Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

UMA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VOLTADOS AO CONTEXTO DA REGIÃO DO CARIRI POR TÓPICOS

CÍCERO INÁCIO JANOCA

Juazeiro do Norte - CE

2023

CÍCERO INÁCIO JANOCA

UMA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VOLTADOS AO CONTEXTO DA REGIÃO DO CARIRI POR TÓPICOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Dr. Flávio França Cruz

Juazeiro do Norte - CE

2023

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Janoca, Cícero Inácio

C568u UMA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VOLTADOS AO CONTEXTO DA REGIÃO DO CARIRI POR TÓPICOS / Cícero Inácio Janoca. JUAZEIRO DO NORTE , 2023.

80p.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. FLÁVIO FRANÇA CRUZ

1.Ensino , 2.Problemas , 3.Matemática , 4.Cariri; I.Título.

CDD: 510

UMA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VOLTADOS AO CONTEXTO DA REGIÃO DO CARIRI POR TÓPICOS

CÍCERO INÁCIO JANOCA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 31/05/2023.

BANCA EXAMINADORA:

Flávio França Cruz

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Orientador)

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Jocel Faustino Norberto de oliveira

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

José Tiago Nogueira Cruz

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Profª. Ma. Franciery Chaves Silva Sousa

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Me. Francisco Vlademir Dedes da Cruz Barros

Universidade Regional do Cariri (SEDUC-CE)

Dedico a minha esposa Mônica Simões de Araújo Martins por me motivar e ser perseverante no decorrer do curso, afim de chegar ao momento de apresentação. Dedico a meus pais e familiares por sempre acreditar em mim. Dedico a meu professor Dr. Flávio França Cruz pela sua disponibilidade e suas grandes contribuições neste trabalho.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado em um contexto das ações das formações continuadas do Programa Cientista-chefe em Educação Básica (FUNCAP/UFC/SEDUC/URCA) que tem à frente o pesquisador responsável Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Ao Prof. Dr. Flávio França Cruz, pela relevante orientação, dedicação e ensinamentos passados enquanto orientador e docente.

Aos professores participantes da banca examinadora, o Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz, o Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira, a Profª. Ma. Franciery Chaves Silva Sousa e o Prof. Me. Francisco Vlademir Dedes da Cruz Barros pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões destinadas a melhoria deste trabalho.

Aos meus colegas de turma: Agaús, Cícera Paulina, Cicero Henrique, Emanuellem, Edivânia, Ernandes, João Lourenço, Nathália de Barros e Thiago pelo convívio baseado na troca de conhecimentos, motivação e companheirismo.

Aos meus professores Edinardo, Zelauber, Flávio, Leidimar, Valdemiro, Thiago e Pedro Lima pelos importantes e significantes conhecimentos transferidos em suas aulas.

A minha esposa, Mônica Simões de Araújo Martins pela motivação nos meus estudos e seu especial companheirismos.

"*Resolver problemas é uma arte que tem de ser praticada, tal como nadar, esquiar, tocar piano: aprende-se imitando e praticando.*" *(GEORGE PÓLYA)*

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é disponibilizar para os professores de Matemática do ensino básico uma série de exercícios/problemas de Matemática elaborados com base em um contexto que ressalta aspectos sociais, naturais, geográficos, turísticos, econômicos, culturais e esportivos da região do Cariri cearense. Os problemas foram elaborados pelo autor e buscam apresentar a Matemática dentro de temáticas que são familiares para os alunos. Iniciamos o trabalho abordando a importância de trazer para o ensino da Matemática temas que são próprios e emergem no contexto local da região do Cariri, na sequência abordamos o papel fundamental das resoluções de problemas como metodologia do ensino da Matemática e concluímos a introdução com um apontamento de uso desse material. O trabalho continua com a apresentação de uma série de tópicos de Matemática Básica, com uma breve apresentação da teoria, culminando com resoluções de problemas e a listagem de problemas propostos com respostas. Por fim, concluímos apresentando formas de como este trabalho poderá ser divulgado.

Palavras-chave: Ensino, problemas, Matemática, Cariri.

Abstract

The main objective of this work is to make available to basic education Mathematics teachers a series of Mathematics exercises/problems based on a context that emphasizes social, natural, geographic, tourist, economic, cultural and sporting aspects of the Cariri region of Ceará. The problems were elaborated by the author and seek to present Mathematics within themes that are familiar to the students. We started the work by approaching the importance of bringing to the teaching of Mathematics themes that are specific and emerge in the local context of the Cariri region, then we approached the fundamental role of problem solving as a methodology for teaching Mathematics and concluded the introduction with a note on the use of this material. The work continues with the presentation of a series of Basic Mathematics topics, with a brief presentation of the theory, culminating with problem resolutions and the listing of proposed problems with answers. Finally, we conclude by presenting ways in which this work can be disseminated.

Keywords: Teaching, problems, Mathematics, Cariri.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O Ensino de Matemática vem sempre passando por mudanças. Mudanças estas que não quer dizer apenas na assimilação de técnicas e sequências lógicas dos conteúdos abordados, mas sim de uma metodologia que relaciona os conteúdos abordados em sala de aula com aplicações no cotidiano do aluno.

Trabalhar em sala de aula com metodologias voltadas às aplicações da matemática em contextos vivenciados pelos alunos, nos garante que estamos contemplando um ensino-aprendizagem com significados. Quando o aluno consegue identificar e associar experiências de situações problemas do mundo real próximo a ele com o material didático levado pelo professor, o aluno absorve mais facilmente o conteúdo em questão. Conforme Souza (2009).

> No decorrer dos anos, os professores têm notado que o interesse da maioria dos seus alunos tem aumentado consideravelmente quando se relaciona o assunto estudado em sala de aula com situações do seu cotidiano. Em função disso, foi surgindo a necessidade de cada vez mais conjugar a realidade do aluno com o ensino da matemática, algo que pode ser atingido através da contextualização da matemática. Porém, o desafio didático consiste em fazer essa contextualização sem reduzir o significado das ideias matemáticas que deram origem ao saber ensinado. Uma aula contextualizada leva o aluno a interagir com o que está sendo ministrado e isso proporciona uma maior compreensão e entendimento do conteúdo exposto.(SOUZA,2009)

Diante deste contexto e tomando proveito em valorizar temas e elementos da região caririense, este trabalho tem como propósito elaboração de problemas relacionados ao contexto local. Sem êxito na busca de problemas que abordassem elementos da região do Cariri nas provas de vestibulares das principais universidades do Estado e provas de concursos da região, surgiu a motivação para produção deste produto educacional.

A resolução de problemas é uma ferramenta didática fundamental no curso de matemática. Visando apresentar problemas que estejam associados ao contexto regional dos estudantes que residem na região do Cariri cearense, elaboramos este material buscando um suporte educacional para os professores com uma gama densa de problemas que abordam diversos tópicos da matemática do ensino básico e percorrem vários temas da região do Cariri, desde temas aspectos sociais, naturais, geográficos, turísticos, econômicos, culturais e esportivos. Além de resoluções de problemas apresentados, tem um pouco da parte teórica para um suporte dos problemas propostos. O uso da resolução de problemas no ensino da matemática é uma metodologia que merece bastante atenção por parte dos professores. São estes que podem colocar o aluno em situações da vida real, assim motivando-o e incentivando o modo de pensar matemático. Conforme Sousa (2015).

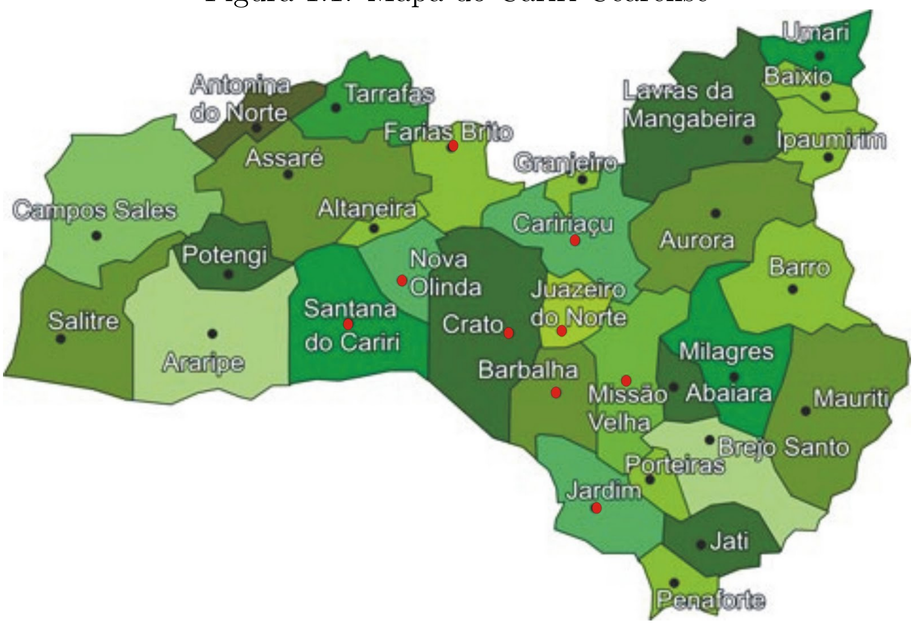
> A importância das resoluções de problemas está no fato de possibilitar aos alunos mobilizarem conhecimentos e desenvolverem a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance dentro e fora da sala de aula. Desta forma, os alunos podem ampliar seus conhecimentos referentes a conceitos e procedimentos matemáticos.(SOUSA, 2015)

Com esse material em mãos, o professor poderá trabalhar em suas aulas conteúdos aplicados a elementos do cotidiano local com um leque de problemas-exemplos assim como problemas propostos. Esse material servirá como uma ferramenta para o professor tornar suas aulas mais contextualizadas e atrativas. Pois quando apresentamos uma situação problema voltada ao contexto local onde o aluno está inserido é um convite à participação e interação nas aulas. É de fácil percepção ao professor quando nas aulas são apresentadas questões problemas de sua cidade, o aluno dá mais atenção e de acordo com a dinâmica do professor a participação e interação do mesmo acontece. Colocar o aluno em contextos do seu cotidiano com a matemática é levar ao mesmo a refletir e propor soluções onde as ferramentas são os conteúdos estudados em sala.

1.1 A região do Cariri cearense

Ao sul do Estado do Ceará se encontra a região do Cariri, de acordo com dados do IPECE conta com cerca de 17.390,30 km^2. Seu nome vem dos índios Quiriri que habitaram essa região. São 28 municípios que compõem essa região, são eles: Abaiara, Altaneira, Antonina do Norte, Araripe, Assaré, Aurora, Barbalha, Barro, Brejo Santo, Campos Sales, Caririaçu, Crato, Farias Brito, Granjeiro, Jardim, Jati, Juazeiro do Norte, Mauriti, Milagres, Missão Velha, Nova Olinda, Penaforte, Porteiras, Potengi, Salitre, Santana do Cariri, Tarrafas e Várzea Alegre. Veja o mapa da região na Figura 1.1.

Figura 1.1: Mapa do Cariri Cearense

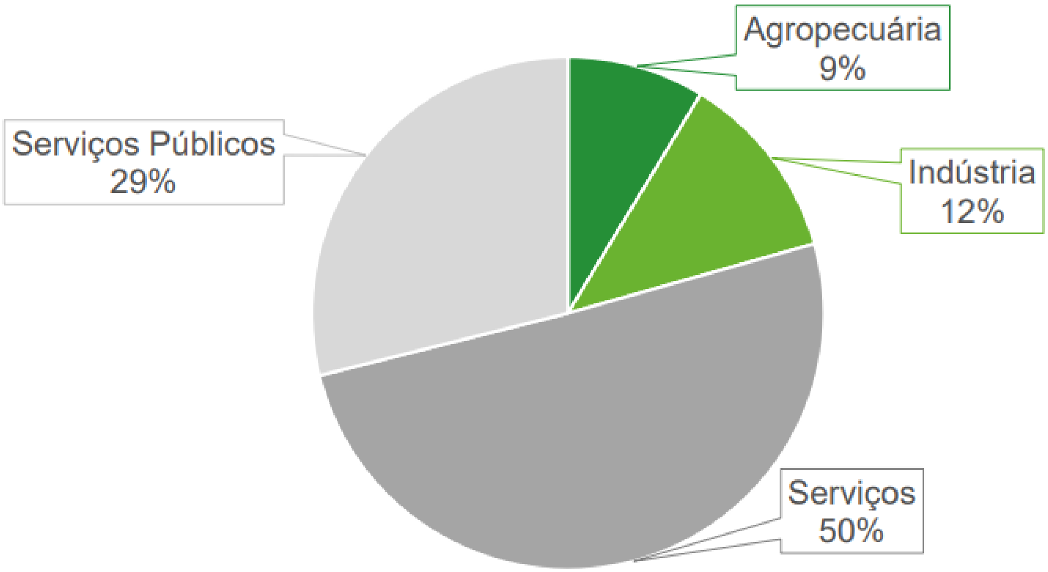


Fonte: Agência Reguladora de Serviços Públicos Delegados do Estado do Ceará – Arce

De acordo com dados do IPECE a população do cariri em 2019 era de 1.023.031 habitantes, contando assim, com 11,2% da população do Estado do Ceará e com uma população urbana de 70,1%. A região possui 7,7% do PIB do Ceará, com um PIB per capita de R$ 10.315,00. Suas Características geoambientais dominantes são compostas por: domínios naturais da chapada do Araripe, sertões e serras secas.

De acordo com o Núcleo de Economia da Federação das Indústrias do Estado do Ceará a estrutura econômica dessa região se comporta de acordo com os dados do gráfico da Figura 1.2.

Figura 1.2: Participação dos Setores da Economia da Região do Cariri



Fonte: Núcleo de Economia/FIEC a partir de dados do IBGE

Essa região ainda conta com uma Região Metropolitana. Segundo a Secretaria das Cidades do Estado do Ceará, essa região é atualmente composta por nove municípios, são eles: Juazeiro do Norte, Crato, Barbalha, Jardim, Missão Velha, Caririaçu, Farias Brito, Nova Olinda e Santana do Cariri. A Região Metropolitana do Cariri (RMC) possui uma área total de 5.456,01 km^2, segundo o IBGE.

A Figura 1.3 apresenta um mapa de guia turísticos da região caririense. Assim o leitor terá uma visão panorâmica da região.

Figura 1.3: Mapa Tutístico do Cariri

Fonte: Secretaria de Turismo do Ceará

2 Tópicos de Aritmética

Nesses primeiros tópicos são apresentadas as definições de números naturais e suas propriedades, os números racionais na forma de frações e decimais, razões e suas aplicabilidades e o cálculo de porcentagem. Além disso, apresentamos resoluções de problemas relacionados a esses conteúdos e que abordam temas e elementos da região do Cariri, para melhor embasamento nas soluções dos problemas propostos na sequência. Para finalizar, são disponíveis problemas elaborados pelo próprio autor a fim de serem utilizados nas aulas do ensino fundamental e médio.

2.1 Números Naturais e Inteiros

O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) é formado pelos números $0, 1, 2, 3, ...$. A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra "sucessor", este tem ideia de contagem. De forma axiomática, o matemático Giuseppe Peano definiu o conjunto dos $\mathbb{N}$ regido por quatro axiomas, são eles:

I) - Todo número natural tem um único sucessor;

II) - Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

III) - Existe um único número natural, chamado de "zero"e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro;

VI) - Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertencer a X, então temos que $X = \mathbb{N}$.

Este último axioma de Peano é conhecido como o axioma da indução. Referimos o leitor a referência [6] na página 25 para uma abordagem mais aprofundada. Em símbolos, temos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...n, ...\}$. O número 0 (zero) não é considerado por muitos autores um número natural, sendo assim sua representação é facultativa.

No conjunto dos naturais definimos as operações de adição e de multiplicação por

$(+)$ e $(\cdot)$, respectivamente. Essas operações gozam respectivamente das seguintes propriedades. Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{N}$, temos para adição:

Associatividade (i) $m + (n + p) = (m + n) + p$;

Comutatividade (ii) $m + n = n + m$;

Elemento neutro (iii) $m + 0 = m$.

Na multiplicação, para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$, temos:

Associatividade (iv) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;

Comutatividade (v) $m \cdot n = n \cdot m$;

Distributividade (vi) $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$;

Elemento neutro (vii) $m \cdot 1 = m$. Referimos o leitor a referência [6] nas páginas 27, 28 e 29 para uma abordagem mais aprofundada com as demonstrações dessas operações.

A união do conjunto dos números naturais com todos os seus opostos aditivos formam o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. No conjunto $\mathbb{Z}$ são definidas também as operações da adição e multiplicação que apresentam, além de (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii), a propriedade simétrico ou oposto para a adição, sendo $(viii)$ $a + (-a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$. Devido à propriedade $(viii)$, podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de subtração, estabelecendo que $a - b = a + (-b)$ para todos a, $b \in \mathbb{Z}$.

2.1.1 Problemas resolvidos

Aqui apresentamos dois problemas resolvidos em que foram elaborados pelo próprio autor, os mesmos envolvem elementos do contexto caririense, o primeiro é um problemas clássico sobre arrecadação em uma partida de futebol, onde envolve clubes de futebol do Cariri, já o outro envolve a comparação de populações da cidade com mais habitantes e a com menos habitantes da região caririense. É apresentada uma solução para cada problema em que são utilizadas operações com os números inteiros, $\mathbb{Z}$.

Problema 1. Dez mil torcedores assistiram a um jogo entre Icasa e Guarani de Juazeiro do Norte no estádio Romeirão. Se 1.500 torcedores pagaram meia entrada no valor de R$ 8,00, se 2.500 torcedores pagaram R$ 16,00 e os demais pagaram a R$ 40,00 pelo ingresso, qual foi a arrecadação total do clássico?

Solução. *O problema nos diz que temos 10 mil pagantes, dentre estes 1.500 pagaram a R$ 8,00; 2.500 pagaram a R$ 16,00; ou seja,* $10.000 - (1.500 + 2.500) = 6.000$ *pagaram a R$ 40,00. Fazendo as multiplicações, teremos* $1.500 \cdot 8,00 = 12.000,00$, $2.500 \cdot 16,00 = 40.000,00$ *e* $6.000 \cdot 40,00 = 240.000,00$. *Agora basta somar* $12.000,00 + 40.000,00 + 240.000,00 = 292.000,00$. *E portanto a arrecadação do jogo entre Icasa e Ceará foi de R$ 292.000,00.*

Problema 2. Segundo o Censo do IBGE, a população do município de Juazeiro do Norte tinha 249.939 habitantes em 2010 e sua estimativa para 2021 era de 278.264 habitantes, considerada a mais populosa do Cariri. Já a população do município de Jati é a menos populosa da região, em 2010 sua população era de 7.649 habitantes e em 2021 a estimativa era de 8.150 habitantes. Diante desse contexto, podemos afirmar que o aumento da população do município de Juazeiro do Norte foi maior que a do município do Jati, então qual número natural que pode representar a quantidade de vezes em que o número dessa estimativa de aumento da população do município de Juazeiro do Norte foi maior comparado com o número de aumento da população do município de Jati, nesse período?

Solução. *Para chegar a esse número vamos precisar apenas das operações de subtração e divisão. Das informações apresentadas no enunciado, temos que de 2010 a 2021 a população do município de Juazeiro do Norte passou de 249.939 habitantes para 278.264 habitantes, ou seja, a população de Juazeiro do Norte teve um aumento de* $278.264 - 249.939 = 28.325$ *habitantes. Já a população do município de Jati passou de* 7.649 *para* 8.150, *ou seja, um aumento de* 401 *habitantes. Fazendo a divisão do au-*

mento da população do Município de Juazeiro do Norte pelo aumento da população do município de Jati, temos $28.325 = 70 \cdot 401 + 255$. *Portanto o número natural que pode representar o aumento da população do município de Juazeiro do Norte em relação ao aumento da população do município de Jati é o natural* 70, *pois note que não poderá ser* 71 *devido* $\frac{255}{401}$ *não representar um inteiro.*

2.1.2 Problemas propostos

Os problemas a seguir foram elaborados a fim de que os professores de matemática da educação básica usem como suporte em suas aulas para contextualização da matemática, em que abordam contextos da região do Cariri como a pecuária, meio de transportes, população, arrecadação financeira de evento esportivo, esporte e distância entre cidades. São problemas já conhecidos, mas com outros contextos, os elaborados aqui apresentam informações acerca do Cariri que poderão ser novas para os alunos e também que poderão despertar seu interesse devido os temas serem locais.

Problema 1. Segundo o Jornal Cariri o leite produzido no Cariri representa 9,4% da produção de leite estadual. O Cariri é privilegiado em relação ao solo e à água, que favorecem tanto a pecuária como a pecuária leiteira. Um professor, que integra a coordenação do curso de Bacharelado em Zootecnia no IFCE, aponta que Mauriti possui o maior rebanho leiteiro do Cariri, com aproximadamente 5.320 vacas de ordenhadas e sete milhões de litros por ano. Junto ao município, Várzea Alegre, Lavras da Mangabeira e Brejo Santo integram o grupo dos maiores produtores de leite. Supondo que do rebanho de 5.320 vacas ordenhadas no município de Mauriri, 3.500 tiveram lactação em um determinado ano, porém o período de lactação das vacas foi de 200 dias. Então qual a média diária de litros de leite por vaca, considerando que todas tenham a mesma produção diária de leite e considerando apenas o período de lactação delas?

Problema 2. A ciclovia do Crajubar possui 17 quilômetros de extensão e liga os municípios de Crato, Juazeiro do Norte e Barbalha. A ciclovia possui faixas nos dois sentidos, são sete quilômetros ao longo da Avenida Padre Cícero (Crato – Juazeiro) e dez quilômetros pela Avenida Leão Sampaio (Juazeiro – Barbalha). A extensão da ciclovia é a maior do interior do Ceará e a segunda maior do Estado, ficando atrás somente da ciclovia em Fortaleza. Uma pessoa que mora em Juazeiro do Norte e usa a bicicleta como meio de transporte para ir ao trabalho, a mesma trabalha no Crato e em Barbalha em dias diferentes. Se em um determinado mês ela trabalhar 13 dias na cidade do Crato, mais 11 dias na cidade de Barbalha e a distância de onde mora ao Crato é de 7 quilômetros, quantos quilômetros essa pessoa percorrerá na ciclovia para suas idas e vindas ao trabalho neste mês?

Problema 3. Pelo Censo de 2000, a população do município de Brejo Santo-CE era de 38.484 habitantes. Pelo Censo em 2010, foi verificado que a população do mesmo município aumentou, passando a ser de 45.190 habitantes. Qual foi o aumento de habitantes do município na referida década?

Problema 4. Em um clássico entre Ceará e Icasa no estádio Castelão, 55.000 torcedores assistiram ao jogo. Se 10.000 torcedores pagam meia entrada no valor de R$ 15,00, 25.000 torcedores pagaram R$ 30,00 e os demais pagaram a R$ 80,00 pelo ingresso, qual foi a arrecadação total do clássico?

Problema 5. O campeonato cearense de futebol de 2022 reuniu 8 times na primeira fase e os dois melhores times foram para a semifinal da competição. Sabendo que cada vitória (V) corresponde a 3 pontos, o empate (E) a 1 ponto e a derrota (0) a 0 pontos. Analisando a Tabela 2.1, qual foram as pontuações do Caucaia e do Crato?

Tabela 2.1: Tabela final do campeonato cearense 2022

Class	Equipes	Pts	J	V	E	D
1	Caucaia		14	8	6	0
2	Ferroviário	26	14	6	8	0
3	Pacajus	20	14	5	5	4
4	Iguatu	19	14	5	4	5
5	Maracanã- CE	17	14	3	8	3
6	Atlético Cearense	13	14	3	4	7
7	Icasa	12	14	3	7	4
8	Crato		14	1	2	11

Fonte: Globo Esporte

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *10l/dia.* ***2)*** $[(13\cdot 7)+(11\cdot 10)] = 2[91+110] = 2\cdot 201 = 402$ *km.* ***3)*** $45190-38484 = 6706$ *habitantes.* ***4)*** $10000\cdot 15+25000\cdot 30+20000\cdot 80 =$*R\$* $25000000,00$. ***5)*** *Caucaia, 30 pontos e Crato, 5 pontos.*

2.2 Números Racionais

Os racionais $\mathbb{Q}$ é definido por $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0\}$. A restrição $b \neq 0$ é necessária, pois $\frac{a}{b}$, divisão de a por b, só tem significado se b não for zero. Se $b = 1$, temos $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$, o que implica que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, logo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

As frações formam o conjunto $\mathbb{Q}$. Na adição e subtração de frações com um mesmo denominador, temos que a soma ou a diferença de duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a soma ou diferença dos numeradores das duas frações e cujo denominador é o denominador comum das duas frações, ou seja, $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{b} = \dfrac{a \pm c}{b}$ com a, b, $c \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Na adição e subtração de frações com denominadores distintos, temos que para calcular a soma ou a diferença entre duas frações com denominadores distintos, começamos encontrando duas frações que tenham um mesmo denominador e sejam equivalentes às frações dadas, em seguida, calculamos a soma ou a diferença entre essas frações, ou seja, $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$, com a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Na multiplicação de frações, o produto de duas frações é a fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas, ou seja, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ com a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, $d \neq 0$. Para dividir uma fração por outra, basta multiplicar a primeira fração pela inversa da segunda, ou seja, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, com a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Notemos que todo número raional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Dado um número racional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ sua representação decimal é obtida dividindo-se a por b, podendo resultar em decimais exatos, finitos, quando o denominador contiver apenas os fatores primos de 10 (2 e/ou 5). Por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0,5$. Decimais periódicos ou dízimas periódicas, infinitas, quando o denominador da fração na forma irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, ou seja, nas dízimas periódicas simples, onde o período apresenta-se logo após a vírgula. Como exemplo temos $\frac{5}{9} = \frac{5}{3 \cdot 3} = 0,555... = 0,\bar{5}$ (período igual a 5) e nas dízimas periódicas compostas onde entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica, por exemplo, $\frac{1}{45} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} = 0,0222222... = 0,0\bar{2}$ (período igual a 2 e parte não periódica igual a 0).

2.2.1 Problemas resolvidos

Os problemas a seguir abordam elementos relacionados a mobilidade na cidade de Juazeiro do Norte e ao futebol. Esses problemas são clássicos, mas que aqui apresentam contextos da região local do Cariri. Para as soluções dos mesmos são utilizadas as operações entre frações e números decimais. Os problemas poderão ser usados nas aulas de matemática quando os professores forem abordar o conteúdo com os números racionais, $\mathbb{Q}$.

Problema 1. O valor de uma corrida de táxi em Juazeiro do Norte é composto pela soma de uma tarifa inicial de R$ 2,30 mais R$ 0,20 por minuto e R$ 1,50 por quilômetro. Suponha que uma pessoa está no Hospital Regional do Cariri, localizado em Juazeiro do Norte, a mesma pretende ir de táxi ao Aeroporto Orlando Bezerra de Menezes que fica a 9,4 km de distância com uma duração de 18 minutos de táxi. Qual será o valor a ser pago por essa corrida?

Solução. *Para a solução do problema devemos saber que na multiplicação com decimais devemos efetuar o produto como se fossem números inteiros, ou seja, desconsiderando as vírgulas, depois de efetuado o produto precisamos colocar a vírgula. Agora devemos somar o número de casas decimais de cada número do produto, depois colocamos a vírgula contando o número de casas decimais da direita para esquerda igual a somas das casas decimais dos números multiplicados. Assim, os produtos são* $9,4 \cdot 1,50 = 14,10$ *e* $18 \cdot 0,2 = 3,60$. *Agora basta somar os resultados com 2,30, ou seja,* $14,10 + 3,60 + 2,30 = 20,00$. *Portanto, o valor a ser pago com a passagem será de R$ 20,00.*

Problema 2. O time do Icasa foi o quinto colocado no campeonato brasileiro de futebol da série B do ano de 2013. Durante esse ano, o clube fez uma campanha incrível, foram 38 jogos e o time do Icasa fez 59 pontos. Sabendo que cada vitória corresponde a 3 pontos, qual o aproveitamento do Icasa representado por um número decimal, considerando as três primeiras casas após a vírgula?

Solução. *Precisamos determinar o numerador e o denominador da fração que representa o aproveitamento do time do Icasa. A fração será composta pelo numerador que será o número de pontos somados pelo Icasa e pelo denominador que será o número total de pontos possíveis, caso o Icasa tivesse ganho todas as 38 partidas, ou seja,* $3 \cdot 38 = 144$. *Daí temos,* $\dfrac{59}{3 \cdot 38} = \dfrac{59}{114} \cong 0,517$. *E concluímos que o aproveitamento foi de* $0,517$. *Seu aproveitamento seria de* $1,0$, *se tivesse ganho todas as partidas* *disputadas.*

2.2.2 Problemas propostos

Os problemas propostos aqui apresentam informações sobre a região do Cariri, uns de forma bem informativo e outros com elementos bem particulares da região. São problemas que falam sobre comércio, resultados de olimpíadas, planejamento financeiro, hidrografia e assuntos estudantis. Os mesmos poderão ser usados nas aulas de matemática para contextualização da mesma, quando o conteúdo estudado for o números racionais, $\mathbb{Q}$.

Problema 1. Veja essa informação de um site: "A partir desta terça-feira, 20 de agosto de 2019, o tempo máximo para não pagar estacionamento no Cariri Garden Shopping diminui para 20 minutos. Antes disso, o cliente poderia permanecer por até meia hora sem a cobrança da taxa. Segunda a assessoria de imprensa do Garden, a diminuição veio através de determinação de liminar judicial e teve como referência a prática no Estado do Ceará. De segunda a quarta-feira, no horário das 12h às 14h, os clientes que consumirem um valor mínimo de R$ 20,00 nas lojas de alimentação do Cariri Garden tem desconto de 50% no estacionamento para esse período, ficando a tarifa de carro R$ 4,00 e a de motos R$ 1,75. Para isso, o consumidor deve apresentar no guichê de pagamento o cupom fiscal da compra". Uma pessoa estacionou seu carro de segunda-feira a sexta-feira nesse local, no horário das 12h às 14h, a pessoa fez compras em dias diferentes nos valores de R$ 20,15, R$ 21,50, R$ 23,80, R$ 32,40 e R$ 33,65, nas lojas de alimentação do Cariri Garden. Qual o valor que essa pessoa gastou, durante a semana, com o estacionamento e compras nas lojas de alimentação?

Problema 2. Os estudantes das escolas públicas dos municípios de Barbalha, Crato e Juazeiro do Norte ganharam 12 das 25 medalhas dos estudantes caririenses na 17ª OBMEP, que aconteceu em 2022, entre as de ouro, prata e bronze. Os estudantes dos municípios de Barbalha e do Crato conseguiram $1/5$ do total de medalhas dos estudantes caririenses. Qual foi o número de medalhas dos estudantes de Juazeiro do Norte?

Problema 3. Um cidadão residente na cidade de Penaforte, no sul do estado do Ceará, cortada pela BR 116 e que faz divisa com o estado de Pernambuco, irá fazer uma viagem a Fortaleza. Pensando nas despesas de transporte, onde o mesmo irá no seu carro particular, o qual faz média de 12 km por litro de gasolina e 10 km por litro de álcool. O cidadão verificou que a distância de sua residência a cidade de Fortaleza era de 540 km, que o preço do litro da gasolina na sua cidade era de R$ 5,40 e do álcool de R$ 4,90, ele também verificou que o preço do litro de gasolina em Fortaleza estava custando R$ 5,10 por litro e o preço do álcool R$ 4,60, o litro. O cidadão irá esvaziar o tanque do carro e abastecer com combustível apenas o necessário para ida, na volta irá fazer o mesmo. Qual a forma mais econômica que o cidadão deve escolher?

Problema 4. A bacia do Rio Salgado apresenta uma capacidade de acumulação de águas superficiais de 447,4 milhões de metros cúbicos, num total de 14 açudes públicos gerenciados pela COGERH, perenizando 270 km de trecho de rio. Os Municípios que compõem a Bacia do Rio Salgado, são: Abaiara, Aurora, Baixio, Barbalha, Barro, Brejo Santo, Caririaçu, Cedro, Crato, Granjeiro, Icó, Ipaumirim, Jardim, Jati, Juazeiro do Norte, Lavras da Mangabeira, Mauriti, Milagres, Missão Velha, Penaforte, Porteiras, Umari e Várzea Alegre. Supondo que o município de Lavras da Mangabeira tem $\frac{1}{5}$ do volume de águas superficiais, qual é o volume de águas superficiais desse município?

Problema 5. Na Universidade Regional do Cariri, a divisão de assuntos desportivos é responsável pelo planejamento e execução dos projetos desportivos, cuja participação é aberta para alunos de todos os cursos. Em um grupo de 100 alunos da Universidade Regional do Cariri, $\frac{1}{4}$ praticam futsal, $\frac{3}{5}$ praticam voleibol, $\frac{1}{10}$ praticam natação. Diante dessas informações, qual a fração que representa o número de alunos que não participam de nenhum desses esportes?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *A pessoa gastou R$ 163,50.* ***2)*** *7 medalhas.* ***3)*** *Será mais vantajoso, se na ida e volta usar a gasolina, pois gastará R$ 472,50, no álcool gastaria R$ 513,00.* ***4)*** *89,48 milhões de metros cúbicos.* ***5)*** *5 alunos não participam de nenhum desses esportes.*

2.3 Razão e proporção

A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$ é o resultado da divisão de a por b, ou seja, $\frac{a}{b}$. A razão entre a e b também pode ser simbolizada por $a \div b$ ou $a : b$. As razões são bastante utilizadas em problemas de vazão, ou seja, volume dividido pelo tempo, de densidade, ou seja, massa dividido pelo volume, de velocidade média, ou seja, distância percorrida dividido pelo tempo gasto, de escala, ou seja, comprimento do desenho dividido pelo comprimento real, de densidade demográfica, ou seja, número de habitantes da região dividido pela área da região, de concorrência, ou seja, número de candidatos inscritos dividido pelo número de vagas ofertadas.

A porcentagem é uma razão onde o denominador é igual a 100 e o símbolo da porcentagem é %. A porcentagem de 0% indica nada de algo e 100% indicam a totalidade.

Como a porcentagem é uma razão de um valor p dividido por 100, se p for $0 \leq p \leq 100$, a fração ou o decimal correspondente a essa porcentagem estará no intervalo de [0,1]. Se p for $p > 100$, a fração ou o decimal correspondente a essa porcentagem será maior que 1. Ou seja, podemos ter porcentagem maiores que 100%, isso acontece quando fazemos comparações de crescimento das grandezas em análises. Para calcular uma porcentagem $\frac{p}{100}$ de um valor x procedemos da seguinte forma, $\frac{p}{100} \cdot x = \frac{p \cdot x}{100}$.

Outras formas de calcular a porcentagem é determinar o decimal correspondente da fração $\dfrac{p}{100}$ e depois multiplicar o decimal obtido por x. Também por regra de três, ou seja, usando proporção. Assim, 100% corresponde a y e p a porcentagem que você quer determinar corresponde a x, para isso basta fazer a proporção (igualdade de razões) $\dfrac{p}{100} = \dfrac{x}{y}$. Resolvendo, temos $p = \dfrac{100x}{y}$, onde p, x e y são inteiros positivos.

2.3.1 Problemas resolvidos

Os problemas apresentados aqui são de densidade demográfica, concorrência na universidade, educação, economia e saúde com temas locais e para as soluções usamos operações sobre os números racionais, $\mathbb{Q}$.

Problema 1. A Região Metropolitana do Cariri foi criada tanto para reduzir as disparidades econômicas e sociais entre a capital e o interior, como para minimizar o desenvolvimento desigual do triângulo CRAJUBAR em relação aos municípios vizinhos e foi idealizada pelo governo estadual visando a criação de um novo pólo de desenvolvimento socioeconômico que pudesse dividir com a Região Metropolitana de Fortaleza a atração de investimentos e ampliar a qualidade de vida de sua população. O Cariri se constituiu como região metropolitana em virtude de ser a segunda região urbana mais expressiva do estado, dada com a conurbação formada pelos municípios de Crato, Juazeiro do Norte e Barbalha, denominada de CRAJUBAR. Essa região metropolitana é, atualmente, composta por nove municípios: Juazeiro do Norte, Crato, Barbalha, Jardim, Missão Velha, Caririaçu, Farias Brito, Nova Olinda e Santana do Cariri. A RM do Cariri possui uma área total de $5.456,01\ Km^2$ (IBGE, 2010)

Fonte: https://www.cidades.ce.gov.br/regiao-metropolitana-do-cariri/

Segundo estimativas do IBGE, em 2019 a população estimada dessa região é de 609 358 habitantes e tem uma área de 5.456 quilômetros quadrados. Diante dessas informações e sabendo que a densidade demográfica de uma região é a razão do número de habitantes por quilômetros quadrados, então qual é a estimativa da densidade demográfica da região metropolitana do Cariri?

Solução. *Como a densidade demográfica é a divisão da população pela área quadrada, teremos* $\frac{609.358}{5.456} = 111,68$. *Portanto, temos* $111,68$ *habitantes por quilômetro quadrado.*

Problema 2. No processo seletivo 2022.2 da Universidade Regional do Cariri o número de inscritos para o curso de matemática do campus Juazeiro do Norte foi de 6 vagas para 2 inscritos na concorrência Escola Pública (E.P.), de 14 vagas para 3 inscritos para Escola Pública que se autodeclararem pretos, pardos ou indígenas (E.P.A.) e para Livre Concorrência (L.C.) foi de 12 vagas para 18 inscritos. Sabendo que x é o número da concorrência para inscritos em E.P, y para E.P.A. e z para L.C. qual das alternativas abaixo está correta para os valores de x, y e z?

a) $z < x < y$;

b) $z < y < x$;

c) $z < x < y$;

d) $y < x < z$;

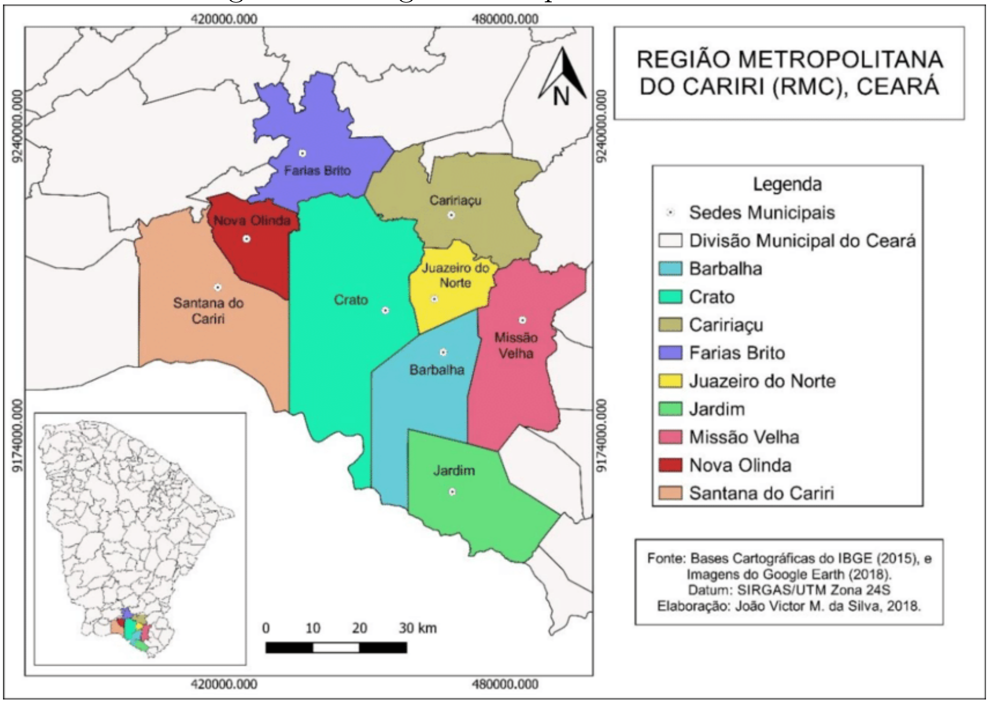
e) $z = y < z$.

Solução. *Temos para as vagas de (E.P.) que* $\frac{2}{6}$, *dividindo o numerador e o denominador por 2 ficamos com* $\frac{1}{3}$. *Para as vagas de (E.P.A.) temos* $\frac{3}{14}$. *Para as vagas de (L.C.) temos* $\frac{12}{18}$, *dividindo o numerador e o denominador por 6 ficamos com* $\frac{2}{3}$. *Portando,* $\frac{2}{3} > \frac{1}{3} > \frac{3}{14}$, *daí* $z < x < y$.

Problema 3. A região metropolitana do Cariri é, atualmente, composta por nove municípios: Juazeiro do Norte, Crato, Barbalha, Jardim, Missão Velha, Caririaçu, Farias Brito, Nova Olinda e Santana do Cariri. Na Figura 2.1 temos o mapa dessa região.

Suponha que um aluno, na aula de matemática sobre escalas, quer saber a distância em linha reta entre os extremos Jardim-Farias Brito. O aluno fez a medição com uma

Figura 2.1: Região metropolitana do Cariri



Disponívem em: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Mapa-Politico-da-Regiao-Metropolitana-do-Cariri-RMC_fig1_336217761

régua e deu 10 cm de distância entre as sedes. Observando a escala da Figura 2.1, qual a distância real em linha reta entre as sedes desses municípios?

Solução. *Observe que a escala do desenho está com traços de 10 em 10 quilômetros, isso significa que a cada centímetro no desenho a distância real é de 10 km, ou seja, a escala é 1:1.000.000, daí basta multiplicar* $10 \cdot 10 = 100$ *km. Portanto, a distância entre as sedes dos municípios citados é de 100 quilômetros.*

Problema 4. O produto Interno Bruto (PIB) do Ceará segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2020 foi de R$ 166.915 milhões e o de Juazeiro do Norte foi de R$ 4.794 milhões. Qual o porcentual que representa aproximadamente o PIB do município de Juazeiro do Norte comparado ao do Estado do Ceará?

Solução. *Neste tipo de situação podemos usar a regra de três, onde* 100% *é o PIB do Ceará e o PIB de Juazeiro do Norte representa quem queremos encontrar, ou melhor, a* *incógnita que pode ser* p *ou* x*. Porém um bom modo de fazer é encontrar o decimal de* $\dfrac{4.794}{166.915}$*, ou seja,* $\dfrac{4.794}{166.915} \cong 0,0287$*. Agora basta deslocar a vírgula duas casas para a direita. Portanto a porcentagem que representa aproximadamente o PIB do Município de Juazeiro do Norte é* $2,87\%$*.*

Problema 5. Segundo o Hemoce, a média de doações de sangue da população cearense é de $2,21\%$ e no município do Crato, 55% dos doadores de sangue doam mais de duas vezes por ano. Sabendo que a população do município do Crato é de 133.913 habitantes, responda: (a) qual o número estimado de doadores de sangue do município do Crato, com base na média de doações da população cearense? (b) qual o número estimado de doadores de sangue do município do Crato que doam mais de duas vezes por ano, com base na média de doações da população cearense?

Solução. *Para o item (a) como a população do município do Crato é de 133.913 habitantes e que* $2,21\%$ *da população cearense são doadoras de sangue, pois devemos nos basear por esse dado, daí basta determinar* $2,21\%$ *de 133.913, ou seja,* $133.913 \cdot \dfrac{2,21}{100} \cong \dfrac{295.947,7}{100} \cong 2.959$*. Portanto, a população aproximada de doadores do município do Crato é de 2.959. Para o item (b) sabemos que* 55% *da população doadora de sangue do município do Crato, que é de aproximadamente 2.959, doam mais de duas vezes por ano. Assim, temos que* $2.959 \cdot \dfrac{55}{100} = \dfrac{162.745}{100} \cong 1.627$*. Portanto, temos aproximadamente 1.627 pessoas doadoras no Crato que doam mais de duas vezes ao ano.*

2.3.2 Problemas propostos

A seguir são apresentados problemas envolvendo razões entre escalas, concorrências de vagas em vestibular, densidade demográfica, vegetação, mortalidade infantil e população. Todos os problemas são voltados a elementos da região do Cariri.

Problema 1. Em Juazeiro do Norte, os devotos de Padre Cícero têm o costume de visitar a Estátua do Padre Cícero e muitas das vezes levam lembrancinhas, como réplicas da estátua. A Figura 2.2 mostra a imagem da Estátua de Padre Cícero.

Figura 2.2: Estátua de Padre Cícero

Fonte: Fábio Lima

Em uma loja nas dependências do Horto vende-se réplicas da estátua. Se uma das réplicas tem escala de 1:300 e sua altura é de 9 centímetros, então quantos metros mede a altura da Estátua de Padre Cícero?

Problema 2. O edifício Spazio Bezerra de Menezes localizado em Juazeiro do Norte é o mais alto do interior do Ceará. Para atrair as vendas de apartamentos a empresa responsável pelas vendas exibe uma maquete de 1,9m. Na Figura 2.3, temos a imagem do edifício.

Sabendo que a escala, isto é, a razão entre as dimensões da maquete e do que ela representa na realidade, também que a altura do edifício é de 95 metros, qual a escala dessa maquete?

Problema 3. No site do Tribunal Superior Eleitoral, podemos consultar todos os dados referentes às eleições e candidatos. Um eleitor cearense fez uma pesquisa com relação aos cargos das eleições 2022 do seu estado, no site, e observou as informações da Tabela 2.2. O eleitor não deu muita atenção às concorrências x e y que estavam na última coluna. Caso ele quisesse saber essas concorrências, quais seriam os valores para x e y?

Figura 2.3: Edifício Spazio

Disponívem em:
https://www.blogdolauriberto.com/2018/11/predio-mais-alto-do-ceara-sera-entregue.html. Acesso em 29/12/20222.

Tabela 2.2: Quantidade de candidatos cearenses as Eleições 2022

CARGO	**QUANTIDADE**	**VAGAS**	**CONCORRÊNCIA**
Governador	6	1	6
Senador	7	1	7
Deputado Federal	414	22	x
Deputado Estadual	573	46	y

Fonte: Tribunal Superior Eleitoral (TSE)

Problema 4. Segundo o IBGE, o Ceará atingiu 9.240.580 habitantes em 2021. Sabendo que a densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes por quilômetros quadrados, que o território do Estado do Ceará é de 148.886 km^2, qual é a densidade demográfica do Estado cearense, aproximadamente?

Problema 5. Segundo o Instituto de Pesquisa e Estratégia Econômica do Ceará (IPECE), a Macrorregião do Cariri/Centro Sul é composta de 42 municípios, que ocupam uma área de 28.879,9 km^2 ou $19,4\%$ do território cearense, apresentando uma característica singular, vista pela abrangência de três importantes territórios Cariri, Centro Sul e Vale do Salgado. Com base nessas informações, qual o valor aproximadamente da área do território cearense?

Problema 6. A estátua de Santo Antônio, Figura 2.4, construída na cidade de Barbalha-CE tem 30 metros de altura, já a estátua de Padre Cícero localizada na cidade de Juazeiro do Norte tem 27 metros de altura e a de Nossa Senhora de Fátima localizada no Crato tem 45 metros de altura.

Figura 2.4: Estátua de Santo Antônio em Barbalha

Disponível em: https://revistacariri.com.br. Acesso em 29/12/2022.

(a) Qual o percentual da altura que a estátua de Santo Antônio superou a estátua de Padre Cícero? (b) Qual o percentual da altura que a estátua de Santo Antônio precisaria para se tornar mais alta que a de Nossa Senhora de Fátima?

Problema 7. Em 2020, o Ceará registrou uma taxa de mortalidade infantil igual a 11,60 por mil nascidos vivos, segundo o IBGE, já no município de Juazeiro do Norte em 2020 a taxa de mortalidade infantil foi de 13,56 por mil nascidos vivos. Diante dessas informações e considerando as situações a seguir, responda: (a) Se fosse para escrever esses números de mortalidade infantil em porcentagem, quais seriam essas porcentagens? (b) qual foi a diferença de percentual comparando a porcentagem do Estado do Ceará com a do município de Juazeiro do Norte?

Problema 8. A região metropolitana do Cariri é composta por 9 municípios, que ocupam uma área de 5.460 km^2. Dentre esses municípios o Crato tem 1138,15 km^2 e Juazeiro do Norte com 258,78 km^2, de acordo com dados do IBGE. Comparando os territórios desses dois municípios, podemos afirmar que:

a) o território do município do Crato é, aproximadamente, 4,4% maior que o de Juazeiro do Norte.

b) o território do município do Crato é, aproximadamente, 39,8% maior que o de Juazeiro do Norte;.

c) o território do município do Crato é, aproximadamente, 49,98% maior que o de Juazeiro do Norte.

d) o território do município do Crato é, aproximadamente, 239,8% maior que o de Juazeiro do Norte.

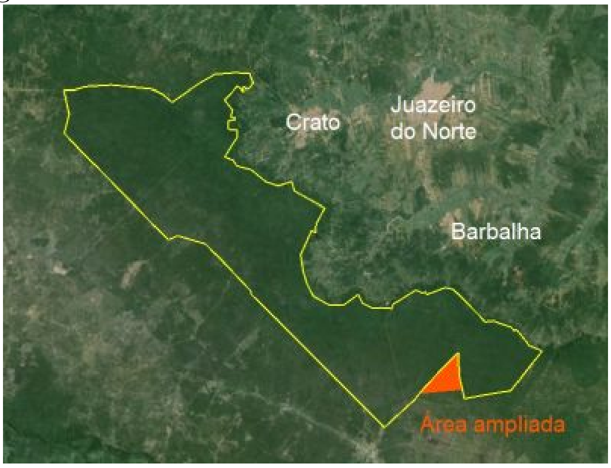
e) o território do município do Crato é, aproximadamente, 339,8% maior que o de Juazeiro do Norte.

Problema 9. Segundo a Revista Geográfica de América Central Número Especial EGAL, 2011- Costa Rica II Semestre 2011 pp. 1-10, A Floresta Nacional do Araripe – FLONA/ARARIPE foi a primeira a ser criada no Brasil, através do Decreto Nº 9.226, no dia 02 de maio de 1946. Localiza-se no topo da Chapada do Araripe, centro da Região Nordeste do Brasil, no extremo sul do estado do Ceará, abrangendo parte dos municípios de Santana do Cariri, Crato, Barbalha, Missão Velha e Jardim. Possui uma área de 38.262 hectares e relevo tabular, variando entre 760 a 920 metros. Apresenta média pluviométrica de 1.000 mm por ano e temperatura que varia de 15 a 25º C. Seu solo é originário do período Cretáceo, predominando o tipo latossolo.

A vegetação da Floresta compõe-se de: Floresta úmida semiperenifólia $(10,95\%)$; transição floresta úmida/cerrado $(48,53\%)$; cerrado $(27,49\%)$; carrasco $(1,52\%)$; e floresta úmida degradada pelo fogo $(11,52\%)$. Diante das informações apresentadas, qual o percentual composto pela vegetação de floresta úmida semiperenifólia, transição floresta úmida/cerrado?

Problema 10. Em 2021, o Ceará atingiu 9.240.580 habitantes, o que representa cres-

Figura 2.5: Área da Floresta Nacional do Araripe



DisponíveL em: https://www.wikiaves.com.br/wiki/areas:fn_do_araripe-apodi:inicio. Acesso em 29/12/2022.

cimento de $3,77\%$ em relação a 2015, de acordo com estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O Estado é o terceiro mais populoso do Nordeste, detendo uma taxa de participação na região correspondente a $16,02\%$, e o oitavo do país, responsável por $4,33\%$ da população brasileira. Quanto à distribuição populacional nos municípios, Fortaleza concentra o maior contingente, com 2.703.391 habitantes $(29,26\%)$, vindo em seguida os municípios de Caucaia, com 368.918, ou o equivalente a 3,99%, Maracanaú, com 230.986 $(2,50\%)$ e Sobral, com 212.437 $(2,30\%)$. Sabendo que Juazeiro do Norte tem 278.264 habitantes, segundo o IBGE, qual a taxa, aproximadamente, que o município de Juazeiro do Norte representa?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *27 metros.* ***2)*** $1:300$. ***3)*** $x = 18,818181\ldots; y \cong 12,45$. ***4)*** *Aproximadamente,* $12,45$. ***5)*** ***6)*** ***(a)*** *Aproximadamente,* $11,11\%$; ***(b)*** 50%. ***7)*** ***(a)*** $1,160\%$, *Ceará e* $1,356\%$ *Juazeiro do Norte;* ***(b)*** $0,116\%$. ***8)*** *(e).* ***9)*** $9,48\%$. ***10)*** 3%.

3 Tópicos de Geometria

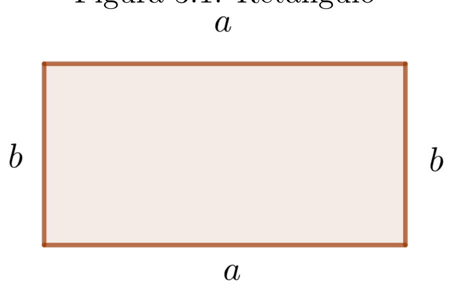
A seguir apresentamos de forma resumida as principais figuras planas que são estudadas no Ensino Fundamental e Médio, com suas fórmulas para os cálculos de perímetros e de áreas.

3.1 Perímetros e Áreas

Perímetro é a soma das medidas dos lados de uma figura plana. Área é todo o espaço de uma superfície.

O retângulo, veja o retângulo na Figura 3.1, é um quadrilátero que tem lados opostos iguais e seus ângulos são de 90^o. Usamos a fórmula, $S = a \cdot b$ para o cálculo da área do retângulo, onde a e b são as medidas dos lados. Para o perímetro (P) basta fazer, $P = 2(a + b)$.

Figura 3.1: Retângulo

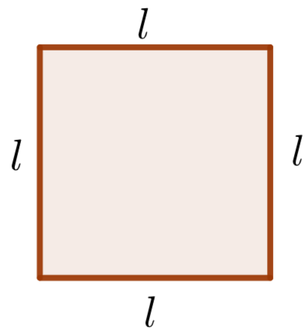


Fonte: Autoria própria

O quadrado é um quadrilátero, veja o quadrado na Figura 3.2, que tem todos os lados iguais e seus ângulos são de 90^o. Usamos a fórmula $S = l^2$, determinamos o valor da área do quadrado, onde l é a medidas do lado. Para o perímetro (P) basta fazer, $P = 4l$.

O paralelogramo é um quadrilátero, veja o paralelogramo na Figura 3.3, que tem lados opostos paralelos, onde a e b são as medidas dos lados, com b sendo a base e h a

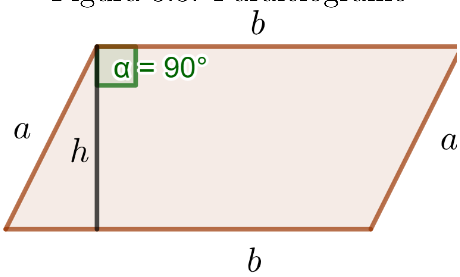
Figura 3.2: Quadrado



Fonte: Autoria própria

medida da altura. Usamos a fórmula, $S = b \cdot h$ para o cálculo da área do paralelogramo. Para o perímetro (P) basta fazer, $P = 2(a + b)$.

Figura 3.3: Paralelogramo

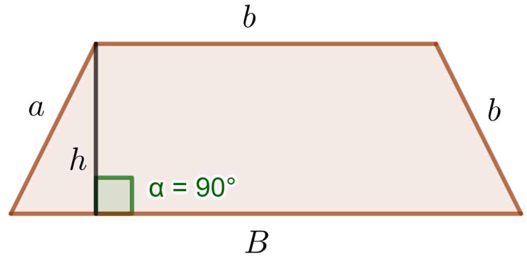


Fonte: Autoria própria

O trapézio é um quadrilátero, veja o trapézio na Figura 3.4, que tem dois lados opostos paralelos e dois lados não paralelos. Usamos a fórmula, $S = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ para o cálculo da área do trapézio, onde B é a medida da base maior, b é a medida da base menor e h é a medida da altura. Para determinar o perímetro (P) do trapézio abaixo, basta somar as medidas dos lados, ou seja, $2a + B + b$.

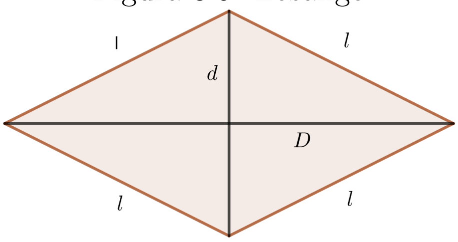
O losango, veja o mesmo na Figura 3.5, é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e com seus lados opostos paralelos, o losango tem seus ângulos opostos iguais, podendo um quadrado ser considerado um losango. Usamos a fórmula, $S = \dfrac{D \cdot d}{2}$ para o cálculo da área do losango, onde D é a medida da diagonal maior e d é a medida da diagonal menor. Para determinar o perímetro basta fazer, $4 \cdot l$.

Figura 3.4: Trapézio



Fonte: Autoria própria

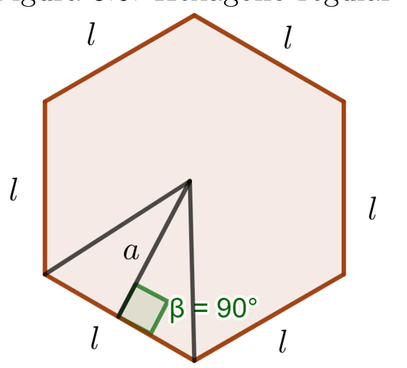
Figura 3.5: Losango



Fonte: Autoria própria

O Polígono regular possui todos os lados iguais. Veja na Figura 3.6 um hexágono regular, l é a medida do lado do polígono hexagonal, a é a medida do apótema do polígono. O apótema é o segmento de reta que sai do centro O do polígono e vai até o ponto médio de um dos lados, formando com este um ângulo reto. A área de um polígono regular, pode ser determinada por $S = \dfrac{l \cdot a \cdot n}{2}$, onde n é o número de lados do polígono. Para determinar o perímetro (P) basta fazer, $n \cdot l$.

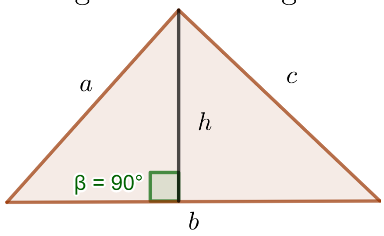
Figura 3.6: Hexágono regular



Fonte: Autoria própria

Em um triângulo qualquer, sua área pode ser determinada por, $S = b \cdot h$, para determinar o perímetro (P) basta somar as medidas dos lados, ou seja, $P = a + b + c$, veja na Figura 3.7 o triângulo e suas medidas, onde a, b e c são as medidas dos lados, em que b é a medida da base e h é a medida da altura.

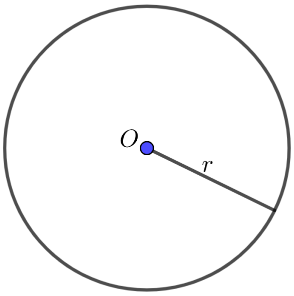
Figura 3.7: Triângulo



Fonte: Autoria própria

O círculo é a união de uma circunferência com todos os pontos internos a ela. Na Figura 3.8 temos o círculo, r é a medida do raio e O é o vértice do centro.

Figura 3.8: Círculo



Fonte: Autoria própria

Para determinar a área do círculo, temos, $S = \pi \cdot r^2$. Para determinar o perímetro (P), basta fazer, $P = 2 \cdot \pi \cdot r$.

3.1.1 Problemas resolvidos

Os problemas com suas soluções apresentados aqui, trata-se de problemas envolvendo perímetros e áreas dos gramados dos estádios de futebol da região caririense, que abordam os conteúdos de perímetros e áreas.

Problema 1. O Estádio Municipal Governador Virgílio Távora, popularmente conhecido como Mirandão, localiza-se no bairro do Mirandão, no município do Crato-CE, tendo capacidade para 5000 espectadores. O gramado onde fica o campo de futebol é um retângulo de $(10x + 5)$ metros de comprimento por $(3x + 40)$ metros de largura. Sabendo que o perímetro do campo de futebol é de 350 metros, quais são as medidas do comprimento e da largura?

Solução. *Para solução devemos multiplicarmos o comprimento e largura por 2, ou seja, teremos*

$$\begin{aligned} 2[(10x+5)+(3x+40)] &= 2[10x+3x+5+40] \\ &= 2[13x+45] \\ &= 26x+90 \\ &= 350. \end{aligned}$$

Logo,

$$26x = 350 - 90 \Rightarrow 26x = 260 \Rightarrow x = \frac{260}{26} \Rightarrow x = 10.$$

Portanto, a medida do comprimento é de $105m$ *e a medida da largura é de* $70m$.

Problema 2. O Estádio Mauro Sampaio (o Romeirão) localizado em Juazeiro do Norte-CE é um dos estádios mais moderno do Brasil e o mais moderno do interior, segundo seus administradores. Seu gramado conta com dimensões de 105 metros de comprimento por 68 metros de largura. Os administradores do estádio precisam sempre que necessário adubar esse gramado. Os administradores compram pacotes de adubos, onde 1 pacote aduba 100 metros quadrados. Qual a quantidade mínima de pacotes que são necessários comprar para adubar esse gramado?

Solução. *A área do gramado como é um retângulo será dada por* $S = 105 \cdot 68 = 7140$ m^2. *Agora dividindo essa área por 200, temos* $\frac{7140}{200} = 35,7$. *Portanto, o número* *mínimo de pacotes de adubo a serem comprados deve ser de 36.*

3.1.2 Problemas propostos

Os problemas apresentados aqui são voltados mais para a parte cultural, como festejos, religião e pontos turísticos da região do Cariri e que tratam de perímetros e áreas de algumas figuras planas, como veremos adiante.

Problema 1. A Expocrato, oficialmente Exposição Centro Nordestina de Animais e Produtos Derivados, é o maior evento agropecuário do norte-nordeste, com nove dias de duração, realizado anualmente, no mês de julho, no Parque de Exposição Pedro Felício Cavalcanti, na cidade do Crato-CE. Constitui-se basicamente de uma feira agropecuária, com desfile e leilão de animais. Durante o evento, são vendidas bebidas e comidas típicas e apresentados espetáculos musicais. Além disso tudo, sempre tem a roda gigante como presença certa, ela conta com 26 metros de altura do solo ao ponto mais alto e um raio de 11 metros. Na Figura 3.9 temos a imagem da roda gigante.

Figura 3.9: Roda gigante na Expocrato

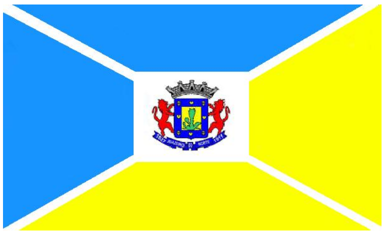
Fonte: Diário do Nordeste

Um funcionário da empresa responsável pela montagem da estrutura precisa saber o comprimento da circunferência dessa roda gigante para ornamentar com fitas de leds. O funcionário tem apenas a informação do seu diâmetro além de conhecimentos sobre perímetro de circunferência, sabendo que o mesmo deve colocar cinco voltas de fitas de leds em torno do comprimento da circunferência da roda gigante, qual a quantidade em metros, aproximadamente, de fitas de leds que o funcionário deve colocar para fazer o serviço?

Problema 2. A metodologia para o plantio do gramado do Estádio Mauro Sampaio (o Romeirão) localizado em Juazeiro do Norte-CE foi utilizado o plantio em rolo, no qual o gramado é instalado através de bobinas de 0,75 m de largura e 20 m de comprimento. Esse sistema permite redução das emendas e maior velocidade de estabilização da grama, o que, consequentemente, proporciona que o gramado seja liberado para uso mais rapidamente. Se as dimensões da área do campo são 105 metros de comprimento por 68 metros de largura, quantas bobinas serão necessárias para o plantio, sabendo que poderá fazer recortes nas bobinas?

Problema 3. A prefeitura de Juazeiro do Norte vai adquirir novas bandeiras do município para colocar em alguns pontos estratégicos de sua cidade. Essas bandeiras têm medidas de 6 m por 3,5 m. A Figura 3.10 mostra a bandeira em questão, considerando os trapézios de cor azul, um tem base maior de 3,5m e altura de 1/3 do comprimento da bandeira, e o outro tem base maior de 6m e altura de 2/7 da largura da bandeira. Note também que temos trapézios opostos que são congruentes aos azuis, na cor amarela.

Figura 3.10: Bandeira do Município



Fonte: Wikipédia.org

Sabendo que o preço cobrado pela parte do tecido que tem os trapézios é de R$ 20,00, o metro quadrado, e o retângulo central do tecido tem um custo de R$ 30,00, o metro quadrado, desprezando a lista branca entre os trapézios, qual será o valor cobrado por cada bandeira comprada?

Problema 4. A estátua de Santo Antônio de Barbalha, localiza-se no ponto mais alto do bairro Alto da Alegria. O monumento, que veio para enriquecer as tradições religiosas do município, possui 26 metros de altura, contando com sua base, e conta com 10 mil metros quadrados de área urbanizada em seu entorno, segundo a Prefeitura Municipal. Considerando as seguintes situações, determine o que se pede: (a) se a área urbanizada fosse um quadrado, qual seria a medida do lado deste quadrado? (b) se a área urbanizada fosse um retângulo em que um lado medisse 50 m, qual seria a medida do outro lado deste retângulo?

Problema 5. O luzeiro do Nordeste, localizado em Juazeiro do Norte, foi inaugurado em 1º novembro de 2005, trata-se da maior torre do Nordeste brasileiro, com 113 metros de altura e mais de 250 toneladas de aço, sendo este monumento, idealizado pelo arquiteto Luiz Deusdará, e é uma homenagem aos milhares de romeiros que visitam Juazeiro do Norte. O Luzeiro da Fé ou Luzeiro do Cariri, está no caminho da Estátua do Padre Cícero, em frente à praça dos Romeiros. Veja Figura 3.11.

Figura 3.11: Luzeiro do Nordeste

Fonte: https://valdecyalves.blogspot.com

Essa torre tem base de metal enfiada no solo em seis pontos, formando assim um hexágono regular de lado medindo 20 metros. Para tornar um ambiente ainda mais agradável aos visitantes mais curiosos, seus responsáveis decidiram por um piso abaixo da torre, ou seja, a área interna das fixações dessa torre com o solo. Qual seria a área aproximada em metros quadrados abaixo dessa torre, formada pelo polígono citado?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *345,4 metros.* ***2)*** *476 bobinas.* ***3)*** *R$ 450,00* ***4) a)*** *100 metros de lados;* ***b)*** *200 metros o outros lado teria.* ***5)*** *Aproximadamente, 1038 metros quadrados.*

4 Tópicos de Equações

Os tópicos abordados aqui apresentam de forma resumida como determinar as soluções de equações do primeiro grau e de segundo grau, também são apresentadas resoluções de problemas, problemas propostos com suas respostas no final do capítulo, os quais poderão ser utilizados em salas de aulas pelos professores que atuam no Ensino Básico.

4.1 Equações do Primeiro Grau

Uma equação é uma igualdade onde não conhecemos pelo menos um termo, geralmente esse termo é representado por uma letra que chamamos de incógnita. Chamamos de primeiro membro a expressão que fica à esquerda da igualdade e a expressão que fica à direita da igualdade chamamos de segundo membro.

Uma equação do primeiro grau na incógnita x é toda equação da forma $ax + b = 0$, onde a e b são reais, com $a \neq 0$ e x é a incógnita. Quando chamamos de raiz ou zero da função polinomial do 1º grau estamos falando da solução da equação do 1º grau. Isso quer dizer que $f(x) = 0$ ou $ax + b = 0$. Referimos o leitor a ler [6] na página 79.

Para a solução de uma equação do 1º grau temos que $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{b}{a}$.

4.1.1 Problemas resolvidos

Nos problemas aseguir apresentamos dois problemas abordando o futebol local e as dimensões de um estádio de futebol em que tratam de equações do primeiro grau.

Problema 1. Na copa Fares Lopes de futebol em 2022, disputada entre os times do Pacajus, Maracanã, Floresta, Guarany de Sobral e Icasa, temos como resultado final a Tabela 4.1, onde apresenta apenas os gols marcados e os gols sofridos por cada time.

Por uma falha de edição, a Tabela 4.1 saiu sem os números de gols sofridos pelo Icasa e o Guarany de Sobral.

Tabela 4.1: Tabela de Gols marcados e sofridos

Times	**Gols marcador**	**Gols sofridos**
Pacajus	14	7
Maracanã	13	8
Icasa	11	–
Guarany de Sobral	4	–
Floresta	4	13

Fonte: Globo Esporte

Sabe-se que o time do Icasa sofreu dois gols a mais que o time do Guarani. Quantos gols sofreu o time do Icasa?

Solução. *Analisando primeiro a Tabela 4.1, percebemos que a quantidade de gols marcados é de 46 e a quantidade de gols sofridos deve ser a mesma de gols marcados. Daí, tomando x a quantidade de gols do time do Guarani e somando as quantidades dos demais, lembrando que a quantidade de gols marcada pelo Icasa é de $x+2$, pois sofreu dois gols a mais que o Guarani, teremos:*

$$x + (x + 2) + 7 + 8 + 13 = 46 \Rightarrow x + x + 2 + 28 = 46 \Rightarrow 2x = 46 - 30.$$

E segue que,

$$x = \frac{16}{2} \Rightarrow x = 8.$$

Portanto, como a quantidade de gols do Icasa foi de $x + 2$, então $8 + 2 = 10$ gols.

Problema 2. O Estádio Municipal Governador Virgílio Távora, popularmente conhecido como Mirandão, localiza-se no município do Crato-CE e tem capacidade para 5.000 espectadores. O gramado onde fica o campo de futebol é um retângulo de $(10x + 5)$ metros de comprimento por $(3x + 40)$ metros de largura. Sabendo que o perímetro do campo de futebol é de 350 metros, quais são essas medidas do comprimento e da largura?

Solução. *Como a região do campo é retângular, temos os dois lados maiores sendo o comprimento e os dois lados menores à largura. Sabendo, também, que o perímetro é a soma desses quatro lados, teremos:*

$$2\Big[(10x+5)+(3x+40)\Big] = 350 \Rightarrow \Big[20x+10+6x+80\Big] = 350 \Rightarrow 26x+90 = 350.$$

Daí, $26x = 350 - 90 \Rightarrow 26x = 260 \Rightarrow x = \dfrac{260}{26} \Rightarrow x = 10$. *Portanto, a largura é de* $3 \cdot 10 + 40 = 70$ *metros e o comprimento é de* $10 \cdot 10 + 105$ *metros.*

4.1.2 Problemas propostos

Neste capítulo, apresentamos problemas que podem ser aproveitados nas aulas de matemática que tratam de equações do primeiro grau e que abordam temas como tarifas de passagens em perímetros urbanos, temperaturas, altimetria e distâncias entre cidades da região caririense.

Problema 1. Uma passagem de táxi em Juazeiro do Norte é composta de uma taxa fixa no valor de R$ 2,30, por R$ 1,50 o quilômetro percorrido e mais R$ 0,20 por minutos. Sabendo que em uma passagem o valor cobrado foi de R$ 21,30 e gastou 20 minutos, qual foi o número de quilômetros percorridos?

Problema 2. Na cidade do Crato-Ce, em um período de cinco dias consecutivos, a temperatura mínima registrada diminuiu exatamente 1 °C por dia. A média das temperaturas mínimas nesse período foi de 28 °C. Quais foram as temperaturas mínimas registradas em cada um dos cinco dias?

Problema 3. Supondo que os 25 jogadores do Time do Icasa têm uma média de altura de 1,79 metros e sabendo que irá contratar outro jogador que não sabemos sua altura, qual deverá ser a altura do novo jogador para que a média das alturas dos jogadores do Icasa passe a ser 1,80 metros? (A média citada é a média aritmética que é a soma das idades dos jogadores dividida pelo número de jogadores).

Problema 4. Uma função do primeiro grau que pode representar a altimetria da Chapada Nacional do Araripe em alguns pontos de marcações em que varia de 840m a 930m é $f(x) = 5x + 840$, onde $f(x)$ representa a altimetria que varia de acordo com esses pontos de marcações distribuídos pela Chapada e x representa a quantidade de pontos de marcações. O ponto número 1 da marcação é o primeiro, o ponto número 2 é o segundo e assim por diante. Quantos pontos de marcações temos de acordo com a altimetria máxima e a função dada?

Problema 5. A distância da cidade de Penaforte-CE, localizada mais ao Sul do Ceará e que faz fronteira com o Estado de Pernambuco, está a $119,1$ km de Juazeiro do Norte-CE. Sabendo que saindo de Penaforte à Juazeiro do Norte, temos que somar as distâncias de Penaforte a Jati que tem $(5x + 0,4)$ km, de Jati a Brejo Santo com $(6x + 1)$ km, de Brejo Santo à Missão Velha com $(10x + 0,1)$ km, de Missão Velha à Barbalha com $(5x + 1,5)$ km e de Barbalha a Juazeiro do Norte que é de $(3x + 0,1)$ km. Qual é o valor de x nessa situação?

Problema 6. A distância de um percurso de Jati a Brejo Santo tem 63 quilômetros a menos que o percurso de Jati a Juazeiro do Norte. Se a soma das distâncias dessas cidades a Jati é igual a 113 quilômetros, qual a distância de Jati a Juazeiro do Norte, em quilômetros?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *10 quilômetros.* ***2)*** *As temperaturas foram de 30ºC, 29ºC, 28ºC, 27ºC e 26ºC.* ***3)*** *2,05 metros de altura.* ***4)*** *18 pontos de marcações.* ***5)*** $x = 4$.

4.2 Equações do Segundo Grau

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais tais que f(x) = 0. (Veja mais sobre a função quadrática em [6] na página 104 e em [5] na página 138). Para determinar as soluções de uma equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, usamos a forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0. \qquad (1)$$

Logo, $ax^2 + bx + c = 0$ se, e só se,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Quanto ao número de soluções/raízes temos, duas raízes distintas, se $\Delta > 0$, são elas $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, duas raízes iguais, se $\Delta = 0$, são elas $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$. Não tem raízes, se $\Delta < 0$, ou seja, $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

4.2.1 Problemas resolvidos

Problema 1. Para calcularmos o número de diagonais de um polígono convexo, podemos usar a fórmula $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$ na qual n indica o número de lados e d o número de diagonais. O Luzeiro da Fé localizado na cidade de Juazeiro do Norte é uma grande torre com uma arquitetura moderna que atrai olhares de quem visita esta cidade. A base desta torre tem como pontos de fixação no solo um polígono regular. Sabendo que esse polígono formado pelos pontos de fixações tem 9 diagonais, então quantos pontos de fixação no solo tem essa torre?

Solução. *Na questão foi dada a fórmula para determinar as diagonais* $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$, *onde deixou claro que d é o número de diagonais do polígono. No caso do polígono formado pelos pontos de fixação do Luzeiro da Fé, no solo, tem* 9 *diagonais, daí basta substituir na forma dada e desenvolver o cálculo que chegamos em uma equação do segundo grau, ou seja,* $9 = \dfrac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow n(n-3) = 2 \cdot 9 \Leftrightarrow n^2 - 3n = 18 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 18 = 0$. *Agora vamos determinar as raízes da equação, temos* $n^2 - 3n - 18 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) \Leftrightarrow \Delta = 81$. *Daí* $n_1 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{81}}{2 \cdot 1}$ *e* $n_2 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{81}}{2 \cdot 1}$ *, logo* $n_1 = 6$ *e* $n_2 = -3$. *Portanto, a quantidade de pontos de fixações desse polígono é 6, pois desconsideramos* -3 *já que não faz sentido menos três pontos de fixações.*

Problema 2. A Arena Mauro Sampaio (o Romeirão) localizado em Juazeiro do Norte-CE é um dos estádios mais moderno do Brasil e o mais moderno do interior, segundo seus administradores. Seu gramado, onde fica o campo de futebol, conta com uma área de 7.140 m^2. Veja imagem do estádio na Figura 4.1.

Figura 4.1: Árena Romeirão

Disponível em: https://www.lsesporte.com.br/noticia/a-moderna-arena-romeirao-e-inaugurada-em-juazeiro-do-norte. Acesso em 03/01/2023.

Quais são as dimensões desse campo, sabendo que é um retângulo de lados $(10x+5)$ e $(6x+8)$?

Solução. *Como a área é de* 7.140 m^2 *e a área de um retângulo é o produto da medida da largura pelo comprimento, ou seja, dos lados* $(10x+5)$ *e* $(6x+8)$, *temos que* $(10x+$

$5) \cdot (6x+8) = 7.140 \Leftrightarrow 60x^2 + 80x + 30x + 40 = 7.140 \Leftrightarrow 60x^2 + 110x - 7.100 = 0.$ *Agora determinando as raízes da equação, temos* $60x^2 + 110x - 7.100 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 11x - 710 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 11^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-710) = 17.161.$ *Como* $x_1 = \dfrac{-11+\sqrt{17.161}}{2 \cdot 6}$ *e* $x_2 = \dfrac{-11-\sqrt{17.161}}{2 \cdot 6}$*, então* $x_1 = \dfrac{-11+131}{12}$ *e* $x_2 = \dfrac{-11-131}{12}$*. Logo,* $x_1 = 10$ *e* $x_2 = -\frac{71}{6}$*. Sabemos que* $x \in \mathbf{N}$ *, portanto x é 10 e as dimensões do campo são de* $(10 \cdot 10 + 5)$ *e* $(6 \cdot 10 + 8)$*, ou seja, 105 metros de comprimento e 68 metros de largura.*

4.2.2 Problemas propostos

Neste capítulo apresentamos problemas sobre equações do segundo grau que podem ser trabalhados nas aulas de matemática e que abordam temas como espaços urbanos, agricultura, dimesões de estádio de futebol e o futebol local da região caririense.

Problema 1. A praça Feijó de Sá, veja Figura 4.2, ou praça do giradouro, em Juazeiro do Norte é muito conhecida na região, fica localizada no bairro triângulo. Nome este devido ao encontro da Avenida Padre Cícero com Avenida Leão Sampaio e suas rotatórias que formam um triângulo. No centro da praça tem uma estrutura com o hasteamento da bandeira do município.

Figura 4.2: Praça do Giradouro

Disponível em: https://www.flaviopintonews.com.br. Acesso em 04/01/2023.

Se a prefeitura deste município decidir trocar essa bandeira existente por outra com área de 96 m^2 e largura valendo $\frac{2}{3}$ do comprimento, quais as dimensões dessa nova bandeira, sabendo que o formato da bandeira é retangular?

Problema 2. O município de Mauriti-CE é um dos maiores produtores de milho do Estado do Ceará. Suponha que um investidor no agronegócio deste município utiliza máquinas na sua propriedade para o aumento da produção e que o custo de uma produção, em milhares de reais, de x máquinas iguais, é dado pela expressão $C(x) = x^2 - x + 10$. Se o custo foi de 30 mil reais, qual o número de máquinas utilizadas na produção?

Problema 3. A primeira fase do campeonato cearense de futebol por muitos anos foi disputada em turno e returno, em 2022 mudou para outro formato. Sempre tivemos bons representantes da região do Cariri como o Icasa, Barbalha e Guarani de Juazeiro. Sabendo que no antigo formato com turno e returno, a primeira fase era disputada em 90 jogos e que a fórmula matemática é $J = n^2 - n$, onde J é o número de jogos e n a quantidade de times, qual era a quantidade de times participantes?

Problema 4. O Estádio Municipal Governador Virgílio Távora, popularmente conhecido como Mirandão, localiza-se no bairro do Mirandão, no município do Crato-CE, tendo capacidade para 5000 espectadores. O gramado onde fica o campo de futebol é um retângulo de $(10x + 5)$ metros de comprimento por $(3x + 40)$ metros de largura.

Figura 4.3: Estádio Mirandão

Disponívem em: https://cratonoticias.wordpress.com/2011/01/09/juazeiro-do-norte-ce-crato-guarani-e-icasa-se-preparam-para-suas-estreias-no-meio-de-semana/. Acesso em 03/01/2023.

Sabendo que a área do campo de futebol é de 5.350 m^2, quais são as medidas do comprimento e da largura?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *10 metros.* ***2)*** *5 máquinas.* ***3)*** *10 times.* ***4)*** *105 metros de comprimento e 70 metros de largura.* ***5)*** $x = 4$.

5 Tópicos de Combinatória

Análise combinatória é a parte da Matemática que estuda o número de possilidades de ocorrência de um determinado acontecimento (evento) sem, necessáriamente, descrever todas as possibilidades. Aqui tomamos como referência [3].

É importante na análise combinatória saber o que é fatorial, pois usamos o fatorial nas fórmulas para determinar o número de permutações, arranjos e combinações, ou seja, sendo $n > 1$, define-se fatorial de n, e indica-se $n!$, a expressão $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, onde $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ e $n!$ (lê-se: n fatorial ou fatorial de n). Por definição, temos $0! = 1$ e $1! = 1$.

Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) diz que se uma decisão D_1 pode ser tomada de x_1 maneiras e se, uma vez tomada a decisão D_1, a decisão D_2 puder ser tomada de x_2 maneiras, e após tomada a decisão D_2 , a decisão D_3 puder ser tomada de x_3 maneiras, e assim sucessivamente até que uma decisão D_n puder ser tomada de x_n maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ é $x_1 \cdot x_2 . \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Permutação simples (P_n) de n objetos distintos são todos os agrupamentos formados pelos n elementos disponíveis onde os mesmos diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos. Determinamos os números de permutações simples por $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Permutação com repetição em geral de n objetos, dos quais existem α_1 repetições de um elemento X_1, existem α_2 repetições do elemento X_2, α_3 repetições do elemento X_3 e assim sucessivamente até existir α_m repetições do elemento X_m, ou seja, podemos determinar o número de permutações com repetição por

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m} = \frac{n}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_m},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ e $n > m$.

Arranjo simples de n elementos tomado p a p são todos os agurpamentos sem repetição que é possível formar com p elementos diferentes escolhidos entre os n elementos de um conjunto dado, onde $n \geq p$. Cada um desses agrupamentos se diferencia de outro pela ordem ou pela natureza de seus elementos. Determinamos o número de arranjo usando a fórmula

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Combinação simples de n elementos tomado p a p são todos os agurpamentos sem repetição que é possível formar com p elementos diferentes escolhidos entre os n elementos de um conjunto dado, onde $n \geq p$. Cada um desses agrupamentos se diferencia do outro apenas pela natureza de seus elementos. Podemos determinar o número de combinações usando a fórmula

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

5.1 Problemas resolvidos

Aqui apresentamos resoluções de problemas que envolvem o princípio fundamental da contagem nos problemas (1) e (2), permutações no (3), (4) e (5), arranjo simples no (6) e combinação simples no (7), todos eles abordando temas e elementos da região local.

Problema 1. Uma pessoa residente em Juazeiro do Norte pretende se deslocar de carro para a cidade de Iguatu, passando por Várzea Alegre. De Juazeiro à Várzea Alegre tem 2 vias para o deslocamento e de Várzea Alegre a Iguatu 5 vias. De quantas formas essa pessoa poderá se deslocar de carro por essas vias que ligam essas cidades, saindo de Juazeiro do Norte, passando por Várzea Alegre e chegando ao destino final em Iguatu?

Solução. *É fácil perceber que se trata do Princípio Fundamental da Contagem. Veja que podemos dividir o problema em duas etapas, onde na primeira temos 2 vias e na segunda etapa temos 5 vias, daí basta aplicar o P.F.C., ou seja,* $E_1 = 2$ *e* $E_2 = 5$. *Logo* $E_1 \cdot E_2 = 2 \cdot 5 = 10$. *Portanto, temos 10 formas de chegar a Iguatu, saindo de Juazeiro do Norte e passando por Várzea Alegre, de acordo com o informado.*

Problema 2. O Restaurante Universitário da URCA é uma Unidade da Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis, que fornece refeições a um baixo custo, com o objetivo de atender as demandas dos estudantes, dos professores e funcionários da URCA, otimizando tempo e dinheiro com deslocamento, contudo priorizando mais tempo ao estudante na academia. Atualmente são atendidas cerca de 1600 por dia, com almoço e jantar. O Restaurante está localizado no Campus do Pimenta, atendendo também diunortuno: no Campus São Miguel (curso de Direito), Campus CRAJUBAR (cursos Engenharia de Produção, Física, Matemática, Arquitetura, Tecnólogo em Topografia e Estrada e Tecnologia em Construção Civil) e Campi Pirajá (cursos de Artes e Teatro). Um grupo de estudantes da URCA vai escolher um cardápio comum a todos os mebros do grupo. Na escolha do cardápio foram ofertados três tipos de carnes, dois tipos de arroz, dois tipos de macarrão, dois tipos de feijão, dois tipos de saladas e quatro opções de sucos. Quantas formas esse grupo tem para a escolha de um desses cardápios ofertados se o prato vai conter um de cada tipo de alimento citado acima?

Solução. *Para a escolha do cardápio podemos dividir em seis etapas, onde a* E_1 *tem 3 opções,* E_2 *tem 2 opções,* E_3 *tem 2 opções,* E_4 *tem 2 opções,* E_5 *tem 2 opções e* E_6 *tem 4 opções. Usando o P.F.C., temos* $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4 \cdot E_5 \cdot E_6 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 192$. *Portanto, existem 192 formas para escolha do cardápio.*

Problema 3. Na Copa Fares Lopes de futebol em 2022, disputada entre os times do Pacajus, Maracanã, Floresta, Guarani de Sobral e Icasa, quantas tabelas diferentes de classificação final poderíamos ter?

Solução. *Para determinar o número de possibilidades para as classificações finais, isto é, quantas tabela diferentes poderíamos ter, basta observar que são cinco times e todos devem estar na tabela de classificação final. Daí, trata-se de uma permutação de* P_5.

Logo, $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ *e, portanto, poderíamos ter 120 resultados diferentes para a tabela final.*

Problema 4. Quantos anagramas tem o nome: (a) CRATO; (b) CRATO que começam com vogais; (c) CRATO que começam e terminam com vogais; (d) CRATO que têm as duas vogais sempre juntas?

Solução. *No item (a), quando se falar em anagramas vamos trabalhar com a permutação, no caso permutação simples devido não aparecer letras repetidas. Como o nome CRATO tem 5 letras, teremos uma permutação de* $P_5 = 120$ *anagramas. No item (b), para os anagramas do nome CRATO que começam com vogais, temos os que começam com A, ficamos apenas com as letras C, R, T e O para permutarmos. Daí, temos* $P_4 = 24$ *anagramas. Começando com O, temos de forma similar 24 anagramas. Portanto, teremos 48 anagramas começando com vogais. Para o item (c), para começar e terminar com vogais, podemos ter duas opções, ou seja, começar com A e terminar com O ou começar com O e termiar com A. Daí, teremos* $2 \cdot P_3$*, pois fixando as vogais nas extremidades do nome em questão, ficamos apenas com as letras C, R e T para permutarmos. Portanto, teremos* $2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ *anagramas que começam e terminam com vogais. Já no item (d), para que as duas vogais fiquem juntas, tomaremos* X=*AO (as vogais aparecem nesta ordem) e* Y=*OA (as vogais aparecem nesta ordem). Para a primeira situação, temos as letras para permutar X, C, R e T, no caso* $P_4 = 24$ *e na segunda situação temos as letras para permutar Y, C, R e T, logo* $P_4 = 24$*. Portanto, temos 48 anagramas que tem as vogais A e O juntas.*

Problema 5. Quantos anagramas tem o nome CRAJUBAR?

Solução. *Aqui se trata de uma permutação com repetição, pois as letras A e R repetem duas vezes, daí temos* $P_8^{2,2} = \dfrac{8!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = \dfrac{20.160}{2} = 10.080.$ *Portanto, temos 10.080 anagramas no nome CRAJUBAR.*

Problema 6. O Campeonato Cearense de Futebol 2022 foi disputado em quatro fases, a saber: Primeira Fase, Quartas de final, Semifinal e Final. A Primeira Fase foi composta por oito clubes: Atlético Cearense, Caucaia, Crato, Ferroviário, Icasa, Iguatu, Maracanã e Pacajus. Os clubes jogaram entre si em partidas de ida e volta. Quantas partidas foram realizadas na Primeira Fase?

Solução. *Devido as partidas entre dois clubes serem disputadas uma no campo do clube A e a outra no campo do clube B, concluímos que se trata de arranjo simples, pois a ordem dos elementos importa, logo o número de partidas do campeonato citado será de*

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Problema 7. O Campeonato Cearense de Futebol 2022 foi disputado em quatro fases, a saber: Primeira Fase, Quartas de final, Semifinal e Final. A Primeira Fase foi composta por oito clubes: Atlético Cearense, Caucaia, Crato, Ferroviário, Icasa, Iguatu, Maracanã e Pacajus. Se para as quartas de finais foram classificados 4 clubes, qual era o total de possibilidades para definir esses quatro clubes?

Solução. *Nesse tipo de problema como a ordem dos elementos não importa, pois perceba que se falarmos que os quatro clubes classificados foram Crato, Icasa, Iguatu, Pacajus e em outro momento falamos que os quatro clubes foram Icasa, Pacajus, Crato e Iguatu, continuamos com os mesmos clubes, neste caso se trata de uma combinação simples, logo o número de possibilidades para definir esses quatro clubes dentre os oito,* *será*

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1680}{24} = 70.$$

5.2 Problemas propostos

Aqui apresentamos problemas que tratam de análise combinatória voltados a temas naturais, de educação, futebol, divisão regional do Estado do Ceará e problemas envolvendo distâncias entre cidades. Todos envolvendo o contexto da região do Cariri.

Problema 1. A prova de matemática do vestibular da Universidade Regional do Cariri (URCA) é composta por 15 questões, onde em cada questão tem cinco alternativas, A, B, C, D e E, e apenas uma é correta. Qual o número total de gabaritos, sabendo que não poderá acontecer gabaritos com todas as 15 questões sendo a mesma alternativa, porém as demais possibilidades podem acontecer?

Problema 2. Sabendo que existem 5 rotas entre Juazeiro do Norte e Iguatu, 4 rotas entre Iguatu e Solonópoles, e 8 rotas entre Solonópoles e Fortaleza, qual o número de rotas diferentes que uma pessoa poderá sair da Cidade de Juazeiro do Norte à capital Fortaleza, passando pelas cidades de Iguatu e Solonópoles?

Problema 3. No primeiro dia de prova do vestibular da Universidade Regional do Cariri tem as provas de Física, Matemática, Química e Biologia. Uma pessoa que vai fazer essas provas tem quantas possibilidades de escolher a ordem em que vai fazer essas provas?

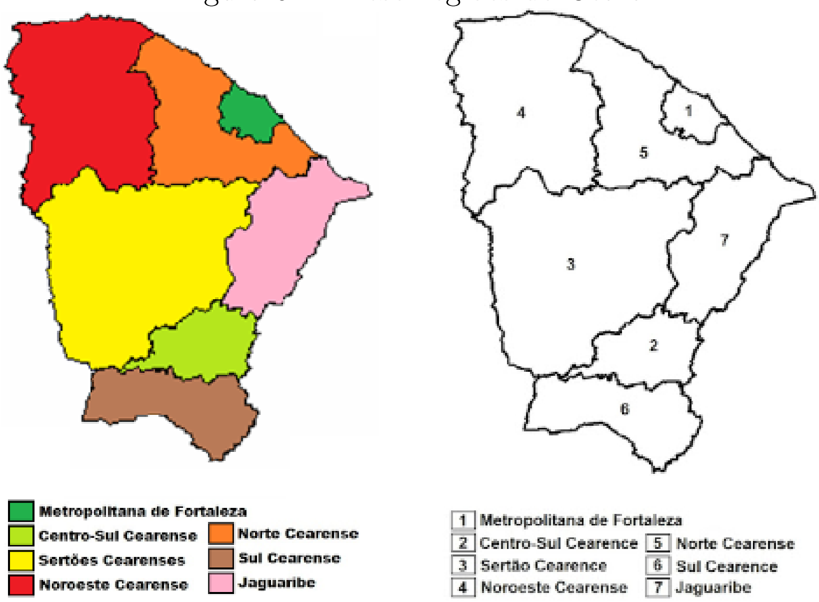
Problema 4. Ao sul do estado do Ceará situa-se a Floresta Nacional do Araripe, onde está a maior concentração mundial de fósseis do Período Cretáceo. Contém em seu território 58 unidades de conservação, sendo 27 Áreas de Proteção Ambiental (APAs), 10 reservas particulares do patrimônio natural, 9 parques ecológicos, 4 reservas ecológicas particulares, 3 estações ecológicas, 2 monumentos naturais, uma floresta nacional, um jardim botânico, um corredor ecológico e uma reserva extrativista.

Fonte:https://brasilescola.uol.com.br/brasil/aspectos-naturais-ceara.htm

Um biólogo pretende visitar uma de cada tipo de unidade de conservação citada acima, qual será o número de possibilidades de escolhas das visitas para este biólogo?

Problema 5. Um editor de um site informativo vai editar o mapa do Ceará por mesorregiões, para cada mesorregião ele precisa definir uma cor. Todas as mesorregiões devem conter cores diferentes e podendo ser qualquer uma das cores disponíveis, porém a mesorregião do Cariri deve ter a cor verde claro como cor fixa, veja Figura 5.1.

Figura 5.1: Mesorregiões do Ceará



Disponível em:
suportegeografico77.blogspot.com/2017/11/atividade-com-mapa-mesorregioes-do-ceara.html. Acesso em 15/10/2022

O editor tem como opções as cores do mapa colorido da Figura 5.1. A partir das informações apresentadas, qual o número de possibilidades para edição deste mapa?

Problema 6. Quantos anagramas tem o nome: (a) JARDIM; (b) JARDIM, que começam com vogais; (c) JARDIM, que começam e terminam com vogais; (d) JARDIM, que tem as duas vogais sempre juntas?

Problema 7. Quantos anagramas tem o nome BARBALHA?

Problema 8. Quantos anagramas tem o nome JUAZEIRO?

Problema 9. No vestibular 2022.2 da Universidade Regional do Cariri(URCA), foram ofertadas 12 vagas de livre concorrência para o Curso de Matemática e tiveram 18 condidatos inscritos. Qual o número de grupos, com 12 alunos selecionados entre os 18 alunos inscritos, poderia ter sido formado, sendo que nenhum aluno dos inscritos reprovou?

Problema 10. Em 02 de maio de 1946, foi publicado pelo Governo Federal o Decreto 9.226, criando a Floresta Nacional do Araripe-Apodi, visando preservar uma das florestas mais ricas em diversidade ambiental no Nordeste. A FLONA Araripe foi a primeira floresta nacional a ser criada em território brasileiro. É um dos últimos redutos da mata atlântica. Ocupa uma extensa área que atravessa a fronteira do Ceará com Pernambuco, abrangendo partes dos municípios de Barbalha, Crato, Jardim e Santana do Cariri, Apresenta relevo tabular, com altitudes que variam entre 840 e 920 metros. Média pluviométrica de 1.000 mm por ano. A temperatura varia de 15 a 25 °C.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Floresta Nacional do Araripe-Apodi

Uma pessoa querendo visitar a Floresta Nacional do Araripe-Apodi onde está localizada nos municípios citados acima, vai escolher dois dentre esses municípios. Qual o número de possibilidades para essa escolha?

Problema 11. O técnico do Icasa tinha à disposição, para um jogo do Campeonato Cearense de 2022, 5 jogadores para formar duplas no ataque. Qual o número de duplas que o técnico do Icasa poderia escolher para esse jogo?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *O número total de gabaritos, com a restrição, é dado por* $5^{15} - 5$. ***2)*** *Usando o P.F.C., temos 160 rotas diferentes.* ***3)*** *Usando o P.F.C., temos 24 possibilidade de escolhas.* ***4)*** *Usando o P.F.C., temos,58.320 possibilidades para as escolhas das visitas.* ***5)*** *Permutando, temos, 720 possibilidades para editar o mapa.* ***6)*** *(a) 720 anagramas; (b) 240 anagramas; (c) 48 anagramas; (d) 48 anagramas.* ***7)*** *Permutação com repetição, 3.360 anagramas.* ***8)*** *40.320 anagramas.* ***9)*** *Fazendo a combinação de* $C_{18,12}$, *temos, 18.564.* ***10)*** *Fazendo a combinação de* $C_{4,2}$, *temos, 6 possibilidades para a escolha.* ***11)*** *Fazendo a combinação de* $C_{5,2}$, *temos, 30 possibilidades para a escolha.*

6 Tópicos de Probabilidade e Medidas de Tendência Central

6.1 Probabilidade

A teoria das probabilidades é um segmento da Matemática que estuda e desenvolve modelos visando analisar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Aqui apresentamos os elementos importantes no estudo de probabilidades, são eles, o experimento aleatório, é todo experimento que, mesmo repetido várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis. O conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório chamamos de espaço amostral, sua notação é S e por último o evento que são todos os subconjuntos de um espaço amostral S de um experimento aleatório. Referimos ao leitor referenciar [3] no capítulo 7.

No cálculo de Probabilidade quando em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma chance de ocorrer (o espaço é equiprovável), a probabilidade de ocorrer um evento E, é indicado por $P(E)$, é um número que mede essa chance e é dado por $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$. Notação: $n(E)$ é o número de elementos de E, e $n(S)$ é o número de elementos de S. Os conjuntos $\varnothing$, E e S estão sempre relacionados por $S \supset E \supset \varnothing$. Consequentimente $0 \leq P(E) \leq 1$. Quando $P(E) = 0$, o evento E é o evento impossível, e não há possibilidade de que ele venha a ocorrer. Quando $P(E) = 1$, o evento E é o evento certo, e há certeza de que ele ocorrerá.

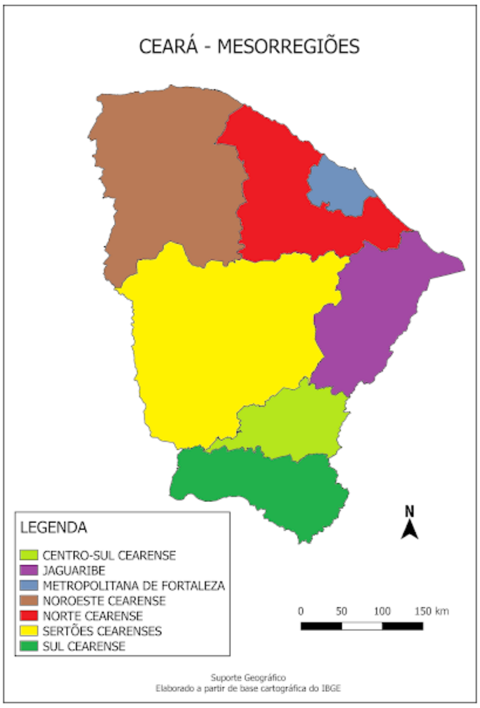
Na probabilidade da união, dados dois eventos A e B, temos $P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Na probabilidade da diferença entre dois eventos A e B, temos $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Já na probabilidade condicional, dados dois eventos A e B, com $P(B) \neq 0$, a probabilidade condicional de ocorrer A, já tendo ocorrido B, é o número dado por $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Na probabilidade de eventos independentes, dados dois eventos independentes, ou seja, quando o fato de saber que um evento ocorreu não altera a probabilidade do outro evento ocorrer, então essa probabilidade é dada por $P(E) = P(A) \cdot P(B)$.

6.1.1 Problemas resolvidos

Os problemas apresentados aqui tratam de probabilidades envolvendo as mesorregiões do estado do Ceará e que envolvem as probabilidades de uma situação hipotética de uma prova de vestibular da URCA.

Problema 1. Um editor de um site informativo vai editar o mapa do Ceará por mesorregiões, para cada região ele precisa definir uma cor. Todas as regiões devem ter cores diferentes, veja um exemplo na Figura 6.1.

Figura 6.1: Mesorregiões do Estado do Ceará



Fonte: https://suportegeografico77.blogspot.com

O editor tem como opções 7 cores e uma delas é a cor verde escuro para essa edição.

O editor vai sortear a região que ficará com a cor verde escuro. Assim, colocou os nomes das regiões em pequenos papéis idênticos em uma caixa e o primeiro número retirado da caixa ficará com a cor verde escuro. Dessa forma, qual a probabilidade para que a região do Cariri fique com a cor verde escuro na edição? E qual seria a probabilidade da mesoregião do Sul cearense ficar com a cor verde escuro, se sortear primeiro a cor e depois sortear a mesoregião?

Solução. *Vamos responder a primeira situação. Para escolher a região que ficará com a cor verde escuro, basta notar que temos 7 regiões e para tirarmos o papel com o nome do Cariri só temos 1, logo a probabilidade é de* $1/7$ *ou* $P(R) = \frac{1}{7}$. *Vamos agora a segunda situação, determinado a probabilidade de retirar a região do Cariri que foi apresentada na primeira situação, ou seja,* $P(R) = \frac{1}{7}$ *e agora devemos determinar a probabilidade da cor ser a verde escuro, no caso será de 1/7 também ou* $P(R) = \frac{1}{7}$. *Como as duas probabilidades encontradas são de enventos indepedentes, logo a probabilidade da região do cariri ser editada na cor verde escuro* $P(E)$ *será de* $P(E) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$.

Problema 2. Um estudante fez o vestibular para entrar no curso de matemática na Universidade Regional do Cariri(URCA). Sabendo que nas disciplinas de Física, Matemática, Química, Biologia, História, Geografia, Língua Portuguesa/Literatura Lusófona, Língua Estrangeira contam com uma prova de 15 questões de múltiplas escolhas, onde somente uma é correta, além de uma prova de redação. O estudante citado teve certeza nos seus cálculos de doze questões da prova de matemática e em três questões ficou indeciso, isso na mesma prova. Muito preocupado em saber quantas questões acertou no total dessa disciplina fez três considerações, foram elas: (a) Qual a probabilidade do mesmo ter acertado somente uma questão das três? (b) Qual a probabilidade do mesmo ter acertado duas questões das três? (c) Qual a probabilidade do mesmo ter acertado as três questões?

Solução. *No item (a), suponha que as questões em dúvidas foram a 1, 2 e 3. Logo para ter acertado a primeira, deveria ter errado as outras duas; Para ter acertado a segunda, deveria ter errado as outras duas; E para ter acertado a terceira, deveria ter errado as outras duas. Também note que a probabilidade de acertar ou errar uma questão não depende das demais, logo são eventos independentes e que temos cinco alternativas onde somente uma é correta. Daí podemos determinar da seguinte forma, Para acerta somente a primeira, teremos* $P(E_1) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{125}$, *para acerta somente a segunda, teremos* $P(E_2) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{125}$, *para acerta somente a terceira teremos* $P(E_3) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{16}{125}$. *Agora somando essas três probabilidades teremos a probabilidade de acertar somente uma nas três questões dessa prova, ou seja,* $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \Longrightarrow P(A) = \dfrac{16}{125} + \dfrac{16}{125} + \dfrac{16}{125} = \dfrac{48}{125}$. *No item (b), para ter acertado duas, deveria acertado a primeira e a segunda, ou acertado a primeira e a terceira ou acertado a segunda e a terceira. Para ter acertado a primeira e a segunda, temos* $P(B_1) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{125}$. *Para ter acertado a primeira e a terceira, temos* $P(B_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$. *Para ter acertado a segunda e a terceira, teremos* $P(B_3) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{125}$. *De forma similar ao item (a) temos que* $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \Longrightarrow P(B) = \frac{4}{125} + \frac{4}{125} + \frac{4}{125} = \frac{64}{125}$. *Portanto, a probabilidade de acertar duas questões é de* $P(B) = \frac{64}{125}$. *No item (c), para ter acertado as três questões, teremos que* $P(C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$. *Portanto, a probabilidade de ter acertado as três questões foi de* $P(C) = \frac{1}{125}$.

6.1.2 Problemas propostos

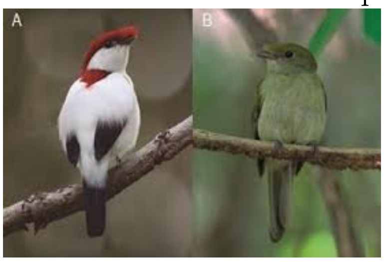
Os problemas propostos aqui abordam a fauna, flora, escolaridade e loteria, todos voltados para temas da região do Cariri.

Problema 1. O Soldadinho do Araripe (nome científico: Antilophia bokermanni) é uma ave passeriforme da família Pipridae. O nome bokermanni é uma homenagem ao zoólogo brasileiro Werner Bokermann. É uma espécie em perigo crítico de extinção. Foi descoberto em 1996 na Chapada do Araripe, Região Nordeste do Brasil. O Soldadinho do Araripe mede 15 cm de comprimento e 20 g de massa, apresenta dimorfismo sexual acentuado, pois a fêmea é de cor verde-oliva enquanto o macho tem plumagem branca no corpo, com negro na cauda e nas penas de voo das asas, além de um manto carmim que se estende do meio do dorso até um imponente topete sobre o bico. Veja Figura 6.2. A população do pássaro ocupa uma área equivalente a apenas 31 km^2 no terreno sinuoso da Chapada do Araripe. Na região se encontram 130 nascentes sendo que em 91 dessas foi registrada a presença do Soldadinho do Araripe.

Fonte: http://www.icmbio.gov.br/portal/images/stories/docs-plano-de-acao/pan-soldadinho-araripe/web-pan-soldadinho-do-araripe.pdf. Acesso: 12/11/2022.

Um pesquisador, na busca por registros e estudos da espécie, irá visitar duas dessas 130 nascentes em determinado dia. Qual a probabilidade de o pesquisador ir a duas nascentes onde foram registradas a presença do Soldadinho do Araripe, considerando que o pesquisador não tenha informações em quais nascentes tiveram esses registros?

Figura 6.2: A-Macho e B-Fêmea do Antilophia bockermanni



Disponível em: repositorio.unb.br/handle/10482/22878. Acesso em 22/10/2022.

Problema 2. Os alunos do Ceará são destaques no vestibular do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). A seguir veja parte da matéria de um site: "Ceará tem destaque no ITA e aprova 62 alunos em 2022, quase a metade das vagas", "O Estado ficou em 1º lugar no ranking aprovando quase o dobro do Rio de Janeiro e mais dez estados somados. Só São Paulo se aproxima, mas com diferença significativa." Veja a

Tabela 6.1 que mostra o número de candidatos aprovados por estados. O Instituto irá

Tabela 6.1: Aprovação no ITA em 2022

Estados	Número de aprovados
Ceará	61
São Paulo	52
Rio de Janeiro	12
Goias	5
Paraná	5
Piauí	4
Distrito Federal	3
Bhaia	2
Pernambuco	2
Amazonas	1
Espirito Santo	1
Minas Gerais	1
Espirito Santo	1
Total de vagas	150

Fonte: Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

sortear aleatoriamente um aprovado dentre os 150 para um discurso de apresentação da turma, qual é a probabilidade, aproximada em porcentagem, do escolhido ser um estudante cearense?

Problema 3. Os estudantes do Estado do Ceará são destaques na Olípiada Brasileira de Matemática (OBMEP), os números de medalhistas das tabelas seguintes foram retirados do site da OBMEP referente ao ano de 2021. A Tabela 6.2 representa os números de medalhistas das escolas públicas e na Tabela 6.3 os números de medalhistas das escolas privadas.

Escolhendo, aleatoriamente, um estudantes de cada nível para participar de uma viagem ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), qual é a probabilidade do estudante do Nível 1, ser de escola pública e medalhista de Ouro? Do estudante do Nível 2, ser de escola privada e medalhista de Prata? Do estudante do Nível 3, ser de escola pública e medalhista de Bronze?

Tabela 6.2: Medalhistas das Escolas Públicas Cearenses

Nível	Ouro	Prata	Bronze
N1	6	20	86
N2	11	20	59
N3	5	35	94
Total	22	75	239

Fonte: OBMEP

Tabela 6.3: Medalhistas das Escolas Privadas Cearenses

Nível	Ouro	Prata	Bronze
N1	3	5	18
N2	2	7	23
N3	13	22	46
Total	18	34	87

Fonte: OBMEP

Problema 4. Os estudantes do estado do Ceará são destaques desde a primeira edição da OBMEP em 2005. Entre os estados do Nordeste, o Ceará está sempre em primeiro lugar nos números de medalhas e menções horrosas. Em 2021 não foi diferente, veja a Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Estudantes medalhistas da Região Nordeste em 2021

UF	Ouro	Prata	Bronze	Mensão Horreosa
AL	6	22	80	919
BA	19	46	136	1532
CE	37	102	309	4347
MA	3	16	72	773
PB	4	16	73	763
PE	18	57	169	2372
PI	14	35	97	1125
RN	7	16	83	734
SE	1	2	63	283
Total	109	312	1082	12848

Fonte: OBMEP

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) irá sortear uma bolsa de estudo dos cursos de Exatas no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) para os estudantes com medalha de Prata, qual a probabilidade do estudante ser do estado do Ceará?

Problema 5. O Totolec Show é um sorteio realizado com bolas numeradas de 1(um) a 50(cinquenta), sendo o bilhete uma combinação de 20(vinte) números entre si. É considerado ganhador do 1º, 2º e 3º prêmios o bilhete que primeiro completar a combinação dos 20(vinte) números de acordo com a extração das bolas sorteadas aleatoriamente, através de um globo.

Fonte: https://www.totolecshow.com/show/

Considerando que uma pessoa está marcando uma cartela e já marcou 18 números, no 1º prêmio, de um total de 25 bolas chamadas, qual é a probabilidade dessa pessoa ser premiada no Totolec Show nas próximas duas bolas a serem chamadas, neste prêmio?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) $P(A) = \frac{91}{130} \cdot \frac{90}{129} = \frac{819}{1677} \cong 48,83\%$. ***2)*** $P(A) = \frac{61}{150} \cong 40,66\%$. ***3) (a)*** $P(A) = \frac{6}{138} = \frac{1}{23}$; ***(b)*** $P(A) = \frac{7}{122}$; ***(c)*** $P(A) = \frac{94}{215}$. ***4)*** $P(A) = \frac{102}{312} = \frac{17}{52}$. ***5)*** $P(A) = \frac{2}{25} = \frac{1}{24} = \frac{1}{300}$.

6.2 Medidas de Tendência Central

Vamos ver aqui um resumo de medidas de tendência central, ou medidas de posição. São elas, a Média Aritmética (M_a), a Mediana (M_d) e a Moda (M_o). Elas representam os conjuntos de dados pelos seus valores médios, em torno dos quais esses dados tendem a concentrar-se.

Considerando o conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$, a média aritmética ($M_a$) é dada por $M_a = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$.

Mediana (M_d) é o valor que ocupa a posição central dos dados ordenados de forma crescente ou decrescente. A mediana relativa a um conjunto de X_n pode ser definida como

$M_d = X_{\frac{n+1}{2}}$, se n for ímpar e será $M_d = \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, se n for par.

A moda (M_o) de um conjunto de dados é a observação que aparece com maior frequência no conjunto. Se o conjunto de valores tiver a mesma frequência para os mesmos, não é possível determinar a moda desse conjunto, dizemos que o conjunto é amodal. Mas podemos ter mais de uma moda, caso tenham elementos que se repetem com maiores frequências, teremos esses elementos de maiores frequências como sendo a moda, ou seja o conjunto pode ser bimodal ou multimodal também.

6.2.1 Problemas resolvidos

Aqui trazemos problemas de medidas de tendência central envolvendo o futebol local e resultados da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de municípios locais.

Problema 1. O time do Icasa teve os jogadores da Tabela 6.5, como os mais utilizados na temporada 2022. Com relação às idades dos jogadores da Tabela 6.5, qual foi a média aritmética, moda e mediana das idades?

Solução. *O conjuto que representa as idades dos jogadores é* $E = \{23, 24, 25, 29, 29, 30, 31, 32, 32, 32, 33\}$. *Note que a moda das idades é* $M_o = 32$, *pois tem maior frequência. A mediana das idades é o sexto termo, ou seja,* $= M_d = X_{\frac{n+1}{2}} = X_{\frac{11+1}{2}} = X_{\frac{12}{2}} = X_6 = 30$, *pois a quantidade de elementos é ímpar. Já a média das idades é* $M_a = \frac{23+24+25+29+29+30+31+32+32+32+33}{11} = \frac{320}{11} \cong 29,09$.

Problema 2. Na segunda fase da Olmpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2022 os estudantes dos municípios de Barbalha, Crato e Juazeiro do Norte conseguiram respectivamente x, $(x+1)$ e $(x+5)$ medalhas entre as de ouro,

Tabela 6.5: Jogadores do Icasa da temporada 2022

Jogador	**Idade**
César Tanaka	29
Ron	24
Neguete	32
Gabrie	33
Mateus Delmondes	33
Leleu	29
Leandro Mendes	31
Tiago Corrêa	30
Silvano	32
Guidio	32
Gustavo	25

Fonte: Globo Esporte

prata e bronze dos níveis 1, 2 e 3. Sabendo que a média aritmética das medalhas desses municípios foi igual a 4, qual foi a quantidade de medalhas ganhas pelos estudantes de cada um desses municípios?

Solução. *Para calcular essa média, observemos que* $M_a = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, *para* $y_1 = x$, $y_2 = (x+1)$ *e* $y_3 = (x+5)$, *daí,* $M_a = \dfrac{x + (x+1) + (x+5)}{3} = \dfrac{x + x + 1 + x + 5}{3} = 4$. *Logo,* $3x + 6 = 12 \Longrightarrow x = \dfrac{6}{3} = 2$, *ou seja,* $x = 2$. *Portanto, Barbalha teve 2 medalhas, Crato* $(2+1) = 3$ *medalhas e Juazeiro* $(2+5) = 7$ *medalhas.*

6.2.2 Problemas propostos

Os problemas aqui tratam das medidas de tendência central que envolve público pagante em partida de futebol, mortalidade infantil, volumes de chuvas e gols em compeonatos. Todos abordando o contexto local

Problema 1. Segundo dados da Federação Cearense de Futebol, a média de público pagante como mandante do time do Icasa no Campeonato Cearense de Futebol em 2022 foi de 364,57 e teve 7 jogos como mandante. Sabendo também que o maior público pagante foi de 1.177 e o menor foi de 30 pagantes, qual foi o total de pagantes nos outros cinco jogos?

Problema 2. Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), durante os anos de 2006 até 2020 as taxas de mortalidade infantil registadas no município de Juazeiro do Norte estão na Tabela 6.6. Desconsiderando as casas decimais, qual foi a média aritmética, a moda e a mediana das taxas de mortalidade infantil do município de Juazeiro do Norte?

Tabela 6.6: Taxa de mortalidade infantil em Juazeiro do Norte de 2006 a 2020

Ano	**Em cada 1000 nascidos**
2006	17,12
2007	18,49
2008	12,96
2009	12,70
2010	13,57
2011	20,15
2012	14,37
2013	21,77
2014	12,02
2015	13,89
2016	15,75
2017	11,64
2018	14,91
2019	12,51
2020	13,56

Fonte: IBGE

Problema 3. Segundo a Funceme, o volume de chuvas observado de janeiro até a primeira quinzena de dezembro de 2022 nos municípios da região metropolitana do Cariri, está representado na Tabela 6.7. Quais são os valores da média aritmética e mediana dos volumes de chuvas da região metropolitana do Cariri de janeiro até a primeira quinzena de dezembro de 2022?

Problema 4. A Tabela 6.8 mostra os gols marcados por cada equipe na primeira fase do Campeonato Cearense de Futebol de 2022. De acordo com a tabela 6.8, qual a média e a mediana de gols nesse campeonato?

Tabela 6.7: Médias de chuvas no Cariri em 2022

Município	Volumes de chuvas
Barbalha	1382,9 mm
Caririaçu	1591,6 mm
Crato	1280,3 mm
Farias Brito	1191 mm
Jardim	1090,9 mm
Juazeiro do Norte	1094,8 mm
Missão Velha	1276,4 mm
Nova Olinda	1244 mm
Santana do Cariri	1081,3 mm

Fonte: Funceme

Tabela 6.8: Gols do Campeonato Cearense de 2022

Equipes	Gols marcados
Caucaia	20
Ferroviário	24
Pacajus	17
Iguatu	23
Maracanã	16
Atlético Cearense	19
Icasa	9
Crato	5

Fonte: Globo Esporte

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) *1349 pagantes.* ***2)*** *Mádia aritmética é aproximadamente 14,46, a mediana é 13 e a moda é 12.* ***3)*** *Mádia aritmética é aproximadamente 1248,13 e a mediana é 1244.* ***4)*** *Mádia aritmética é 16,625 e a mediana é 18,0*

7 Conclusão

Esperamos que essa produção atenda um pouco da demanda por problemas matemáticos voltados ao contexto local da Região do Cariri cearense. Esperamos, também, que professores da região e demais regiões utilizem nas suas aulas esse material para contextualização da matemática, a fim de contribuir com uma aprendizagem mais significativa. Iremos apresentar o material para a coordenação do Foco na Aprendizagem, a fim de alcançar uma boa parte dos professores da rede estadual do Ceará. Assim, esta produção poderá compor parte do Material Didático Estruturado (MDE) e podendo ser disponibilizado no curso do Foco da Aprendizagem, além disso podendo aparecer nas avaliações diagnósticas aplicadas pela Seduc-CE.

Referências

[1] CAEd/UFJF. **Guia de Elaboração de Itens – Ensino Técnico Profissionalizante**. Juiz de Fora: 2012.

[2] CAMINHA, A. (2012). **Tópicos de Matemática Elementar**, Volume 1: Números Reais.

[3] CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A. C. **Matemática discreta**. SBM, 2013.

[4] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2016.

[5] GELSON IEZZI, CARLOS MURAKAMI. **Fundamentos de matemática elementar - Volume 1: Conjuntos e funções**. São Paulo: Atual Editora, 1993.

[6] LIMA, Elon Lajes. **Números e funções reais**. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, p. 46, 2013.

[7] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. SBM, 1997.

[8] MUNIZ NETO, A. C. (2013). **Geometria, coleçao profmat**. Rio de Janeiro, SBM.

[9] SOUSA, Helliton Maia. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. 2015. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Oeste do Pará.

[10] SOUZA, Jaibis Freitas de et al. **Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática**. 2009.