Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Utilização de teodolitos manuais na educação básica: Uma abordagem de ensino de trigonometria com Engenharia Didática

Anderson Cardoso de Amorim

Juazeiro do Norte - CE

2023

Utilização de teodolitos manuais na educação básica: Uma abordagem de ensino de trigonometria com Engenharia Didática

Anderson Cardoso de Amorim

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar

Coorientador

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz

Juazeiro do Norte - CE

2023

Utilização de teodolitos manuais na educação básica: Uma abordagem de ensino de trigonometria com Engenharia Didática

Anderson Cardoso de Amorim

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Aprovoda em: 13/09/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

José Tiago Nogueira Cruz

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz (Coorientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Membro)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Membro)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFCE)

Dedico essa dissertação, e todas as minhas conquistas, com todo amor e gratidão, a minha filha Lisbela Ribeiro Cardoso que me ensina todos os dias a beleza da vida e o quanto ela vale a pena.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por me proporcionarem a oportunidade de viver neste mundo tão caótico, especialmente à minha mãe, que sempre fez o possível e o impossível para que eu trilhasse um caminho digno na vida. Agradeço aos meus irmãos e sobrinhos, a quem amo muito.

A todos aqueles que sempre torceram por mim e dedicaram, em algum momento de suas vidas, um tempo de fé em nome de um ateu, muito obrigado pela confiança depositada em mim.

Ao meu primo, Mayfran Amorim (*in memoriam*), que me orientou e me mostrou a beleza dos números, revelando o quão encantador é esse universo. Infelizmente, ele não pôde ver o que venho conquistando e continuarei a conquistar.

À minha esposa, Adriana Ribeiro, pela paciência, cuidado, atenção e carinho. Como meus amigos dizem, seu lugar no céu está reservado.

Aos meus amigos, que me deram forças para não enlouquecer durante esse ciclo, mas, em contrapartida, quase me levaram ao alcoolismo.

A todos os professores que nos acompanharam durante este mestrado, com uma homenagem mais do que especial ao saudoso professor Pedro Ferreira, que nos orientou tão bem e trabalhou de forma digna e correta até os últimos momentos de sua vida, nos deixando no início deste ano de 2023.

Ao meu coorientador, Professor Dr. José Tiago Nogueira Cruz, pelos ensinamentos durante o curso e pelo acompanhamento nesta dissertação. E ao Professor Dr. Alexsandro Coelho Alencar, que, apesar de não ter sido meu professor durante o curso, aceitou me orientar no trabalho de conclusão e me mostrou os caminhos adequados para alcançarmos o sucesso na aplicação da ferramenta.

Aos meus alunos que se dispuseram a colaborar e fazer parte deste projeto, bem como a todos os que não participaram, mas que um dia me deram a oportunidade de fazer parte de suas vidas e de ajudar na realização dos seus sonhos.

Aos meus colegas de curso Jeovane, José Carlos, Josy, Lucas, Mardônio e Pedro, por sempre manterem o foco para que pudéssemos concluir esta etapa e, principalmente, o ENQ.

A todos, os meus sinceros agradecimentos!

“Já tá provado por A+B que A+B não prova nada.” (Falcão Cantor)

Resumo

Esta dissertação apresenta uma pesquisa que investigou a utilização de teodolitos manuais para o ensino de trigonometria na educação básica, utilizando conceitos da engenharia didática como metodologia para o ensino. A pesquisa foi desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Regional do Cariri (URCA). A dissertação inicia com uma discussão sobre estudos do campo da didática da matemática, da teoria das situações didáticas, do contrato didático e dos obstáculos epistemológicos, que são importantes para compreender o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Em seguida, apresenta-se a engenharia didática como metodologia de pesquisa que contribui para a elaboração, desenvolvimento e análise de sequências didáticas. O delineamento metodológico da pesquisa foi orientado pelas etapas da engenharia didática: análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Foram construídos dois teodolitos manuais para auxiliar na prática docente do professor de matemática, possibilitando o desenvolvimento dos conceitos trigonométricos de forma prática. A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma de segundo ano do ensino médio da EEMTI Campos Sales, em Campos Sales – CE, e os dados foram coletados por meio da produção dos alunos e das observações feitas no decorrer da aplicação das sequências didáticas, além da apresentação por parte desses alunos em forma de seminário. A aplicação da proposta tornou o estudo mais prazeroso, uma vez que tirou os alunos de sala de aula, proporcionando uma outra maneira de estudar matemática e trazendo a ideia de que em cada olhar cotidiano é possível obter um ângulo de observação. Em resumo, a dissertação apresenta uma pesquisa sobre a utilização de teodolitos manuais para o ensino de trigonometria, utilizando a engenharia didática como metodologia de pesquisa. A pesquisa contribui para a prática docente do professor de matemática e possibilita aos alunos tornarem-se protagonistas no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Didática da matemática, instrumentos de medir, ensino.

Abstract

This dissertation presents a research that investigated the utilization of manual theodolites for the trigonometry teaching in the basic education, utilizing concepts of the didactic engineering as a methodology for the teaching. The research was developed within the Professional Master's Degree in Mathematics in National Network (PROFMAT), at the Universidade Regional do Cariri – URCA (Regional University of Cariri). The dissertation begins with a discussion about studies of the field of mathematics' didactics, of the theory of the didactic situations, of the didactic contract and epistemological obstacles, which are important to understand the mathematics' teaching and learning process. In the next, it introduces the didactic engineering as a research methodology that contributes for the elaboration, development and analysis of didactic sequences. The methodological delineaction of the research was orientated by the stages of the didactic engineering: preliminary analysis, conception and a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis and validation. Two manual theodolites were constructed to assist in the teaching practice of the mathematics' teacher, enabling the development of the trigonometric concepts in a practical way. The research was accomplished with students of a second grade class of the High School at EEMTI Campos Sales (Campos Sales Integral Time High School), in Campos Sales - CE, and the data were collected through the students' production and observations made during the application of the didactic sequences, beside of the presentation in seminar form for some students. The application of the proposal turned the study more enjoyable, for it took the students out of the classroom, providing another way of studying mathematics and bringing the idea that in every daily looking is possible to obtain an angle of observation. In summary, the dissertation presents a research about the utilization of manual theodolites for the trigonometry teaching, utilizing a didactic engineering as a research methodology. The research contributes for the teaching practice of the mathematics' teacher and it enables to the students become protagonists in the learning process.

Keywords: Didactic of mathematics; measuring instruments; teaching.

Lista de Figuras

4.1 Esquema do Báculo de Petrus Ramus. 48

4.2 Quadrante em um quarto de cículo. 51

5.1 O triângulo retângulo. 60

5.2 Altura e projeções. 61

5.3 Semelhanças. 62

5.4 Razão entre os lados do triângulo retângulo. 63

5.5 Razões trigonométricas no triângulo retângulo. 64

5.6 Triângulo acutângulo. 65

5.7 Triângulo acutângulo 2. 66

5.8 Triângulo obtusângulo ABC. 68

5.9 Teodolito vertical. 70

5.10 Ideia inicial para o teodolito horizontal. 72

5.11 Construção do teodolito horizontal. 73

5.12 Instrumento construído. 73

5.13 Prédio medido. 79

5.14 Ângulo observado. 80

5.15 Segundo ponto de observação do topo do prédio. 81

5.16 Primeira parte do cálculo. 81

5.17 Segunda parte do cálculo. 82

5.18 Terceira parte do cálculo. 83

5.19 Quarta parte do cálculo. 83

5.20 Posicionamento inicial na praça. 84

5.21 Primeiro ângulo observado. 85

5.22 Cálculo da largura da praça. 86

5.23 Observações da torre. 87
5.24 Distância entre os dois pontos de observação. 88
5.25 Cálculo da distância entre primeiro e segundo ponto de observação. . . 88
5.26 Cálculo da altura da torre. 89
5.27 Observação do ponto mais alto da igreja. 90
5.28 Cálculo da altura da igreja. 91
5.29 Distância entre poste e Santa. 92
5.30 Cálculo da distância entre poste e Santa. 93
5.31 Distância entre as pontes. 94
5.32 Posicionamento dos integrantes. 95
5.33 Cálculo da distância entre as pontes. 96
5.34 Cálculo da distância entre o terceiro ponto de observação e a ponte. . . 97
5.35 Torre do Bairro Alto Alegre. 98
5.36 Distância entre o ponto de observação e a base da torre. 99
5.37 Cálculo da distância entre o ponto da primeira observação e a torre. . . 100
5.38 Cálculo referente a altura da torre. 101
5.39 Caixa d'água. 102
5.40 Esquema montado para medir a distância até a base. 103
5.41 Cálculos para determinar a altura da caixa. 104
5.42 Primeira observação do ponto mais alto da Santa. 104
5.43 Segunda observação do ponto mais alto da Santa. 105
5.44 Cálculo para determinar a altura a partir do ponto observado. 106
5.45 Cálculo para determinar a altura do altar e da estátua. 107
5.46 Pista de desembarque do aeroporto. 108
5.47 Pista de desembarque do aeroporto. 109

Sumário

Lista de Figuras **12**

1 INTRODUÇÃO **16**

1.1 Objetivo Geral 21

1.2 Objetivos Específicos 21

2 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA **23**

2.1 Teoria das situações didáticas 26

2.2 O contrato didático 28

2.3 Obstáculos Epistemológicos 31

3 DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO **37**

3.1 Fases da Engenharia Didática 38

3.1.1 Primeira fase – Análises preliminares 38

3.1.2 Segunda fase - Concepção e Análise a Priori 40

3.1.3 Terceira fase – Experimentação 41

3.1.4 Quarta fase - Análise a Posteriori e Validação 43

4 OS INSTRUMENTOS DE MEDIDA E A MATEMÁTICA **45**

4.1 Báculo 46

4.2 Quadrante em um quarto de círculo 50

5 METODOLOGIA **52**

5.1 1ª fase - análises preliminares 53

5.1.1 Trigonometria 55

5.1.2 O triângulo retângulo ou qualquer e suas relações métricas e razões trigonométricas . . . 59
5.1.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo . . . 63
5.1.4 Trigonometria num triângulo qualquer . . . 65
5.2 2ª fase - concepção e análise a priori . . . 69
5.2.1 Teodolito vertical . . . 70
5.2.2 Teodolito horizontal . . . 71
5.3 3ª fase - experimentação . . . 74
5.3.1 Atividades desenvolvidas pelas equipes . . . 77
5.4 4ª fase - Anáises a posteriori e validação . . . 78
5.4.1 Equipe 1 . . . 79
5.4.2 Equipe 2 . . . 86
5.4.3 Equipe 3 . . . 89
5.4.4 Equipe 4 . . . 94
5.4.5 Equipe 5 . . . 97
5.4.6 Equipe 6 . . . 101
5.4.7 Equipe 7 . . . 104
5.4.8 Equipe 8 . . . 107

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **113**

Referências **118**

1 INTRODUÇÃO

Para alcançar sucesso no ensino de Matemática na educação básica, nos são necessárias competências e habilidades metodológicas que transcendam as fronteiras de um ensino tradicional, que se baseiam apenas na perspectiva de livro, quadro e pincel. Um dos desafios enfrentados pelos professores nesse nível de ensino é encontrar uma forma de tornar as aulas atrativas, já que precisam competir pela atenção dos jovens com diversas ferramentas, tanto tecnológicas como não tecnológicas, que capturam a atenção dos alunos a uma velocidade que o campo do conhecimento didático ainda está se esforçando para acompanhar. Nesse sentido, é necessário adotar abordagem de ensino diferenciada, que aproxime o conteúdo a ser desenvolvido da realidade dos alunos, permitindo que eles participem ativamente do processo da aprendizagem para facilitar a assimilação do conteúdo.

Com frequência, a disciplina de Matemática é vista apenas como um conjunto de fórmulas e é abordada de forma desconectada da realidade. O aluno muitas vezes se torna um mero receptor, limitando-se a memorizar fórmulas de conteúdos que não veem significados e aplicações no seu cotidiano. Um grande obstáculo para o progresso da educação matemática na educação pública é o baixo nível de conhecimento dos alunos, tanto em termos aritméticos, algébricos e geométricos, quanto sensoriais.

Infelizmente, esse problema não é recente no que diz respeito à aprendizagem matemática, mas sim uma questão que persiste há muito tempo em nossa sociedade. Essa preocupação com o ensino da matemática e o desempenho dos alunos em relação a ela foi abordada por Fiorentini (1990, p. 6), que afirmou:

> As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo ensino aprendizagem da matemática são muitas e conhecidas. Por um lado, o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, muitas vezes é reprovado nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovado, sente dificuldades em utilizar o conhecimento 'adquirido', em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância. (22)

Além das dificuldades enfrentadas no ensino de Matemática, existe uma preocupação sobre a aprovação dos alunos sem conhecimento adquirido. No estado do Ceará, por exemplo, foi adotada uma abordagem em que todos os alunos são automaticamente aprovados, mesmo sem terem adquirido conhecimento ou sem terem se esforçado para obter tal conhecimento. Essa prática ignora os contratos didáticos e fecha os olhos para os possíveis obstáculos epistemológicos, tudo isso com o objetivo de mostrar que o estado é referência em educação, reduzindo significativamente os índices de reprovação e desistência.

Diante de tais angústias, quando percebemos que muitas vezes nossos alunos não estão entendendo "nada" ou "quase nada" do que estamos ensinando, Fiorentini (1990) reitera:

> O professor, por outro lado, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos e tendo dificuldades de, por si só, repensar satisfatoriamente seu fazer pedagógico procura novos elementos - muitas vezes, meras receitas de como ensinar determinados conteúdos - que, acredita, possam melhorar este quadro. [...] (22)

Logo, faz-se necessário ressignificar e procurar novos métodos para que a educação se torne satisfatória aos discentes mesmo diante de tais entraves.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs),

> O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem (BRASIL et al. 1998, p.15)

Precisamos buscar argumentos e metodologias que fundamentem uma transformação metodológica no processo pedagógico, no cotidiano da sala de aula. Em uma época em que as barreiras pedagógicas estão sendo derrubadas, torna-se essencial procurar práticas pedagógicas inovadoras que tornem o processo de ensino-aprendizagem mais prazeroso.

O ensino de trigonometria na educação básica, por vezes, é algo que foge à compreensão dos alunos e pode parecer de pouca utilidade prática, o que gera apresentações e sentimentos que afastaram os alunos do conhecimento matemático. O presente estudo, de natureza qualitativa, terá uma abordagem baseada nos princípios de Engenharia Didática, que servirá como orientação para a construção do conhecimento matemático em situações práticas relacionadas ao conteúdo de trigonometria. Faremos uso de instrumentos de medir de uma forma dinâmica.

De acordo com Artigue (1996), "a Engenharia Didática é um processo empírico que tem como objetivo conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas". A autora também afirma que a Engenharia Didática tem dupla função, pois pode ser entendida, também, como uma produção para o ensino como uma metodologia de pesquisa qualitativa. A Engenharia Didática segue quatro etapas fundamentais: análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação da experiência.

Antes de abordarmos essas etapas da Engenharia Didática, realizamos um breve levantamento sobre a Didática da Matemática e a evolução de suas ideias em consonância com a evolução da própria humanidade. Discutiremos os principais estudiosos desse campo e a importância de se aprofundar nesse tema para obter sucesso no processo de ensino-aprendizagem. Para uma melhor compreensão do trabalho pedagógico, abordamos a Teoria da Situações Didáticas, Contrato Didático e os Obstáculos Epistemológicos, que fornecem a base do desenvolvimento e aprimoramento da Engenharia Didática em todas as suas fases.

Aliado à Engenharia Didática, abordamos e realizamos também o uso de instrumentos históricos como uma ferramenta para potencializar o processo de ensino-aprendizagem dos alunos, fazendo a imbricação de um campo teórico-metodológico com um instrumental teórico-prático. A partir da segunda metade do último milênio, o uso de instrumentos matemáticos tronou-se comum em diferentes setores da sociedade. Os conhecimentos matemáticos incorporados nesses instrumentos passaram a ser aplicados em atividades práticas, sendo amplamente utilizados para solucionar problemas em diversas áreas de investigação. Isso levou ao desenvolvimento de mecanismos distintos para a obtenção de soluções específicas, o que fomentou a nossa intenção de utilizar esse recurso no trabalho aqui proposto.

Nesse contexto, realizamos um breve relato sobre os instrumentos de medição e sua relação com a matemática, com foco nos tratados do século XVI, destacando-se o Báculo e o Quadrante em um quarto de círculo. De acordo com Saito (2016, p. 4) um instrumento pode ser definido como "uma ferramenta ou aparato utilizados em laboratório para realizar observações e experimentos; ou ainda, como uma ferramenta que nos permite medir comprimento, peso, e outros fenômenos naturais, tais como pressão, temperatura, força, etc". As potencialidades didáticas desses instrumentos surgem a partir do estudo contextualizado de seu papel em relação a uma teoria e à experimentação, proporcionando uma análise histórica.

Os resultados desse estudo podem contribuir com uma formação mais significativa de alguns conceitos matemáticos, ao propiciar aos alunos uma compreensão mais profunda e contextualizada desses instrumentos e suas aplicações práticas. Ao explorar o uso histórico dos instrumentos de medição, é possível estabelecer conexões entre a teoria matemática e a prática, tornando o ensino mais envolvente e facilitando a compreensão dos alunos.

O foco principal desste trabalho é uma possibilidade de trabalhar a interdisciplinaridade e a contextualização da Trigonometria por meio de atividades práticas em sala de aula. Através das razões trigonométricas, é possível calcular alturas e distâncias inacessíveis, proporcionando uma abordagem prática desses temas muitas vezes negligenciado pelos professores do ensino médio. Destacamos no trabalho que, ao calcular a distância horizontal, a distância vertical e utilizar outros procedimentos, os alunos estão aplicando os conceitos trigonométricos estudados na educação básica.

Para o desenvolvimento das etapas da Engenharia Didática, na sua primeira fase de Análises Preliminares, abordamos o ensino de trigonometria e de todo o embasamento teórico necessário para um bom desenvolvimento pedagógico dos alunos. Na segunda fase de Concepção e Análise a Priori, detalhamos a construção de dois teodolitos: um para a obtenção de ângulos verticais e outro para a obtenção de ângulos horizontais. Esses instrumentos foram utilizados na etapa subsequente de Experimentação.

A intervenção didática da fase de Experimentação foi realizada com uma turma de 40 alunos do 2° ano da Escola de Ensino Médio em Tempo Integral (EMTI) Campos Sales, no município de Campos Sales-CE. Os alunos foram divididos em grupos de 4 ou 5 e foram desafiados a medir alturas de objetos e distâncias em vários pontos da cidade. Na última fase, Análise a Posteriori e Validação, os alunos fizeram um levantamento dos dados coletados durante a etapa anterior e apresentaram, em forma de seminário, o método utilizado e os resultados obtidos.

No contexto de diferentes representações, os recursos-didático pedagógicos oferecem ao professor a oportunidade de relacionar a Matemática ensinada em sala de aula com o cotidiano dos alunos, além de facilitar a interdisciplinaridade e a visualização de conteúdos abstratos. É importante ressaltar a importância de relacionar observações do mundo real com suas representações e conceitos matemáticos, como mencionado nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> "No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados" (BRASIL 1997, p.19)

Para concluir, nas considerações finais, abordamos a importância de relacionar o ensino de matemática com situações reais do dia a dia dos alunos. Também destacamos a eficácia da metodologia proposta, além de fazer uma breve análise da educação atualmente e de como ela tem sido abordada nos últimos anos.

1.1 Objetivo Geral

Investigar a viabilidade e eficácia da utilização de teodolitos manuais como recurso didático para o ensino de trigonometria na educação básica, por meio da aplicação de conceitos da Engenharia Didática como metodologia de ensino.

1.2 Objetivos Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre a didática da Matemática, explorando os principais estudiosos e a evolução das ideias no campo, a fim de embasar teoricamente o desenvolvimento pedagógico;

- Construir dois teodolitos manuais para auxiliar na prática docente do professor de Matemática;

- Desenvolver sequências didáticas inovadoras que integrem o uso dos teodolitos manuais ao ensino de trigonometria;
- Aplicar os princípios da Engenharia Didática, seguindo as etapas de Análises Preliminares, Concepção e Análise a Priori, Experimentação e Análise a Posteriori, e Validação, para desenvolver e aprimorar práticas pedagógicas inovadoras no ensino de Trigonometria.
- Avaliar a efetividade da utilização dos teodolitos manuais no ensino de trigonometria, por meio de análises qualitativas das atividades desenvolvidas pelos alunos;
- Estimular o protagonismo dos alunos, promovendo a resolução autônoma de problemas matemáticos utilizando os teodolitos manuais.
- Apresentar considerações finais sobre a relevância da metodologia proposta, destacando a importância de uma abordagem prática e significativa no ensino da Trigonometria.

2 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A Didática da Matemática é uma área de estudo dedicada a compreender como se dá o processo de ensino e aprendizagem da matemática. O termo "didática" surgiu há quase quatro séculos, e está relacionado à maneira de ensinar, tornando o conhecimento significativo diante das situações de ensino.

Ao longo da história, importantes estudiosos contribuíram para a evolução e desenvolvimento matemático, como Platão, Aristóteles e Descartes. Foi em 1629 que a palavra Didática foi empregada pela primeira vez pelo educador alemão Wolfgang Ratke, e mais tarde, em 1657, J. A. Comênio elaborou de maneira orgânica, sistemática e científica os fundamentos ou princípios, os métodos e o conteúdo do ensino geral em sua obra "Didática Magna".

De Comênio é, justamente, uma das primeiras e melhores definições de Didática que se conhece até hoje. O autor afirma:

> Nós ousamos prometer uma Didática Magna, isto é, um método universal de ensinar tudo a todos. E de ensinar com tal certeza, que seja impossível não conseguir bons resultados. E de ensinar rapidamente, ou seja, sem nenhum enfado e sem nenhum aborrecimento para os alunos e para os professores, mas antes com sumo prazer para uns e para outros. E de ensinar solidamente, não superficialmente e apenas com palavras, mas encaminhando os alunos para uma verdadeira instrução, para os bons costumes e para a piedade sincera. Enfim, demonstraremos todas estas coisas a priori, isto é, derivando-as da própria natureza imutável das coisas, como de uma fonte viva que produz eternos arroios que vão, de novo, reunir-se num único rio; assim estabelecemos um método universal de fundar escolas universais (COMENIUS 1986, p.5)

Segundo (CANDAU 2011, p.14) , o objeto de estudo da didática é o processo de ensino-aprendizagem, no qual, toda proposta didática está impregnada, implícita ou explicitamente de uma referência desse processo. Dessa forma, o intuito da didática em diversas situações de ensino, é associar a teoria à prática, como forma de compreender os conteúdos apresentados. Nessa perspectiva, (MELO e URBANETZ 2008, p.105) afirmam que é na relação ensino e aprendizagem e, mais especificamente, no sucesso desta última, que a didática ganha importância, pois o ato educativo é caracterizado pela intencionalidade, ou seja, é uma ação proposital que visa um objetivo, o qual, por sua vez, depende das concepções dos envolvidos no ato educativo.

A Didática passou por diversas transformações ao longo do tempo, ganhando espaço nas escolas com técnicas de ensino-aprendizagem inovadoras e adquirindo status como um campo de estudo abrangente, que engloba diversas áreas do conhecimento humano. Atualmente, o estudo da didática está voltado para a educação como uma ferramenta de transformação social, buscando garantir que o conhecimento seja acessível a todos.

A evolução das ideias didáticas tem sido abordada por diferentes autores de maneiras variadas, porém detalhadas e enriquecedoras, baseadas em suas visões sobre o ser humano, a sociedade e, especialmente, a educação e o ensino. No campo de ensino da matemática, a Didática da Matemática desenvolvida pelos pesquisadores franceses durante o século XX desempenhou um papel fundamental. Dentre os principais nomes associados a essa abordagem estão Gaston Bachelard, Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Michele Artigue e Régine Douady.

Esses estudiosos franceses foram responsáveis pelo desenvolvimento e disseminação das teorias fundamentais da Didática da Matemática, contribuindo para o aprimoramento do ensino dessa disciplina. Suas contribuições incluem reflexões sobre a aprendizagem matemática, a construção de conceitos, o papel dos obstáculos epistemológicos, a importância da resolução de problemas, o uso de recursos didáticos e a interação entre o professor e o aluno. Existem outras abordagens da Didática da Matemática distintas da abordagem francesa, no entanto, nos concentraremos nesta, uma vez que ela se constituiu como fio teórico e metodológico para a construção deste trabalho de pesquisa.

A Didática da Matemática se tornou uma área de estudo essencial para os educadores matemáticos, pois proporciona subsídios teóricos e práticos para aprimorar a forma como a matemática é ensinada, buscando promover uma aprendizagem mais significativa e engajadora. Por meio das contribuições dos pesquisadores franceses e outros estudiosos, a Didática da Matemática se estabeleceu como um campo de conhecimento sólido e em constante desenvolvimento, que busca constantemente aperfeiçoar as estratégias de ensino e proporcionar uma educação matemática de qualidade.

Luiz Carlos Pais, como um dos maiores especialistas nessa abordagem no Brasil, oferece a seguinte definição da Didática da Matemática, considerando o contexto brasileiro:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS 2016, p.11)

A didática da matemática engloba teorias e conceitos voltados para o trabalho em sala de aula tanto do professor quanto do aluno. Seu interesse de estudo abrange temas como as estratégias de ensino e aprendizagem em matemática, as possíveis barreiras que podem surgir no processo, e as ferramentas que podem auxiliar na elaboração de metodologias para trabalhar os conceitos matemáticos em sala de aula.

Para que esses processos sejam efetivos, é necessário reconhecer as situações e obstáculos que podem surgir e interferir no desenvolvimento e conclusão de uma educação matemática eficaz. A Didática da Matemática busca identificar e superar essas dificuldades, promovendo uma prática pedagógica mais adequada e efetiva, que permita aos alunos construir um sólido entendimento dos conceitos matemáticos.

2.1 Teoria das situações didáticas

A Teoria das Situações Didáticas é um marco importante no estudo da relação entre ensino e aprendizagem da Matemática. Surgiu na década de 1970, inicialmente na França, e está inserida em uma fronteira entre a Matemática, a Pedagogia e a Psicologia. Os teóricos envolvidos nesse campo defendiam a ideia de que cada área de ensino deveria desenvolver sua própria didática, reconhecendo as especificidades de cada campo do conhecimento.

No contexto da Teoria das Situações Didáticas, destaca-se o conceito de contextos didáticos, que são conjuntos de regras explícitas ou implícitas direcionadas aos alunos pelo professor. O objeto central dessa teoria não é o sujeito cognitivo em si, mas sim as situações didáticas nas quais ocorrem as interações entre professor, aluno e conhecimento. Dessa forma, a Didática da Matemática busca trazer teorias e conceitos voltados para o trabalho em sala de aula, tanto para aqueles que ensinam quanto para aqueles que aprendem a Matemática.

Guy Brousseau, um dos principais teóricos da Teoria das Situações Didáticas, desenvolveu um sistema conhecido como "triângulo didático". Nesse modelo, o professor, o aluno e o conhecimento são representados pelos vértices do triângulo, sendo considerados elementos indispensáveis para a teoria. Brousseau propôs que, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos adquiridos em contextos sociais e/ou escolares, sejam propostas situações didáticas a partir desse ponto. Situações a-didáticas ocorrem quando os alunos são capazes de aplicar o conhecimento de forma autônoma em situações fora do contexto de ensino, sem indicações intencionais. Essas situações são chamadas de *"milieu"*. (BROUSSEAU 1990).

O conceito de "milieu" é fundamental na Teoria das Situações Didáticas e pode englobar recursos como situações-problema, jogos, os conhecimentos dos colegas e do professor, histórias, simulações ou experiências realizadas. O meio deve ser provido de intenções didáticas, provocando o aluno a agir de forma ativa como um sujeito cognitivo, envolvendo-se com os problemas e não apenas utilizando seus conhecimentos prévios, mas também modificando-os ou rejeitando-os para construir novos conhecimentos.

Portanto, a Teoria das Situações Didáticas busca compreender como as situações de ensino podem ser planejadas e organizadas de forma a promover a aprendizagem significativa da Matemática, envolvendo o aluno como protagonista no processo de construção do conhecimento.

De fato, Guy Brousseau propôs diferentes tipos de situações didáticas como estratégias para auxiliar na descoberta do conhecimento pelo aluno. Esses tipos de situações visam promover a interação entre o aluno e o saber, incentivando o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas. Vamos explorar cada um desses tipos:

1. **Situações de ação:** Nesse tipo de situação, o aluno é desafiado a resolver problemas ou realizar ações para encontrar um resultado específico. Ele utiliza estratégias, moldes e tentativas para sistematizar o problema, buscando soluções de forma efetiva.

2. **Situações de formulação:** Nas situações de formulação, ocorre a troca de informações entre o aluno e as situações a-didáticas, sem o uso de uma linguagem matemática formal. Aqui, o aluno explora o problema, formula hipóteses, faz perguntas e busca compreender as relações envolvidas.

3. **Situações de validação:** Nesse tipo de situação, o aluno utiliza a linguagem matemática formal e mecanismo de prova para convencer o professor da validade da solução encontrada ou da argumentação apresentada. O objetivo é demonstrar o entendimento dos conceitos e a correta utilização das técnicas matemáticas.

4. **Situações de institucionalização:** Essas situações envolvem o reconhecimento e a sistematização do saber adquirido pelo aluno, conferindo-lhe um caráter cultural. Aqui, o conhecimento é consolidado, identificado e incorporado ao repertório do aluno como parte da cultura matemática. (BROUSSEAU 1990)

A Teoria das Situações Didáticas nos proporciona uma compreensão mais profunda sobre as concepções adquiridas em sala de aula, a forma como os alunos estão aprendendo e como o professor está contribuindo para a construção desse conhecimento. Isso nos permite planejar sequências didáticas claras e tangíveis, alinhando as expectativas entre professor e aluno. A construção de um "contrato didático" entre professor e alunos, com acordos bilaterais, ajuda a estabelecer uma relação de confiança e colaboração, essencial para o processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, a Teoria das Situações Didáticas proporciona um enfoque pedagógico que valoriza a interação entre aluno, professor e conhecimento, promovendo o engajamento ativo dos alunos no processo de aprendizagem matemática.

2.2 O contrato didático

Conforme Brousseau (2006), o contrato didático é uma troca mútua que envolve um conjunto de comportamentos esperados tanto do professor quanto do aluno. É uma organização que se baseia na sala de aula, com objetivos claros e regras muitas vezes implícitas, mas que podem ser revisadas e reelaboradas quando necessário para alcançar os objetivos estabelecidos. O Contrato Didático atua como um elo que une professor e aluno no processo de descoberta do conhecimento.

Para que as relações estabelecidas no contrato sejam efetivas, é essencial que elas sejam claras para ambas as partes, e a negociação desempenha um papel implícito nesse contexto. Conforme (GÁLVEZ 1996) , as regras de funcionamento do Contrato Didático são definidas dentro das situações didáticas, como o direito de expressar opiniões e o dever de ouvir o que é dito. De acordo com D´Amore:

> A ideia nasceu para estudar as causas do fracasso eletivo em Matemática, isto é, daquele fracasso típico, reservado apenas ao domínio da Matemática, por parte dos estudantes que, por outro lado, parecem mais ou menos arranjarem-se nas outras matérias (D'AMORE 2007, p.99)

O Contrato Didático funciona como se fossem cláusulas de um contrato formal, estabelecendo as responsabilidades de cada elemento da relação didática. Essas cláusulas são expressas de forma explicita em poucas ocasiões, quando declaradas pelo professor em sala de aula, mas principalmente, de forma implícita, acompanhando a formação de cada indivíduo no ambiente escolar.

Nessa perspectiva, Brousseau define:

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU 2006, p.50)

Na visão de (CURY), a noção de contrato didático vai além das compreensões filosóficas ou pedagógicas adotadas pelo professor, sendo um vínculo estabelecido sempre que um educador e seus alunos se unem em torno de um saber. Nesse modelo de relações estabelecidas, ambas as partes precisam estar abertas a novas negociações ou renovações caso o contrato não seja satisfatório para uma ou ambas as partes a cada novo ciclo. Dessa forma, esse padrão de funcionamento determina o andamento das aulas em sala de aula, assim como o comportamento da classe como um todo.

Cabe ao educador guiar os alunos na resolução de problemas propostos por ele, enquanto a função do aluno é ouvir essas orientações e executá-las, construindo assim um vínculo que reflete um relacionamento de confiança. Dessa forma, ambas as partes do contrato chegam ao objetivo principal, que é a aquisição do conhecimento.

BELTRÃO (7, p.15) destaca que: "[...] o contrato didático depende da estratégia de ensino adotada, adaptando-se a diversos contextos, como escolhas pedagógicas, tipos de trabalhos solicitados aos alunos, objetivos do curso, condições de avaliação, entre outros".

A percepção do contato didático ocorre principalmente quando há uma violação por um dos parceiros da relação didática. Segundo Porto:

> Admitindo-se que pudesse existir um contrato sobre a natureza dos conhecimentos a serem adquiridos, ele estaria fadado a ser quebrado, porque os conhecimentos adquiridos substituem ou destroem os conhecimentos anteriores. A aquisição é amiúde, uma quebra, uma ruptura das próprias convicções. (PORTO 2019, p. 75)

Por exemplo, uma quebra do contrato didático ocorre quando o professor pretende abordar um conceito novo por meio de uma atividade em que os alunos, partindo de uma situação-problema, resolvem questões individualmente ou em pares, e no final o professor faz algumas considerações para promover a institucionalização do conceito. Se os alunos estiverem habituados com métodos tradicionais, nos quais a aula expositiva é seguida de definições, propriedades e exemplos seguidos de exercícios, é natural que os alunos questionem. Nesse caso, ocorre uma ruptura do contrato didático, pois o professor não age conforme o esperado pelos alunos.

Neste sentido, todos os tipos de relações que mencionamos fazem parte de uma cultura didática que envolve o saber matemático. Brousseau (2006) explica que:

> No caso o raciocínio formulado pelo professor é tanto: um objeto explicito do ensino na fase de institucionalização, porém, correlacionado com a situação objetivamente definida ou um suporte de aprendizagem e recordação de uma sentença ensinada; ou um argumento teórico usado como meio didático para auxiliar os estudantes na compreensão do enunciado. (BROUSSEAU 2006, p. 22).

Uma ruptura do contrato didático ocorre quando um problema é proposto aos alunos, mas sua resolução não é compatível com o nível intelectual e cognitivo deles. Além disso, ocorre uma ruptura quando o professor desvia de sua função como orientador das situações de aprendizagem, demonstrando impaciência e aplicando punições aos alunos que não apresentam a conduta esperada. Esse descontrole leva ao rompimento de uma ética pedagógica, que geralmente não é explicitada na formação do professor.

Segundo Pais,

> Esse tipo de situação é bem característico de uma certa vertente do ensino tradicional da matemática, na qual o professor, indevidamente, toma para si uma parte essencial da tarefa da compreensão do problema em questão. O que deveria ser resultado do esforço do aluno passa a ser visto como uma tentativa de transferência de conhecimento (PAIS 2016, p. 90).

À medida que o ensino evolui, o contrato didático também sofre modificações. Podendo haver rupturas, renegociações e até mesmo a criação de um novo contrato, com o objetivo de melhorar o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de acordo com as novas situações. É essencial ter cuidado ao estabelecer toda a estrutura do contrato, garantindo determinações claras e adequadas ao nível dos alunos. Uma má organização, sem diretrizes claras e alinhadas com o nível dos alunos, pode resultar em uma má aprendizagem, surgindo obstáculos que podem levar ao rompimento de contratos previamente estabelecidos.

2.3 Obstáculos Epistemológicos

Os obstáculos epistemológicos foram inicialmente descritos por Gaston Bachelard como um tipo de resistência que o conhecimento estabelecido oferece a novas formas de conhecimento. Nas palavras de Bachelard:

> O espírito científico é essencialmente uma retificação do saber, um alargamento dos quadros do conhecimento. Julga o seu passado condenando-o. A sua estrutura é a consciência dos seus erros históricos. Cientificamente, pensa-se o verdadeiro como retificação histórica de um longo erro, pensa-se a experiência como retificação da ilusão comum e primeira. (BACHELARD 1996, p. 120).

Dessa forma, os obstáculos epistemológicos referem-se a conceitos considerados verdadeiros em um determinado período, mas que, na realidade, dificultam a formação de novos conhecimentos. A análise epistemológica permite que pesquisadores em Educação Matemática identifiquem obstáculos e dificuldades no processo de aprendizagem. A noção de obstáculos epistemológicos foi tratada principalmente na obra "A formação do espírito científico" (1938), na qual Bachelard propõe uma psicanálise do conhecimento, analisando seu progresso por meio de suas condições internas e psicológicas. Nesse contexto, ele afirma:

> É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas da inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos [...] o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (BACHELARD 1996, p. 17).

Com base nessas ideias, a noção de obstáculo epistemológico foi introduzida na Didática da Matemática por Brousseau, que propôs um Sistema Didático baseado no professor, no conhecimento matemático e no aluno, buscando estabelecer relações com a realidade do aluno, seu contexto social e cultural.

Os obstáculos epistemológicos surgem como o resultado de um conhecimento anterior que, embora tenha sido bem-sucedido e atendido aos interesses na época, agora se revela falso ou inadaptado. Esses obstáculos se manifestam por meio de erros que não são aleatórios ou imprevisíveis, mas sim características do conhecimento adquirido. Devido ao sucesso que esse conhecimento anterior alcançou, apesar dos fracassos em novas situações, há uma tendência de se manter o conceito já confirmado, o que se torna uma barreira para novas aprendizagens. Nesse contexto, o aluno precisa de um conhecimento mais sofisticado, que generalize a situação conhecida e inclua a nova na qual ele falhou.

Para (ARTIGUE 1996) , a análise epistemológica coloca em evidência a evolução ao longo do tempo da noção de rigor, sua dependência dos domínios matemáticos relevantes e do nível de elaboração que é utilizado. Essa análise também permite ao professor medir as disparidades existentes entre o "saber sábio" e o "saber a ser ensinado". Vai além da identificação dos obstáculos na história ou na aprendizagem de uma ou outra noção, buscando identificar os processos que produzem obstáculos na matemática. Alguns exemplos desses processos são: generalização abusiva, regularização formal abusiva, fixação excessiva em uma contextualização ou modelagem familiar e aderência exclusiva a um ponto de vista.

Brousseau (1996) estudou uma variedade de obstáculos que devem ser considerados em um plano didático. Podemos destacar os seguintes:

1. Obstáculos epistemológicos: Esses obstáculos foram inicialmente descritos por Bachelard e são inerentes ao próprio conhecimento. Eles são percebidos nas dificuldades enfrentadas pelos matemáticos ao longo da história para superá-los. Pesquisas em Epistemologia e História da Matemática têm contribuído para identificar e compreender esses obstáculos.

2. Obstáculos didáticos: são obstáculos resultante de determinadas estratégias de ensino, decorrentes da transposição didática. Eles surgem quando o professor encontra dificuldades em negociar a compreensão dos alunos em um contexto restrito da sala de aula. Reconhecer um obstáculo dessa natureza permite que o professor reveja a abordagem anterior sobre o assunto, a fim de esclarecer melhor a dificuldade enfrentada pelos alunos.

3. Obstáculos psicológicos: são obstáculos que surgem quando a aprendizagem entra em contradição com as representações profundas do sujeito ou quando ela causa uma desestabilização inaceitável (GOUVÊA et al. 1998, p.11). Esses obstáculos estão relacionados às questões emocionais e afetivas dos alunos. Eles podem ocorrer quando os alunos possuem concepções prévias arraigadas que entram em conflito com o novo conhecimento.

4. Obstáculos ontogênicos: são obstáculos que surgem quando há uma discrepância entre o nível de aprendizagem e o desenvolvimento psicológico do sujeito. Eles estão ligados às limitações de uma maturidade conceitual do aluno e à sua capacidade de assimilar determinados conteúdos matemáticos.

O conhecimento e a compreensão desses diferentes tipos de obstáculos auxiliam os professores na elaboração de estratégias pedagógicas adequadas para superá-los. Essa perspectiva permite uma abordagem mais eficaz no ensino de matemática, levando em consideração as dificuldades específicas que os alunos podem enfrentar ao construir seu conhecimento matemático.

De acordo com Brousseau:

> Um obstáculo é um "conhecimento" no sentido que lhe demos de "forma regular de considerar um conjunto de situações". Tal conhecimento dá resultados corretos ou vantagens observáveis em determinados contextos, mas revela-se falso ou totalmente inadequado em um contexto novo ou mais amplo. O conhecimento novo, verdadeiro ou válido sobre um contexto mais amplo não é determinado "de acordo" com o conhecimento anterior, mas em oposição a ele: utiliza outros pontos de vista, outros métodos etc. Entre eles não existe relações "lógicas" evidentes que permitam desacreditar facilmente o erro antigo por meio do conhecimento novo. Ao contrário, a competição entre eles acontece no primeiro contexto. Os conhecimentos aqui considerados não são construções pessoais variáveis, mas, sim, respostas "universais" em contextos precisos. Portanto, surgem quase necessariamente na origem de um saber, seja ela histórica ou didática. (BROUSSEAU 1996, p.49).

(PAIS 2016) também define obstáculo como um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade ou falta de conhecimento. Esse conhecimento produz respostas adaptadas em um determinado contexto frequentemente encontrado, mas gera respostas inadequadas fora desse contexto. Assim, um obstáculo é da mesma natureza do conhecimento, resistindo e sendo rejeitado, tentando se adaptar localmente. Sua superação requer um trabalho semelhante à aplicação do conhecimento, envolvendo interação frequente e dialética entre o educando e o elemento de seu conhecimento.

Aponta ainda que, no contexto pedagógico, é mais adequado referir-se a obstáculos didáticos, considerando que a noção de obstáculo epistemológico está relacionada ao contexto histórico das ciências. A comprovação de um obstáculo didático não requer os registros do método histórico-crítico adoto por Bachelard. Alguns pesquisadores em Educação Matemática questionam a necessidade da referência histórica para determinar os obstáculos, relacionando-os mais a um contexto cultural de uma época do que constitutivos do conhecimento.

Concordo que cabe aos educadores encontrar formas de lidar com os diversos obstáculos que surgem no processo educativo. Brousseau apresenta diferentes abordagens para lidar com esses obstáculos:

1. Rejeitá-los implicitamente a cada vez: Nessa abordagem, os obstáculos são simplesmente ignorados ou desconsiderados, esperando-se que os alunos os superem por conta própria.

2. Ignorá-los: Essa abordagem envolve expor novamente a teoria, como se todo erro fosse resultado do desconhecimento da teoria apresentada mais recentemente. Os obstáculos são tratados como meros equívocos passageiros.

3. Aceitá-los sem reconhecê-los: Aqui, os obstáculos são aceitos, mas não são explicitamente reconhecidos ou discutidos. Eles são simplesmente incorporados ao processo de ensino, sem uma reflexão crítica.

4. Analisá-los com os alunos: Nessa abordagem, os obstáculos são analisados e discutidos em conjunto com os alunos. Esse processo de análise permite compreender as dificuldades e buscar estratégias para superá-las.

5. Reconhecê-los, expô-los e dar-lhes explicitamente um lugar no projeto de ensino: Aqui os obstáculos são explicitamente reconhecidos, expostos e integrados como elementos importantes no processo de aprendizagem, e estratégias são desenvolvidas para superá-los. (BACHELARD 1996)

É fundamental buscar soluções para contornar e superar os obstáculos no processo educativo, garantindo que a educação seja uma solução e não um problema para a humanidade. Além disso, é importante ressaltar a transformação em curso na educação, que requer uma abordagem didática para torná-la ensinável. Nesse sentido, a Engenharia Didática, amplamente difundida na escola francesa e nos estudos e pesquisas de Didática da Matemática, oferece uma forma específica de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisa desenvolvidos no contexto de sala de aula. Isso possibilita uma integração entre o plano teórico da racionalidade e o território experimental da pesquisa em didática, contribuindo para a melhoria da prática educativa.

3 DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO

A Engenharia Didática é uma abordagem que se baseia na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino planejada e analisada previamente, com o objetivo de observar situações de aprendizagem. Ela foi desenvolvida como uma forma de organizar a pesquisa em didática da matemática, incorporando os conceitos de situações didáticas, contrato didático e obstáculo epistemológico. Seu propósito é facilitar o trabalho do professor em sala de aula durante o seu cotidiano.

Nessa concepção, Almouloud e Queiroz, afirmam que a Engenharia Didática:

> Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ALMOLOUD e QUEIROZ 2008, p.67).

A Engenharia Didática abrange quatro fases: análises preliminares, concepção e a análise a priori, experimentação e análise a posteriori, e validação. Conforme destaca Pommer:

> É importante salientar que as quatro fases não ocorrem, geralmente, de forma linear e estanque. A elaboração da Engenharia Didática necessita, em alguns momentos, da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases. (POMMER e POMMER 2013, p.22).

Essa abordagem é considerada uma metodologia ativa de pesquisa e ensino, uma vez que coloca o aluno como sujeito do processo de ensino e aprendizagem, promovendo uma forma diferente de aprender matemática. Nessa metodologia, cabe ao professor mediar a construção do conhecimento por parte dos alunos.

De acordo com Porto:

> Atualmente as estratégias utilizadas no ensino de Matemática são, em sua maioria, baseadas em metodologias tradicionais. O ensino se desenvolve em um contexto em que o aluno é mais um expectador do que um sujeito participante. O cumprimento do programa tende a ser a maior preocupação do professor e há pouca articulação entre o conteúdo e a metodologia utilizada com o objetivo de que o ensino favoreça a inserção social do aluno, para o seu desenvolvimento e interação com o meio. (PORTO 2019, p.19).

A Engenharia Didática se destaca por contemplar tanto a dimensão teórica quanto a dimensão experimental, proporcionando uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos na pesquisa em didática na matemática.

3.1 Fases da Engenharia Didática

3.1.1 Primeira fase – Análises preliminares

A primeira fase da Engenharia Didática, denominada análises preliminares, é fundamentada em um referencial teórico já estabelecido e tem como objetivo analisar o desenvolvimento do conhecimento nos estudantes, bem como o ensino atual em relação a esse conhecimento, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que surgem durante a evolução do conteúdo a ser estudado. Durante essa etapa inicial, é dedicado um período para a revisão bibliográfica das pesquisas sobre o ensino do conteúdo em questão, levando em consideração as condições e os contextos do ambiente escolar a ser investigado. Além disso, é necessário realizar uma análise e reflexão dos aspectos histórico-epistemológicos dos conteúdos a serem trabalhados, reconhecendo as concepções dos alunos, os possíveis instrumentos e recursos didáticos a serem utilizados, além de prever as dificuldades e obstáculos que os alunos possam enfrentar durante as atividades de ensino.

O educador deve levar em consideração as contribuições empíricas, as concepções dos aprendizes e compreender as condições em que a experiência será realizada. Também é importante realizar uma análise geral dos aspectos histórico-epistemológicos dos temas a serem trabalhados e dos efeitos que eles causam, bem como concepções, dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos nesse contexto de ensino. Pivatto e Schuhmacher afirmam:

> [...] Nesta etapa, portanto, realiza-se uma revisão literária envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino. (PIVATTO e SCHUHMACHER 2013, p.86).

Segundo Almouloud e Queiroz (2008, p. 66), nessa fase são realizadas análises que englobam as seguintes etapas:

- Análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- Análise do ensino usual e seus efeitos;
- Análise das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- Análise das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- Consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- Estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Essas análises preliminares são essenciais para embasar o planejamento e a execução das etapas subsequentes da Engenharia Didática, fornecendo subsídios para a concepção da sequência de ensino e a posterior análise dos resultados obtidos.

3.1.2 Segunda fase - Concepção e Análise a Priori

A segunda fase da Engenharia Didática, chamada de Concepção e Análise a Priori, o professor deve realizar a descrição e a análise da situação didática selecionada por ele, que será proposta aos estudantes. Nessa etapa, são identificadas as problemáticas referentes ao tópico de estudo e são estabelecidas as possibilidades que serão analisadas na ação investigativa da proposta didática a ser apresentada.

Influenciado pelos resultados obtidos nas Análises Preliminares, o pesquisador registra suas escolhas e determina a quantidade de variáveis didáticas que serão relevantes para o sistema de estudo, a fim de fundamentar a construção das sequências de ensino. De acordo com Artigue (1988, apud ALMOLOUD e COUTINHO, 2008), essas variáveis podem ser macrodidáticas ou globais, referentes à organização geral da engenharia didática, ou microdidáticas ou locais, referentes à organização de uma fase específica da engenharia.

Essa fase consiste em uma etapa descritiva e preditiva em que o pesquisador desenvolve o roteiro da situação didática com base na seleção de certas variáveis do sistema de ensino que interferem no fenômeno didático. Nesse roteiro, são delineadas as expectativas e o planejamento de condutas de acordo com as ocorrências do fenômeno. Machado (2002, apud BRUM, 2013) menciona que a pesquisa delimita as variáveis de comando, que são as variáveis locais ou globais pertinentes ao sistema didático (professor/aluno/conhecimento) e que podem ser consideradas pelo professor/pesquisador ao abordar as várias sessões ou fases de uma Engenharia Didática.

Ao construir da Situação Didática, o pesquisador deve desenvolver atividades experimentais em que os estudantes sejam desafiados a resolver uma situação-problema que esteja presente ou que permita o confronto dos alunos com obstáculos cognitivos e/ou conceituais. É importante que os alunos vivenciem dificuldades e que sejam criadas situações em que a ocorrência de erros previstos na fase da Análises Preliminares seja provável. Berenguer (2010) relata a importância de descrever as características da situação didática, verificar as possibilidades de ação dos alunos e analisar como eles responderiam à situação proposta.

De acordo com (ALMOULOUD e COUTINHO 2008, p.67), na análise a priori é relevante:

- Retratar os elementos locais e as características da situação didática desenvolvida.
- Explorar a importância da situação para o docente e construir mecanismos, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno deverá ter diante da situação elaborada.
- Antever possíveis atitudes dos alunos e mostrar como a análise feita permite manipular sua interpretação, assegurando que as atitudes esperadas por parte dos alunos, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do saber no processo de aprendizagem.

Nesse momento, estratégias centradas no aluno são buscadas, pois, conforme Porto (2019) ele é o agente principal de sua aprendizagem, enquanto o professor tem o papel de oferecer atividade por meio de feedbacks ou do acompanhamento supervisionado do aprendizado do aluno. Assim, ocorre a institucionalização e a presença do professor está também no contrato didático, que vai além do desenvolvimento da sequência didática.

3.1.3 Terceira fase – Experimentação

Na terceira fase da Engenharia Didática, é o momento de colocar em prática toda a estratégia construída, retificando-a se necessário. Caso as análises locais do desenvolvimento experimental identifiquem a necessidade de ajustes, isso implica em reto-mar à fase da análise a priori, em um processo de aperfeiçoamento. De acordo com os pressupostos da Engenharia Didática, essa aplicação deve envolver uma abordagem metodológica que favoreça a criticidade e a reflexão na construção de um conhecimento consciente. Segundo Silva (2016), a experimentação caracteriza-se como um "conjunto de atividades, estratégias e intervenções planejadas etapa por etapa pelo docente para que o entendimento do conteúdo ou tema proposto seja alcançado pelos discentes". (SILVA 2008, p.10).

É necessário atenção para maximizar as informações que podem ser úteis, e o cenário real da aplicação deve estar descrito no relatório da pesquisa. Nessa concepção, Berenguer afirma que:

> Nesta fase, há de se colher também os meios de registros dos dados colhidos na experimentação, que vai depender das variáveis priorizadas na análise a priori. Os dados coletados mediante observações feitas nas sessões de ensino e pelas produções dos alunos, com a utilização de gravações do diário de bordo. Além disso, para uma melhor compreensão do ocorrido, estes dados podem ser completados com uso de questionários, entrevistas e testes, individuais ou em pequenos grupos, realizados durante a experimentação ou no final dela. (BERENGUER 2010, p.14).

Portanto, nesta etapa da pesquisa, cabe ao professor/pesquisador elaborar abordagens metodológicas que estejam alinhadas aos princípios da fase de experimentação. Serão feitos registros da aplicação, como anotações no diário de bordo feitas pelo professor, gravações em áudio e/ou vídeo, coleta dos registros escritos pelos alunos, coleta de materiais construídos/produzidos por eles, entre outros.

Dessa forma, nessa fase da pesquisa, cabe ao professor/pesquisador desenvolver abordagens metodológicas que sigam os princípios mencionados acima.

3.1.4 Quarta fase - Análise a Posteriori e Validação

A quarta fase da Engenharia Didática é voltada ao tratamento e análise das informações adquiridas durante a aplicação da sequência de ensino na fase de experimentação. Nessa etapa, é necessário confrontar essas informações com a análise a priori para validar ou não das hipóteses formuladas na pesquisa, uma vez que os resultados estão limitados ao contexto da experiência realizada. A análise a posteriori busca confirmar ou refutar as hipóteses concebidas na pesquisa.

Do acordo com Almouloud:

> A análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático etc.) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. (ALMOLOUD 2007, p.177).

Essa fase permite ao pesquisador analisar se os estudantes foram capazes de resolver os problemas propostos e quais foram as condições criadas pela sequência para essas soluções. Caso não haja solução, é possível verificar em qual aspecto a sequência precisa ser modificada, considerando o manejo das variáveis envolvidas e descritas na análise preliminar. Isso permite a validação interna do objetivo da pesquisa.

Segundo Brosseau:

> a Engenharia Didática se propõe a identificar ou produzir as situações cujo controle exige considerar os conhecimentos visados e, por meio destas situações, distinguir quais permitem a criação desse conhecimento por uma adaptação espontânea do sujeito, e aquelas para as quais a adaptação é imediata ou possível. (BROUSSEAU 1996, p.7); apud (CARGNIN 2013, p.32).

A contribuição da Engenharia Didática para a sala de aula, como metodologia, está na possibilidade de fornecer fundamentação teórica para que o professor compreenda o significado e amplie o leque de opções, estabelecendo uma ligação entre teoria e prática. Ao conhecer os fundamentos que regem as etapas da Engenharia Didática, o professor adquire domínio na formulação das situações de aprendizagem, o que aprimora a relação dos alunos com o conhecimento. No desenvolvimento de uma sequência de Engenharia Didática, é válido utilizar ferramentas técnicas que vêm sendo utilizadas há séculos para a evolução da matemática, suas aplicações e suas didáticas.

4 OS INSTRUMENTOS DE MEDIDA E A MATEMÁTICA

O uso de instrumentos de medida na matemática teve grande importância a partir do século XVI, quando diversos recursos didáticos e estratégias para o ensino de matemática ganharam destaque, pois mobilizaram o conhecimento matemático e o aproximaram da educação. A construção e o uso de um instrumento mobilizam vários tipos de conhecimento, relacionados não apenas à sua materialidade, mas também às diferentes formas de manipulação e adaptação para sua utilização prática.

Um tratado de destaque, publicado na Itália na segunda metade do século XVI por Cosimo Bartoli (1503-1572), chamado *"Del modo di misurare le distantie, le superfície, i corpi, le piante, le province, le prospettive i tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, i de gli altri piu lodati scrittori."* São seis livros, cujos conteúdos distribuem-se como segue:

> O primeiro livro trata, 'seguindo a sequência proposta por Orôncio', da medida da distância, isto é, comprimento, largura e profundidade. O segundo livro trata da medida da superfície e, o terceiro, dos corpos, isto é, do volume. O quarto livro, 'seguindo, agora, a ordem dada por Gemma Frisio e outros autores', Bartoli explica e ensina como mapear uma província sobre um plano. A esses quatro livros seguem dois outros, um quinto, dedicado às demonstrações geométricas de Euclides e, um sexto, que ensina a obter raízes quadradas e cúbicas. (SAITO e DIAS 2011, p.13-14).

Esses tratados revelam que os instrumentos matemáticos são mais do que simples artefatos. Eles incorporam conhecimentos que demonstram a articulação entre o saber e a prática matemática. Esses tratados evidenciam a relação multifacetada do conhecimento matemático e científico, bem como a ampla gama de possibilidades de estudos que o contexto histórico pode fornecer. Os conhecimentos matemáticos incorporados nos instrumentos passaram a ser voltados para a aplicação prática, sendo amplamente utilizados na resolução de problemas em diferentes áreas de pesquisa, mobilizando mecanismos específicos para a obtenção de soluções particulares.

Saito e Dias (2010) destacam para três instrumentos que constam no tratado de Cosimo Bartoli: o quadrante geométrico, o báculo e o quadrante de um quarto de círculo. Na época em que esses instrumentos eram amplamente utilizados, ainda não havia padrões de medida estabelecidos, o que enriquece a discussão sobre a relação entre grandeza e número, uma vez que inexistia uma unidade de medida padrão.

Do ponto de vista didático, o manuseio de instrumentos proporciona uma situação com alto potencial a-didático, favorece a formulação de hipóteses ancoradas em pressupostos epistemológicos e matemáticos para resolver a situação-problema em questão. Ao manipular esses objetos, o observador que busca obter uma medida por meio deles precisa mobilizar conhecimentos matemáticos elementares, considerando uma situação concreta de medida. A seguir, detalharemos dois instrumentos apresentados no tratado de Cosimo Bartoli, intitulado *"Del modo di misurare"*, que servirão de base para o instrumento utilizado em nossos estudos.

4.1 Báculo

O Báculo é um instrumento matemático que foi utilizado em diversos campos do conhecimento e recebeu diferentes atributos ao longo dos séculos XV a XVII. Muitos estudiosos de matemática, especialmente aqueles que se dedicavam à agrimensura, arquitetura, navegação e astronomia, publicaram tratados sobre eles. Cosimo Bartoli, Leonard Digges, Egnatio Danti, Johann Miller Regiomontanus e Petrus Ramus são alguns dos autores que abordaram o Báculo em seus trabalhos.

Ao contrário de muitos instrumentos de medida, que normalmente se baseiam nas relações geométricas e trigonométricas em triângulos retângulos, o báculo possibilita explorar outras propriedades geométricas, promovendo assim outras discussões matemáticas. Além do conhecimento matemático incorporado nele, tanto em sua criação, quanto no seu uso, o báculo levanta questões interessantes de natureza epistemológica, que apontam para diversos elementos manipulativos envolvidos no procedimento de medição.

> O uso do báculo era diversificado pelos artesãos e trabalhadores do período, podendo medir comprimento de terras pelos agrimensores medievais, altura de castelos pelos arquitetos, largura de um objeto até outro pelos engenheiros e a distância de um barco até uma ilha pelos marinheiros (PEREIRA e SAITO 2019, p.346).

No tratado de Ramus (1636), as seções relacionadas à medição de comprimento são dividias em três circunstâncias. Nessas seções, são utilizados conceitos matemáticos como perpendicularidade, paralelismo e semelhança de triângulos para explicar o posicionamento do báculo e estabelecer relações de proporção entre as partes do instrumento e as grandezas a serem medidas.

> 7. Se a visão, a partir do início do Indicador, estiver em ângulo reto ou aprumo com o comprimento e com o extremo do mesmo [comprimento], [então], assim como o segmento do Indicador está para o segmento da Transversal, a altura do medidor estará para o comprimento. [...] 8. Se a visão, a partir do início do Indicador, estiver paralela ao comprimento a ser medido, [então], assim como o segmento da Transversal está para o segmento do Indicador, a altura dada estará para o comprimento. [...] 9. Se a visão, a partir do início da Transversal, estiver paralela ao comprimento a ser medido, [então], assim como no Indicador, a diferença do maior segmento está para o menor, assim [o comprimento a ser medido] estará para a diferença [do comprimento] da segunda posição até o comprimento [da primeira posição] (PEREIRA e SAITO 2019, p.24 e 25).

O conhecimento matemático mobilizado nos procedimentos de medição com o báculo é de grande valor, pois permite colocar em prática conceitos fundamentais da geometria, como perpendicularidade, paralelismo e semelhança de triângulos. Esses conceitos são visíveis nos enunciados das seções mencionadas e direcionam o desenvolvimento de cálculos e proporções realizadas com o instrumento.

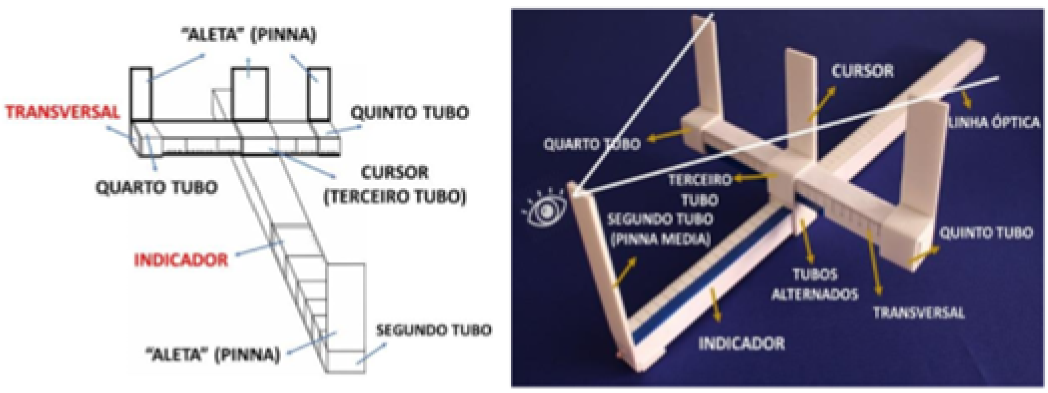
Dentre os elementos que compõem o báculo 4.1, as hastes do báculo são as partes principais que compõem o instrumento. Elas são dispostas em formato de cruz e desempenham o papel de sustentação do báculo. Existem duas hastes no báculo: o Indicador e a Transversal.

O Indicador, também conhecido como Bastão, é a parte maior e mais longa do báculo. Ele geralmente é utilizado para realizar medições de comprimento, altura ou distância.

A Transversal, por sua vez, é a haste menor e mais curta do báculo. Ela é posicionada perpendicularmente ao Indicador, formando a cruz. A Transversal pode ser usada para realizar medições de largura ou estabelecer referências de alinhamento.

Essas duas hastes desempenham um papel fundamental no manuseio do báculo e na realização das medições. Através da manipulação dessas partes e das relações geométricas estabelecidas entre elas, é possível obter as medidas desejadas utilizando o instrumento.

Figura 4.1: Esquema do Báculo de Petrus Ramus.



Fonte: (PEREIRA e SAITO 2019, p.363)

Quanto à medida dos bastões, Ramus (1636) instrui que o comprimento do Indicador é o dobro do comprimento da Transversal, somada com 1/10 de sua parte. No entanto, não se encontra alguma consideração material ou matemática para a proporção dessas hastes. Dessa maneira, o báculo pode ter variados tamanhos, dependendo da medida adotada na Transversal e, assim, quanto maior o valor da Transversal, maior será a extensão do instrumento.

De acordo com Pereira e Saito (2019), para realizar medições precisas com o báculo, é importante posicionar a Transversal de forma que ela preencha a grandeza ou o objeto que se deseja medir. Além disso, é recomendável que o Indicador esteja perpendicular ou paralelo à grandeza que vai sendo preenchida pela Transversal.

No processo de medição, sugere-se a participação de pelo menos três pessoas: duas para o posicionar e segurar o báculo e a outra para registrar os cálculos. É importante ressaltar que, no tratado de Ramus (1636), não traz uma figura do báculo que especifique suas partes nem a descrição do material recomendado para sua construção. Ramus apenas instrui, em etapas, os passos que devem ser seguidos para construí-lo.

> Primeiro, uma distância justa, pois a visão não é infinita. Em segundo lugar, que um olho esteja fechado, pois a faculdade óptica transmitida por ambos os olhos em um [só olho] mira de modo mais certeiro; e o instrumento é mais apropriadamente aplicado e ajustado ao osso da bochecha do que em qualquer outro lugar [do rosto], pois aqui é como se o olho fosse o centro do círculo, em que a Transversal está inscrita. Em terceiro lugar, as mãos devem estar firmes porque, se elas tremerem, a proporção da Geodésia será certamente problemática e incerta. Por último, o lugar da posição [que deve estar o observador] é a do meio do pé. (PEREIRA e SAITO 2019, p.24 e 25).

A criação e o uso do Báculo desempenharam um papel fundamental na introdução e na evolução dos instrumentos de medição. Eles representam uma conexão entre a didática e a forma prática de se realizar determinado trabalho.

4.2 Quadrante em um quarto de círculo

O quadrante em um quarto de círculo é um instrumento antigo que remonta ao século XI e era usado para determinar a hora e a altura dos astros. Há um único exemplar desse instrumento, no *Musem of the History of Science*, na Inglaterra, datado de 1300 d.C. Na história aparecem dois tipos de quadrantes mais difundidos: o quadrante em um quarto de círculo e o quadrante geométrico. Este último é formado por um quadrado, no qual dois lados consecutivos estão divididos em sessenta partes. Do vértice oposto a esses dois lados parte uma alidade com duas pínulas, para que possamos realizar as medições. Através da relação de semelhança de triângulos é possível medir a altura ou a distância linear de um determinado local ou objeto.

O quadrante em um quarto de círculo, é construído em madeira ou latão. No raio da direita do instrumento, estão fixadas duas pínulas, cada uma com um orifício no seu centro, e no vértice de 90º se encontra cravado um fio de prumo. Ele contém dois limbos, graduados de 0º a 90º, entretanto, dispostos em intervalos diferentes e um quadrado de sombras, no seu interior, que permite identificar as horas do dia.

O quadrante em um quarto de círculo 4.2 aparece também nos *Libros del Saber de Astronomía*, mais especificamente no Libro del quadrante pora rectificarem que o Rei Afonso X, da Espanha, mandou redigir ao sábio Rabiçag, em Toledo, no ano de 1277. (REIS 1988, p. 247) "aí se ensina minuciosamente a construir um quadrante de madeira, com a forma mais corrente, isto é, como duas pínulas sobre uma das arestas e um fio de prumo".

Ele ainda permite calcular, usando a altura do sol, a latitude de um determinado local ou a hora do dia, e a altura de um prédio por meio do quadrado das sombras, ou mesmo resolver problemas de topografia. Apesar de o quadrante ter sido um instrumento de grande utilização, segundo Pereira (2000), ele apresentava algumas dificulda-

Figura 4.2: Quadrante em um quarto de cículo.

Fonte: (PEREIRA e SAITO 2019)

des de manuseio: a observação da graduação à noite era difícil; devido aos ventos e ao balanço do mar não era fácil encontrar o ângulo de inclinação da Estrela Polar correto, o que poderia dar um erro considerável no cálculo das distâncias. Por volta do século XV o quadrante foi substituído pelo astrolábio, instrumento que se mostrava mais eficiente para uso nas navegações. Tais instrumentos são de fundamental importância para o desenvolvimento da trigonometria, bem como para técnicas práticas para a sua conclusão.

5 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste estudo foi baseada nas etapas da Engenharia Didática: análise preliminar, concepção e análise a priori das situações didáticas, eExperimentação e a análise a posteriori, e validação. Essas etapas forneceram uma estrutura sólida para a construção do processo de ensino e aprendizagem da trigonometria no Ensino Médio, sua implementação em uma escola e a análise dos resultados obtidos.

A Engenharia Didática foi escolhida como referencial teórico, pois acreditamos que a utilização de objetos concretos poderia despertar maior interesse e promover uma compreensão mais profunda dos conteúdos associados à trigonometria.

Durante a pesquisa, adotamos uma abordagem descritiva, com o objetivo de caracterizar com detalhes a situação de ensino, fenômeno e problema estudados. Além disso, a pesquisa foi conduzida de forma naturalista ou de campo, uma vez que os dados foram coletados diretamente no ambiente onde o ensino de Trigonometria ocorreu, utilizando diferentes métodos de coleta, como observação participante, análise de dados e os resultados.

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição não só no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, mas também cultural, sociológica e antropológica na formação do discente. Sua importância como ferramenta para a exploração de problemas é destacada nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. Ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. (BRASIL et al. 1998, p. 42).

No decorrer deste capítulo, detalhamos minuciosamente o desenvolvimento do nosso trabalho, seguindo os passos propostos pela metodologia da Engenharia Didática. Com base nos instrumentos de medir anteriormente mencionados, como o Báculo e o Quadrante em um quarto de círculo, abordamos a criação e utilização de teodolitos manuais, inspirados nesses instrumentos. Descrevemos as etapas da metodologia aplicada para a elaboração, implementação e validação da sequência de ensino.

Esta pesquisa adotou uma abordagem qualitativa e foi conduzida com uma turma de alunos do 2° ano da Escola de Ensino Médio em Tempo Integral de Campos Sales, localizada na região do Cariri no estado do Ceará. Apresentamos a Trigonometria como tema motivador, com o objetivo de desencadear situações-problema que facilitem a compreensão dos conteúdos relacionados ao estudo dos lados e ângulos do triângulo, conforme abordado no currículo do Ensino Médio. Nesse sentido, a Engenharia Didática estabelece uma conexão entre os conceitos matemáticos e as situações didáticas propostas pelo educador. A pesquisa foi estruturada em quatro momentos distintos, os quais serão detalhados a seguir.

5.1 1ª fase - análises preliminares

Na primeira fase, denominada Análises Preliminares, realizamos uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de investigar o tema Trigonometria, sua história e aplicações. Também conduzimos um estudo exploratório do tema, buscando relacioná-lo aos conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio, com o intuito de fortalecer a compreensão desses conteúdos pelos alunos e promover um maior conhecimento sobre o rema em questão. Além disso, durante essa fase, estabelecemos o primeiro contato com o campo de pesquisa e a população escolhida.

De acordo com Artigue (1996, apud CARNEIRO, 2005) a análise prévia é realizada para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, compreender as concepções dos alunos e identificar as dificuldades e obstáculos que influenciam a evolução das concepções sobre o ensino-aprendizagem de determinado conhecimento. Nesse sentido, nesta primeira fase da metodologia, nosso objetivo foi analisar o funcionamento do ensino habitual e, a partir dessa análise, propor intervenções que pudessem modificá-lo em sala de aula.

Para conduzir as análises prévias, seguimos algumas orientações sugeridas pelos autores e abordadas no capítulo dedicado à Engenharia Didática. Inicialmente, realizamos uma análise epistemológica dos conteúdos abordados pelo ensino, focando especialmente na trigonometria, que constitui o objeto central do nosso estudo.

Durante as Análises preliminares do nosso estudo, nos deparamos com a constatação de que a aprendizagem do conteúdo de Trigonometria no Ensino Médio apresenta desafios significativos para os alunos.

Ao se tratar da Trigonometria, dentro do contexto da educação básica, a compreensão de tal tópico exige diversos conhecimentos matemáticos básicos, como Lima afirma:

> O conhecimento matemático é, por natureza, encadeado e cumulativo. Um aluno pode, por exemplo, saber praticamente tudo sobre a Proclamação da República brasileira e ignorar completamente as capitanias hereditárias. Mas não será capaz de estudar Trigonometria se não conhecer os fundamentos da Álgebra, nem entenderá essa última se não souber as operações aritméticas, etc. Esse aspecto de dependência acumulada dos assuntos matemáticos leva a uma sequência necessária, que torna difícil pegar o bonde andando (...) (LIMA 1995, p. 17).

Em primeiro lugar, a Trigonometria é um ramo da Matemática que introduz conceitos e procedimentos abstratos, como seno, cosseno, tangente, radianos, entre outros. Esses conceitos podem ser novos e complexos para os alunos, exigindo um esforço adicional para compreendê-los completamente. Além disso, a trigonometria envolve o uso de fórmulas e identidades que requerem um bom domínio de manipulação algébrica, o que pode ser um obstáculo adicional para os estudantes.

Outro aspecto que contribui para a dificuldade na aprendizagem da Trigonometria é a falta de conexão com situações do cotidiano dos alunos. Muitas vezes, o conteúdo é apresentado de forma isolada e descontextualizada, o que dificulta a compreensão de sua relevância e aplicabilidade prática. Os alunos podem questionar a utilidade da Trigonometria em suas vidas, o que diminui sua motivação e engajamento com o tema. Além disso, a forma tradicional de ensino, pautada em aulas expositivas e resolução de exercícios mecânicos, pode não ser efetiva para todos os alunos. A Trigonometria exige um raciocínio lógico e visualização espacial, habilidades que nem todos os estudantes desenvolvem facilmente. A falta de abordagens didáticas diferenciada, que explorem diferentes estratégias de ensino e aprendizagem, pode dificultar ainda mais o processo de assimilação dos conceitos trigonométricos.

Por fim, é importante mencionar que as dificuldades encontradas na aprendizagem da Trigonometria podem variar entre os alunos. Cada estudante possui seu próprio ritmo de aprendizagem e estilo cognitivo, o que influencia a forma como eles assimilam e compreendem o conteúdo. Portanto, é essencial adotar abordagens pedagógicas que considerem a diversidade dos estudantes, oferecendo suporte e estratégias diferenciadas para atender às suas necessidades individuais.

Diante dessas dificuldades identificadas, buscamos desenvolver estratégias e recursos didáticos que visam tornar o ensino da Trigonometria mais acessível e significativo para os alunos. A partir das análises preliminares, percebemos a importância de superar esses obstáculos, promovendo uma aprendizagem mais efetiva e despertando o interesse dos estudantes pelo tema.

5.1.1 Trigonometria

A palavra "trigonometria" significa medida das partes de um triângulo. Essa área da Matemática desempenhou um papel fundamental na evolução da humanidade, sendo amplamente aplicada em várias áreas científicas e no cotidiano. Ao longo do tempo, a trigonometria tem sido aprimorada e aperfeiçoada, e pode ser ensinada de forma didática, enriquecendo as aulas com atividades práticas que destacam a importância dos conteúdos trigonométricos para o desenvolvimento de várias profissões, além de promover a integração com outros componentes curriculares.

A origem exata do conceito de medida de ângulo na trigonometria ainda é incerta. Não se sabe ao certo se os gregos foram os primeiros a desenvolver esse conceito ou se adotaram das frações sexagesimais da civilização babilônica. No entanto, os gregos realizaram estudos sistemáticos sobre as relações entre ângulos - ou arcos – em uma circunferência e os comprimentos de suas cordas. (BERLINGHOFF e GOUVÊA 2010)

Embora não seja possível determinar com precisão a data de nascimento da trigonometria, é possível afirmar que ela tenha surgido a partir de diversos estudos realizados por diferentes nações, como egípcios e babilônios, que deram importantes contribuições para o seu desenvolvimento. Gelson Iezzi esclarece esse ponto da seguinte maneira:

> A trigonometria, como a conhecemos hoje, na sua forma analítica, remonta ao século XVII. Seu florescimento dependia de um simbolismo algébrico satisfatório, o que não existia antes dessa época. Mas, considerando o termo trigonometria no seu sentido literal (medida do triângulo), a origem do assunto pode ser situada já no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. O papiro Rhind, importante documento sobre a matemática egípcia (aproximadamente 1700 a.C.), menciona por quatro vezes o seqt de um ângulo, em conexão com problemas métricos sobre pirâmides. O seqt do ângulo $O\hat{M}V$ [...] é a razão entre $\overline{OM}$ e $\overline{OV}$ e, portanto, corresponde à ideia atual de cotangente. As pirâmides egípcias eram construídas de maneira a que a inclinação de uma face sobre a base (medida de $O\hat{M}V$) fosse constante aproximadamente 52°. Egípcios e babilônios (aproximadamente 1500 a.C.) e posteriormente os gregos usavam relógios de sol em que era utilizada a mesma ideia. Tais relógios consistiam basicamente em uma haste $\overline{BC}$, chamada pelos gregos de gnomon, fincada verticalmente no chão. O exame da variação da amplitude da sombra AB projetada pela haste propiciava a determinação de parâmetros, como a duração do ano. (IEZZI 2013, p.36).

Na segunda metade do século II a.C. Hiparco de Niceia, fortemente influenciado pela matemática babilônica, adotou o sistema sexagesimal (base 60) para realizar contagens e dividiu a circunferência em 360 partes. Cada uma dessas partes recebeu o nome de "arco de um grau". E em cada arco, ele dividiu em 60 partes, chamadas de "minuto". Os estudos de Hiparco levaram à descoberta da relação entre o comprimento de um arco e o ângulo correspondente no centro de um círculo arbitrário. É presumido que Hiparco tenha sido o primeiro a construir uma tabela trigonométrica, o que lhe rendeu o título de "pai da trigonometria". (COSTA 1997)

A construção da trigonometria teve origem em uma abordagem matemática eminentemente prática, utilizada para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Graças ao desenvolvimento da trigonometria, os seres humanos puderam realizar grandes viagens marítimas, pois, com o auxílio da trigonometria e do conhecimento sobre a posição relativa das estrelas, os navegadores podiam se orientar.

No contexto do ensino-aprendizagem, não apenas da trigonometria, mas da matemática em geral, é fundamental que o professor seja inovador e que busque metodologias dinâmicas, que ofereçam um leque de possibilidades para despertar nos alunos um novo olhar em relação aos temas abordados. É importante estimular o pensamento crítico, promover atividades práticas e estabelecer conexões entre a matemática e situações reais, a fim de tornar o aprendizado mais significativo e atrativo para os alunos.

Atualmente, a trigonometria vai além do estudo dos lados e ângulos de triângulos, abrangendo uma ampla gama de assuntos com aplicações em diversas áreas da atividade humana. O seu desenvolvimento acompanhou o progresso histórico e cultural da humanidade, sendo impulsionado por estudos e investigações em diferentes campos do conhecimento. A trigonometria surgiu da necessidade de resolver problemas relacionados à astronomia, navegação e geografia.

A aplicabilidade da trigonometria se estende a diversas áreas, tais como engenharia, mecânica, eletricidade, acústica, medicina, astronomia e até mesmo música. Na engenharia, por exemplo, ela é essencial para cálculos estruturais, determinação de ângulos e distâncias em projetos arquitetônicos, além de ser fundamental em áreas como a topografia e a geodésia. Na mecânica, a trigonometria é utilizada para análise de movimentos, determinação de forças e resolução de problemas relacionados à cinemática e dinâmica. Na eletricidade, ela é aplicada no estudo de circuitos elétricos e na análise de ondas eletromagnéticas. Na acústica, a trigonometria auxilia na compreensão dos fenômenos sonoros e na análise de ondas sonoras. Na medicina, ela é utilizada em áreas como radiologia, tomografia e ecografia, para determinar ângulos e distâncias em imagens médicas. Na astronomia, a trigonometria é fundamental para a determinação de distâncias entre corpos celestes e cálculos de trajetórias. Até mesmo na música, a trigonometria desempenha um papel importante na compreensão de fenômenos relacionados à harmonia, frequências e intervalos musicais.

Essa ampla gama de aplicações evidencia a importância da trigonometria como uma ferramenta essencial para o avanço científico e tecnológico em diversas áreas do conhecimento. O estudo dessa disciplina não se limita apenas ao ambiente escolar, mas também tem um impacto significativo no desenvolvimento humano, na solução de problemas práticos e na compreensão do mundo que nos cerca.

O ensino de trigonometria é contemplado em documentos norteadores para o desenvolvimento da educação básica no país, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, BRASIL, 2018) na área da Matemática e suas Tecnologias. Os conteúdos relacionados à trigonometria estão inseridos na Unidade Temática Geometria e Medidas, e estão diretamente ligados às competências específicas 1 e 3 respectivamente:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (BRASIL 2017, p.532).
> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL 2017, p.535).

No ensino da Trigonometria, em um primeiro momento, são estudadas as propriedades e relações dos triângulos retângulos. Esses estudos permitem estabelecer conexões entre as medidas dos lados e dos ângulos desses triângulos. Essas propriedades e relações são então entendidas para triângulos quaisquer, por meio dos teoremas conhecidos como lei dos senos e lei dos cossenos. Esses resultados são essenciais para resolver problemas envolvendo triângulos em diferentes contextos.

Posteriormente, os resultados da trigonometria são observados em triângulos em que os lados são segmentos notáveis de um círculo, conhecido como "círculo trigonométrico". Essa abordagem permite explorar as relações entre ângulos e arcos, introduzindo conceitos como seno, cosseno e tangente, que são fundamentais para a compreensão e resolução de problemas mais avançados.

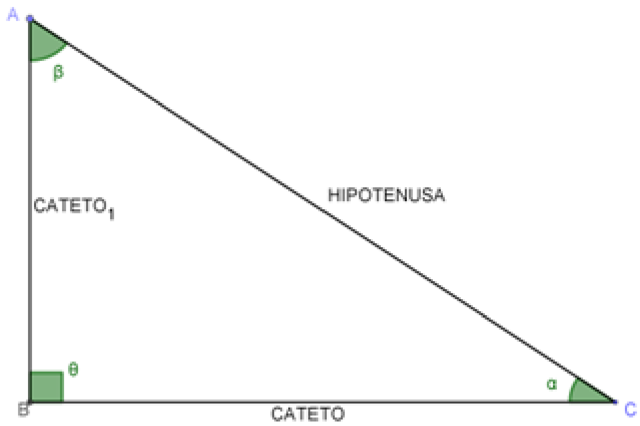
Assim, o ensino de trigonometria, de acordo com a BNCC, visa desenvolver competências matemáticas e proporcionar aos estudantes ferramentas necessárias para interpretar situações, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, contribuindo para uma formação geral e preparando-os para lidar com desafios presentes na vida cotidiana e nas áreas de conhecimento relacionadas.

5.1.2 O triângulo retângulo ou qualquer e suas relações métricas e razões trigonométricas

Relações métricas no triângulo retângulo

A Geometria Plana, também conhecida como Geometria Euclidiana, é a parte da Matemática que estuda as figuras bidimensionais. Atribui-se o nome de triângulo retângulo ao que tem um ângulo igual a 90 graus (ângulo reto). Em um triângulo retângulo, os dois lados que formam o ângulo reto são chamados de "Catetos" e o lado em frente ao ângulo reto é a "Hipotenusa", sendo os ângulos agudos complementares ($\alpha+\beta = 90^{\text{o}}$). Na figura 4 pode-se observar um triângulo retângulo com seus ângulos complementares α e β.

Figura 5.1: O triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No decorrer dos exemplos utilizaremos as seguintes notações referentes a um triângulo de vértices ABC:

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

Ângulos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$

Medida dos lados:

$$\begin{cases} a = medida\ do\ lado\ \overline{BC} \\ b = medida\ do\ lado\ \overline{AC} \\ c = medida\ do\ lado\ \overline{AB} \end{cases}$$

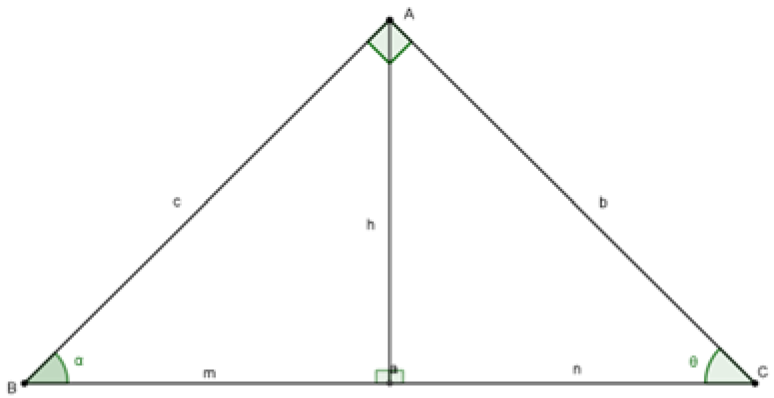
$$\text{Medida dos ângulos: } \begin{cases} \hat{\text{A}} = \text{ medida ângulo B}\hat{\text{A}}\text{C} \\ \\ \hat{\text{B}} = \text{ medida ângulo A}\hat{\text{B}}\text{C} \\ \\ \hat{\text{C}} = \text{ medida ângulo A}\hat{\text{C}}\text{B} \end{cases}$$

O lado b, oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa.

Os lados a e c, adjacentes ao ângulo reto, são chamados catetos do triângulo ABC.

Agora, com o triângulo ABC reto em A temos o início das relações métricas no triângulo retângulo.

Figura 5.2: Altura e projeções.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Onde temos os seguintes elementos do $\triangle ABC$:

c e b são catetos;

a é a hipotenusa;

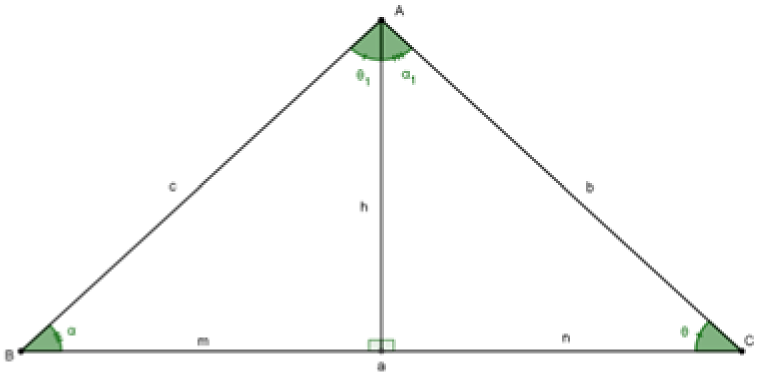
h é a altura relativa à hipotenusa

m e n são as projeções ortogonais dos catetos c e b, respectivamente. Na figura apresentada a seguir, com a altura relativa à hipotenusa dividindo o triângulo retângulo ABC, podemos ver que esses triângulos são semelhantes a ele e entre si.

Pelo caso de semelhança AAA (ângulo, ângulo, ângulo) temos que:

$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

Figura 5.3: Semelhanças.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$, segue-se:

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DB}{BA} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am \quad (I)$

Pela semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$, segue-se:

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DA}{AC} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow ah = bc \quad (II)$

Assim como,

$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DC}{AC} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an \quad (III)$

Pela semelhança entre $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$, segue-se:

$\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DA} \Rightarrow \dfrac{h}{m} = \dfrac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad (IV)$

Somando-se I e III, temos:

$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$

Como $m + n = a$

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

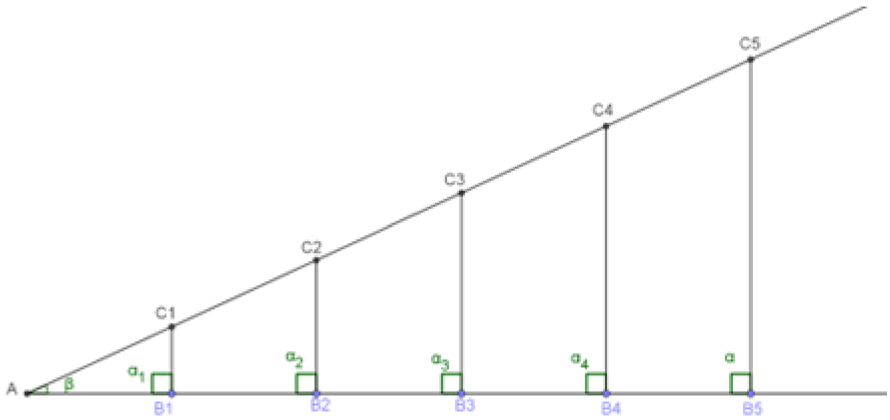
$b^2 + c^2 = a^2$

Assim, de acordo com (Barbosa 1985, p. 80) obtemos a relação que expressa o "Teorema de Pitágoras".

5.1.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Dado um ângulo Â representado por β, marcando sobre um de seus lados os pontos B_1,B_2,B_3,... e passando por esses as perpendiculares $\overline{B_1C_1}$,$\overline{B_2C_2}$,$\overline{B_3C_3}$,... (conforme a figura 5.4)

Figura 5.4: Razão entre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo teorema fundamental da semelhança, podemos afirmar que os triângulos retângulos do tipo $\triangle AB_nC_n$, $n \in N$ são semelhantes. Logo temos:

1. Fixando o ângulo β, o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\textit{medida do cateto oposto a } \beta}{\textit{medida da hipotenusa}}$$

2. Fixando o ângulo β com o seu cateto adjacente, assim como fixando o ângulo β e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

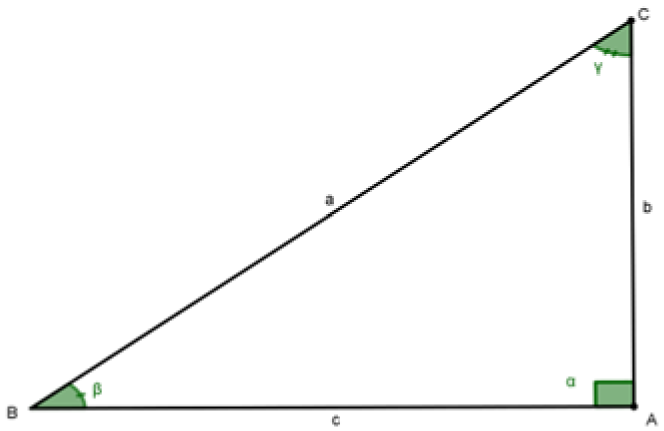
$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\textit{medida do cateto adjacente a } \beta}{\textit{medida da hipotenusa}}$$

3. Fixando o ângulo β, o cateto oposto a esse ângulo e seu cateto adjacente são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\textit{medida do cateto oposto a } \beta}{\textit{medida do cateto adjacente a } \beta}$$

Percebemos que as relações anteriores não dependem das medidas dos lados dos triângulos $\triangle AB_nC_n$, $n \in N$ mas apenas do ângulo β. Diante disso, com base na figura, podemos definir as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Figura 5.5: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

1. Seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e do lado referente a sua hipotenusa.

$$sen\hat{\mathrm{B}} = \frac{b}{a} \text{ e } sen\hat{\mathrm{C}} = \frac{c}{a}$$

2. Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e do lado referente a sua hipotenusa.

$$cos\hat{\mathrm{B}} = \frac{c}{a} \text{ e } cos\hat{\mathrm{C}} = \frac{b}{a}$$

3. Tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a esse ângulo.

$$tg\hat{\mathrm{B}} = \frac{b}{c} \text{ e } tg\hat{\mathrm{C}} = \frac{c}{b}$$

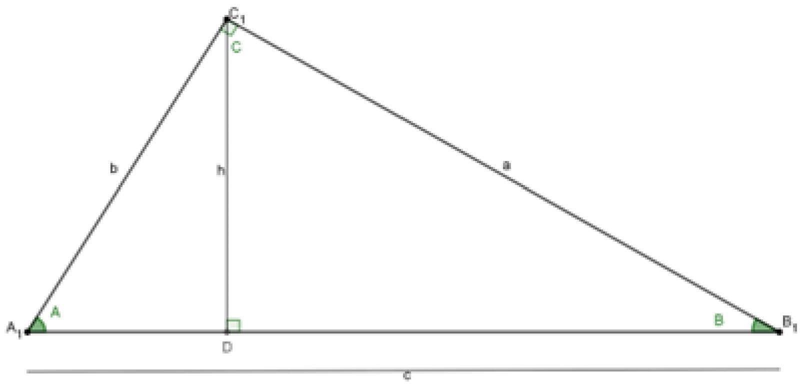
5.1.4 Trigonometria num triângulo qualquer

Agora trataremos de um assunto muito importante, pois as propriedades a seguir estabelecem leis para qualquer triângulo, que auxilia na resolução de problemas relacionados à medida dos lados e dos ângulos em triângulos que não sejam retângulos.

A lei dos senos

De acordo com (Neto 2013, p. 230), seja um triângulo ABC, acutângulo, e $\overline{CH}$ a altura relativa do lado $\overline{AB}$, conforme a figura 5.6:

Figura 5.6: Triângulo acutângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No $\triangle CHA$, temos:

$$sen\hat{A} = \frac{\overline{CH}}{b} \Rightarrow \overline{CH} = sen\hat{A} \cdot b \ (I)$$

No $\triangle CHB$, temos:

$$sen\hat{B} = \frac{\overline{CH}}{a} \Rightarrow \overline{CH} = sen\hat{B} \cdot a \ (II)$$

Por (I) e (II), temos:

$$\overline{CH} = \overline{CH} \Rightarrow sen\hat{A} \cdot b = sen\hat{B} \cdot a \Rightarrow \frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Considerando a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, teremos, de forma análoga:

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Logo,

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

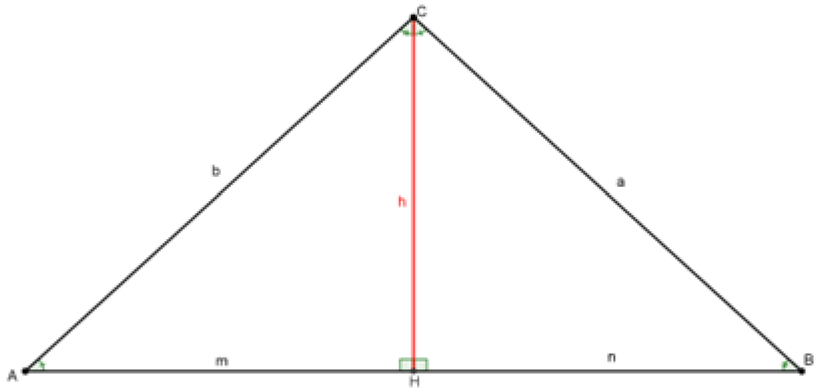
A lei dos cossenos

Ainda (Neto 2013, p. 232), para demonstrar a lei dos cossenos, dividiremos a demonstração em dois casos de triângulos: acutângulo e obtusângulo.

1. $1^{\underline{o}}$ caso - Triângulo acutângulo

   Seja o triângulo ABC, da figura abaixo, acutângulo, e $|\overline{CH}|=h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

   Figura 5.7: Triângulo acutângulo 2.

   Fonte: Elaborado pelo autor.

   Pelo Teorema de Pitágoras podemos afirmar que no $\triangle BCH$:

   $$a^2 = h^2 + (c - m)^2 \ (I)$$

   No triângulo $\triangle BCH$, temos, também pelo Teorema de Pitágoras:

   $$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \ (II)$$

   Substituindo $h^2 = b^2 - m^2$ de (II) na expressão (I), teremos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c-m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm\ (III)$$

Utilizando o cosseno do ângulo Â no triângulo $\triangle AHC$, temos:

$$cos\hat{A} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \Rightarrow cos\hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = cos\hat{A} \cdot b$$

Assim, substituindo m na expressão (III), temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot (cos\hat{A} \cdot b) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cos\hat{A} \cdot b \cdot c$$

De modo análogo, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cos\hat{B} \cdot a \cdot c$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2cos\hat{C} \cdot a \cdot b$$

2. **2° caso – Triângulo obtusângulo**

   Para (Barbosa 1985, p. 167), seja um triângulo obtusângulo ABC, apresentado na figura a seguir, onde $\overline{CH} = h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

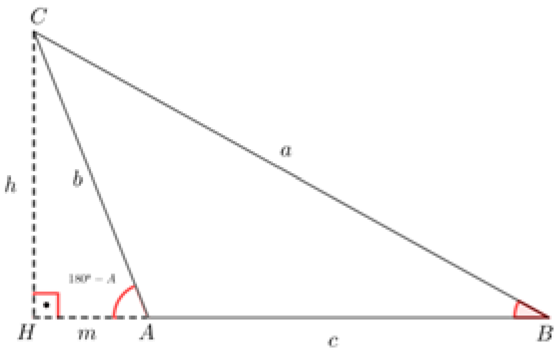
   Observando-se o triângulo $\triangle BHC$, também utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2\ (I)$$

   No triângulo $\triangle ACH$, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2\ (II)$$

Figura 5.8: Triângulo obtusângulo ABC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Substituindo h^2 na expressão anterior, teremos:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + (c+m)^2 \Rightarrow$$
$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \ (III)$$

Aplicando o cosseno no suplemento do ângulo Â no triângulo $\triangle AHC$, temos que:

$$cos(180^{\underline{o}} \text{ - } \hat{A}) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \Rightarrow cos(180^{\underline{o}} \text{ - } \hat{A}) = \frac{m}{b} \Rightarrow m = cos(180^{\underline{o}} \text{ - } \hat{A}) \cdot b$$
$$\Rightarrow m = (-cos\hat{A}) \cdot b \Rightarrow m = -b \cdot cos\hat{A} \ (IV)$$

Substituindo-se m de (IV) em (III), chegamos a:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.m \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (-b \cdot cos\hat{A}) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cos\hat{A} \cdot b \cdot c$$

De modo análogo, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cos\hat{B} \cdot a \cdot c$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2cos\hat{C} \cdot a \cdot b$$

5.2 2ª fase - concepção e análise a priori

Na primeira etapa dessa fase, realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre os instrumentos de medida utilizados no século XVI, buscando compreender sua importância baseados nos princípios da trigonometria. Esses estudos fornecem embasamento teórico necessário para a criação dos teodolitos manuais.

Em seguida, foram projetados e construídos dois teodolitos manuais: o Teodolito Vertical e o Teodolito Horizontal. O Teodolito vertical foi desenvolvido para realizar medidas de ângulos verticais, enquanto o Teodolito Horizontal tinha como objetivo medir ângulos horizontais. Esses instrumentos foram projetados de forma simples, utilizando materiais de baixo custo, para facilitar a replicação em sala de aula. A utilização de teodolitos manuais proporciona aos alunos uma compreensão mais concreta dos conceitos matemáticos, podendo ir além da decoração de fórmulas. Com tal utilização é possível que os alunos visualizem a aplicação de conceitos de trigonometria na prática, relacionando-os com situações reais e desenvolvendo uma compreensão mais sólida dos fundamentos matemáticos envolvidos.

Buscaremos outra forma de mostrar as aplicações da matemática e facilitar a compreensão de conceitos matemáticos através do uso de material concreto que possibilitem a participação ativa na sala de aula. Dessa forma, podemos aprimorar a curiosidade do aluno com relação à matemática, desprendendo-se assim, da tradicional decora e aplicação de fórmulas.

> O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos. (TURRIONI 2004, p. 66).

Portanto, a criação e utilização dos teodolitos manuais contribuirão para tornar o ensino de trigonometria mais significativo e envolvente, promovendo uma aprendizagem ativa e despertando o interesse dos alunos pela matemática.

5.2.1 Teodolito vertical

No processo de construção do Teodolito Vertical, utiliza-se como base um transferidor de 180°. Na parte superior desse transferidor, é fixado um cano ou outro objeto adequado que permita a observação de objetos próximos ou distantes através do seu interior. No centro do transferidor, é feito um furo para colocação de um pêndulo, que auxiliará na obtenção dos ângulos.

É importante salientar que, para o uso desse teodolito consideramos o ponto 0 como o ângulo de 90°, que corresponde à posição em que o objeto está paralelo ao solo. A partir desse ponto, qualquer objeto observado terá uma angulação que será medida a partir do 90° iniciais, ou seja, será descontada dessa referência inicial.

Figura 5.9: Teodolito vertical.

Fonte: Próprio autor (2016).

A criação do Teodolito Vertical proporciona aos alunos uma oportunidade única de vivenciar na prática os conceitos da trigonometria e sua aplicação na medição de ângulos. Esse é um instrumento que pode ser construído pelas mãos dos alunos, o que ajuda para que se envolvam ativamente no processo de aprendizagem, estimulando o pensamento crítico, a criatividade e o interesse pela matemática.

A importância do Teodolito Vertical não se limita apenas à compreensão da trigonometria. Esse instrumento tem ampla gama de aplicações práticas em áreas como engenharia, arquitetura, topografia, geologia, entre outras. Ao explorar as potenciais aplicações do teodolito e suas contribuições para diferentes campos de estudo, os alunos são motivados a perceber a relevância da matemática em suas vidas e carreiras futuras.

Em resumo, a criação e utilização do Teodolito vertical no processo de ensino-aprendizagem proporciona uma abordagem prática, envolvente e significativa da trigonometria, incentivando o interesse dos alunos pela matemática, ampliando sua compreensão dos conceitos e despertando a curiosidade científica.

5.2.2 Teodolito horizontal

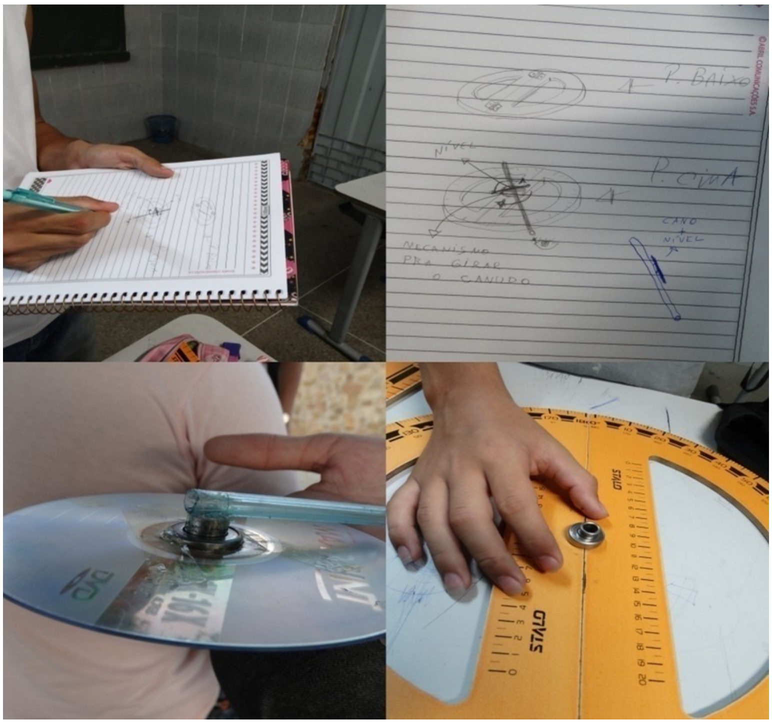
A construção do Teodolito Horizontal foi resultado de uma colaboração entre os alunos do ensino médio, que trabalharam em conjunto para criar um esboço e definir o funcionamento do instrumento. Esse processo permitiu que os estudantes participassem ativamente na concepção e construção do teodolito, tornando a experiência mais envolvente e significativa.

Para a construção foram utilizados dois transferidores de 180°, que foram unidos para formar um de 360°. Cuidado foi tomado para garantir que os transferidores fossem cortados de forma precisa, evitando erros nas medidas.

Entre os dois transferidores, foi adicionado um eixo de skate, permitindo que o cano fosse colocado sobre eles. Esse cano desempenha a função de observador e agulha para observar os ângulos.

Na parte inferior do teodolito, uma pequena base de madeira foi fixada com uma porca, proporcionando estabilidade aos transferidores e permitindo a fixação do te-

Figura 5.10: Ideia inicial para o teodolito horizontal.



Fonte: Próprio autor (2018).

odolito em um tripé. Essa estrutura facilita o manuseio do instrumento durante as medições.

Na parte inferior do teodolito, uma pequena base de madeira foi fixada com uma porca, proporcionando estabilidade aos transferidores e permitindo a fixação do teodolito em um tripé. Essa estrutura facilita o manuseio do instrumento durante as medições.

Para utilizar corretamente o Teodolito, são necessários apenas uma tabela trigonométrica e um conhecimento básico sobre o conteúdo abordado. Esse material pode ser utilizado tanto em turmas do 9° ano como ao longo do ensino médio. O teodolito manual possui diversas aplicações, desde a medição de distâncias entre pontos até a determinação de áreas inacessíveis. É importante ressaltar que a trigonometria, através da construção trigonométrica, permite compreensão dos conceitos relacionados a

Figura 5.11: Construção do teodolito horizontal.

Fonte: Próprio autor (2018).

Figura 5.12: Instrumento construído.

Fonte: Próprio autor (2018).

ângulos e fenômenos periódicos.

A proposta apresentada visa a superar a abordagem meramente memorística, buscando que os alunos compreendam conceitos trigonométricos no contexto do triângulo retângulo e em outros contextos, por meio da utilização de teodolitos manuais. Dessa forma, eles podem explorar as relações trigonométricas na prática, encontrando alturas, distâncias e áreas inacessíveis por meio dessas relações. Essa abordagem prática e concreta estimula a participação ativa dos alunos e facilita a compreensão dos conceitos matemáticos.

5.3 3ª fase - experimentação

Na terceira fase do processo, a experimentação, os teodolitos manuais serão utilizados em atividades práticas para explorar os conceitos trigonométricos de forma concreta. O objetivo é que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos e desenvolvam habilidades de observação de problemas utilizando os teodolitos como ferramentas. A sequência didática proposta para o ensino de trigonometria com o uso dos teodolitos manuais visa a proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa e prática dos conceitos dessa área da matemática. A seguir, detalhamos a primeira aula da sequência, que aborda a definição de trigonometria e a apresentação dos instrumentos:

Objetivos:

Geral

- Fazer os alunos do ensino médio compreenderem a importância da trigonometria em suas vidas, promovendo uma aprendizagem significativa e o entendimento dos conceitos básicos previstos pelos PCN's de matemática.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL 1997, p. 44)

Específicos:

a) Desenvolver uma sequência de atividades práticas de forma a aplicar os conceitos de trigonometria no cotidiano dos alunos.

b) Construir, em conjunto com os alunos, conceitos importantes de trigonometria a partir de situações do dia a dia.

c) Despertar nos alunos o gosto pela matemática por meio de aplicações práticas.

d) Explicar os conceitos entre seno, cosseno, tangente, lei dos senos e lei dos cossenos, destacando as diferenças entre eles e as situações em que devem ser aplicadas.

e) Desenvolver nos alunos a capacidade de interpretar corretamente situações-problema que possam ser resolvidas por meio da trigonometria.

f) Ensinar os alunos a construir, aplicar, interpretar e apresentar os resultados de situações que possam ser resolvidas com o uso de teodolitos manuais;

g) Incentivar o uso dos instrumentos de medição para pesquisa e no dia a dia.

Público Alvo

Alunos do 2° ano "D" da EEMTI Campos Sales;

Pré-requisitos:

Os alunos devem possuir conhecimento básico das operações trigonométricas e saber utilizar as fórmulas relacionadas ao tema.

Aula – Definição de Trigonometria e apresentação dos instrumentos:

Tempo Previsto:

Recomendamos que essa atividade seja realizada em 4 horas aulas (200 minutos).

Materiais e Tecnologias:

- Livros de Matemática
- Quadro branco
- Pincel
- Apagador
- Teodolitos
- Fita métrica.

Recomendações Metodológicas:

Entregue aos alunos um pequeno resumo das fórmulas relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo e qualquer, bem como uma tabela das razões trigonométrica com os valores de seno, cosseno e tangente. Isso servirá de consulta durante as atividades práticas.

Descrição Geral:

Durante as duas primeiras aulas, é importante abordar de forma geral o tema da trigonometria, incluindo todas as etapas descritas nas análises preliminares do conteúdo. Situe, discrimine e diferencie quando e como cada uma das fórmulas deve ser utilizada.

Após essas duas aulas teóricas, promova outras duas aulas práticas, nas quais os alunos terão seu primeiro contato com os teodolitos. Nesse momento, é essencial que os alunos compreendam o manuseio dos teodolitos e sua utilidade para medições em situações cotidianas.

Ao final dessa etapa prática, para garantir a participação efetiva de todos os envolvidos, forme grupos com 4 ou 5 alunos, nos quais serão realizadas as atividades de campo.

5.3.1 Atividades desenvolvidas pelas equipes

Para formar as equipes, foi realizado um sorteio com o objetivo de promover uma maior interação entre todos os alunos da sala. No ensino médio, assim como em outros níveis de ensino, é muito comum que alguns alunos procurem os colegas com maior afinidade com a disciplina de matemática na hora da formar grupos para trabalhos em equipe. No entanto, essa prática pode levar à exclusão dos alunos que têm mais dificuldades na área de exatas. Ao realizar sorteios, conseguimos aproximar alunos que não tinham tanta afinidade e criar grupos mais heterogêneos do que o habitual.

Com os grupos que formamos, começamos a planejar os locais que seriam medidos com os teodolitos. Seguindo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeo, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base para a formalização da Matemática. (BRASIL 1997, p. 19)

Continuando a pesquisa e utilizando os teodolitos, os alunos, agora divididos em equipes, foram desafiados a medir alguns locais dentro do município de Campos Sales, proporcionando uma abordagem prática e direta da matemática em seu cotidiano e envolvendo situações reais. Foram propostas as seguintes medições aos alunos em suas respectivas equipes:

- Equipe 1 - Altura de um prédio 5.13 no centro da cidade e largura da praça 5.20.

- Equipe 2 – altura da torre no centro da cidade 5.23.

- Equipe 3 – altura da igreja 5.27 e distância entre a santa e um poste 5.29.
- Equipe 4 – distância entre duas pontes 5.31.
- Equipe 5 – altura da torre no bairro Alto Alegre 5.35.
- Equipe 6 – Altura de uma caixa de água no distrito de Caldeirão 5.39.
- Equipe 7 – Altura da estátua de Nossa Senhora da Penha 5.42.
- Equipe 8 – Largura da pista de desembarque do Aeroporto de Campos Sales 5.46.

Cada equipe deverá utilizar os teodolitos para realizar as medições com precisão. É importante que registrem os dados obtidos, realizem os cálculos necessários e apresentem os resultados de forma clara e organizada. Além disso, os alunos devem refletir sobre a importância da trigonometria nessas medições e discutir como os conceitos aprendidos podem ser aplicados em situações cotidianas.

5.4 4ª fase - Anáises a posteriori e validação

Na quarta etapa da engenharia didática, realizamos a análise a posteriori e validação dos dados coletados durante a fase de experimentação. Para isso, fizemos um levantamento de todas as informações fornecidas pelos alunos nos relatórios apresentados em formato de seminário, com o acompanhamento e orientação do professor.

Durante essa análise, examinamos os resultados obtidos pelas equipes em suas medições, bem como a forma como os conceitos de trigonometria foram aplicados e interpretados. Avaliamos a precisão das medições, a consistência dos cálculos realizados e a clareza na apresentação dos resultados.

Com base nessa análise a posteriori, verificamos a validade das conclusões alcançadas pelas equipes e a correspondência dos resultados com as expectativas iniciais.

Também consideramos o impacto dessa experiência na aprendizagem dos alunos e sua compreensão sobre a importância da trigonometria no cotidiano.

Esperamos que essa etapa de análise e validação dos dados colhidos durante a fase de experimentação contribua para aprimorar futuras aplicações da engenharia didática na educação básica, promovendo uma aprendizagem significativa e despertando o interesse dos alunos pela matemática e suas aplicações práticas.

5.4.1 Equipe 1

Figura 5.13: Prédio medido.

Fonte: Próprio autor (2023).

Para medir a altura do prédio na imagem, o aluno utilizou a trigonometria, observando o ponto mais alto do prédio a partir de uma distância desconhecida. A partir desse primeiro ponto, ele mediu o ângulo de inclinação do topo do prédio, que era 39°.

Figura 5.14: Ângulo observado.

Fonte: Próprio autor (2023).

Para a utilização do teodolito vertical, é importante lembrar que o ponto zero é o ângulo de 90º, que corresponde à linha do horizonte. Quando se mede um ângulo acima, ou abaixo, da linha do horizonte, é necessário subtrair esse ângulo de 90º para obter o ângulo real em relação ao ponto zero. No caso específico citado no texto, como o ângulo medido foi 52º, o ângulo real em relação ao ponto zero seria de 38º. Essa correção é fundamental para garantir a precisão e exatidão das medidas realizadas com o teodolito vertical.

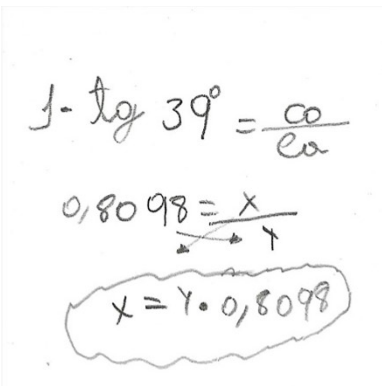
Após a primeira medição, outra aluna permaneceu no primeiro ponto enquanto o observador se afastou 14 metros e realizou uma segunda medição, obtendo um ângulo de 23°. É fundamental lembrar que o ponto observado da segunda medição deve ser exatamente o mesmo do ponto de observação da primeira medição.

Nessa equação, a equipe buscou determinar a altura do prédio, representada por x, relacionada à distância até então desconhecida, representada por y, e ao ângulo obtido

Figura 5.15: Segundo ponto de observação do topo do prédio.

Fonte: Próprio autor (2023).

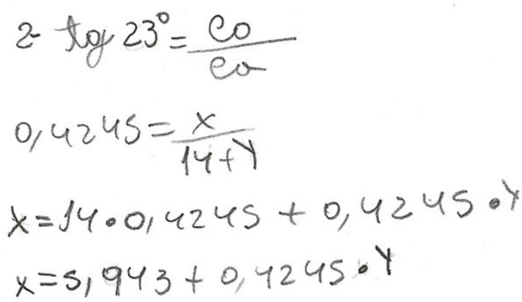
Figura 5.16: Primeira parte do cálculo.



Fonte: Equipe 1 (2023).

na observação desse ponto até o topo do prédio, que foi de 39°. A tangente do ângulo é utilizada nesse cálculo, pois relaciona os lados do triângulo retângulo formado pela altura do prédio e pela distância y. A partir dessa equação, é possível encontrar uma relação entra a altura do prédio e a distância medida.

Figura 5.17: Segunda parte do cálculo.



Fonte: Equipe 1 (2023).

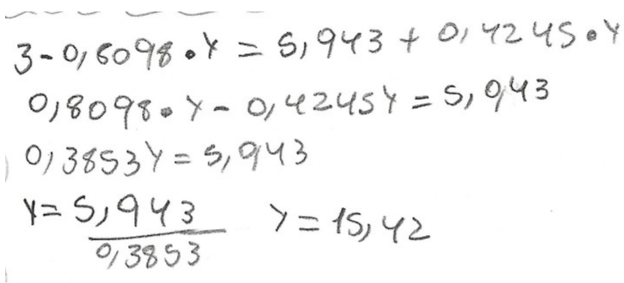
No segundo passo, a equipe realizou o cálculo utilizando a tangente do segundo ângulo obtido em relação ao topo do prédio, após ter se distanciado 14 metros do primeiro ponto de observação.

Nessa equação, a equipe buscou determinar novamente a altura do prédio, representada por x, agora relacionada ao segundo ângulo de observação, que foi de 23°, e à distância $(y + 14)$ a partir do primeiro ponto de observação. A tangente do ângulo é utilizada para relacionar a altura do prédio com a distância medida após o deslocamento.

Após realizar os dois cálculos anteriores para determinar a altura do prédio, os alunos perceberam que ambos os cálculos se referiam à mesma grandeza, ou seja, à altura do prédio. Com base nessa observação, eles igualaram as duas expressões obtidas.

Ao igualar as duas equações, os alunos puderam obter a distância do primeiro ponto de observação até a base do prédio, representada por x. Essa igualdade permitiu que

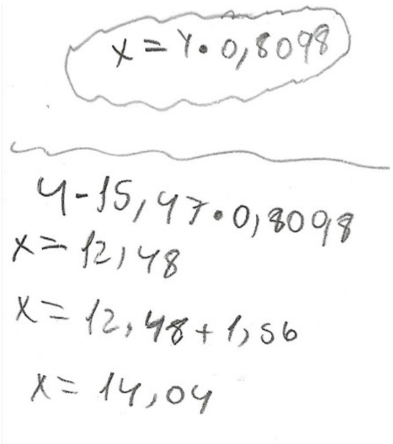
Figura 5.18: Terceira parte do cálculo.



Fonte: Equipe 1 (2023).

eles eliminassem a incógnita x e resolvessem a equação para encontrar o valor de y, que representa a distância até então desconhecida.

Figura 5.19: Quarta parte do cálculo.



Fonte: Equipe 1 (2023).

Após encontrar o valor de y, que representa a distância do primeiro ponto de observação até a base do prédio, os alunos puderam substituir esse valor na primeira equação. Na equação, x representa a altura do prédio, que era a grandeza que desejavam determinar. Portanto, substituindo o valor de y na equação, eles obtiveram a altura aproximada do prédio ao qual se propuseram medir.

Além disso, os alunos também consideraram a altura dos olhos do observador, adicionando esse valor à altura obtida na equação. Dessa forma, puderam determinar a altura total do prédio, levando em conta a altura do ponto de observação em relação à base.

Largura da Praça do "O"

Para medir a largura da praça do “O” em frente à escola, utilizamos o teodolito horizontal. Fixamos o aparelho no início da praça e nos referenciamos com um pilar dos correios que estava do outro lado.

Figura 5.20: Posicionamento inicial na praça.

Fonte: Próprio autor (2023).

Desse ponto onde a primeira aluna se posicionou, em posição adjacente a essa, dois alunos se distanciaram 17 m. Considerando esse primeiro ponto de observação como sendo o ponto A, o pilar que está do lado oposto como sendo o ponto B e os alunos que se distanciaram 17 m como sendo o ponto C, com esses pontos, formamos um triângulo e assim podemos utilizar as razões trigonométricas nele.

A partir do ponto A, a aluna observou com o teodolito o ângulo de observação do ponto B até o ponto C e obteve um ângulo de 43°. Encaminhando-se com o teodolito até o ponto C, fizemos a observação do ângulo entre os pontos A e B, obtendo 121°. Assim, obtivemos todas as medidas necessárias para que através da lei dos senos pudéssemos obter a largura da praça à qual nos propusemos a medir.

A Lei dos Senos estabelece a seguinte proporção:

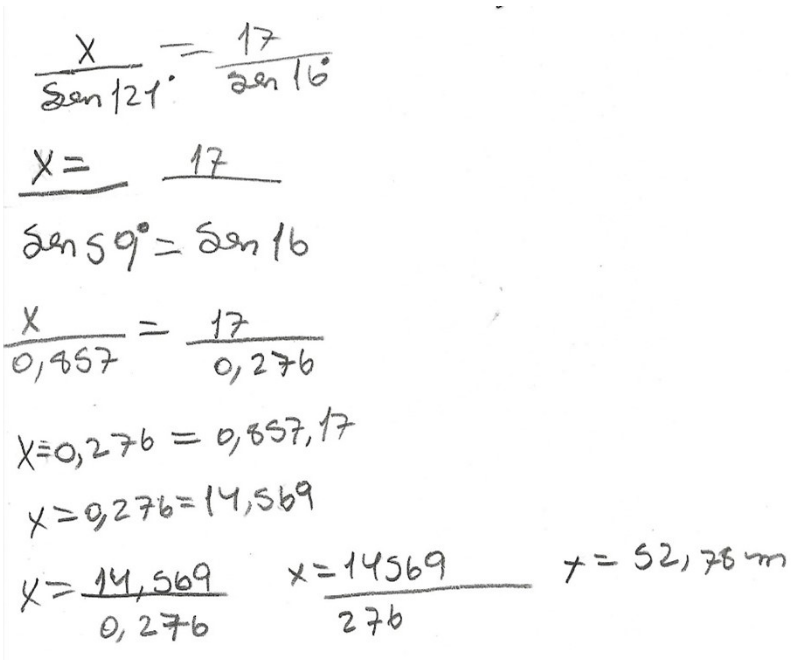
Figura 5.21: Primeiro ângulo observado.

Fonte: Próprio autor (2023).

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

No caso em questão, os lados do triângulo são as distâncias entre os pontos A, B e C, e os Ângulos correspondentes são os ângulos medidos com o teodolito. Portanto, os alunos aplicaram a Lei dos Senos para encontrar a medida da largura da praça.

Figura 5.22: Cálculo da largura da praça.



Fonte: Equipe 1 (2023).

5.4.2 Equipe 2

O procedimento adotado pela equipe para medir a altura da torre de comunicação é semelhante ao utilizado pela equipe 1 para medir a altura do prédio. A ideia é realizar duas medições a partir de pontos diferentes e usar a trigonometria para determinar a altura da torre.

No entanto, durante o processo de determinação da distância entre o primeiro e segundo ponto de observação, encontramos um desafio devido à presença de canteiros e bancos na praça. Para contornar essa questão, designamos um aluno para cada ponto, identificando o primeiro ponto como sendo A e o segundo ponto como B. Em seguida, nos deslocamos para uma posição onde pudéssemos observar os dois pontos sem obstáculos visuais, garantindo uma medição mais precisa.

Uma vez determinado o terceiro ponto, denominado C no triângulo, o aluno localizado no ponto A observou o ângulo formado entre os pontos C e B, enquanto o aluno

Figura 5.23: Observações da torre.

(a) Primeira observação (b) Segunda observação

Fonte: Próprio autor (2023).

C observou o ângulo formado entre os pontos A e B. Além disso, medimos a distância entre os pontos A e B, que foi registrada como 10 metros. Com base nessas informações, os alunos realizaram os cálculos em duas etapas distintas: Primeiro calcularam a distância entre o primeiro e o segundo ponto de observação e, em seguida, determinaram a altura da torre. É importante ressaltar que consideramos a superfície entre o local onde estávamos e a base da torre como completamente plana, para garantir a precisão dos cálculos realizados.

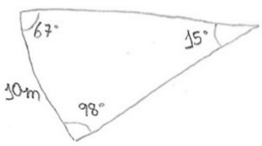
O primeiro cálculo realizado pela equipe foi relacionado à aplicação da lei dos senos, que permitiu determinar a distância entre o primeiro e o segundo ponto de observação da torre. Através dessa lei, os alunos puderam estabelecer uma relação entre os comprimentos dos lados do triângulo formado pelos pontos A, B e C, utilizando os ângulos

Figura 5.24: Distância entre os dois pontos de observação.

(a) Primeira ponto de observação (b) Terceira pessoa a observar

Fonte: Próprio autor (2023).

Figura 5.25: Cálculo da distância entre primeiro e segundo ponto de observação.



$$\frac{X}{\text{seno } 98} = \frac{10}{\text{seno } 15}$$

$$\frac{X}{0,990} = \frac{10}{0,259} \longrightarrow 0,259x = 9,90$$

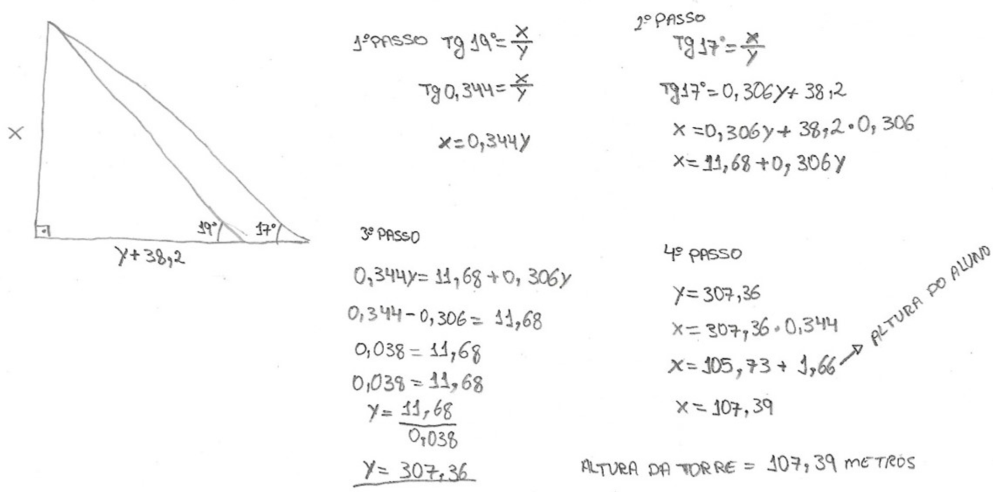
$$x = \frac{9,90}{0,259} = \boxed{x = 38,2}$$

Fonte: Equipe 2 (2023).

correspondentes. Essa análise trigonométrica possibilitou obter a distância desejada, levando em consideração as medidas obtidas durante as observações e o conhecimento das razões trigonométricas envolvidas.

O cálculo e procedimento metodológico realizado para obter a altura da torre foram semelhantes aos da equipe anterior. Os alunos utilizaram a tangente dos dois ângulos

Figura 5.26: Cálculo da altura da torre.



Fonte: Equipe 2 (2023).

de observação para determinar a distância do primeiro ponto de observação até a base da torre. Em seguida, aplicaram a mesma equação para calcular a altura da torre, considerando a distância obtida e a altura dos olhos do observador. Esse processo baseado nas razões trigonométricas permitiu estimar a altura da torre com base nas medições realizadas e nos princípios da trigonometria.

5.4.3 Equipe 3

ALTURA DA IGREJA

Para realizar a medição da altura da Igreja Matriz de Campos Sales, os alunos seguiram um procedimento semelhante ao da equipe 1.

No início, um aluno se posicionou em um ponto próximo à igreja e a observou sob um ângulo de 48°. Em seguida, o aluno se afastou 24 m e realizou uma nova observação, obtendo um ângulo de 31°.

Essas informações foram registradas para que fosse possível calcular a altura da igreja. Com base nos ângulos observados e na distância entre os pontos de observação,

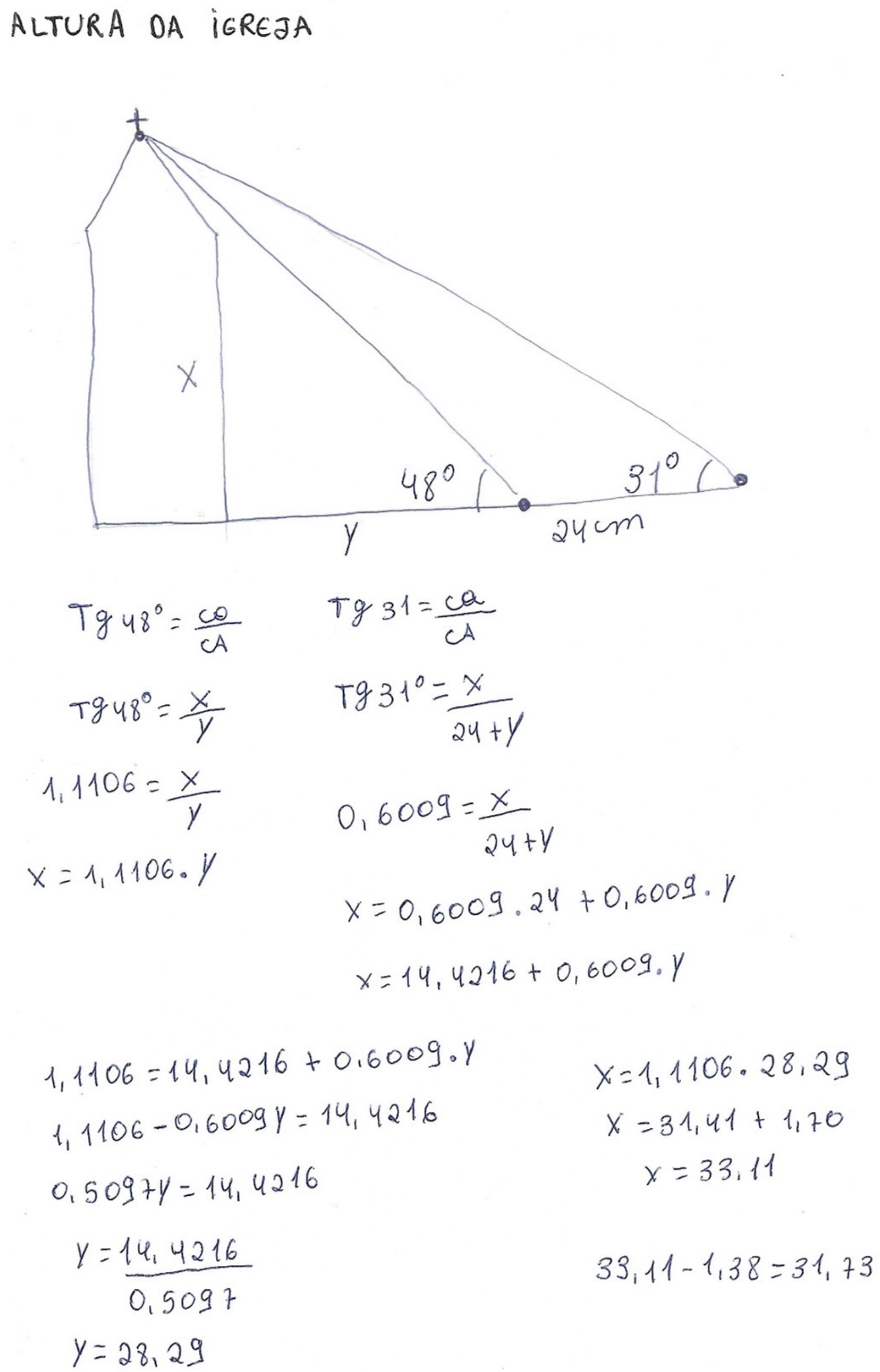
Figura 5.27: Observação do ponto mais alto da igreja.

Fonte: Próprio autor (2023).

os alunos aplicaram os conhecimentos adquiridos para determinar a altura desejada. Esse método permite obter a altura aproximada da Igreja Matriz de Campos Sales.

Realizando o mesmo procedimento na obtenção dos resultados das equipes anteriores, foi determinada a altura da Igreja, com o detalhe final que tiveram de subtrair a altura dos degraus da mesma.

Figura 5.28: Cálculo da altura da igreja.



Fonte: Equipe 3 (2023).

Distância entre o poste e a Santa

Para abordar uma situação diferente e utilizar uma outra fórmula, decidimos medir a distância entre um poste e uma estátua de Santa localizada na praça em frente à igreja.

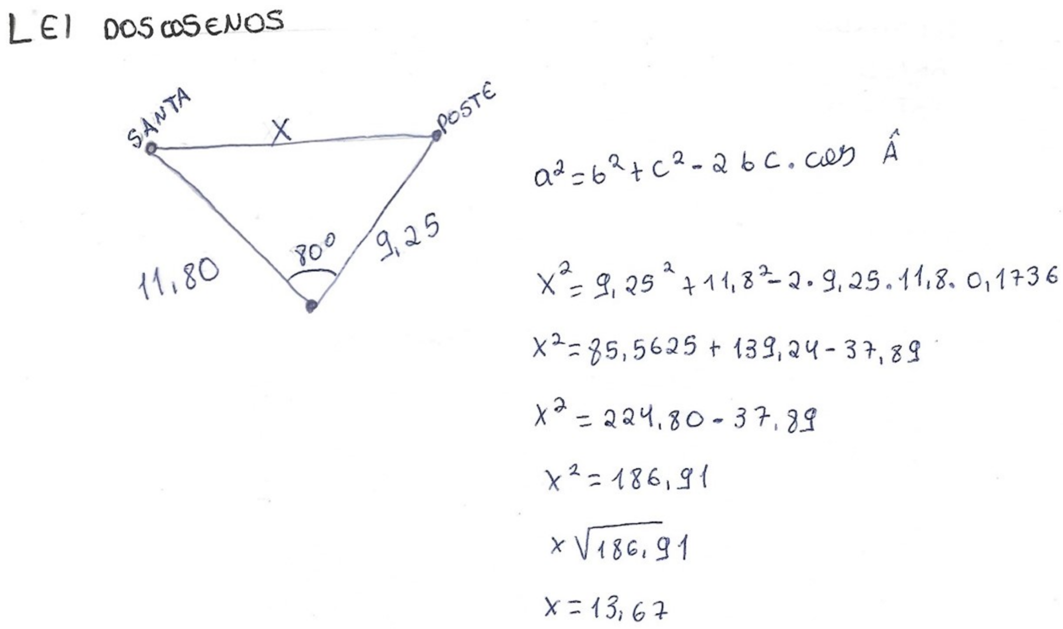
Figura 5.29: Distância entre poste e Santa.

Fonte: Próprio autor (2023).

Nesse caso, fixamos o teodolito horizontal em um ponto que permitisse a visualização tanto do poste quanto da estátua. A partir desse ponto, medimos a distância até a estátua, obtendo o valor de 11,80 metros, e a distância até o poste, que foi de 9,25 metros. Após coletar essas medidas, realizamos a observação do ângulo formado entre a estátua e o poste utilizando o teodolito, o qual registrou o ângulo de 80°.

Com base nessas informações, realizamos os cálculos necessários para determinar a distância entre o poste e a estátua. Utilizamos a fórmula apropriada, aplicando os ângulos e as distâncias medidas. Esse procedimento nos permitiu obter o valor desejado de forma precisa e confiável.

Figura 5.30: Cálculo da distância entre poste e Santa.



Fonte: Equipe 3 (2023).

Para calcular a distância entre o poste e a estátua, a equipe utilizou a lei dos cossenos. Essa lei é aplicada quando temos informações sobre os comprimentos dos lados de um triângulo e o ângulo entre eles.

Aplicando a lei dos cossenos, que relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com os ângulos opostos a eles, a equipe realizou os cálculos necessários para determinar a distância desejada. Ao utilizar a lei dos cossenos, os alunos garantiram um método confiável pra obter o resultado desejado, levando em consideração as medidas e o ângulo de observação. Com base nas medidas obtidas, eles puderam calcular com precisão a distância entre o poste e a estátua.

5.4.4 Equipe 4

Distância entre duas pontes

Na ocasião, a equipe se deslocou da escola até o Canal XXIII, um local que futuramente será utilizado para eventos na cidade. A tarefa atribuída à equipe foi calcular a distância entre duas pontes nesse local. Para realizar a medição, a equipe seguiu os seguintes passos:

Figura 5.31: Distância entre as pontes.

Fonte: Próprio autor (2023).

Posicionamento do Teodolito: Inicialmente, fixamos o teodolito horizontal na primeira ponte como ponto de referência. Uma das alunas se deslocou até a outra ponte para servir como ponto de observação para as medições.

Posicionamento dos estudantes: Em uma direção adjacente, os demais estudantes posicionaram-se a uma distância de 20 metros da primeira ponte. Essa distância foi estabelecida para permitir a triangulação adequada na obtenção dos ângulos.

Primeira observação do ângulo: Realizamos a primeira observação do ângulo formado ente a primeira ponte e o local onde os alunos estavam posicionados. O valor obtido foi 58°.

Figura 5.32: Posicionamento dos integrantes.

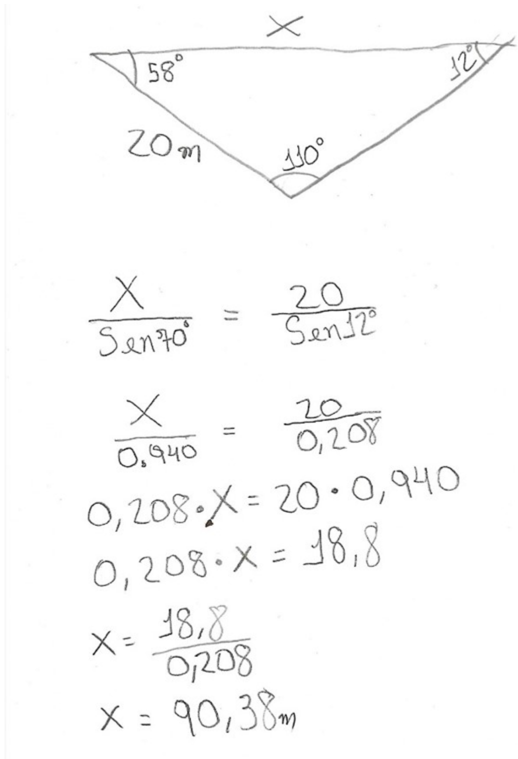
Fonte: Próprio autor (2023).

Deslocamento do teodolito: Em seguida, o teodolito foi cuidadosamente deslocado até o ponto onde os alunos se encontravam, mantendo-se alinhado com a direção da segunda ponte.

Observações do segundo ângulo: No novo ponto de observação, realizamos a segunda observação do ângulo formado entre o local onde os alunos estavam e a segunda ponte. O valor obtido foi de 110°.

A partir dessas observações e ângulos obtidos, a equipe realizou os cálculos necessários utilizando fórmulas trigonométricas adequadas para determinar a distância entre as duas pontes do Canal XXIII.

Figura 5.33: Cálculo da distância entre as pontes.

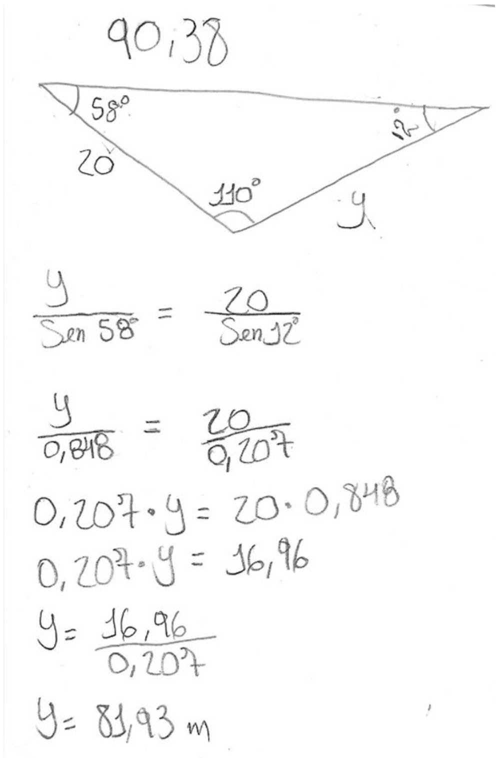


Fonte: Equipe 4 (2023).

Com base nos dados coletados, os alunos aplicaram a lei dos senos, que estabelece a relação entre os lados de um triângulo e os ângulos opostos a esses lados. Eles utilizaram a fórmula apropriada para calcular a distância entre as duas pontes. Esse valor foi obtido com precisão e permitiu que a equipe cumprisse o objetivo de medir a distância desejada.

Após calcular a distância entre as duas pontes, os alunos prosseguiram com a determinação da distância entre a segunda ponte e o segundo ponto de observação. Para isso, utilizaram novamente a lei dos senos, aplicando-a ao triângulo formado pelos dois pontos de observação e a segunda ponte. Essa etapa permitiu completar as medidas do

Figura 5.34: Cálculo da distância entre o terceiro ponto de observação e a ponte.



Fonte: Equipe 4 (2023).

triângulo e obter a distância entra a segunda ponte e o segundo ponto de observação.

5.4.5 Equipe 5

Torre do Bairro Alto Alegre

Essa equipe designada para medir a altura de uma torre de comunicação localizada no Bairro Alto Alegre, no município de Campos Sales. Para realizar a tarefa, foram adotados dois procedimentos distintos.

No primeiro procedimento, utilizou-se um teodolito vertical para observar o topo da torre. O ângulo de observação obtido foi de 41°. No entanto, antes de determinar a altura da torre, era necessário obter a distância entre o ponto de observação e a torre.

Para encontrar essa distância, um membro da equipe se deslocou a uma distância

Figura 5.35: Torre do Bairro Alto Alegre.

Fonte: Próprio autor (2023).

de 20,5 metros em relação ao ponto inicial e observou o ângulo horizontal formado entre esse ponto e a torre. Em seguida, o teodolito foi levado até esse novo ponto e foi observado o ângulo formado entre o primeiro ponto de observação e a torre, o qual foi medido como sendo 155°.

Com as informações coletadas durante as observações, foi possível prosseguir para os cálculos necessários a fim de determinar a distância entre o primeiro ponto de ob-

Figura 5.36: Distância entre o ponto de observação e a base da torre.

(a) Primeira ponto de observação base da torre (b) Segundo ponto de observação e primeiro (c) Segundo ponto de observação e base da torre

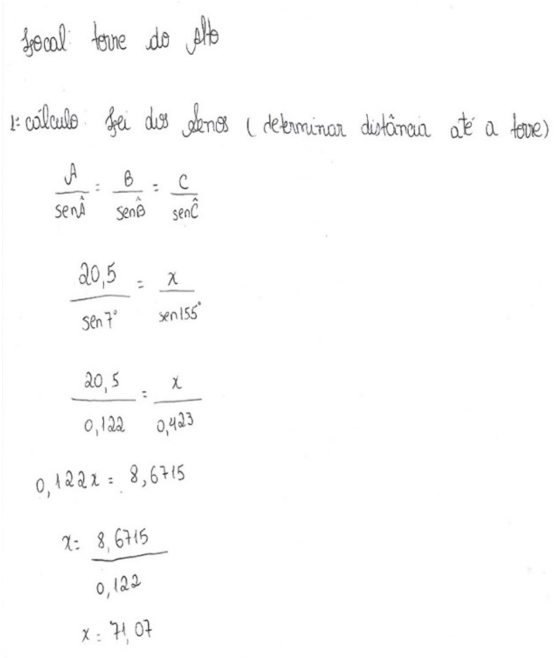
Fonte: Próprio autor (2023).

servação e a torre, bem como a sua altura.

A equipe realizou o primeiro cálculo para determinar a distância entre a base da torre e o ponto de observação da altura. Para isso, foi aplicada a lei dos senos que facilita a obtenção dessa distância desejada. Com base nas medidas conhecidas dos ângulos e nas informações coletadas durante as observações, foi possível estabelecer uma proporção que permitiu calcular a distância entre o ponto de observação e a base da torre.

Dessa forma, utilizando a lei dos senos, a equipe obteve a distância desejada, proporcionando uma base sólida para prosseguir com os cálculos subsequentes e determinar

Figura 5.37: Cálculo da distância entre o ponto da primeira observação e a torre.



Fonte: Equipe 5 (2023).

a altura da torre com maior precisão.

Com a distância até a base da torre calculada, a equipe prosseguiu para realizar os cálculos necessários a fim de obter a altura da torre. Um aspecto importante a considerar nesse cálculo foi adicionar a altura dos olhos do observador à altura determinada.

Após obter a distância entre o ponto de observação e a base da torre, juntamente com a altura dos olhos do observador, a equipe utilizou a fórmula apropriada para calcular a altura da torre.

É fundamental considerar a altura dos olhos do observador nesse cálculo, pois a medição realizada a partir do ponto de observação está relacionada ao nível dos olhos do observador, e não à base da torre em si. Portanto, ao somar a altura dos olhos, os alunos obtiveram uma estimativa mais precisa da altura total da torre.

Essa abordagem meticulosa garantiu que a altura da torre fosse calculada de forma adequada, levando em conta todos os fatores relevantes para uma medição precisa.

Figura 5.38: Cálculo referente a altura da torre.

2º cálculo: $tg = \frac{co}{ca}$ (determinar a altura)

$tg\,41° = \frac{co}{ca}$

$0,8693 = \frac{x}{71,07}$

$x = 0,8693 \cdot 71,07$

$x = 61,78$

$x = 61,78 + 1,55 \rightarrow$ obs: (altura do observador)

$x = 63,33\,m$

Fonte: Equipe 5 (2023).

5.4.6 Equipe 6

Altura da caixa de abastecimento do distrito de Caldeirão, Campos Sales - CE

A equipe designada para medir a altura da caixa d'água, responsável pelo abastecimento do distrito em que residem, adotou um procedimento semelhante ao da equipe anterior, como será detalhado a seguir.

Em um local cuja distância em relação à base da caixa ainda era desconhecida, realizou-se a observação do ponto mais alto desta estrutura, sob um ângulo de 28°. Em seguida, a fim de calcular a distância entre esse ponto e a base da caixa, uma das alunas deslocou-se estrategicamente para uma posição que não se alinhava com os dois primeiros pontos.

A partir da posição de observação inicial, foi realizado o registro do ângulo formado entre a aluna que havia se deslocado e a caixa d'água, obtendo-se um ângulo de 60°. Posteriormente, o teodolito foi levado até essa aluna e observou-se o ângulo que permitiria determinar a distância entre o primeiro ponto de observação e a caixa, resultando

Figura 5.39: Caixa d'água.

Fonte: Próprio autor (2023).

em um ângulo de 92°.

Com todas essas informações coletadas, pôde-se dar continuidade aos cálculos necessários para obter a altura da caixa d'água.

O procedimento realizado pela equipe para determinar a altura da caixa d'água foi semelhante ao da equipe anterior. Eles utilizaram a lei dos senos para calcular a distância entre o ponto de observação do topo da caixa e a sua base. Essa distância foi obtida comparando os ângulos obtidos e as distâncias conhecidas.

Após calcular a distância, os alunos utilizaram a tangente para determinar a altura do ponto mais alto da caixa d'água. Com base nas informações coletadas, como o ângulo de observação e a distância até a base, eles puderam calcular com precisão a altura desejada.

Figura 5.40: Esquema montado para medir a distância até a base.

Fonte: Próprio autor (2023).

Esse método permite obter uma estimativa confiável da altura da caixa d'água com base nas medidas realizadas e nos cálculos trigonométricos aplicados.

Figura 5.41: Cálculos para determinar a altura da caixa.

(a) Cálculo pra medir a distância da base

$$\frac{X}{SEN 88^\circ} = \frac{14}{SEN 28^\circ}$$

$$\frac{X}{0{,}999} = \frac{14}{0{,}469}$$

$$0{,}469 \cdot X = 0{,}999 \cdot 14$$

$$0{,}469 \cdot X = 13{,}986$$

$$X = \frac{13{,}986}{0{,}469}$$

$$X = 29{,}82$$

$$180 - 92 = 88 \qquad 92 + 60 = 152$$

(b) Cálculo para medir a altura da caixa

$$90 - 62 = 28$$

$$TANG\ 28^\circ = \frac{C.O}{C.A}$$

$$0{,}532 = \frac{X}{29{,}52}$$

$$X = 0{,}532 \times 29{,}52$$

$$X = 15{,}86$$

$$X = 15{,}86 + 1{,}57$$

$$X = 17{,}43$$

Fonte: Equipe 6 (2023).

5.4.7 Equipe 7

A sétima equipe dedicou-se ao cálculo da altura da Estátua de Nossa Senhora da Penha, um local de grande potencial para o turismo religioso em nosso município.

Figura 5.42: Primeira observação do ponto mais alto da Santa.

Fonte: Próprio autor (2023).

O procedimento adotado começou com a primeira observação do topo da estátua a partir de uma distância inicialmente desconhecida. Em seguida, afastaram-se 30 metros em direção oposta à estátua e realizaram a segunda observação, obtendo os ângulos de 44° e 25°, respectivamente.

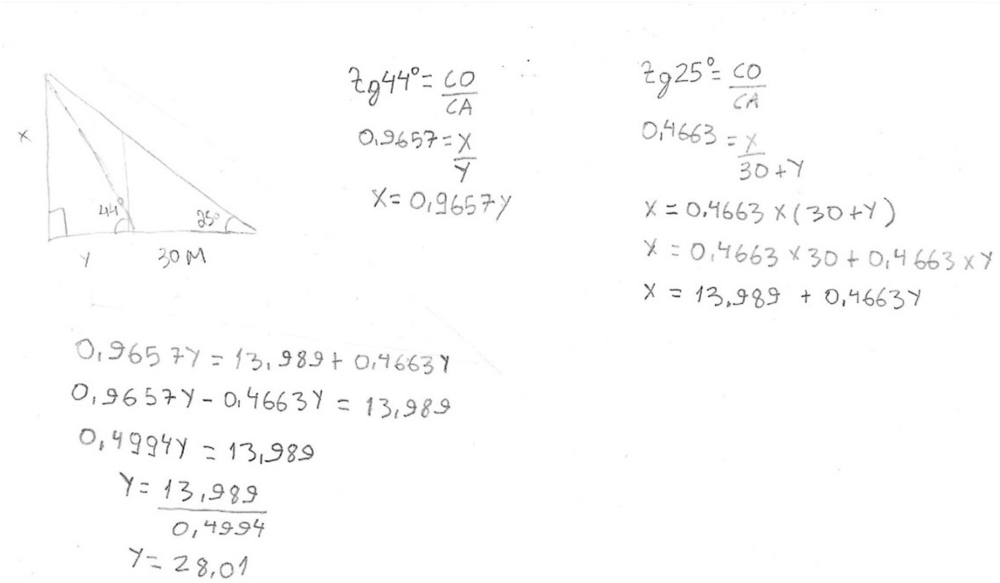
Figura 5.43: Segunda observação do ponto mais alto da Santa.

Fonte: Próprio autor (2023).

Para calcular exclusivamente a altura da Estátua, a partir do primeiro ponto de observação, também observamos o ângulo que determina a altura do altar, obtendo um valor de 40°. Dessa forma, pudemos determinar especificamente a altura da Estátua de Nossa Senhora da Penha.

Após coletar todas as informações necessárias, a equipe obteve os resultados desejados, que serão apresentados a seguir, referentes às alturas calculadas.

Figura 5.44: Cálculo para determinar a altura a partir do ponto observado.

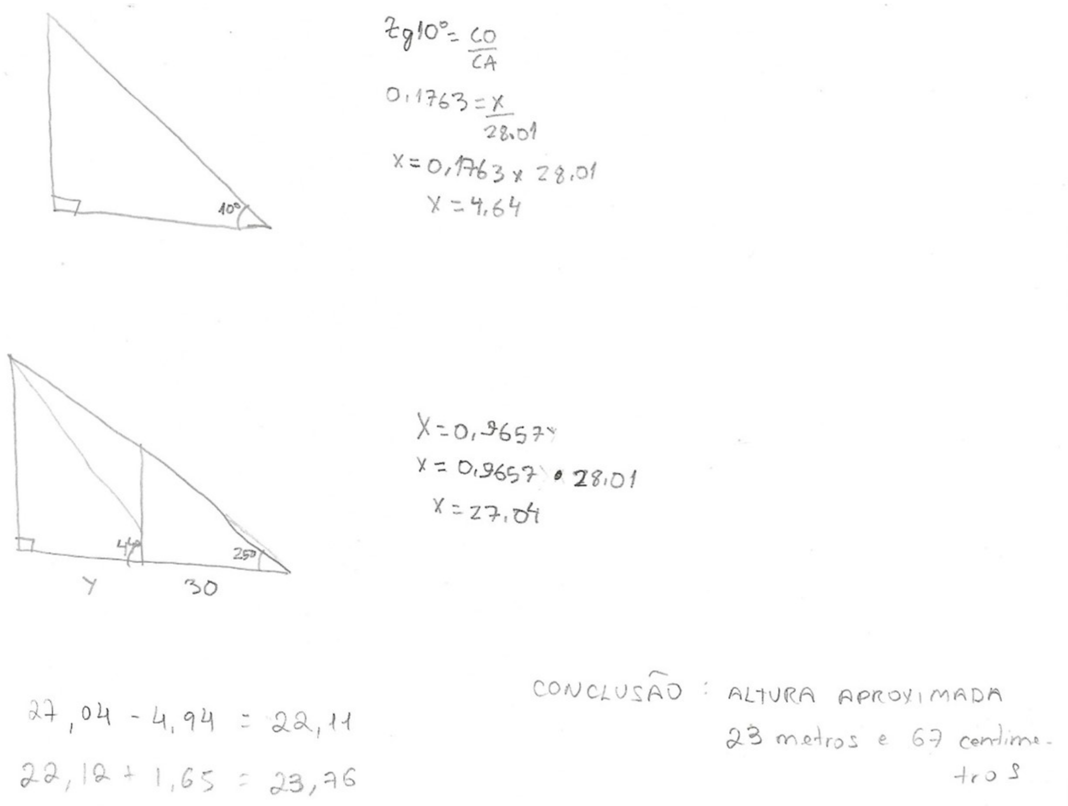


Fonte: Equipe 7 (2023).

O primeiro passo realizado pela equipe foi determinar a distância entre o primeiro ponto de observação e a base da torre. Eles obtiveram um valor aproximado de 28,01 metros para essa distância. Essa informação é crucial para os cálculos subsequentes relacionados à determinação da altura da estátua.

Após obter a distância entre o primeiro ponto de observação e a base da torre, a equipe prosseguiu determinando a altura da estátua e a altura do altar separadamente. Com essas informações em mãos, eles subtraíram a altura do altar da altura total da estátua para encontrar a altura que representa exclusivamente a estátua. Esse cálculo permitiu determinar a altura específica da Estátua de Nossa Senhora da Penha.

Figura 5.45: Cálculo para determinar a altura do altar e da estátua.



Fonte: Equipe 7 (2023).

5.4.8 Equipe 8

A última equipe assumiu a tarefa de medir a altura da torre de comunicação do Aeroporto da cidade. No entanto, ao chegar lá, decidimos aproveitar a oportunidade para calcular a largura da pista de desembarque desse aeroporto.

Para realizar essa medição, um aluno posicionou-se no início da pista (ponto A), enquanto outro foi para o final da pista (ponto B). Em um terceiro ponto (C), localizado a uma distância de 20 m do ponto A, observamos o ângulo de 80°, equivalente à distância entre os pontos A e B. Em seguida, fixamos o teodolito no ponto A e observamos o ângulo formado pela visão dos pontos B e C, obtendo um valor de 70°.

Com base nessas informações, realizamos os cálculos necessários para determinar a

Figura 5.46: Pista de desembarque do aeroporto.

Fonte: Próprio autor (2023).

distância ente os pontos A e B, que representa a largura da pista de desembarque, bem como a distância entre os pontos B e C, que corresponde ao outro lado do triângulo ainda desconhecido.

A seguir, apresentamos os resultados desses cálculos, proporcionando assim a determinação da largura da pista de desembarque e do lado desconhecido do triângulo.

Após o procedimento de obtenção dos ângulos a equipe dividiu seus cálculos em duas etapas, sendo a primeira destinada a calcular a largura da pista de desembarque, com a qual foi utilizada a lei dos senos. Posteriormente, foi realizado outro cálculo, dessa vez pela lei dos cossenos, para determinar o lado do triângulo que faltava.

Figura 5.47: Pista de desembarque do aeroporto.

Cálculos do Aeroporto

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 80^\circ} = \frac{20}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

$$\frac{x}{0{,}985} = \frac{20}{0{,}500}$$

$$0{,}500 \cdot x = 0{,}985 \cdot 20$$

$$0{,}500x = 19{,}7$$

$$x = \frac{19{,}7}{0{,}500}$$

$$x = 39{,}4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$y^2 = 39{,}4^2 + 20^2 - 2 \cdot 39{,}4 \cdot 20 \cdot 0{,}342$$

$$y^2 = 1.552{,}36 + 400 - 78{,}8 \cdot 20 \cdot 0{,}342$$

$$y^2 = 1.952{,}36 - 538{,}992$$

$$y^2 = 1.413{,}37$$

$$y = \sqrt{1.413{,}37}$$

$$y = 37{,}59$$

Fonte: Equipe 8 (2023).

Importante ressaltar que todos os cálculos apresentados nessa etapa, foram organizados e elaborados pelas equipes que estiveram em campo. A utilização de instrumentos de medição no processo de ensino-aprendizagem em matemática desempenha um papel fundamental na formação dos estudantes, proporcionando uma abordagem mais prática, concreta e contextualizada do conteúdo matemático. Essas ferramentas possibilitam que os conceitos teóricos sejam aplicados em situações reais, permitindo aos alunos uma compreensão mais profunda e significativa dos conhecimentos matemáticos.

Um dos principais benefícios de utilizar instrumentos de medir, como o teodolito, é a promoção da aprendizagem ativa e participativa dos estudantes. Ao interagirem com essas ferramentas, os alunos se tornam protagonistas de seu próprio processo de aprendizagem, estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas. Além disso, ao realizar medições e observações com instrumentos de precisão, os estudantes desenvolvem habilidades práticas importantes, como a capacidade de coletar e analisar dados, interpretar resultados e comunicar suas conclusões.

Durante a apresentação do seminário sobre a utilização dos teodolitos, foi observado um alto nível de atenção e conscientização por parte dos alunos em relação ao objeto de estudo. Eles demonstraram grande participação e habilidade ao utilizar os equipamentos de medição com precisão para determinar as medidas solicitadas. Ficou evidente o entusiasmo dos alunos, que se mostraram muito interessados no conteúdo abordado.

Além disso, o uso de instrumentos de medir proporciona aos estudantes uma visão mais abrangente da matemática, mostrando como os conceitos aprendidos em sala de aula são aplicados na resolução de problemas do cotidiano e na compreensão do mundo ao seu redor. Essa conexão entre teoria e prática ajuda a consolidar os conhecimentos, tornando-os mais duradouros e transferíveis para outras situações.

Em resumo, a utilização de instrumentos de medição no ensino de matemática é uma estratégia pedagógica poderosa para promover uma aprendizagem mais significativa, contextualizada e prática. Essas ferramentas permitem que os alunos experimentem os conceitos matemáticos em situações reais, tornando o aprendizado mais envolvente e estimulante. Além disso, o uso de instrumentos de medir contribui para o desenvolvimento de habilidades práticas, o pensamento crítico, a conexão entre teoria e prática e o aprimoramento do raciocínio espacial. Dessa forma, essas abordagens pedagógicas proporcionam uma formação mais completa e prepara os estudantes para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, onde a matemática é uma ferramenta essencial para a compreensão e solução de problemas complexos.

Na aplicação da sequência didática, os alunos mostraram-se mais concentrados nas atividades, otimizando assim o processo de ensino. Houve uma observação positiva de discussões em grupo sobre os assuntos relevantes relacionados às atividades propostas. Além disso, foi evidente a divisão de tarefas dentro dos grupos, o que contribuiu para a otimização da resolução das tarefas e promoveu uma boa relação interpessoal entre os alunos.

A teoria das situações didáticas, proposta por Guy Brousseau, enfatiza a importância de criar contextos significativos e desafiadores para o ensino da matemática. Ao utilizar o teodolito como ferramenta para a medição de distâncias e ângulos, os estudantes são inseridos em situações reais e concretas, tornando o aprendizado mais próximo da realidade e mais motivador. Através de atividades práticas e interativas, os alunos têm a oportunidade de experimentar na prática os conceitos teóricos abordados, o que facilita a compreensão e a internalização dos conhecimentos.

Outro fator relevante a ser mencionado é que, por meio da análise dos dados coletados, constatou-se que os alunos compreenderam o propósito de cada uma das atividades e obtiveram sucesso em suas resoluções, pelo menos na maioria dos casos. Eles mantiveram-se concentrados e demonstraram interesse durante todo o processo.

O contrato didático, também proposto por Guy Brousseau, refere-se ao acordo implícito entre professor e alunos em relação às regras e expectativas do processo de ensino-aprendizagem. Ao utilizar o teodolito em sala de aula, é estabelecido um contrato que promove a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, encorajando-os a explorar, investigar e resolver problemas matemáticos de forma autônoma. Esse contrato didático permite uma maior interação entre professor e alunos, criando um ambiente de aprendizagem mais colaborativo e envolvente.

Durante a análise da intervenção, ficou evidente que a utilização de materiais de construção geométrica ainda é pouco explorada, havendo a necessidade de um maior trabalho de adaptação e treinamento em sua utilização. No entanto, devido à simplicidade desses materiais, foi possível fornecer explicações básicas prévias que facilitaram o desenvolvimento efetivo das atividades. Isso mostra que não devemos subestimar as capacidades dos alunos em aprender técnicas, visualizar conceitos e utilizar a criatividade, além de compreender o sentido das propriedades trigonométricas.

Além disso, a identificação e superação dos obstáculos epistemológicos são essenciais para garantir o sucesso do uso do teodolito em sala de aula. Os obstáculos epistemológicos são dificuldades conceituais que os alunos podem enfrentar ao tentar compreender e assimilar novos conhecimentos. Ao analisar os erros e equívocos cometidos pelos alunos ao utilizar o teodolito, o professor pode identificar os possíveis obstáculos epistemológicos e planejar estratégias para superá-los. Essa abordagem diagnóstica permite ajustar o ensino de forma a garantir uma aprendizagem mais efetiva e evitar a perpetuação de concepções errôneas.

O processo demonstrou ser altamente efetivo, mesmo em uma turma com níveis heterogêneos de conhecimento matemático. Todas as hipóteses foram confirmadas e os obstáculos não previstos, que são esperados em uma aplicação prática, foram facilmente superados. Como resultado, podemos concluir que o processo metodológico baseado em Engenharia Didática foi validado com sucesso.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos o presente trabalho tendo como objetivo a construção de uma sequência didática para trabalharmos os conceitos de trigonometria básica, utilizando-se de teodolitos manuais que viriam a ser um elo entre teoria e prática no processo ensino-aprendizagem para alunos do segundo ano do ensino médio. Buscamos assim, desenvolver uma sequência de atividades que contemplasse o ensino de trigonometria no triângulo retângulo e qualquer, relacionando o assunto matemático com o dia a dia dos alunos, mostrando a sua importância e aplicabilidade ao cotidiano deles.

Buscamos o referencial bibliográfico na didática da matemática, incumbidos em desenvolver uma sequência de ensino para trabalharmos os conceitos trigonométricos e assim sendo, encontramos as teorias das situações didáticas, do contrato didático, dos obstáculos epistemológicos, da engenharia didática (que contempla os três anteriores) e os objetos de medida presentes em tratados do século XVI que nos forneceu uma metodologia de pesquisa.

Ao pesquisar e tratar sobre a teoria das situações didáticas, pudemos encontrar uma forma de entender como o processo de ensino/aprendizagem pode ser articulado de tal modo que o conhecimento, de determinado conceito, possa ser construído pelo aluno. Ainda com a ajuda das situações didáticas, percebemos qual é o papel do professor nesse processo, vimos que, ainda que seja de uma forma menos intensa do que acontece no ensino tradicional, o docente não perde a sua importância dentro do processo pois, está encarregado de mediar o relacionamento do aluno com o conteúdo.

Com o contrato didático entendemos como o relacionamento entre os alunos e o professor pode ser regulado. Ao aprofundarmos nosso estudo relacionado ao contrato didático, verificamos que para cada postura adotada pelo professor, existe um conjunto de regras específico que deve ser adotado para regular aquela prática. Usando tal teoria, compreendemos a importância da exposição, durante uma atividade em sala de aula, das regras necessárias ao bom andamento do processo de ensino/aprendizagem.

Em relação aos obstáculos epistemológicos, pudemos compreender a dificuldade em se abstrair de um novo conhecimento, bem como possíveis resistências e assim encontramos um Sistema Didático que tem como base de apoio o professor, o saber matemático e o aluno, com os quais busca relacionar com a realidade do aluno, seu contexto social e cultural. Para Artigue (1995), a análise epistemológica coloca em evidência a evolução ao longo do tempo da noção de rigor, sua dependência dos domínios matemáticos concernentes e do nível de elaboração que ele manipula.

Com tais premissas, surge a Engenharia Didática, tendo em vista que essa teoria considera as teorias das situações didáticas, do contrato didático e dos obstáculos epistemológicos. Com ela conseguimos aplicar a sequência de ensino e analisar os resultados, salientando sua importância para o planejamento da sequência didática. Ao passarmos pelas suas fases iniciais, conseguimos enxergar os pontos que gostaríamos de atingir com a atividade e prever as dificuldades que poderíamos enfrentar no decorrer de sua aplicação. Esta proposta de sequências didáticas justifica-se por sua utilidade como modelo aplicável em diversos contextos na medida em que pode integrar os acervos disponíveis que servem como apoio ao professor e ao estudante de licenciatura interessados em alternativas não tradicionais de ensino.

Para a realização das fases da Engenharia Didática, tratamos inicialmente da trigonometria dentro do contexto da educação básica, construímos teodolitos manuais que são instrumentos óticos de medição de posições relativas, utilizado principalmente para medidas de ângulos horizontais e verticais. As atividades pensadas e propostas a partir da análise a priori foram de simples e fácil compreensão, exigindo que os alunos percebessem a construção trigonométrica a partir dos instrumentos que criamos.

Estas atividades de campo tinham como objetivo introduzir o conteúdo de trigonometria, suas características, relações e cálculo de alturas e distâncias, utilizando os conhecimentos adquiridos anteriormente.

A utilização da Engenharia Didática, como metodologia da pesquisa, possibilitou que a análise dos dados fosse feita internamente, validando as atividades desenvolvidas. Nesse contexto, a Engenharia Didática, consolida-se como um importante instrumento para o aperfeiçoamento do professor em sala de aula, ao permitir uma profunda análise do cotidiano da sala de aula.

Desta forma, comprova-se a eficácia da utilização de propostas didáticas, embasadas na metodologia da Engenharia Didática. Uma vez que ela auxilia na organização e construção de sequências diferenciadas para o ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo seja na matemática ou não.

Ressalvamos a validade da experiência, tendo em vista que os conceitos abordados foram apontados por boa parte dos alunos no teste e durante o desenvolvimento da atividade. Durante a aplicação da sequência de ensino, observamos um impacto positivo relacionado à motivação dos alunos em participar da atividade. Durante a análise a posteriori e validação, verificou-se que os objetivos traçados nas fases anteriores foram alcançados, em sua maioria, pois os alunos conseguiram realizar as correlações entre os conteúdos do ensino médio e o tema abordado e conseguiram resolver problemas que necessitavam de conhecimentos específicos de conteúdos de matemática do Ensino Médio. O retorno apresentado pelos alunos foi favorável, ouvimos relatos de que a aula foi mais interessante e que a aprendizagem foi mais agradável comparado aos outros conteúdos já trabalhados pelo método tradicional.

A sequência didática desenvolvida e aplicada neste trabalho pode ser entendida como um exemplo de material didático, que pode ser utilizado por professores em sala de aula, para fixar e revisar conteúdos matemáticos do ensino médio. Além de ser um bom motivador para despertar a curiosidade nos alunos e aumentar a afinidade dos alunos com a Matemática. Acreditamos que temas como este, que permitem o desenvolvimento de atividades didáticas em sala de aula, devem ser abordados com maior frequência pelos professores, pois o currículo de matemática do Ensino Médio precisa ser estimulante, inovador e motivador para o aluno.

Em suma, este trabalho confirma a efetividade de ferramentas metodológicas que estimulam um olhar mais crítico e científico em todos os processos da construção do saber e em todos os agentes lá inseridos. Toda e qualquer busca por metodologias que melhorem a qualidade de ensino-aprendizado deve ser estimulada e ofertadas condições para sua efetiva realização.

Tais ações buscam desenvolver e fortalecer uma educação básica e de qualidade, pois desde 2016 quando foi aprovado um teto de gastos para educação, passando a tratar esse setor primordial como gasto público e não da maneira que deveria ser tratado, que é o investimento para o futuro de uma nação, a educação pública vem sofrendo ataques injustificados por uma parte da população que nega a ciência e não tem conhecimento mínimo sobre educação pública. Como se não bastasse limitar por 20 anos os gastos públicos em educação, em 2018 foi eleito um presidente que acreditava e divulgava a ideia que nas universidades públicas todos os estudantes andavam nus, eram distribuídos kits gays no ensino infantil e fundamental, doutrinação ideológica na educação básica, defendendo que os alunos filmassem os professores em sala, afirmou que os professores não queriam trabalhar, “apenas” por conta de uma pandemia que matava mais de mil pessoas por dia no país, defendeu que o excesso de professores atrapalhava e criou uma linha de combate de pessoas que acredita em tais absurdos e defende que mais vale uma arma na mão do que o conhecimento adquirido durante uma vida.

Diante de tamanhos absurdos, vivemos uma escalada de violência dentro do ambiente escolar, as quais são de tamanha dor que nem valem ser ressaltadas. Precisamos ressignificar a educação pública e continuar buscando maneiras de tornar esse ambiente seguro, de confiança, de sonhos e de realizações. O nosso patrono da educação Paulo Freire, tão odiado pelos que não pensam, falou que "Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Logo, buscamos encontrar maneiras de fazer uma educação mais prazerosa, significativa, acolhedora e prática, buscando assim uma educação além dos muros da escola, muros esses que querem deixar cada vez mais altos e distantes. Encontraremos muitos problemas pela frente, mas não contavam que somos professores e que passamos nossas vidas encontrando soluções.

Referências

ALMOLOUD, S.; QUEIROZ, C. d. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19/anped. **REVEMAT-Revista Eletrônica de Matemática**, Universidade do Extremo Sul Catarinense, v. 3, n. 1, p. 62–77, 2008.

ALMOLOUD, S. A. Didática e concepção de dispositivos informáticos educacionais. **Revista de Informática Aplicada**, v. 3, n. 1, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. d. Q. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos. **REVEMAT-Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 36, p. 62–77, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. **Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget**, p. 193–217, 1996.

BACHELARD, G. A formação do espírito científico. **Rio de janeiro: Contraponto**, v. 1938, 1996.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. [S.l.]: SBM, 1985.

BELTRÃO, R. C.; SOUZA, C. M. P.; SILVA, C. P. S. Contrato didático e suas influências na sala de aula. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 12, n. 2, 2010.

BERENGUER, M. I. S. **A aplicação da Engenharia Didática no Ensino das Ciências Exatas**. [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, 2010.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. [S.l.]: Editora Blucher, 2010.

BRASIL, M. Parâmetros curriculares nacionais. **Ministério da educação e do desportosecretaria**, 1997.

BRASIL, M. Base nacional comum curricular (bncc). educação é a base. **Brasília: MEC**, 2017.

BRASIL, P. C. N. et al. Ministério da educação e do desporto. **SEF. Brasília: MEC/SEF**, 1998.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 9, n. 9.3, p. 309–336, 1990.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. in. brun, j. **Didáctica das matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos**, 1996.

BROUSSEAU, G. Didática e teoria das situações didáticas em matemática. **Tradução de Maria José Ferreira da Silva e Saddo Ag Almouloud. São Paulo: PUC**, 2006.

CANDAU, V. M. **A didática em questão**. [S.l.]: Editora Vozes Limitada, 2011.

CARGNIN, C. Ensino e aprendizagem da integral de riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de mapas conceituais com a teoria dos registros de representações semióticas. Universidade Estadual de Maringá, 2013.

COMENIUS, J. A. **Didáctica magna**. [S.l.]: Ediciones Akal, 1986. v. 133.

COSTA, N. M. L. d. Funções seno e cosseno: Uma seqüência de ensino a partir dos contextos do"mundo experimental"e do computador. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1997.

CURY, H. **As Concepções De Matemática dos Professores De Matemática e Suas Formas De Considerar Os Erros Dos Alunos. 1994. 128 p**. Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Educação) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul . . . .

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. et al. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM-SP**, v. 4, n. 7, p. 5–10, 1990.

GOUVÊA, F. A. T. et al. Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. **São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo**, 1998.

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas**, 1996.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria**. [S.l.]: Atual, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. [S.l.]: Impa, 1995. v. 1.

MELO, D. A.; URBANETZ, S. T. Fundamentos de didática. **Curitiba: Ibpex**, 2008.

NETO, A. C. M. Geometria, coleçao profmat. **Rio de Janeiro: SBM**, 2013.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. [S.l.]: Autêntica, 2016.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do báculo de petrus ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, v. 13, n. 25, p. 342–372, 2019.

PIVATTO, W.; SCHUHMACHER, E. As contribuições da engenharia didática enquanto campo metodológico para o ensino de geometria esférica. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 3, n. 1, 2013.

POMMER, W. M.; POMMER, C. P. O contrato didático na sala de aula de matemática. **Seminário de Educação Matemática de nova Andradina**, v. 2013, 2013.

PORTO, F. M. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Oeste do Pará, 2019.

REIS, A. E. D. **O quadrante náutico**. [S.l.]: UC Biblioteca Geral 1, 1988. v. 200.

SAITO, F.; DIAS, M. d. S. Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século xvi. **Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática**, p. 45–58, 2011.

SILVA, B. Educação matemática: Uma nova introdução. anna franchi...[et al]; organizadora: Silvia dias alcântara machado. **Revista–São Paulo: EDUC**, 2008.

TURRIONI, A. M. S. O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2004.