação financeira é somente de 18,2%. Constatou-se também uma diferença assustadora entre os estudantes de nível socioeconômico alto e baixo, com 53,1% e 8,8%, respectivamente, segundo os índices oficiais divulgados.

Salgado e Amaral (2008, p. 30) caracterizam a sociedade presente como uma sociedade da aprendizagem, na qual as ferramentas tecnológicas fornecem novas maneiras de aprender, o que exige adaptação dos professores e sistemas de educação.

Para Olsen (1994) e Pozo (2001), citados por Salgado e Amaral (2008), como a imprensa tornou possíveis novas formas de ler, transformando a cultura da aprendizagem, as TDIC's também criaram e criam formas de difusão do conhecimento e da informação, o que gera a necessidade de buscar novas formas de ensino que se adequem a esta realidade, pois surge uma nova escrita, uma nova leitura e novas necessidades de aprendizagem.

Salgado e Amaral (2008) salientam, com base em Pozo e Postigo (2000), ainda, que a escola, graças as TDIC's, já não é a primeira fonte de conhecimento para os estudantes, de tal maneira que a educação escolar deve ser adaptada para formar sujeitos com capacidades de buscar a informação, dando sentido a esta e a assimilando com um pensamento crítico.

De acordo com Valente (2006):

> "Os meios de produção e de serviço estão passando por profundas mudanças, caracterizadas por uma supervalorização do conhecimento. Certamente, estamos adentrando na sociedade do conhecimento em que o conhecimento e, portanto, os processos de aquisição do conhecimento assumirão papel de destaque, de primeiro plano (Drucker, 1993; Naisbitt & Aburdene, 1990; Tower, 1990). Essa mudança implica em uma alteração de postura dos profissionais em geral e, portanto, requer o repensar dos processos educacionais. A educação não pode mais ser baseada na instrução que o professor passa ao aluno, mas na construção do conhecimento pelo aluno e no desenvolvimento de competências como aprender a buscar a informação, compreendê-la e saber utilizá-la na resolução de problemas." (VALENTE, 2006, p. 41)

A evolução tecnológica traz consigo a internet e o acesso quase global e universal a rede mundial de computadores, que propicia celeridade nas comunicações, na produção e divulgação das informações e consequentemente do conhecimento. Essa comunicação, por sua vez, não ocorre de forma centrada em um emissor, como nas mídias mais tradicionais (livros, rádios, televisão) mas de uma forma hipertextual. Isso é uma das marcas da transformação cultural e social ocorrida nas últimas décadas, que Lévy (1999) denomina de cibercultura.

> “Cibercultura quer dizer modos de vida e de comportamentos assimilados e transmitidos na vivência histórica e cotidiana marcada pelas tecnologias informáticas, mediando a comunicação e a informação via Internet. Essa mediação ocorre a partir de uma ambiência comunicacional não mais definida pela centralidade da emissão, como nos meios tradicionais (rádio, imprensa, televisão), baseados na lógica da distribuição que supõe concentração de meios, uniformização dos fluxos, instituição de legitimidades. Na cibercultura, a lógica comunicacional supõe rede hipertextual, multiplicidade, interatividade, imaterialidade, virtualidade, tempo real, multissensorialidade e multidirecionalidade”. (LEMOS, 2002; LEVY, 1999, apud SILVA, 2005, p. 63)

Lévy (1999) propõe, dadas as novas maneiras de construção do conhecimento e em face dos efeitos da cibercultura nas relações de saber, uma reflexão sobre os sistemas de educação, nos quais se deve observar o papel das tecnologias digitais como favorecedoras de novas formas de acesso à informação, de aprendizagem e de construção do conhecimento. Desse modo, de acordo com o autor, na cibercultura o saber se articula com a necessidade de uma forma de pensar a educação que contemple os novos modelos de construção do conhecimento, assim como a democratização do acesso à informação, formas de aprendizagem que não se tinha antes e a emergência da inteligência coletiva. Portanto, segundo Lévy, as metodologias tradicionais de ensino e aprendizagem se tornam, em certa medida, obsoletos, dada as necessidades de aprendizagem dos indivíduos, em face das características do mercado de trabalho, da sociedade e cultura no que este chama de ciberespaço.

Cada vez mais o mercado de trabalho e a sociedade demandam que os profissionais e cidadãos sejam capazes de produzir e viver utilizando os mecanismos de informação compartilhada, utilizando as ferramentas das TDIC’s, que se renovam constantemente.

A economia, as instituições financeiras, as empresas de marketing e propaganda, o comércio, a prestação de serviços, dentre tantos segmentos, a cada dia estão mais presentes no mundo virtual, necessitando mais e mais de mão-de-obra capacitada.

Desse modo, é possível perceber a necessidade de inclusão da utilização do computador, da internet, e das TDIC's de modo geral, nos ambientes educacionais, com o objetivo de contribuir pedagogicamente com a aprendizagem dos estudantes, bem como gerar inclusão social na cibercultura, por meio da democratização do acesso a essas tecnologias, posto que para os jovens das camadas menos favorecidas economicamente, será na escola que se darão os primeiros contatos com algumas dessas tecnologias.

> "A educação do cidadão não pode estar alheia ao novo contexto socioeconômico-tecnológico, cuja característica geral não está mais na centralidade da produção fabril ou da mídia de massa, mas na informação digitalizada como nova infraestrutura básica, como novo modo de produção. O computador e a Internet definem essa nova ambiência informacional e dão o tom da nova lógica comunicacional, que toma o lugar da distribuição em massa, própria da fábrica e da mídia clássica, até então símbolos societários." (SILVA, 2005, p. 63)

Portanto, considerando-se as transformações sociais e culturais, marcadas pelo uso das novas tecnologias da informática e comunicação, que determinam novas necessidades de aprendizagem e desafios educacionais próprios desta era tecnológica, enquanto, por outro lado, possibilitam o surgimento de novas formas de aprender e ensinar, cabe a educadores repensar práticas e metodologias pedagógicas. De modo mais amplo, é necessário que a sociedade como um todo considere a necessidade de sistemas educacionais que favoreçam a formação de sujeitos com capacidade técnica e pensamento crítico para viverem, aprenderem, trabalharem e produzirem conhecimento na sociedade contemporânea, que se pode denominar cibercultura.

3.3. A utilização das TDIC's na educação escolar.

Dada a relevância social e cultural das tecnologias, que fazem parte do cotidiano social, é impossível relegar o papel destas no processo de busca pelo conhecimento e de aprendizagem, tanto de forma autônoma quanto nos processos formais de ensino. Assim sendo, nas escolas não se pode ignorar a relevância da utilização das tecnologias para o processo de ensino-aprendizagem na atualidade.

Observando que em seu tempo histórico, coube a alguma tecnologia ser incorporada e até revolucionar os processos de ensino e os sistemas de educação, como, por exemplo, quando por volta de 1890 surgiram na Alemanha as maravilhas tecnológicas do quadro negro e do lápis, não se pode conceber a educação no século XXI sem considerar a utilização e as possíveis e importantes contribuições das tecnologias da atualidade, como as TDIC's.

Todavia, é comum se encontrar resistência entre professores, gestores e instituições de ensino a utilização destas tecnologias na escola. O apego aos métodos tradicionais, por vezes arcaicos e obsoletos, ainda constitui um obstáculo ao uso da tecnologia.

Para Borba e Penteado (2007, p. 56), é comum alguns professores desejarem caminhar no que os autores denominam "*zona de conforto"*, onde tudo já é conhecido, onde há menor possibilidade de erro e de perda do controle do processo de ensino, entretanto, ao se fazer uso de qualquer inovação em sala de aula, entra-se numa "*zona de risco"*, onde nem todos lidam bem com a incerteza.

> "Na verdade, as inovações educacionais, em sua grande maioria, pressupõem mudanças na prática do docente, não sendo uma exigência exclusiva daquelas que envolvem o uso de tecnologia informática. A docência, independentemente do uso de TI, é uma profissão complexa. Nela estão envolvidas as propostas pedagógicas, os recursos técnicos, as peculiaridades da disciplina que se ensina, as leis que estruturam o funcionamento da escola, os alunos, seus pais, a direção, a supervisão, os educadores de professores, os colegas professores, os pesquisadores, entre outros." (BORBA; PENTEADO, 2007, p. 56).

Nessa *"zona de risco"*, os problemas técnicos, a manutenção da atenção de uma turma, as perguntas inesperadas, as dificuldades no manuseio de aparelhos por parte do professor ou de alunos, podem gerar uma constante e estressante necessidade de adaptação. No entanto, a própria prática docente exige do educador que este esteja disposto a adaptar-se sempre, pois sequer dois indivíduos aprendem linearmente, da mesma maneira, no mesmo ritmo, de modo que a experiência na docência faz perceber que o processo de ensino-aprendizagem é por si mesmo desafiador.

No contexto escolar, a utilização de tecnologias, como dispositivos móveis, ainda encontra barreiras, havendo aqueles que defendem a liberação, o uso controlado e até mesmo a proibição. Para Fanhani e Sabadin (2014, p. 10):

> "O celular tem sido tema de grandes debates no âmbito educacional, em reuniões pedagógicas e conselhos de classe, mesmo com as leis de proibição dentro das salas de aula, os alunos continuam a utilizá-lo. Os celulares ultrapassaram o simples ato de falar pelo aparelho e se transformaram em pequenos computadores que permitem trabalhar, organizar e aprender onde quer que se esteja." (FANHANI; SABADIN, 2014, p.10)

Para Moran (1999, p. 01) "perdemos tempo demais, aprendendo muito pouco, nos desmotivando continuamente. Tanto professores, como alunos temos a clara sensação de que muitas aulas convencionais estão ultrapassadas." Logo, muitas vezes, as metodologias utilizadas há alguns anos se tornaram obsoletas em face das novas tecnologias e necessidades de saberes dos dias atuais. Portanto, a discussão acerca do espaço ocupado por essas tecnologias e das possibilidades que elas oferecem pedagogicamente se torna imprescindível, posto que, talvez seja mais viável compreender como usar de maneira benéfica esses instrumentos do que seguir na contramão do avanço tecnológico. Assim, se faz necessário refletir quais os papéis e aplicações destas tecnologias para o favorecimento do ensino e da aprendizagem.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já se encontra a recomendação para que a tecnologia seja uma ferramenta aplicada pelo professor em sua prática pedagógica:

> É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras. (BRASIL,1998. p. 96).

Apesar de desafiadora, a possibilidade de utilização das TDIC's no ensino já é uma realidade benvinda e uma necessidade para a qual os educadores precisam estar preparados, afinal, a utilização dessas tecnologias como recurso pedagógico na educação escolar já é prevista nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica de 13 de julho de 2010. Assim sendo, a grande questão não é se, mas como utilizar as TDIC's na prática educacional.

A utilização de diferentes tecnologias na educação deve ser percebida como potencializadora da aprendizagem, transformadora do fazer docente, posto que a diversidade de situações nas quais podem ser aplicadas, assim como a heterogeneidade das necessidades de intervenções para a aprendizagem de alunos com diferentes dificuldades de aprendizagem as tornam ferramentas didáticas de grande relevância.

3.4. A utilização do computador na educação matemática.

Para um processo educativo que forme de maneira plena, é necessário que os estudantes aprendam a aprender, isto é, se tornem sujeitos protagonistas do processo de aprendizagem e não são somente receptores de conteúdos prontos. Para tanto, professores de maneira geral, necessitam compreender seus papéis de faciliatadores e não de transmissores, para mediar junto aos estudantes a busca autônoma por diferentes formas de construção do conhecimento, para que possam decidir com criticidade o que e como aprender, para que se tornem sujeitos ativos nesta sociedade do conhecimento.

A educação matemática também possui o escopo de propiciar aos estudantes a capacidade de pensarem por si, utilizando o saber lógico-dedutivo e o exercício do raciocínio para a leitura de mundo, para compreensão da realidade e para o fazer científico. E isso não será possível pela mera repetição de fórmulas ou memorização de teoremas, sem que haja a compreensão e interiorização do conhecimento de forma estruturada e crítica, ou seja, sem que o estudante seja o agente do processo de aprendizagem, que de forma autônoma busca maneiras de compreender, aprender e crescer.

Desse modo, cabe ao professor de matemática utilizar todos os recursos didáticos e pedagógicos disponíveis e que possam favorecer esta aprendizagem significativa, onde de fato os alunos aprendem muito além do estrito necessário para aprovação em provas bimestrais ou outras avaliações de caráter meramente aprobatório, desenvolvendo competências e habilidades próprias do saber matemático que estarão interiorizadas e que permitirão o seu pleno desenvolvimento intelectual, científico, acadêmico e profissional.

Apesar, de no Brasil, as primeiras propostas de utilização das TDIC's na Educação Matemática datarem do início da década de 1970, através dos programas implantados pelo Ministério da Educação e Cultura, que objetivava incentivar a inovação no ensino, somente em 1997 foi criado o Programa Nacional de Informática na educação, PROINFO, pela Secretária de Educação à Distância do MEC. Esse programa foi o responsável pela implementação de laboratórios escolares de informática e internet nas escolas, dando um salto para a promoção da inclusão digital no país. Nos anos posteriores foram implementadas iniciativas de formação de professores para utilização destas tecnologias na educação. No entanto, os desafios continuam a surgir, bem como questionamentos acerca das benesses desta utilização, assim como a exaltação de suas dificuldades, desde as técnicas, como a obsolescência de máquinas, de acesso à internet e a própria resistência de professores a essa utilização, e isso tudo faz com a utilização das tecnologias na educação ainda soe como uma realidade parcialmente concretizada.

Apesar de todas as dificuldades, as instituições escolares, os gestores e os professores, não podem prescindir dos meios tecnológicos necessários e disponíveis para fomentar a aprendizagem escolar. Este fato, associado a importância do conhecimento matemático, leva a compreensão da necessidade de buscar desenvolver o ensino da matemática com a utilização dessas novas tecnologias.

Segundo Valente (2006, p. 34-35), o ensino de Matemática na atualidade deve promover o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, em oposição ao ensino já ultrapassado de uma Matemática que consiste somente de repetições de cálculos mediante fórmulas prontas, sem vinculação com as necessidades impostas pelo mundo atual. Ainda segundo Valente (1999), a Matemática a se “fazer” está associada ao pensar, raciocinar, imaginar e intuir, para construir soluções, para por meio da tentativa e erro, da construção de analogias, da refutação de incertezas, organizar o próprio pensamento, pois é assim que se constrói o saber matemático, e não através do recebimento passivo de dados e fórmulas prontas.

Desse modo, buscar ferramentas que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem de Matemática é extremamente salutar para a construção nos jovens desse “pensar e fazer” Matemática. Quando o professor de matemática propõe uma ação didática na qual o estudante age de forma ativa, buscando, por exemplo, compreender uma situação-problema, se debruçando sobre a realidade e aplicando o pensamento lógico-dedutivo, teremos uma aprendizagem significativa.

Valente (2006) sugere que se possa utilizar o computador educacionalmente, por meio de aplicativos do tipo tutoriais, exercício-e-prática, jogos, simulações, multimídias ou de *software* de aplicações mais gerais, como de programação, de bancos, editores de textos, planilhas eletrônicas ou de construção multimídia.

Desse modo, podemos considerar os possíveis benefícios utilizar o computador e outras ferramentas tecnológicas para o ensino da Matemática, não concebendo o computador como uma máquina de ensinar e que possar substituir o professor, mas como instrumento pedagógico. Desse modo, *softwares*, desenvolvidos com a finalidade educacional ou com outras funções e adaptados ao contexto educacional, podem ser utilizados como facilitadores de aprendizagem. Assim, por exemplo, temos na utilização de planilhas eletrônicas potencial para a compreensão de elementos de estatística básica e de matemática financeira, na construção de gráficos de funções a otimização do tempo de aula, pois em vez de gastar um grande tempo desenhando, se pode passar mais tempo compreendendo. Aplicativos educacionais, como o Geogebra por exemplo, destinado a realização construções geométricas, pode melhorar a percepção sobre entes geométricos diversos, fornecendo também ao professor um excelente recurso de exposição visual. Inclusive, pode-se perceber como tais aplicativos podem ser mecanismos de inclusão de estudantes que possuam maiores dificuldades de aprendizagem.

A utilização da internet, por sua vez, pode ser útil para promover o acesso autônomo a plataformas, cursos, ou mesmo a conteúdos direcionados pelo próprio professor, com a finalidade de que o estudante possa assumir o protagonismo no seu processo de aprendizagem.

Conforme observa Valente (1999), computadores já fazem parte do cenário escolar, e estes nos conferem a oportunidade de desenvolvimento de metodologias com o objetivo de melhorar os resultados da aprendizagem de matemática.

De acordo com Cotta (2002, p. 20), o computador por si só na escola não constituirá mudança significativa de aprendizagem, mas o salto de qualidade no ensino de Matemática poderá ocorrer dependendo do uso que se faça dele, do aproveitamento da oportunidade para aos poucos mudar as práticas tradicionais de ensino, introduzindo inovações didático pedagógicas.

Portanto, a educação Matemática não pode permanecer alheia às mudanças sociais e culturas advindas da evolução tecnológica. É necessário que a escola, que o professor de Matemática, busque inserir novas metodologias que façam usam do computador, das TDIC's de maneira geral, e de qualquer ferramenta tecnológica acessível, de forma coerente, visando a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

Ao considerar-se as mudanças culturais e sociais que vêm ocorrendo em decorrência da evolução tecnológica, percebe-se um novo desafio para a educação escolar e a abertura de novos canais midiáticos para a construção de saberes. Surge, então, um novo caminho para a aprendizagem pavimentado pelas novas tecnologias. Assim, busca-se compreender como as TDIC's possibilitam novos meios de aprendizagem, de difusão e construção do conhecimento, mais especificamente, em relação à aprendizagem por meio de cursos *online*.

Para Fanhani e Sabadin (2014, p. 9) a escola nos velhos moldes de quadro e giz já não é suficiente, se faz necessário buscar novas tecnologias e aplicá-las no cotidiano escolar.

> "Não é que a escola de hoje deixará de existir. É uma camada que completa outra. Logo, temos que educar visando esse novo comportamento através de uma pedagogia de aprendizagem coletiva e permanente." (LEVY, 2013 apud FANHANI; SABADIN, 2014, p. 9)

Ao pensar na escola, para Alcantara e Silva (2018), inevitavelmente falamos em movimentação de saberes, percebendo um grande salto transformacional entre os séculos XX e XXI, dado, sobretudo, graças ao avanço tecnológico. Para Lévy (2017, apud ALCANTARA; SILVA, 2018), essa transformação é proveniente do advento da Internet em seu formato Web 2.0, que absorve os sistemas de mídias anterior. Há, então, para um público muito maior do que antes, uma nova possibilidade de acesso praticamente ilimitado a esse universo midiático. De forma que, é de grande relevância pensar escola e aprendizagem de modo geral, considerando as perspectivas desse sistema midiático.

De acordo com Lévy (1999, p. 158), a influência das novas tecnologias transforma profundamente, não apenas as metodologias de ensino e aprendizagem, mas as próprias relações com o saber.

> "O saber-fluxo, o trabalho-transação de conhecimento, as novas tecnologias da inteligência individual e coletiva mudam profundamente os dados do problema da educação e da formação. O que é preciso aprender não pode mais ser planejado nem precisamente definido com antecedência. Os

> percursos e perfis de competências são todos singulares e podem cada vez menos ser canalizados em programas ou cursos válidos para todos. Devemos construir novos modelos do espaço dos conhecimentos.” (LÉVY, 1999, p.158)

Medeiros Neto (2017) observa que está ocorrendo um processo sem precedentes de imersão na cultura digital na sociedade contemporânea, caracterizado por um ambiente de comunicação global, ubíquo, interativo e participativo, citando a perspectiva de Santaella (2013):

> “... a cognição juntamente com a cultura, em especial a digital, quando associadas à educação, possibilitam a aprendizagem contínua e a comunicação ubíqua bem como acarreta transformações econômicas e políticas decorrentes das profundas transformações culturais que acionam. E, ainda, a ecologia midiática hipermóvel e ubíqua e, sobretudo, a cognição humana, potencializam a aprendizagem na sociedade contemporânea. Segundo a mesma autora, a ubiquidade na computação (pensamento computacional) pode desenvolver a cognição, produzir repercussões cruciais na educação e permitir novas maneiras de processar a cultura.” (SANTAELLA 2013, apud MEDEIROS NETO, 2017, n.p.)

Portanto, considera-se refletir acerca das possibilidades e das necessidades de aprendizagem nesse cenário de sociedade tecnológica, ou cibercultura, conforme designa Lévy (1999). Contudo, dada a vastidão e complexidade da temática, mantendo em foco o espaço de aprendizagem que surge com a acessibilidade maior da população à internet, e observando-se três vertentes; a autonomia na aprendizagem a distância e em ambientes virtuais de aprendizagem, a utilização de recursos educacionais abertos e a construção de Cursos Online Abertos e Massivos.

4.1. Educação a distância, Ambientes Virtuais de Aprendizagem e Autonomia

É fácil conceber o fato de que o ser humano é um ser aprendente, ou seja, faz parte da essência humana a busca por estar em constante aprendizado ao longo da sua existência, e é provável que isto ocorra pela necessidade natural de adaptação e sobrevivência. No entanto, é interessante observar o que se busca aprender, isto é, o que possui significado ou relevância.

Nesse contexto, o trabalho ou emprego, por serem imprescindíveis socialmente, podem conferir significado a conhecimentos específicos, se constituindo como impulsionadores do desejo de aprender.

Para Medeiros Neto (2017, n.p.), nas últimas décadas a questão da empregabilidade e da inclusão social têm passado por muitas mudanças.

> “Antunes (2001, p. 13) já alertava que a categoria que denominamos trabalho possui centralidade “na formação societal contemporânea”, onde novas formas de produzir se apresentam capazes de transformar a organização do trabalho e, por conseguinte, a ocupação social do indivíduo. A ocupação social, em sua historicidade e totalidade, é o que proporciona forças ao sujeito, para que este, fortalecido no espaço social, e agora também no ciberespaço, consiga promover alguma transformação em sua vida e apresente resultados contrários ao que a exclusão social insiste em lhe impingir.” (MEDEIROS NETO, 2017, n.p.)

Observa-se, que na atualidade, as novas tecnologias transformam não somente os meios de produção e por consequência o trabalho, como também assumem um papel transformador na vida social como um todo, inclusive na educação e na busca individual de aprendizagens condizentes às demandas sociais específicas de cada sujeito.

Assim, a presença cada vez maior de tecnologias no cotidiano dos indivíduos apresenta-se como fator potencializador da aprendizagem, não somente no contexto escolar, mas ao longo de toda a vida, colocando aquele que quer aprender numa posição ativa em busca de conhecimento.

Especificamente, a internet tem possibilitado maior facilidade de acesso a comunicação e informação, o que tem aberto novos horizontes para processos educacionais e de aprendizagem autônoma. Conforme Castells (2003, p. 260), “se há um consenso acerca das consequências sociais do maior acesso à informação é que a educação e o aprendizado permanente tornam-se recursos essenciais para o bom desempenho no trabalho e o desenvolvimento pessoal.”

Desse modo, percebe-se a necessidade de uma nova forma de aprendizagem na qual o acesso à informação, potencializado pela tecnologia, se converta em educação, em aprendizado significativo. Conforme Dutton (1999, apud CASTELLS, 2003, p. 261), “o novo aprendizado é orientado para o desenvolvimento da capacidade educacional de transformar em informação e conhecimento em ação.”

> “Além disso, o aprendizado baseado na Internet não é apenas uma questão de competência tecnológica: um novo tipo de educação é exigido tanto para se trabalhar com a Internet quanto para se desenvolver capacidade de aprendizado numa economia e numa sociedade baseadas nela. A questão crítica é mudar do aprendizado para o aprendizado-de-aprender, uma vez que a maior parte da informação está on-line e o que é realmente necessário é a habilidade para decidir o que procurar, como obter isso, como processá-lo e como usá-lo para a tarefa específica que provocou a busca de informação.” (CASTELLS, 2003, p. 261)

Como afirmam Santos e Torres (2014), a vida social e os processos de formação de cada indivíduo são marcantemente impactados pelo desenvolvimento tecnológico, de tal modo que a educação necessita estar alicerçada de modo a permitir “o desenvolvimento das capacidades cognitivas, das formas de expressar-se, de compreender diferentes contextos, de relativizar certezas e de pensar estrategicamente”.

Ainda segundo Santos e Torres (2014, p. 3), “essa nova exigência transpõem o lugar do saber “a escola” e o detentor do saber “o professor” revelando que a forma de aprender e de ensinar se expandiu e tornou-se mais coletiva e planetária.”

Concomitantemente, como afirma Bauman (2001, apud MACHADO, 2010a, n.p.):

> “a modernidade é liquida, estamos na era do saber de fluxo e o conhecimento é a palavra-chave para sermos criativos e competitivos em um mundo cada vez mais globalizado e dependente da tecnologia. Tais características fomentam cada vez mais propostas de ensino a distância, mediado por ambientes de comunicação digital, tanto nas instituições de ensino, como nas organizações produtivas, tornando o AVA cada vez mais presente na vida dos aprendizes e trabalhadores da sociedade dita do conhecimento.”

A modalidade educacional convencional, presencial, coloca os sujeitos do processo de ensino/aprendizagem, professor e estudantes, em um mesmo local e tempo, a sala de aula. Geralmente, nesta modalidade, centra-se majoritariamente no professor o poder decisório quanto ao currículo, às metodologias, à gestão de tempo e às prioridades de aprendizagem, enquanto o estudante permanece em uma posição de aprendizagem mais passiva. Não obstante, haja variações de pensamento pedagógico, essa é uma caracterização geral do processo de ensino convencional e formal.

Moran (2009, apud ALVES, 2011, p. 84) afirma que "na modalidade a distância, professores e alunos estão separados fisicamente no espaço e/ou no tempo. Esta modalidade de educação é efetivada através do intenso uso de tecnologias de informação e comunicação, podendo ou não apresentar momentos presenciais".

> Harasim (1990) resume como características dos cursos online a independência de tempo e lugar, comunicação de muitos para muitos, e aprendizagem colaborativa e a dependência na comunicação textual. A autora também aponta como vantagens desse tipo de curso a possibilidade de comunicação síncrona ou assíncrona, o acesso de e para comunidades geograficamente isoladas e a troca entre culturas diversas. A natureza assíncrona, textual da mídia permite controle de tempo, lugar, ritmo e natureza da interação, oferecendo ao usuário a opção de responder imediatamente ou refletir e pesquisar antes de se pronunciar. (SILVA, 2014 n.p.)

Então, o acesso à computadores (desde o computador de mesa ao *smartphone*) e à internet, propícia o surgimento de uma nova modalidade de ensino, a educação a distância (EaD). Rompem-se as fronteiras do espaço e tempo da sala de aula, e, embora muitas características do ensino convencional possam ser mantidas, é possível perceber a abertura para que o estudante assuma uma postura mais ativa de aprendizagem, não somente em relação a quando e onde aprender, mas em relação às prioridades e necessidades de aprendizagem individual e para uma maior autonomia em relação ao desenvolvimento pessoal.

De acordo com Gomes (2016, apud GARCIA, 2020, p.32), com o poder de alcance das tecnologias, é possível que processo de aprendizagem, por meio da educação a distância, perpasse todos os lugares, reconhecendo o que o autor chama de "escola fora da escola". Nesse contexto, a educação a distância assume grande relevância na oferta de oportunidades de estudo, pois supera barreiras geográficas e de acessibilidade, permitindo a implementação de programas educacionais diversos, sendo utilizada para a educação básica, de nível superior, cursos profissionalizantes, treinamentos institucionais, cursos livres ou abertos.

Na educação a distância, no lastro do desenvolvimento tecnológico, segue-se uma evolução de metodologias de ensino-aprendizagem, por meio de mídias e de recursos que podem ampliar as possibilidades de interação e aprendizagem, resultando na descentralização do controle do processo pedagógico do professor e conferindo maior autonomia aos estudantes. Nesse contexto, os chamados ambientes virtuais de aprendizagem, doravante chamados AVA, possuem grande relevância.

Ressalta-se que, conforme Tori (2022), outras nomenclaturas ou siglas possam ser utilizadas:

> Os sistemas de gerenciamento de conteúdo e aprendizagem são conhecidos por diversas denominações, tais como AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem), LMS (Learning Management System), CMS (Course Management System ou Content Management System), LCMS (Learning Content and Management System) ou IMS (Instructional Management Systems). (TORI, 2022, p. 321-322)

Consideremos, então, a definição de AVA, dada por Behar (2009, p. 29), como o “espaço na internet, formado pelos sujeitos e suas interações e formas de comunicação que se estabelecem por meio de uma plataforma ...”. Tal plataforma está baseada em uma infraestrutura tecnológica, que fornece elementos de comunicação síncrona ou assíncrona, recursos de aprendizagem individual ou colaborativa, além de outras funcionalidades, por meio de uma interface gráfica. Ainda para a autora, os sujeitos da EAD, necessitam de um conjunto de competências relacionadas ao uso dos recursos tecnológicos utilizados.

Machado (2010b, p.65) apresenta a seguinte definição:

> “Um AVA - ou, em inglês, LMS – Learning Management System - é um sistema para gerenciar cursos a distância que utilizam a Internet. Atualmente, existem vários sistemas e, de modo simples, é um conjunto de elementos tecnológicos disponíveis na Internet. É um local virtual onde são disponibilizadas ferramentas destinadas a prover acesso a um curso ou disciplina e também possibilita a interação entre a comunidade envolvida no processo de ensino-aprendizagem (alunos, professores e outros sujeitos).”

Medeiros Neto (2017, n.p.) remete a ao que chama de “*competência informacional* (competência em informação)”, que se refere a “habilidade do indivíduo em perceber suas necessidades de buscar, avaliar, selecionar e usar a informação de forma a suprir o desejo que, inicialmente, gerou, a sua procura, e, ainda, nesse processo, contribuir com o próximo". Citando ainda outros autores (ADE-LA CORTINA, 2005; SORJ, 2007; BECKER, 2009; CASTELLS, 2013), Medeiros Neto evidencia o caráter, além de mera competência técnica, de relação da apropriação informacional ao exercício da cidadania.

> O conceito de competência informacional abrange as três áreas de conhecimentos. Ele deve ser pensado como um fator propulsor da cidadania, na medida em que preenche lacunas da apropriação do conhecimento, tornando o sujeito mais autônomo, caso ele desenvolva continuamente suas competências em informação. Isto vale tanto para a avaliação crítica das informações quanto para a sua capacidade como cidadão em participar de ações políticas. (PIENIZ; SILVEIRA, 2011, apud MEDEIROS NETO, 2017, n.p.)

Medeiros Neto (2017, n.p.) utiliza o termo "literacia digital", afirmando que esse conceito tem sido utilizado, de forma mais adequada, para se referir às habilidades relacionadas ao fenômeno cognitivo e social, necessários ao processo de ensino e aprendizagem em ambientes ou comunidades virtuais de aprendizagem, por meio das TDICs. Para Passarelli e Junqueira (2012, apud MEDEIROS, 2017, n.p.):

> A expressão literacia digital é mais adequada para refletir os processos de codificação de novos sentidos e práticas interacionais no ambiente virtual ou on-line, nos centros de ensino, bem como nas Comunidades de Aprendizagem Virtual (CAV). Nessas últimas, são frequentes o uso, o manuseio e a apropriação das ferramentas de acesso e busca automatizada e de novas mídias. Além da leitura, interpretação, pesquisa e navegação na Internet, o que se observa é um processo de evolução contínuo de aprendizagem em rede.

Os apontamentos de Medeiros Neto (2017, n.p.) permitem perceber como esse conjunto de competências, essa literacia digital, é necessária e pressupõe uma postura ativa do estudante na superação de dificuldades e na busca da efetivação de uma aprendizagem significativa.

> O advento das tecnologias móveis tem criado oportunidades de promover a aprendizagem com auxílio de dispositivos como telefones celulares, laptops, tablets e notebooks (*m-learning*). Coletivamente, esse tipo de aprendizagem por dispositivos móveis é chamado *m-learning*, onde a entrega de conteúdo é baseada na Web e no gerenciamento de aprendizagem e que pode ser pensado como um subconjunto de *e-learning* (FRANÇA; STIUBIENER, 2015). Nesse caminhar, o usuário pode contar, ou não, com ajuda de colegas de trabalho ou de familiares. A inteligência coletiva do seu grupo mais próximo marca a fase inicial de sua aquisição de competências em TIC; depois, ele caminhará sozinho de modo a obter serviços disponíveis nas aplicações da Internet (app), além da fronteira da simples comunicação de voz de seus artefatos eletrônicos (PIENIZ; SILVEIRA, 2011). Com certeza os

> usuários tentam superar, a todo custo, suas deficiências de habilidades no trato com dispositivos móveis e as TIC. (MEDEIROS NETO, 2017, n.p.)

Para Harasim (1990) e, para Rohfeld e Hiemstra (1994), segundo citado por Silva (2014, n.p.), “alunos que estudam online em cursos à distância demonstram maior controle e responsabilidade em seu processo de aprendizagem e também acham que escrever é uma atividade que permite e exige maior reflexão do que falar”.

De acordo com Guarezi e Matos (2012, apud COSTA, 2017, p. 61), entre as características da educação a distância estão a autonomia, a comunicação e o processo tecnológico.

> Em relação ao aspecto da autonomia, o estudante pode definir o melhor horário e local para estudar, conforme seu ritmo e estilo de aprendizado, por meio de materiais didáticos que facilitem a mediatização dos conhecimentos e promovam a autoaprendizagem. Em relação ao aspecto da comunicação, esta é sempre mediatizada e pode acontecer de forma síncrona, quando estudantes e professor estão conectados ao mesmo tempo, através de, por exemplo, chats, webconferências, audioconferências e telefone, ou assíncrona, quando estudantes e professores não estão conectados ao mesmo tempo, podendo ser por meio de fórum, mensagem eletrônica etc. Essas formas de comunicação permitem atender um número maior de estudantes de diversas regiões. Já em relação ao aspecto tecnológico, diversas tecnologias são colocadas à disposição dos estudantes e professores para facilitar a comunicação e o acesso aos conteúdos. (GUAREZI; MATOS, 2012, apud COSTA, 2017, p. 61)

Peters (2001, apud HACK, 2011, p. 91), a busca por autonomia, no estudo a distância, poderá ser algo um tanto assustador para alguns estudantes, posto que essa ideia implica “a) construir ou transformar estruturas cognitivas; b) transformar estruturas de superfície em estruturas de profundidade; c) refletir simultaneamente sobre todo esse processo.” O autor observa, ainda, que estudar de forma autônoma não se pode confundir com uma construção individual e isolada, posto que leva a formas de ensino e aprendizagem dialógicas, construções coletivas e aprendizagem cooperativa. Todavia, essa autonomia possui como alicerce a proposta de passar o protagonismo do processo de ensino-aprendizagem do professor para o estudante.

Para Hack (2009, apud HACK, 2011, p. 91-96), na busca por autonomia e cooperação na EAD são características essenciais a criticidade, a criatividade e dialogicidade. Segundo o autor:

> "A pessoa que pretende estudar com autonomia e de forma cooperativa precisa se predispor a mudanças que exigirão reflexão e ação críticas sobre determinadas práticas que, em alguns casos, ainda não estão incorporadas à sua postura no processo de ensino e aprendizagem... [...] A criatividade precisa ser cultivada para que depois de algum tempo dê bons frutos. Ela pode e deve fazer parte do nosso cotidiano, tornando-se uma aliada importantíssima em nossa atuação profissional, em nossos estudos, enfim, em todas as atividades, representando até mesmo um diferencial. Por isso, ao introduzirmos as práticas autônomas e cooperativas em nossa experiência de EAD, precisamos também desenvolver a sensibilidade criativa. [...] Com tanta necessidade de atualização, vem à tona a importância da construção autônoma e ao mesmo tempo cooperativa do conhecimento e, para tanto, a capacidade de desenvolver uma comunicação educativa dialógica efetiva passa a ser essencial." (HACK, 2011, p. 91-96)

É importante ressaltar que, como afirmam Souza e Santos (2019, p. 46-47, apud GARCIA, 2020 p. 235), "a tecnologia, por si só, não se apresenta como um diferencial, mas o modo como a utilizamos é que vai determinar a sua influência na educação". Desse modo, observa-se que as tecnologias por si mesmas, embora ofertem novas possibilidades, não transformaram a educação, posto que é a postura assumida pela sociedade, professores e estudantes diante das tecnologias, que possui papel transformador. E, como enfatiza Garcia (2020, p. 235-236), em relação às tecnologias na educação e educação a distância, "identificamos, atualmente, no ambiente de ensino/aprendizagem, componentes que podem se fazer presentes, integrando linguagens, semioses e suportes, mas que, para isso, requerem competência e habilidades de uso sob a ótica social".

Portanto, observamos que a aprendizagem, apesar de nunca poder ser restringida por muros de instituições, encontra um largo caminho de oferta aberto pelas novas tecnologias. Essa aprendizagem, mais universalizada e equânime, requer dos estudantes que estes se vejam como autores dos seus próprios conhecimentos, e não como receptores passivos. É essencial a busca pelo desenvolvimento das competências indispensáveis ao aprendizado e ao desenvolvimento pessoal.

Para além disso, o estudo a distância requer muito mais que apenas competências tecnologias, domínio das mídias, posto que, assim como na sociedade atual, no contexto de cibercultura, se faz necessário aprender a aprender, de forma autônoma, crítica, criativa e dialógica, afinal, apesar grande acesso a informações *online* da era contemporânea, é imprescindível que os sujeitos sejam capazes de decidir o que e como aprender.

4.2. Educação Aberta Online e Recursos Educacionais Abertos.

O direito a educação é um direito humano fundamental e inalienável. Segundo o Artigo 26° da Declaração Universal dos Direitos Humanos (DUDH):

> “1. Toda a pessoa tem direito à educação. A educação deve ser gratuita, pelo menos a correspondente ao ensino elementar fundamental. O ensino elementar é obrigatório. O ensino técnico e profissional deve ser generalizado; o acesso aos estudos superiores deve estar aberto a todos em plena igualdade, em função do seu mérito. 2. A educação deve visar à plena expansão da personalidade humana e ao reforço dos direitos do Homem e das liberdades fundamentais...” (ONU, 1948)

Assim, também é conferido pela Constituição Federal da República Federativa do Brasil, de 1988, o direito à educação a todo cidadão brasileiro:

> “Art. 205. A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.” (BRASIL, 1988)

Entretanto, ao se considerar o acesso à educação sob o prisma da universalidade, é fato que dentre os maiores obstáculos para que isso se concretize, estão as dificuldades de natureza social e econômica, não se tratando, tão somente, das dificuldades de alocação governamental de recursos financeiros para a oferta de vagas na educação básica, nos ensinos profissionalizante e superior, como também, principalmente, da desigualdade social e da má distribuição de renda.

Suponha-se que um jovem proveniente de uma família pobre, com poucos recursos financeiros, aluno de escola pública, morador de uma periferia ou de uma zona rural, deseje ingressar em uma instituição de Ensino Superior de ampla concorrência, tendo, então, que disputar vagas com jovens de famílias com maior renda e de melhor poder aquisitivo, que estudem em escolas particulares e frequentem cursos preparatórios e de idiomas, podendo pagar por aulas particulares de reforço, que sejam moradores de centros onde haja maior diversidade de acesso à cultura e estruturas educacionais. Nesse caso, não havendo disponibilidade de vagas para todos (como de fato costuma ser), ter-se-ia uma disputa em igualdade de condições?

Outrossim, suponha-se que quando um jovem, nas mesmas condições do primeiro jovem descrito na situação anterior, consiga adentrar aos portões da universidade, certamente, ele necessitará adquirir materiais de estudo como livros e apostilas, e, por vezes, ainda que anseie por estudar para aprimorar-se um pouco mais, que seja um empreendedor intelectual e almeje enriquecer seu aprendizado, esbarrará, possivelmente, no entrave financeiro para tais aquisições, por possuírem custos elevados para qualquer estudante oriundo das classes pertencentes à base da pirâmide social. Some-se a isso o fato de que os jovens pertencentes às camadas mais pobres da sociedade têm necessariamente que trabalhar, e que o custo com transporte e alimentação, somados, acarretam mais obstáculos à frequência desses jovens em sala de aula. Ter-se-ia igualdade de condições de permanência na faculdade?

Essas conjecturas e reflexões são importantes, pois facilitam a compreensão dos propósitos e dos princípios que regem a Educação Aberta e os Recursos Educacionais Abertos.

Para Amiel (2012, p. 18) “a barreira mais visível à educação é representada pelo limitado acesso à escola. No entanto, outros impedimentos se manifestam de maneiras mais sutis, trazendo à tona problemas inusitados.” Ainda segundo o autor:

> “O movimento para uma Educação Aberta é uma tentativa de buscar alternativas sustentáveis para algumas das barreiras evidentes no que tange ao direito de uma educação de qualidade. Nessa perspectiva, o conceito de "abertura" não é necessariamente dependente de desenvolvimentos tecnológicos, e antecede a popularização de dispositivos digitais, da internet e da web, mas pode ser fortalecida por novas mídias.” (Amiel, 2012, p. 18)

Segundo Amiel (2012, p. 19), acredita-se que a equidade de acesso e a liberdade de aprendizagem para todos são favorecidas quando se aumenta a variedade de oportunidades, e isto ocorre ao se incentivar práticas colaborativas e fazer uso de recursos abertos. Para sustentar tal argumento, o autor cita um trecho da Declaração da Cidade do Cabo, de 2007:

> Esse movimento emergente de educação combina a tradição de partilha de boas ideias com colegas educadores e da cultura da Internet, marcada pela colaboração e interatividade. Esta metodologia de educação é construída sobre a crença de que todos devem ter a liberdade de usar, personalizar, melhorar e redistribuir os recursos educacionais, sem restrições. Educadores, estudantes e outras pessoas que partilham esta crença estão unindo-se em um esforço mundial para tornar a educação mais acessível e mais eficaz. (DECLARAÇÃO DA CIDADE DO CABO, 2007, apud AMIEL, 2012, p. 19)

Torna-se, então, imprescindível definir-se o que seja Educação Aberta e Recursos Educacionais Abertos. Conforme Litto e Mattar (2017, p. 29) para se definir uma prática ou recurso educacional como abertos, há de se considerar qual definição de aberto se está utilizando, referindo-se a algumas características relativas esse conceito de abertura. Para os autores, são características associadas ao conceito de “abertura”: “acesso, transparência, livre e compartilhamento”.

Segundo Litto e Mattar (2017, p. 29), “aberto é frequentemente associado a um maior acesso aos recursos. Em particular, está associado ao livre acesso e ao impulso de “abrir” o meio acadêmico, publicando resultados de pesquisa em uma licença aberta.” O acesso a recursos, antes indisponíveis ao público, de modo que as pessoas não precisam pagar por sua utilização ou visualização, permite a multiplicação do número de pessoas envolvidas tanto no processo de estudo como de pesquisa e produção científica.

Também para Litto e Mattar (2017, p. 30), o conceito de abertura se relaciona “a uma maior transparência, por exemplo, em relação às próprias práticas ou dados de análises. Este é particularmente o caso quando se partilham dados, investigações e materiais com outros e, ao fazê-lo, permite-se o exame público de processos, resultados e afirmações.”

Ainda segundo os autores citados no parágrafo anterior:

> O termo “livre” é frequentemente usado em relação aos Recursos Educacionais Abertos (REAs). Mas o que significa “livre” no contexto de “aberto”? Conforme mencionado, aumentar o acesso aos recursos geralmente envolve a retirada da necessidade de pagar por um recurso no momento de utilização. Esse tipo nomeado como “livre” foi descrito no sentido

> de “grátis”, uma vez que o usuário não tem a cobrança de uma taxa para acessar ou usar o recurso. [...] Outro significado de *free* no contexto da abertura é “livremente”. Se um recurso é livre, não tem limitações na forma como você pode usá-lo. No contexto da educação aberta, isso se refere ao potencial de materiais licenciados abertamente para serem reutilizados.” (LITTO; MATTAR, 2017, p.30)

Uma implicação imediata da característica supracitada, e que conduz a próxima característica, é o fato de que os recursos podem ter seus acessos aumentados pelo livre compartilhamento, inclusive por meio de compartilhamento digital.

Furtado e Amiel (2019, p. 6), evidenciam que o termo aberto se relaciona ao conceito de Cultura Livre, que definem como “uma visão de mundo baseada na liberdade de usar, distribuir e modificar trabalhos e obras culturais, científicas e tecnológicas.” Segundo os autores:

> “O termo aberto, conhecido pelo inglês *open*, faz parte de movimentos que buscam reduzir barreiras de acesso e participação efetiva de todos nas diversas esferas da ação humana, incluindo a educação, a tecnologia e a ciência. Há um apreço pelo ato de compartilhar de forma livre, apoiado nas ideias de que nada nasce do zero, e de que as melhores propostas e soluções são criadas e aprimoradas de forma coletiva e colaborativa.” (FURTADO; AMIEL, 2019, p. 6)

De acordo com Furtado e Amiel (2019, p.6-7), com o advento da internet diversos movimentos surgiram ou se expandiram relacionados aos conceitos de abertura e de cultura livre. Destacando-se o movimento do Software Livre, que se baseia na liberdade para utilizar um programa, com código fonte publicado, como quiser e com qualquer finalidade, para estudá-lo e modificá-lo, para copiá-lo e redistribui-lo. Cita-se o movimento do Conhecimento Aberto, representado, por exemplo, pela *Wikipedia,* chamada de “a enciclopédia livre”, com conteúdos produzidos e editáveis por qualquer usuário com acesso à internet. Os autores citam, também, outros movimentos como a Ciência Aberta, “que trata da disponibilização aberta de processos e produtos de investigações científicas, como artigos acadêmicos, dissertações, teses e protocolos de experimentos”, e dos “Dados Abertos”, que trata da disponibilização de informação “para que qualquer pessoa possa livremente consultar, utilizar, reutilizar e redistribuir os dados criando análises, produtos e aplicações.”

Furtado e Amiel (2019, p. 8) afirmam que o conceito de Educação Aberta é amplo, permitindo várias interpretações, mas apresentam a definição mais usual, dada pelo Iniciativa Educação Aberta (um grupo de pesquisa ativista, com registro no CNPq e sediado na UnB):

> "Movimento histórico que busca atualizar princípios da educação progressista na cultura digital. Promove a equidade, a inclusão e a qualidade através de práticas pedagógicas abertas apoiadas na liberdade de criar, usar, combinar, alterar e redistribuir recursos educacionais de forma colaborativa. Incorpora tecnologias e formatos abertos, priorizando o software livre. Nesse contexto, prioriza a proteção dos direitos digitais incluindo o acesso à informação, a liberdade de expressão e o direito a privacidade." (FURTADO; AMIEL, 2019, p. 8)

Ressalta-se, ainda, de acordo com Furtado e Amiel (2019, p. 9), que a concepção de abertura na educação é anterior à cultura digital, ou cibercultura, tendo sido utilizando historicamente sempre com o propósito de superação dos obstáculos ao acesso à educação. E, conforme sustentam os autores, a Educação Aberta sustenta os princípios de uma educação democrática e progressista. Além disso, com o aumento da acessibilidade a internet e as TDIC´s, no contexto da cibercultura, o conceito de Educação Aberta está sendo atualizado, de modo a se pensar no favorecimento ao acesso a uma educação igualitária e de qualidade para todos.

Para Bates (2016, apud AMANTE; QUINTAS-MENDES, 2018, p. 58), "a aprendizagem aberta é, antes de mais nada, um objetivo ou uma política educacional, e sua característica essencial prende-se com a remoção de barreiras à aprendizagem."

Nesse contexto, conforme apontam Furtado e Amiel (2019, p. 9), "a Educação Aberta está diretamente relacionada às práticas que nos ajudam e repensar o conceito de autoria e promovem o protagonismo de professores e alunos; enfatiza a produção colaborativa e o conhecimento compartilhado, construído por distintas pessoas em torno de interesses comuns." Assim sendo, a Educação Aberta relaciona-se a um movimento de protagonismo na produção colaborativa, com a união de diversos segmentos sociais em torno do propósito do fomento e da partilha de conhecimentos, assumindo um viés de transformação social pelo acesso à educação.

Observa-se que proposta da Educação Aberta está presente na criação de cursos online gratuitos ou de acesso aberto, de canais de vídeo destinados a difusão de conhecimento, na criação de algumas plataformas de ensino, dentre outras.

> De maneira mais direta, podemos ver a Educação Aberta em ação na proliferação de plataformas, canais de vídeo, e cursos disponíveis online (alguns gratuitos, outros abertos); no crescente número de cursos não formais em formatos alternativos (círculos de aprendizagem, grupos de interesse, mentoria online, dentre outros), bem como na crescente ofertas de cursos formais em modelos híbridos, por exemplo. (FURTADO; AMIEL, 2019, p. 9)

Prosseguindo um pouco com a reflexão sobre as possibilidades provenientes do maior acesso as TDIC's e a internet, em relação ao conceito "aberto", trataremos de um tipo específico de recurso, que em algum grau está relacionado de maneira próxima ao conceito de Educação Aberta: os Recursos Educacionais Abertos (REAs).

Litto e Mattar (2017, p. 31) definem "recurso educacional" como "tudo que pode ser utilizado para ajudar no ensino ou na aprendizagem. Um vídeo que você usou em aula, um plano de aula, uma anotação, uma apresentação, um livro texto, capítulo de livro ou um modelo usado para ilustrar um exemplo…". Para os autores, basicamente qualquer recurso, não necessariamente digital, que possa ser utilizado como facilitador do processo de ensino ou aprendizagem, é um recurso ou objeto educacional. Os autores também fornecem uma definição de REA:

> Um recurso educacional aberto (REA) é um recurso que, pela licença que tem, informa explicitamente a permissão para uso sem a necessidade de pedir autorização ao autor. A permissão, dada por meio de uma licença aberta, indica como você pode reutilizar o recurso (por exemplo, se o autor apenas precisa ser atribuído, com indicação de crédito, se não pode usá-lo para fins comerciais ou se pode fazer alterações no material) e como você deve atribuí-lo. O REA não é necessariamente digital, mas aqueles que estão disponíveis online, por exemplo, por meio de repositórios, podem também permitir aos usuários remixar os recursos no próprio local. (LITTO; MATTAR, 2017, p. 31)

Conforme a definição da norma 1484 do Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos, IEEE, (2002, p. 3, apud TORI, 2022, p. 309), "um objeto de aprendizagem é definido como qualquer entidade, digital ou não, que possa ser usada para aprendizagem, educação ou treinamento". Tori (2022, p. 309), concordando com Wiley (2001), quando afirma que essa definição é demasiadamente ampla, posto que praticamente qualquer coisa possa ser enquadrada nela. Assim, define Tori (2022, p. 310): “objeto de aprendizagem é qualquer entidade, digital ou não, que possa ser referenciada e reutilizada em atividades de aprendizagem.” Segundo Wiley (apud LITTO; MATTAR, 2017, p. 32), o que qualifica um recurso educacional como aberto, é o fato de que se permita realizar cinco coisas com ele: “reter, reutilizar, revisar, remixar e redistribuir, conhecidos também como 5Rs”.

Tanto Tori (2022, p. 314), quanto Litto e Mattar (2017, p. 32), observam a definição dada pela UNESCO, segundo a qual os Recursos Educacionais Abertos são:

> “qualquer tipo de material educacional que esteja em domínio público ou seja apresentado com uma licença aberta. A natureza desses materiais abertos significa que qualquer pessoa pode, legal e livremente, copiar, usar, adaptar e recompartilhá-los. Os REAs abrangem de livros didáticos a programas de estudo, anotações, exercícios, testes, projetos, áudio, vídeo e animação.” (UNESCO, 2002, apud LITTO; MATTAR, 2017, p. 32)

Logo, como observa Tori (2022, p. 315), de acordo com as definições, nem todo recurso ou objeto de aprendizagem é um Recurso Educacional Aberto. Sendo que o fator diferenciador dos REA é a possibilidade de fazer modificações no recurso e compartilhá-lo. A utilização dos REA tem se tornado cada vez comum em todo o mundo, dado o fato de sua utilização promover a democratização de acesso à educação e a redução de custos com materiais didáticos.

Graças ao crescimento do acesso às TDICs, facilita-se a criação e compartilhamento de REA em formatos digitais. Como exemplos de REA em formato digital podemos citar: *e-books*, animações, simuladores, vídeos, apresentações, aplicativos, calculadoras, dentre tantos outros.

Consoante Furtado e Amiel (2019, p. 10) há dois pilares que sustentam o conceito de REA. O primeiro refere-se as licenças de uso que permitem flexibilidade e legalidade quanto a sua utilização e distribuição, enquanto o segundo concerne a abertura técnica, ou seja, a utilização de formatos que permitam sua fácil edição ou manipulação em vários aplicativos, de modo que os REA devem primar pela interoperabilidade técnica, o que é um fator facilitador para a sua utilização e reutilização. Observe-se que nesse caso, especificamente, trata-se de REA em formato digital.

Portanto, conforme evidenciado, a Educação Aberta e a utilização de REA se apresentam como meios da promoção da equidade de acesso a aprendizagem, da democratização deste acesso e da qualidade do ensino, por meio da criação de oportunidades de acesso ao conhecimento e da oferta livre de recursos educacionais criados colaborativamente, que podem ser adaptados, utilizados, readaptados, reutilizados, melhorados e distribuídos livremente, em um ciclo virtuoso, favorecendo a toda a sociedade, sobretudo às classes sociais menos favorecidas economicamente.

4.3. Práticas Educacionais Abertas (PEA) e os Cursos Abertos Massivos Online (MOOCs).

A escola nunca foi a detentora da hegemonia como *locus* de aprendizagem, posto que o ser humano é capaz de aprender em qualquer local ou situação, todavia, no que diz respeito à aprendizagem formal, durante séculos pertenceu a escola, como conhecemos hoje, aqui incluindo as instituições de nível superior, o papel de ser o ambiente central de aprendizagem acadêmica.

Historicamente, a escola, em sua ação, idelogicamente orientada segundo os pensamentos dominantes em cada época, na busca de cumprir a missão de ser *locus* de aprendizagem formal, encontrou por vezes a contestação de quem compreendia a necessidade de mudança para que o ato de ensinar fosse mais igualitário e a aprendizagem fosse mais democrática e significativa. Assim o fez, por exemplo, Paulo Freire, que na obra Pedagogia do Oprimido (1970) caracteriza a educação brasileira da época com o termo “educação bancária”.

> “Desta maneira, a educação se torna um ato de depositar, em que os educandos são os depositários e o educador o depositante. Em lugar de comunicar-se, o educador faz “comunicados” e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis aí a concepção “bancária” da educação, em que a única margem de ação que se

> oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los. Margem para serem colecionadores ou fichadores das coisas que arquivam. No fundo, porém, os grandes arquivados são os homens, nesta (na melhor das hipóteses) equivocada concepção bancária" da educação. Arquivados, porque, fora da busca, fora da práxis, os homens não podem ser. Educador e educandos se arquivam na medida em que, nesta destorcida visão da educação, não há criatividade, não há transformação, não há saber. Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros. Busca esperançosa também. Na visão "bancária" da educação, o "saber" é uma doação dos que se julgam sábios aos que julgam nada saber. Doação que se funda numa das manifestações instrumentais da ideologia da opressão – a absolutização da ignorância, que constitui o que chamamos de alienação da ignorância, segundo a qual esta se encontra sempre no outro. O educador, que aliena a ignorância, se mantém em posições fixas, invariáveis. Será sempre o que sabe, enquanto os educandos serão sempre os que não sabem. A rigidez destas posições nega a educação e o conhecimento como processos de busca." (FREIRE, 1987, p. 36-37)

Desse modo, aponta-se que as demandas sociais de cada época exigem reflexão sobre a educação, a escola, as metodologias pedagógicas e as necessidades de aprendizagem, e exigem a adaptação dos educadores e da sociedade em geral à realidade e as demandas sociais de cada período histórico, bem como a coragem para mudar concepções, para reinventar metodologias, para agir e tornar a aprendizagem mais acessível, democrática e significativa, por meio de uma educação focada na necessidade humana e não, "de forma bancária", no processo pelo processo ou na preservação de desigualdades favorecedoras de poucos privilegiados.

Como já discutido, as novas tecnologias, as TDICs, as novas mídias digitais, ampliam a facilidade de produção e compartilhamento de recursos educacionais. Logo, praticamente qualquer pessoa pode produzir um bem cultural (música, livro, texto, software, vídeo...) utilizável como recurso educacional e, nesse contexto, os REA são muito bem-vindos para o favorecimento do acesso e da democratização da aprendizagem. Há um fortalecimento da EAD e das chamadas Práticas Educacionais Abertas (PEA) como caminhos para a superação de barreiras, como a geográfica, a financeira e a temporal, quando a distância das instituições de ensino, a falta de recursos financeiros ou a disponibilidade de tempo são empecilhos ao estudo presencial.

No presente século, ao se pensar educação e aprendizagem, não se pode conceber apenas a reprodução de conhecimento, mas primordialmente a produção, a criação, de conhecimentos e saberes significativos para os sujeitos envolvidos nos processos de ensino-aprendizagem. É desejável que nas escolas e nas universidades se incentive o trabalho, a reflexão e a produção colaborativa tanto do conhecimento, quanto de REA e se busquem maneiras de aplicar tais recursos de maneira prática.

Sendo assim, é nesse contexto que surge, em torno da criação, utilização, compartilhamento e gestão de REA, o conceito relativamente de novo de Práticas Educacionais Abertas (PEA). Para Cardoso (2013, apud AMANTE; QUINTAS-MENDES, 2018, p. 60): “As Práticas Educacionais Abertas afiguram-se como práticas colaborativas, com base na partilha de recursos no contexto de práticas pedagógicas por sua vez centradas na interação social, criação de conhecimento, aprendizagem com os pares e práticas de aprendizagem partilhadas”.

Litto e Mattar (2017, p. 33) afirmam que apesar de não haver uma definição formalizada de PEA, as definições apresentadas por alguns autores ajudam a compreender o que são tais práticas e a diferenciá-las de REA. Apresentam, então, a definição de PEA, dada por Conole (2010), como sendo “[...] o conjunto de atividades e suporte em torno da criação, uso e reutilização de Recursos Educacionais Abertos e suas dimensões *contextuais* associadas”. Observam ainda que Ehlers e Conole (2010), considerando os aspectos colaborativos da prática aberta e os motivos sociais de utilizá-las, ao definirem que: “As Práticas Educativas Abertas (PEA) representam o uso de recursos educacionais abertos com o objetivo de melhorar a qualidade dos processos educacionais e inovar os ambientes educacionais”. Os autores citam ainda a definição utilizada pelo projeto *Opening Educational Practices in Scotland*:

> Consideramos que práticas educativas abertas são aquelas práticas educativas que se preocupam e promovem a equidade e o acesso. Nossa compreensão de “aberta” baseia-se nas liberdades associadas aos 5Rs do REA, promovendo um amplo senso de abertura, enfatizando a justiça social e desenvolvendo práticas que abrem oportunidades para o que ficou distante da educação. (OEPS, apud LITTO; MATTAR, 2017, p. 33)

A iniciativa, por pessoas e instituições, de buscar ofertar alternativas novas e variadas de aprendizagem, utilizando os REA, a partir da noção de PEA, objetivando a promoção da equidade de acesso à educação, confere a Educação Aberta Online um papel extremamente relevante socialmente.

Alcântara e Silva (2018, p. 51) enfatizam como a Educação Aberta Online flexibiliza os processos de ensino e de aprendizagem, conferindo ao estudante autonomia e liberdade em relação ao que aprender.

> Liberdade do estudante decidir onde estudar; possibilidade de se estudar por módulos, de forma compatível com o ritmo e as circunstâncias do aluno; autoinstrução e certificação opcional; isenção de taxas de matrícula; isenção de vestibular ou apresentação de qualificação prévia; acessibilidade para alunos portadores de necessidades especiais e em situação de desvantagem social; provisão de REA na educação formal e informal. (PESCE, 2013, p. 201, apud ALCÂNTARA; SILVA, 2018, p. 51).

Conforme citam Amante e Quintas-Mendes:

> “A aprendizagem aberta é, antes de mais, um objetivo ou uma política educacional, e sua característica essencial prende-se com a remoção de barreiras à aprendizagem. Considera que a aprendizagem aberta tem implicações particulares no uso da tecnologia, no entanto, a abertura na sua forma mais pura é raramente encontrada. Nenhum sistema de ensino é completamente aberto, requerendo sempre um mínimo de literacia, que permita aceder-lhe.” (BATES, 2016, apud AMANTE; QUINTAS-MENDES, 2018, p. 58)

Amante e Quintas-Mendes (2018), ainda, observam como Bates (2016) caracteriza várias vertentes da educação aberta:

> “a) educação para todos, no sentido da gratuitidade ou do baixo custo da formação; b) acesso aberto a programas, oferecidos regra geral por universidades abertas e que permitem qualificações plenas; c) acesso aberto a cursos ou programas que não são de crédito formal, como o caso dos MOOCs (Massive Open Online Courses); d) recursos educacionais abertos, utilizados por docentes e estudantes de modo gratuito; e) livros abertos, livros didáticos disponibilizados livremente aos alunos; f) pesquisa aberta, relacionada com a disponibilização online de trabalhos de pesquisa, para download livre e g) dados abertos, ou seja, disponibilização de dados que podem ser utilizados, reutilizados e redistribuídos, sem restrições.” (BATES, 2016, apud AMANTE; QUINTAS-MENDES, 2018, p. 58)

Relacionando a ideia de abertura, considerados os REA e a Aprendizagem Aberta, surgem, então iniciativas de aplicação prática, como é o caso dos Cursos Abertos Massivos Online, também conhecidos pela sigla MOOCs, oriunda da denominação em língua inglesa *Massive Open Online Courses*.

Desse modo, as TDICs associadas a EAD favorecem a liberdade, a democratização e inclusão social por meio da educação, em um processo que não se limita apenas a EAD convencional, mas permitindo o acesso a aprendizagem a distância mesmo fora dos ambientes formais de educação. Como exemplo dessa aprendizagem em ambiente não formal, tem-se os MOOCs, que se apresentam como boas opções para a aprendizagem online.

Tomando por base McAuley et al. (2010), Farias (2017, p. 12) apresenta um MOOC como:

> “um curso online com a opção de registo gratuito e aberto, um currículo partilhado publicamente, e com resultados finais em aberto. MOOCs integram as redes sociais e com recursos acessíveis online. Mais significativamente, MOOCs são baseados no ajuste dos estudantes que autoorganizam a sua participação de acordo com os objetivos de aprendizagem, conhecimento prévio, habilidades e interesses em comum.” (FARIAS, 2017, p. 12)

Assim sendo, o que se entende por MOOCs, são cursos, em geral de ótima qualidade, disponibilizados de forma online, de acesso aberto e gratuito, sem restrições a sexo, escolaridade, condição social, nacionalidade ou naturalidade, idade, ou de qualquer outro tipo, e que são ofertados de forma massiva, ou seja, sem restrições de quantidade de cursistas.

De acordo com o que apresenta Farias (2017, p. 13), descrevem-se, a seguir, as características de um MOOC, ou Curso Aberto Massivo Online:

- Curso: de modo geral são estruturados com uma carga horária e conteúdos relativos a uma unidade de estudo específica;
- Aberto: o sentido de abertura, aqui, assume diversas dimensões;
  - primeiramente, o curso poderá ser realizado de forma gratuita, sem quaisquer custos financeiros para os participantes;
  - de igual modo, o curso é livre para que qualquer pessoa o possa realizar, de qualquer lugar, necessitando apenas de acesso à internet (observa-se que em alguns casos específicos, poderão surgir algumas limitações, como, por exemplo, de idade, dada pela natureza dos conteúdos);
  - a abertura também se dá em função da liberdade de tempo e espaço, dado o fato destes cursos não terem necessariamente datas de início e fim fixadas, entretanto, caso haja, os conteúdos permanecem disponíveis, e podem ser acessados de qualquer lugar, quando se queira;

    - e, finalmente, o sentido de aberto se dá, também, pelo fato de não se exigirem qualificações de ingresso.
- Massivo: é idealizado para oferta em massa, isto é, para muitos cursistas.
- Online: é disponibilizado integralmente de forma online.

Uma premissa básica nos MOOCs é obter qualidade similar à de um curso presencial, entretanto, possibilitando a liberdade do estudo remoto por meio de sua oferta online para o maior número de pessoas possível.

Como visto, segundo os autores pesquisados, MOOCs tem sua origem nos princípios da educação aberta, podendo fazer uso dos REAs, com vistas a aplicação cooperativa das tecnologias para ofertar uma opção de aprendizagem online, e assim, promover a democratização de acesso ao conhecimento gerando equidade social.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme observado, no Brasil há enorme desigualdade em relação ao acesso à educação, o que se associa aos indicadores educacionais que denotam o baixo nível de aprendizagem de modo geral. As desigualdades de acesso à educação e os déficits de aprendizagem dos estudantes foram asseverados graças a pandemia de Covid-19. Segundo Soares e Milan (2022, p. 84), é constatado que, tanto no exterior quanto no Brasil, que “as perdas de aprendizagem identificadas (SEDUC-SP, 2022) já são uma realidade comprovada por pesquisadores e órgãos internacionais”.

Dartora, Garcia e Silva Filho (2022, p. 113), ressaltam o retrocesso na educação, de um modo geral, após o período da pandemia de Covid-19, fato demonstrado pelos dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio (PNAD) mais recente, citando-se o aumento da evasão escolar de 1,3 milhão para 4 milhões de crianças e adolescentes durante a pandemia. Ainda segundo os autores, embora tenham sido envidados enormes esforços no período de isolamento social, com aulas remotas e estudo domiciliar, observa-se que “algumas habilidades não foram completamente consolidadas”, apontando o fato de existir lacunas de aprendizado.

> “Os impactos da pandemia no ambiente doméstico, na escola e nas relações sociais, além das barreiras ao processo de aprendizagem são alguns dos pontos que mostram o quão difícil foi esse período, com real e significativo retrocesso no ensino.” (DATASENADO, 2022, p. online, apud DARTORA; GARCIA; SILVA FILHO, 2022, p. 114)

Ainda segundo Dartora, Garcia e Silva Filho (2022, p. 119), os déficits de aprendizagem derivados desse período exigem maior atenção dos professores para buscar a recomposição de saberes necessários para o pleno desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes.

A partir da observação dessa realidade, surge a reflexão de como poderia o autor deste trabalho contribuir, para além dos muros escolares, com a superação da defasagem de aprendizagem escolar de tantos jovens pelo país e, assim, de certo modo, retribuir de maneira prática o crescimento em conhecimento propiciado pelo PROFMAT.

Considerando-se, então, de acordo com Abarscio et al (2021, p. 106), que "o processo educacional não acontece apenas em espaços formais, mas acontece a todo instante, incluindo o ambiente virtual das redes sociais, ocorrendo o que se denomina educação aberta".

Ainda, segundo se depreende de Abarscio et al, que a Educação Aberta Online possui esse papel de romper barreiras e facilitar o acesso ao estudo. Citando-se que a Educação Aberta:

> "Permite que as pessoas aprendam no horário, lugar e ritmo que satisfaçam suas necessidades e circunstâncias (MANPOWER SERVICES COMMISSION, 1984); que não deve haver exigências mínimas de qualificação para a entrada do aluno (BAILEY, 1987) ou ainda que estudantes em sistemas abertos de educação devem escolher quando, o que e como querem aprender (Cunningham, 1987)." (Santos, 2009, p. 290, apud ABARSCIO et al, 2021, p. 106)

Ao se considerar que, primeiramente, a internet propicia a oportunidade de acesso e aprendizagem à distância, com a superação de diversos obstáculos, conferindo àquele que faz uso desse sistema midiático para estudo a autonomia de gestão de tempo, evitando deslocamentos e outros custos onerosos, e ainda que a produção de material aberto, passível de disponibilização online e reprodução por estudantes e por professores, configurando-se como um REA, bem como, observando-se as características inerentes de um MOOC, resolve-se produzir um curso com tais características.

Assim sendo, nas TDIC's e na Educação Aberta Online, por meio de um MOOC, encontra-se uma possibilidade de ação concreta de fornecer um meio para que estudantes possam sanar algumas carências de aprendizagem matemática.

Dentre os tantos temas possíveis, observa-se no currículo do Ensino Médio e opta-se por se construir um curso, em formato MOOC, que ficará disponível no Portal de Curso Abertos (PoCA) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), com o tema; "Funções Exponenciais e Logarítmicas". Para a escolha do tema do curso, foram levados em consideração os conteúdos que compõe o currículo de Matemática do Ensino Médio, buscando-se um no qual o autor percebia, em sua experiência cotidiana em sala de aula, maior nível de dificuldade de aprendizagem e necessidade de oferta de complementação ao que costumeiramente é trabalhado em sala de aula, considerando-se igualmente a perspectiva dos coautores do curso, os professores Erica Boizan Batista e Valdinês Leite de Sousa Júnior, que identificaram, também em uma perspectiva de suas experiências na docência do Ensino Superior, que muitos estudantes que ingressam na faculdade demonstram dificuldades com as funções exponenciais e logarítmicas.

Ressalta-se que, apesar de não se ter tomado uma análise técnica para definição do tema do curso, observa-se que os conteúdos abordados são de extrema relevância e estão entre alguns dos quais muitos estudantes apresentam dificuldades (esta segunda observação é realizada com base na experiência docente do autor).

Considero, ainda, concordantemente com Eves (2004), a imensa relevância matemática e histórica do estudo dos logaritmos, bem como da própria operação de potenciação, posto que a invenção dos logaritmos por John Napier (1551-1617) proporcionou à humanidade um significativo avanço científico, ao estabelecer alicerces matemáticos através do, como denomina Eves (2004, p. 342), "poder dos logaritmos como instrumento de cálculo", já que vieram a transformar custosas divisões e multiplicações em subtrações e adições. E, embora, graças ao invento das máquinas de calcular e computadores, ferramentas como as tábuas de logaritmos esteja em desuso, o aprendizado das Funções Exponenciais e Logarítmicas é indispensável.

> "A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática." (EVES, 2004, p. 247)

De tal maneira, arremata-se com o anseio esperançoso de que a produção e disponibilização do curso elaborado possam contribuir para a superação de desigualdades de acesso a ferramentas educacionais e favorecer para que estudantes exerçam de forma autônoma este significativo ato de cidadania que consiste em aprender.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABARSCIO, A. L. Fernandes, et al. **Educação Aberta e o Direito Fundamental a Saúde em uma Sociedade Capitalista:** um estudo documental nas redes sociais em tempos de coronavírus. In: TERÇARIOL, Adriana Aparecida de Lima (org.); IKESHOJI, Elisangela Aparecida Bulla (org.); EVARISTO, Ingrid Santella (org.); GITAHY, Raquel Rosan Christino (org.). **O (re)inventar de práticas pedagógicas com as tecnologias digitais em tempos de pandemia:** da Educação Básica ao Ensino Superior. Jundiaí: Paco e Littera, Edição do Kindle, 2021.

ALCANTARA, Fabiana Silva de Paula; SILVA, Karina Huf dos Reis Zachias Soares da. **Objetos Educacionais Digitais e Recursos Educacionais Abertos:** um estudo teórico sobre o novo leitor. Revista Versalete. Curitiba, Vol. 6, nº 11, p. (40-56), jul.-dez., 2018. Disponível em: <http://www.revistaversalete.ufpr.br/edicoes/vol06-11/3.PAULA.%20Fabiana.%20HUF.%20Karina.%20Objetos%20Educacionais.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2023.

ALVES, Lucineia. **Educação a distância: conceitos e história no Brasil e no mundo.** In: ABED, Associação Brasileira de Educação a Distância. **Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância**. V.10. São Paulo, ABED, 2011. Disponível em: <http://www.abed.org.br/revistacientifica/Revista_PDF_Doc/2011/Artigo_07.pdf Acesso em: 01 jun. 2023.

AMANTE, Lúcia; QUINTAS-MENDES, António. **Educação a distância, educação aberta e inclusão** - dos modelos transmissivos às práticas abertas. In: Revista PBCIB: Pesquisa Brasileira em Ciência da Informação e Biblioteconomia. v.13. n.2, p.49-65, jul./dez. João Pessoa: UFPB, 2018. Disponível em:< http://revista.ibict.br/inclusao/article/view/4172/3643>. Acesso em: 12 mai. 2023.

AMIEL, Tel. **Educação aberta:** configurando ambientes, práticas e recursos educacionais. In: SANTANA, Bianca (org.); ROSSINI, Carolina (org.); PRETTO, Nelson De Lucca (org.). Recursos Educacionais Abertos: práticas colaborativas políticas públicas. 1. ed., 1 imp. São Paulo: Casa da Cultura Digital, 2012.

BEHAR, Patrícia Alejandra. **Modelos pedagógicos e educação a distância.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações determinadas pelas Emendas Constitucionais de Revisão nos 1 a 6/94, pelas Emendas Constitucionais nos 1/92 a 91/2016 e pelo Decreto Legislativo no 186/2008. – Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2016. Disponível em: < https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2023.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF 1998.

CASTELLS, Manuel. **A Galáxia da Internet:** reflexões sobre a internet, os negócios e a sociedade. Tradução: BORGES, Maria Luiza X. de A. Rio de Janeiro, Zahar, 2023.

COSTA Jr., Hélio Lemes. **Tempos Digitais:** Ensinando e Aprendendo com Tecnologia. Porto Velho: EDUFRO, Edição do Kindle, 2012.

COSTA, Adriano Ribeiro da. **A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA NO BRASIL: Concepções, histórico e bases legais.** In: Revista Científica da FASETE. V. 11, n. 12, p. 59-74. Paulo Afonso, UNIRIOS, 2017. Disponível em: < https://www.publicacoes.unirios.edu.br/index.php/revistarios/article/view/471>. Acesso em: 24 abr. 2022.

COTTA, Alceu Júnior. **Novas Tecnologias Educacionais No Ensino de Matemática**: estudo de caso - Logo e do Cabri-Géomètre. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, 2002.

Dados de aprendizagem (Pisa): percentual de alunos com aprendizado adequado. **QEdu Países**. Disponível em: < https://paises.qedu.org.br/dados-de-aprendizagem/>. Acesso em: 12 out. 2022.

DARTORA, Luiza Pereira; GARCIA, Érica Bohn; SILVA FILHO, Jorge Costa. **Ensino de Matemática em Tempos Pós-Pandemia**. In: ANDRÉ, Claudio (org.); SANTOS, Dayene Ferreira dos (org.); SILVA FILHO, Jorge Costa (org.); DARTORA, Luiza Pereira (org.). **Educação, Inclusão e Tecnologia:** práticas, perspectivas e reflexões. RIAC: Edição do Kindle, 2022.

Educação no Século XXI - Volume 31 – Tecnologias/ Organização: Editora Poisson. Belo Horizonte; Poisson, 2019.

Evasão escolar e o abandono: um guia para entender esses conceitos. Observatório de Educação, Ensino Médio e Gestão. Instituto Unibanco. Disponível em: <https://observatoriodeeducacao.institutounibanco.org.br/em-debate/abandono-evasaoescolar/?gclid=Cj0KCQjwmZejBhC_ARIsAGhCqnf1BIB7byjuf1xLuZQy7dvR3AOChM24eVTt1ElRm5gjK1TDZTfcwwgaArD8EALw_wcB>. Acesso em: 18 mai. 2023.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

FANHANI, Ivone de Oliveira Moura; SABADIN, Marlene Neri. **Celular: Um Desafio Pedagógico em Sala de Aula.** In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE**, 2014. Curitiba: SEED/PR, p. 7–18, 2016. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unioeste_lem_artigo_ivone_de_oliveira_moura_fanhani.pdf. Acesso em 24/04/2023. ISBN 978-85-8015-080-3. Acesso em: 03 jun. 2023.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido.** 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FURTADO, Débora; AMIEL, Tel. **Guia de bolso da educação aberta**. Brasília: Iniciativa Educação Aberta, 2019.

GARCIA, Daniela Nogueira de Moraes. **Perspectivas educacionais e novas demandas:** contribuições da telecolaboração. São Paulo: Cultura Acadêmica -Editora UNESP, 2020. Edição do Kindle, 2022.

GONÇALVES, Rafaela. Após pandemia, aprendizado no Brasil piora em todos os níveis escolares. **Correio Brasiliense**, 17/09/2022. Acesso em 18/05/2023. Disponível em: <https://www.correiobraziliense.com.br/brasil/2022/09/5037496-apos-pandemia-aprendizado-no-brasil-piora-em-todos-os-niveis-escolares.html > Acesso em: 10 jun. 2023.

HACK, Josias Ricardo. **Introdução à Educação a Distância.** Florianópolis: LLV/CCE/UFSC, 2011.

JOHNSON, Steven. **Cultura da interface:** Como o computador transforma nossa maneira de criar e comunicar. Rio de Janeiro; Jorge Zahar Ed., 2001.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 1999.

LITTO, Fredric M.; MATTAR, João. **Educação aberta online:** pesquisar, remixar e compartilhar. 1. ed. São Paulo: Artesanato Educacional, 2017.

LLANO, José Gregório de; ADRIÁN, Mariella. **A Informática Educativa na Escola.** São Paulo: Edições Loyola, 2006.

MACHADO, Gláucio José Couri. **Educação e Ciberespaço:** estudos, propostas e desafios. Aracaju: Virtus, 2010a.

MACHADO, Gláucio José Couri. **Onde Estou?** A presença social nos ambientes virtuais de aprendizagem. Mogi Mirim: Ixtlan, 2010b.

MAYARA, Jéssika. **Brasileiros têm mais acesso à internet, TV e smartphone**. Estado de Minas, 15/04/2021. Disponível em:< https://www.em.com.br/app/noticia/tecnologia/2021/04/15/interna_tecnologia,1257304/brasileiros-tem-mais-acesso-a-internet-tv-e-smartphone-confira.shtml>. Acesso em: 18 mai. 2023.

MEDEIROS NETO, Benedito. **O Cidadão Contemporâneo Frente às Tecnologias da Informação e Comunicação**. 2. ed. Brasília: FAC-UnB, 2017.

NASCIMENTO, João Kerginaldo Firmino do. **Informática aplicada à educação**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS - ONU. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**, 1948. Disponível em: < https://desinstitute.org.br/noticias/declaracao-universal-dos-direitos-humanos-como-surgiu-e-o-que-defende/?gclid=Cj0KCQjw9deiBhC1ARIsAHLjR2C-Ooal1yNVbs5MnvHJGBGfl6cjRWqVif1IBUbUEYrsWZp7-LyKAkYaArE3EALw_wcB>. Acesso em: 12 out. 2022. Acesso em: 05 jun. 2023

SALGADO, Maria Umbelina Caiafa; AMARAL, Ana Lúcia. **Tecnologias da Educação:** ensinando e aprendendo com as TIC: guia do cursista**.** Brasília: Ministério da Educação, Secretária da Educação à Distância, 2008.

SANTOS, Katia Ethiénne Esteves dos; TORRES, Patricia Lupion. **Protagonismo e EAD, isso é possível?** In: CIAED – Congresso Internacional ABED de Educação a Distância: EAD e a Internacionalização do Trabalho no Brasil, n. 20. Curitiba, ABED, 2014. Disponível em: < http://www.abed.org.br/hotsite/20-ciaed/pt/anais/pdf/189.pdf >. Acesso em: 30 mai. 2023.

SILVA, Carlos Alberto. **Educação Digital:** transformações e entraves. Oliveira: Edição do Kindle, 2017.

SILVA, Clecio Souto da. **AVA – Motivando e Ensinando a Matemática em Rede:** Educação a Distância, Ambiente Virtual de Aprendizagem, Motivação. São Paulo: Amazon.com, 2014.

SILVA, Marco. **Internet na Escola e Inclusão**. In: ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de (org); MORAN, José Manuel (org). **Integração das Tecnologias na Educação:** salto para o futuro. Brasília: SEED/MEC, 2005.

SILVEIRA, Rosemari Monteiro Castilho Foggiatto; BAZZO, Walter. **Ciência, tecnologia e suas relações sociais:** a percepção de geradores de tecnologia e suas implicações na educação tecnológica. Ciência & Educação, v. 15, n.3, p. 681– 694, 2009.

SOARES, Ana Lydia; MILAN, Davi. **Educação e Saúde Mental Infantil no Período Pandêmico da Covid-19:** uma revisão integrativa. In: ANDRÉ, Claudio (org.); SANTOS, Dayene Ferreira dos (org.); SILVA FILHO, Jorge Costa (org.); DARTORA, Luiza Pereira (org.). **Educação, Inclusão e Tecnologia:** práticas, perspectivas e reflexões. RIAC, Edição do Kindle, 2022.

TORI, Romero. **Educação sem Distância:** Mídias e Tecnologias na Educação a Distância, no Ensino Híbrido e na Sala de Aula**.** 3. ed. São Paulo: Artesanato Educacional, 2022.

UNICEF. **Cenário da Exclusão Escolar no Brasil:** Um alerta sobre os impactos da pandemia da COVID-19 na Educação. CENPEC Educação, 2021.

VALENTE, José Armando (org.). **Computador e conhecimento:** repensando a educação. 2 ed. Campinas, UNICAMP/NIED, 1998.

VALENTE, José Armando (org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas, UNICAMP/NIED, 1999.

VALENTE, José Armando. **Informática na educação:** conformar ou transformar a escola. Revista Perspectiva. Florianopólis: UFSC/CED, NUP, n. 24, p. 41– 49, 2006.

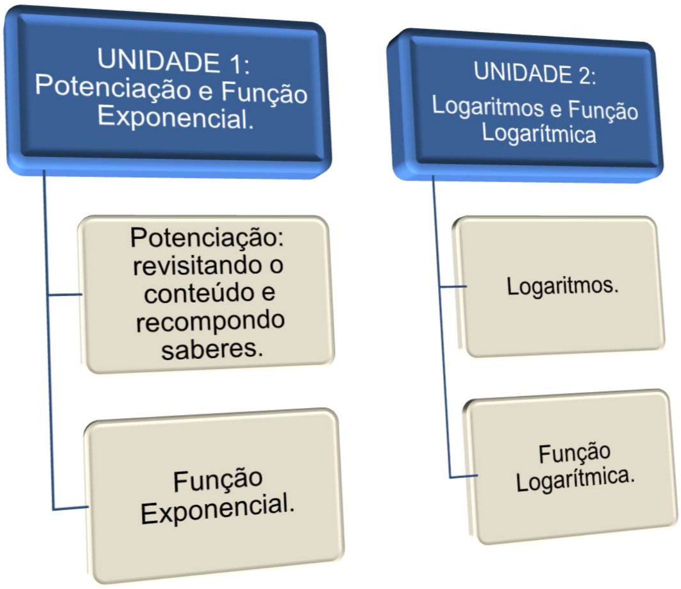
VILAÇA, Márcio Luiz Corrêa (org.); ARAUJO, Elaine Vasquez Ferreira de (org.). **Tecnologia, Sociedade e Educação na Era Digital.** Duque de Caxias: UNIGRANRIO, 2016.

APÊNDICES:

Encontram-se anexados, a partir da página subsequente, todos os materiais escritos do MOOC Funções Exponenciais e Logarítmicas, elaborado neste trabalho acadêmico e que será disponibilizado integralmente no Portal de Cursos Abertos, PoCA, da Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR.

No diagrama a seguir encontra-se a divisão das unidades do curso, que norteia a distribuição do conteúdo nos slides e na apostila, respectivamente, apresentados nas páginas subsequentes.

Unidades do MOOC Funções Exponenciais e Logarítimicas.



O curso e todo o seu material poderá ser encontrado no Poca, através do sítio https://poca.ufscar.br/.

A. Slides do Curso

Funções Exponenciais e Logarítmicas

1. Potenciação e Função Exponencial
1.1. Potenciação: revisitando o conteúdo e recompondo saberes.

Professores:
Anízio Noronha Menezes Neto
Erica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

PoCA Portal de Cursos Abertos
SEaD
UFSCar

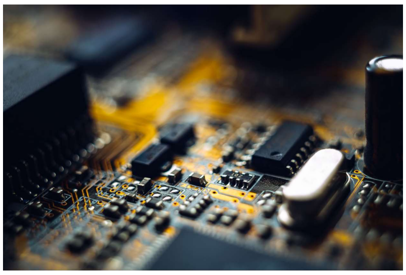
TÓPICOS

- Potência de expoente natural.
- Potência de expoente inteiro negativo.
- Raiz enésima aritmética.
- Potência de expoente racional.
- Potência de expoente irracional.
- Potência de expoente real.

PoCA Portal de Cursos Abertos
SEaD
UFSCar

POTENCIAÇÃO

Em 1965, Gordon Moore fez uma previsão que ficou conhecida como a Lei de Moore, que afirma, em determinada área, que o número de transistores de um microprocessador dobraria a cada dois anos. O avanço das tecnologias da informática têm comprovado essa afirmação.
O conhecimento matemático, nesse caso sobretudo das Funções Exponenciais, permite compreender e projetar a evolução de dispositivos tecnológicos, e diversas outras situações.



Microprocessadores (imagem do estoque do MS Office).

Potência de expoente natural.

Definição:
Sejam $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $p \in \mathbb{N}$, denomina-se potência de base a e expoente p, ao número a^p, definido por:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^p = a \cdot a^{p-1}, \forall\, p \geq 1. \end{cases}$$

Assim, temos, em decorrência da definição acima que:

$$a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a$$
$$\vdots$$
$$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{p vezes}}$$

Assim sendo, para todo $p \in \mathbb{N}$, com $p \geq 2$, temos que a^p é igual a um produto de p fatores iguais a a.

Exemplos:

a) $(-15)^0 = 1$

b) $3^1 = 3$

c) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, com $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$, sendo $a \neq 0$ ou q $\neq 0$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$.

Exemplos:
a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$, com $a \neq 0$ e $p \geq q$.

Exemplos:
a) $\frac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

b) $\frac{(-2)^{10}}{(-2)^8} = (-2)^{10-8} = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

3ª Propriedade: $\boldsymbol{(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p}$, com $b \neq 0$ ou $p \neq 0$.

Exemplos:
a) $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot \sqrt{5}^2 = 9 \cdot 5 = 45$

b) $[(-2) \cdot 0{,}5]^3 = (-2)^3 \cdot 0{,}5^3 = -8 \cdot 0{,}125 = -1$

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$, com $b \neq 0$.

Exemplos:
a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

b) $\left(\frac{-4}{5}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{5^3} = \frac{-64}{125} = -\frac{64}{125}$

5ª Propriedade: $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$.

Exemplos:
a) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

b) $\left((-10)^2\right)^5 = (-10)^{10} = 10.000.000.000$

Exercício resolvido:
Considerando $a.b \neq 0$, simplifique as expressões a seguir.

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3$

c) $\left(\frac{a^3 \cdot b^4}{a^2 \cdot b^2}\right)^3$

d) $\frac{(a^2 \cdot b^5)^3 \cdot (a^{12} \cdot b^{10})}{a^{14} \cdot b^8}$

Resolução:

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3 = (a^{2\cdot2} \cdot b^{5\cdot2}) \cdot (a^{3\cdot3} \cdot b^{7\cdot3}) = a^4 \cdot b^{10} \cdot a^9 \cdot b^{21} = a^{4+9} \cdot b^{10+2} = a^{13} \cdot b^{31}$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3 = (a^3 \cdot b^4)^{2.3} = (a^3 \cdot b^4)^6 = a^{3.6} \cdot b^{4.6} = a^{18} \cdot b^{24}$

c) $\left(\frac{a^3 b^4}{a^2 b^2}\right)^3 = (a^{3-2} \cdot b^{4-2})^3 = (a \cdot b^2)^3 = a^{1\cdot3} \cdot b^{2\cdot3} = a^3 \cdot b^6$

d) $\frac{(a^2 b^5)^3 \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{(a^{2.3} b^{5.3}) \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{a^6 b^{15} a^{12} b^{10}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{6+12} b^{15+1}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{18} b^{25}}{a^{14} b^8} = a^{18-1}\ b^{25-8} = a^4 b^{17}$

Observação:

Pela definição da potência a^p, como $a \in \mathbb{R}$, há as seguintes possibilidades: $a > 0$, $a = 0$, ou, $a < 0$.

Portanto, vamos considerar a seguir o que ocorre em cada caso:

1º Caso: $a > 0$**.**
Se $a > 0$, então $a^p > 0, \forall\, p \in \mathbb{N}$.
Ou seja, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real maior que zero.

2º Caso: $a = 0$**.**
Se $a = 0$, então $0^p = 0, \forall\, p \geq 1,\ p \in \mathbb{N}$.
Observe que se $p = 0$, teremos 0^0, o que é uma indeterminação. E, de modo análogo, se p for negativo.

3º Caso: $a < 0$**.**

Se $a < 0$, então $\begin{cases} a^{2p} > 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \\ a^{2p+1} < 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ou seja, caso a base seja um real negativo, a potência será um real positivo se o expoente for par, e será um real negativo se o expoente for ímpar.

Potência de expoente inteiro negativo

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência de base a e expoente inteiro negativo $-n$ como o inverso da potência a^n. Ou seja, é válida a relação:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Exemplos:

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Propriedades:

Dada a definição anterior, de potência com expoente inteiro negativo, é importante observar que, se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, não se define 0^{-n}.

Se $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;

Exemplo:

$$3^{-1} \cdot 3^{-2} = 3^{-1+(-2)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

2ª Propriedade: $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;

Exemplo:

$$\frac{2^3}{2^{-2}} = 2^{3-(-2)} = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

3ª Propriedade: $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$;

Exemplo:

$$(3\sqrt{5})^{-2} = 3^{-2} \cdot (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$$

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$;

Exemplo:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{5^{-2}} = \frac{1}{4^2} : \frac{1}{5^2} = \frac{1}{16} : \frac{1}{25} = \frac{1}{16} \cdot \frac{25}{1} = \frac{25}{16}$$

5ª Propriedade: $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$.

Exemplo:

$$(10^2)^{-2} = 10^{2 \cdot (-2)} = 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$$

PoCA Portal de Cursos Abertos SEaD UFSC

Raiz enésima aritmética

Definição:

Consideremos um número real $a \geq 0$ e um natural n, com $n \geq 1$, existe um único real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.
Chamaremos o número b de raiz enésima aritmética de a, ou simplesmente, de raiz enésima de a, e representaremos por:

$$\boxed{b = \sqrt[n]{a}}$$

Em $b = \sqrt[n]{a}$, a é chamado de radicando, n de índice, b de raiz e o símbolo $\sqrt{\ }$ de radical.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{1000} = 10$, pois $10^3 = 1000$;

b) $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$.

PoCA Portal de Cursos Abertos SEaD UFSC

Consequências da definição

1. Decorre que $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geq 0$.

2. Temos, por definição, que $\sqrt[n]{a} = b$. Sendo assim, vale ressaltar que a raiz quadrada de um natural p será dada por $\sqrt{p} = q$, o que difere de $\sqrt{p} = \pm q$. Desse modo, por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{9} = 3$ → Expressa de forma correta a raiz quadrada de 9.

II - $\sqrt{9} = \pm 3$ → Não expressa a raiz quadrada de 9.

Entretanto, são verdadeiras as sentenças a seguir, nas quais o radical não interfere no sinal que antecede à raiz:

a) $-\sqrt{25} = -5$;
b) $-\sqrt[3]{27} = -3$;
c) $\pm\sqrt{16} = \pm 4$.

3. Notemos que no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito ocorre que:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Verdadeiramente, $\sqrt{a^2}$ é, por definição, o número real positivo ou nulo que elevado ao quadrado resulta em a^2, e como $a^2 = |a|^2$ e $|a| \geq 0$, segue que $\sqrt{a^2} = |a|$.
Por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$ → Expressa de forma correta a raiz quadrada de $(-11)^2$.

II - $\sqrt{(-11)^2} = -11$. → Não expressa a raiz quadrada de $(-11)^2$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, então são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}}$, com $a \neq 0$ ou $m \neq 0$.

Exemplo:

$$\sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2.6]{2^{3\cdot 6}} = \sqrt[12]{2^{18}}$$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 7} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$$

3ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$, $\boldsymbol{b \neq 0}$.

Exemplo:

$$\sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}}$.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$$

5ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$.

Exemplo:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{3^2}$$

Potência de expoente racional

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$, e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*)$ define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, então, consideramos $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$;

b) $3^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}$;

Exemplo: $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{14}{6}} = 10^{\frac{2}{3}+\frac{14}{6}} = 10^{\frac{4+14}{6}} = 10^{\frac{18}{6}} = 10^3 = 1000.$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}}$;

Exemplo: $\frac{3^{\frac{8}{9}}}{3^{\frac{4}{9}}} = 3^{\frac{8}{9}-\frac{4}{9}} = 3^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{3^4}$

3ª Propriedade: $\boldsymbol{(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}}$;

Exemplo: $(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3.$

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

Exemplo: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}}{(5\sqrt{5})^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}} \cdot \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}$.

5ª Propriedade: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$.

Exemplo: $\frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}} \cdot \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{6}{3}}}{5^{\frac{6}{3}}} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$.

Você poderá encontrar algumas demonstrações no material de apoio, outras poderão ser realizadas como forma de exercício.

Potência de expoente irracional

Podemos encontrar, baseado nas potências com expoentes racionais, um único número real positivo a^r, com $a > 0$ e r pertencente ao conjunto dos números irracionais.

Tomemos, por exemplo, a potência $2^{\sqrt{2}}$. Identificando os racionais aproximados por falta (R1) e por excesso (R2) de $\sqrt{2}$, podemos obter equivalentemente os valores por falta (V1) ou por excesso (V2) para a potência $2^{\sqrt{2}}$.

R1	R2	V1	V2
1	2	2^1	2^2
1,4	1,5	$2^{1,4}$	$2^{1,5}$
1,41	1,42	$2^{1,41}$	$2^{1,42}$
1,414	1,415	$2^{1,414}$	$2^{1,415}$
$< \sqrt{2} <$		$< 2^{\sqrt{2}} <$	

Definição:
Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e r um número irracional, consideremos os conjuntos $R1 = \{m \in \mathbb{Q} \mid m < r\}$ (dos racionais que se aproximam por falta de r) e $R2 = \{n \in \mathbb{Q} \mid r < n\}$ (dos racionais que se aproximam por excesso de r).
Notemos que:

1. Todo elemento de $R1$ é menor qualquer elemento de $R2$.
2. Existem dois racionais m e n tais que $m < r < n$ e a diferença $(n - r)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

R1	R2
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
< $\sqrt{2}$ <	

Em função dos conjuntos $R1$ e $R2$, temos como imagem os conjuntos $V1 = \{a^m \mid m \in R1\}$ e $V2 = \{a^n \mid n \in R2\}$.

V1	V2
2^1	2^2
$2^{1,4}$	$2^{1,5}$
$2^{1,41}$	$2^{1,42}$
$2^{1,414}$	$2^{1,415}$
< $2^{\sqrt{2}}$ <	

Se $a > 0$, então, temos que:
1. Todo racional $m \in R1$ é menor que qualquer racional $n \in R2$;
2. Há dois números a^m e a^n, tais que a sua diferença $(a^m - a^n)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Assim sendo, a^m e a^n são, respectivamente, aproximações por falta e excesso de a^r, e que $V1$ e $V2$ tendem para a^r.
Se $0 < a < 1$, então, $V1$ e $V2$, de forma análoga, tendem para a^r.

Potência de expoente real

Como já estão definidas todas as potências de a^b, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente b (racional ou irracional), está definida a potência a^b com $b \in \mathbb{R}$.
Observamos que:

1. Toda potência de base real positiva e de expoente real, é um número real positivo;

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0, \forall\, b \in \mathbb{R}.$$

2. Para as potências de expoente real, valem as propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$, com ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$);

Potência de expoente real

2ª Propriedade: $\frac{a^q}{a^p} = \boldsymbol{a^{q-p}}$, com ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$);

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a \cdot b})^p = \boldsymbol{a^p \cdot b^p}$, com ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R}$);

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$, com ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R}$);

5ª Propriedade: $(\boldsymbol{a^p})^q = \boldsymbol{a^{p \cdot q}}$, com ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$).

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Potenciação: revisitando o conteúdo e recompondo saberes.

Resumo da apresentação

Nesta apresentação abordou-se a operação de potenciação e suas propriedades, o que propiciará uma melhor compreensão da Função Exponencial, dos Logaritmos e da Função Logarítmica.

CRÉDITOS

Autor

Anízio Noronha Menezes Neto
Licenciado em Matemática.
Graduado em Administração.
Especialista em Docência de Matemática.

Autora

Erica Boizan Batista
Graduada em Matemática
Mestre em Matemática
Doutora em Matemática

Autor

Valdinês Leite de Sousa Júnior
Graduado em Matemática
Mestre em Matemática
Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos: 20. ed. São Paulo: Atual, 2013.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR. José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. Matemática Completa 1º Ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Track: "Tree Of Life"Música fornecida por https://Slip.stream Download grátis/Stream: https://get.slip.stream/Rla5kP

Funções Exponenciais e Logarítmicas

1. Potenciação e Função Exponencial.

1.2. Função Exponencial.

Professores:

Anízio Noronha Menezes Neto
Erica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

- Definição da Função Exponencial.
- Gráfico da Função Exponencial
- Propriedades.
- Equações exponenciais.
- Inequações exponenciais.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Em várias situações práticas, como nos cálculos dos juros de uma aplicação ou financiamento bancário, do crescimento de uma população, da depreciação de um bem, da meia-vida de um isótopo radioativo, dentre outros, aplicam-se o conceito e as propriedades das funções exponenciais.

Representação do crescimento dos juros em uma aplicação financeira. (imagem do estoque do MS Office).

Consideremos, por exemplo, uma situação na qual se observa em laboratório que uma colônia com quantidade estimada de 100 bactérias dobra a cada minuto de observação. Quantas bactérias terá a colônia após 2 minutos? E após 5 minutos?
Podemos verificar facilmente (observe a tabela ao lado) que o crescimento da quantidade de bactérias ocorre de forma exponencial. Para compreender melhor situações como esta, aprofundaremos o estudo das funções exponenciais.

Nº de bactérias	Tempo de observação (em minutos)
$100 = 100 \times 2^0$	0
$200 = 100 \times 2^1$	1
$400 = 100 \times 2^2$	2
$800 = 100 \times 2^3$	3
$1600 = 100 \times 2^4$	4

Crescimento do número de bactérias em função do tempo em minutos.

Função Exponencial.

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, denomina-se **função exponencial** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ que associa a cada x real o número a^x.
Assim, temos:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\to a^x \end{aligned}$$

Exemplos de funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\sqrt{7}\right)^x$

Observações:

Pela definição dada anteriormente, temos que em uma função exponencial, $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Mas afinal, porque a base deve ser positiva e diferente de 1?

- Se admitíssemos que $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, supondo $a = -5$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos:

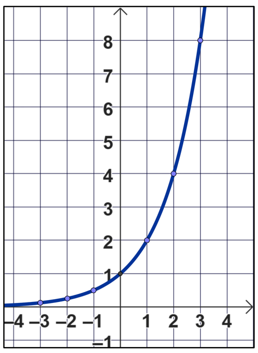
$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ (que não está definida em $\mathbb{R}$).

- Por outro lado, admitindo $a = 1$, então $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

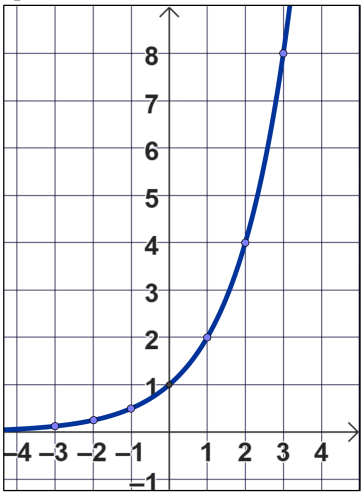
Gráfico da Função Exponencial.

Esboçaremos a seguir gráficos de funções exponenciais no plano cartesiano e examinaremos o comportamento dessas funções a partir desses gráficos.
1° Caso: Tomemos uma função $f(x) = a^x$, com $a > 1$.
Por exemplo, seja a função $f(x) = 2^x$, logo, temos:

x	$f(x)$
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8



Observe que, quanto **maior** o valor do expoente x, **maior** o valor de $f(x)$, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é **crescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1), \forall\, x_2$ e x_1 reais.

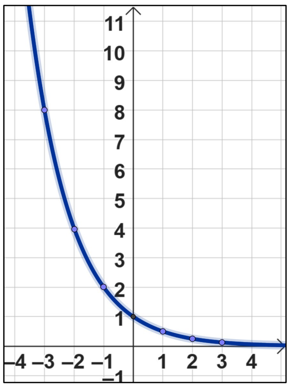


Logo, é importante lembrar que:

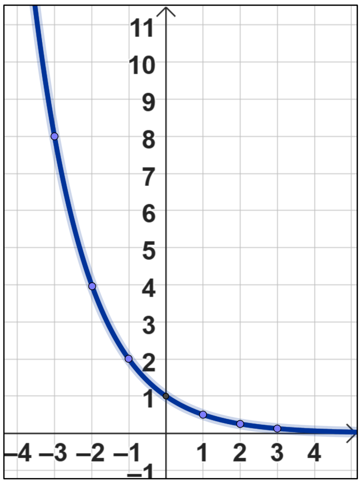
- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- f é crescente em todo o seu domínio.

2° Caso: Consideremos a função $g(x) = a^x$, com $0 < a < 1$.
Esboçamos, por exemplo, o gráfico da função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, logo, temos:

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125



Nesse caso, quanto **maior** o valor do expoente x, **menor** o valor de $g(x)$, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $g(x) = a^x$ é **decrescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1), \forall\, x_2$ e x_1 reais.



Logo, ressalta-se que:

- $D(g) = \mathbb{R}$;
- $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$;
- g é decrescente em todo o seu domínio.

Propriedades:

1ª Propriedade. Dada a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow a^0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1,\ \forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \text{ onde } a \neq 1.$$

Ou seja, o par ordenado (0,1) pertence a $f, \forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Portanto, como pudemos observar nos gráficos anteriores, em toda função exponencial, o gráfico intersecta o eixo y ponto de ordenada 1.

2ª Propriedade. A função $f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é:
a) Crescente se $a > 1$, ou seja, $f(x_2) = a^{x_2} > f(x_1) = a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$;
b) Decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, $f(x_2) = a^{x_2} < f(x_1) = a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$.

3ª Propriedade. A função $f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetiva. Verificamos facilmente esta propriedade, observando que, de acordo com a propriedade anterior:

$$f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1.$$

Exercícios

1. (Unifei – SP) Sendo $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ para $x \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que:

A) o gráfico de f intercepta o eixo x em um único ponto.
B) f é decrescente.
C) o conjunto imagem de f é dado por $Im\,(f) =]0, +\infty[$.
D) o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $\left(0, \frac{5}{4}\right)$.
E) $f(-1) = \frac{5}{4}$.

1. (Unifei – SP) Sendo $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ para $x \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que:

A) o gráfico de f intercepta o eixo x em um único ponto. Falso, pois $\nexists x \in \mathbb{R} |\ f(x) = 0$.
B) f é decrescente. Falso, pois $\frac{5}{4} > 1$.
C) o conjunto imagem de f é dado por $Im\,(f) =]0, +\infty[$. Correto, pois $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.
D) o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $\left(0, \frac{5}{4}\right)$. Falso, pois f(0)=1.
E) $f(-1) = \frac{5}{4}$. Falso, pois f(-1)=$\frac{4}{5}$.

Exercícios

2. Classifique as funções abaixo como crescentes ou decrescentes.

A) $f(x) = 8^x$
B) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
C) $h(x) = 2^{-x}$
D) $l(x) = 8^{\frac{2x}{3}}$

2. Classifique as funções abaixo como crescentes ou decrescentes.

A) $f(x) = 8^x$ Crescente.
B) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ Decrescente.
C) $h(x) = 2^{-x}$ Decrescente. (Observe que: $2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$)
D) $l(x) = 8^{\frac{2x}{3}}$ Crescente. (Observe que: $8^{\frac{2x}{3}} = \left(8^{\frac{2}{3}}\right)^x = \left(\sqrt[3]{8^2}\right)^x = 4^x$)

Equação Exponencial.

Define-se como Equação Exponencial, toda equação que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma base real e diferente de 1. Desse modo, são exemplos de equações exponenciais:

A) $3^x = 729$;

B) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} = 0{,}008$;

C) $3^{4x} + 9^x = 27$;

D) $5^{-x+1} - \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+4} = 0$.

Há basicamente dois métodos utilizados para resolver equações exponenciais.
A seguir veremos o primeiro método, enquanto o segundo iremos abordar após o do estudo de logaritmos.

Resolução de Equações Exponenciais

Aplicaremos o método da redução a uma base comum, que consiste em reduzir ambos os membros da igualdade a uma potência de mesma base.
Como uma função exponencial, $f(x) = a^x$, é injetiva, com $a > 0$ e $a \neq 1$, vale a seguinte propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Vamos então, resolver algumas equações.
Exemplos:
A) $3^x = 81$
Resolução:

$$3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

B) $\frac{1}{32} = 8^x$
Resolução:

$$8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Rightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

C) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x+1}}$

Resolução:

$$8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x+1}}$$
$$\Leftrightarrow (2^3)^{2x+1} = \left((2^2)^{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{\frac{2x+2}{3}}$$
$$\Rightarrow 6x + 3 = \frac{2x+2}{3}$$
$$\Leftrightarrow (6x+3).3 = \frac{2x+2}{3}.3$$
$$\Leftrightarrow 18x + 9 = 2x + 2$$
$$\Leftrightarrow 18x - 2x = 2 - 9$$
$$\Leftrightarrow 16x = -7$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{16}.$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{7}{16}\right\}$.

D) $5^{2x+4}.25^{4x+5} = 125^{2x+10}$

Resolução:

$$5^{2x+4}.25^{4x+5} = 125^{2x+10}$$
$$\Leftrightarrow 5^{2x+4}.(5^2)^{4x+5} = (5^3)^{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow 5^{2x+4}.5^{8x+10} = 5^{6x+30}$$
$$\Leftrightarrow 5^{2x+8x+4+1} = 5^{6x}$$
$$\Leftrightarrow 5^{10x+14} = 5^{6x+3}$$
$$\Rightarrow 10x + 14 = 6x + 30$$
$$\Leftrightarrow 10x - 6x = 30 - 14$$
$$\Leftrightarrow 4x = 16$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{4} = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

Inequação Exponencial.

Define-se como Inequação Exponencial, toda inequação que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma base real, positiva e diferente de 1. Desse modo, são exemplos de inequações exponenciais:

A) $3^x < 2$;

B) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} > 1$;

C) $3^{4x} \geq 27$;

D) $5^{x+1}.\left(\frac{1}{25}\right)^{3x} \leq 0$.

Do mesmo modo que nas equações exponenciais, há dois métodos utilizados para resolver inequações exponenciais.
A seguir veremos o primeiro método, enquanto o segundo iremos abordar após o do estudo de logaritmos.

Resolução de Inequações Exponenciais

Este método será aplicado quando ambos os membros da desigualdade puderem ser representados como potências de uma mesma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$.
Como uma função exponencial, $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, temos que:

- para $a > 1$; $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}$;
- para $0 < a < 1$; $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}$.

Exemplos:
A) $3^x > 729$

Resolução:

$$3^x > 729 \Leftrightarrow 3^x > 3^6$$

Como a base é maior que 1, temos que $x > 7$.
$S = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 7\}$.

B) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \frac{625}{16}$

Resolução:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \frac{625}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$$

Como a base é menor que 1, temos que $2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} | \; x \geq -2\}$.

C) $(2^x)^{3x+8} < \frac{1}{32}$

Resolução:

$$(2^x)^{3x+8} < \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{3x^2+8x} < 2^{-5}$$

Como a base é maior que 1, temos que:
$3x^2 + 8x < -5 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 5 < 0.$

Tomando a função $f(x) = 3x^2 + 8x + 5$:

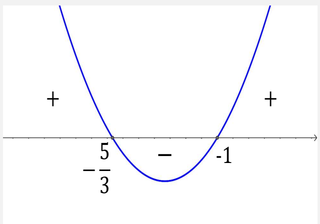
I. Encontremos as suas raízes;

$3x^2 + 8x + 5 = 0$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.3.5}}{2.3} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}.$

Logo $x' = -1$ e $x'' = -\frac{5}{3}$.

II. Em seguida façamos o estudo do sinal da função:



Logo conclui-se que $-\frac{5}{3} < x < -1$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{5}{3} < x < -1\right\}$.

Exemplo:
Um automóvel foi comprado por R$ 160.000,00 e sabe-se que ele conta com uma provável desvalorização de 5% ao ano, ou seja, o seu valor de mercado em t anos é dado pela função $V(t) = 160000.(0{,}95)^t$. Em quanto tempo o valor de mercado desse automóvel será menor que R$ 137.180,00?
Resolução:
Do enunciado, devemos encontrar t de modo que:

$$V(t) < 137.180 \Leftrightarrow 160000.(0{,}95)^t < 137.180$$

Logo:

$$160000.(0{,}95)^t < 137.180$$
$$\Leftrightarrow (0{,}95)^t < \frac{137.180}{160.000}$$
$$\Leftrightarrow (0{,}95)^t < 0{,}857375$$
$$\Leftrightarrow (0{,}95)^t < (0{,}95)^3$$

Como a base é menor que 1, temos que $t > 3$. Portanto, após 3 anos, o valor do automóvel será inferior a R$ 137.180,00.

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Função Exponencial.

Resumo da apresentação

Nesta apresentação abordou-se a Função Exponencial (definição, representação gráfica e propriedades) assim como a resolução de equações e inequações exponenciais.

CRÉDITOS

Autor

Anízio Noronha Menezes Neto
Licenciado em Matemática.
Graduado em Administração.
Especialista em Docência de Matemática.

Autora

Erica Boizan Batista
Graduada em Matemática
Mestre em Matemática
Doutora em Matemática

Autor

Valdinês Leite de Sousa Júnior
Graduado em Matemática
Mestre em Matemática
Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR. José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. Matemática Completa 1º Ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos: 20. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

Track: "Tree Of Life"Música fornecida por https://Slip.stream
Download grátis/Stream: https://get.slip.stream/Rla5kP

Funções Exponenciais e Logarítmicas

2. Logaritmos e Função Logarítmica.
2.1. Logaritmos.

Professores:

Anízio Noronha Menezes Neto
Erica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

- Logaritmo - Definição.
- Logaritmo Decimal.
- Propriedades.
- Sistemas de Logaritmos.
- Resolução de Equações e Inequações Exponenciais.

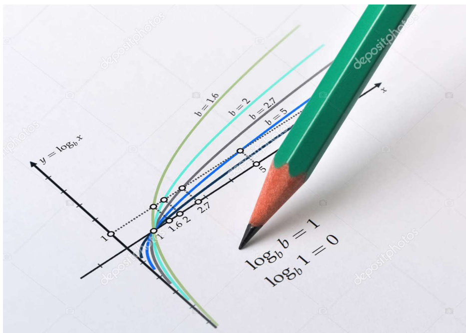
Logaritmo

Cálculos que hoje consideramos elementares e que aprendemos nos primeiros anos de educação escolar não eram aprendidos por todos até bem pouco tempo. Por exemplo, na Europa, multiplicar e dividir somente era ensinado nas universidades até o século XVII, e com métodos diferentes e bem mais árduos do que os atualmente difundidos.
Da preocupação em simplificar cálculos surge a **teoria dos logaritmos**, com John Napier (1550-1617).

John Napier (1550-1617). Autor desconhecido. Fonte: John Napier – Wikipedia.

PoCA Portal de Cursos Abertos

Com o surgimento dos logaritmos, houve a simplificação de cálculos antes mais trabalhosos, posto que multiplicações e divisões podem ser transformadas em operações de soma e subtração, bem mais simples, bem como potenciação e radiciação, que podem ser transformadas em multiplicação e divisão, respectivamente.
Os logaritmos possuem diversas aplicações em vários ramos das ciências, como a Astronomia, a Física, a Química, a Medicina e a Economia, dentre outros tantos.



Lápis e funções logarítmicas. Foto de benjaminec.
Fonte: https://br.depositphotos.com/309674230/stock-photo-logarithm-functions-and-a-pencil.html

PoCA Portal de Cursos Abertos

Logaritmo - Definição.

Definição:

Sejam, a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, denomina-se **logaritmo** de b na base a o expoente x que se deve dar a base a, de modo que $a^x = b$. Assim, temos que se $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+$, então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Onde, em $\log_a b = x$, a é a **base**, b é o **logaritmando** e x é o **logaritmo**.

A operação pela qual se determina um logaritmo é denominada **logaritmação**.

Para compreender melhor, consideremos uma potência qualquer de base positiva e diferente de 1, como:

$$5^2 = 25$$

Isso equivale a:

$$\log_5 25 = 2$$

Ao expoente, agora, damos o nome de **logaritmo**. Logo 2 é logaritmo de 25 na base 5.

A existência e a unicidade do logaritmo $x = \log_a b$, são garantidas pelas restrições impostos, a e b são números reais, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Exemplos:

a) $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$;

b) $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$;

c) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, pois $5^{-2} = \frac{1}{25}$;

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$, pois $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$;

e) $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$;

f) $\log_{11} 1 = 0$, pois $11^0 = 1$.

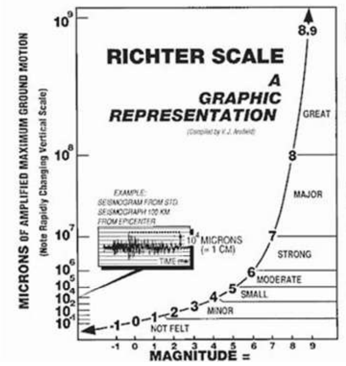
Logaritmo decimal.

Ao logaritmo cuja base é 10 denomina-se **logaritmo decimal**.
No logaritmo decimal de **logaritmando** a, fica subentendida a base 10, sendo indicado o logaritmo decimal por $\log a = x$.

Certamente, uma das escalas logarítmicas mais conhecidas em todo o mundo é a Escala Richter. Ela recebe esse nome em homenagem ao seu criador, o sismólogo norte-americano Charles Francis Richter (1900-1985), que estabeleceu um modo de medir a intensidade de um terremoto a partir da energia E liberada durante o tremor.
De acordo com essa escala, pode-se calcular a intensidade I de um terremoto em função da energia E, em quilowatt-hora, liberada pelo terremoto, a partir da seguinte fórmula:

$$I = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0},$$

onde, $E_0 = 7.10^{-3}$kWh e o logaritmo é de **base 10**, ou seja, é um **logaritmo decimal**.



Escala Richter. Fonte: Escala de Richter y logaritmos - Matemáticas en tu mundo (matematicasentumundo.es). Foto de Autor Desconhecido, licenciada em CC BY-NC.

Propriedades.

A partir das propriedades da potenciação, que estudamos anteriormente, podemos chegar às seguintes propriedades dos logaritmos, para quaisquer reais a e b, com $b \neq 1$.

1ª Propriedade: $\boldsymbol{\log_b b = 1}$.
Vejamos que, indicando $\log_b b = x$, temos:

$$\log_b b = x \underset{def}{\Longleftrightarrow} b^x = b \Leftrightarrow x = 1.$$

Portanto, $\log_b b = 1$.
Exemplos:

a) $\log_5 5 = 1$; b) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$;

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\log_b 1 = 0}$.
Realmente, ao indicarmos $\log_b 1 = \text{x}$, temos que:

$$\log_b 1 = x \underset{de}{\Longleftrightarrow} b^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Desse modo, $\log_b 1 = 0$.

a) $\log_5 1 = 0$; b) $\log_{\sqrt{\pi}+3} 1 = 0$;

3ª Propriedade: $\log_b a^y = y \log_b a, \forall y \in \mathbb{R}$.
Tomando:
$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$
Ao elevarmos ambos os lados da igualdade acima a y temos:
$$(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{xy} = a^y \Leftrightarrow \log_b a^y = xy$$
Daí, como consideramos $\log_b a = x$, temos:
$$\log_b a^y = y \log_b a.$$
Como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $\log_5 25^2 = 2 \log_5 25 = 2.2 = 4$;

b) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{625}{81} = \log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = -4. \log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{5} = -4.1 = -4.$

PoCA Portal de Cursos Abertos SEaD UFSC

4ª Propriedade: $\log_b b^x = x$.
De fato, de acordo com a 3ª e a 1ª propriedades, respectivamente, temos que:
$$\log_b b^x = x \log_b b = x.1 = x.$$
Portanto, $\log_b b^x = x$.

Exemplos:

a) $\log_\pi \pi^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;

b) $\log_3 (\sqrt[3]{3})^5 = \log_3 3^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$.

5ª Propriedade: $b^{\log_b a} = a$.
Observemos que, se $b^x = a \Leftrightarrow \log_b a = x$, então, $b^x = b^{\log_b a} = a$.

Exemplos:

a) $3^{\log_3 9} = 9$;

b) $\pi^{\log_\pi 10} = 10$.

PoCA Portal de Cursos Abertos SEaD UFSC

6ª Propriedade: $\log_b ac = \boldsymbol{log_b\, a + log_b\, c}$, $\forall\, a, b$ e c reais positivos, com $b \neq 1$.
Para demonstrar essa propriedade, consideremos:

$$\begin{cases} \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c \end{cases} \Rightarrow ac = b^x . b^y = b^{x+y} \Leftrightarrow \log_b ac = x + y = log_b\, a + log_b\, c.$$

Portanto, $\log_b ac = log_b\, a + log_b\, c$, como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 4 + 1 = 5;$

Observe que a propriedade nos permite transformar o logaritmo de um produto na soma de logaritmos, facilitando muitos cálculos. Também podemos transformar uma soma de logaritmos no logaritmo de um produto, quando for pertinente, veja no próximo exemplo.

b) $\log_{\sqrt{12}} 3 + \log_{\sqrt{12}} 2\sqrt{3} + \log_{\sqrt{12}} 8\sqrt{3} = \log_{\sqrt{12}} \left(3.2\sqrt{3}.8\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{12}} 144 = 4.$

7ª Propriedade: $\log_b \frac{a}{c} = \boldsymbol{log_b\, a - log_b\, c}$, $\forall\, a, b$ e c reais positivos, com $b \neq 1$.
De modo análogo a propriedade anterior, para demonstrar essa propriedade, consideremos:

$$\begin{cases} \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \Leftrightarrow \log_b \frac{a}{c} = x - y = log_b\, a - log_b\, c.$$

Portanto, $\log_b \frac{a}{c} = log_b\, a - log_b\, c$, como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $\log_5 0{,}04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 1 - \log_5 25 = 0 - 2 = -2;$

Veja que esta propriedade nos permite transformar o logaritmo de um quociente na diferença de logaritmos, conforme seja conveniente, e, de igual, fazer o inverso, conforme se pode ver no próximo exemplo.

b) $\log_2 44 - \log_2 11 = \log_2 \frac{44}{11} = \log_2 4 = 2.$

8ª Propriedade (mudança de base): $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}_+^*$ com $k \neq 1$.

Demonstraremos essa propriedade, tomando:

$$\begin{cases} \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_k a = y \Leftrightarrow k^y = a \Rightarrow b^x = a = k^y \Leftrightarrow (k^z)^x = k^y \Leftrightarrow k^{zx} = k^y \Leftrightarrow zx = y, \text{ daí:} \\ \log_k b = z \Leftrightarrow k^z = b \end{cases}$$

$\log_k b \,.\log_b a = \log_k a \Leftrightarrow \log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$. ■

Exemplos:

a) $\log_{32} \sqrt[3]{2} = \frac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\log_2 32} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$;

A 8ª Propriedade nos permite realizar a mudança para outra base de modo a facilitar a realização de alguns cálculos.

Observações:

1. A 8ª propriedade também pode ser descrita da seguinte forma:

$$\log_a b = \log_c b \,.\log_a c\,;$$

Onde a, b e c reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$.

Demonstração:
Passando $\log_c b$ para a base a;

$$\log_c b \,.\log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c} .\log_a c = \log_a b.$$

2. Sendo a e b reais positivos, com $a \neq 1$:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Demonstração:
Passando $\log_a b$ para a base b;

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

3. Se a e b reais positivos, com $a \neq 1$ e dado o real $\theta \neq 0$, temos:

$$\log_{a^\theta} b = \frac{1}{\theta} \log_a b\,.$$

Demonstração:
Consideraremos dois casos:
1º Caso: Se $b = 1$, temos:

$$\begin{cases} \log_a 1 = 0 \\ \log_{a^\theta} 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \log_{a^\theta} 1 = \frac{1}{\theta}\log_a 1\,.$$

2º Caso: Se $b \neq 1$, temos:

$$\log_{a^\theta} b = \frac{1}{\log_b a^\theta} = \frac{1}{\theta \log_b a} = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\theta}\cdot\log_a b\,.$$

Exemplos:

a) $\log_3 5 = \log_2 5\,.\log_3 2\,;$

b) $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}\,;$

c) $\log_8 5 = \log_{2^3} 5 = \frac{1}{3}.\log_2 5\,.$

Exercícios resolvidos

1. Calcule $\log 6$, sabendo que $\log 5 = 0{,}69$ e $\log 3 = 0{,}48$.

Resolução.:
$\log 6 = \log \frac{10.3}{5} = \log 10 + \log 3 - \log 5 = 1 + 0{,}48 - 0{,}69 = 0{,}79.$

2. Determine o valor de x para que os logaritmos abaixo estejam definidos.
a) $\log_3(x-5)$ b) $\log_{(5-x)} 10$

Resolução.:
Primeiramente, pela definição de logaritmo, em qualquer $\log_b a$, temos que $a > 0$ e $b > 0$, com $b \neq 1$.
a) $\exists \log_3(x-5) \Leftrightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5.$

b) $\exists \log_{5-x} 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5 \\ 5 - x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 1 - 5 \Leftrightarrow -x \neq -4 \Leftrightarrow x \neq 4 \end{cases}.$

3. Calcule o valor de x em cada equação abaixo.

a) $\log_5(2x-3) = -2$ b) $\log_{2x} 216 = 3$

Resolução.:

a)$\log_5(2x-3) = -2$

Para que haja solução, pela definição de logaritmo, é necessário que:

$$2x-3>0 \Leftrightarrow 2x>3 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$$

E tendo que:

$$2x-3=5^{-2} \Leftrightarrow 2x-3=\frac{1}{25} \Leftrightarrow 50x-75=1 \Leftrightarrow 50x=1+75=76 \Leftrightarrow x=\frac{76}{50}=\frac{38}{25}$$

Como $\frac{38}{25} > \frac{2}{3}$, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{38}{25}\right\}$.

b) $\log_{2x} 216 = 3$

São condições necessária para existência do logaritmo que $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ e que $2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Temos:

$(2x)^3 = 216 \Leftrightarrow 8x^3 = 216 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$.

Logo, $S = \{3\}$.

Sistemas de Logaritmos

Chamamos de sistemas de logaritmos a um conjunto de valores de logaritmos em uma mesma base $\boldsymbol{a}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Destacam-se, pela importância, os seguintes sistemas de logaritmos:

- o sistema de logaritmos na base 10;
- o sistema de logaritmos na base $\boldsymbol{e}$.

O símbolo $\boldsymbol{e}$ representa um número irracional, cujo valor aproximado é 2,7182818, sendo chamado de **número de Euler**, mas em algumas obras poderá ser encontrado com a nomenclatura de **número de Napier** ou **Neper**, constante de Néper, número neperiano ou número exponencial.

Para todo real x, com $x > 0$, denotamos:

$$\log_e x = \ln x .$$

A esse tipo de logaritmos denomina-se **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural.** A nomenclatura de logaritmo neperiano é dada em homenagem a Napier, que além de formalizar a teoria dos logaritmos, calculou o número $\boldsymbol{e}$ em suas primeiras casas decimais.

Para os logaritmos neperianos valem as mesmas propriedades dos logaritmos, já estudadas.

Exemplos:

1. Calcule:

a) $\ln 1$ b) $\ln e$ c) $e^{\ln 5}$ d) $\ln e^7$

Resolução:

Pelas propriedades dos logaritmos, temos:

a) $\ln 1 = 0$ b) $\ln e = 1$ c) $e^{\ln 5} = 5$ d) $\ln e^7 = 7$

2. Sendo $\log_{10} e \cong 0{,}4342945$, determine:

a) $\ln 100$ b) $\ln 0{,}001$ c) $\ln 25 + \ln 40$

Resolução:

a) $\ln 100 = \frac{\log 100}{\log e} = \frac{2}{0{,}4342945} \cong 4{,}605.$

b) $\ln 0{,}001 = \frac{\log 0{,}001}{\log e} = \frac{\log \frac{1}{1000}}{\log e} = \frac{-3}{0{,}4342945} \cong -6{,}908.$

c) $\ln 25 + \ln 40 = \ln 25.40 = \ln 1000 = \frac{\log 1000}{\log e} = \frac{3}{0{,}4342945} \cong 6{,}908.$

Resolução de Equações e Inequações Exponenciais.

Retomaremos agora o estudo da resolução de equações e inequações exponenciais, utilizando o que aprendemos sobre logaritmos e suas propriedades para resolvermos equações e inequações que não podem ser reduzidas a igualdades (ou desigualdades) de potências de mesma base por meio das propriedades das potências.

A resolução desse tipo de equação, ou inequação, se baseia na própria definição de logaritmo, ou seja, se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, tem-se que:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_b a = x.$$

Vamos resolver alguns exemplos para compreendermos bem.

Exemplos:

1. Resolva as equações exponenciais a seguir.

a) $3^x = 10$ b) $8^{x+1} - 2^{3x} = 5^{x+3} - 5^{x+2}$

Resolução:

a) Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$3^x = 10 \underset{de}{\Longleftrightarrow} \log_3 10 = x$.

Portanto, $S = \{\log_3 10\}$.

De outro modo, como $3^x > 0$ e $10 > 0$, podemos aplicar um logaritmo de base b qualquer, desde que $b > 0$, aos dois membros da igualdade. Vejamos:

$$3^x = 10 \Rightarrow \log 3^x = \log 10 \Rightarrow x \log 3 = \log 10 \Rightarrow x = \frac{\log 10}{\log 3} = \log_3 10$$

b) $8^{x+1} - 2^{3x} = 5^{x+3} - 5^{x+2} \Leftrightarrow 8^{x+1} - 8^x = 5^{x+3} - 5^{x+2}$

Colocaremos 8^x em evidência no primeiro membro e 5^x no segundo:

$8^x(8-1) = 5^x(5^3 - 5^2) \Leftrightarrow 8^x.7 = 5^x.(125-25) \Leftrightarrow \frac{8^x}{5^x} = \frac{100}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^x = \frac{100}{7} \Leftrightarrow \log_{\frac{8}{5}}\left(\frac{100}{7}\right) = x.$

Logo, $S = \left\{\log_{\frac{8}{5}}\left(\frac{100}{7}\right)\right\}$.

2. Resolva as inequações exponenciais a seguir.

a) $3^x < 6$ b) $5^{2x} - 7.5^x > -10$

Resolução:

a) Como $3^x > 0$ e $6 > 0$, aplicaremos uma logaritmação de base 3 aos dois membros da inequação.

$$3^x < 6 \Leftrightarrow \log_3 3^x < \log_3 6 \Rightarrow x \log_3 3 < \log_3 6 \Rightarrow x < \log_3 6.$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | \ x < \log_3 6\}$.

b) Fazendo $5^x = y$, temos:

$$y^2 - 7y > -10 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 10 > 0.$$

Ao resolver a inequação acima, temos que:

$2 < y < 5 \Leftrightarrow 2 < 5^x < 5.$

Ao aplicarmos logaritmação de base 5, teremos:

$$\log_5 2 < \log_5 5^x < \log_5 5 \Leftrightarrow \log_5 2 < x.\log_5 5 < \log_5 5 \Leftrightarrow \log_5 2 < x < 1.$$

Assim sendo, temos $S = \{x \in \mathbb{R} | \ \log_5 2 < x < 1\}$.

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Logaritmos.

Resumo da apresentação

Nesta apresentação abordou-se a definição de logaritmos, suas propriedades e algumas aplicações, como na resolução de equações e inequações exponenciais.

CRÉDITOS

Autor

Anízio Noronha Menezes Neto
Licenciado em Matemática.
Graduado em Administração.
Especialista em Docência de Matemática.
Especialista em Gestão escolar.

Autora

Erica Boizan Batista
Graduada em Matemática
Mestre em Matemática
Doutora em Matemática

Autor

Valdinês Leite de Sousa Júnior
Graduado em Matemática
Mestre em Matemática
Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos: 20. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática: Paiva, 1º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática - Ensino Médio - 1º Ano. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

Track: "Tree Of Life"Música fornecida por https://Slip.stream Download grátis/Stream: https://get.slip.stream/RIa5kP

Funções Exponenciais e Logarítmicas

2. Logaritmos e Função Logarítmica.
2.2. Função Logarítmica.

Professores:

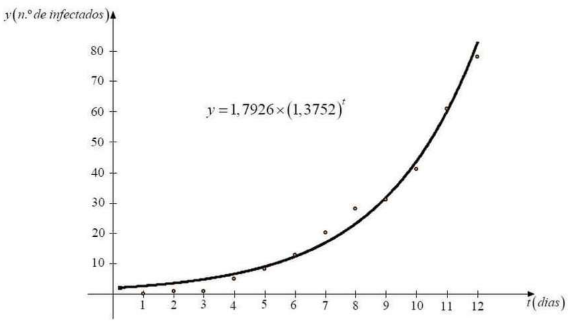
Anízio Noronha Menezes Neto
Erica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

- Definição da Função Logarítmica.
- Gráfico da Função Logarítmica.
- Propriedades.
- Equações Logarítmicas.
- Inequações Logarítmicas.

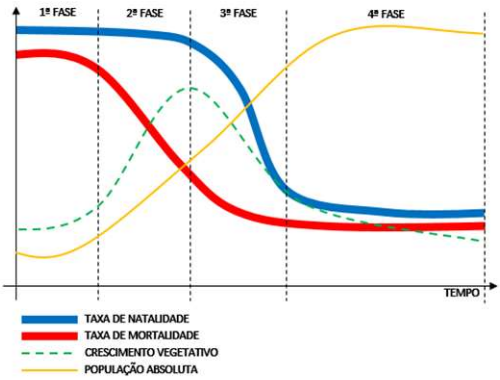
FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Como já pudemos compreender, há diversas situações no campo da ciência ou mesmo no cotidiano nas quais nos deparamos com o crescimento exponencial de grandezas por meio do produto por uma taxa constante em função do tempo; aplicações financeiras, crescimento populacional, depreciação de um bem, nível de radioatividade de um elemento atômico, propagação de uma epidemia, dentre tantos outros.



Progressão Exponencial do Covid-19 em Portugal, nos primeiros dias de março de 2020.
Autor: José Carlos Pereira. Disponível em: Progressão Exponencial do Covid-19 em Portugal (ensinobasico.com). Acesso: 14/04/2023.

Desse modo, o estudo dessas diferentes situações, exige dos mais diversos profissionais, químicos, biólogos, médicos epidemiologistas, físicos, geógrafos, economistas, a aplicação de conhecimentos das funções exponenciais e logarítmicas. Por exemplo, em 1920 foi criado pelo demógrafo estadunidense Warren Thompson, o modelo de transição demográfica, a partir da observação da realidade europeia, no qual se identifica diferentes fases de crescimento populacional, que ocorrem de forma exponencial.



Linha do tempo da evolução das fases do crescimento demográfico.
Disponível em: Fases do crescimento demográfico – Geografia Opinativa). Acesso: 14/04/2023.

Função Logarítmica.

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, com $0 < a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, denomina-se **função logarítmica** de base a, a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$.
Assim, temos:

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \to \log_a x$$

Exemplos de funções logarítmicas em $\mathbb{R}_+^*$:

a) $f(x) = \log_5 x$

b) $g\ (x) = \log_{\frac{3}{4}} x$

c) $h\ (x) = \log x$

d) $\mathrm{p}\ (x) = ln\, x$

Observações:

1. Se $0 < a \neq 1$, então a função logarítmica f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, é a inversa da função exponencial g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, $g(x) = a^x$.

Demonstração:

Como a função exponencial é bijetiva, é também invertível, desse modo, dada a função $y = a^x$, façamos a inversão:

$$x = a^y$$
$$\Leftrightarrow \log_a x = \log_a a^y$$
$$\Leftrightarrow \log_a x = y \log_a a$$
$$\Leftrightarrow \log_a x = y.1$$
$$\Leftrightarrow y = \log_a x = f(x).$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) A inversa da função $f(x) = \log_2 x$ é $g(x) = 2^x$;
b) A inversa da função $f(x) = \log x$ é $g(x) = 10^x$;
c) A inversa da função $f(x) = \ln x$ é $g(x) = e^x$.

2. Dado $f(x) = \log_a x$, se $a > 1$, então:

i. $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

ii. $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplos:

a) $f(x) = \log_2 x$ e $8 > 2 \Rightarrow f(8) = \log_2 8 > f(2) = \log_2 2$;
b) $f(x) = \log x$ e $100 > 3 \Rightarrow f(100) = \log 100 > f(3) = \log 3$;
c) $f(x) = \log_3 x$ e $0{,}5 < 1 \Rightarrow f(0{,}5) = \log_3 0{,}5 < f(1) = \log_3 1$;
d) $f(x) = \ln x$ e $4 > 0{,}22 \Rightarrow f(4) = \ln 4 > f(0{,}22) = \ln 0{,}22$.

3. Dado $f(x) = \log_a x$, se $0 < a < 1$, então:

i. $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

ii. $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplos:

a) $f(x) = \log_{0{,}2} x$ e $8 > 2 \Rightarrow f(8) = \log_{0{,}2} 8 < f(2) = \log_{0{,}2} 2$;
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ e $0{,}5 < 1 \Rightarrow f(0{,}5) = \log_{\frac{1}{3}} 0{,}5 > f(1) = \log_{\frac{1}{3}} 1$.

4. Seja $f(x) = \log_a x$, se $a > 1$, então:

i. $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$;

ii. $x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$.

Exemplos: Seja $f(x) = \log_2 x$, então:

a) $f(0{,}5) = \log_2 0{,}5 < 0$;

b) $f(8) = \log_2 8 > 0$.

5. Dado $f(x) = \log_a x$, se $0 < a < 1$, então:

i. $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$;

ii. $x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$.

Exemplos: Seja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, então:

a) $f(0{,}25) = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}25 > 0$;

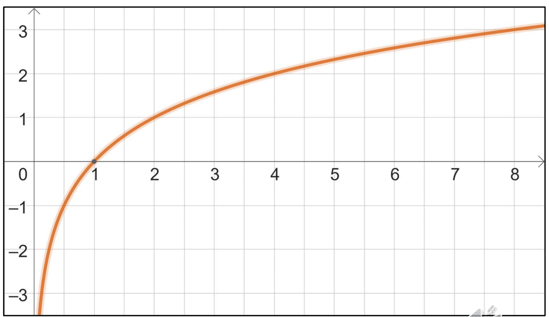
b) $f(5) = \log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$.

Gráfico da Função Logarítmica.

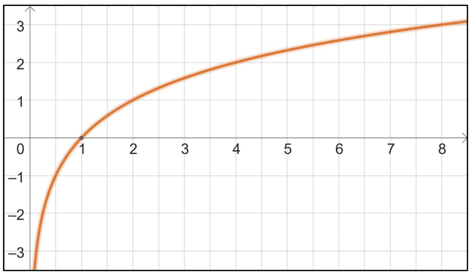
Esboçaremos a seguir gráficos de funções logarítmicas no plano cartesiano e examinaremos o comportamento dessas funções a partir desses gráficos.

1° Caso: Tomemos uma função $f(x) = \log_a x$, com $a > 1$. Por exemplo, tomando a função $f(x) = \log_2 x$ e atribuindo valores para x conforme a tabela, temos:

x	$f(x)$
0,125	-3
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Observe que, quanto **maior** o valor de x, **maior** o valor de $f(x)$, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é **crescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1), \forall\, x_2$ e x_1 reais.

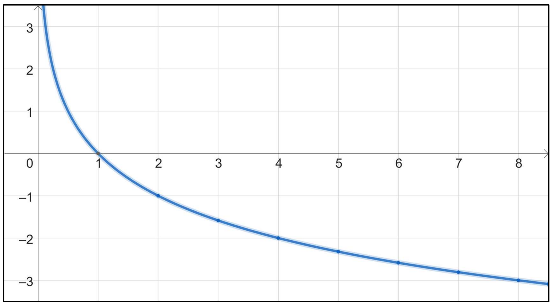


Logo, é importante lembrar que:

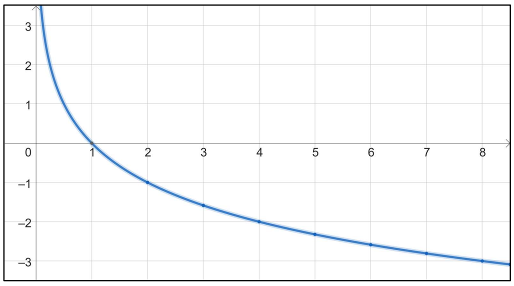
- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- $Im(f) = \mathbb{R}$;
- f é crescente em todo o seu domínio.

2° Caso: Consideremos a função $g(x) = \log_a x$, com $0 < a < 1$. Por exemplo, tomando a função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e atribuindo valores para x conforme a tabela, temos o gráfico:

x	$g(x)$
0,125	3
0,25	2
0,5	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



Nesse caso, quanto **maior** o valor de x, **menor** o valor de $g(x)$, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $g(x) = \log_a x$ é **decrescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1), \forall\, x_2$ e x_1 reais.



Logo, ressalta-se que:

- $D(g) = \mathbb{R}_+^*$;
- $Im(g) = \mathbb{R}$;
- g é decrescente em todo o seu domínio.

Propriedades:

Em relação ao gráfico cartesiano da função logarítmica, $f(x) = \log_a x$, com $0 < a \neq 1$, observa-se que:

1ª. Propriedade. Dada a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $\forall\, f(x) = \log_a x$, temos:

$$x = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0 \Rightarrow f(1) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \text{ onde } a \neq 1.$$

Ou seja, o par ordenado (1,0) pertence a $f, \forall\, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Portanto, como pudemos observar nos gráficos anteriores, em toda função logarítmica, o gráfico intersecta o eixo x no ponto de abscissa 1.

2ª Propriedade. A função $f(x) = \log_a x$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é:

a) Crescente se $a > 1$, ou seja, $f(x_2) = \log_a x_2 > f(x_1) = \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$;

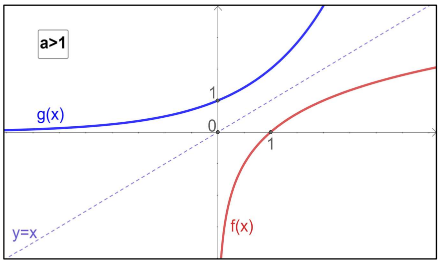
b) Decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, $f(x_2) = \log_a x_2 < f(x_1) = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_2 > x_1$.

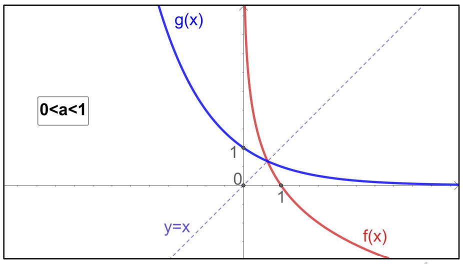
3ª Propriedade. A função $f(x) = \log_a x$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetiva. Verificamos facilmente esta propriedade, observando que, de acordo com a propriedade anterior:

$$f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1.$$

4ª. Propriedade. Dado qualquer ponto de coordenadas $(x, y) \in f(x) = \log_a x$, tem-se $x > 0$, ou seja, o gráfico está inteiramente a direita do eixo das ordenadas (eixo y).

5ª Propriedade. A função logarítmica, $f(x) = \log_a x$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, e a função exponencial, $g(x) = a^x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, inversas, apresentam gráficos simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes. Vejamos:





Exercício Resolvido

1. Classifique as funções como crescente ou decrescente.

A) $f(x) = \log_4 x$
B) $f(x) = \log x$
C) $f(x) = \log_{0,1} x$
D) $f(x) = \log_{\frac{2}{\sqrt[3]{11}}} x$
E) $f(x) = \log_{\frac{5}{4}} x$
F) $f(x) = \log_{\frac{7}{10}} x$

Resolução: Se a base é maior que um a função é crescente, caso seja maior que zero e menor que um, é decrescente.

A) $f(x) = \log_4 x$ **Crescente**
B) $f(x) = \log x$ **Crescente**
C) $f(x) = \log_{0,1} x$ **Decrescente**
D) $f(x) = \log_{\frac{2}{\sqrt[3]{11}}} x$ **Decrescente**
E) $f(x) = \log_{\frac{5}{4}} x$ **Crescente**
F) $f(x) = \log_{\frac{7}{10}} x$ **Decrescente**

Equação Logarítmica.

Define-se como Equação Logarítmica, toda equação que apresenta a incógnita no logaritmando, na base ou em ambos.

1. Desse modo, são exemplos de equações logarítmicas:

A) $\log_5(x+3) = 72$;

B) $\log_{x-2}(x+3) = 8$;

C) $\log_{5x}(x+3) = 27$;

D) $\log_5(x+3) - \log_4(x-5) = 10$.

E) $\log_8(2x+1) = \log(x+3)$

Resolução de Equações Logarítmicas

Vamos então, resolver algumas equações logarítmicas, lembrando sempre de observar as condições de existência dos logaritmos.

Exemplos:
A) $\log_2(4x-5) = \log_2 11$
Resolução:

Condição de existência:

- $4x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{4}$

Logo:

$$\log_2(4x-5) = \log_2 11$$
$$\Rightarrow 4x - 5 = 11$$
$$\Rightarrow x = 4.$$

Portanto, como $x = 4$ satisfaz a condição de existência, $S = \{4\}$.

B) $\log_{x-3}(3x-9) = 2$

Resolução:
Condições de existência:
- $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3;$
- $x - 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 4;$
- $3x - 9 > 0 \Rightarrow x > 3.$

Logo:

$$\log_{x-3}(3x-9) = 2$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 = 3x - 9$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 3x - 9$$
$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

Sendo as soluções da equação quadrática acima $x_1 = 3$ e $x_2 = 6$, apenas x_2 satisfaz às condições de existência.
Portanto, $S = \{6\}$.

C) $\log_{27}(x+1) + \log_9(x+1) = \frac{3}{2}$

Resolução:
Condição de existência:
- $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1.$

Logo (fazendo a mudança de base para a mesma base 3):

$$\log_{27}(x+1) + \log_9(x+1) = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{\log_3 27} \cdot \frac{\log_3(x+1)}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{3} \cdot \frac{\log_3(x+1)}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\log_3(x+1))^2}{6} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow (\log_3(x+1))^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Daí, temos que:

$$\begin{cases} \log_3(x+1) = 3 \Rightarrow x+1 = 3^3 \Rightarrow x = 27 - 1 \Rightarrow x_1 = 26; \\ \log_3(x+1) = -3 \Rightarrow x+1 = 3^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{27} - 1 \Rightarrow x_2 = -\frac{26}{27}. \end{cases}$$

Como $x_1 = 26$ e $x_2 = -\frac{26}{27}$ satisfazem a condição de existência $x > -1$, temos, S = $\left\{-\frac{26}{27}; 26\right\}$.

Inequação Logarítmica.

Define-se como Inequação Logarítmica, toda inequação que apresenta a incógnita no logaritmando, na base ou em ambos. Desse modo, são exemplos de inequações logarítmicas:

A) $\log_5(x+3) < 72$;

B) $\log_{x-2}(x+3) > 8$;

C) $\log_{5x}(x+3) \geq 27$;

D) $\log_5(x+3) - \log_4(x-5) \leq 10$.

E) $\log_8(2x+1) < \log(x+3)$

Resolução de Inequações Logarítmicas.

Este método será aplicado quando ambos os membros da desigualdade puderem ser representados como logaritmos de uma mesma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$.
Como uma função logarítmica, $f(x) = \log_a x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos a seguinte propriedade:

- para $a > 1; \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}$;
- para $0 < a < 1; \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}$.

Exemplos:
1. Determine a solução das seguintes inequações.

A) $\log_{0,5}(x-4) > 2$

B) $\log_3(2x+6) > \log_3 x$

Resolução:

A) $\log_{0,5}(x-4) > 2$

Condição de existência:
- $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4.$

Como $0 < 0,5 < 1$, inverteremos a desigualdade.

$$\log_{0,5}(x-4) > 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4) > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x - 4 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ (invertendo a desigualdade)}$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{4} + 4 \Rightarrow x < \frac{17}{4}.$$

Logo, a solução é dada por $\{x > 4\} \cap \left\{x < \frac{17}{4}\right\}$.

Portanto $S = \left\{x \in \mathbb{R} | 4 < x < \frac{17}{4}\right\}$.

Resolução:

B) $\log_3(2x+6) > \log_3 x$

Condição de existência:
- $2x+6>0 \Rightarrow x>-3$
- $x>0$.

Como $3>1$, manteremos o sentido da desigualdade.

$$\log_3(2x+6) > \log_3 x$$
$$\Rightarrow 2x+6>x$$
$$\Rightarrow x>-6$$

Logo, a solução é dada por $\{x>0\} \cap \{x>-3\} \cap \{x>-6\}$.
Portanto $S=\{x \in \mathbb{R} | x>0\}$.

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Função Logarítmicas.

Resumo da apresentação

Nesta apresentação abordou-se a Função Logarítmica (definição, representação gráfica e propriedades) assim como a resolução de equações e inequações logarítmicas.

CRÉDITOS

Autor

Anízio Noronha Menezes Neto
Licenciado em Matemática.
Graduado em Administração.
Especialista em Docência de Matemática.

Autora

Erica Boizan Batista
Graduada em Matemática
Mestre em Matemática
Doutora em Matemática

Autor

Valdinês Leite de Sousa Júnior
Graduado em Matemática
Mestre em Matemática
Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Contextos e Aplicações, Volume 1. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos: 20. ed. São Paulo: Atual, 2013.

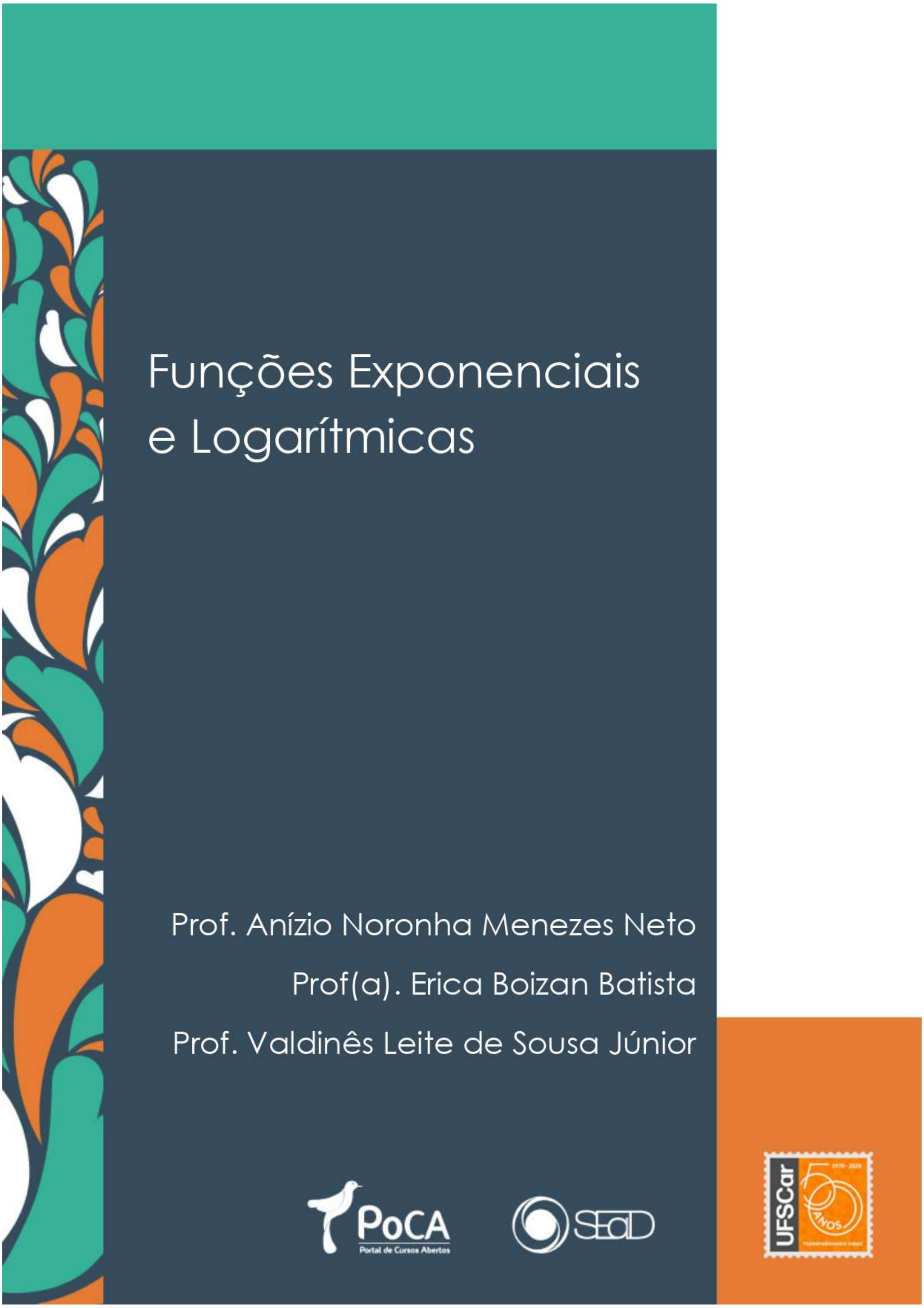
LIMA, Elon Lages. Números e Funções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SILVA, Claúdio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. Matemática Aula por Aula, 1ª Série. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

Track: "Tree Of Life"Música fornecida por https://Slip.stream Download grátis/Stream: https://get.slip.stream/RIa5kP

B. Apostila


Funções Exponenciais
e Logarítmicas
Prof. Anízio Noronha Menezes Neto
Prof(a). Erica Boizan Batista
Prof. Valdinês Leite de Sousa Júnior
PoCA
Portal de Cursos Abertos
SEaD
UFSCar

1

Funções Exponenciais e Logarítmicas

1. Potenciação e Função Exponencial

1.1. Potenciação: revisitando o conteúdo e recompondo saberes.

Em 1965, Gordon Moore fez uma previsão que ficou conhecida como a Lei de Moore, que afirma, em determinada área, que o número de transistores de um microprocessador dobraria a cada dois anos. O avanço das tecnologias da informática tem comprovado essa afirmação.

O conhecimento matemático, nesse caso sobretudo das Funções Exponenciais, permite compreender e projetar a evolução de dispositivos tecnológicos, e diversas outras situações, como, por exemplo, projetar o crescimento de uma população ao longo dos anos, calcular a rentabilidade de investimentos, calcular o decaimento radioativo ou meia-vida de um elemento químico.

Portanto, as aplicações práticas das funções exponenciais são inúmeras. Iniciaremos o nosso estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas a partir de uma revisão da Potenciação.

1.1.1. Potência de expoente natural.

Definição:

Sejam $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, denomina-se potência de base a e expoente n, ao número a^n, definido por:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^n = a.\,a^{n-1},\ \forall\, n \geq 1. \end{cases}$$

Assim, temos, em decorrência da definição acima que:

$$a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a$$

$$\vdots$$

$$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p\ vezes}$$

Assim sendo, para todo $p \in \mathbb{N}$, com $p \geq 2$, temos que a^p é igual a um produto de p fatores iguais a a.

Exemplos:

a) $(-15)^0 = 1$

b) $3^1 = 3$

c) $54 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, com $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$, sendo $a \neq 0$ ou $q \neq 0$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$.

Demonstração. Em decorrência da definição, temos que:

$$a^p \cdot a^q = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{\boxed{\text{p fatores}}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{\boxed{\text{q fatores}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\boxed{\text{p + q fatores}}} = a^{p+q}$$

Exemplos:

a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$, com $a \neq 0$ e $p \geq q$.

Demonstração. Consideremos os seguintes casos:

1º Caso: Se $p = q$, então:

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^p} = 1.$$

Por outro lado, aplicado a propriedade, temos:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = a^{p-p} = a^0 = 1.$$

De modo que, nesse caso, verifica-se a validade da propriedade.

2º Caso: Considerando $p > q$, aplicaremos o Princípio da Indução Finita sobre q, considerando o valor de p fixo. Assim:

1. Consideremos o caso base para $q = 1$:

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^1} = \frac{a^p}{a} = \frac{a.a^{p-1}}{a} = a^{p-1}.$$

2. Após ser verificada a validade para $q = 1$, consideremos, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $q = n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$. Logo:

$$\frac{a^p}{a^n} = a^{p-n}$$

3. Verifiquemos a validade para $n + 1$.

$$\frac{a^p}{a^{n+1}} = \frac{a^p}{aa^n} = \frac{a^{p-n}}{a} = \frac{a.a^{p-n-1}}{a} = a^{p-n-1} = a^{p-(n+1)}$$

Portanto, verifica-se que propriedade é válida para todo $q \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

a) $\frac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

b) $\frac{(-2)^{10}}{(-2)^8} = (-2)^{10-8} = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}$, com $b \neq 0$ ou $p \neq 0$.

Demonstração. Pelo Princípio da Indução Finita, aplicado sobre p, temos que:

1. A propriedade é válida para $p = 1$, pois:

$$(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$$

2. Consideremos, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $p \in \mathbb{N}$, assim:

$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

3. Provemos que a propriedade é válida para $p + 1$. Desse modo, temos que:

$$(a \cdot b)^{p+1} = (a \cdot b)^p.(a \cdot b) = \underbrace{a^p \cdot b^p}_{\textit{pela hipótese de indução}} \cdot a \cdot b = a^{p+1} \cdot b^{p+1}.$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot \sqrt{5}^2 = 9 \cdot 5 = 45$

b) $[(-2) \cdot 0{,}5]^3 = (-2)^3 \cdot 0{,}5^3 = -8 \cdot 0{,}125 = -1$

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^p}{b^p}$, com $b \neq 0$.

Demonstração. De igual modo, aplicaremos o Princípio da Indução Finita sobre p, assim, temos que:

1. A propriedade é válida para $p = 1$, pois:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$$

2. Podemos considerar, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $p \in \mathbb{N}$. Desse modo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^p}{b^p}$$

3. Provaremos a validade da propriedade para $p + 1$. Observe:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{p} \cdot \frac{a}{b} == \frac{a^p}{b^p} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}}$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $p \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{2} = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

b) $\left(\frac{-4}{5}\right)^{3} = \frac{(-4)^3}{5^3} = \frac{-64}{125} = -\frac{64}{125}$

5ª Propriedade: $(a^p)^q = a^{pq}$.

Demonstração. Também pelo Princípio da Indução Finita, aplicado sobre q, consideremos:

1. Como caso base, a propriedade é válida para $q = 1$. Vejamos:

$$(a^p)^1 = a^p = a^{p \cdot 1}$$

2. Tomando, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $p \in \mathbb{N}$, teremos:

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

3. Como se verifica abaixo, a propriedade é válida para $q + 1$. Observe:

$$(a^p)^{q+1} = (a^p)^q \cdot a^p = \underbrace{a^{pq} \cdot a^p = a^{pq+p}}_{\text{1ª Propriedade}} = a^{p(q+1)}$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $p \in \mathbb{N}$.

Observemos, ainda, que pela definição da potência a^p, como $a \in \mathbb{R}$, há as seguintes possibilidades: $a > 0$, $a = 0$, ou, $a < 0$.

Portanto, vamos considerar a seguir o que ocorre em cada caso:

1º Caso: $a > 0$.

Se $a > 0$, então $a^p > 0$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Ou seja, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real maior que zero.

2º Caso: $a = 0$.

Se $a = 0$, então $0^p = 0$, $\forall\, p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Observe que se $p = 0$, teremos 0^0, o que é uma indeterminação. E, de modo análogo, se p for negativo.

3º Caso: $a < 0$.

Se $a < 0$, então $\begin{cases} a^{2p} > 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \\ a^{2p+1} < 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ou seja, caso a base seja um real negativo, a potência será um real positivo se o expoente for par, e será um real negativo se o expoente for ímpar.

Exemplos:

a) $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

b) $((-10)^2)^5 = (-10)^{10} = 10.000.000.000$

Exercício resolvido:

1. Indique a propriedade utilizada em cada situação.

a) $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$;

b) $\frac{2^{15}}{2^5} = 2^{15-5} = 2^{10}$;

c) $\left(3\sqrt[3]{5}\right)^7 = 3^7\left(\sqrt[3]{5}\right)^7$;

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$;

e) $(7^2)^5 = 7^{2\cdot 5} = 7^{10}$.

Resposta:

a) $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ (1ª Propriedade);
b) $\frac{2^{15}}{2^5} = 2^{15-5} = 2^{10}$ (2ª Propriedade);
c) $\left(3\sqrt[3]{5}\right)^7 = 3^7\left(\sqrt[3]{5}\right)^7$ (3ª Propriedade);
d) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$ (4ª Propriedade);
e) $(7^2)^5 = 7^{2\cdot 5} = 7^{10}$ (5ª Propriedade).

2. Considerando $a.b \neq 0$, simplifique as expressões a seguir.

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3$

c) $\left(\frac{\boldsymbol{a^3 \cdot b^4}}{\boldsymbol{a^2 \cdot b^2}}\right)^{\mathbf{3}}$

d) $\frac{(a^2 \cdot b^5)^3 \cdot (a^{12} \cdot b^{10})}{a^{14} \cdot b^8}$

Resolução:

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3 = (a^{2\cdot 2} \cdot b^{5\cdot 2}) \cdot (a^{3\cdot 3} \cdot b^{7\cdot 3}) = a^4 \cdot b^{10} \cdot a^9 \cdot b^{21} = a^{4+9} \cdot b^{10+21} = a^{13} \cdot b^{31}$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3 = (a^3 \cdot b^4)^{2.3} = (a^3 \cdot b^4)^6 = a^{3.6} \cdot b^{4.6} = a^{18} \cdot b^{24}$

c) $\left(\frac{a^3 b^4}{a^2 b^2}\right)^3 = (a^{3-2} \cdot b^{4-2})^3 = (a \cdot b^2)^3 = a^{1\cdot 3} \cdot b^{2\cdot 3} = a^3 \cdot b^6$

d) $\frac{(a^2 b^5)^3 \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{(a^{2.3} b^{5.3}) \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{a^6 b^{15} a^{12} b^{10}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{6+12} b^{15+10}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{18} b^{25}}{a^{14} b^8} = a^{18-14} b^{25-8} = a^4 b^{17}$

Observação:

Pela definição da potência a^p, como $a \in \mathbb{R}$, há as seguintes possibilidades: $a > 0$, $a = 0$, ou, $a < 0$.

Vamos considerar o que ocorre em cada caso, a seguir:

1º Caso: $a > 0$**.**

Se $a > 0$, então $a^p > 0$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Ou seja, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real maior que zero.

2º Caso: $a = 0$**.**

Se $a = 0$, então $0^p = 0$, $\forall\, p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Observe que se $p = 0$, teremos 0^0, o que é uma indefinição, bem como se $p < 0$.

3º Caso: $a < 0$.

Se $a < 0$, então $\begin{cases} a^{2p} > 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \\ a^{2p+1} < 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ou seja, caso a base seja um real negativo, a potência será um real positivo se o expoente for par, e será um real negativo se o expoente for ímpar.

1.1.2. Potência de expoente inteiro negativo

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência de base *a* e expoente inteiro negativo $-n$ como o inverso da potência a^n. Ou seja, é válida a relação:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Propriedades:

Dada a definição anterior, de potência com expoente inteiro negativo, é importante observar que:

i. se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, não se define 0^{-n};
ii. ao se definir potência de expoente inteiro negativo, a 2ª Propriedade das potências com expoente natural, $\frac{\mathrm{a^q}}{\mathrm{a^p}} = \mathrm{a^{q-p}}$, com $a \neq 0$, passa a ter significado para $p > q$.

Assim, se $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;

Exemplo: $3^{-1} \cdot 3^{-2} = 3^{-1+(-2)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

2ª Propriedade: $\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}$;

Exemplo: $\frac{2^3}{2^{-2}} = 2^{3-(-2)} = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}$;

Exemplo: $(3\sqrt{5})^{-2} = 3^{-2} \cdot (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^p}{b^p}$;

Exemplo: $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{5^{-2}} = \frac{1}{4^2} : \frac{1}{5^2} = \frac{1}{16} : \frac{1}{25} = \frac{1}{16} \cdot \frac{25}{1} = \frac{25}{16}$

5ª Propriedade: $(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}})^{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}}$.

Exemplo: $(10^2)^{-2} = 10^{2(-2)} = 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$

Exercícios resolvidos:

1. Calcule o valor das expressões:

a) $\frac{(-3)^2+3^{-2}-3^{-1}}{3^3-3^{-3}+3^{-1}}$ b) $\frac{2^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\left(\frac{2}{4}\right)^2\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

Resolução:

a) $\frac{(-3)^2+3^{-2}-3^{-1}}{3^3-3^{-3}+3^{-1}} = \frac{9+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}}{27-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{81+1-3}{9}}{\frac{729-1+9}{27}} = \frac{\frac{79}{9}}{\frac{737}{27}} = \frac{79}{9} \cdot \frac{27}{737} = \frac{237}{737}$

b) $\frac{2^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\left(\frac{2}{4}\right)^2\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \frac{16-(-8)}{\left(\frac{2}{4}\right)^{-2}+4} = \frac{16+8}{\frac{16}{4}+4} = \frac{24}{4+4} = \frac{24}{8} = 3$

2. Considerando $ab \neq 0$, simplifique as expressões a seguir.

a) $(a^{-2}b^5)^{-2} \cdot (a^3b^{-7})^3$ b) $\frac{(a^{-2}b^5)^3 . (a^{12}b^{-10})}{(a^2b^5)^{-2}}$

Resolução:

a) $(a^{-2}b^5)^{-2} \cdot (a^3b^{-7})^3 = \left(a^{-2(-2)}b^{5(-2)}\right) \cdot (a^{3 \cdot 3}b^{-7 \cdot 3}) = a^4b^{-10}a^9b^{-21} =$
$a^{4+9}b^{-10+(-21)} = a^{13}b^{-31} = \frac{a^{13}}{b^{31}}$

b) $\frac{(a^{-2}b^5)^3 . (a^{12}b^{-10})}{(a^2b^5)^{-2}} = \frac{(a^{-2.3}b^{5.3}) . (a^{12}b^{-10})}{a^{2.(-2)}b^{5.(-2)}} = \frac{a^{-6}b^{15}a^{12}b^{-10}}{a^{-4}b^{-10}} = \frac{a^6b^5}{a^{-4}b^{-10}} = a^{6-(-4)}b^{5-(-10)} = a^{10}b^{15}$

1.1.3. Raiz enésima aritmética

Definição:

Consideremos um número real $a \geq 0$ e um natural n, com $n \geq 1$, existe um único real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Chamaremos o número b de raiz enésima aritmética de a, ou simplesmente, de raiz enésima de *a, e* representaremos por:

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Em $b = \sqrt[n]{a}$, a é chamado de radicando, n de índice, b de raiz e o símbolo $\sqrt{}$ de radical.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{1000} = 10$, pois $10^3 = 1000$;

b) $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$.

Consequências da definição

1. Decorre que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, para todo $a \geq 0$.

2. Temos, por definição, que $\sqrt[n]{a} = b$. Sendo assim, vale ressaltar que a raiz quadrada de um natural p será dada por $\sqrt{p} = q$, o que difere de $\sqrt{p} = \pm q$. Desse modo, por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{9} = 3$ → Expressa a forma de forma correta a raiz quadrada de 9.

II - $\sqrt{9} = \pm 3$ → Não expressa a raiz quadrada de 9.

Entretanto, são verdadeiras as sentenças a seguir, nas quais o radical não interfere no sinal que antecede à raiz:

a) $-\sqrt{25} = -5$; b) $-\sqrt[3]{27} = -3$; c) $\pm\sqrt{16} = \pm 4$

3. Notemos que no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito ocorre que:

$\sqrt{a^2} = |a|$.

Verdadeiramente, $\sqrt{a^2}$ é, por definição, o número real positivo ou nulo que elevado ao quadrado resulta em a^2, e como $a^2 = |a|^2$ e $|a| \geq 0$, segue que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$ → Expressa de forma correta a raiz quadrada de $(-11)^2$.

II - $\sqrt{(-11)^2} = -11$. → Não expressa a raiz quadrada de $(-11)^2$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, então, são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}}$**,** com $a \neq 0$ ou $\mathrm{m} \neq 0$**.**

Demonstração. Seja $\sqrt[n]{a^m} = b$**,** por definição:

$$\sqrt[n]{a^m} = b \Rightarrow a^m = b^n$$

Elevando ambos os membros da igualdade a *p*:

$$(a^m)^p = (b^n)^p$$

$$\Rightarrow a^{mp} = b^{np}$$

$$\Rightarrow a^{mp} = b^{np}$$

$$\Rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = b$$

$$\Rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $\sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2\cdot 6]{2^{3\cdot 6}} = \sqrt[12]{2^{18}}$.

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$**.**

Demonstração. Tomemos:

$$k = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Elevando ambos os membros da igualdade a n*, temos*:

$$k^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$\Rightarrow k^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$\Rightarrow k^n = ab$$

$$\Rightarrow k = \sqrt[n]{ab}$$

Assim, conclui-se a demonstração.

Exemplo: $\sqrt[3]{2 \cdot 7} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$.

3ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0.}$

Demonstração. Observe que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{ab^{-1}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b^{-1}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \sqrt[n]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \blacksquare$$

Exemplo: $\sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.}$

Demonstração. Façamos:

$$k = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\Rightarrow k^n = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n = \sqrt[m]{a}$$

$$\Rightarrow (k^n)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m$$

$$\Rightarrow k^{nm} = a$$

$$\Rightarrow k = \sqrt[nm]{a}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[3 \cdot 5]{5} = \sqrt[15]{5}.$

5ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.}$

Demonstração. Para provarmos a propriedade, iremos considerar n fixo, com $m \geq 0$, e aplicaremos o Princípio da Indução Finita em m.

1. Inicialmente, verifiquemos a validade da propriedade para $m = 0$;

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}.$$

2. Após a constatação da veracidade do caso base, suponhamos, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $m > 0$.

3. Provemos, então, a validade da propriedade para $m + 1$. Assim, temos:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m+1} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right) = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m \cdot a} = \sqrt[n]{a^{m+1}}$$

Logo, a propriedade é válida para todo $m \geq 0$.

Consideremos agora que, se $m < 0$, façamos $-m = p > 0$, então:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^p} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Desse modo, demonstra-se a validade da propriedade para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Exemplo: $\left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{3^2}$.

Exercícios resolvidos:

1. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

b) $\sqrt[4]{80} : \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} : \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

d) $\left(2\sqrt{27} - \sqrt{48} + 3\sqrt{75}\right) \cdot \sqrt{3}$

Resolução:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{125} = 5$

b) $\sqrt[4]{80} : \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} : \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3.4]{\left(\frac{2}{5}\right)^4} : \sqrt[4.3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[12]{\frac{16}{625}} : \sqrt[12]{\frac{1}{8}} = \sqrt[12]{\frac{16}{625} . 8} = \sqrt[12]{\frac{128}{625}}$

d) $\left(2\sqrt{27} - \sqrt{48} + 3\sqrt{75}\right) \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{48} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{75} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{81} - \sqrt{144} + 3\sqrt{225} = 2 \cdot 9 - 12 + 3 \cdot 15 = 18 - 12 + 45 = 51$

1.1.4. Potência de expoente racional

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$, e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*)$ define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, então, consideramos $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$;

b) $3^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}$

Demonstração.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{14}{6}} = 10^{\frac{2}{3}+\frac{14}{6}} = 10^{\frac{4+14}{6}} = 10^{\frac{18}{6}} = 10^3 = 1000.$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}}$

Deixaremos a demonstração dessa propriedade a cargo do leitor, como forma de exercício.

Exemplo: $\frac{3^{\frac{8}{9}}}{3^{\frac{4}{9}}} = 3^{\frac{8}{9}-\frac{4}{9}} = 3^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{3^4}$

3ª Propriedade: $\boldsymbol{(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}}$

Deixaremos a demonstração dessa propriedade a cargo do leitor, como forma de exercício.

Exemplo: $(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3.$

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}}$

Demonstração. A partir de propriedades já demonstradas, temos que:

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}}{(5\sqrt{5})^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}.\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}.\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}.$

5ª Propriedade: $\left(\boldsymbol{a}^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \boldsymbol{a}^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$

Deixaremos a demonstração dessa propriedade a cargo do leitor, como forma de exercício.

Exemplo: $\frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{6}{3}}}{5^{\frac{6}{3}}} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}.$

1.1.5. Potência de expoente irracional

Podemos encontrar, baseado nas potências com expoentes racionais, um único número real positivo a^r, com $a > 0$ e r pertencente ao conjunto dos números irracionais.

Tomemos, por exemplo, a potência $2^{\sqrt{2}}$. Identificando os racionais aproximado por falta (R1) e por excesso (R2) de $\sqrt{2}$, podemos obter equivalentemente os valores por falta (V1) ou por excesso (V2) para a potência $2^{\sqrt{2}}$.

R1	R2	V1	V2
1	2	2^1	2^2
1,4	1,5	$2^{1,4}$	$2^{1,5}$
1,41	1,42	$2^{1,41}$	$2^{1,42}$
1,414	1,415	$2^{1,414}$	$2^{1,415}$
1,4142	1,41423	$2^{1,4142}$	$2^{1,4142}$
↳	< $\sqrt{2}$ < ↲	↳	< $2^{\sqrt{2}}$ < ↲

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e r um número irracional, consideremos os conjuntos $R1 = \{m \in \mathbb{Q} \mid m < r\}$ (dos racionais que se aproximam por falta de r) e $R2 = \{n \in \mathbb{Q} \mid r < n\}$ (dos racionais que se aproximam por excesso de r).

Notemos que:

1. Todo elemento de $R1$ é menor qualquer elemento de $R2$.

2. Existem dois racionais m e n tais que $\mathrm{m} < r < n$ e a diferença $(n - r)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em função dos conjuntos $R1$ e $R2$, temos como imagem os conjuntos $V1 = \{a^m |\ m \in R1\}$ e $V2 = \{a^n |\ n \in R2\}$.

Se $a > 0$, então, temos que:

1. Todo racional $m \in V1$ é menor que qualquer racional $n \in V2$;
2. Há dois números a^m e a^n, tais que a sua diferença $(a^m - a^n)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Assim sendo, a^m e a^n são, respectivamente, aproximações por falta e excesso de a^r, e que $V1$ e $V2$ tendem para a^r.

Se $0 < a < 1$, então, $V1$ e $V2$, de forma análoga, tendem para a^r.

1.1.6. Potência de expoente real

Como já estão definidas todas as potências de a^b, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente b (racional ou irracional), está definida a potências de a^b com $b \in \mathbb{Q}$.

Observamos que:

1. Toda potência de base real positiva e de expoente real, é um número real positivo;

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0,\ \forall\ b\ \in \mathbb{R}.$$

2. Para as potências de expoente real, valem as propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$;

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$;

3ª Propriedade: $\boldsymbol{(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p}$, com $(a \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ p \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R})$;

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ p \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R})$;

5ª Propriedade: $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p\cdot q}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$**.**

Exercícios resolvidos:

1. Determine o valor de:

a) $\left(\frac{1}{1024}\right)^{-\frac{2}{5}}$ b) $\left(3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{5}}\right) : 3^{\frac{41}{15}}$

Resolução:

a) $\left(\frac{1}{1024}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{-\frac{2}{5}} = (2^{10})^{\frac{2}{5}} = 2^{10\cdot\frac{2}{5}} = 2^{4} = 16$

b) $\left(3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{5}}\right): 3^{\frac{41}{15}} = \; 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}: 3^{\frac{41}{15}} = \; 3^{\frac{11}{15}}: \; 3^{\frac{41}{15}} = 3^{\frac{11}{15}-\frac{41}{15}} = 3^{-\frac{30}{15}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

1.2. Função Exponencial.

Em várias situações práticas, como nos cálculos dos juros de uma aplicação ou financiamento bancário, do crescimento de uma população, da depreciação de um bem, da meia-vida de um isótopo radioativo, dentre outros, aplicam-se o conceito e as propriedades das funções exponenciais.

Figura 1-Representação do crescimento dos juros em uma aplicação financeira. (imagem do estoque do MS Office).

Dentre as inúmeras aplicações práticas, com a rapidez da evolução tecnológica, sobretudo na era das tecnologias digitais, testemunhamos o que alguns chamam de tecnologias exponenciais, dada a sua curva de desenvolvimento. Para Medeiros Neto (2017), "uma tecnologia exponencial é aquela que está rapidamente acelerando e modelando pequenas e grandes indústrias e, ainda, influenciando muitos aspectos de nossas vidas. Dentro das tecnologias exponenciais incluem-se a Inteligência Artificial, a Realidade Aumentada (RA) e a Realidade Virtual (RV); a Ciência de Dados, a Biologia Digital e a Biotecnologia e, ainda, a Medicina; a Nanotecnologia e a Fabricação Digital, as Redes e Sistemas Computacionais, a Robótica e a Robótica de Carros."

Consideremos, por exemplo, uma situação na qual se observa em laboratório que uma colônia com quantidade estimada de 100 bactérias dobra a cada minuto de observação. Quantas bactérias terá a colônia após 2 minutos? E após 5 minutos?

Podemos verificar facilmente (observe a tabela abaixo) que o crescimento da quantidade de bactérias ocorre de forma exponencial. Para compreender melhor situações como esta, aprofundaremos o estudo das funções exponenciais.

Nº de bactérias	Tempo de observação (em minutos)
100 = 100 x 2^0	0
200 = 100 x 2^1	1
400 = 100 x 2^2	2
800 = 100 x 2^3	3
1600 = 100 x 2^4	4

Tabela 1 - Crescimento do número de bactérias em função do tempo em minutos.

1.2.1. Definição de Função Exponencial.

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, denomina-se **função exponencial** toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ que associa a cada x real o número a^x.

Assim, temos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \rightarrow a^x$$

Exemplos de funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$ b) $g\ (x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ c) $h\ (x) = \left(\sqrt{7}\right)^x$

Observações:

Pela definição dada anteriormente, temos que em uma função exponencial, $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Mas afinal, porque a base deve ser positiva e diferente de 1?

Se admitíssemos que $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, supondo $a = -5$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ (que não está definida em $\mathbb{R}$).

Por outro lado, admitindo $a = 1$, então $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

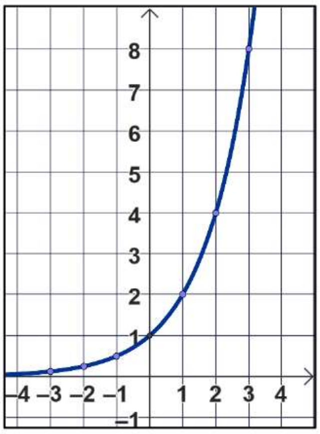
1.2.2. Gráfico da Função Exponencial.

Esboçaremos a seguir gráficos de funções exponenciais no plano cartesiano e examinaremos o comportamento dessas funções a partir desses gráficos.

1° Caso: Tomemos uma função $f(x) = \ a^x$, com $a > 1$.

Por exemplo, seja a função $f(x) = \ 2^x$, logo, temos:

x	$f(x)$
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8



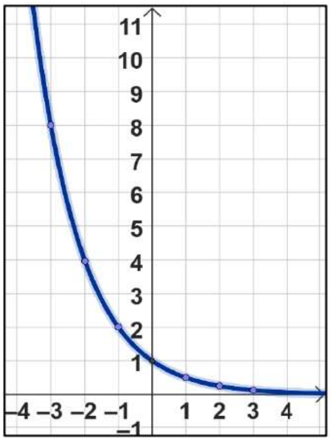
Observe que, quanto **maior** o valor do expoente x, **maior** o valor de $f(x)$, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = \ a^x$ é **crescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, $\forall\ x_2$ e x_1 reais.

Vale lembrar que $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ e que f é crescente em todo o seu domínio.

2° Caso: Consideremos a função $g(x) = \ a^x$, com $0 < a < 1$.

Esboçamos, por exemplo, o gráfico da função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, logo, temos:

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125



Nesse caso, quanto **maior** o valor do expoente x, **menor** o valor de $g(x)$, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $g(x) = a^x$ é **decrescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1)$, $\forall\ x_2$ e x_1 reais.

Ressalta-se que $D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$ e g é decrescente em todo o seu domínio.

1.2.3. Propriedades da Função Exponencial.

1ª Propriedade. Dada a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, temos:

$x = 0 \Rightarrow a^0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$, $\forall\ a \in \mathbb{R}_+^*$, onde $a \neq 1$.

Ou seja, o par ordenado (0,1) pertence a f, $\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Portanto, como pudemos observar nos gráficos anteriores, em toda função exponencial, o gráfico intersecta o eixo y ponto de ordenada 1.

2ª Propriedade. A função $f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é:

a) Crescente se $a > 1$, ou seja, $f(x_2) = a^{x_2} > f(x_1) = a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$;

b) Decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, $f(x_2) = a^{x_2} < f(x_1) = a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$.

3ª Propriedade. A função $f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetiva. Verificamos facilmente esta propriedade, observando que, de acordo com a propriedade anterior:

$f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1$.

1.2.3. Equação Exponencial.

Define-se como Equação Exponencial, toda equação que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma base real e diferente de 1. Desse modo, são exemplos de equações exponenciais:

A) $3^x = 729$;

B) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} = 0{,}008$;

C) $3^{4x} + 9^x = 27$;

D) $5^{-x+1} - \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+4} = 0$.

Há basicamente dois métodos utilizados para resolver equações exponenciais.

A seguir veremos o primeiro método, enquanto o segundo iremos abordar após o estudo de logaritmos.

Aplicaremos o método da redução a uma base comum, que consiste em reduzir ambos os membros da igualdade a uma potência de mesma base.

Como uma função exponencial, $f(x) = a^x$, é injetiva, com $a > 0$ e $a \neq 1$, vale a seguinte propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Vamos então, resolver algumas equações.

Exemplos:

A) $3^x = 81$

Resolução:

$$3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

B) $\frac{1}{32} = 8^x$

Resolução:

$$8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Rightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

C) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x+1}}$

Resolução:

$$8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (2^3)^{2x+1} = ((2^2)^{x+1})^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{\frac{2x+2}{3}}$$

$$\Rightarrow 6x + 3 = \frac{2x+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (6x+3).3 = \frac{2x+2}{3}.3$$

$$\Leftrightarrow 18x + 9 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 18 - 2x = 2 - 9$$

$$\Leftrightarrow 16x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{16}.$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{7}{16}\right\}$.

D) $5^{2x+4}.25^{4x+5} = 125^{2x+10}$

Resolução:

$$5^{2x+4}.25^{4x+5} = 125^{2x+10}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2x+4}.(5^2)^{4x+5} = (5^3)^{2x+10}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2x+4}.5^{8x+10} = 5^{6x+30}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2x+8x+4+10} = 5^{6x+30}$$

$$\Leftrightarrow 5^{10x+14} = 5^{6x+30}$$

$$\Rightarrow 10x + 14 = 6x + 30$$

$$\Leftrightarrow 10x - 6x = 30 - 14$$

$$\Leftrightarrow 4x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{4} = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

1.2.4. Inequação Exponencial.

Define-se como Inequação Exponencial, toda inequação que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma base real, positiva e diferente de 1. Desse modo, são exemplos de inequações exponenciais:

A) $3^x < 2$;

B) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} > 1$;

C) $3^{4x} \geq 27$;

D) $5^{x+1}.\ \left(\frac{1}{25}\right)^{3x} \leq 0.$

Do mesmo modo que nas equações exponenciais, há dois métodos utilizados para resolver inequações exponenciais.

A seguir veremos o primeiro método, enquanto o segundo iremos abordar após o estudo de logaritmos.

Este método será aplicado quando ambos os membros da desigualdade puderem ser representados como potências de uma mesma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Como uma função exponencial, $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, temos que:

para $a > 1;\ a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R};$

para $0 < a < 1;\ a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}.$

Exemplos:

A) $3^x > 729$

Resolução:

$$3^x > 729 \Leftrightarrow 3^x > 3^6$$

Como a base é maior que 1, temos que $x > 7$.

$S = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 7\}.$

B) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \frac{625}{16}$

Resolução:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \frac{625}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$$

Como a base é menor que 1, temos que $2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2.$

$S = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq -2\}.$

C) $(2^x)^{3x+8} < \frac{1}{32}$

Resolução:

$$(2^x)^{3x+8} < \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{3x^2+8x} < 2^{-5}$$

Como a base é maior que 1, temos que: $3x^2 + 8x < -5 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 5 < 0$.

Tomando a função $f(x) = 3x^2 + 8x + 5$:

I. Encontremos as suas raízes;

$3x^2 + 8x + 5 = 0$

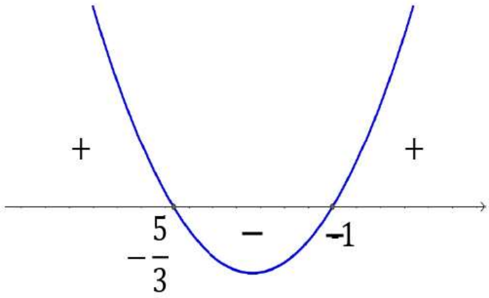
$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.3.5}}{2.3} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$.

Logo $x' = -1$ e $x'' = -\frac{5}{3}$.

Logo conclui-se que $-\frac{5}{3} < x < -1$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} < x < -1\right\}$.

II. Em seguida façamos o estudo do sinal da função:



Exemplo:

Um automóvel foi comprado por R$ 160.000,00 e sabe-se que ele conta com uma provável desvalorização de 5% ao ano, ou seja, o seu valor de mercado em t anos é dado pela função $V(t) = 160000.(0{,}95)^t$. Em quanto tempo o valor de mercado desse automóvel será menor que R$ 137.180,00?

Resolução:

Do enunciado, devemos encontrar t de modo que:

$$V(t) < 137.180 \Leftrightarrow 160000.(0{,}95)^t < 137.180$$

$$\Rightarrow 160000.(0{,}95)^t < 137.180$$

$$\Leftrightarrow (0{,}95)^t < \frac{137.180}{160.000} \Leftrightarrow (0{,}95)^t < 0{,}857375$$

$$\Leftrightarrow (0{,}95)^t < (0{,}95)^3$$

Como a base é menor que 1, temos que $t > 3$. Portanto, após 3 anos, o valor do automóvel será inferior a R$ 137.180,00.

2. Logaritmos e Função Logarítmica

2.1. Logaritmos.

Cálculos que hoje consideramos elementares e que aprendemos nos primeiros anos de educação escolar não eram aprendidos por todos até bem pouco tempo. Por exemplo, na Europa, multiplicar e dividir somente era ensinado nas universidades até o século XVII, e com métodos diferentes e bem mais árduos do que os atualmente difundidos.

Imaginemos os cálculos desgastantes realizados pelo astronômico e matemático Johannes Kepler (1571-1630), como 3,25694 3×1,78090 ou 3,25694 4÷1,78090, comuns em estudos astronômicos, ao construir as chamadas Leis de Kepler, e como teria sido mais fácil fazê-los após o avanço da matemática.

O matemático escocês Jonh Napier (1550-1617), também conhecido como Neper, se preocupou em facilitar a realização desse tipo de cálculo e em 1614 publicou a obra a **teoria dos logaritmos**.

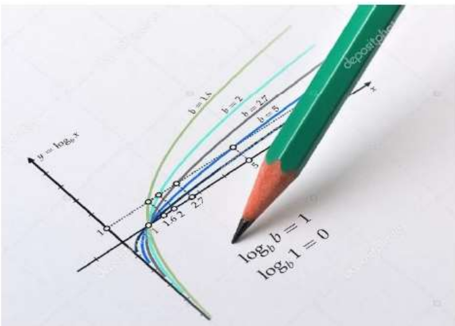


Figura 2-Lápis e funções logarítmicas. Foto de benjaminec. Fonte: https://br.depositphotos.com/309674230/stock-photo-logarithm-functions-and-a-pencil.html

Figura 3-John Napier (1550-1617). Autor desconhecido. Fonte: John Napier – Wikipedia.

E assim, surgiram os logaritmos, simplificando cálculos antes mais trabalhosos, posto que multiplicações e divisões podem ser transformadas em operações de soma e subtração, bem mais simples, bem como potenciação e radiciação, que podem ser transformadas em multiplicação e divisão, respectivamente.

Os logaritmos possuem diversas aplicações em vários ramos das ciências, como a Astronomia, a Física, a Química, a Medicina e a Economia, dentre outros tantos.

2.1.1. Definição de Logaritmo.

Definição:

Sejam, a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, denomina-se **logaritmo** de b na base a o expoente x que se deve dar a base a, de modo que $a^x = b$.

Assim, temos que se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+$, então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Onde, em $\log_a b = x$, a é a **base**, b é o **logaritmando** e x é o **logaritmo**.

A operação pela qual se determina um logaritmo é denominada **logaritmação**.

Para compreender melhor, consideremos uma potência qualquer de base positiva e diferente de 1, como, por exemplo:

$$5^2 = 25$$

Isso equivale a:

$$\log_5 25 = 2$$

Ao expoente, agora, damos o nome de **logaritmo**. Logo 2 é logaritmo de 25 na base 5.

A existência e a unicidade do logaritmo $x = \log_a b$, são garantidas pelas restrições impostos, a e b são números reais, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Exemplos:

a) $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$;

b) $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$;

c) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, pois $5^{-2} = \frac{1}{25}$;

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$, pois $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$;

e) $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$;

f) $\log_{11} 1 = 0$, pois $11^0 = 1$.

2.1.2. Logaritmo decimal.

Ao logaritmo cuja base é 10 denomina-se **logaritmo decimal**.

No logaritmo decimal de **logaritmando** a, fica subentendida a base 10, sendo indicado o logaritmo decimal por $\boldsymbol{\log a = x}$.

Certamente, uma das escalas logarítmicas mais conhecidas em todo o mundo é a Escala Richter. Ela recebe esse nome em homenagem ao seu criador, o sismólogo norte-americano Charles Francis Richter (1900-1985), que estabeleceu um modo de medir a intensidade de um terremoto a partir da energia E liberada durante o tremor.

De acordo com essa escala, pode-se calcular a intensidade I de um terremoto em função da energia E, em quilowatt-hora, liberada pelo terremoto, a partir da seguinte fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0},$$

onde, $E_0 = 7.10^{-3}$kWh e o logaritmo é de **base 10**, ou seja, é um **logaritmo decimal**.

2.1.3. Propriedades dos logaritmos.

A partir das propriedades da potenciação, que estudamos anteriormente, podemos chegar às seguintes propriedades dos logaritmos, para quaisquer reais a e b, com $b \neq 1$.

1ª Propriedade: $\boldsymbol{\log_b b = 1}$.

Vejamos que, indicando $\log_b b = x$, temos:

$$\log_b b = x \underset{def}{\Leftrightarrow} b^x = b \Leftrightarrow x = 1.$$

Portanto, $\log_b b = 1$.

Exemplos:

a) $\log_5 5 = 1$; b) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$;

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\log_b 1 = 0}$.

Realmente, ao indicarmos $\log_b 1 = \mathrm{x}$, temos que:

$$\log_b 1 = x \underset{def}{\Leftrightarrow} b^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Desse modo, $\log_b 1 = 0$.

a) $\log_5 1 = 0$; b) $\log_{\sqrt{\pi}+3} 1 = 0$;

3ª Propriedade: $\boldsymbol{\log_b a^y = y \log_b a}$, $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$.

Tomando:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Ao elevarmos ambos os lados da igualdade acima a y temos:

$$(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{xy} = a^y \Leftrightarrow \log_b a^y = xy$$

Daí, como consideramos $\log_b a = x$, temos:

$\log_b a^y = y \log_b a$.

Como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $\log_5 25^2 = 2 \log_5 25 = 2.2 = 4$;

b) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{625}{81} = \log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = -4. \log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{5} = -4.1 = -4.$

4ª Propriedade: $\mathbf{\log_b b^x = x}$.

De fato, de acordo com a 3ª e a 1ª propriedades, respectivamente, temos que:

$\log_b b^x = x \log_b b = x.1 = x.$

Portanto, $\log_b b^x = x$.

Exemplos:

a) $\log_\pi \pi^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;

b) $\log_3 \left(\sqrt[3]{3}\right)^5 = \log_3 3^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$.

5ª Propriedade: $\boldsymbol{b^{\log_b a} = a}$.

Observemos que, se $b^x = a \Leftrightarrow \log_b a = x$, então, $b^x = \boldsymbol{b^{\log_b a} = a}$.

Exemplos:

a) $3^{\log_3 9} = 9$;

b) $\pi^{\log_\pi 10} = 10$.

6ª Propriedade: $\boldsymbol{\log_b ac = log_b\, a + log_b\, c}$, $\forall\, a,\ b$ e c reais positivos, com $b \neq 1$.

Para demonstrar essa propriedade, consideremos:

$$\begin{cases} \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c \end{cases} \Rightarrow ac = b^x . b^y = b^{x+y} \Leftrightarrow \log_b ac = x + y = log_b\, a + log_b\, c.$$

Portanto, $\log_b ac = log_b\, a + log_b\, c$, como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 4 + 1 = 5$;

Observe que a propriedade nos permite transformar o logaritmo de um produto na soma de logaritmos, facilitando muitos cálculos. Também podemos transformar uma soma de logaritmos no logaritmo de um produto, quando for pertinente, veja no próximo exemplo.

b) $\log_{\sqrt{12}} 3 + \log_{\sqrt{12}} 2\sqrt{3} + \log_{\sqrt{12}} 8\sqrt{3} = \log_{\sqrt{12}} \left(3.2\sqrt{3}.8\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{12}} 144 = 4.$

7ª Propriedade: $\boldsymbol{\log_b \frac{a}{c} = log_b\, a - log_b\, c}$, $\forall\, a,\ b$ e c reais positivos, com $b \neq 1$.

De modo análogo a propriedade anterior, para demonstrar essa propriedade, consideremos:

$$\begin{cases} \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \Leftrightarrow \log_b \frac{a}{c} = x - y = log_b\, a - log_b\, c.$$

Portanto, $\log_b \frac{a}{c} = log_b\, a - log_b\, c$, como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $\log_5 0{,}04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 1 - \log_5 25 = 0 - 2 = -2$;

Veja que esta propriedade nos permite transformar o logaritmo de um quociente na diferença de logaritmos, conforme seja conveniente, e, de igual, fazer o inverso, conforme se pode ver no próximo exemplo.

b) $\log_2 44 - \log_2 11 = \log_2 \frac{44}{11} = \log_2 4 = 2$.

8ª Propriedade (mudança de base): $\boldsymbol{\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}_+^*$ com $k \neq 1$.

Demonstraremos essa propriedade, tomando:

$$\begin{cases} \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_k a = y \Leftrightarrow k^y = a \Rightarrow b^x = a = k^y \Leftrightarrow (k^z)^x = k^y \Leftrightarrow k^{zx} = k^y \Leftrightarrow zx = y, \text{ daí:} \\ \log_k b = z \Leftrightarrow k^z = b \end{cases}$$

$\log_k b \,.\log_b a = \log_k a \Leftrightarrow log_b\, a = \frac{log_k\, a}{log_k\, b}$. ■

Exemplos:

a) $\log_{32} \sqrt[3]{2} = \frac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\log_2 32} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{3} . \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$;

A 8ª Propriedade nos permite realizar a mudança para outra base de modo a facilitar a realização de alguns cálculos.

Observações:

1. A 8ª propriedade também pode ser descrita da seguinte forma:

$$\log_a b = \log_c b \,.\log_a c\,;$$

Onde a, b e c reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$.

Demonstração:

Passando $\log_c b$ para a base a;

$$\log_c b \,.\log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c} . \log_a c = \log_a b.$$

2. Sendo a e b reais positivos, com $a \neq 1$:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Demonstração:

Passando $\log_a b$ para a base b;

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

3. Se a e b reais positivos, com $a \neq 1$ e dado o real $\theta \neq 0$, temos:

$$\log_{a^\theta} b = \frac{1}{\theta}\log_a b.$$

Demonstração:

Consideraremos dois casos:

1º Caso: Se $b = 1$, temos:

$$\begin{cases} \log_a 1 = 0 \\ \log_{a^\theta} 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \log_{a^\theta} 1 = \frac{1}{\theta}\log_a 1.$$

2º Caso: Se $b \neq 1$, temos:

$$\log_{a^\theta} b = \frac{1}{\log_b a^\theta} = \frac{1}{\theta \log_b a} = \frac{1}{\theta}.\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\theta}.\log_a b.$$

Exemplos:

a) $\log_3 5 = \log_2 5 . \log_3 2$;

b) $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$;

c) $\log_8 5 = \log_{2^3} 5 = \frac{1}{3}.\log_2 5$.

Exercícios resolvidos:

1. Calcule $\log 6$, sabendo que $\log 5 = 0{,}69$ e $\log 3 = 0{,}48$.

Resolução.:

$\log 6 = \log \frac{10.3}{5} = \log 10 + \log 3 - \log 5 = 1 + 0{,}48 - 0{,}69 = 0{,}79$.

2. Determine o valor de x para que os logaritmos abaixo estejam definidos.

a) $\log_3(x-5)$ b) $\log_{(5-x)} 10$

Resolução.:

Primeiramente, pela definição de logaritmo, em qualquer $\log_b a$, temos que $a > 0$ e $b > 0$, com $b \neq 1$.

a) $\exists \log_3(x-5) \Leftrightarrow x-5>0 \Leftrightarrow x>5$.

b) $\exists \log_{5-x} 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x>0 \Leftrightarrow \ -x>-5 \ \Leftrightarrow x<5 \\ 5-x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 1-5 \Leftrightarrow \ -x \neq -4 \Leftrightarrow \ x \neq 4 \end{cases}$.

3. Calcule o valor de x em cada equação abaixo.

a) $\log_5(2x-3) = -2$ b) $\log_{2x} 216 = 3$

Resolução.:

a)$\log_5(2x-3) = -2$

Para que haja solução, pela definição de logaritmo, é necessário que:

$$2x-3>0 \Leftrightarrow 2x>3 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$$

E tendo que:

$$2x-3=5^{-2} \Leftrightarrow 2x-3=\frac{1}{25} \Leftrightarrow 50x-75=1 \Leftrightarrow 50x=1+75=76 \Leftrightarrow x=\frac{76}{50}=\frac{38}{25}$$

Como $\frac{38}{25} > \frac{2}{3}$, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{38}{25}\right\}$.

b) $\log_{2x} 216 = 3$

São condições necessária para existência do logaritmo que $2x > 0 \ \Leftrightarrow \ x > 0$ e que $2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Temos:

$(2x)^3 = 216 \Leftrightarrow 8x^3 = 216 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow \ x = \sqrt[3]{27} = 3$.

Logo, $S = \{3\}$.

2.1.4. Sistemas de Logaritmos

Chamamos de sistemas de logaritmos a um conjunto de valores de logaritmos em uma mesma base $\boldsymbol{a}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Destacam-se, pela importância, os seguintes sistemas de logaritmos:

o sistema de logaritmos na base 10;

o sistema de logaritmos na base $\boldsymbol{e}$.

O símbolo $\boldsymbol{e}$ representa um número irracional, cujo valor aproximado é 2,7182818, sendo chamado de **número de Euler**, mas em algumas obras poderá ser encontrado com a nomenclatura de **número de Napier** ou **Neper**, constante de Néper, número neperiano ou número exponencial).

Para todo real x, com $x > 0$, denotamos:

$$\log_e x = \ln x.$$

A esse tipo de logaritmos denomina-se **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural.** A nomenclatura de logaritmo neperiano é dada em homenagem a Napier, que além de formalizar a teoria dos logaritmos, calculou o número ***e*** em suas primeiras casas decimais.

Exemplos:

1. Calcule:

a) $\ln 1$ b) $\ln e$ c) $e^{\ln 5}$ d) $\ln e^7$

Resolução:

Pelas propriedades dos logaritmos, temos:

a) $\ln 1 = 0$ b) $\ln e = 1$ c) $e^{\ln 5} = 5$ d) $\ln e^7 = 7$

2. Sendo $\log_{10} e \cong 0{,}4342945$, determine:

a) $\ln 100$ b) $\ln 0{,}001$ c) $\ln 25 + \ln 40$

Resolução:

a) $\ln 100 = \frac{\log 100}{\log e} = \frac{2}{0{,}4342945} \cong 4{,}605.$

b) $\ln 0{,}001 = \frac{\log 0{,}001}{\log e} = \frac{\log\frac{1}{1000}}{\log e} = \frac{-3}{0{,}4342945} \cong -6{,}908.$

c) $\ln 25 + \ln 40 = \ln 25.40 = \ln 1000 = \frac{\log 1000}{\log e} = \frac{3}{0{,}4342945} \cong 6{,}908.$

2.1.5. Resolução de Equações e Inequações Exponenciais.

Retomaremos agora o estudo da resolução de equações e inequações exponenciais, utilizando o que aprendemos sobre logaritmos e suas propriedades para resolvermos equações e inequações que não podem ser reduzidas a igualdades (ou desigualdades) de potências de mesma base por meio das propriedades das potências.

A resolução desse tipo de equação, ou inequação, se baseia na própria definição de logaritmo, ou seja, se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, tem-se que:

$a^x = b \Leftrightarrow \log_b a = x.$

Vamos resolver alguns exemplos para compreendermos bem.

Exemplos:

1. Resolva as equações exponenciais a seguir.

a) $3^x = 10$ b) $8^{x+1} - 2^{3x} = 5^{x+3} - 5^{x+2}$

Resolução:

a) Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$3^x = 10 \underset{def}{\Leftrightarrow} \log_3 10 = x.$

Portanto, $S = \{\log_3 10\}$.

De outro modo, como $3^x > 0$ e $10 > 0$, podemos aplicar um logaritmo de base b qualquer, desde que $b > 0$, aos dois membros da igualdade. Vejamos:

$$3^x = 10 \Rightarrow \log 3^x = \log 10 \Rightarrow x \log 3 = \log 10 \Rightarrow x = \frac{\log 10}{\log 3} = \log_3 10$$

b) $8^{x+1} - 2^{3x} = 5^{x+3} - 5^{x+2} \Leftrightarrow 8^{x+1} - 8^x = 5^{x+3} - 5^{x+2}$

Colocaremos 8^x em evidência no primeiro membro e 5^x no segundo:

$$8^x(8-1) = 5^x(5^3 - 5^2) \Leftrightarrow 8^x.7 = 5^x.(125-25) \Leftrightarrow \frac{8^x}{5^x} = \frac{100}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^x = \frac{100}{7} \Leftrightarrow \log_{\frac{8}{5}}\left(\frac{100}{7}\right) = x.$$

Logo, $S = \left\{\log_{\frac{8}{5}}\left(\frac{100}{7}\right)\right\}$.

2. Resolva as inequações exponenciais a seguir.

a) $3^x < 6$ b) $5^{2x} - 7.5^x > -10$

Resolução:

a) Como $3^x > 0$ e $6 > 0$, aplicaremos uma logaritmação de base 3 aos dois membros da inequação.

$3^x < 6 \Leftrightarrow \log_3 3^x < \log_3 6 \Rightarrow x \log_3 3 < \log_3 6 \Rightarrow x < \log_3 6.$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | \; x < \log_3 6\}$.

b) Fazendo $5^x = y$, temos:

$$y^2 - 7y > -10 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 10 > 0.$$

Ao resolver a inequação acima, temos que:

$2 < y < 5 \Leftrightarrow 2 < 5^x < 5.$

Ao aplicarmos logaritmação de base 5, teremos:

$$\log_5 2 < \log_5 5^x < \log_5 5 \Leftrightarrow \log_5 2 < x.\log_5 5 < \log_5 5 \Leftrightarrow \log_5 2 < x < 1\,.$$

Assim sendo, temos $S = \{x \in \mathbb{R} |\ \log_5 2 < x < 1\}$.

2.2. Função Logarítmica.

Como já pudemos compreender, há diversas situações no campo da ciência ou mesmo no cotidiano nas quais nos deparamos com o crescimento exponencial de grandezas por meio do produto por uma taxa constante em função do tempo; aplicações financeiras, crescimento populacional, depreciação de um bem, nível de radioatividade de um elemento atômico, propagação de uma epidemia, dentre tantos outros.

Desse modo, o estudo dessas diferentes situações, exige dos mais diversos profissionais, químicos, biólogos, médicos epidemiologistas, físicos, geógrafos, economistas, a aplicação de conhecimentos das funções exponenciais e logarítmicas.

Por exemplo, em 1920 foi criado pelo demógrafo estadunidense Warren Thompson, o modelo de transição demográfica, a partir da observação da realidade europeia, no qual se identifica diferentes fases de crescimento populacional, que ocorrem de forma exponencial. Observe o gráfico abaixo:

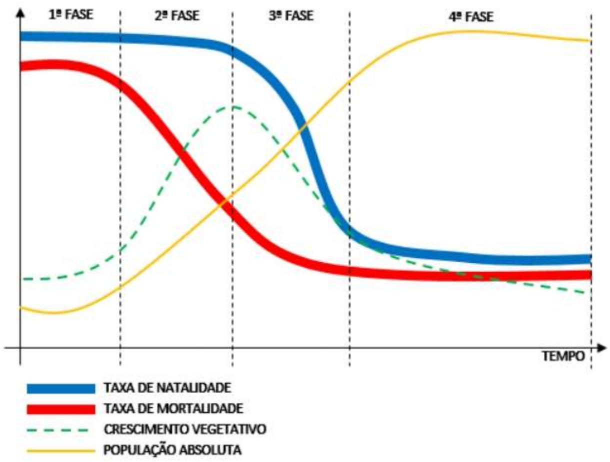


Figura 4- Linha do tempo da evolução das fases do crescimento demográfico. Disponível em: [Fases do crescimento demográfico – Geografia Opinativa](). Acesso: 14/04/2023

2.2.1. Definição de Função Logarítmica.

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, com $0 < a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, denomina-se **função logarítmica** de base a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$.

Assim, temos:

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$x \to \log_a x$$

Exemplos de funções logarítmicas em $\mathbb{R}_+^*$:

a) $f(x) = \log_5 x$

b) $g\ (x) = \log_{\frac{3}{4}} x$

c) $h\ (x) = \log x$

d) $p\ (x) = ln\, x$

Observações:

1. Se $0 < a \neq 1$, então a função logarítmica f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, é a inversa da função exponencial g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, $g(x) = a^x$.

Demonstração:

Como a função exponencial é bijetiva, é também invertível, desse modo, dada a função $y = a^x$, façamos a inversão:

$$x = a^y$$

$$\Leftrightarrow log_a x = log_a a^y$$

$$\Leftrightarrow log_a x = y\, log_a a$$

$$\Leftrightarrow log_a x = y.1$$

$$\Leftrightarrow y = log_a x = f(x).$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) A inversa da função $f(x) = log_2 x$ é $g(x) = 2^x$;

b) A inversa da função $f(x) = \ log\,x$ é $g(x) = \ 10^x$;

c) A inversa da função $f(x) = \ ln\,x$ é $g(x) = \ e^x$.

2. Quando a base de um logaritmo é maior que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos de dois números positivos tem o mesmo sentido que a relação entre esses números. Ou seja:

Dado $f(x) = \ \log_a x$, se $a > 1$, então:

i. $x_1 > x_2 \Rightarrow log_a\,x_1 > log_a\,x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

ii. $x_1 < x_2 \Rightarrow log_a\,x_1 < log_a\,x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplos:

a) $f(x) = log_2\,x$ e $8 > 2 \Rightarrow f(8) = log_2\,8 > f(2) = log_2\,2$;

b) $f(x) = log\,x$ e $100 > 3 \Rightarrow f(100) = log\,100 > f(3) = log\,3$;

c) $f(x) = log_3\,x$ e $0{,}5 < 1 \Rightarrow f(0{,}5) = log_3\,0{,}5 < f(1) = log_3\,1$;

d) $f(x) = ln\,x$ e $4 > 0{,}22 \Rightarrow f(4) = ln\,4 > f(0{,}22) = ln\,0{,}22$.

3. Quando a base de um logaritmo é positiva e menor que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos de dois números positivos tem o sentido contrário ao sentido da relação entre esses números. Assim:

Dado $f(x) = \ \log_a x$, se $0 < a < 1$, então:

i. $x_1 > x_2 \Rightarrow log_a\,x_1 < log_a\,x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

ii. $x_1 < x_2 \Rightarrow log_a\,x_1 > log_a\,x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplos:

a) $f(x) = log_{0,2}\,x$ e $8 > 2 \Rightarrow f(8) = log_{0,2}\,8 < f(2) = log_{0,2}\,2$;

b) $f(x) = log_{\frac{1}{3}}\,x$ e $0{,}5 < 1 \Rightarrow f(0{,}5) = log_{\frac{1}{3}}\,0{,}5 > f(1) = log_{\frac{1}{3}}\,1$.

4. Dada a função $f(x) = \log_a x$, se $a > 1$, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos negativos e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos.

Seja $f(x) = \ \log_a x$, se $a > 1$, então:

i. $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$;

ii. $x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0.$

Exemplos: Seja $f(x) = \log_2 x$, então:

a) $f(0{,}5) = \log_2 0{,}5 < 0$;

b) $f(8) = \log_2 8 > 0$.

5. Dada a função $f(x) = \log_a x$, se $0 < a < 1$, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos positivos e os números maiores que 1 têm logaritmos negativos.

Dado $f(x) = \log_a x$, se $0 < a < 1$, então:

i. $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$;

ii. $x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0.$

Exemplos: Seja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, então:

a) $f(0{,}25) = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}25 > 0$;

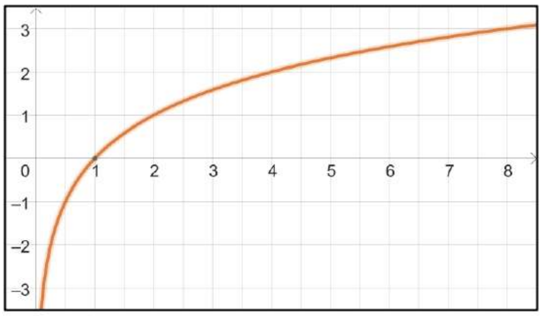
b) $f(5) = \log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$.

2.2.2. Gráfico da Função Logarítmica.

Esboçaremos a seguir gráficos de funções logarítmicas no plano cartesiano e examinaremos o comportamento dessas funções a partir desses gráficos.

1° Caso: Tomemos uma função $f(x) = \log_a x$, com $a > 1$. Por exemplo, tomando a função $f(x) = \log_2 x$ e atribuindo valores para x conforme a tabela, temos:

x	$f(x)$
0,125	-3
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

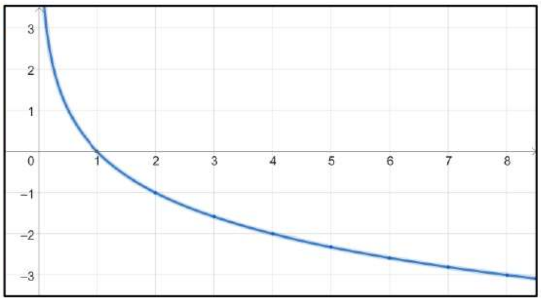


Observe que, quanto **maior** o valor de x, **maior** o valor de $f(x)$, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é **crescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, $\forall\ x_2$ e x_1 reais.

Logo, é importante lembrar que $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) = \mathbb{R}$ e f é crescente em todo o seu domínio.

2° Caso: Consideremos a função $g(x) = \log_a x$, com $0 < a < 1$. Por exemplo, tomando a função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e atribuindo valores para x conforme a tabela, temos o gráfico:

x	$g(x)$
0,125	3
0,25	2
0,5	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



Nesse caso, quanto **maior** o valor de x, **menor** o valor de $g(x)$, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $g(x) = \log_a x$ é **decrescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1)$, $\forall\, x_2$ e x_1 reais.

Observemos que $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(g) = \mathbb{R}$ e g é decrescente em todo o seu domínio.

2.2.3 Propriedades:

Em relação ao gráfico cartesiano da função logarítmica, $f(x) = \log_a x$, com $0 < a \neq 1$, observa-se que:

1ª. Propriedade. Dada a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $\forall\, f(x) = \log_a x$, temos:

$x = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0 \Rightarrow f(1) = 0,\ \ \forall a \in \mathbb{R}_+^*$, onde $a\ \neq 1$.

Ou seja, o par ordenado (1,0) pertence a f, $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Portanto, como pudemos observar nos gráficos anteriores, em toda função logarítmica, o gráfico intersecta o eixo x no ponto de abscissa 1.

2ª Propriedade. A função $f(x) = \log_a x$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é:

a) Crescente se $a > 1$, ou seja, $f(x_2) = \log_a x_2 > f(x_1) = \log_a x_1 \Leftrightarrow\ x_2 > x_1$;

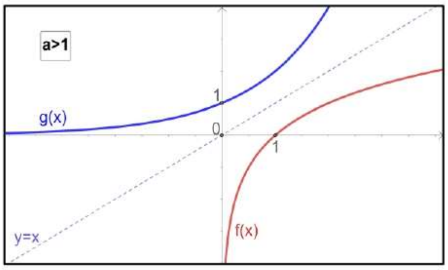
b) Decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, $f(x_2) = \log_a x_2 < f(x_1) = \log_a x_2 \Leftrightarrow\ x_2 > x_1$.

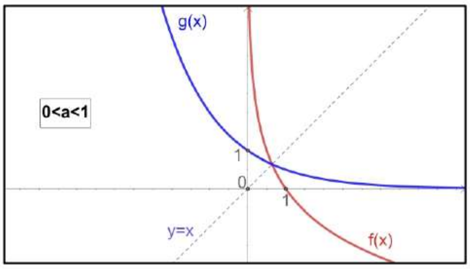
3ª Propriedade. A função $f(x) = \log_a x$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetiva. Verificamos facilmente esta propriedade, observando que, de acordo com a propriedade anterior:

$f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1$.

4ª. Propriedade. Dado qualquer ponto de coordenadas $(x, y) \in f(x) = \log_a x$, tem-se $x > 0$, ou seja, o gráfico está inteiramente a direita do eixo das ordenadas (eixo y).

5ª Propriedade. A função logarítmica, $f(x) = \log_a x$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, e a função exponencial, $g(x) = a^x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, inversas, apresentam gráficos simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes. Vejamos:





Exercício

1. Classifique as funções como crescente ou decrescente.

A) $f(x) = log_4 x$

B) $f(x) = \ log\, x$

C) $f(x) = log_{0,1} x$

D) $f(x) = log_{\frac{2}{\sqrt[3]{11}}} x$

E) $f(x) = log_{\frac{5}{4}} x$

F) $f(x) = log_{\frac{7}{10}} x$

Resolução: Se a base é maior que um a função é crescente, caso seja maior que zero e menor que um, é decrescente.

2.2.4. Equação Logarítmica.

Define-se como Equação Logarítmica, toda equação que apresenta a incógnita no logaritmando, na base ou em ambos.

1. Desse modo, são exemplos de equações logarítmicas:

A) $\log_5(x + 3) = 72$;

B) $\log_{x-2}(x+3) = 8$;

C) $\log_{5x}(x+3) = 27$;

D) $\log_5(x+3) - \log_4(x-5) = 10$.

E) $\log_8(2x+1) = \log(x+3)$

Resolução de Equações Logarítmicas

Vamos então, resolver algumas equações logarítmicas, lembrando sempre de observar as condições de existência dos logaritmos.

Exemplos:

A) $\log_2(4x-5) = \log_2 11$

Resolução:

Condição de existência:

- $4x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{4}$

Logo:

$$\log_2(4x-5) = \log_2 11$$

$$\Rightarrow 4x - 5 = 11$$

$$\Rightarrow x = 4.$$

Portanto, como $x = 4$ satisfaz a condição de existência, $S = \{4\}$.

B) $\log_{x-3}(3x-9) = 2$

Resolução:

Condições de existência:

- $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$;
- $x - 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$;
- $3x - 9 > 0 \Rightarrow x > 3$.

Logo:

$$\log_{x-3}(3x-9) = 2$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 3x - 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 3x - 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

Sendo as soluções da equação quadrática acima $x_1 = 3$ e $x_2 = 6$, apenas x_2 satisfaz às condições de existência.

Portanto, $S = \{6\}$.

C) $\log_{27}(x+1) \cdot \log_9(x+1) = \frac{3}{2}$

Resolução:

Condição de existência:

- $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1.$

Logo (aplicando a mudança de base para reduzirmos as parcelas a uma mesma base 3):

$$\log_{27}(x+1) + \log_9(x+1) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{\log_3 27} \cdot \frac{\log_3(x+1)}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{3} \cdot \frac{\log_3(x+1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_3(x+1))^2}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_3(x+1))^2}{6} \cdot 6 = \frac{3}{2} \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(x+1))^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) = \pm\sqrt[2]{9} = \pm 3$$

Daí, temos que:

$$\begin{cases} \log_3(x+1) = 3 \Rightarrow x+1 = 3^3 \Rightarrow x+1 = 27 \Rightarrow x_1 = 26; \\ \log_3(x+1) = -3 \Rightarrow x+1 = 3^{-3} \Rightarrow x+1 = \dfrac{1}{27} \Rightarrow x = \dfrac{1}{27} - 1 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{26}{27}. \end{cases}$$

Como $x_1 = 26$ e $x_2 = -\frac{26}{27}$ satisfazem a condição de existência, $x > -1$, temos S $= \left\{-\frac{26}{27}, 26\right\}$.

2.2.5. Inequação Logarítmica.

Define-se como Inequação Logarítmica, toda inequação que apresenta a incógnita no logaritmando, na base ou em ambos. Desse modo, são exemplos de inequações logarítmicas:

A) $\log_5(x+3) < 72$;

B) $\log_{x-2}(x+3) > 8$;

C) $\log_{5x}(x+3) \geq 27$;

D) $\log_5(x+3) - \log_4(x-5) \leq 10$.

E) $\log_8(2x+1) < \log(x+3)$

Resolução de Inequações Logarítmicas.

Este método será aplicado quando ambos os membros da desigualdade puderem ser representados como logaritmos de uma mesma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Como uma função logarítmica, $f(x) = \log_a x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos a seguinte propriedade:

para $a > 1$;$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}$;

para $0 < a < 1$;$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

1. Determine a solução das seguintes inequações.

A) $\log_{0,5}(x-4) > 2$

B) $\log_3(2x+6) > \log_3 x$.

Resolução:

A) $\log_{0,5}(x-4) > 2$

Condição de existência:

- $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$.

Como $0 < 0{,}5 < 1$, inverteremos a desigualdade.

$$\log_{0,5}(x-4) > 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4) > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x - 4 < \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \text{ (invertendo a desigualdade)}$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{4} + 4 \Rightarrow x < \frac{17}{4}.$$

Logo, a solução é dada por $\{x > 4\} \cap \left\{x < \frac{17}{4}\right\}$.

Portanto $S = \left\{x \in R | 4 < x < \frac{17}{4}\right\}$.

Resolução:

B) $\log_3(2x + 6) > \log_3 x$

Condição de existência:

- $2x + 6 > 0 \Rightarrow x > -3$
- $x > 0.$

Como $3 > 1$, manteremos o sentido da desigualdade.

$$\log_3(2x + 6) > \log_3 x$$

$$\Rightarrow 2x + 6 > x$$

$$\Rightarrow x > -6$$

Logo, a solução é dada por $\{x > 0\} \cap \{x > -3\} \cap \{x > -6\}$.

Portanto $S = \{x \in R | x > 0\}$.

3. Referências.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR. José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. Matemática Completa 1º Ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Contextos e Aplicações, Volume 1. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos: 20. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática: Paiva, 1º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

SILVA, Claúdio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. Matemática Aula por Aula, 1ª Série. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática - Ensino Médio - 1º Ano. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

MEDEIROS NETO, Benedito. O Cidadão Contemporâneo Frente às Tecnologias da Informação e Comunicação. 2. ed. Brasília: FAC-UnB, 2017.

Este material foi preparado para servir como recurso educacional aberto de apoio para todos que desejarem aprender sobre as Funções Exponenciais e Logarítmicas.

O ebook estará disponível juntamente com o curso Funções Exponenciais e Logarítmicas na Plataforma de Cursos Abertos - PoCA, da UFSCAR.

Tanto no curso quanto neste ebook você poderá aprender as noções elementares sobres as Funções Exponenciais e Logarítmicas, partindo-se da revisão da potenciação e suas propriedades e dos logaritmos.

Bons estudos!

PoCA
Portal de Cursos Abertos

http://poca.ufscar.br/