Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Andréa Guimarães Leite

# O Estudo de Trigonometria e Funções Trigonométricas com Ênfase em Metodologias Ativas utilizando o GeoGebra

Belo Horizonte
2023

Andréa Guimarães Leite

# O ESTUDO DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM ÊNFASE EM METODOLOGIAS ATIVAS UTILIZANDO O GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Jônathas Douglas Santos de Oliveira

Coorientação
Dênis Emanuel da Costa Vargas

Banca Examinadora
Érica Marlúcia Leite Pagani
Mônica Helena Ribeiro Luiz

Belo Horizonte
2023

Leite, Andréa Guimarães

L533e O estudo de trigonometria e funções trigonométricas com ênfase em metodologias ativas utilizando o Geogebra / Andréa Guimarães Leite. – 2023.

86 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Jônathas Douglas Santos de Oliveira.

Coorientador: Dênis Emanuel da Costa Vargas.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Trigonometria – Estudo e ensino – Teses. 2. Funções trigonométricas – Teses. 3. Modelos matemáticos – Teses. 4. GeoGebra (Software) – Teses. 5. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Oliveira, Jônathas Douglas Santos de. II. Vargas, Dênis Emanuel da Costa. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 516.2407

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Andréa Guimarães Leite

# O ESTUDO DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM ÊNFASE EM METODOLOGIAS ATIVAS UTILIZANDO O GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 30 de agosto de 2023.

Andréa Guimarães Leite
(Autor)

Jônathas Douglas Santos de Oliveira
(Orientador)

Belo Horizonte
2023

*Com apreço profundo, dedico esta obra aos entusiastas da matemática, cuja devoção é inabalável diante das dificuldades enfrentadas pelos alunos. Aos que, longe de se acomodarem, motivam-se a explorar sempre novos caminhos para auxiliar aqueles que buscam o conhecimento e a compreensão dessa disciplina tão enriquecedora.*

# Agradecimentos

São muitos agradecimentos e os farei a todos!

Inicialmente, rendo minhas sinceras graças a Deus, que sempre me prove o conforto e amparo necessários diante das incontáveis adversidades ao longo desta jornada. Seja através de Sua intervenção direta, ou, singularmente, por meio das pessoas que me cercam, sinto profunda gratidão por toda a ajuda recebida. Quero expressar minha gratidão de forma especial a meus pais, Edson e Nirce, aos meus irmãos, Michele e Júnior, à minha amada filha, Victória, e ao meu esposo, Pablo, cujo apoio foi fundamental em todos os momentos. Agradeço imensamente por todo o suporte financeiro e emocional oferecido. Reconheço a compreensão deles ao serem privados de minha atenção e companhia em vários momentos dessa jornada acadêmica, e sou profundamente grata pelo amor incondicional que sempre me dedicaram.

Não posso deixar de mencionar a professora Érica Marlúcia Leite Pagani, cujo incentivo e orientação foram determinantes ao me apresentar o ProfMat e estimular minha busca pelo acesso a essa oportunidade única. A todos os professores que fizeram parte da minha trajetória, meu sincero agradecimento pela dedicação em compartilhar conhecimentos e contribuir para o meu crescimento intelectual. Especialmente ao professor Pedro Henrique Pereira Daldegan por sua humanidade descomunal, sua doação única a cada aluno, que Deus conserve e abençoe sempre seu dom.

Gostaria de expressar agradecimento ao meu atual diretor, Gladson Macedo de Oliveira, por todo o apoio, incentivo e encorajamento desde o primeiro momento. É em nome dele que agradeço a toda equipe de direção do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Curvelo, pela valiosa colaboração ao longo dessa jornada. Sou grata pela parceria nessa trajetória.

Desejo salientar minha sincera gratidão aos meus colegas de mestrado, com um agradecimento especial à Bruna, ao Pierre, à Izzabella e ao Lucas. Eles estiveram ao meu lado em cada momento de alegria, de choro, de dedicação aos estudos, sendo uma fonte constante de apoio e incentivo. Mesmo nos momentos de verdadeiro desespero, eles não permitiram que eu desistisse, tornando essa jornada acadêmica uma experiência compartilhada, repleta de companheirismo e superação mútua. Sou profundamente grata por ter tido a presença deles em minha vida durante esse período tão importante e desafiador.

Por último, porém, com um destaque que não pode ser subestimado, quero dedicar um reconhecimento especial e profundo respeito ao meu orientador, Jônathas Douglas Santos de Oliveira. Sua presença foi de valor inestimável ao longo desta jornada, oferecendo apoio incondicional, direcionamento assertivo e condução precisa, que foram fundamentais para o alcance deste momento significativo. Sua dedicação e comprometimento foram como guias que me acompanharam com segurança e confiança até esta etapa tão importante. Sou imensamente grata por tê-lo como orientador e por todo o percurso acadêmico, conhecimento e sabedoria compartilhados. Gratidão também pelas orientações precisas e inestimáveis do professor Dênis Emanuel da Costa Vargas, coorientador deste projeto.

Enfim, nesta hora de celebração e reconhecimento, expresso minha profunda gratidão a cada um que esteve ao meu lado nessa jornada, tornando possível a concretização deste momento. A todos vocês, meu mais sincero e emocionado agradecimento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

A Trigonometria e suas funções são fundamentais não apenas na Matemática, mas também desempenham um papel essencial no estudo de fenômenos físicos periódicos, mecânica, astronomia, música, topografia, engenharia e outras áreas. Neste contexto, o presente projeto busca apoiar os docentes ao abordar os temas da Trigonometria, levando em consideração as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular e a integração das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no Ensino de Matemática. Reconhecendo a dificuldade enfrentada pelos alunos em relação a esses conceitos, o projeto busca oferecer vasto apoio aos professores na prática desses conceitos. Ao percorrer este trabalho, os professores encontrarão suporte para a utilização de diversas Metodologias Ativas, assim como um estudo detalhado das possibilidades oferecidas por trabalhos já publicados no site do ProfMat. Além disso, o projeto conta com um embasamento teórico sólido capaz de amparar plenamente os professores que buscam esse apoio. O desenvolvimento do projeto é de caráter exploratório, com uma abordagem direta sobre o objeto de pesquisa, envolvendo um estudo dos conteúdos de Trigonometria presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a construção de sequências didáticas para cada um desses conteúdos. Como resultado, o projeto apresenta um valioso produto educacional acessível por meio de um link disponível no trabalho. Esse produto inclui a aplicação prática de uma das sequências de atividades, que faz parte do *GeoGebraBook*. Ademais, as considerações finais abrangem não apenas todo o desenvolvimento da dissertação, mas também destacam as possibilidades de aplicação do material e a abertura para a continuidade do projeto. O objetivo geral dessa pesquisa é propor um produto educacional, *GeoGebrabook*, a fim de fornecer, tanto para o professor quanto para o aluno, um material completo para o estudo de Trigonometria e Funções Trigonométricas, baseado em Metodologias Ativas, Educação Matemática Crítica e Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), através de *applets*, que possibilitam um aprendizado mais dinâmico, fazendo com que o aluno seja parte principal do processo de ensino e aprendizagem, enquanto o professor desempenha o papel de mediador nesse contexto educacional.

Palavras-chave: Trigonometria. Funções Trigonométricas. Metodologias ativas. Educação Matemática Crítica. GeoGebra.

# Abstract

Trigonometry and its functions are fundamental not only in Mathematics, but also play an essential role in the study of periodic physical characteristics, mechanics, astronomy, music, topography, engineering and other areas. In this context, this project seeks to support teachers in their approach to Trigonometry topics, taking into account the guidelines of the National Common Curriculum Base (BNCC) and the integration of Digital Information and Communication Technologies (DICTs) in Mathematics Teaching. The project offers teachers full support in practicing these concepts. Throughout this work, teachers will find support for the use of various Active Methodologies, as well as a detailed study of the possibilities offered by works already published on the ProfMat website. In addition, the project has a solid theoretical basis capable of fully supporting teachers who seek this support. The development of the project is exploratory in nature, with a direct approach to the object of research, involving a study of the trigonometry content presented in the BNCC and the construction of didactic sequences for each of these contents. As a result, the project presents an educational product accessible via a link available in the work. This product includes the practical application of one of the activity sequences, which is part of *GeoGebrabook*. In addition, the final considerations cover not only the entire development of the dissertation, but also highlight the possibilities for applying the material and the openness to continuing the project. The overall aim of this research is to propose an educational product, *GeoGebrabook*, in order to provide both the teacher and the student with complete material for the study of Trigonometry and Trigonometric Functions, based on Active Methodologies, Critical Mathematics Education and Digital Information and Communication Technologies (DICTs), through *applets*, which enable more dynamic learning, making the student the main part of the teaching and learning process, while the teacher plays the role of mediator in this educational context.

Keywords: Trigonometry. Trigonometric functions. Active methodologies. Critical Maths Education. GeoGebra.

# Lista de Figuras

# Sumário

# 1 Introdução

O presente trabalho se edificou a partir de alguns pontos principais:

- A inquietação que me acompanha durante anos de experiência no ensino de trigonometria com resultados de aprendizado insatisfatório, apesar das diferentes metodologias experimentadas. Tal dificuldade é corroborada ao longo do estudo realizado por Silva[1] que realiza levantamento das principais dificuldades que alunos encontram no processo de ensino e aprendizagem de trigonometria, explorando trabalhos publicados em periódicos da área.

- O estímulo e a atração que a aplicabilidade das funções periódicas no cotidiano pode gerar no aluno, uma vez que o discente consegue associar o conteúdo trabalhado com algo tangível.

- A necessidade latente de otimização do emprego do *software* GeoGebra[1], principalmente por meio de *applets* no celular, o que permite ao aluno ser mais ativo pela experimentação.

- A forte presença dos temas abordados na A Base Nacional Comum Curricular [2] (BNCC), que é o documento norteador do ensino no Brasil.

- O banco de estudos já realizados no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat).

A BNCC[2] apresenta dez competências[2] gerais básicas que devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo da Educação Básica. Esta última encontra-se dividida em três etapas escolaridade (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e cada

[1]GeoGebra é um *software* de código aberto, interface facilitada, variedade de recursos com planilhas interconectadas e dinâmicas.https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT

[2]Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

uma dessas etapas conta com competências específicas, seja por conteúdo ou por área de conhecimento. Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas de área, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades[3].

Destacamos algumas habilidades, tanto para o ensino fundamental quanto para o ensino médio, que envolvem trigonometria, funções trigonométricas e tecnologias no ensino da Matemática. Tais habilidades embasam o desenvolvimento desse trabalho.

> (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
>
> (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
>
> (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
>
> (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
>
> (EF09MA13). Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras.
>
> (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
>
> (BNCC[2]. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)

Além disso, a trigonometria é útil, não apenas na Matemática, mas também é um instrumento importante no estudo de fenômenos físicos periódicos, mecânica, música, topografia, engenharia, entre outros. Portanto, é importante a construção dos conceitos relacionados a esse tema na sala de aula, de forma que o aluno seja capaz de identificá-los e aplicá-los em situações cotidianas.

[3]aprendizagens essenciais a ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes.http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Os estudos realizados por Silva et al[3], Souza e Tinti[4] e Marques et al[5] enfatizam que nos últimos anos, as Metodologias Ativas têm se destacado dentro das práticas docentes como uma alternativa para proporcionar aos estudantes meios para que eles consigam guiar o seu desenvolvimento educacional, permitindo o protagonismo de seu aprendizado. Nas metodologias proativas, os estudantes são incentivados a aprender de forma autônoma e participativa, realizando tarefas que os estimulem a ter a iniciativa de pensar e debater sobre determinadas situações que envolvam conceitos sobre os objetos que estão sendo estudados. Sendo assim, é importante que o aluno seja parte integrante no processo de ensino e aprendizagem e que este seja capaz de descobrir e explorar as relações trigonométricas existentes.

Em Gosmatti e Panossian[6] é discutida a importância das Metodologias Ativas no contexto educacional, com foco específico na disciplina de Matemática e são exploradas diferentes abordagens pedagógicas que envolvem a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, como a Resolução de Problemas, o Trabalho em Grupo e a utilização de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) para promover a construção do conhecimento matemático de forma mais significativa e envolvente. A relação entre professor e aluno deve ser essencialmente democrática, embasada em um diálogo constante, visando desenvolver a capacidade do aluno de se envolver ativamente em situações sociais e políticas que são estruturadas pela Matemática. É de suma importância reconhecer o aluno como o autor central no processo de ensino e aprendizagem, incentivando sua participação ativa, autonomia e construção de conhecimento.

Na obra de Baggiotto, Bernardi e Gregolin[7], os autores exploram o uso do aplicativo GeoGebra em dispositivos móveis como ferramenta para o ensino de Geometria, sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica. A Educação Matemática Crítica é uma abordagem que busca que o professor vá além do método tradicional para o ensino de Matemática, procurando conectar o conteúdo matemático com a realidade dos estudantes, promovendo reflexão crítica e ação transformadora. O GeoGebra é um *software* gratuito que combina elementos de Álgebra, Geometria e Cálculo, permitindo a visualização e exploração de conceitos matemáticos. Nesse sentido, os autores destacam a importância de incluir tecnologias móveis no processo de ensino e aprendizagem, pois os dispositivos móveis estão cada vez mais acessíveis e presentes na vida dos estudantes. É defendido, pela autora deste trabalho, que a utilização do GeoGebra em dispositivos móveis pode contribuir para uma aprendizagem com mais significado e crítica da Geometria.

Outrossim, os autores apresentam uma revisão teórica sobre a Educação Matemática Crítica e exploram as funcionalidades do GeoGebra para o ensino de Geometria. Em seguida, descrevem uma pesquisa realizada com estudantes do Ensino Médio, na qual utilizaram o aplicativo em *tablets* para explorar conceitos de Geometria de forma interativa. Os resultados da pesquisa indicam que o uso do GeoGebra em dispositivos móveis possibilitou uma maior compreensão dos conceitos geométricos pelos estudantes, além de promover a reflexão crítica sobre a matemática e sua aplicação na vida cotidiana. Os participantes também relataram maior interesse e motivação durante as atividades com o aplicativo.

Uma das principais vantagens do GeoGebra é sua capacidade de tornar os conceitos matemáticos mais concretos e visualmente acessíveis. Os alunos podem explorar e realizar experimentos diretamente no *software* usando objetos matemáticos, o que ajuda a desenvolver uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos. Eles podem manipular figuras, arrastar pontos e ver as mudanças em tempo real, permitindo uma percepção mais dinâmica e interativa.

O objetivo geral dessa pesquisa é propor um produto educacional, *GeoGebrabook*, a fim de fornecer, tanto para o professor quanto para o aluno, um material completo para o estudo de Trigonometria e Funções Trigonométricas, baseado em Metodologias Ativas, Educação Matemática Crítica e Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), através de *applets*, que possibilitam um aprendizado mais dinâmico, fazendo com que o aluno seja parte principal do processo de ensino e aprendizagem, enquanto o professor desempenha o papel de mediador nesse contexto educacional.

As atividades propostas no material enfatizam o pensamento computacional e possibilitam o uso do GeoGebra no celular, permitindo que os alunos explorem as relações trigonométricas em triângulos e no círculo trigonométrico por meio de experimentos próprios. Isto estimula o pensamento crítico e a participação ativa dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, por meio da construção de figuras geométricas, os alunos são incentivados a demonstrar os resultados e fórmulas, promovendo a descoberta das relações matemáticas de forma mais envolvente e prazerosa, em vez de apenas receber fórmulas prontas e impostas. Ao final de cada capítulo, são propostos exercícios que visam validar o aprendizado e incentivar a aplicação dos conhecimentos adquiridos.

Uma das características próprias do material apresentado, que o difere dos produtos educacionais já apresentados no ProfMat, são as atividades dinâmicas realizadas por meio de *applets* no GeoGebra. Esses *applets* são pequenas aplicações interativas acessíveis em dispositivos móveis, que permitem aos alunos explorar conceitos matemáticos de forma visual e dinâmica. Eles podem manipular objetos matemáticos em tempo real, como pontos, retas e figuras geométricas, o que contribui para uma compreensão mais aprofundada dos conceitos. Os *applets* podem ser personalizados pelos professores para atender às necessidades específicas dos alunos, promovendo uma exploração ativa e adaptativa. Para além disso, eles facilitam a demonstração visual de propriedades matemáticas, resolução de exercícios e colaboração entre os alunos, tornando o aprendizado da matemática mais envolvente e significativo. Ressalto mais uma vez a relevância da vantagem adicional do material que é possibilidade de realizar as atividades em dispositivos móveis, permitindo uma maior inclusão e praticidade, mesmo em salas de aula, uma vez que a realidade da parte das escolas públicas do Brasil é a ausência de laboratórios de informática ou a falta computadores para todos os alunos, conforme dados do Inep[8].

# 2 Metodologias Ativas, Educação Matemática Crítica e o uso das TDICs no ensino de Matemática

Este capítulo exibe três linhas que, apesar de apresentarem abordagens e visões distintas para o ensino de Matemática, possuem pontos de convergência, os quais alicerçam o produto educacional desenvolvido. A junção dessas três linhas em um mesmo material visa fornecer a alunos e professores algo completo que produza condições de aprendizado mais eficazes, reforçando o papel de mediador do professor.

## 2.1 Metodologias Ativas no ensino de Matemática

Hoje, a abordagem proativa é amplamente referida como uma estratégia de ensino que coloca o aluno na vanguarda do processo educacional, promovendo sua participação ativa na construção do conhecimento e no desenvolvimento de habilidades, como bem destaca Silva et al[3]. Ao contrário dos métodos de ensino tradicionais, que tendem a ser mais centrados no professor e transmitir conhecimento de forma passiva, as metodologias ativas buscam envolver os alunos de maneira mais ativa e engajada. Consequentemente, por ser uma abordagem desafiadora, é baseada em uma mudança de paradigma na educação, pois enfatiza o papel dos alunos como agentes ativos e criadores de conhecimento.

Além do mais, os métodos ativos promovem a cooperação entre os alunos. Promover o trabalho em equipe ajuda os alunos a desenvolver habilidades de comunicação, negociação, liderança e resolução de conflitos. Marques et al[5] enfatiza o quão a troca de ideias e o acúmulo de conhecimento juntos potencializam o processo de ensino e aprendizagem, além de incentivar diversas perspectivas e Aprendizagem Colaborativa.

As Metodologias Ativas têm suas raízes diversas linhas de ensino e conjecturas educacionais ao longo da história (Gosmatti e Panossian[6]). Embora não haja um ponto de partida específico para o surgimento da metodologia em curso, sua presença remonta há tempos antigos, por filósofos gregos como Sócrates, Platão e Aristóteles. Por exemplo, Sócrates usa o método socrático de perguntas e diálogos para encorajar os alunos a pensar criticamente e edificar seu conhecimento (Gouveia[9]). Podemos identificar as influências e desenvolvimentos das Metodologias Ativas ao longo do tempo que contribuíram para suas ideias e aceitação, como apresenta a Figura 2.1. No final do século XIX e início do século

**Figura 2.1:** Importantes influências em Metodologias Ativas nos séculos XIX e XX

| Pensador | Ano | Abordagem |
|---|---|---|
| John Dewey | 1859 – 1952 | Defende a aprendizagem a partir da problematização.<br>Motivação prática e estímulo cognitivo para fazer escolhas e criar soluções criativas.<br>Aprendizagem significativa através da vivência.<br>Produção de conhecimento por meio de experiências compartilhadas e coletivas. |
| Rudolf Steiner | 1861 – 1925 | Desenvolvimento integral do aluno no sentido físico e espiritual.<br>Aplica a antroposofia na educação.<br>A pedagogia Waldorf defende o aprimoramento de 12 sentidos.<br>Os ciclos são separados por setênios (a cada 7 anos).<br>Respeita a individualidade.<br>Valoriza-se o trabalho manual. |
| Célestin Freinet | 1896 – 1966 | Pedagogia do Trabalho: considerava que o trabalho é uma ação natural do ser humano.<br>Sua proposta humanista contempla a luta contra as desigualdades.<br>Professor como mediador.<br>Escola democrática e cooperativa.<br>Propõe o desenvolvimento de técnicas para colocar o aluno como protagonista e autor de sua construção pedagógica. |
| Maria Montessori | 1870 – 1952 | Ambiente preparado com materiais de desenvolvimento.<br>Liberdade ao estudante, para fazer suas escolhas e ocupações.<br>A criança deve ser ativa na sala de aula.<br>Deve favorecer a cooperação e relação com a natureza.<br>O estudante tem autonomia no ambiente montessoriano. |
| Loris Malaguzzi | 1920 – 1994 | A aprendizagem significativa está no cerne da abordagem.<br>A criança é ativa, expressa-se culturalmente e socialmente.<br>Estimula o questionamento, levantamento de hipóteses, observação, análise, construção de teorias e documentação pedagógica.<br>Forte desenvolvimento da autonomia. |

Fonte: Soares[10]

XX, surgiu um movimento de "Nova Escola"que buscava uma abordagem mais avançada e centrada no aluno em oposição aos métodos tradicionais de ensino. Educadores como

John Dewey, Maria Montessori e Celestine Freynet defenderam o aprendizado baseado na experiência, na experimentação e na liberdade de explorar os interesses e necessidades individuais dos alunos. Como bem corrobora Dewey[11]:

> Está, porém, ainda por se provar que o ato de aprender se realiza mais adequadamente quando é transformado em uma ocupação especial e distinta. A aquisição isolada do saber intelectual, tentando muitas vezes a impedir o sentido social [...] deixa de ser educativa, contradizendo o seu próprio fim. O que é aprendido, sendo aprendido fora do lugar real que tem na vida, perde com isso o seu sentido e o seu valor (Dewey, 1978, p. 27).

A psicologia cognitiva, especialmente através do trabalho de teóricos como Jean Piaget e Lev Vygotsky, também desempenhou um papel importante no desenvolvimento de Metodologias Ativas. Piaget enfatizou a construção ativa do conhecimento do aluno por meio de interações com o ambiente, enquanto Vygotsky[12] enfatizou a importância da interação social e da mediação na aprendizagem, como podemos verificar abaixo.

> A tarefa cultural, por si só, não explica o mecanismo de desenvolvimento em si, que resulta na formação de conceitos. O pesquisador deve ter como objetivo a compreensão das relações intrínsecas entre as tarefas externas e a dinâmica do desenvolvimento, e deve considerar a formação de conceitos como uma função do crescimento social e cultural global do adolescente, que afeta não apenas o conteúdo, mas também o método do seu raciocínio. O novo e significativo uso da palavra, a sua utilização como um meio para a formação dos conceitos, é a causa psicológica imediata da transformação radical por que passa o processo intelectual no limiar da adolescência (VYGOTSKY, 2005, p. 73).

Com o avanço da tecnologia educacional, a partir da década de 1980, surgiram novas possibilidades para a implementação das metodologias ativas. Segundo Bacich, Neto e Trevisani [13], o uso de computadores, Internet e outras ferramentas digitais proporcionou a colaboração entre os alunos, a pesquisa independente e a aprendizagem autodirigida.

Atualmente, as Metodologias Ativas continuam a evoluir e se adaptar às necessidades e desafios da educação contemporânea. Há uma ênfase crescente em práticas como o aprendizado baseado em projetos, o ensino híbrido (que combina elementos presenciais e *online*) e a personalização do ensino, que buscam engajar os alunos de forma ativa e promover uma aprendizagem com significado.

Valente, Almeida e Geraldini[14] assim como Cortelazzo[15] apresentam interessantes metodologias que enfatizam a intensa participação dos estudantes no processo de ensino de ensino e aprendizagem, promovendo a construção do conhecimento por meio de atividades práticas e colaborativas.

1. Aprendizagem baseada em problemas: Os alunos são apresentados a situações ou problemas complexos do mundo real e são desafiados a encontrar soluções por meio de investigação, pesquisa e trabalho em equipe.

2. Aprendizagem baseada em projetos: Os alunos trabalham em projetos de longa duração, nos quais têm a oportunidade de investigar um tema específico, aplicar conhecimentos teóricos na prática e desenvolver habilidades relevantes.

3. Aprendizagem colaborativa: Os alunos trabalham em grupos para resolver problemas, discutir ideias, compartilhar conhecimentos e aprender uns com os outros. A colaboração é incentivada e valorizada nessa abordagem.

4. Sala de aula invertida: Nessa metodologia, os alunos estudam o conteúdo teórico antes da aula, por meio de materiais prévios disponibilizados pelo professor. Durante as aulas, o tempo é dedicado a atividades práticas, discussões e esclarecimento de dúvidas.

5. Estudo de caso: Os alunos são apresentados a casos reais ou fictícios que representam situações complexas e desafiadoras. Eles analisam, discutem e aplicam seus conhecimentos para resolver problemas ou tomar decisões relacionadas ao caso.

6. Aprendizagem por pares: Os alunos trabalham em pares ou pequenos grupos para discutir conceitos, resolver exercícios e ensinar uns aos outros. O professor desempenha o papel de facilitador e mediador. Pelas práticas apresentadas em Paiva[16], esta é a metodologia mais indicada para o ensino de Matemática.

7. Rotação por estações: Os alunos são divididos em grupos e alternam entre diferentes estações de atividades, que podem envolver instrução direta, trabalho em grupo, uso de tecnologia ou atividades práticas, permitindo uma abordagem diferenciada de aprendizagem.

8. Aprendizagem Baseada em Jogos: Utilização de jogos educacionais para envolver os alunos no processo de ensino e aprendizagem, fornecendo desafios, *feedback* imediato e um ambiente interativo.

Essas são apenas algumas das principais Metodologias Ativas, e existem outras abordagens e variações dentro desse espectro. Cada uma delas tem suas características e benefícios específicos, mas todas compartilham o objetivo de tornar os estudantes participantes ativos e engajados em seu próprio processo de ensino e aprendizagem. E ainda incentivam o desenvolvimento de habilidades cognitivas, sociais e emocionais, preparando os alunos não apenas para a obtenção de conhecimentos, mas também para o desenvolvimento de competências essenciais para a vida pessoal e profissional.

Ainda, relata-nos Lovato[17] que, por meio das Metodologias Ativas de aprendizagem, os alunos podem desenvolver diversas competências. Algumas dessas competências incluem:

- Iniciativa: Os alunos são incentivados a tomar a iniciativa em seu próprio processo de ensino e aprendizagem, assumindo responsabilidade por seu progresso e buscando ativamente conhecimento e soluções.

- Criatividade: As metodologias ativas estimulam a criatividade dos alunos, permitindo que eles encontrem soluções inovadoras para problemas e desafios, pensando de forma original e fora dos padrões estabelecidos.

- Criticidade reflexiva: Os alunos são encorajados a refletir criticamente sobre o que estão aprendendo, questionando, analisando e avaliando informações de forma a desenvolver um pensamento crítico e uma postura reflexiva em relação ao conhecimento.

- Capacidade de autoavaliação: As metodologias ativas promovem a autoavaliação dos alunos, permitindo que eles avaliem seu próprio desempenho, identifiquem pontos fortes e áreas de melhoria, e assumam a responsabilidade por seu próprio aprendizado.

- Cooperação para se trabalhar em equipe: As metodologias ativas incentivam a colaboração e o trabalho em equipe, desenvolvendo habilidades de comunicação, cooperação, negociação e resolução de conflitos, essenciais para o trabalho em grupo.

Vale ressaltar que, além das competências mencionadas, as metodologias ativas também podem contribuir para o desenvolvimento de outras habilidades, como responsabilidade, ética e sensibilidade na assistência. As competências desenvolvidas podem variar dependendo da abordagem específica da Metodologia Ativa utilizada.

## 2.2 Educação Matemática Crítica no ensino de Matemática

A Educação Matemática Crítica é uma tendência em Educação Matemática que visa não apenas ensinar conceitos e aptidões em Matemática, mas também desenvolver o pensamento crítico dos alunos e a consciência social da Matemática (Oliveira e Silva[18]). O objetivo é ir além da mera memorização de fórmulas e procedimentos e estimular os alunos a se engajar na análise crítica do contexto, utilizações e implicações sociais da Matemática, permitindo que os alunos questionem, reflitam e participem ativamente na construção do conhecimento matemático. Os alunos são incentivados a explorar diferentes perspectivas, fazer perguntas e encontrar soluções matemáticas para situações do mundo real. Isso incentiva uma compreensão profunda de conceitos e conexões matemáticas, auxiliando na evolução do pensamento lógico e a habilidade de resolver problemas complexos.

Com enfoque na conscientização dos alunos sobre questões sociais e políticas relacionadas à Matemática, a Educação Matemática Crítica procura destacar como a Matemática pode ser usada para promover justiça e equidade social. Os alunos são incentivados a examinar criticamente como a Matemática é usada em diferentes contextos, como políticas públicas, mídia e tomada de decisão, e a identificar possíveis vieses e implicações éticas. Esta tendência tem como característica fundamental a ênfase no diálogo, trabalho colaborativo e criação de conhecimento recíproco. Os alunos são incentivados a discutir ideias matemáticas, ouvir diferentes pontos de vista e edificar conhecimento coletivamente. Desta forma, os alunos podem enriquecer sua compreensão da matemática, compartilhando diferentes perspectivas e abordagens. A Educação Matemática Crítica é uma abordagem pedagógica influente no campo da Educação Matemática, enraizada no pensamento crítico e na conjectura crítica.

Marcone e Milani[19] apontam alguns dos principais autores e teóricos envolvidos em estudos sobre a Educação Matemática Crítica. São eles:

- Paulo Freire: proeminente educador e escritor brasileiro conhecido por seu trabalho em pedagogia crítica. Embora não especificamente focado na Matemática, seu trabalho influenciou a Educação Matemática Crítica, enfatizando a importância da conscientização do aluno com relação ao pensamento crítico e capacitação por meio da educação.

- Ole Skovsmose: Skovsmose, educador e pesquisador dinamarquês, foi um dos principais contribuintes para o ensino da matemática crítica. Seu trabalho explora a relação entre Matemática, sociedade e política, e apresenta uma abordagem pedagógica que inclui uma crítica social da matemática. Destaca o autor[20]:

> Nunca ousarei afirmar que o abandono do paradigma do exercício para explorar cenários para investigação forneceria uma resposta para essas questões. Nem afirmaria que é suficiente construir uma Educação Matemática baseada somente em referências à vida real. Minha expectativa é que a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem possa oferecer novos recursos para levar os alunos a agirem e refletirem e, dessa maneira, oferecer uma educação matemática de dimensão crítica. (SKOVSMOSE, 2008, p. 39).

- Eric Gutstein: professor e pesquisador americano que teve contribuição significante para o estudo da matemática crítica. Seu trabalho enfoca a relação entre a matemática e a justiça social. Tem como objetivo proporcionar aos alunos uma compreensão crítica das questões sociais através da matemática.

- Rochelle Gutierrez: professora e pesquisadora estadunidense que estuda a relação entre cultura, identidade e matemática. Seu trabalho enfatiza a importância de incorporar diversas perspectivas culturais no estudo da matemática, permitindo que os alunos se relacionem com a matemática de uma forma mais realista e significativa.

Os autores supracitados contribuem valorosamente no incentivo a uma Educação Matemática mais crítica, reflexiva e socialmente engajada, fornecendo uma base teórica e uma prática pedagógica que valorize o pensamento crítico, a justiça social e a diversidade cultural na Educação Matemática.

O trabalho de Bennemann e Allevato[21] retrata a Educação Matemática Crítica como uma abordagem de ensino que visa promover uma Educação Matemática mais democrática e interativa, baseada na ideia de que a Matemática não é neutra e inextricavelmente ligada a questões sociais e políticas. O conteúdo enfatiza a importância de uma abordagem crítica para a Educação Matemática, permitindo aos alunos questionar e analisar as relações de poder existentes na sociedade e na disciplina. Destaca o uso de materiais de ensino e aprendizagem franqueados que permitam aos alunos se envolverem mais no processo de construção do conhecimento. O texto evidencia a importância do diálogo na relação entre professor e aluno e reforça o papel do professor como mediador do conhecimento, estimulando a participação ativa dos alunos e fomentando um ambiente colaborativo de aprendizagem.

O artigo de Bennemann e Allevato[21] enfatiza a importância do uso de tecnologia, como computadores, no intuito de opor-se a autoridade dos professores e permitir que os alunos obtenham uma experiência rica e diversificada em um curto período de tempo. O recurso tecnológico, além de desencadear diferentes formas de análise, também possibilita diversas formas de representação, como numérica, gráfica e algébrica, que podem ser adequadas a diferentes perfis de aprendizagem. Ainda, o texto destaca que a Educação Matemática Crítica busca promover uma melhor qualidade de vida com a participação consciente e ativa na sociedade, buscando formar cidadãos críticos e engajados, capazes de analisar e interrogar as relações de poder presentes na sociedade e na própria disciplina Matemática.

## 2.3 O uso de TDIC's no ensino da Matemática

Ao longo da história, a incorporação de tecnologias no ensino da Matemática apresenta-se, cada vez mais, com molde impulsionador e crescente, por Almeida[22]. Desde tempos remotos, instrumentos e técnicas são produzidos com o objetivo de auxiliar na Resolução de Problemas matemáticos, mas o avanço da tecnologia ressignificou as ferramentas criadas, uma vez que lhes configura maior dinamismo, acessibilidade e até mesmo uma sensação de diversão, catalisando mudança expressiva na forma como a Matemática é ensinada e compreendida.

O uso do ábaco, na antiguidade, evoluiu para calculadoras mecânicas, computadores eletrônicos, calculadoras científicas e gráficas, *softwares* de Álgebra computacional até à profusão de recursos *online* e aplicativos educacionais na atualidade. O uso crescente das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) no Ensino de Matemática tem aberto novas possibilidades para aprimorar a aprendizagem e o envolvimento dos alunos, segundo Barroqueiro e Amaral[23]. Essas ferramentas oferecem oportunidades únicas de enriquecer o processo educacional e tornar o estudo da Matemática mais atrativo e eficaz.

Transformar o aluno de agente passivo para agente ativo no que tange ao processo de ensino e aprendizagem (um dos objetivos deste trabalho), romper a barreira do ensino tradicional, não é tarefa das mais fáceis, mas Munhoz[24] aponta-nos que o uso da tecnologia corrobora com tal mudança:

> O ambiente tradicional é aquele onde se desenvolvem práticas reprodutivistas no qual o docente é o detentor universal do conhecimento e o aluno, um receptor passivo. Quando nos referimos ao ambiente enriquecido com tecnologia, enxergamos um ambiente modificado por comportamentos e atitudes diferenciados, que se caracterizam por novas formas de comunicação e participação. (MUNHOZ, p. 38)

Munhoz[24] ainda enfatiza preocupação com a subutilização dos recursos tecnológicos em situações de aprendizagem, considerando que muitas das práticas utilizando a tecnologia não se diferem muito das práticas tradicionais de ensino. Daí a importância de elaborar atividades onde os discentes sejam realmente atuantes.

Durante a pandemia de COVID-19, os sistemas educacionais precisaram realizar adaptações significativas no ensino para garantir a continuidade da aprendizagem dos alunos em um contexto de distanciamento social e restrições ao funcionamento presencial das escolas. A UNICEF[25] salienta os prejuízos infindáveis que esse período causou no contexto educacional. Não obstante, a pandemia mostrou-se um catalisador para o aprimoramento na utilização de recursos digitais, o que é um expressivo ganho no enfrentamento à quebra da barreira do ensino tradicional.

Tive a oportunidade de vivenciar essa transformação em dois ângulos distintos: docente e discente. Enquanto professora, simplesmente tive que realizar aulas remotas síncronas em dois dias após a suspensão das aulas presenciais em função do início da pandemia de COVID-19. Com recursos próprios e pouquíssimo conhecimento digital me vi obrigada a buscar meios para fornecer aos meus alunos aulas com a melhor qualidade possível. Por outro lado, me foi oportunizada a participação em formações virtuais, que não teria condições de realizar presencialmente, e onde me inteirei do ProfMat, ingressando ao programa de forma remota e cursando os dois primeiros semestres (bases para o Exame Nacional de Qualificação - ENQ) de forma *online*. Com toda essa experiência e depois do retorno das aulas presenciais após dois anos de aulas remotas, o que fica são duas certezas: o professor em sala de aula é fundamental para um aprendizado eficaz e as práticas usando a tecnologia vieram para se enraizar no ambiente pedagógico. Alguns recursos tecnológicos, como plataformas de aprendizagem *online*, videoconferências, recursos interativos e *softwares* educacionais, ganharam espaço, impulsionando a modernização das práticas de ensino. Outro ponto a se destacar é que tanto os professores quanto os alunos tiveram que desenvolver suas habilidades digitais para utilizar efetivamente as ferramentas educacionais. Essa necessidade de aprimorar as competências digitais é um benefício a longo prazo, já que a educação está cada vez mais voltada para o uso de TDICs, o que poder acompanhado no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)[26], com dados atualizados frequentemente.

A BNCC[2] faz dezessete referências diretas às TDICs, além das mais de duzentas indiretamente. Especificamente na área de Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, cada uma das cinco unidades de conhecimento (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) discorre pelo menos uma habilidade com emprego de tecnologia. Ainda, nas competências específicas, listadas abaixo (grifos do autor), nota-se que, quase todas, contemplam tais recursos.

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou **tecnológicas**, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da **tecnologia** no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, **computacional** etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades Matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes **tecnologias**, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

No que se refere à abrangência desta dissertação, as tecnologias empregues são o uso do celular e o *software* GeoGebra, visto que a proposta é viabilizar a valia da tecnologia, com o uso do celular, no ambiente de sala de aula, por meio de um recurso dinâmico e interativo, os *applets* do GeoGebra.

### 2.3.1 O GeoGebra como ferramenta auxiliadora do processo de ensino e aprendizagem de Matemática

Mesmo mediante quaisquer outras descrições, formais ou informais, de o que é o GeoGebra, na própria página na Internet temos que:

> GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne Geometria, Álgebra, Planilhas, Gráficos, Estatísticas e Cálculos em uma única plataforma. [...] Tornou-se o fornecedor líder de software dinâmico de matemática, apoiando a Educação em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. GeoGebra[15]

Ainda a página do GeoGebra[27] concede-nos alguns fatos rápidos e de extrema relevância sobre o *software*, conforme apontamentos abaixo.

- Geometria, Álgebra e Planilha de Cálculo estão interconectadas e são totalmente dinâmicas.
- Interface fácil de se usar e, ainda assim, com muitos recursos poderosos.
- Ferramenta de autoria para criar recursos interativos de aprendizagem como páginas da *web*.
- Disponível em vários idiomas para nossos milhões de usuários ao redor do mundo.
- *Software* de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais.

O GeoGebra é uma ferramenta educacional que desempenha um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Ao proporcionar uma experiência interativa e visual, esse *software* possibilita a visualização e exploração de conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais dinâmico e interessante para os alunos. O *software* supera várias restrições ao permitir que professores e alunos criem construções com base em códigos e representem funções matemáticas com maior precisão e eficiência. Essa capacidade de representação visual e manipulação de elementos matemáticos facilita a compreensão dos conceitos abstratos, além de proporcionar um ambiente interativo que estimula o engajamento ativo dos alunos.

No entanto, é importante ressaltar que o GeoGebra é apenas um meio para ensinar matemática que, por si só, não garante uma aprendizagem efetiva. É essencial que os alunos se envolvam ativamente nas atividades propostas, refletindo sobre os conceitos e os processos matemáticos envolvidos. O GeoGebra é uma ferramenta poderosa, mas depende da interação e do pensamento crítico dos estudantes para que a aprendizagem tenha ocorrido de maneira significativa. A condução do professor durante as atividades propostas no GeoGebra é de extrema magnitude, uma vez que seu olhar profissional e versado permite melhor direcionamento aos alunos.

Baggiotto, Bernardi e Gregolin[7] abordam o ensino de Geometria com o uso do GeoGebra em dispositivos móveis, com base na perspectiva da Educação Matemática Crítica, explorando as funcionalidades do GeoGebra e como elas podem ser utilizadas para promover uma abordagem crítica e investigativa no ensino de Geometria. Além disso, destaca os benefícios do uso de dispositivos móveis nesse contexto, com o objetivo de proporcionar um ambiente de aprendizagem autônomo para os estudantes, onde eles possam construir seus próprios conhecimentos matemáticos.

Sobre o ensino de Geometria com o GeoGebra em dispositivos móveis, Bacich, Neto e Trevisani[13] exploram as possibilidades de aplicação da ferramenta na perspectiva da Educação Matemática Crítica. Enfatizam que integração entre dispositivos móveis, GeoGebra e Educação Matemática oferece inúmeras oportunidades, proporcionando um ambiente de aprendizagem autônomo para os estudantes.

O Guia de Introdução do GeoGebra[28] ajuda-nos a entender os fundamentos do *software* de matemática dinâmica, apresenta uma introdução ao GeoGebra, com uma sequência de atividades abrangendo ferramentas de geometria, entrada algébrica, comandos e recursos do programa. Inclui tópicos de matemática e experiências práticas para ajudar os leitores a desenvolver habilidades e explorar o *software* por conta própria. Disserta, ainda, sobre algumas das principais funcionalidades do GeoGebra, que, aliadas a outras muitas opções e ferramentas, permitem explorar e aprofundar uma ampla gama de tópicos matemáticos. Por exemplo:

1. Geometria Interativa: O GeoGebra permite criar e manipular objetos geométricos como pontos, segmentos, retas, cônicas e funções. Você pode alterar dinamicamente esses objetos e ver como eles mudam em tempo real.
2. Álgebra: GeoGebra permite trabalhar com equações, expressões algébricas e variáveis. Você pode inserir equações e coordenadas diretamente na janela de Álgebra e obter representações gráficas correspondentes na janela de geometria.
3. Cálculo: O GeoGebra oferece recursos de cálculo numérico e simbólico. Você pode calcular derivadas, integrais, limites e muito mais. Isso torna o GeoGebra uma ferramenta útil para aprender e explorar conceitos de cálculo.

4. Gráficos e Tabelas: O GeoGebra permite criar gráficos de funções, diagramas cartesianos e tabelas de valores. Você pode personalizar a aparência dos gráficos e analisar seus dados de forma interativa.
5. Construções dinâmicas: O GeoGebra permite criar construções dinâmicas, onde os objetos podem ser modificados em tempo real. Isso promove a exploração e compreensão de conceitos matemáticos por meio de manipulação interativa.
6. Customização da interface: O GeoGebra oferece uma interface flexível que pode ser adaptada às necessidades dos usuários. Você pode personalizar a disposição das janelas e selecionar as ferramentas e funções mais utilizadas.

Em um trabalho similar, Araújo e Nóbriga[29] apresentam-nos um roteiro voltado para o aluno com referencial teórico, passos de construções geométricas e questionamentos reflexivos com o objetivo de ajudar professores e alunos a explorar conceitos matemáticos de forma interativa e visual, utilizando recursos disponíveis no GeoGebra para criar construções geométricas e representar funções matemáticas.

# 3 Estudos Correlatos

Neste capítulo, será apresentada uma revisão dos trabalhos relacionados aos tópicos abordados neste trabalho no âmbito do ProfMat, onde o foco são os trabalhos que abordam Trigonometria, Funções trigonométricas e o uso do GeoGebra. Essa revisão tem como objetivo fornecer um panorama de pesquisas já realizadas nessas áreas, dentro do ProfMat, com o objetivo de identificar possíveis direções futuras para a pesquisa nesses temas. Ao examinar os trabalhos correlatos, pretende-se fornecer ao leitor uma base de referências e contribuições relevantes, enriquecendo assim a compreensão e o conhecimento sobre Trigonometria, Funções trigonométricas e o uso do GeoGebra no contexto do ProfMat.

## 3.1 Dados de busca

Como primeiros passos na construção deste trabalho, realizou-se uma busca por dissertações no banco do ProfMat visando nortear o caminho da presente pesquisa. Ter ciência do que já existe publicado sobre o assunto pretendido e avaliar os caminhos utilizados nos projetos encontrados para realizar um trabalho que tenha relevância e que realmente contribua para o ensino de matemática foi imprescindível como ponto de partida.

A página de pesquisa por dissertações no banco do ProfMat nos permite realizar a busca por três vias diferentes, conforme Figura 3.1.

**Figura 3.1:** Mecanismo de busca no site do ProfMat


Fonte: Site do ProfMat[30]
http://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

Com a intenção de filtrar dissertações com abordagem de um conteúdo específico, o melhor caminho foi buscá-las pelo Título da Dissertação. Ao fazer a pesquisa por GeoGebra foram localizadas 401 dissertações; pesquisando por Trigonometria, 127 pesquisas e ao investigar por Funções Trigonométricas, 47 trabalhos. Nota-se que, à medida que a busca foi fazendo-se mais inerente à abordagem pretendida, houve redução gradativa no número de arquivos localizados. A lista abaixo perfila os trabalhos mais atuais dentre os que remetem ao tema ou metodologia do atual trabalho e a seguir, em 3.2, é apresentada uma análise das dissertações mais intrínsecas a esta dissertação.

- **Data da defesa:** 09/11/2022
  **Autor:** DIEGO RODOLFO MUNHOZ
  **Título da dissertação:** ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E DO SOFTWARE GEOGEBRA.
  **Instituição:** USP

- **Data da defesa:** 19/10/2022
  **Autor:** JOSE VALERIO MOREIRA CANDIDO
  **Título da dissertação:** SALA INVERTIDA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS USANDO A CAMADA DE COMPUTAÇÃO DO DESMOS
  **Instituição:** UFPA

- **Data da defesa:** 21/12/2021
  **Autor:** EDU SOUZA PINHEIRO
  **Título da dissertação:** UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO
  **Instituição:** UFMA

- **Data da defesa:** 10/09/2021
  **Autor:** CAROLINA DE PAULA RIBEIRO NOVAES
  **Título da dissertação:** FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENEM COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA
  **Instituição:** UERJ

- **Data da defesa:** 27/05/2021
  **Autor:** ROSANGELA ALVES DE AQUINO BARROS

**Título da dissertação:** METODOLOGIAS ATIVAS: A SALA DE AULA INVERTIDA APLICADA AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA
**Instituição:** UFRN

- **Data da defesa:** 05/05/2021
  **Autor:** LUCIANO PINTO E SILVA
  **Título da dissertação:** TRIGONOMETRIA: USO DO GEOGEBRA PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS REAIS
  **Instituição:** UFG

- **Data da defesa:** 23/02/2021
  **Autor:** RAFAEL SANTOS MIRANDA
  **Título da dissertação:** TRIGONOMETRIA: O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA
  **Instituição:** UFMA

- **Data da defesa:** 31/07/2020
  **Autor:** ALESSANDRO JESUS DA SILVA ALMEIDA
  **Título da dissertação:** TRIGONOMETRIA PRÁTICA COM USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS
  **Instituição:** UFF

- **Data da defesa:** 10/07/2020
  **Autor:** JOHN NATHAN PEREIRA DE CARVALHO
  **Título da dissertação:** FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA
  **Instituição:** UFERSA

- **Data da defesa:** 02/04/2020
  **Autor:** MAXIEL MESQUITA MACHADO
  **Título da dissertação:** GEOGEBRA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS
  **Instituição:** UFCAT

- **Data da defesa:** 17/12/2019
  **Autor:** ALEXANDRE SOUSA PALMERIM

**Título da dissertação:** UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA.
**Instituição:** UFPA

- **Data da defesa:** 04/04/2019
  **Autor:** TIAGO BEZERRA DA COSTA
  **Título da dissertação:** FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA
  **Instituição:** UNESP

- **Data da defesa:** 18/02/2019
  **Autor:** JAIRO RENATO ARAUJO CHAVES
  **Título da dissertação:** A INTERATIVIDADE DO GEOGEBRA NO AUXÍLIO DA COMPREENSÃO DA TRIGONOMETRIA
  **Instituição:** UFSM

- **Data da defesa:** 23/11/2018
  **Autor:** FRANCISCO DEILSON RODRIGUES BARBOSA DE SOUSA
  **Título da dissertação:** SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: PROPOSTA METODOLÓGICA E REVISÃO DA LITERATURA A PARTIR DAS PRODUÇÕES DISCENTES NAS DISSERTAÇÕES DO ProfMat
  **Instituição:** UFMA

- **Data da defesa:** 30/10/2018
  **Autor:** JOYCE DO NASCIMENTO OLIVEIRA
  **Título da dissertação:** O USO DA TRIGONOMETRIA COMO UMA FERRAMENTA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS REAIS
  **Instituição:** UESPI

- **Data da defesa:** 28/06/2018
  **Autor:** PAULO CESAR TAVARES DE SOUZA
  **Título da dissertação:** MATERIAIS MANIPULÁVEIS E RECURSOS DIGITAIS NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA
  **Instituição:** UFPR

- **Data da defesa:** 28/05/2018

**Autor:** FRANCINE DALAVALE TOZATTO SOUZA
**Título da dissertação:** TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO E SUAS APLICAÇÕES
**Instituição:** USP

- **Data da defesa:** 04/05/2018
  **Autor:** FLÁVIO RIBEIRO DE SOUZA JÚNIOR
  **Título da dissertação:** ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM APPLETS
  **Instituição:** UENF

- **Data da defesa:** 25/01/2018
  **Autor:** RICARDO SERGIO MEDEIROS MAGALHAES
  **Título da dissertação:** APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA AO ENSINO DE ONDULATÓRIA UTILIZANDO O GEOGEBRA
  **Instituição:** UFMA

- **Data da defesa:** 23/12/2016
  **Autor:** GLAUCIA MARIA QUEIROZ DE FREITAS
  **Título da dissertação:** TRIGONOMETRIA: UM ESTUDO TEÓRICO E SEU ENSINO EM SALA DE AULA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA
  **Instituição:** UFMS

- **Data da defesa:** 04/09/2015
  **Autor:** LEILA MARIA SALOMÃO DE SOUZA
  **Título da dissertação:** UMA PROPOSTA DE ESTUDO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E SUAS INVERSAS ATRAVÉS DO GEOGEBRA
  **Instituição:** UFRB

## 3.2 Dissertações destacadas

Este tópico discorre sobre as dissertações pesquisadas que, pelo título e pelo resumo, apresentavam afinidade com a proposta desta dissertação. Algumas se mostraram de profunda relevância para o caminhar desta construção.

A dissertação proposta por Almeida [31] com o tema Trigonometria Prática com Uso de Tecnologias para o Ensino das Funções Trigonométricas tem como objetivo apresentar conhecimentos básicos em trigonometria, demonstrações e uma atividade prática a fim de despertar o interesse dos estudantes por essa área da Matemática, por vezes considerada difícil de ser entendida. Almeida destaca a importância de compreender os conceitos e aplicações dos ângulos e da própria trigonometria, uma vez que isso motiva os estudantes e torna o aprendizado mais interessante e agradável. O autor também ressalta a importância de buscar formas significativas de ensino, capazes de despertar a curiosidade e o espírito investigativo dos estudantes. Durante a construção da dissertação foi feita uma atividade em uma praia de Cabo Frio, com a finalidade de medir a distância entre a Ilha do Papagaio e o promontório de Arraial do Cabo. Essa aplicação serviu como ponto de partida para mostrar a utilidade da trigonometria e o quanto ela pode ser prazerosa. Essa atividade foi feita com auxílio do GeoGebra.

Em Munhoz [32], é explorado o ensino de funções trigonométricas utilizando a Modelagem Matemática e o *software* GeoGebra. A dissertação aborda a importância dessas ferramentas no processo de ensino e aprendizagem e oferece concepções valiosas para professores e estudantes de Matemática com o intuito de despertar nesses professores a possibilidade de ensinar funções trigonométricas utilizando a Modelagem Matemática como ferramenta pedagógica, além de fazer uso da tecnologia para trazer mais significados para os conceitos e resultados. Durante o desenvolvimento de um dos capítulos é apresentado um passo a passo de como construir as funções seno e cosseno vinculadas ao círculo trigonométrico usando o GeoGebra, além de mostrar algumas aplicações práticas em áreas como Física, Medicina e Oceanografia. Finalmente, é fornecida uma sequência didática que visa tornar o ensino e aprendizagem das funções trigonométricas mais envolvente para os professores e alunos do Ensino Médio. Essa sequência pode ser aplicada após uma aula ministrada com o auxílio do *software* GeoGebra, utilizando controles deslizantes para demonstrar a influência de cada parâmetro nos gráficos dessas funções.

Ainda no sentido de propor sequências de atividades para o ensino de trigonometria, Pinheiro [33] apresenta uma proposta de sequência didática que busca atender às diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no âmbito da trigonometria, ao mesmo tempo em que utiliza metodologias mais modernas e dinâmicas, como utilização de *softwares* e *applets*. O objetivo é melhorar o processo de ensino e aprendizagem da trigonometria, tornando-o mais acessível e efetivo para os estudantes do Ensino Médio. A proposta de sequência didática, direcionada especificamente para estudantes da 1ª e/ou 2ª séries do Ensino Médio, abrange oito atividades que variam em metodologia e recursos utilizados. Esses recursos incluem aulas expositivas, aulas práticas, uso de *softwares* e *applets*, integração com outras disciplinas e promoção da integração social entre os alunos, levando em consideração que eles têm experiência prévia de trabalho em equipe ao longo de suas vidas. Em uma das atividades o autor propõe a realização de aulas expositivas e práticas, onde o teodolito caseiro é utilizado como uma ferramenta para demonstrar as aplicações práticas da trigonometria no cotidiano. Os alunos são engajados na construção do teodolito e, posteriormente, utilizam-no para realizar medições de alturas e distâncias inacessíveis dentro do ambiente escolar. Além disso, é sugerida uma atividade complementar na qual os alunos repetem as mesmas atividades em diferentes locais da cidade, como torres, postes, morros, rios e prédios. Essa abordagem prática e contextualizada possibilita aos alunos compreender a importância e as aplicações da trigonometria no seu dia a dia, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo.

Silva [34] aborda de forma abrangente o conteúdo de trigonometria estudado no Ensino Médio, enfatizando as propriedades trigonométricas, definições e situações-problema que envolvem as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Ademais, estabelece uma relação entre teoria e prática por meio de problemas hipotéticos e situações cotidianas, trabalhando com modelos matemáticos e representações geométricas. O GeoGebra é utilizado como uma ferramenta de apoio para construir gráficos e figuras geométricas, destacando propriedades e exemplos relevantes.

Em seu trabalho, Barros [35] aborda o uso de Metodologias Ativas, mais especificamente a sala de aula invertida, como ferramenta para o ensino de trigonometria. A partir das dificuldades encontradas em sua experiência educacional durante o ensino remoto, Barros elaborou e apresenta como produto educacional um *ebook* contendo a descrição de ferramentas que poderão auxiliar a prática de ensino dos professores de uma maneira geral. Visando a comunicação e a interação com os alunos, são elencadas as ferramentas: *Google forms, Moodle, Microsoft Teams, Kahoot, Plickers* e *Wordwall*; o GeoGebra é apresentado como facilitador nas aulas de matemática; finalizando com ferramentas voltadas para a criação do material compartilhado com os estudantes, como *Power Point, Libreoffice Impress* e *Canva* (fonte de criação de seu *ebook*). O trabalho apresenta também um histórico sobre a evolução do modelo de ensino, ressaltando o uso das Metodologias Ativas nas salas de aulas atuais, como destaque para a sala de aula invertida.

Palmerim [36] exibe uma proposta para o ensino de trigonometria por meio do *software* GeoGebra. Em seu corpo o trabalho apresenta-nos uma análise da relevância do software GeoGebra com suas implicações e propõe atividades direcionadas ao ensino da trigonometria para alunos do Ensino Médio. Na revisão de literatura, o autor aborda três áreas de convergência para a implementação do GeoGebra no contexto do ensino de Matemática escolar: primeiramente, são examinadas as práticas de ensino relacionadas à trigonometria em sala de aula, considerando o uso de materiais didáticos; em seguida, é realizada uma análise do processo de ensino e aprendizagem, levando em consideração a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que está associada com a proposta de inserção digital dos alunos por meio da Geometria Dinâmica nas aulas e, por fim, outros estudos relativos às vantagens e desvantagens da continuidade do uso do GeoGebra.

Em Sousa Júnior[37], o autor investiga o uso de *applets* no *software* GeoGebra e tecnologia digital para o ensino de funções trigonométricas. Como produto educacional, o autor desenvolveu um *GeoGebraBook* contendo atividades que incentivam o uso de *applets* como ferramenta para ensinar funções trigonométricas. A proposta é usar esses *applets* como uma estratégia para atrair a atenção dos alunos e promover a interatividade e dinamicidade nas aulas, além de otimizar o tempo de ensino, especialmente no que se refere à construção e análise de gráficos. As atividades sugeridas foram planejadas para serem realizadas com a orientação do professor, após a introdução dos conceitos em sala de aula. O objetivo é estabelecer uma conexão entre a teoria e a prática, permitindo aos alunos manipular, interagir e visualizar os conceitos por meio dos *applets*.

Por outro lado, Sousa[38] em seu trabalho apresenta uma revisão das dissertações de mestrado do ProfMat desenvolvidas nos cinco anos anteriores ao seu trabalho, visando compreender o impacto do uso do *software* GeoGebra no ensino da trigonometria como ferramenta para melhorar o processo de ensino e aprendizagem. O autor realiza uma seleção de dissertações que abordam o tema, uma análise substancial dessas dissertações explorando as informações abordadas em cada artigo e sintetiza os resultados em gráficos e tabelas. Os resultados evidenciaram que o GeoGebra possui um valor significativo no ensino da trigonometria, permitindo uma abordagem mais dinâmica e interativa do conteúdo, além de tornar a visualização e a compreensão dos conceitos mais acessíveis. Entretanto, é essencial levar em conta a limitação do *software* e buscar maneiras de superá-las, como proporcionar a capacitação adequada aos professores e integrar o GeoGebra com outras ferramentas e recursos didáticos. A proposta metodológica apresentada no documento pode ser adaptada para diferentes níveis de ensino, permitindo a realização de estudos similares em outras áreas da matemática além de se apresentar flexivelmente ajustada e moldada para ser utilizada em vários níveis de ensino. Sua adaptabilidade possibilita a conclusão bem-sucedida de estudos semelhantes em diversas áreas de ensino, permitindo a exploração de diferentes conceitos e temas por meio de abordagens parelhas. Ao empregar essa metodologia em outros contextos, o investigador e os educadores terão a oportunidade de averiguar como o *software* GeoGebra ou outras ferramentas podem impactar o processo de ensino e aprendizagem de diferentes áreas da matemática.

Novaes[39] em sua dissertação exibe uma pesquisa sobre o uso do *software* GeoGebra a no ensino de funções trigonométricas em questões que aparecem no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Além disso, a autora, explora as possibilidades do GeoGebra para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais interativo e proativo, permitindo que os estudantes visualizem e manipulem as funções trigonométricas de forma mais intuitiva. O trabalho apresenta um referencial teórico sobre a história da Trigonometria, a utilização da tecnologia no ensino, os motivos que justificam a escolha do GeoGebra como ferramenta pedagógica, as principais ferramentas do GeoGebra e a visão da BNCC sobre o uso da tecnologia na Educação e da interdisciplinaridade. Apresenta, ainda, as noções teóricas da Matemática no ensino da trigonometria nos triângulos retângulos e a relação da Função de Euler com o estudo das Funções Trigonométricas. Para além da abordagem teórica há a descrição de como o GeoGebra pode ser utilizado na sala aula de matemática, apresentando exemplos práticos, sequências de atividades e o gabarito das mesmas. O trabalho conclui que o GeoGebra é uma ferramenta pedagógica eficaz para o ensino de funções trigonométricas no Enem, permitindo que os estudantes compreendam melhor os conceitos e desenvolvam habilidades importantes para a resolução de atividades. O trabalho também pode ser útil para professores de matemática que desejam explorar o potencial do GeoGebra em suas aulas.

Uma interessante aplicação de funções trigonométricas é versada em Souza[40], que descreve uma abordagem inovadora para o ensino de funções trigonométricas e suas inversas utilizando o *software* GeoGebra que envolve a manipulação e investigação do movimento de uma roda-gigante antes de conceituar as funções trigonométricas propriamente ditas.

O trabalho começa com uma introdução ao tema, seguida de uma revisão bibliográfica que apresenta as principais abordagens utilizadas no ensino de funções trigonométricas. Na sequência a autora descreve sua proposta didática, que inclui a utilização do GeoGebra para a visualização e manipulação dos conceitos estudados. O relato de experiência em que a proposta foi aplicada em uma turma do Ensino Médio em Cachoeira, Bahia, auxilia-nos no diagnóstico da proposta. A autora descreve os resultados obtidos e as dificuldades encontradas durante a aplicação da proposta. No final do trabalho, são apresentadas as conclusões e recomendações para futuras pesquisas sobre o tema.

O estudo realizado com as pesquisas descritas até aqui, subsidiou não só os caminhos a serem traçados como também os tópicos de Trigonometria a serem abordados. Neste sentido e buscando relevância para o meio acadêmico, o presente projeto se destaca por manter o foco na elaboração de um produto educacional propício para uso em sala de aula, através de celulares, e com dinamismo através dos *applets*. Outro importante destaque com relação ao que já existe publicado, no âmbito do ProfMat, é a abrangência de conteúdos que percorre com profundidade o Teorema de Pitágoras, a trigonometria no triângulo retângulo, a trigonometria em um triângulo qualquer, a circunferência trigonométrica (desde as noções iniciais até as funções trigonométricas), as equações trigonométricas e as transformações trigonométricas. Sensível aspecto também se dá às listas de exercícios que abordam questões direcionadas a distintos objetivos (questões conteudistas, questões contextualizadas, questões de vestibulares, questões do Enem).

# 4 Fundamentação Matemática

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais de trigonometria e funções trigonométricas, os quais servem como base para todas as atividades propostas nesta dissertação. As principais referências consultadas são Iezzi (2013)[41], Dante (2016)[42] e Iezzi (2002)[43].

## 4.1 Ângulos

**Definição 4.1:** Um ângulo é determinado pela abertura entre duas semirretas que têm a mesma origem. Para medir ângulos, é necessário estabelecer o valor do ângulo total, que corresponde a uma volta completa no sentido anti-horário. Os demais ângulos são medidos de maneira proporcional a esse valor. Existem duas medidas usuais para os ângulos: graus ($\circ$) e radianos (rad).

- No sistema de graus, o ângulo total é estabelecido como $360°$. Nesse sistema, os ângulos são expressos em graus, onde um grau corresponde a $\frac{1}{360°}$ da volta completa. Por exemplo, um ângulo reto tem medida de $90°$ e corresponde a $\frac{1}{4}$ de um ângulo completo, que tem medida igual a $360°$.

- No sistema de radianos, o ângulo total é definido como $2\pi$ radianos. Nesse sistema, os ângulos são expressos em radianos, medida angular baseada no comprimento de um arco no círculo unitário, onde $2\pi$ radianos correspondem a uma volta completa. Por exemplo, um ângulo reto tem medida de $\frac{\pi}{2}$ radianos e corresponde a $\frac{1}{4}$ de um ângulo completo, que tem medida igual a $2\pi$ radianos.

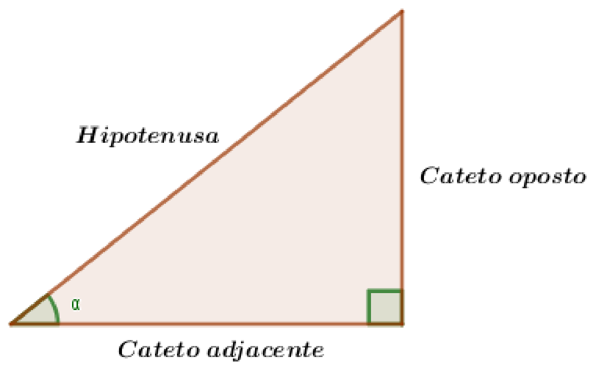
É importante atentar-se para que quando não está explicitado a unidade de medida padrão de ângulo é o radianos. Além disso, é importante ter cuidado e frisar que $360°$ não é igual a $2\pi$ e sim, $2\pi$rad.

## 4.2 Trigonometria no triângulo retângulo

**Definição 4.2:** Um triângulo retângulo é um tipo especial de triângulo que possui um ângulo interno igual a 90°, mais conhecido como ângulo reto. O ângulo reto é formado pela interseção de dois lados do triângulo, chamados de catetos. O terceiro e maior lado do triângulo, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa. Como exemplificado na Figura 4.1, se tomarmos o ângulo $\alpha$ como referência, os lados desse triângulo recebem os nomes de:

- cateto oposto a um ângulo $\alpha$: lado do triângulo situado em posição oposta a esse ângulo.
- cateto adjacente ao ângulo $\alpha$: lado do triângulo que forma o ângulo $\alpha$ junto com a hipotenusa.

**Figura 4.1:** Exemplo de um triângulo retângulo




Fonte: autor

Se tomarmos o ângulo complementar de $\alpha$, ou seja invertermos o ângulo de referência, por consequência os catetos ficarão com os nomes permutados.

### 4.2.1 O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos princípios fundamentais da Geometria Euclidiana. Ele estabelece uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. De acordo com o teorema, a soma dos quadrados das medidas dos catetos (os dois lados menores do triângulo retângulo) é igual ao quadrado da medida da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto - maior lado do triângulo retângulo). Essa relação pode ser expressa pela fórmula $b^2 + c^2 = a^2$, onde $b$ e $c$ representam os catetos e $a$ representa a hipotenusa. O Teorema de Pitágoras tem aplicações práticas em diversos campos, como Arquitetura, Engenharia e Física, e é fundamental para o estudo das relações métricas de triângulos retângulos.

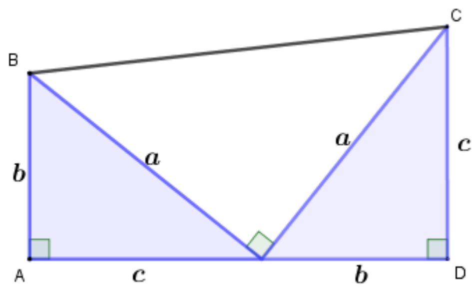
Existem várias demonstrações conhecidas para o Teorema de Pitágoras. Essas demonstrações podem variar em termos de abordagem e complexidade, mas todas elas têm o objetivo de mostrar que a relação matemática estabelecida pelo teorema é verdadeira. Segue abaixo uma dessas demonstrações.

**Teorema 4.3:** Considere um triângulo retângulo com catetos $b$ e $c$ e hipotenusa $a$, então mede que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{4.1}$$

*Demonstração do Teorema de Pitágoras.* Tomemos um trapézio $ABCD$ com base menor $c$, base maior $b$ e altura $b+c$, conforme ilustra a Figura 4.2. Note a existência de dois triângulos retângulos com catetos $b$ e $c$ e hipotenusa $a$ e outro triângulo retângulo com catetos que medem $a$, cada um.

**Figura 4.2:** Demonstração do Teorema de Pitágoras




Fonte: autor

A área do trapézio ($A_T$) é:

$$A_T = \frac{(b+c)(b+c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \tag{4.2}$$

Por outro lado, podemos decompor a área desse trapézio como a soma das áreas dos três triângulos. Assim,

$$A_T = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2 + 2bc}{2} \tag{4.3}$$

Igualando as equações 4.2 e 4.3 temos:

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{a^2 + 2bc}{2} \to a^2 = b^2 + c^2.$$

$\square$

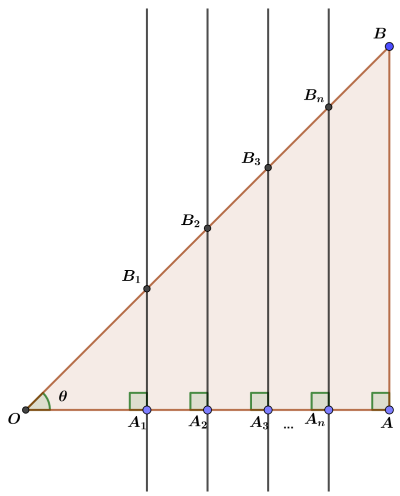
## 4.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Em triângulos retângulos, estabelecemos relações especiais entre os lados e os ângulos que são de fundamental importância na trigonometria. Essas relações, conhecidas como razões trigonométricas, fornecem ferramentas essenciais para resolver problemas envolvendo ângulos e distâncias em várias áreas da Matemática e das ciências.

Nesta seção, exploraremos as três principais razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, e como elas são aplicadas em triângulos retângulos.

Para a construção desses conceitos, vamos considerar um ângulo $\theta$ tal que $0° < \theta < 90°$ e tomarmos $A_1, A_2, A_3,..,A_n$ sobre o segmento $\overline{OA}$ e por tais pontos traçamos retas perpendiculares o segmento $\overline{OA}$, definindo assim os pontos $B_1, B_2, B_3, ..., Bn$, conforme a Figura 4.3 a seguir:

**Figura 4.3:** Demonstração do Teorema de Pitágoras




Fonte: autor

Observe que os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, , ..., OA_nB_n$ são semelhantes pelo caso AAA (ângulo, ângulo, ângulo). Assim, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = ... = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}}$$

Ou seja, independentemente dos valores dos catetos e da hipotenusa, essas razões entre os lados de um triângulo retângulo que contém um ângulos $\theta$ são constantes. Essas constantes (que dependem de $\theta$) recebem nomes especiais.

A razão $\frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}} = \text{sen}(\theta)$, para $0^\circ < \theta < 90^\circ$, lê-se seno de $\theta$. Fazendo a comparação com os lados de um triângulo retângulo temos que :

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

Do mesmo modo temos as seguintes igualdades :

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OA_3B}}{\overline{OB_3}} = ... = \frac{\overline{OA_n}}{\overline{OB_n}}$$

Portanto, a razão $\frac{\overline{OA_n}}{\overline{OB_n}} = \cos(\theta)$, para $0^\circ < \theta < 90^\circ$, lê-se cosseno de $\theta$. Fazendo a comparação com os lados de um triângulo retângulo temos que :

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

Prosseguindo de forma análoga, a razão $\frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = \text{tg}(\theta)$, para $0^\circ < \theta < 90^\circ$, lê-se tangente de $\theta$. Fazendo a comparação com os lados de um triângulo retângulo temos que :

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}$$

Conhecidas as razões seno e cosseno de um mesmo ângulo, a tangente desse mesmo ângulo pode ser obtida pelo quociente entre essas razões, nesta ordem. Assim, $\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$.

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente que foram definidas anteriormente para ângulos agudos no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, representando relações entre os lados de um triângulo retângulo podem ser estendidas para o círculo trigonométrico e obtermos funções com domínio real e, para isso, precisaremos generalizar a noção de ângulos para valores maiores que $\frac{\pi}{2}$ e ângulos negativos e, posteriormente, estender a noção de seno, cosseno e tangente desses ângulos através do círculo trigonométrico unitário, que será apresentado em seções posteriores.

É possível calcular os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos $30^\circ$, $45^\circ$ e $60^\circ$ utilizando o Teorema de Pitágoras no quadrado e no triângulo equilátero. Esses ângulos são chamados de notáveis devido à sua frequente ocorrência em problemas geométricos e porque não existe uma maneira simples de estabelecer os valores de seno, cosseno e tangente para demais ângulos.

**Tabela 4.1:** Seno, Cosseno e Tangente dos Arcos Notáveis.

| $\theta$ | $\text{sen}(\theta)$ | $\cos(\theta)$ | $\text{tg}(\theta)$ |
|---|---|---|---|
| $30°$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $45°$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1$ |
| $60°$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ |

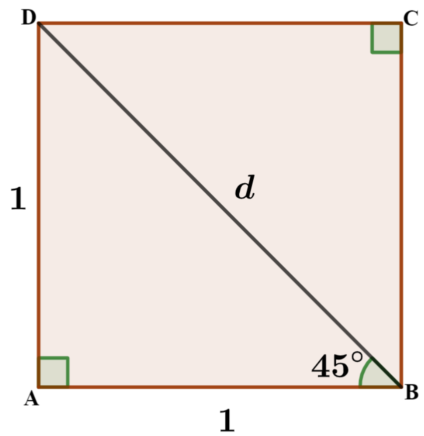
Fonte: autor

Essas razões especiais podem ser contempladas na tabela acima e serão demonstradas logo a seguir.

### 4.3.1 Razões trigonométricas do ângulo de 45°

*Demonstração sen 45°, cos 45° e tg 45°.* Para encontrarmos seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°, tomemos um quadrado de lado 1 e tracemos sua diagonal. Ao fazermos esse procedimento, dividimos o quadrado em dois triângulos retângulos iguais como mostra a Figura 4.4.

**Figura 4.4:** Razões trigonométricas do ângulo de 45°




Fonte: autor

Podemos observar que:

- o cateto oposto a 45° mede 1;
- o cateto adjacente a 45° mede 1;
- a hipotenusa desse triângulo retângulo é a diagonal $d$ do quadrado e pode ser obtida pelo Teorema de Pitágoras: $d^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow d = \sqrt{2}$.

Assim,

$\text{sen}(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

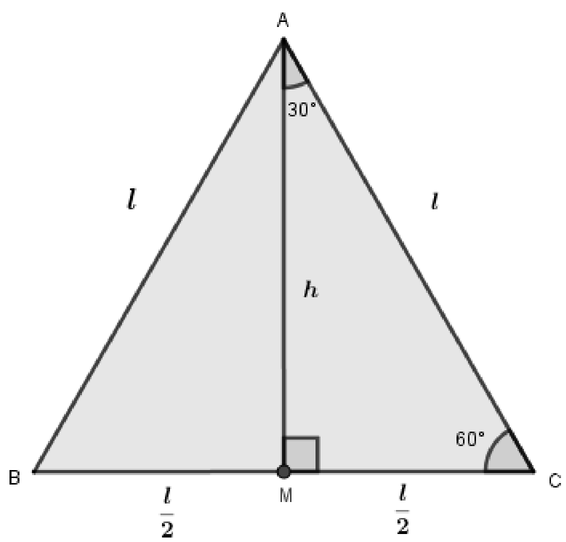
$\text{tg}(45°) = \frac{1}{1} = 1$.

□

### 4.3.2 Razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°

*Demonstração sen 30°, cos 30° e tg 30°, sen 60°, cos 60° e tg 60°.* Para determinar o seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°, vamos considerar o triângulo equilátero $ABC$ da Figura 4.5, que tem lado medindo $l$.

**Figura 4.5:** Razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°




Fonte: autor

Vamos destacar que:

- cada lado do triângulo mede $l$;
- o cateto oposto a 30° mede $\frac{l}{2}$;
- o cateto adjacente a 30° mede $h$;
- o cateto oposto a 60° mede $h$;
- o cateto adjacente a 60° mede $\frac{l}{2}$;
- a hipotenusa do triângulo retângulo $AMC$ é igual ao lado $\overline{AC}$ do triângulo $ABC$, portanto mede $l$;

- $\overline{AM}$ é a bissetriz de $B\hat{A}C$;
- $M$ é o ponto médio do lado $\overline{BC}$;
- a altura $h$ do triângulo equilátero pode ser escrita em função dos lados $l$, tomando o triângulo retângulo $AMC$ e aplicando o Teorema de Pitágoras: $l^2 = (\frac{l}{2})^2 + h^2 \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

  Dessa forma,

  $\text{sen}(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$;

  $\cos(30°) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

  $\text{tg}(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

  $\text{sen}(60°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

  $\cos(60°) = \text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$;

  $\text{tg}(60°) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$.

$\square$

## 4.4 Razões trigonométricas em um triângulo qualquer

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, construídas para triângulos retângulos, não são aplicáveis aos triângulos acutângulos e obtusângulos. Para trabalhar com esses tipos de triângulos, recorre-se à utilização da Lei dos Senos e da Lei dos Cossenos, que são demonstradas com base no Teorema de Pitágoras.

### 4.4.1 Lei dos Senos

A Lei dos Senos é um resultado matemático que estabelece uma relação entre os lados e os ângulos de um triângulo qualquer. De acordo com essa lei, os comprimentos dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a esses lados.

Além disso, quando um triângulo está circunscrito a uma circunferência de raio $r$, o diâmetro dessa circunferência atua como uma razão de proporcionalidade entre os lados e os senos dos respectivos ângulos do triângulo considerado. Em outras palavras, os comprimentos dos lados do triângulo estão relacionados proporcionalmente ao diâmetro da circunferência circunscrita.

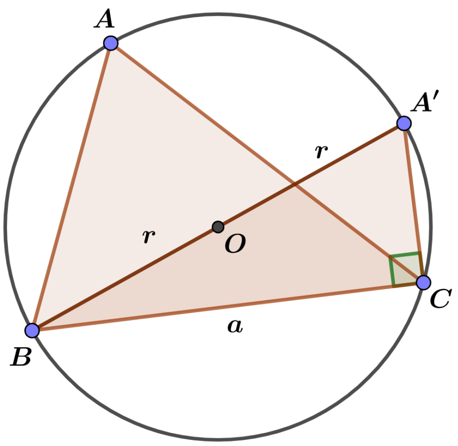
Essas propriedades são úteis na resolução de exercícios envolvendo triângulos, permitindo determinar o comprimento de um lado desconhecido ou o valor de um ângulo com base nas medidas conhecidas dos lados e/ou ângulos do triângulo. A Lei dos Senos desempenha um papel importante na trigonometria e na Geometria, sendo aplicada em várias áreas, como Navegação, Engenharia e Física. Segue a demonstração desse resultado.

**Teorema 4.4 (A Lei dos Senos):** Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual â medida do diâmetro da circunferência circunscrita. Isto é, se temos um triângulo ABC, onde o ângulo $\hat{A}$ (respectivamente $\hat{B}$ e $\hat{C}$) é oposto ao lado $a$ (respectivamente $b$ e $c$), inscrito em um círculo de raio $r$, temos:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2r \tag{4.4}$$

*Demonstração da Lei dos Senos.* Considere um triângulo qualquer $ABC$, inscrito numa circunferência de raio $r$. Pelo vértice $(B)$ do triângulo, trace o diâmetro correspondente $BA'$ e ligue $A'$ com $C$, formando o triângulo $A'BC$, conforme ilustra a Figura 4.6.

**Figura 4.6:** Triângulo $ABC$ circunscrito




Fonte: autor

Note que o triângulo $A'BC$ é retângulo em $\hat{C}$, pois é um triângulo inscrito em uma semicircunferência, onde um dos lados (lado oposto a $\hat{C}$) é o diâmetro dessa circunferência. Além disso, $\hat{A} = \hat{A}'$ por determinarem na circunferência o mesmo arco $\widehat{BC}$. Assim:

$$\text{sen}(\hat{A}) = \text{sen}(\hat{A}') = \frac{a}{2r} \to \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2r.$$

Analogamente, traçando triângulos retângulos a partir dos vértices $C$ e $A$, e seguindo os mesmos passos de anteriormente, veremos que:

$$\frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = 2r \ e \ \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2r$$

Portanto,

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2r$$

□

### 4.4.2 Lei dos Cossenos

**Teorema 4.5 (A Lei dos Cossenos):** Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. Em outras palavras, se temos um triângulo $ABC$, onde o ângulo $\hat{A}$ (respectivamente $\hat{B}$ e $\hat{C}$ ) é oposto ao lado $a$ (respectivamente $b$ e $c$), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \tag{4.5}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B}) \tag{4.6}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \tag{4.7}$$

*Demonstração da Lei dos Cossenos.* Para demonstrar esse resultado, vamos dividir em 3 casos:

1. $\hat{A}$ é agudo e, por consequência, o triângulo $ABC$ é acutângulo.

   Considere o triângulo acutângulo ABC e $\overline{CH} = h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, conforme a Figura 4.7.

   Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos $BCH$ e $ACH$, respectivamente, temos:

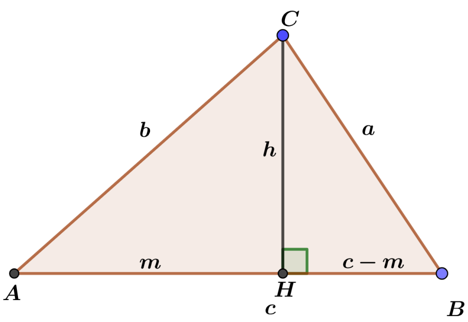
$$a^2 = h^2 + (c-m)^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2 \tag{4.8}$$

$$b^2 = h^2 + m^2 \rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \tag{4.9}$$

   Substituindo 4.9 em 4.8, temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

**Figura 4.7:** Triângulo acutângulo $ABC$




Fonte: autor

Mas, $\cos(\hat{A}) = \frac{m}{b} \to m = b\cos(\hat{A})$, Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

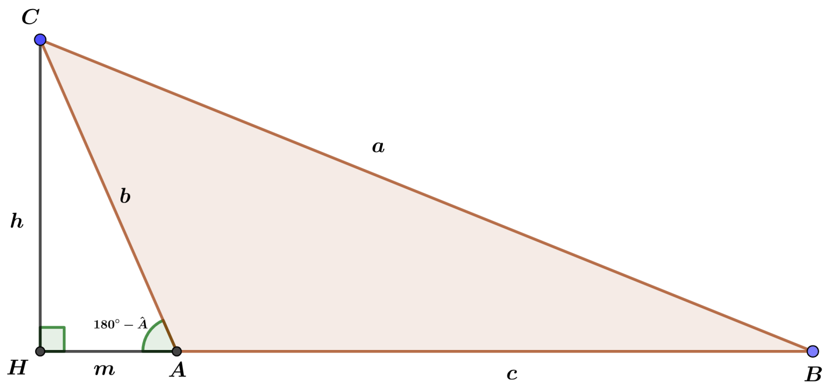
Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B}) \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}).$$

2. $\hat{A}$ é obtuso e, por consequência, o triângulo $ABC$ é obtusângulo.

   Considere o triângulo obtusângulo $ABC$ e $\overline{CH} = h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, conforme a Figura 4.8.

**Figura 4.8:** Triângulo obtusângulo $ABC$




Fonte: autor

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos $BCH$ e $ACH$, respectivamente, temos:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = h^2 + c^2 + 2cm + m^2 \tag{4.10}$$

$$b^2 = h^2 + m^2 \to h^2 = b^2 - m^2 \tag{4.11}$$

Substituindo 4.11 em 4.10, temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

Mas, $\cos(180° - \hat{A}) = \frac{m}{b} \to m = b\cos(180° - \hat{A}) = b(-\cos(\hat{A}))$, Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B}) \; e \; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}).$$

3. $\hat{A}$ é reto e o triângulo $ABC$ é retângulo em $\hat{A}$.
   Nesse caso, como $\cos(90°) = 0$, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$, que se reduz a expressão do Teorema de Pitágoras, já demonstrado anteriormente.

Sendo assim, em todos os casos, em um triângulo qualquer o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. □

## 4.5 O Círculo Trigonométrico unitário

As medidas de arcos e ângulos variam de 0 rad (arco nulo) até $2\pi$ rad (arco de uma volta), que equimede a 360°. Assim, não fazia sentido expressar arcos ou ângulos maiores que 360°, como 720°.

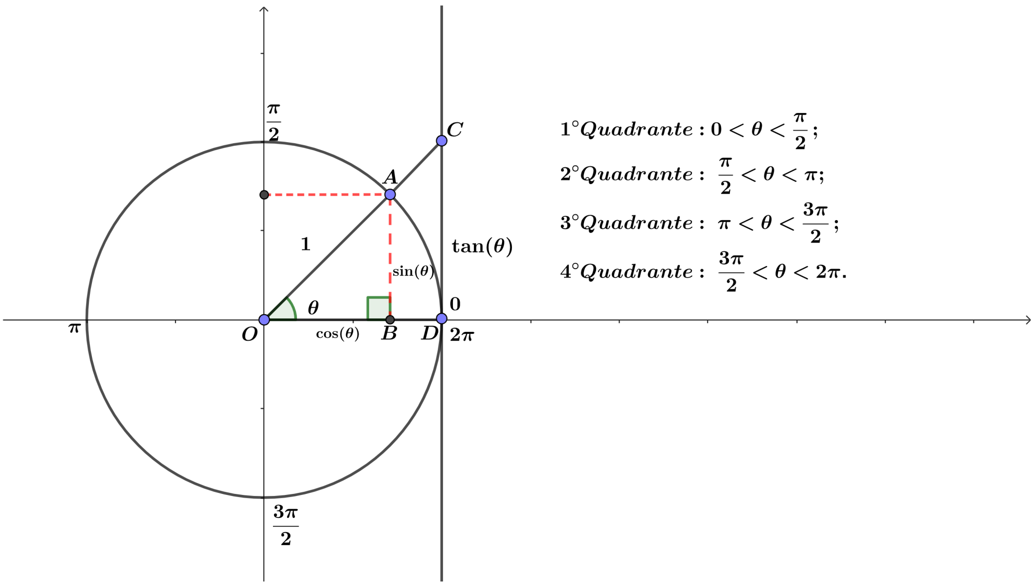
No entanto, estudos em Mecânica, explorando movimentos periódicos como o de um pêndulo ou uma mola pulsante, revelaram a necessidade de estender as noções de seno, cosseno e tangente para ângulos maiores que 360° e também para ângulos negativos. Essa ampliação permitiu a aplicação dessas funções trigonométricas em contextos mais abrangentes, possibilitando a resolução de problemas com ângulos além de uma volta completa e em direções opostas (arcos com orientação negativa).

Sendo assim, podemos agora definir o circunferência trigonométrica unitária.

**Definição 4.6:** Denomina-se *circunferência trigonométrica* a circunferência orientada, de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais (0,0), cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário. O eixo das abscissas $x$ é também chamado de *eixo dos cossenos*, já o eixo das ordenadas $y$ é também chamado de *eixo dos senos*.

A circunferência trigonométrica é dividida em quatro partes congruentes, onde os eixos $x$ e $y$ se intersectam, chamadas quadrantes e numerados de 1 a 4, a partir do ponto D, no sentido positivo, como ilustrado na Figura 4.9. O primeiro quadrante abrange os ângulos entre 0 e 90°, ou, de forma equivalente, entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ radianos. No segundo quadrante, encontram-se os ângulos entre 90° e 180° (ou entre $\frac{\pi}{2}$ e $\pi$ radianos). O terceiro quadrante é composto pelos ângulos entre 180° e 270° (ou entre $\pi$ e $\frac{3\pi}{2}$ radianos). Por fim, o quarto quadrante abrange os ângulos entre 270° e 360° (ou entre $\frac{3\pi}{2}$ e $2\pi$ radianos). A Figura 4.9 mostra essa divisão em quadrantes.

**Figura 4.9:** O círculo trigonométrico unitário




Fonte: autor

Conforme Figura 4.9, considere um ponto $A$ sobre o círculo trigonométrico no primeiro quadrante e seja $B$ a projeção desse ponto no eixo $x$, seja $C$ a interseção do segmento de reta que passa por $\overline{OA}$ com a reta $x = 1$ e $D = (1{,}0)$, ou seja, o segmento $\overline{CD}$ encontra-se sobre a reta $x = 1$. Seja $\theta$ o ângulo $A\hat{O}D$. Observe que as coordenadas de $A$ no plano cartesiano são $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$. Por semelhança de triângulos (triângulos

$AOB$ e $COD$) vemos que

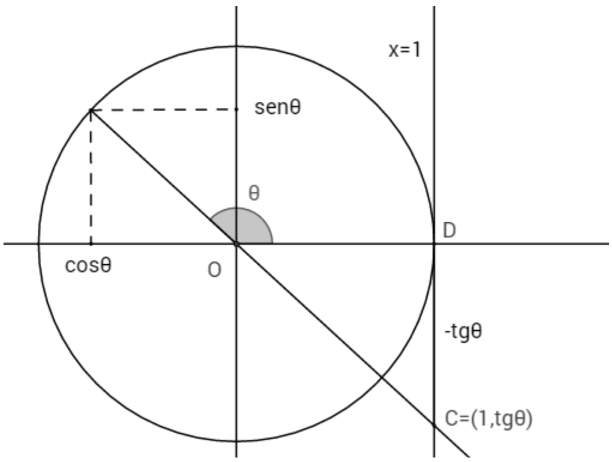
$$\frac{|\overline{CD}|}{1} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OD}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{OB}|} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)},$$

ou seja,

$$|\overline{CD}| = \text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Observamos, portanto, que para valores de $\theta$ compreendidos no intervalo $(0, \pi/2)$, podemos obter os valores de $\text{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$ a partir das coordenadas dos pontos $A$ e $C$ em um plano cartesiano: $A = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ e $C = (1, \text{tg}(\theta))$. No entanto, essa construção pode ser generalizada para qualquer valor de $\theta$ pertencente ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, permitindo-nos definir as funções seno, cosseno e tangente para quaisquer ângulos reais.

**Figura 4.10:** Interpretação geométrica da tangente de um ângulo no segundo quadrante




Fonte: autor

Por exemplo, podemos visualizar essa construção para um ângulo $\theta$ localizado no segundo quadrante, conforme representado na Figura 4.10.

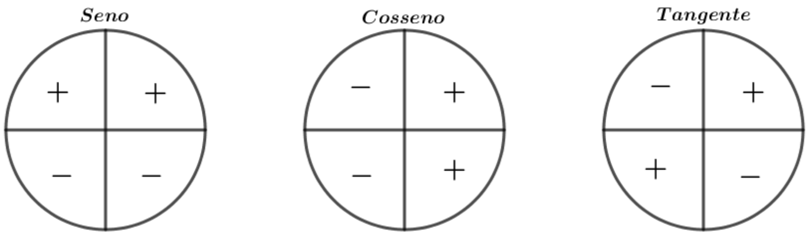
Os ângulos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e $2\pi$ são denominados ângulos de eixo. Esses ângulos são notáveis e observando a Figura 4.9, podemos descobrir o valor do seno, cosseno e tangente desses arcos. A tabela 4.2 apresenta esses valores e a Figura 4.11 mostra os sinais em cada quadrante.

**Tabela 4.2:** Seno, cosseno e tangente dos ângulos do eixo.

| | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{sen}(x)$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $\cos(x)$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $\text{tg}(x)$ | 0 | $\nexists$ | 0 | $\nexists$ | 0 |

Fonte: autor

**Figura 4.11:** Sinais em cada quadrante




Fonte: autor

### 4.5.1 Outras razões trigonométricas

Nas seções anteriores vimos as razões seno, cosseno e tangente que são as principais razões trigonométricas no triângulo retângulo. Vimos também a caracterização dessas razões associadas à circunferência trigonométrica. mede ressaltar que outras razões trigonométricas também são importantes e estão definidas a seguir:

- **Cossecante de $x$:** $\text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$, se $\text{sen}(x) \neq 0$.
- **Secante de $x$:** $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, se $\cos(x) \neq 0$.
- **Cotangente de $x$:** $\text{cotg}(x) = \frac{1}{\text{tg}(x)}$, se $\text{tg}(x) \neq 0$.

### 4.5.2 Relação fundamental trigonométrica

A partir da Figura 4.9, por exemplo, podemos extrair uma relação trigonométrica, que é muito útil. Essa relação é conhecida como *relação fundamental trigonométrica* e pode ser demonstrada, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo de hipotenusa 1 e catetos $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$.

$$\boxed{\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1}$$

Usando a relação fundamental trigonométrica temos:

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \tag{4.12}$$

Uma vez que $\cos(\theta) \neq 0$, podemos dividir a equação 4.12 por $\cos^2(\theta)$. Assim,

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)}$$

Se dividirmos a relação fundamental por $\operatorname{sen}^2(\theta)$, considerando $\operatorname{sen}(\theta) \neq 0$, obtemos:

$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2(\theta) = cossec^2(\theta)}$$

## 4.6 Funções trigonométricas

Um fenômeno é considerado periódico quando exibe um padrão repetitivo de valores em intervalos regulares. As funções periódicas descrevem perfeitamente tais fenômenos, uma vez que possuem a propriedade especial de repetir seus valores após um intervalo específico, chamado período.

Por exemplo, imagine uma função $f(x)$ que representa a altura da maré em um determinado ponto da costa ao longo do tempo. Se essa função for periódica com um período de 12 horas, isso significa que a altura da maré se repetirá exatamente após cada 12 horas. Ou seja, $f(x+12)$ será igual a $f(x)$ para qualquer valor de $x$, pois, neste contexto, o comportamento das marés se repete em intervalos de 12 horas.

Outro exemplo pode ser percebido em uma função $g(t)$ que descreve a temperatura média diária de uma cidade ao longo de um ano. Se essa função for periódica com um período de um ano, então a temperatura média será a mesma em um determinado dia do ano e no mesmo dia do ano seguinte. Em outras palavras, $g(t+365)$ será igual a $g(t)$ para qualquer valor de t, porque o ciclo anual de mudança de temperatura se repete a cada ano.

As funções periódicas têm amplas aplicações em diversos campos da Ciência e Engenharia, desde a modelagem de fenômenos naturais, como o movimento das ondas, até o estudo de comportamentos repetitivos em sistemas físicos e econômicos. Essa propriedade de repetição regular torna as funções periódicas fundamentais para entender e prever muitos eventos. Sendo assim, temos a seguinte definição:

**Definição 4.7:** Uma função $f(x)$ é periódica com período $T$ se, para todo $x$ real, mede a propriedade:

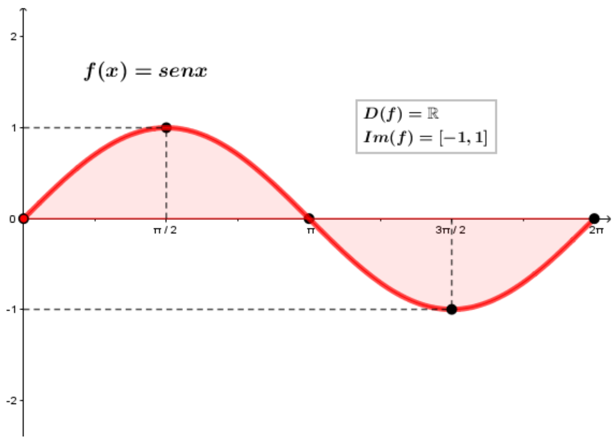
$$f(x+T) = f(x)$$

Seguidamente, estudaremos as funções trigonométricas, que são funções periódicas.

### 4.6.1 Função Seno

A partir de agora podemos definir a função seno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, que é a função matemática que associa a cada ângulo $x \in \mathbb{R}$ (medido em radianos ou graus) o valor da ordenada do ponto correspondente na circunferência unitária. A partir de todas considerações feitas até aqui e com base na Figura 4.12, podemos destacar as características da função seno.

**Figura 4.12:** Gráfico da função seno, no intervalo $[0,2\pi]$




Fonte: autor

- A imagem da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é o intervalo $[-1,1]$.
- A função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é uma função ímpar, o que significa que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$. Esse fato pode ser facilmente observado no círculo trigonométrico.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é periódica, de período $2\pi$, ou seja, $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x)$.
- É importante observar que, além de possuir valor máximo de 1 e valor mínimo de $-1$, as funções seno e cosseno atingem esses valores infinitas vezes ao longo de seus domínios o que faz com que a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ não seja injetora.
- Sinal da função seno

  i) se $x$ pertence ao primeiro ou segundo quadrantes, então $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tem valor positivo;

ii) se $x$ pertence ao terceiro ou quarto quadrantes, então $f(x) = \text{sen}(x)$ tem valor negativo;

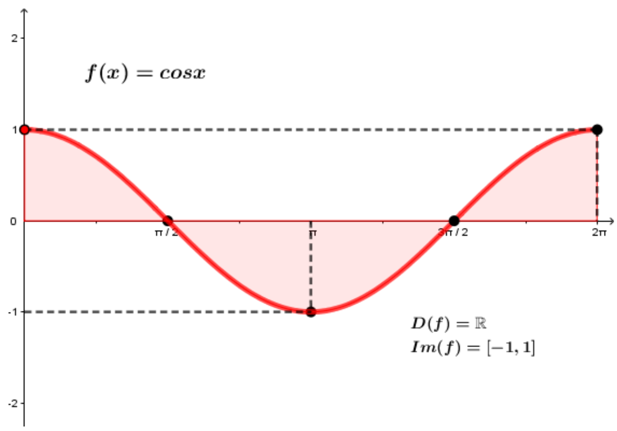
Essas características são explicadas devido ao círculo trigonométrico ter sua origem no centro de um sistema de coordenadas cartesianas.

### 4.6.2 Função Cosseno

Do mesmo modo podemos definir a função cosseno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotada por $f(x) = \cos(x)$, que é uma função matemática que associa a cada ângulo $x$ (medido em radianos ou graus) o valor da abscissa do ponto correspondente na circunferência unitária. Algumas considerações sobre a função cosseno merecem destaque e algumas delas podem ser observadas na Figura 4.13.

- A imagem da função $f(x) = \cos(x)$ é o intervalo $[-1{,}1]$.
- $f(x) = \cos(x)$ é periódica, de período $2\pi$, ou seja, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

**Figura 4.13:** Gráfico da função cosseno, no intervalo $[0{,}2\pi]$




Fonte: autor

- A função $y = \cos(x)$ é uma função par, o que significa que $\cos(-x) = \cos(x)$. Isso pode ser facilmente observado no círculo trigonométrico, já que a função cosseno representa a coordenada $x$ de um ponto na circunferência unitária, que é simétrica em relação ao eixo $y$. Portanto, quando o ângulo é negativo, o cosseno mantém o mesmo valor de quando o ângulo é positivo.
- É importante observar que, além de possuir valor máximo de 1 e valor mínimo de $-1$, as funções seno e cosseno atingem esses valores infinitas vezes ao longo de seus domínios o que faz com que a função $f(x) = \cos(x)$ não seja injetora.

- Sinal da função cosseno

  i) se $x$ pertence ao primeiro ou quarto quadrantes, então $f(x) = \cos(x)$ tem valor positivo;

  ii) se $x$ pertence ao segundo ou terceiro quadrantes, então $f(x) = \cos(x)$ tem valor negativo.

  Essas características são explicadas devido ao círculo trigonométrico ter sua origem no centro de um sistema de coordenadas cartesianas.

De modo geral, se temos uma função trigonométrica da forma $y = a + b\,\mathrm{sen}(kx + r)$ ou $y = a + b\cos(kx + r)$, a imagem de qualquer dessas funções é o intervalo $[a - b, a + b]$ e o período é $\frac{2\pi}{|k|}$. No entanto, mede ressaltar o quão profícuo é buscar o porquê destas fórmulas.

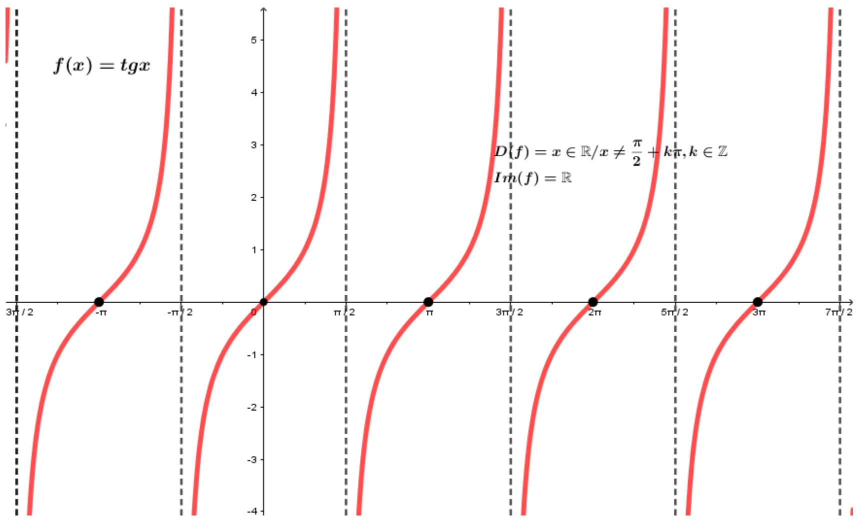
### 4.6.3 Função Tangente

Para definirmos a função tangente devemos lembrar que

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

Sendo assim, podemos concluir que $\mathrm{tg}(x)$ está bem definida, quando $\cos(x) \neq 0$, como bem é possível observar na Figura 4.14.

**Figura 4.14:** Gráfico da função tangente




Fonte: autor

Note que $\mathrm{tg}(x)$ não está definida em $-\pi/2$, $\pi/2$ e, consequentemente, em qualquer $x$

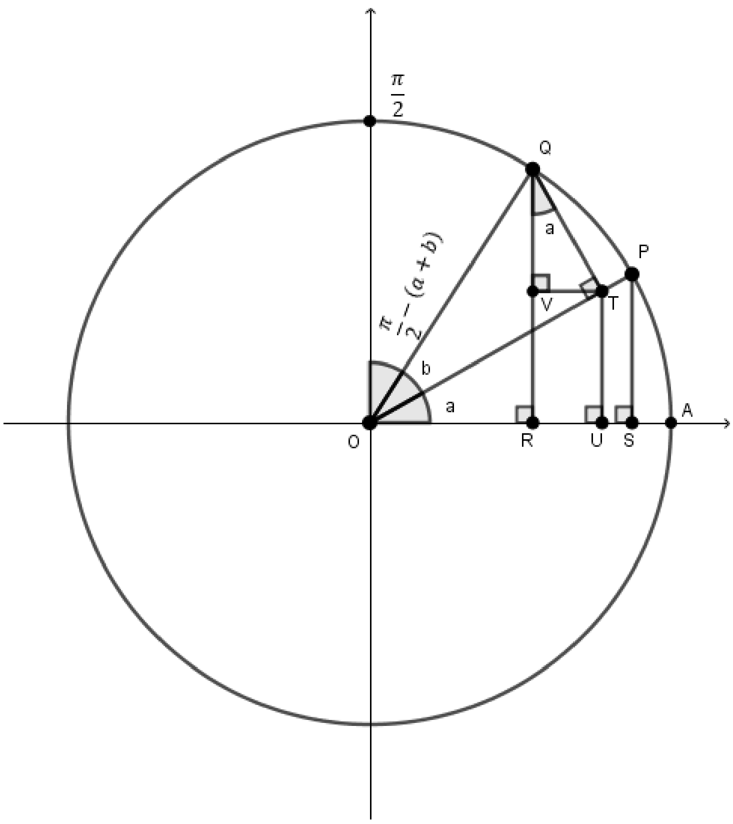
da forma $x = \pi/2 + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$, uma vez que $f$ tem período $\pi$. Logo, podemos definir a função $f : D \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = \text{tg}(x)$ e $D = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{para todo } k \in \mathbb{Z}\}$, onde $D$ é o domínio da função tangente.

**Observação:** Assim como as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, que relacionam os lados do triângulo retângulo, podem ser estendidas para a circunferência trigonométrica e obter funções com domínio real, as razões cossecante, secante e cotangente também podem seguir o mesmo caminho.

## 4.7 Transformações trigonométricas

As identidades trigonométricas são equações que relacionam as funções trigonométricas entre si. Elas desempenham um papel essencial no estudo das funções trigonométricas. Na sequência apresentaremos algumas dessas identidades fundamentais. Para isso, tomemos como referência a Figura 4.15 e estabeleceremos algumas relações importantes.

**Figura 4.15:** Base para demonstração do seno e cosseno da soma




Fonte: autor

Seja o arco $\widehat{AP}$ com determinação $a$ e o arco $\widehat{PQ}$ com determinação $b$. O arco $\widehat{AQ}$ tem determinação $(a+b)$. Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico acima, podemos deduzir que os triângulos $OSP$, $OUT$ e $QVT$ são retângulos e semelhantes entre si. Então, podemos construir algumas relações:

1. $\overline{OS} = \cos a$

2. $\overline{OT} = \cos b$

3. $\overline{OR} = \cos(a + b)$

4. $\overline{SP} = \operatorname{sen} a$

5. $\overline{TQ} = \operatorname{sen} b$

6. $\overline{RQ} = sen(a + b)$

7. $\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OQ} = 1$ (raio unitário)

   Os triângulos $OUT$ e $OSP$ são semelhantes, logo:

   $\frac{OU}{OS} = \frac{OT}{OP}$

   Substituindo as relações 1, 2 e 7 na igualdade acima, obtemos:

   $\frac{OU}{\cos a} = \frac{\cos b}{1}$

8. $\overline{OU} = \cos a \cos b$.

   Os triângulos $QVT$ e $OSP$ são semelhantes, logo:

   $\frac{VT}{SP} = \frac{QT}{OP}$

   Substituindo as relações 4, 5 e 7 na igualdade acima, obtemos:

   $\frac{VT}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} b}{1}$

9. $\overline{VT} = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

### 4.7.1 Cosseno da soma

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a$$

*Demonstração do cosseno da soma.* Observando o círculo trigonométrico da Figura 4.15, notamos que:

$$\overline{OR} = \overline{OU} - \overline{RU} \text{ e } \overline{RU} = \overline{VT}, \text{ logo}$$

$\overline{OR} = \overline{OU} - \overline{VT}$

Substituindo 3, 8 e 9 na igualdade acima, temos

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

□

### 4.7.2 Cosseno da diferença

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a$

*Demonstração do cosseno da diferença.* Para demonstrar esse item, vamos trocar $b$ por -$b$ na relação obtida anteriormente. Assim, teremos:

$\cos(a+(-b)) = \cos a \cos(-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b)$

Mas, analisando o círculo trigonométrico da Figura 4.15, note que:

$\cos b = \cos(-b)$ (função par) e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$ (função ímpar). Então,

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

□

### 4.7.3 Seno da soma

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

*Demonstração do seno da soma.* Sabemos que $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ assim como $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$.

Se fizermos $x = (a+b)$, teremos:

$\operatorname{sen} a + b = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b))$

$\operatorname{sen} a + b = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$

Temos aqui um cosseno da diferença entre dois arcos. Assim,

$\operatorname{sen} a + b = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos b + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a) \operatorname{sen} b$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}.$$

$\square$

### 4.7.4 Seno da diferença

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

*Demonstração do seno da diferença.* Para demonstrar esse item, vamos trocar $b$ por -$b$ na relação obtida anteriormente. Assim, teremos:

$\operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos a$

No entanto, analisando o círculo trigonométrico da Figura 4.15, note que:

$\cos b = \cos(-b)$ (função par) e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$ (função ímpar). Então,

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a}.$$

$\square$

### 4.7.5 Tangente da soma

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

*Demonstração da tangente da soma.* Para demonstrar esse item, usamos a definição de função tangente e as expressões obtidas em 4.7.1 e 4.7.3. Assim,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a \cos b$, desde que seja não nulo, temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Portanto, a fórmula para a tangente da soma é:

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}}.$$

$\square$

### 4.7.6 Tangente da diferença

$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

*Demonstração da tangente da diferença.* A demonstração deste item é análoga à demonstração anterior.

Assim, $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b)}$

Substituindo os resultados obtidos em 4.7.2 e 4.7.4, temos

$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a}$

Manipulando a igualdade anterior, vamos dividir o numerador e o denominador do segundo membro por $\cos a \cos b$, com $\cos a \cos b \neq 0$, temos:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Portanto,

$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}}.$$

□

### 4.7.7 Arco duplo

**(a) Seno:** $\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a)$

*Demonstração do sen(2a).* Essa fórmula é muito útil na trigonometria, pois permite calcular o valor do seno de um ângulo duplo em termos dos valores de seno e cosseno do ângulo original. E para demonstrá-la, vamos partir da fórmula da adição para o seno, apresentada no item 4.7.3, trocando $b$ por $a$. Logo,

$$\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen}(a)\cos(a) + \cos(a)\operatorname{sen}(a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a).$$

Portanto, a fórmula para o seno do arco duplo é:

$$\boxed{\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a)}. \tag{4.13}$$

□

**(b) Cosseno:** $\cos(2a) = \cos^2(a) - \text{sen}^2(a)$

*Demonstração do cos(2a).* Vamos partir da fórmula da adição para o cosseno, apresentada no item 4.7.1:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta)$$

Substituindo $\alpha = a$ e $\beta = a$, temos:

$$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos(a)\cos(a) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(a) = \cos^2(a) - \text{sen}^2(a).$$

Portanto, a fórmula para o cosseno do arco duplo é:

$$\boxed{\cos(2a) = cos^2(a) - \text{sen}^2(a)}. \tag{4.14}$$

$\square$

Note que, isolando $\text{sen}^2(x)$ na identidade trigonométrica $\text{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$, podemos reescrever a expressão 4.14 como:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a))$$

Simplificando, obtemos uma outra expressão para $\cos(2a)$, que depende apenas de cosseno:

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \tag{4.15}$$

Se isolarmos $\cos^2(x)$ na identidade trigonométrica $\text{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$, podemos reescrever a expressão 4.14 como:

$$\cos(2a) = 1 - 2\,\text{sen}^2(a). \tag{4.16}$$

Essas expressões serão essenciais para demonstrar as fórmulas de arco metade que seguem.

**(c) Tangente:** $\text{tg}(2a) = \frac{2\,\text{tg}(a)}{1-\text{tg}^2(a)}$

*Demonstração do tg(2a).* Para essa demonstração vamos tomar a relação $\text{tg}\,(a) = \frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)} \to \text{tg}\,(2a) = \frac{\text{sen}(2a)}{\cos(2a)}$.

Usando 4.13 e 4.14, temos:
$\text{tg}\,2a = \frac{2\,\text{sen}(a)\cos(a)}{\cos^2(a)-\text{sen}^2(a)}$.

Dividindo numerador e denominador por $cos^2(a)$ ficamos com
$\frac{\frac{2\,\text{sen}(a)}{\cos(a)}}{1-\frac{\text{sen}^2(a)}{\cos^2(a)}} = \frac{2\,\text{tg}(a)}{1-\text{tg}^2(a)}$.

Portanto,

$$\boxed{\text{tg}(2a) = \frac{2\,\text{tg}(a)}{1-\text{tg}^2(a)}},$$

com $a \neq \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

$\square$

### 4.7.8 Arco metade

**(a) Cosseno:** $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$

*Demonstração do cos($\frac{x}{2}$).* Começamos com a fórmula 4.15, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ e substituímos $a$ por $\frac{x}{2}$ para obter:

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

Isolando $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, temos:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\cos(x))$$

Calculando a raiz quadrada dos dois membros da igualdade, concluímos que:

$$\boxed{\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}}.$$

$\square$

**(b) Seno:** $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$

*Demonstração do sen*$(\frac{x}{2})$. Começamos com a fórmula 4.16, $\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(a)$ e substituímos $a$ por $\frac{x}{2}$ para obter:

$$\cos(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Isolando $\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$, temos:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$$

Calculando a raiz quadrada dos dois membros da igualdade, concluímos que:

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}}.$$

$\square$

**(c) Tangente:** $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$

*Demonstração do tg*$(\frac{x}{2})$. Para essa demonstração vamos tomar a relação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Usando os itens (a) e (b) demonstrados acima, temos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos(x)}{2}}{\frac{1+\cos(x)}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}.$$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}}.$$

$\square$

## 4.8 Equações trigonométricas

As equações trigonométricas são equações matemáticas que envolvem funções como seno, cosseno e tangente, que estão presentes em ciclos e oscilações observados ao nosso redor. Resolver essas equações permite-nos encontrar valores desconhecidos de ângulos e entender melhor o comportamento repetitivo de muitos eventos na natureza. Matematicamente, Iezzi[43] enuncia-nos:

> Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções trigonométricas da variável $x$ e sejam $D_1$ e $D_2$ seus respectivos domínios. *Resolver* a equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ significa determinar o conjunto $S$, denominado *conjunto-solução* ou *conjunto-verdade*, dos números $r$ para os quais $f(r) = g(r)$ é uma sentença verdadeira. Observemos que uma condição necessária para um certo $r$ seja solução da equação dada é que $r \in D_1$ e $r \in D_2$.(Iezzi, 2002)[43]

A resolução de equações trigonométricas envolve diversas técnicas, dependendo da complexidade da equação. Logo, requer um bom conhecimento das propriedades e identidades das funções trigonométricas, bem como das técnicas algébricas para resolver equações, além de atenção ao intervalo de solução. Assim, determinar o conjunto-solução de uma equação trigonométrica consiste em determinar a família de arcos trigonométricos que verificam essa equação, ou identificar quais arcos trigonométricos verificam a equação, caso o domínio ocorra em um intervalo específico.

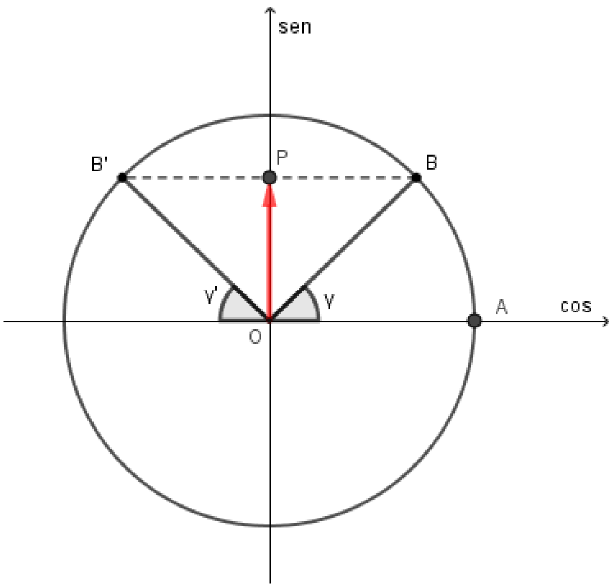
Há uma gama de formatos para equações trigonométricas, mas, de forma geral, por mais complexa que seja a equação, o ideal é manipulá-la algebricamente para chegar a um formato mais simples, que são as equações trigonométricas denominadas fundamentais ou elementares. Nesse sentido, vamos focar nas equações trigonométricas fundamentais:

- $\text{sen}(x) = \text{sen}(\alpha)$;
- $\cos(x) = \cos(\alpha)$;
- $\text{tg}(x) = \text{tg}(\alpha)$.

A seguir vamos estudar essas três equações, buscando suas soluções generalizadas e apresentar a resolução para um exemplo não tão trivial.

$\gg$ **Resolução da equação** $\text{sen}(x) = \text{sen}(\gamma)$

**Figura 4.16:** Representação geométrica para $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \gamma$




Fonte: autor

Observando a Figura 4.16, note que os pontos $B$ e $B'$ são simétricos em relação ao eixo dos senos. Logo $\overline{OP}$ corresponde ao valor do seno dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AB}'$. Note ainda que esses arcos são complementares. Dessa forma,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \gamma \rightarrow \begin{cases} x = \gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \pi - \gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

*Demonstração da igualdade sen $x$ = sen $\gamma$.* Tomando a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \gamma$, podemos reescrever como $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \gamma = 0$.

Por outro lado, se fizermos $x = (a+b)$ e $\gamma = (a-b)$, então

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a - \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a = 2 \operatorname{sen} b \cos a = 0$.

Se $x = (a+b)$ e $\gamma = (a-b) \rightarrow a = \frac{x+\gamma}{2}$ e $b = \frac{x-\gamma}{2}$. Portanto,

$2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\gamma}{2}\right) = 0$.

Para que essa igualdade seja verdadeira temos duas possibilidades:

(i) $\operatorname{sen}\left(\frac{x-\gamma}{2}\right) = 0$. Mas $\operatorname{sen}(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, então

$\frac{x-\gamma}{2} = k\pi \rightarrow x = \gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

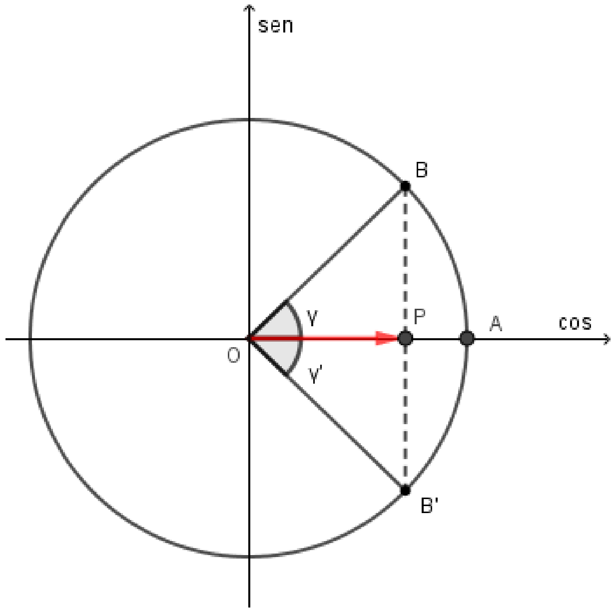
(ii) $\cos\left(\frac{x+\gamma}{2}\right) = 0$. Mas $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + k\pi = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, então

$\frac{x-\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \pi - \gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

□

≫ **Resolução da equação** $\cos(x) = \cos(\gamma)$

**Figura 4.17:** Representação geométrica para $\cos x = \cos\gamma$




Fonte: autor

Observando a Figura 4.17, note que os pontos $B$ e $B'$ são simétricos em relação ao eixo dos cossenos. Logo $\overline{OP}$ corresponde ao valor do cosseno dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AB'}$. Note ainda que esses arcos são replementares. Dessa forma,

$$\cos x = \cos\gamma \rightarrow \begin{cases} x = \gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

*Demonstração da igualdade cos x = cos γ.* Tomando a equação $\cos x = \cos\gamma$, podemos reescrever como $\cos x - \cos\gamma = 0$.

Por outro lado, substituindo $x$ por $(a+b)$ e $\gamma$ por $(a-b)$, temos $\cos x - \cos\gamma = \cos(a+b) - \cos(a-b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a - \cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a = -2 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a = 0$.

Se $x = (a+b)$ e $\gamma = (a-b) \rightarrow a = \frac{x+\gamma}{2}$ e $b = \frac{x-\gamma}{2}$. Portanto,
$-2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-\gamma}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x+\gamma}{2}\right) = 0$.

Para que essa igualdade seja verdadeira temos duas possibilidades:

(i) $\operatorname{sen}\left(\frac{x-\gamma}{2}\right) = 0$. Mas $\operatorname{sen}(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, então
$\frac{x-\gamma}{2} = k\pi \rightarrow x = \gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

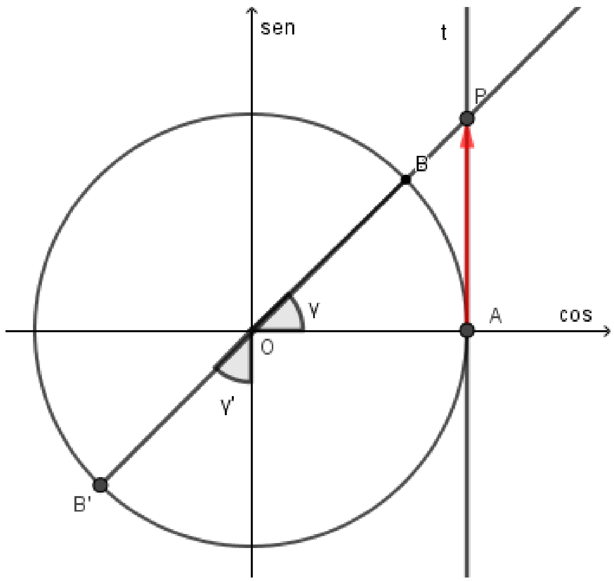
(ii) $\operatorname{sen}\left(\frac{x+\gamma}{2}\right) = 0$. Mas $\operatorname{sen}(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, então

$\frac{x+\gamma}{2} = k\pi \rightarrow x = -\gamma + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

$\square$

$\gg$ $\text{tg}(x) = \text{tg}(\gamma)$

**Figura 4.18:** Representação geométrica para $\text{tg}\, x = \text{tg}\, \gamma$




Fonte: autor

Observando a Figura 4.18, note que os pontos $B$ e $B'$ são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano. Logo $\overline{OP}$ corresponde ao valor do cosseno dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AB'}$. Note ainda que esses arcos são explementares. Dessa forma,

$$\text{tg}\, x = \text{tg}\, \gamma \rightarrow \begin{cases} x = \gamma + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi + \gamma + 2k\pi \end{cases} \rightarrow x = \gamma + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstração da igualdade tg $x$ = tg $\gamma$.* Tomando a equação $\text{tg}\, x = \text{tg}\, \gamma$ e reescrevendo, temos,

$\text{tg}\, x - \text{tg}\, \gamma = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} - \frac{\text{sen}\, \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\text{sen}\, x \cos \gamma - \cos x\, \text{sen}\, \gamma}{\cos x \cos \gamma} = \frac{\text{sen}(x-\gamma)}{\cos x \cos \gamma} = 0.$

Para que essa igualdade seja verdadeira, $\text{sen}(x - \gamma) = 0$.

Mas,

$\text{sen}\,(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z} \rightarrow x - \gamma = k\pi \rightarrow x = \gamma + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

$\square$

**Exemplo 4.8.1:** Resolva a equação $\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

*Resolução:*

$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, mas $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Logo,

$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \to 3(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 2\sqrt{3}(2 \operatorname{sen} x \cos x)$, como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \to$

$2\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x = 3 \to \operatorname{sen} 2x = \frac{3}{2\sqrt{3}} \to \operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Na sequência, basta analisar quais arcos possuem o mesmo seno que $x$.

São eles: $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

Então,

(i) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \to 2x = \frac{\pi}{3} \to x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

ou

(ii) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \to 2x = \frac{2\pi}{3} \to x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Assim, temos como solução geral da equação dada

S $= \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$.

**Observação:** Nesse exemplo não foi especificado o intervalo do domínio, mas suponhamos que o enunciado fosse: Resolva a equação $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, com $x \in [0{,}4\pi]$. Assim sendo, precisamos pesquisar a solução para as duas primeiras voltas (k=0 e k=1).

para k=0, temos $x = \frac{\pi}{6} + 2.0.\pi = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2.0.\pi = \frac{\pi}{3}$.

para k=1, temos $x = \frac{\pi}{6} + 2.1.\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2.1.\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$.

Então, S $= \{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{13\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}\}$.

# 5 O Produto Educacional

Nesse capítulo apresentaremos o produto desenvolvido nessa dissertação: um *GeoGebrabook* de trigonometria e funções trigonométricas para servir de apoio para o professor utilizar na sala da aula. Acesse o produto em https://www.geogebra.org/m/ded9kpkp.

## 5.1 Descrição do produto

Ao contrário do que foi abordado nas dissertações apresentadas no Capítulo 2 desse texto, este material elaborado não se restringe a apenas um tópico da Trigonometria. Ele abrange uma variedade de tópicos que podem ser explorados ao longo de todo o Ensino Médio, abarcando as habilidades e competências exigidas pela BNCC[2]. O *GeoGebrabook* contém uma diversidade significativa de atividades prontas para serem utilizadas durante as aulas de cada tópico, de acordo com o momento em que um conteúdo específico está sendo abordado. Isso permite uma integração consistente entre o *software* e o currículo, enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Algumas das atividades incluídas neste recurso são:

- *Applets* do GeoGebra que contêm atividades de geometria dinâmica, proporcionando ao aluno um papel ativo no processo de ensino e aprendizagem. Essas atividades buscam instigar o aluno a descobrir relações e interpretações geométricas relacionadas à trigonometria, em vez de depender apenas de memorização superficial e falta de compreensão dos conceitos. A escolha de utilizar *applets* foi feita levando em consideração a facilidade de acesso por parte dos professores, uma vez que é mais comum que eles tenham à disposição dispositivos móveis, como celulares, do que computadores para cada aluno em sala de aula, especialmente ao ensinar esse tópico.

- Formalização e exemplos resolvidos.

- Vídeos selecionados para que os alunos consigam reforçar o conceito e concretizar o que foi descoberto.

- Listas de exercícios selecionados cuidadosamente com o objetivo de permitir que os alunos pratiquem as técnicas e sejam capazes de aplicar os conceitos em exercícios e projetos contextualizados.

Dessa maneira, o recurso desenvolvido fornece ao docente um material completo para ser utilizado em sala e que pode ser compartilhado com os alunos. A construção desse recurso foi feita com atividades criadas pela própria proponente e com atividades já disponíveis, de forma pública, na página do GeoGebra. Os vídeos incorporados ao material são de acesso público e estão disponíveis no YouTube. Cada vídeo foi selecionado criteriosamente, levando em consideração sua relevância, a qualidade e a linguagem matemática adequada e clara de cada autor. Observa-se recursos de autores e canais do YouTube diversificados. Os exercícios que compõem as listas de exercícios de cada seção foram escolhidos de modo a abranger uma variedade de questões técnicas e contextualizadas. Especial atenção foi dada à inclusão de problemas que frequentemente aparecem em vestibulares conhecidos e no Enem. O objetivo é estimular a aplicação dos conceitos aprendidos, proporcionando aos estudantes a oportunidade de desenvolver habilidades de resolução de problemas em vez de simplesmente memorizar fórmulas.

## 5.2 Estrutura do *GeoGebrabook* construído

O *GeoGebrabook* proposto apresenta uma organização cuidadosa, dividida em uma série de tópicos e subtópicos que fornecem uma estrutura clara e abrangente. A seguir, estão listados os tópicos e subtópicos que o *GeoGebrabook* abarca:

1. O Teorema de Pitágoras
   - 1.1 Descobrindo Pitágoras
   - 1.2 Lista de Exercícios - Capítulo 1
2. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo
   - 2.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo
   - 2.2 Seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis
   - 2.3 Lista de Exercícios - Capítulo 2
3. Trigonometria em um Triângulo Qualquer

3.1 Lei dos Senos

3.2 Lei dos Cossenos

3.3 Lista de Exercícios - Capítulo 3

4. Circunferência Trigonométrica

4.1 Noções iniciais sobre circunferência trigonométrica

4.2 A circunferência trigonométrica

4.3 Relações fundamentais

4.3 Redução ao primeiro quadrante

4.4 Lista de Exercícios - Capítulo 4

5. Funções Trigonométricas

5.1 Ideias iniciais

5.2 Função seno ($f(x) = \text{sen}(x)$)

5.3 Função cosseno ($f(x) = \cos(x)$)

5.4 Função tangente ($f(x) = \text{tg}(x)$)

5.5 Função secante ($f(x) = \sec(x)$)

5.6 Função cossecante ($f(x) = cossec(x)$)

5.7 Função cotangente ($f(x) = \text{cotg}(x)$)

5.8 Influência dos parâmetros no gráfico da função seno.

5.9 Influência dos parâmetros no gráfico da função cosseno.

5.10 Influência dos parâmetros no gráfico da função tangente.

5.11 Exercitando o aprendizado no GeoGebra

5.12 Lista de Exercícios - Capítulo 5

6. Equações Trigonométricas

6.1 Equações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente tipo $\text{sen}(x) = a$

6.2 Lista de Exercícios - Capítulo 6

7. Transformações Trigonométricas

    7.1 Adição e subtração de arcos

    7.2 Arcos duplos e triplos

    7.3 Seno, Cosseno e tangente do arco metade

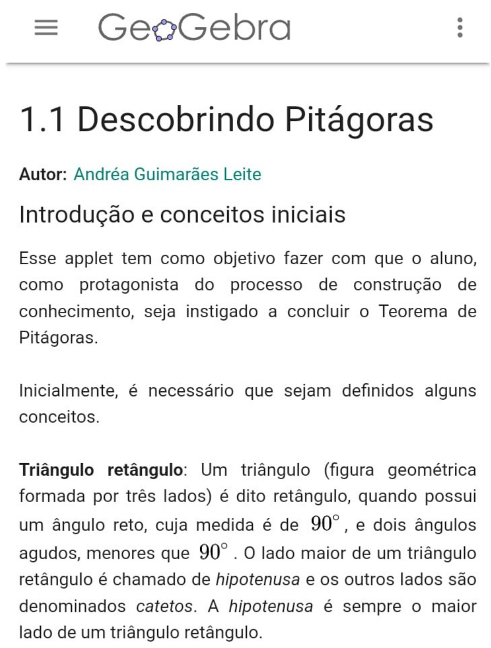
    7.4 Lista de Exercícios - Capítulo 7

## 5.3 Exemplo da aplicação das atividades

Para o melhor aproveitamento das atividades fomentadas no livro, segue um passo a passo da utilização do tópico 1.1 Descobrindo Pitágoras, que tem por objetivo incitar o aluno a conjecturar o Teorema de Pitágoras.

Inicialmente, é relembrado o conceito de tiângulo retângulo, enfatizando a nomenclatura destinada aos seus lados, como ilustra a Figura 5.1. O professor pode fazer a leitura com os alunos e, se possível, desenhar um triângulo com as mesmas características no quadro de aula.

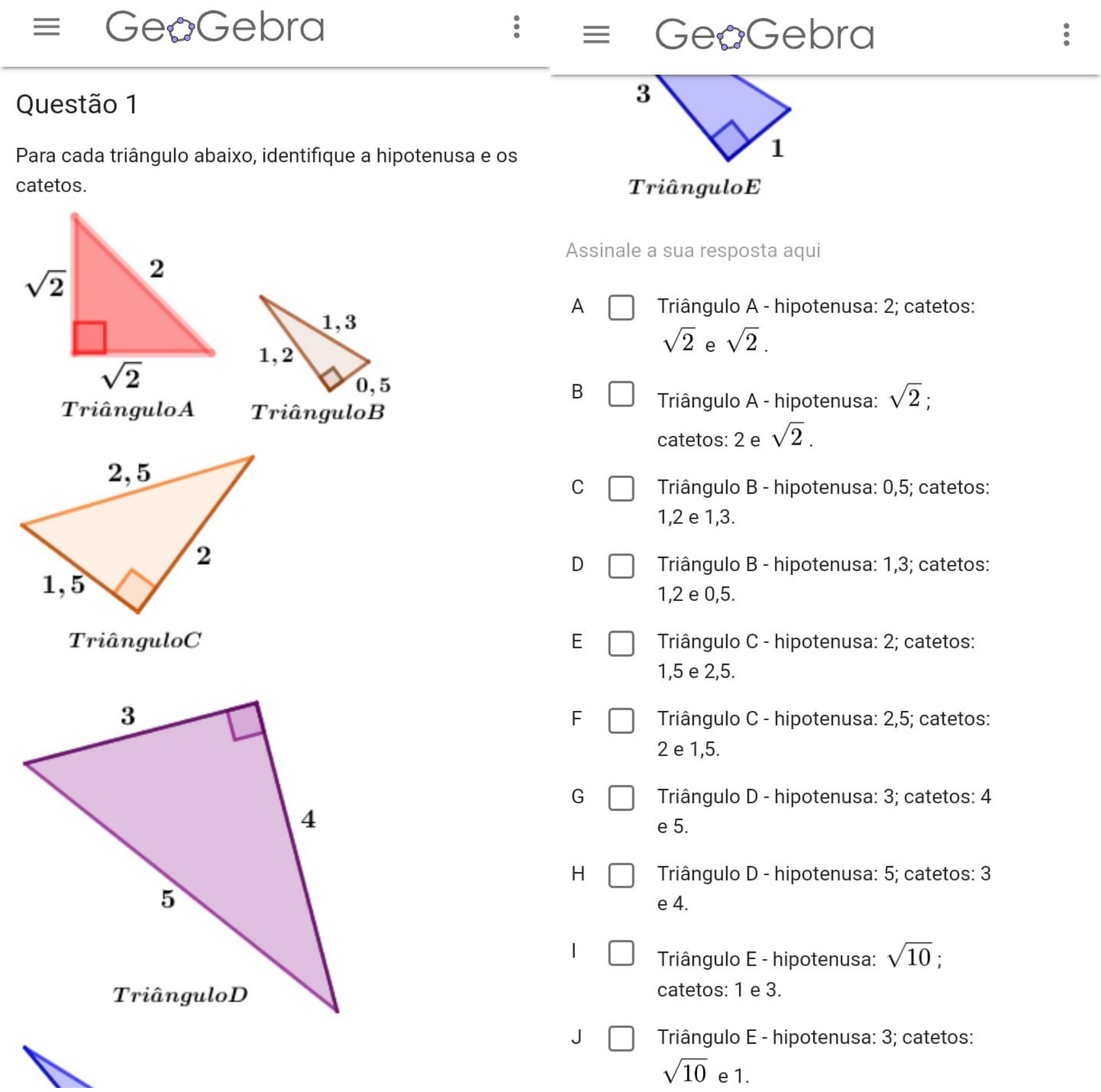
**Figura 5.1:** Imagem da tela do celular da atividade no GeoGebra




Fonte: *GeoGebrabook* do autor

Sequencialmente, a Questão 1 promove uma interação onde os alunos devem identificar, a partir de triângulos retângulos dados, quais são as medidas da hipotenusa e dos catetos em cada item, conforme nos mostra a Figura 5.2.

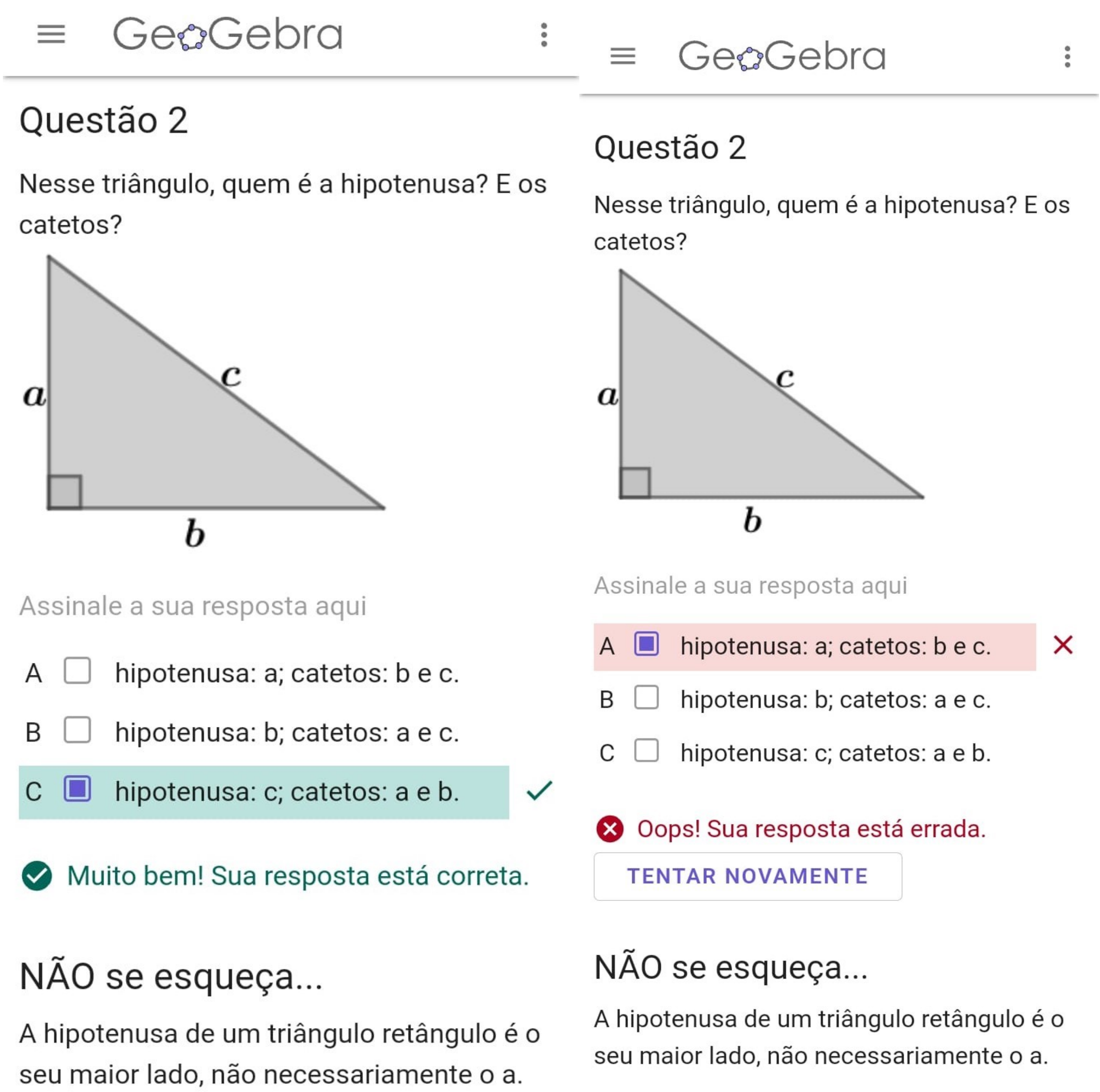
**Figura 5.2:** Imagem da tela do celular da Questão 1 no GeoGebra




Fonte: *GeoGebrabook* do autor

A Figura 5.3 permite-nos visualizar que, ao verificar a resposta, é retornado ao aluno uma mensagem com um *feedback* sobre a assertividade na questão. Vale esclarecer que esta não é uma funcionalidade exclusiva da questão apontada na Figura 5.3, bem como está disponível em qualquer questão que seja executada. A Questão 2 remete a

**Figura 5.3:** Imagem da tela do celular da Questão 2 no GeoGebra

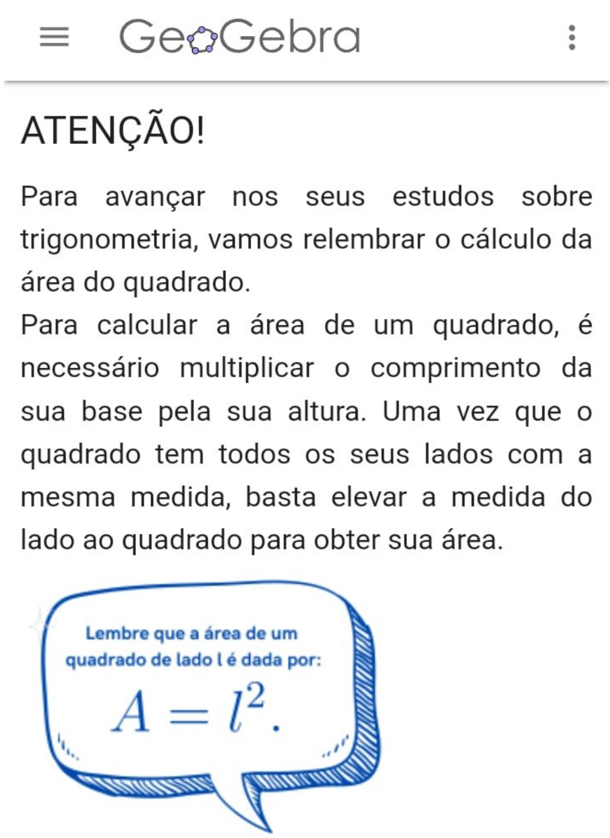



Fonte: *GeoGebrabook* do autor

uma precaução para que não haja engano ao realizar atividades envolvendo o Teorema de Pitágoras. Por uma convenção matemática, comumente, autores renomados, com livros didáticos amplamente utilizados na Educação Básica, como Lima et al[44], Iezzi[41] e Giovanni, Bonjorno e Sousa[45], intitulam a hipotenusa de "$a$" e os catetos de "$b$" e "$c$", levando muitos discentes a decorar a relação que utiliza as letras e não associando aos respectivos lados. Dessa forma, é muito importante ressaltar para os alunos que esta notação é apenas uma convenção adotada para facilitar a comunicação matemática, e que outros símbolos podem ser associados à hipotenusa e aos catetos, em distintas fontes bibliográficas, em exercícios, em questões de processos seletivos diversos etc. A questão em pauta traz um alerta nesse sentido.

Como destacado anteriormente, durante a realização da atividade, por vezes é necessário acessar conhecimentos anteriores . Em vista disso, um próximo elemento desta atividade rememora o cálculo da área do quadrado, em conformidade com o que nos mostra a figura 5.4.

**Figura 5.4:** Imagem da tela do celular da atividade no GeoGebra

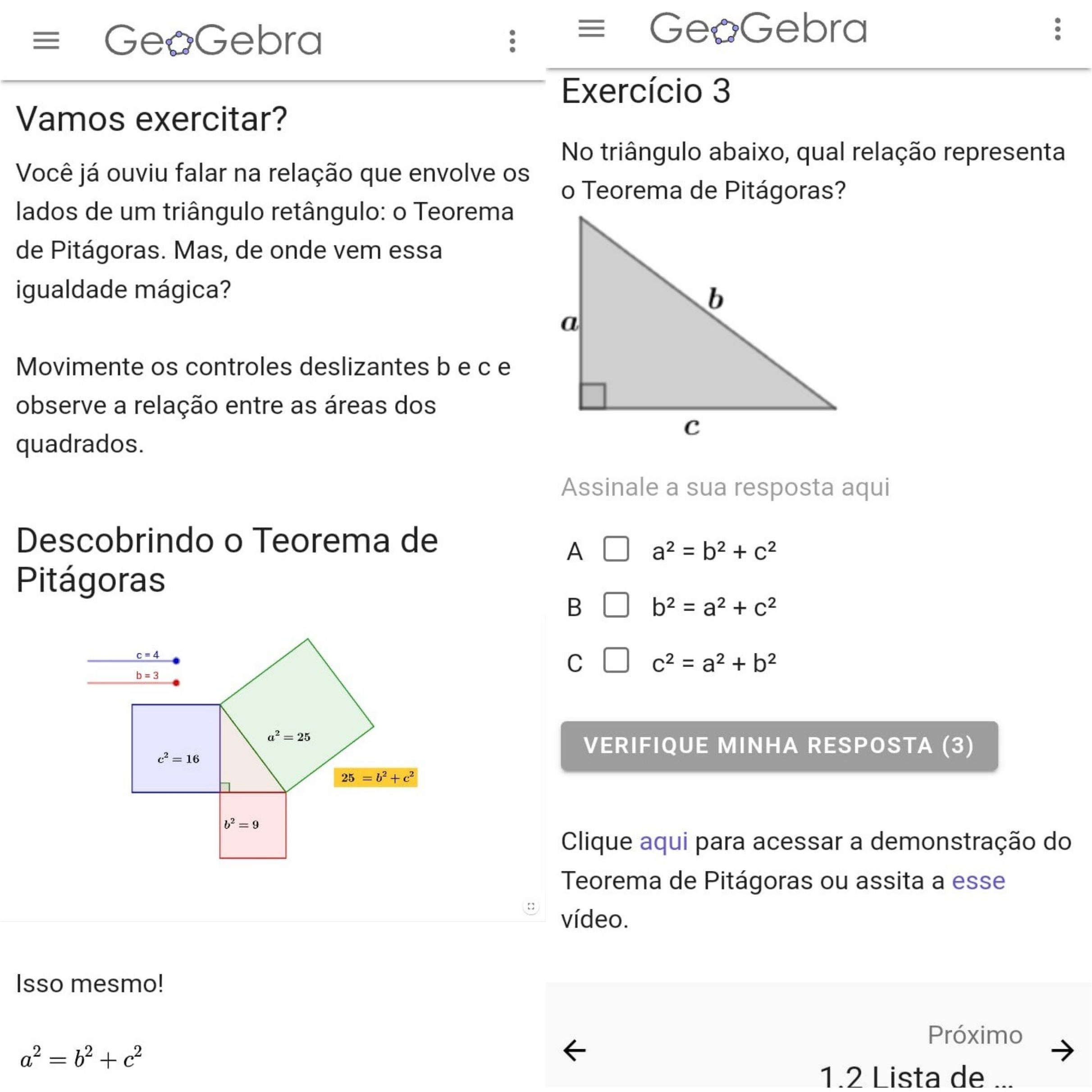



Fonte: *GeoGebrabook* do autor

Esta noção é de fundamental importância na observância da execução do item que segue.

O *applet* "Vamos Exercitar? ", visualizado na Figura 5.5, dá movimento ao triângulo retângulo permitindo que os alunos verifiquem que a soma das áreas dos quadrados que concorrem com os catetos do triângulo é sempre igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Estabelecendo, assim, o Teorema de Pitágoras. Para formalizar a prática vivenciada, o aluno tem a opção de acessar um *link* que o leva a uma demonstração escrita do Teorema de Pitágoras, disponível na página "Clubes de Matemática da OBMEP". Alternativamente, ele pode ser direcionado, por meio de outro *link*, para uma demonstração em vídeo disponível no canal "Matemática Paint Prof. Anderson Ramos"no YouTube. Essas opções oferecem recursos adicionais para que o aluno possa explorar diferentes formas de compreender e visualizar o Teorema de Pitágoras e podem ser observadas na Figura 5.5.

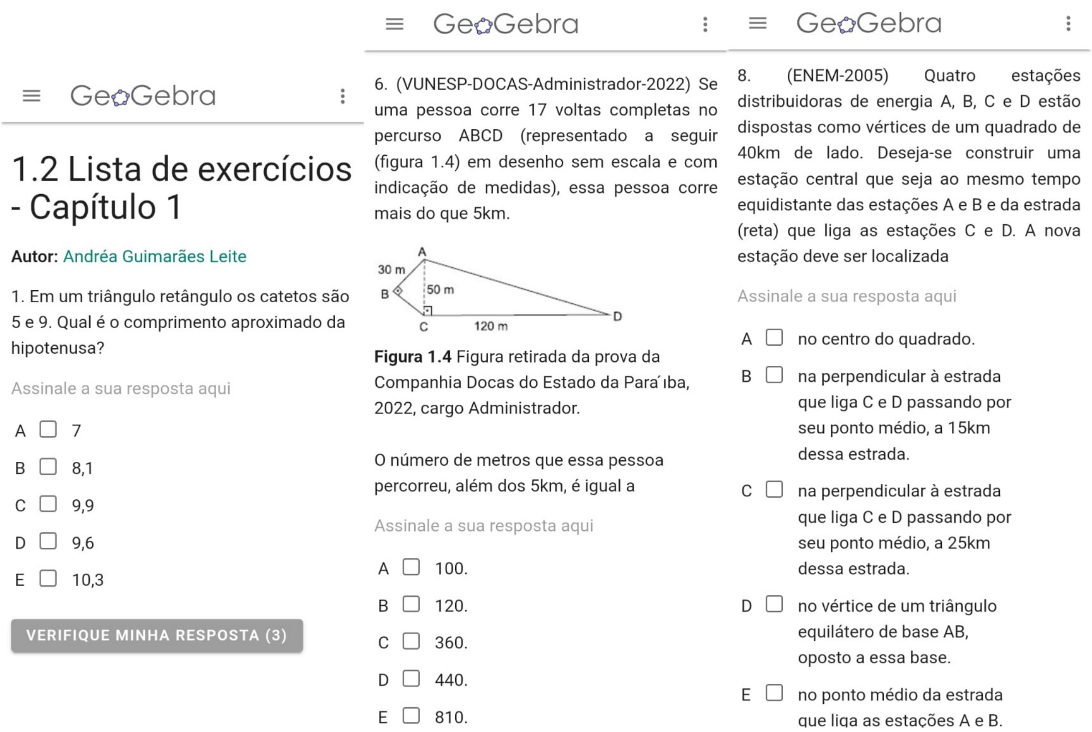
**Figura 5.5:** Imagem da tela do celular da atividade no GeoGebra




Fonte: *GeoGebrabook* do autor

Após a conclusão dessa atividade, é recomendado que o professor faça uma revisão adicional do conteúdo, inclusive por meio de perguntas orais, se preferir, a fim de assegurar que os alunos estejam preparados para a próxima etapa, que consiste em uma lista de exercícios relacionados ao Teorema de Pitágoras. É possível notar na Figura 5.6 a possibilidade de seguir para o próximo subtópico, 1.2 Lista de exercícios - Capítulo 1. Cabe ao professor averiguar quais alunos podem dar sequência para a lista de exercícios e quais devem retomar ainda mais os conceitos ou exercitar novamente as questões anteriores. É importante ressaltar que o subtópico 1.2 inclui questões com diversos níveis de complexidade e abordagens distintas. Conforme é verificado na Figura 5.6.

**Figura 5.6:** Imagem da tela do celular da atividade no GeoGebra




Fonte: *GeoGebrabook* do autor

Ao percorrer todo o tópico 1, os alunos serão desafiados de maneiras diversas, estimulando seu raciocínio e ampliando sua compreensão sobre o Teorema de Pitágoras.

# 6 Considerações Finais

Como fechamento deste trabalho acho válido ressaltar alguns pontos que podem contribuir para o desenvolvimento de trabalhos futuros na mesma área de conhecimento da Matemática, ou outras áreas.

Os professores, convivemos diariamente com a dificuldade de nossos alunos em lidar com a Matemática. E o fato de trabalhar com uma série específica por anos consecutivos, desenvolveu, em mim, uma crescente necessidade de buscar formas de ultrapassar esse obstáculo historicamente imposto sobre o aprendizado de matemática. No meu caso, foi a Trigonometria estudada na 2ª série do Ensino Médio o conteúdo de impasse. Nada melhor do que nossa experiência profissional para nos inspirar no momento de decidir sobre qual conteúdo estudar, pesquisar e desenvolver um trabalho de relevância.

O estudo remoto me possibilitou participar de vários cursos *online*. Em um curso de GeoGebra, ofertado pelo CEFET MG no ano de 2020 a professores de escolas estaduais do estado de Minas Gerais, tomei conhecimento da existência do ProfMat. No mesmo ano realizei o Exame Nacional de Acesso (ENA), iniciando as aulas no ProfMat de forma remota. O ano de 2021 foi bastante desafiador pelo formato. Mas no ano seguinte, com o retorno das aulas presenciais as coisas foram se encaixando pouco a pouco. A preparação para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ) foi um ponto de tensão mas, finalmente, com a aprovação pude pensar com maior dedicação na minha dissertação de conclusão de curso. E aqui está o resultado: uma iniciativa que disponibiliza aos professores que atuam na Educação Básica, principalmente no âmbito do Ensino Médio, material completo que abarca a base teórica concernente à trigonometria, tanto em relação ao triângulo retângulo quanto a triângulos em geral e a trigonometria na circunferência, incluindo aspectos como funções, equações e transformações trigonométricas. A riqueza e abrangência desse material fornece a educadores recursos e atividades úteis para o enriquecimento e aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem nessa área da Matemática. O produto educacional desenvolvido está pronto para ser usado.

Além de contemplar uma base teórica abrangente desta produção, o produto educacional desenvolvido inclui a criação de sequências de atividades, oferecendo aos professores uma ferramenta valiosa para instrução dos conteúdos supracitados. Essas sequências são projetadas de forma a permitir a utilização pelos educadores durante o processo de ensino e aprendizagem, focado no papel de mediador e fornecer um estudo mais autônomo dos alunos. Por meio dessa abordagem, o material proporciona uma experiência global, guiando os alunos por atividades intuitivas que conduzem à compreensão profunda de cada assunto proposto. Cada sequência inicia-se com a apresentação das ideias teóricas fundamentais, e, de maneira progressiva, conduz os discentes por uma jornada de aprendizado enriquecedora, culminando sempre com uma lista de atividades complementares, aberta a públicos distintos, para fortalecer e consolidar os conhecimentos adquiridos. Essa abordagem inclusiva permite que alunos de diferentes perfis e níveis de habilidade beneficiem-se plenamente do conteúdo, favorecendo um aprendizado significativo e enriquecedor. Destaca-se o papel fundamental do professor acompanhando atentamente o processo ensino e aprendizagem. Esta produção objetiva provocar, de forma crescente, nos alunos a transformação do papel historicamente adotado como passivo para protagonistas ativos, no qual podem se apropriar de seu caminho de aprendizado. Ao assumir efetivamente essa posição central, tornem-se os principais agentes no processo educacional. Tal propósito, com base nos pontos enfatizados no parágrafo precedente, torna-se pronto e preparado para ser alcançado, contando exclusivamente com a utilização eficaz do material construído. Dedicar-me a disciplinas, estudar para construir e construir o projeto de conclusão do mestrado (dissertação + produto educacional) ao mesmo tempo trabalhar, cuidar de casa e da família, apesar de ter sido uma escolha não foi tarefa nada fácil. Tivemos que renunciar a boa parte do projeto inicial por falta de disponibilidade e em primazia ao aprimoramento constante do trabalho. Até mesmo o sofrimento pelas consequências deixadas pela pandemia de Covid 19 interferiram nas difíceis escolhas necessárias ao longo desse período. Um dos processos impossibilitados foi a validação do produto educacional desenvolvido. Neste sentido, já é previsto, como sequência do presente trabalho, a produção de um artigo que permeie a aplicação do material e a avaliação dos resultados obtidos, objetivando dar maior respaldo para os professores que desejarem utilizar o livro desenvolvido. O caminho não foi fácil, mas o resultado mostra-se satisfatório e carrega consigo a certeza da produção de um material de alta qualidade que auxiliará no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Ademais, à medida que este trabalho oferece uma valiosa contribuição à sociedade educacional, uma vez que foi construído partindo de uma análise minuciosa do material já disponível acerca dos temas abordados, tem-se a expectativa de que as atividades aqui propostas sirvam de inspiração para outros pesquisadores, fomentando avanços constantes no campo da Matemática.

# Referências


1 SILVA, J. H. S. d. *Dificuldades no ensino e aprendizagem de trigonometria: uma análise das revistas de ensino.* Dissertação (B.S. thesis), 2019.

2 BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

3 SILVA, L. C. B. da et al. Metodologias ativas e tecnologias digitais na aprendizagem:: Uma revisão sistemática. *15º JORNADA CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA E 12 º SIMPÓSIO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO IFSULDEMINAS*, v. 14, n. 2, 2022.

4 SOUZA, G. O. de; TINTI, D. da S. Mapeamento de pesquisas desenvolvidas em mestrados e doutorados acadêmicos sobre o ensino de matemática por meio de metodologias ativas. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, v. 21, n. 4, p. 437–443, 2020.

5 MARQUES, H. R. et al. Inovação no ensino: uma revisão sistemática das metodologias ativas de ensino-aprendizagem. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas)*, SciELO Brasil, v. 26, p. 718–741, 2021.

6 GOSMATTI, A.; PANOSSIAN, M. L. Metodologias ativas na educação matemática escolar: uma discussão a partir da atividade pedagógica. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 14, n. 36, p. 1–22, 2021.

7 BAGGIOTTO, C. C.; BERNARDI, L. dos S.; GREGOLIN, V. M. Geogebra em dispositivos móveis: o ensino de geometria na perspectiva da educação matemática crítica. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 7, n. 3, p. 349–375, 2020.

8 INEP.GOV.BR. *Censo Escolar 2022*: Divulgação dos resultados. 2023. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/censo_escolar/resultados/2022/apresentacao_coletiva.pdf>. Acesso em: 08 de setembro de 2023.

9 GOUVEIA, J. T. A maiêutica como técnica na mediação de conflitos. *Configurações*, n. 30, 2022.

10 SOARES, C. *Metodologias ativas: uma nova experiência de aprendizagem.* [S.l.]: Cortez Editora, 2021.

11 DEWEY, J. *Vida e Educação*. 11. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

12 VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem*. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

13 BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. de M. *Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação.* [S.l.]: Penso Editora, 2015.

14 VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B. d.; GERALDINI, A. F. S. Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. *Revista Diálogo Educacional*, Pontifícia Universidade Católica do Paraná-PUCPR, v. 17, n. 52, p. 455–478, 2017.

15 CORTELAZZO, A. L. et al. *Metodologias Ativas e personalizadas de aprendizagem*. [S.l.]: Alta Books Editora, 2019.

16 PAIVA, T. Y. Aprendizagem ativa e colaborativa: uma proposta de uso de metodologias ativas no ensino da matemática. 2016.

17 LOVATO, F. L. et al. Metodologias ativas de aprendizagem: uma breve revisão. *Acta Scientiae*, v. 20, n. 2, p. 154, 2018.

18 OLIVEIRA, J.; SILVA, M. A. da. O estudante desejável constituído pelo discurso da educação matemática crítica. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Universidade Estadual do Paraná, v. 8, n. 17, p. 17–44, 2019.

19 MARCONE, R.; MILANI, R. Educação matemática crítica: um diálogo entre sua gênese nos anos 1970 e suas discussões em 2017 no brasil. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Universidade Estadual do Paraná, v. 9, n. 20, p. 261–278, 2020.

20 SKOVSMOSE, O. *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. [S.l.]: Papirus editora, 2008.

21 BENNEMANN, M.; ALLEVATO, N. S. G. Educação matemática crítica. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, v. 1, n. 1, 2012.

22 ALMEIDA, H. R. F. L. de. Das tecnologias às tecnologias digitais e seu uso na educação matemática. *Nuances: estudos sobre Educação*, v. 26, n. 2, p. 224–240, 2015.

23 BARROQUEIRO, C.; AMARAL, L. H. O uso das tecnologias da informação e da comunicação no processo de ensino-aprendizagem dos alunos nativos digitais nas aulas de física e matemática. *REnCiMa. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática*, v. 2, n. 2, p. 123–143, 2011.

24 MUNHOZ, A. S. Objetos de aprendizagem. *Curitiba: InterSaberes*, 2013.

25 UNICEF.ORG. *ICovid-19: Extensão da perda na educação no mundo é grave, e é preciso agir para garantir o direito à Educação, alerta UNICEF*. 2022–01–24. Disponível em: <https://educa.ibge.gov.br/jovens/materias-especiais/21581-informacoes-atualizadas-sobre-tecnologias-da-informacao-e-comunicacao.html>. Acesso em: 03 de setembro de 2023.

26 IBGE.GOV.BR. *IBGE EDUCA: INFORMAÇÕES ATUALIZADAS SOBRE TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO*. 2023. Disponível em: <https://educa.ibge.gov.br/jovens/materias-especiais/21581-informacoes-atualizadas-sobre-tecnologias-da-informacao-e-comunicacao.html>. Acesso em: 03 de setembro de 2023.

27 HOHENWARTER, M. et al. *GeoGebra*. 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 08 de abril de 2023.

28 HOHENWARTER, M. *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Dissertação (Mestrado em Matemematica) — Paris Lodron University, Salzburg, Austria, 2002–02. (In German).

29 ARAÚJO, L. C. L. de; NÓBRIGA, J. C. C. Aprendendo matemática com o geogebra. *Editora Exato, Sao Paulo*, 2010.

30 PROFMAT.ORG.BR. *Dissertações do PROFMAT*. 2022. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 28 de dezembro de 2022.

31 ALMEIDA, A. J. da S. *Trigonometria Prática com uso tecnologias para o ensino da funções trigonométricas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense (PROFMAT), 2020.

32 MUNHOZ, D. R. *Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo (PROFMAT), 2022.

33 PINHEIRO, E. S. *Uma Sequência Didática Para o Ensino de Trigonometria no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo (PROFMAT), 2022.

34 SILVA, L. P. e. *Trigonometria: Uso do GeoGebra para análise de problemas reais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás (PROFMAT), 2021.

35 BARROS, R. A. de A. *Metodologias Ativas: A sala de aula invertida aplicada ao ensino de trigonometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte (PROFMAT), 2021.

36 PALMERIM, A. S. *Uma Proposta para o Ensino de Trigonometria por Meio do Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará (PROFMAT), 2019.

37 JÚNIOR, F. R. de S. *ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM APPLETS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (PROFMAT), 2018.

38 SOUSA, F. D. R. B. de. *TSOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão (PROFMAT), 2018.

39 NOVAES, C. de P. R. *Funções trigonométricas no ENEM com auxílio do Geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro (PROFMAT), 2021.

40 SOUZA, L. M. S. de. *Uma Proposta de Estudo de Funções Trigonométricas e Suas Inversas Através do Geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (PROFMAT), 2015.

41 IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria*. 9. ed. [S.l.]: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1684-9.

42 DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações (2º ano do EM)*. [S.l.]: São Paulo: Editora Ática, 2016.

43 IEZZI, G. et al. *Matemática: volume único*. [S.l.]: Atual, 2002.

44 LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 1. 214 p. ISBN 85-8581810-7.

45 GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; SOUSA, P. R. C. d. *Matemática*. [S.l.]: FTD São Paulo, 2020. 55 p. ISBN 978-65-5742-020-1.