UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTÔNIO EDMAR RIBEIRO DE QUEIROZ FILHO

# OS TEMPOS ELETIVOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NAS TURMAS DE TERCEIRO ANO DO NOVO ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE
2023

ANTÔNIO EDMAR RIBEIRO DE QUEIROZ FILHO

# OS TEMPOS ELETIVOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NAS TURMAS DE TERCEIRO ANO DO NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves

JUAZEIRO DO NORTE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

Q3t Queiroz Filho, Antônio Edmar Ribeiro de.
Os tempos eletivos para o ensino de geometria analítica nas turmas de terceiro ano do novo ensino médio/ Antônio Edmar Ribeiro de Queiroz Filho.– 2023.
66 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p.54-55).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2023.

Orientador: Dr. Francisco Pereira Chaves.

1. Geometria Analítica. 2. Tempo Eletivo. 3. Novo Ensino Médio. 4. Avaliações Externas. I. Título.

CDD 516.3

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

ANTÔNIO EDMAR RIBEIRO DE QUEIROZ FILHO

OS TEMPOS ELETIVOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NAS TURMAS DE TERCEIRO ANO DO NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 15 de agosto de 2023.

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
FRANCISCO PEREIRA CHAVES
Data: 11/10/2023 19:26:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves
Orientador - UFCA

gov.br Documento assinado digitalmente
FRANCISCO DE ASSIS BENJAMIM FILHO
Data: 12/10/2023 12:22:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho
Membro Interno - UFCA

gov.br Documento assinado digitalmente
WANDERLEY DE OLIVEIRA PEREIRA
Data: 12/10/2023 06:45:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Wanderley de Oliveira Pereira
Membro externo - UECE

*Para meus pais, Edmar e Maria*
*e para minha filha, Maria Ellen*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar permitindo esta grande realização e por ter posto ao meu lado minha família, os professores e amigos do curso, que foram indispensáveis para que eu tenha obtido êxito neste mestrado. Não posso deixar de mencionar o nome de minha mãe, Maria de Sousa Furtado, minha esposa, Débora Nayara Santana da Cruz, minha filha, Maria Ellen Santana de Queiroz, que foram um grande motor propusor de incentivo nos momentos difíceis e também meus amigos de curso: Diógenes, Edjane Kelly, Erisson, Cléryston, Walmir, Natálio, Niwlandes e Damião pelo grande apoio dado. Sem eles, este mestrado teria o triplo de dificuldade. Muito Obrigado.

Eu não poderia também de deixar de registrar minha gratidão ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela oportunidade de participar desse programa de mestrado de qualidade excepcional, ao meu professor e orientador Francisco Pereira Chaves, pelo apoio e encorajamento durante a elaboração da minha dissertação.

Sou grato também à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pela bolsa que serviu para meus deslocamentos e obtenção de livros e à Universidade Federal do Cariri (UFCA), pela maravilhosa estrutura e apoio ao longo desses quase 3 anos.

**RESUMO**

O Novo Ensino Médio, cujo início da implementação gradativa se deu entre 2022 e 2024, trouxe consigo muitas melhorias e também muitos dasafios. Sua chegada impactou todas as disciplinas, inclusive a Matemática, a ponto de alguns conteúdos não serem mais vistos ao longo do Ensino Médio, como é o caso da Geometria Analítica. Diante da importância da Geometria Analítica para a aprendizagem matemática e também de sua inegável aplicação em várias situações do cotidiano e em outras disciplinas como Física, por exemplo, é de fundamental relevância buscar formas de trabalhar esta matéria. Uma das possibilidades para isso é por meio dos Tempos Eletivos ou Oficinas das Escolas em Tempo Integral. Esses espaços, criados para que o aluno aprofunde seus conhecimentos naquilo que é importante para sua formação, se mostram como uma oportunidade para amenizar os problemas trazidos pela falta da Geometria Analítica nos novos moldes do Ensino Médio. Logo, diante da problemática observada, fez-se necessário fazer um estudo mais detalhado e fundamentado sobre o funcionamento do Novo Ensino Médio e a partir desse cohecimento, buscar possíveis formas para atacar esse problema envolvendo a Geometria Analítica. A partir das pesquisas realizadas, conclui-se que há, nos novos moldes do Ensino Médio, uma depreciação em torno da Geometria Analítica, principalmente diante da redução da carga horária da disciplina de Matemática, e que essa problemática pode ser amenizada com o uso das aulas dos tempos eletivos. No presente trabalho está exposto também funcionamento dos tempos eletivos que são uma saída possível para que os alunos não deixem de estudar Geometria Analítica.

**Palavras-chave:** Geometria Analítica. Tempo Eletivo. Novo Ensino Médio. Avaliações Externas.

# ABSTRACT

The New High School, whose gradual implementation began between 2022 and 2024, brought with it many improvements and also many challenges. Its arrival impacted all subjects, including Mathematics, to the point that some contents were no longer seen throughout high school, as is the case of Analytical Geometry. Given the importance of Analytical Geometry for mathematical learning and also its undeniable application in various everyday situations and in other disciplines such as Physics, for example, it is of fundamental importance to look for ways to work on this subject. One of the possibilities for this is through Elective Times or Full-Time School Workshops. These spaces, created for students to deepen their knowledge of what is important for their education, are an opportunity to alleviate the problems brought about by the lack of Analytical Geometry in the new format of High School. Therefore, given the problem observed, it was necessary to carry out a more detailed and well-founded study on the functioning of the New High School and, based on this knowledge, look for possible ways to attack this problem involving Analytical Geometry. From the research carried out, it is concluded that there is, in the new High School format, a depreciation around Analytical Geometry, mainly due to the reduction in the workload of the Mathematics discipline, and that this problem can be alleviated with the use of elective classes. This work also exposes the functioning of elective periods, which are a possible way out so that students do not stop studying Analytical Geometry.

**Keywords:** Analytical Geometry. Elective Time. New High School. External Assessments.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Capítulo 1

# Introdução

Resultados obtidos no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) de 2015 mostraram que o ensino nos três anos do Ensino Médio estavam abaixo do que se esperava para esse nível de ensino. Isso mostrou a necessidade de modificações para que sua qualidade fosse melhorada. Analisando o cenário daquele período de tempo, a contar de 2011, o Ideb, que serve para medir a qualidade da educação no Brasil, estava paralisado em 3,7, enquanto a meta do Governo Federal era de 4,3. As notas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) também estavam em queda nesse período, mostrando ser necessário a tomada de novos rumos para a Educação Básica.

Diante desse cenário de declínio da qualidade do Ensino Médio, as Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral mostraram ser uma opção para melhoria desses índices, já que contavam com uma proposta pedagógica baseada no Projeto de Vida e Protagonismo Juvenil, cuja implementação no estado de Pernambuco e no estado do Rio de Janeiro foi muito satisfatória quanto à performance e fluidez dos alunos na escola [2], chamando a atenção de forma positiva e, assim, se destacando no cenário nacional. Visando a melhoria do Ensino Médio, foi sancionada em 2014 a Lei 13.005 que aprovou o Plano Nacional de Educação (PNE), o qual previa a ampliação das escolas integrais brasileiras em cinquenta por cento, até 2024. Em 2017, o Governo Federal aprovou a Lei n° 13.415, que instituiu a reformulação do Ensino Médio, o Novo Ensino Médio, e também a criação de políticas de estímulos à efetivação das Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral em todo o território nacional para que a educação brasileira pudesse alcançar patamares mais elevados de qualidade.

Com a chegada do Novo Ensino Médio e suas muitas modificações, como a diminuição da carga horária das aulas de Matemática devido à seu novo formato, ou seja, por sua nova divisão entre carga horária obrigatória e flexível, alguns conteúdos da Matemática deixaram de fazer dos livros didáticos. Um deles é o de Geometria Analítica. Diante da grande relevância deste conteúdo, devido também a sua grande aplicabilidade e presença noutras disciplinas e áreas como engenharia, visando amenizar os danos causados pela sua ausência na Matemática do Novo Ensino Médio, é de fundamental importância que esta geometria seja estudada nos espaços de aprofundamento do conhecimento, na forma dos Tempos Eletivos ou Oficinas. Não há como negar a grande importância deste conteúdo, pois sua presença pode ser notada facilmente ao longo de todo o Ensino Médio e em várias aplicações do cotidiano. No primeiro ano do Ensino Médio, no estudo de funções é tratado o plano e gráficos. No segundo ano, na trigonometria, estuda-se uma noção de plano. E por último, no 3° ano, necessita-se do plano para a elaboração de gráficos no conteúdo de estatística. Assim, o conteúdo de Geometria Analítica é, sem dúvidas, um dos mais importantes da Matemática.

A Geometria Analítica é uma disciplina que combina geometria e álgebra, permitindo a representação gráfica de equações algébricas por meio de coordenadas do plano cartesiano. Foi desenvolvida principalmente por René Descartes (1596 - 1650), no século XVII. Ele foi responsável por introduzir a ideia do uso de coordenadas para descrever pontos e formas geométricas, facilitando assim a resolução de inúmeros problemas matemáticos.

Figura 1.1: René Descartes

Fonte: Enciclopédia Britânica [1]

A partir de então, a Geometria Analítica se desenvolveu de forma rápida, sendo amplamente aplicada em diversas áreas do conhecimento como Física, Engenharia e Computação. Dois matemáticos relevantes que contribuíram para o desenvolvimento da Geometria Analítica foram Pierre de Fermat, que possibilitou grandes avanços para este conteúdo e também o de teoria dos números. Já Leonhard Euler (1707 - 1783), ajustou as notações e técnicas algébricas utilizadas na Geometria Analítica.

Atualmente, a Geometria Analítica é uma ferramenta fundamental para a solução de problemas matemáticos práticos de várias áreas, incluindo Computação Gráfica, Engenharia, Física e Ciência de Dados. A seguir, são apresentados os principais matemáticos e suas contribuições, que possibilitaram a criação e desenvolvimento deste importante assunto da Matemática.

Considerado o pai da Geometria Analítica, René Descartes (1596 - 1650) era francês e um grande estudioso de seu tempo, graduado em direito, apesar de nunca ter exercido a profissão. Ao longo de vários anos, participou de várias excursões militares, mesmo que não fosse soldado qualificado. Nessas muitas viagens, Descartes separava tempo para aprofundar seus conhecimentos e também conhecer vários talentosos estudiosos da Europa.

De forma geral, pode-se dizer que a obra matemática desse importante estudioso se resume à aplicação da álgebra na geometria. Essa forma de abordagem possibilitou que ele se destacasse muito entre os matemáticos de seu tempo. Basicamente, em sua importante obra intitulada de *La géométrie*, publicada em 1637. Nela, Descartes buscava, a partir de problemas geométricos, encontrar uma equação algébrica adequada ao problema que, ao ser esmiuçada ao máximo, tentava-se buscar uma solução para a situação geométrica. Isso se mostra em praticamente toda essa obra, mas nesse livro não consta expressamente uma Geometria Analítica propriamente dita. Na verdade, isso passa a ocorrer em seu segundo livro. Este sim se aproxima de como se mostra a Geometria Analítica atual. Na versão III de sua obra, Descartes dá orientações sobre a teoria básica de equações, mas sua geometria ainda estava distante da Geometria Analítica de hoje, que desfruta da importante inclusão do sistema de coordenadas cartesianas. Porém, mesmo assim, seus resultados foram de grande valia para o estudo da teoria de seu tempo e serviram também como base para o que estudamos hoje como funções. Logo, é atribuido a Descarte a criação da Geometria Analítica.

Pierre de Fermat (1601 - 1665) era filho de um rico comerciante que lhe permitiu ter acesso a uma educação de qualidade. Ele também foi um importante matemático que, apesar de não gostar de publicar seus estudos, se interessava muito em resolver desafios. Era advogado de formação e funcionário do governo, mas por se dedicar também a outras atividades e pela falta de interesse em divulgar suas descobertas, Fermat é considerado um amante da Matemática, mesmo tendo feito importantes descobertas.

Figura 1.2: Pierre de Fermat

Fonte: Enciclopédia Britânica [2]

Sua notoriedade é proveniente de cartas que trocava com amigos e pela cópia da Arithmetica de Diofanto que foi até mesmo publicada com suas observações. Outro trabalho proveniente dos seus estudos foi publicado como: Introdução aos Lugares Geométricos, mas só após sua morte. São vários os conteúdos da matemática em que Fermat se destacou. Os principais foram: Geometria Analítica, Óptica, Probabilidades e, seu predileto, Teoria dos Números e Análise Infinitesimal. Fermat, embora amante da Matemática, é tambem considerado criador da Teoria dos Números e, por sua grande contribuição na aritmética superior, ele consequentemente, como as áreas da Matemática são interligadas, trouxe notáveis benefícos à Algebra, mas foi de grande perda não ter ao menos a maioria de suas obras publicadas, pois sua forma de expressar a Matemática era bastante adequada e acessível. Um resultado de destaque obtido por Fermat foi que não existem inteiros positivos, tais que um cubo possa ser escrito como a adição de dois outros cubos, mas ele não parou por aí, foi mais a fundo e concluiu que não existem inteiros positivos a, b e c, tais que $a^n + b^n = c^n$, para $n > 2$ inteiro. Ele deixou registrado na margem de uma folha da sua cópia da obra de Diofanto que tinha realizado a demonstração desse resultado, mas não iria deixá-la alí registrada por falta de espaço. A busca pela demonstração desse resultado, conhecido como O Último Teorema de Fermat trouxe bastante desenvolvimento para a matemática, cuja demonstração veio somente em 1995. Até mesmo a Geometria Analítica de Fermat possuía mais proximidade em comparação com a atual. Assim, mesmo considerado um amante, ele foi um dos maiores de seu tempo, deixando muitas contribuições para a Matemática.

A Geometria Analítica começou a ser ensinada nas escolas no século XVIII. No início, ela era ensinada como uma extensão da Geometria Euclidiana Plana. No entanto, com o passar do tempo, ela se tornou uma disciplina independente. No século XIX, a Matemática experimentou um período de formalização e expansão. Neste tempo, o ensino da geometria e álgebra tornou-se mais estruturado e começou a se parecer mais com o que ensinamos hoje. Já no início do século XX, as escolas começam a adotar uma abordagem mais estruturada para o ensino da Matemática. A Geometria Analítica foi gradualmente integrada aos currículos, primeiramente em cursos avançados de universidades e em seguida começa a ser integrado em níveis mais básicos de educação, inclusive no Ensino Médio. Com a revisão e atualização constante dos currículos escolares, ela tornou-se um tópico padrão no Ensino Médio e em cursos introdutórios de Matemática, no nível universitário. Programas de ensino se tornaram mais padronizados, incluindo a Geometria Analítica como uma parte vital do currículo da disciplina de Matemática Diante dos impactos negativos para a Matemática e, mais especificamente, para a Geometria Analítica, trazidos pela chegada do Novo Ensino Médio, a busca por formas de resgatar o estudo deste importante conteúdo é necessária. Assim, como sugerido, uma possibilidade real é a escolha pelos professores e escolas de pôr em prática nos dois semestres letivos, para o terceiro ano, o Tempo Eletivo de Geometria III, cujo foco está no estudo da Geometria Analítica.

O presente trabalho tem como objetivos reafirmar a grande relevância da Geometria Analítica, expor sua posição nos novos moldes do Novo Ensino Médio e propor formas de possíveis inciativas para continuação de seu estudo nas escolas estaduais de Ensino Médio do estado do Ceará e, assim, possibilitar melhores resultados dos alunos na Geometria Analítica e nos conteúdos relacionados.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. Neste Capítulo 1, é realizado um levantamento da problemática que levou à escolha do tema. No Capítulo 2, será conhecido de forma mais detalhada o Tempo Eletivo de Geometria III, dedicado à aprendizagem do assunto de Geometria Analítica. No Capítulo 3, é mostrado o funcionamento da Matemática no Novo Ensino Médio. No Capítulo 4, são expostos os benefícios provenientes do estudo da Geometria Analítica. No Capítulo 5, são explanadas possíveis formas para o estudo da Geometria Analítica nos moldes do Novo Ensino Médio e, por fim, no Capítulo 6, são realizadas as considerações finais, onde, através da análise do corpo do trabalho, é realizada uma verificação e exposição dos resultados obtidos.

# Capítulo 2

# O Ideb, o SAEB, BNCC, o PNE e as EEMTI's

Neste capítulo será falado sobre o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), o Plano Naconal de Educação (PNE) e a relação de cada um deles com as Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. O Ideb é um indicador usado para medir a qualidade da Educação Básica no Brasil, levando em conta resultados de estimativas de alunos e escolas. Já o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) é uma avaliação que fornece os dados utilizados para calcular o Ideb. Ela é realizada a cada dois anos e avalia o desempenho de alunos do ensino fundamental e médio. Para os alunos do 5° e 9° anos são cobrados nesta avaliação os conteúdos de Português e Matemática. Já no Ensino Médio, a prova SAEB é realizada no 3° ano e são cobrados os conteúdos de todas as áreas do conhecimento, isto é, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, que são as áreas que compõem a Base Nacional Curricular Comum (BNCC). Diante da ampliação da jornada escolar, da oferta de atividades extracurriculares e do fortalecimento da convivência no ambiente escolar, houve nesse modelo integral de ensino uma melhora considerável nas avaliações do SAEB e no Ideb.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento regulamentário que indica o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais e indispensáveis que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Este documento foi aprovado em 2017 pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), com implementação a partir de 2018. Ela é obrigatória para todas, sejam escolas públicas ou privadas do território nacional. Sobre a BNCC, Silva [3] argumenta:

> [...] a BNCC é um documento importante para a melhoria da qualidade da educação brasileira, pois define um conjunto de apren-

> dizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver. Essas aprendizagens essenciais são organizadas em cinco campos de conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Educação Física. Cada campo de conhecimento é composto por competências e habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo de sua trajetória escolar. (SILVA, 2023, p. 12)

Logo, as competências e aptidões que se esperam que todos os educandos adquiram ao longo da sua educação primária, foram delineadas pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC) [4]. Essas capacidades e habilidades estão estruturadas nas quatro áreas do saber, que são: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas.

## 2.1 O Plano Nacional de Educação (PNE)

O PNE é indispensável diante do fato de que estabelece diretrizes para a educação no país e fornece uma visão clara e coerente para a melhoria da educação. O plano serve como referência para as políticas educacionais do governo e para a alocação de recursos que visam melhorias. Assim, de forma resumida, o Ideb, SAEB e PNE são ferramentas de suma relevância porque trabalham juntas para garantir a qualidade da educação no Brasil e acompanhar seu progresso ao longo dos anos.

O Plano Nacional de Educação (PNE) é um plano decenal que estabelece diretrizes, objetivos e metas para que a educação no Brasil atinja patamares cada vez mais elevados. O PNE tem como objetivo garantir a universalização do ensino e a melhoria da qualidade da educação. Em resumo, o Ideb é um indicador de qualidade da educação, baseado em dados obtidos por meio do SAEB. Já o PNE é um plano governamental que visa melhorar a educação no país.

## 2.2 O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) e como é calculado

O Ideb é de suma importância pois possibilita identificar regiões e escolas com problemas de qualidade e, a partir desse conhecimento, oferecer informações para a tomada de decisões sobre políticas educacionais de combate a essas dificuldades. Ele serve para avaliar a qualidade da educação em todas as escolas, sejam públicas ou privadas. Além disso, o Ideb é usado como suporte para melhor distribuição de recursos para as escolas.

O Ideb é calculado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e possui como base dois componentes principais: o fluxo escolar e o desempenho dos estudantes, explanados a seguir.

1. Fluxo Escolar (ou Taxa de Aprovação) é a taxa de aprovação, reprovação e abandono. Essas informações são coletadas através do Censo Escolar, realizado a cada ano pelo INEP. A taxa de aprovação é a proporção de alunos que progridem para o ano letivo seguinte;

2. Rendimento dos Estudantes (ou Média de Proficiência) é o desempenho dos estudantes ao longo do ano, calculado pela média de proficiência em Português e Matemática, nas avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), cuja aplicação se dá de 2 em 2 anos para os estudantes do 2º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e também do 3º ano do Ensino Médio.

Para o cálculo do IDEB, o INEP adota a seguinte fórmula simples:

- Ideb = Taxa de Aprovação x Média de Proficiência

Ou seja, o valor do Ideb é a taxa de aprovação multiplicada pela média de prociência. É importante destacar que a meta do Ideb é definida pelo Ministério da Educação (MEC), sendo particular para cada escola e rede de ensino, variando de 0 a 10. A meta mínima é que todas as escolas, tanto da rede pública quanto da rede particular, alcancem um Ideb de pelo menos 6,0.

## 2.3 O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)

O SAEB fornece dados necessários para calcular o Ideb e monitorar o desempenho de alunos e escolas, possibilitando identificar onde há a necessidade de mais atenção. Esta avaliação permite identificar pontos fortes e falhas no ensino e orientar ações para aplicação de melhorias.

Esse sistema de avaliação foi posto em prática pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e tem considerável importância para a educação no Brasil. O SAEB foca em avaliar a qualidade da educação no país e permite o acesso à dados esmiuçados sobre a performance dos estudantes nas áreas de Português e Matemática, lembrando que essa avaliação é realizada e aplicada no Ensino Fundamental (2°, 5º e 9º anos) e Ensino Médio (3º ano).

A relevância do SAEB para a educação brasileira se mostra nas diferentes considerações dadas a seguir:

- Termômetro da qualidade da educação: O SAEB possibilita identificar áreas onde estão ocorrendo acertos e onde há deficiências no ensino e aprendizagem dos educandos, possibilitando acesso a uma visão geral da qualidade da educação no Brasil e possibilitando que gestores sejam ajudados na criação de políticas voltadas para o ataque aos principais problemas encontrados, fortalecendo, desta forma, a tomada de decisões, embasadas em dados reais, tornando-se mais acertivas;

- Reconhecimento de desigualdade: O SAEB mostra desigualdades educacionais entre as diversas regiões, escolas e estrato social, tornando possível o acesso a meios para a criação de políticas e projetos particulares para combater esses desafios encontrados;

- Contrastes entre escolas e os diferentes sistemas de ensino do país: O SAEB dá a possibilidade da comparação da performance das diferentes escolas e sistemas de ensino, sejam públicos ou privados, estimulando assim a busca por melhorias contínuas e a apropriação de práticas acertivas, embasadas nos resultados do SAEB;

- Acompanhamento de objetivos e políticas para a educação: com o SAEB é possível também acompanhar o retrocesso ou progresso das metas planejadas no Plano Nacional de Educação (PNE) e, assim, analisar a prática de políticas e programas educativos criados e postos em prática pelo governo brasileiro;

- Comprometimento e clareza: Os resultados do SAEB são disponibilizados publicamente, dando prioridade à transparência e a responsabilização das instituições educativas e do poder público em relação à qualidade da educação disponibilizada. Logo, um processo de funcionamento de acesso universal diminui a possibilidade de manipulações indevidas;

- Suporte para o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica: como mostrado, o SAEB nada mais é do que um integrante do Ideb, índice composto por dados da atuação escolar e taxa de aprovação para aferir a situação da educação básica brasileira. O Ideb é usado como ferramenta de avaliação e planejamento das políticas educacionais brasileiras;

Assim, o SAEB é indispensável para a melhoria da educação brasileira, pois fornece informações valiosas e fundamentais quanto ao desempenho dos estudantes, para que seja possível uma busca constante de uma educação cada vez mais de qualidade para o país. Essas informações são essenciais para a criação de políticas públicas, identificação de desigualdades e para o levantamento de programas para melhorias contínuas do ensino e aprendizagem dos estudantes dos diferentes níveis citados acima.

## 2.4 As Escolas Integrais de Ensino Médio do Ceará, as EEMTI's

As Escolas Integrais de Ensino Médio do Ceará, mais conhecidas como EEMTI's, são uma importante iniciativa escolhida para elevar ainda mais a qualidade da educação no Ceará, visando proporcionar o desenvolvimento completo das capacidades dos estudantes. Implementadas por meio de políticas públicas de muitos investimentos, seus objetivos são: ampliar o acesso à educação integral no estado e proporcionar maior preparo para a vida social e para o mundo do trabalho.

Nessas escolas integrais, o tempo de estudo é ampliado, contendo atividades diversificadas e extracurriculares, cujo objetivo principal é o desenvolvimento integral dos estudantes, focando em aspectos cognitivos, emocionais, sociais e culturais, visando um desenvolvimento pleno do educando. Para isso, projetos pedagógicos diferenciados e inovadores são adotados com frequência, pois os objetivos e esses projetos escolares buscam promover uma educação integral, de qualidade e adequada à realidade de cada instituição escolar. Outro ponto crucial para o alcance dos objetivos escolares é a formação contínua dos professores e equipe escolar, já que isso possibilita a realização de atividades aprimoradas, ou seja, com métodos e práticas mais acertivas e eficientes.

Os resultados das EEMTI's do Ceará mostraram-se bastante positivos, com melhoria nos índices de desempenho educacional, como o Ideb e o SAEB, o que pôs o Ceará em destaque, nacionalmente falando, no quesito educação. Além do mais, houve redução das taxas de evasão e abandono das escolas nesse modelo, elevação do engajamento dos estudantes e participação da comunidade nas escolas. É importante destacar também uma melhor preparação dos jovens educandos cearenses para o mercado de trabalho e o ensino superior. Sobre as escolas integrais, a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) [5], afirma que:

> [...] a escola em tempo integral, ao expandir a jornada escolar, pode oferecer aos estudantes oportunidades ampliadas de aprendizado e desenvolvimento, englobando não apenas o conteúdo curricular tradicional, mas também atividades extracurriculares que podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades socioemocionais e cognitivas. (OCDE, 2014, p. 25)

No entanto, como é comum no início de algum projeto, vários desafios ainda necessitam ser vencidos, como a universalização do acesso à educação integral e continuidade/sustentabilidade das políticas públicas de educação para o estado. Também se faz necessário fortalecer a gestão escolar e dilatar/aperfeiçoar parcerias com instituições públicas e privadas de ensino, sejam de níveis médio ou superior.

Resumidamente, as Escolas Integrais de Ensino Médio no Ceará desempenham papel fundamental no avanço de uma educação de qualidade e equidade para todos os educandos. Assim, é de fundamental relevância que seja firmado um compromisso do estado em garantir esse direito indispensável para o futuro da educação no Ceará e desenvolvimento dos jovens estudantes.

Figura 2.1: EEMTI Almiro da Cruz


Fonte: Crede 19

A figura 2.1 apresenta uma das inúmeras escolas integrais do Ceará, de nome EEMTI Almiro da Cruz, localizada no sítio Santana I, na cidade de Barbalha. Nesta escola foi ofertado por diversas vezes, mesmo antes da chegada do Novo Ensino Médio, o Tempo Eletivo de Geometria Analítica, visando fortalecer ainda mais a aprendizagem desse importante assunto da Matemática e assim, possibilitar uma conciliação dos fatos geométricos com as relações algébricas, ou seja, relacionar a álgebra com a geometria, conforme [6].

Como o Novo Ensino Médio está ocorrendo de forma gradativa, o término de sua efetivação ocorrerá em 2024, quando contemplará as três séries do Ensino Médio. Logo, será necessário, diante do exposto ao longo deste trabalho, que este indispensável Tempo Eletivo seja disponibilizado para os alunos dos 3° anos, e de forma contínua, para que os discentes não sejam prejudicados, já que os estudantes a partir de 2024 não estudarão de forma integral esta geometria.

# Capítulo 3

# O Novo Ensino Médio e a preparação para o Enem e o Spaece

Como mencionado em [7], o Novo Ensino Médio é uma reforma educacional que está ocorrendo de forma gradativa e que visa tornar essa etapa de ensino mais flexível, diversificada e conectada com o mundo social e do trabalho. A partir de 2022, as escolas públicas e privadas deverão implementar gradativamente o novo currículo, que se divide em duas partes, a formação geral básica, que corresponde a 60% da carga horária total do Ensino Médio e abrange as áreas de conhecimento da BNCC: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas. Essas áreas devem ser trabalhadas de forma integrada e interdisciplinar, com foco no desenvolvimento de competências e habilidades para este século. A outra parte é composta pelos itinerários formativos, que correspondem a 40% da carga horária total do Ensino Médio e permitem que os estudantes escolham um ou mais percursos de aprofundamento nas áreas de conhecimento ou na formação técnica e profissional, de acordo com seus desejos. Os itinerários devem ser ofertados pelas redes de ensino de acordo com a demanda dos estudantes e as possibilidades locais. Houve também uma ampliação da carga horária mínima de 2.400 para 3.000 horas, o que significa mais tempo de ensino para professores e estudantes. O objetivo do novo Ensino Médio é oferecer uma educação mais atrativa, significativa e alinhada com os interesses, as potencialidades e os projetos de vida dos jovens brasileiros.

Essas mudanças ocorridas no Ensino Médio são importantes para tornar o Ensino Médio mais relevante para os jovens brasileiros e para prepará-los para o sucesso na vida acadêmica e profissional. Assim, os alunos, conforme erguem seus desejos estudantis de vida, podem escolher os caminhos de sua formação. Para isso, precisam cumprir, ao longo das séries do Ensino Médio, o total de 1.800 horas de conteúdos relativos a todas as disciplinas comuns, anteriores ao Novo Ensino Médio, organizadas não mais por disciplinas de forma individual, mas sim em áreas de conhecimento, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esses caminhos, designados Itineráros Formativos, possuem cerca de 1.200 horas e possibilitam aos alunos aprofundar seus conhecimentos em determinadas trilhas, tempos eletivos ou oficinas, permitindo aos mesmos alargar ainda mais seus conhecimentos em áreas como Ciências da Natureza, Ciências Humanas, Ciências Sociais, Linguagens ou Matemática. Há ainda a opção de os alunos optarem por formações técnicas e profissionais, caso estas sejam ofertadas pela escola da qual fazem parte.

Como visto acima, houve uma reformulação da carga horária das disciplinas, visando um desenvolvimento maior naquilo que o aluno, juntamente com a comunidade escolar, deseja para sua vida estudantil e, num futuro próximo, profissional. Porém, em relação à Matemática, justamente para receber estas mudanças de carga horária, foi necessário retirar do livro didático alguns conteúdos, como foi o caso da Geometria Analítica, que para grande parte dos professores de Matemática, pode ser considerado como uma grande perda para os alunos dos terceiros anos, pois ela está relacionada a varios conteúdos da Matemática e também a outras disciplinas como física. Logo, este assunto é indispensável para melhor entendimento da Matemática de forma geral e, principalmente, para aqueles alunos que seguirão Itinerários diretamente relacionados à Matemática. Também para aqueles que pretendem ingressar em cursos superiores que exigem do aluno uma boa base matemática, como é o caso das engenharias, por exemplo.

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais [8], é registrado que:

> [...] o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta doi aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2002, p. 75)

Diante desse novo cenário, buscar formas para que este relevante conteúdo não deixe de ser estudado é uma iniciativa louvável, pois, perante as melhorias e desafios trazidos pelo Novo Ensino Médio para a disciplina de Matemática, faz-se necessário, de acordo com [9], que:

> [...] ao criar uma situação de parceria e cooperação com os alunos e entre os alunos, considerando os assuntos emergentes no contexto, propondo desafios ou elegendo coletivamente um tema de estudo, o professor deixa de ser o transmissor de informações e passa a atuar como mediador, promotor, facilitador, desafiador e consultor. (VYGOTSKY, 1978, p. 117)

A Geometria Analítica está presente em um dos três eixos necessários para o desenvolvimento das habilidades exigidas em matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, tornando-se assim indispensável para o desenvolvimento do conhecimento matemático de todo aluno. É importante ressaltar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017, é atualmente a principal referência brasileira para a construção dos currículos escolares em todo o Brasil, seja na rede pública ou privada. Ela estabelece as aprendizagens essenciais a que todos os estudantes têm o direito de desenvolver ao longo de sua trajetória na Educação Básica. No entanto, isso não quer dizer que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram integralmente descartados ou que não possuem mais valor. Eles ainda podem ser usados como documentos complementares, que apresentam discussões relevantes sobre temas transversais, metodologias de ensino e propostas curriculares nas diferentes áreas do conhecimento.

Não se pode deixar de registrar também o aspecto negativo que o Novo Ensino Médio pode trazer para a aprendizagem da Matemática. Basicamente, esta reforma educacional que está sendo implementada gradativamente no Brasil possui como objetivo ampliar as possibilidades de formação dos estudantes e promover uma educação mais integrada e contextualizada para a vida escolar dos estudantes. No entanto, várias mudanças inseridas pelo Novo Ensino Médio podem ter consequências negativas na aprendizagem da disciplina de Matemática, por exemplo. Aqui estão alguns desses prejuízos para a Matemática:

- Carga horária de estudo da disciplina reduzida: com a já implementação do Novo Ensino Médio em 2022, houve uma diminuição da carga horária obrigatória para o ensino de Matemática, o que pode delimitar a profundidade e a amplitude dos conteúdos ensinados;

- Falta de especificidade no ensino desta indispensável disciplina: a Matemática é uma matéria que requer também uma abordagem específica e sistemática para sua aprendizagem, mas no Novo Ensino Médio é enfatizada a transdisciplinaridade e a interdisciplinaridade, o que pode prejudicar a compreensão de indispensáveis conceitos matemáticos específicos;

- Uma flexibilização exagerada: como mencionado, o Novo Ensino Médio permite que os alunos escolham suas disciplinas conforme seus interesses, mas isso pode resultar em uma diminuição da escolha pelos alunos de cursos superiores de Matemática ou daqueles relacionados e, consequentemente, numa redução na demanda por professores especializados nessa área e de outros profissionais de áreas relacionadas;

- Carência de mais formações para professores: o Novo Ensino Médio requer uma maior formação e capacitação dos professores para o ensino de disciplinas integradas, especialmente se esta relaciona-se à Matemática. Para Isabel Alarcão [10], a formação de professores é indispensável para a realização de práticas pedagógicas integradas. Ela argumenta que é preciso o desenvolvimento de habilidades para o ensino interdisciplinar, visando promover a aprendizagem significativa;

- Depreciação da Matemática: o foco do Novo Ensino Médio em habilidades socioemocionais e competências interdisciplinares pode menosprezar a relevância da Matemática como uma matéria fundamental para o avanço de habilidades cognitivas e lógicas da vida estudantil dos alunos. Cavaliere [11] afirma que, a escola assumiu responsabilidades educacionais mais abrangentes do que possuía. Para ela, a inclusão desestruturada de novos elementos à rotina escolar molda uma realidade onde as necessidades de integração social tem assumido uma posição central.

Não há como negar que o Novo Ensino Médio possui também benefícios para o ensino de Matemática. Pode-se citar como uma das principais mudanças a opção de maior flexibilização do currículo, possibilitando que os estudantes possam escolher as disciplinas conforme seus interesses, bem como aprofundar seu conhecimento em determinados temas de seu gosto. Para muitos especialistas, isso possibilita que o estudante tenha papel ativo na escolha do caminho educativo que ele(a) irá trilhar. A partir dessa flexibilização, é possível que os educandos optem por disciplinas eletivas que possuam relação com a Matemática, como, por exemplo, Física, Química, Estatística, entre outras, elevando assim o leque de possibilidades de diálogo entre as variadas disciplinas, possibilitando a interdisciplinaridade entre elas.

Mais um benefício é a possibilidade de aprofundar o domínio de habilidades e competências que são relevantes para o mundo trabalhista, através de projetos que contemplam a Matemática aplicada à situações cotidianas, aumentando o interesse do educando, possibilitando maior motivação e engajamento dos estudantes no ensino da disciplina de Matemática.

Por fim, o Novo Ensino Médio pode oferecer uma formação educativa com um leque mais extenso de possibilidades para os estudantes, fazendo com que eles possam melhor compreender a importância da Matemática na resolução de problemas, nas mais variadas áreas do conhecimento, bem como na vida cotidiana desses estudantes.

## 3.1 O Enem e suas características

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma avaliação realizada anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), visando medir a qualidade do Ensino Médio no país, subsidiar políticas públicas de educação para a melhoria da aprendizagem dos alunos e servir, através da nota obtida na prova realizada pelos alunos, como meio de entrada em universidades públicas e privadas. Ele é usado como critério de seleção para a entrada dos educandos em instituições de ensino superior por meio do Sistema de Seleção Unificada (SISU), para universidades públicas, do Programa Universidade para Todos (ProUni), para o acesso à universidades particulares e do Fundo de Financiamento Estudantil (FIES), cujo foco é financiar, na forma de empréstimo, o curso em universidades particulares.

A prova do ENEM é composta pelas quatro áreas de conhecimento estudadas no Ensino Médio: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; e Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A avaliação de cada área do conhecimento é composta por 45 questões objetivas, totalizando 180 questões. Os participantes também precisam elaborar uma redação, na forma de texto argumentativo, que é avaliada com base nos critérios de coesão, coerência, estrutura e domínio da norma culta da Língua Portuguesa. As provas do ENEM são aplicadas em dois domingos seguidos, possuindo duração de 5 horas e 30 minutos em cada dia. No primeiro dia, os participantes fazem as provas de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias, e a redação. No segundo dia, são aplicadas as provas de Matemática e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

As questões cobradas no ENEM são elaboradas com base na Matriz de Referência do Exame, que estabelece as competências e habilidades a serem avaliadas em cada área de conhecimento. O objetivo é avaliar o raciocínio lógico, a capacidade de interpretação de textos, a compreensão de conceitos e princípios indispensáveis e a capacidade de aplicação dos conhecimentos em situações cotidianas.

A nota do ENEM é calculada pela Teoria de Resposta ao Item (TRI), que leva em consideração o grau de dificuldade de cada questão e o desempenho do estudante em relação aos demais. Isso possibilita que as notas sejam comparáveis entre diferentes edições dessa avaliação.

De forma condensada, o ENEM é uma avaliação importante para a medição da qualidade do ensino médio e para o ingresso dos alunos nas instituições de ensino superior brasileiras e em algumas do exterior.

### 3.1.1 A influência da Geometria Analítica no ENEM

A Geometria Analítica é um dos assuntos que mais são cobrados em provas de vestibulares e no ENEM, sendo importante para que os alunos obtenham boas notas e possam ingressar em cursos superiores. O estudo da Geometria Analítica permite que os alunos compreendam conceitos fundamentais da Matemática, como por exemplo: o plano cartesiano e suas regiões, a distância entre pontos, equação da reta e suas formas e a equação da circunferência.

A Geometria Analítica é cobrada em várias questões do ENEM, como na resolução de problemas que envolvem a localização de pontos em um plano cartesiano, a análise de retas e curvas, e o cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas. Além disso, este assunto também é relevante para a resolução de questões em outras áreas do conhecimento, como a física e a engenharia.

A falta de estudo de Geometria Analítica pode prejudicar a resolução de questões no ENEM e, consequentemente, afetar a média final dos alunos. Por isso, é fundamental que os alunos se dediquem ao estudo desta matéria e pratiquem exercícios para fixar os conteúdos vistos.

Alguns dos principais tópicos de Geometria Analítica que geralmente são cobrados no Enem, incluem:

- Coordenadas cartesianas: entendimento e utilização das coordenadas cartesianas para encontrar pontos em um plano;
- Distância entre dois pontos: cálculo da distância entre dois pontos dados em um plano cartesiano;
- Equação da reta: compreensão e uso da equação da reta para determinar suas características;
- Equação da circunferência: compreensão e utilização da equação da circunferência para determinar a solução de situações problemas, usando suas características.

Resumidamente, a Geometria Analítica é fundamental para a preparação dos discentes para o ENEM, pois é uma parte da Matemática constantemente cobrada na prova. Por isso, é importante que os alunos se dediquem ao estudo dessa matéria e pratiquem exercícios para fixar o conteúdo e obter uma boa nota na prova desta disciplina.

É indispensável salientar também que, diante das muitas modificações trazidas pelo Novo Ensino Médio para a Matemática, principalmente quanto aos assuntos ensinados ao longo dos 3 anos do Ensino Médio, há a necessidade de alinhamento entre os conteúdos cobrados nas avaliações externas e os estudados em sala nessa nova etapa da edducação básica. De acordo com [12]:

> [...] diante das reformulações trazidas pelo novo ensino médio, percebe-se uma lacuna significativa entre os conteúdos abordados em sala de aula, particularmente em disciplinas fundamentais como a matemática, e os tópicos cobrados em avaliações externas. Esta disparidade sugere uma urgente necessidade de revisão e atualização dos critérios e conteúdos avaliativos, garantindo um alinhamento que reflita as inovações pedagógicas e curriculares recentes, e assim, promovendo uma avaliação mais justa e representativa do conhecimento e habilidades dos estudantes. (RIBEIRO, 2023, p. 130)

Assim, atualizar as diretrizes conteudistas do Enem pode ser uma iniciativa para a resolução dessa falta de alinhamento vigente.

### 3.1.2 Alguns problemas de Geometria Analítica cobrados no Enem e suas resoluções

Nesta seção apresentaremos dois problemas, com suas soluções, que foram cobrados na prova do Enem de 2019, e que utilizam Geometria Analítica em sua solução. A Figura 3.1 apresenta esses problemas, desconsiderando o problema 172:

Figura 3.1: Questões do Enem 2019 envolvendo Geometria Analítica

**Questão 172**

Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

| Média | Mediana | Moda |
|---|---|---|
| 1,65 | 1,67 | 1,70 |

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

A basquete, basquete, basquete, basquete.
B futebol, basquete, basquete, basquete.
C futebol, futebol, basquete, basquete.
D futebol, futebol, futebol, basquete.
E futebol, futebol, futebol, futebol.

**Questão 173**

Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

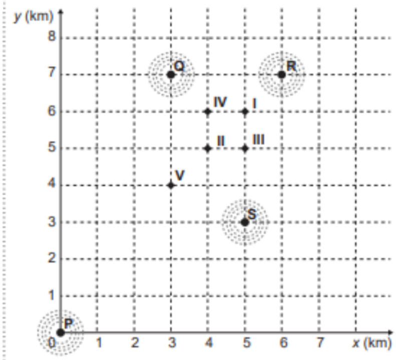
Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

A Y = 80X + 920.
B Y = 80X + 1 000.
C Y = 80X + 1 080.
D Y = 160X + 840.
E Y = 160X + 1 000.

**Questão 174**

Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.




Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

A I
B II
C III
D IV
E V

Fonte: Inep

- Solução da questão 173: Esta questão pode ser resolvida também usando função afim, que talvez seja o mais adequado. Porém, pode-se utilizar conceitos básicos da Gemetria Analítica para sua resolução. Pelas opções dos itens possíveis para respostas, trata-se de uma equação da reta, que podemos considerar na forma reduzida $y = mx + n$. Considerando que o eixo $y$ fornece a quantia que a empresa gasta semanalmente e o eixo $x$ a quantidade total de funcionários, temos que: na ausência de funcionário, ou seja, zero funcionários diaristas, a empresa teria apenas o gerente, hipoteticamente, claro. Logo, em termos de gastos, a empresa gastaria apenas 1000 reais, ou seja, o ponto $(0, 1000)$ está na reta. Como cada diarista trabalha duas vezes por semana, o gasto da empresa com cada um semanalmente é de 160 reais. Segue então que, o ponto $(1, 1160)$ também está na reta. Como a reta passa no ponto $(0, 1000)$, então

$n = 1000$ implica $y = mx + 1000$. Substituindo o segundo ponto $(1, 1160)$ em $y = mx + 1000$, obtemos $1160 = m \cdot 1 + 1000$. Logo, $m = 160$. Assim, a reta que se encaixa perfeitamente à situação é $y = 160x + 1000$. Portanto, o item correto é o E.

- Solução da questão 174: Devemos aqui calcular a distância entre pontos. Note que se P estivesse no bar V, sua distância a Q, R e S, respectivamente, seria $3km$, $\sqrt{(3-6)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = 3.\sqrt{2}$ e $\sqrt{(3-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Assim, neste caso, P não daria um match com R. Considerando agora P em IV, a distância de P a R também seria maior que 2, pois $\sqrt{(4-6)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} > 2$, ou seja, P novamente não faria um match com R. Analisemos agora o caso em que P está no bar III. Aqui, a distância até R também será $\sqrt{5} > 2$. O próximo caso é o ponto P estando no bar II. Neste caso também, a distância até R é maior que 2, não possibilitando assim um match, pois $\sqrt{(4-6)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$. Por exclusão, a única possibilidade que se encaixa é P no bar I. Item A

## 3.2 Entendendo melhor o Spaece

O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (Spaece) é uma avaliação externa cujo intuito é medir a excelência do ensino básico das escolas públicas no Ceará. O projeto é gerenciado pela Secretaria da Educação do estado e aplicado de forma anual em todas as instituições públicas de ensino, da Educação Infantil até o Ensino Médio.

O Spaece é composto por testes de rendimento escolar em Língua Portuguesa e Matemática, que são aplicados para os alunos do 2º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental, e do 3º ano do Ensino Médio. Ademais, o programa também contempla a avaliação dos indicadores de fluxo escolar, que levam em consideração a taxa de aprovação, reprovação e abandono escolar, assim como a evasão escolar.

A importância do Spaece para as escolas é possibilitar uma avaliação imparcial do desempenho dos alunos, para que os gestores escolares possam ter uma melhor compreensão do nível de aprendizado de seus estudantes e a identificação de possíveis deficiências no processo de ensino e aprendizagem. A partir dos resultados, é possível fazer o direcionamento de recursos e por em prática ações para aprimorar a qualidade da educação nas escolas.

Outro ponto de destaque do Spaece é que ele dá a possibilidade de comparação dos resultados da escola com as médias estadual e nacional, dando uma visão mais abrangente da qualidade do ensino comparado a outras escolas e regiões do país. Isso possibilita a criação de uma cultura de avaliação e de busca de modo constante pela melhoria da qualidade da educação do estado. Assim, resumidamente, o Spaece é uma iniciativa significativa para a avaliação da excelência do ensino básico nas escolas públicas cearenses.

### 3.2.1 A relação da Geometria Analítica com a prova do Spaece

A Geometria Analítica é um assunto indispensável para a avaliação do SPAECE, pois permite a análise e solução de problemas matemáticos usando a interpretação de informações apresentadas em um sistema de coordenadas cartesianas, ou seja, no Plano Cartesiano.

Entre os principais temas de Geometria Analítica cobrados no Spaece, levantados de acordo com a análise das provas aplicadas anualmente, nos últimos 10 anos de experiência escolar e nos descritores que norteiam as questões cobradas, disponíveis na Matriz de Referência de Matemática, em [13], destacam-se:

- O Plano Cartesiano, que aborda os conceitos de ponto, reta, coeficiente angular e coeficiente linear;

- A distância entre dois pontos, que explora a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano para o cálculo do comprimento do segmento que une 2 pontos dados;

- A equação da reta, que engloba a definição da equação geral da reta, a equação reduzida da reta e a equação segmentária da reta;

- As posições relativas entre retas, que incluem condições de paralelismo e perpendicularidade entre retas;

- A equação da circunferência, que aborda conceitos como circunferência, centro e raio.

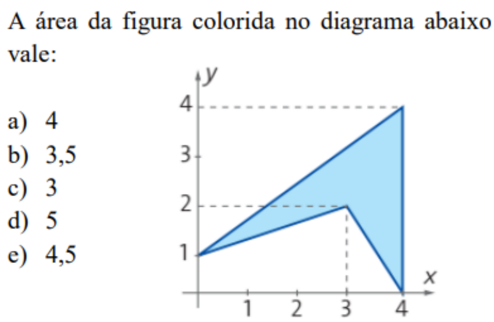
O conhecimento desses tópicos é de suma relevância para que os alunos possam melhor assimilar e resolver problemas matemáticos que envolvam a Geometria Analítica nesta avaliação. O domínio desses temas permite que os estudantes obtenham um bom desempenho na avaliação, além de possibilitar o desenvolvimento de habilidades indispensáveis, como o entendimento de dados, o raciocínio lógico e a resolução de situações-problema.

### 3.2.2 Alguns problemas de Geometria Analítica, semelhantes aos cobrados na prova do Spaece e também suas resoluções

A avaliação do Spaece possui como característica ser bastante conteudista. Infelizmente as provas não são disponibilizadas para consulta, mas de acordo com seus descritores e relatos de alunos, pode-se ter uma boa noção de sua estrutura. A seguir, resolveremos duas questões envolvendo Geometria Analítica e que possuem o estilo de questões dessa avaliação tão relevante.

**Questão 01:**

Figura 3.2: Questão estilo Spaece 01




Fonte: Apostila 3° ano - Enem e Spaece

**Solução:** Note que, a área da figura em azul nada mais é do que a adição das áreas de 2 triângulos, isto é, o triângulo de vértices $(0,1)$, $(3,2)$ e $(4,4)$ com o de vértices $(3,2)$, $(4,0)$ e $(4,4)$. Logo, basta calcular a área de cada e, por fim, adicionar seus resultados. Isso pode ser facilmente resolvido, usando a fórmula da metade do módulo do determinante dos vértices. A seguir, será calculado cada determinante:

- Determinante do triângulo da esquerda, de vértices $(0,1)$, $(3,2)$ e $(4,4)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolvendo este determinante, encontramos como resultado 5. Assim, a área do triângulo em questão é $A_1 = \frac{|5|}{2} = 2,5$ Para o triângulo da direita, o determinante de seus vértices, é:

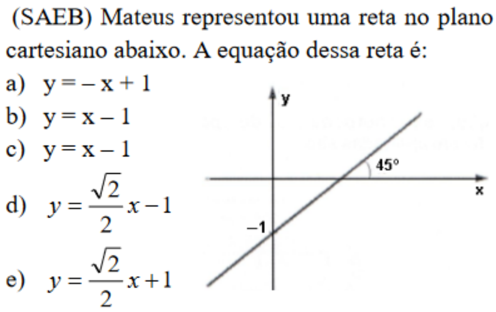
- Determinante do triângulo da direita, de vértices $(3,2)$, $(4,0)$ e $(4,4)$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolvendo este determinante, encontramos como resultado 4. Assim, a área do triângulo em questão é $A_2 = \frac{|4|}{2} = 2$. Adicionando as duas áreas, é possível encontrar a área total, ou seja, da figura em azul, que será: $2 + 2,5 = 4,5$

**Questão 02:**

Figura 3.3: Questão estilo Spaece 02



(SAEB) Mateus representou uma reta no plano cartesiano abaixo. A equação dessa reta é:

a) $y = -x + 1$

b) $y = x - 1$

c) $y = x - 1$

d) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1$

e) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$



Fonte: Apostila 3° ano - Enem e Spaece

**Solução:** A equação da reta na forma reduzida possui a forma $y = m \cdot x + n$. Note que, fazendo $x = 0$ nesta equação, fica $y = m.0 + n = n$. Assim, o ponto $(0, n)$ pertence à reta e, como se sabe, é um ponto do eixo $y$. De acordo com o gráfico acima, a reta corta o eixo $y$ no $-1$. Logo, $n = -1$. Falta agora somente determinar o valor de m. Como visto acima, $m = \tan 45° = 1$. Portanto, a equação da reta acima é $y = x - 1$, ou seja, o item correto é $b$ ou $c$. Nota-se aqui um erro. Provavelmente seria uma questão nula, caso fosse cobrada como questão da avaliação do Spaece.

# Capítulo 4

# Sugestões de atividades para o Tempo Eletivo de Geometria III

As Unidades Curriculares Eletivas, mais conhecidas como Tempos Eletivos, nas escolas de tempo integral do Ceará, fazem parte dos Itinerários Formativos e funcionam como uma oportunidade para os alunos ampliarem suas habilidades e conhecimentos nas áreas de seu interesse. Os tempos eletivos funcionam como períodos de aulas dedicados a atividades extracurriculares, como esportes, música, artes, etc. Essas atividades são eletivas, ou seja, os alunos podem escolher quais desejam participar. Eles são uma oportunidade para os alunos ampliarem seus conhecimentos e habilidades em áreas de seu interesse, além de oferecer um ambiente de socialização e lazer. Geralmente são administrados por professores, voluntários ou por parceiros externos da escola, como ONGs ou empresas, que oferecem atividades específicas. As atividades são gratuitas e os horários podem variar de escola para escola. Em geral, os tempos eletivos são uma forma de complementar o ensino regular, oferecendo aos alunos uma experiência de aprendizagem mais completa e diversificada. É importante que as escolas forneçam uma ampla variedade de opções para atender às necessidades e interesses dos alunos. De acordo com o Catálogo das Unidades Curriculares Eletivas [14]:

> [...] os itinerários formativos são estratégicos para a flexibilização da organização curricular na etapa do ensino médio, pois possibilitam opções de escolha aos estudantes e permitem a construção de um percurso formativo com a oferta de diferentes arranjos curriculares. (UCE, 2023, p. 05)

Esses tempos são geralmente oferecidos no final do dia letivo e incluem também atividades como artes, robótica, informática e muito mais. Os estudantes podem escolher as atividades eletivas que desejam participar, e essas escolhas são geralmente motivadas conforme seus interesses e habilidades. As atividades eletivas são ministradas por professores especializados e treinados na área escolhida, e os alunos têm a chance de aprender com esses profissionais e desenvolver habilidades valiosas para o futuro. Além disso, os tempos eletivos também oferecem aos alunos a oportunidade de se envolver em atividades extracurriculares e participar de projetos comunitários, o que pode ajudar a desenvolver habilidades de liderança e trabalho em equipe. Em geral, os tempos eletivos nas escolas integrais de ensino do Estado do Ceará são uma maneira valiosa de os estudantes ampliarem suas habilidades e conhecimentos, enquanto se divertem e aprendem sobre áreas de seu interesse. Os Tempos Eletivos relacionados à Matemática, de acordo com [14] possibilitam que:

> [...] as(os) estudantes possam utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área. (UCE, 2023, p. 06)

Neste capítulo apresentaremos uma proposta de possível abordagem da Geometria Analítica nas escolas integrais de ensino médio do Ceará, diante da retirada desse importante conteúdo da disciplina de Matemática. A ideia é usar os itinerários formativos relacionados à esta disciplina, na forma de tempos eletivos, para que haja o resgate deste relevante assunto.

## 4.1 Funcionamento dos Tempos Eletivos

Os Tempos Eletivos foram criados para que os estudante tivessem mais autonomia na forma como cursam o Ensino Médio, dando a possibilidade de acesso aos alunos à aprendizagens de seu interesse para o desenvolvimento de seu projeto de vida, conforme Robinson [15]:

> [...] ao permitir que o estudante escolha o que deseja aprender, o processo de educação se torna mais pessoal, relevante e significativo. Em vez de memorizar informações sem conexão com suas próprias experiências e interesses, os alunos têm a oportunidade de explorar áreas que lhes despertam curiosidade e paixão. Isso não apenas aumenta sua motivação e envolvimento no processo de aprendizagem, mas também os ajuda a desenvolver habilidades mais profundas de pensamento crítico, análise e síntese. Além disso, a escolha de seu próprio caminho educacional pode dar aos alunos um senso mais forte de identidade, propósito e responsabilidade, permitindo que se tornem cidadãos mais conscientes e engajados em suas comunidades e na sociedade em geral. (ROBINSON, 2018, p. 28)

Os objetivos dos Tempos Eletivos são: enraizar e alargar ainda mais o conhecimento dos alunos, fortalecer a estruturação dos alunos em sua totalidade, proporcionar princípios gerais e consolidar capacidades fundamentais pertencentes a este século. Os Tempos Eletivos e Oficinas de Aprendizagem nada mais são do que horários diferenciados, criados para que os alunos aprofundem seus conhecimentos em áreas de seu interesse, como teatro, música, dança, jogos, esportes ou conteúdos específicos das disciplinas da [4], como redação, Matemática para o enem, etc. Logo, nas escolas de Tempo Integral, os alunos escolhem seus Tempos Eletivos, conforme seus gostos ou futura formação que irão seguir carreira. Cada Tempo Eletivo possui carga horária semanal de 2hrs/aula. A imagem a seguir apresenta os Tempos Eletivos da área de Matemática e suas Tecnologias, disponíveis no Catálogo de Unidades Curriculares Eletivas [14], para o ano de 2023:

Figura 4.1: Tempos Eletivos 2023

**MAT**
**MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS**

MAT001 – MATEMÁTICA BÁSICA I
MAT002 – MATEMÁTICA BÁSICA II
MAT003 – MATEMÁTICA BÁSICA III
MAT004 – MATEMÁTICA FINANCEIRA
MAT005 – MATEMÁTICA PARA OLIMPÍADAS
MAT006 – MATEMÁTICA E GAME: UM NOVO APRENDIZADO
MAT007 – MATEMÁTICA PARA O ENEM
MAT008 – MATEMÁTICA PARA O SPAECE
MAT009 – JOGOS MATEMÁTICOS
MAT010 – PRÁTICAS LABORATORIAIS DE MATEMÁTICA
MAT011 – ESTUDO DAS FUNÇÕES
MAT012 – DESENHO GEOMÉTRICO
MAT013 – APRENDENDO GEOMETRIA COM ORIGAMI
MAT014 – GEOMETRIA I (PLANA)
MAT015 – GEOMETRIA II (ESPACIAL)
MAT016 – GEOMETRIA III (ANALÍTICA)
MAT017 – INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA
MAT018 – RACIOCÍNIO LÓGICO
MAT019 – PRÉ-ÁLGEBRA NA KHAN ACADEMY
MAT020 – MATEMÁTICA ATRAVÉS DE MANDALAS AFRICANAS
MAT021 – MATEMÁTICA NA CULTURA INDÍGENA
MAT022 – JOGOS E RESOLUÇÕES DE CONFLITOS
MAT023 – RESULTADOS DE PESQUISAS NA MATEMÁTICA

Fonte: Secretaria da Educação do Ceará

## 4.2 Escolha dos Tempos Eletivos pelos professores nas escolas

Quanto à oferta dos Tempos Eletivos, os professores, de acordo com sua carga horária na escola, são consultados sobre quais Tempos Eletivos/Oficinas, dentre uma lista de opções, escolherá para que sejam ofertados, mediante seu domínio e necessidade escolar. Caso seja de interesse do professor ofertar algum Tempo Eletivo ou Oficina que não esteja nessa lista e que seja interessante para os educandos e escola, isso pode ser realizado. Feito isso, os professores apresentam seus Tempos Eletivos e, os alunos, conforme suas necessidades educacionais e preferências, escolhem os que irão cursar no semestre.

Sendo assim, diante das mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio para a disciplina de Matemática e, mais especificamente, para a Geometria Analítica, é de suma importância que o professor de Matemática escolha ao menos um Tempo Eletivo que contemple este assunto para os alunos dos terceiros anos, para que esses educandos não sejam prejudicados com a ausência da Geometria Analítica, a partir do ano de 2024.

## 4.3 Tempo Eletivo III - Geometria Analítica

O Tempo Eletivo de Geometria III é o destinado ao estudo da Geometria Analítica. São duas aulas semanais totalmente dedicadas à aprendizagem deste importante conteúdo da Matemática. Mediante a retirada da Geometria Analítica do 3° ano do Ensino Médio, este Tempo Eletivo é uma "válvula de espape"para que este assunto não seja esquecido. Na seção a seguir são expostas possíveis atividades para serem trabalhadas neste relevante horário de estudo da Geometria Analítica.

## 4.4 Como a Geometria Analítica pode ser desenvolvida no Tempo Eletivo de Geometria III

São várias as formas possíveis de abordagens para o ensino da Geometria Analítica. A seguir serão sugeridas 4 propostas de abordagens para as aulas de Geometria III, o de Geometria Analítica, que podem ser usadas para amenizar as dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

### 4.4.1 Aula na forma de apresentações interativas

A primeira forma possível para trabalhar a Geometria Analítica em sala é através de aulas expositivas com o uso de apresentações interativas, em que o professor apresenta e explica os conceitos e as fórmulas envolvidas no conteúdo. Os alunos podem então realizar exercícios e problemas para aplicar os conceitos aprendidos. Podem ser usados recursos tecnológicos para as apresentações dos conceitos no programa PowerPoint, Prezi ou outras ferramentas. Usar animações, gráficos e exemplos interativos para ilustrar os conceitos é bastante relevante para fixar a atenção dos educandos e tornar o aprendizado mais envolvente e efetivo. A seguir, será dado um passo a passo de como esta apresentação interativa pode ser desenvolvida de forma mais detalhada. Escolhido o tópico da aula, é necessário que:

- O professor estabeleça suas metas e objetivos de forma clara para essa apresentação;
- Determine o tempo disponível para a apresentação e divida-o de acordo com a quantidade de tópicos a serem abordados;
- Seleção de Ferramentas. Escolher um software de apresentação que suporte interatividade, como PowerPoint, Prezi ou Google Slides, é indispensável;
- Escolha um software ou aplicativo de Geometria Analítica que permita criar e analisar uma reta ou circunferência no Plano Cartesiano, por exemplo, e de forma interativa, como GeoGebra ou Desmos, por exemplo;

  Concluídos os tópicos acima, o professor pode:

- Começar sua aula com uma introdução dos conceitos básicos do tópico escolhido e sua importância;
- De acordo com o tópico da Geometria Analítica escolhido, criar slides com definições, fórmulas e exemplos;
- Integrar o estudo da distância entre dois pontos, o gráfico de retas e circunferências no plano cartesiano, por exemplo, com aplicativos/programas dinâmicos, tal que se possa analisar o que ocorre nessas representações ao serem modificados variáveis, de forma que esses gráficos possam ser manipulados pelos alunos em tempo real durante a apresentação da aula, caso a escola tenha computadores disponíveis, pode proporcionar um melhor entendimento do que está sendo estudado;
- Adicionar perguntas e atividades que incentivem os alunos a interagir com o conteúdo que se está sendo exposto com o uso do aplicativo/programa e aplicar os conceitos aprendidos fundamental.

Preparação para a apresentação:

- É fundamental o preparo de uma lista de instruções passo a passo para usar os gráficos interativos;
- Testar os elementos interativos e certificar-se de que funcionam corretamente é indispensável para a correção de possíveis erros, para apresentação do conteúdo de forma clara e envolvente, adaptando as aulas futuras conforme o feedback dado pelos alunos não pode ser esquecido.

Avaliação e Feedback:

- Peça aos alunos que forneçam feedback sobre a apresentação e os elementos interativos usados;
- Avalie o progresso dos alunos por meio de atividades, trabalhos, avaliações ou projetos relacionados ao tema abordado;
- Use o feedback e os resultados da avaliação para ajustar e melhorar futuras apresentações interativas e assim, aperfeiçoar ainda mais o formato da aula e os resultados obtidos.

### 4.4.2 Usando Atividades Práticas

Aqui, o professor, após a apresentação do conteúdo que está sendo estudado da Geometria Analítica, pode fazer uso de atividades práticas para que os alunos possam aplicar os conceitos da aprendidos. Por exemplo, o professor pode desenvolver ou pesquisar um jogo em que os alunos possam encontrar a equação de uma reta com base em pontos de referência dados na aula expositiva, ou criar um projeto no qual os alunos possam desenhar uma figura geométrica usando coordenadas cartesianas numa cartolina. A seguir, será exposta de forma detalhada uma atividade chamada de Caça ao Tesouro, cujo objetivo é ensinar aos alunos conceitos básicos de Geometria Analítica, como coordenadas cartesianas, distância entre pontos e equações de retas. Os materiais usados nesta atividade são:

- Papel milimetrado ou papel quadriculado;
- Lápis;
- Régua;
- Borracha;
- Cartões de instrução com pistas geométricas (preparados pelo professor).

O procedimento para prática desta atividade é:

1. Divida a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.

2. Distribua papel milimetrado ou quadriculado, lápis, régua e borracha a cada grupo.

3. Entregue a cada grupo um conjunto de cartões de instrução com pistas geométricas que os levarão a encontrar um tesouro no Plano Cartesiano. As pistas devem ser elaboradas previamente pelo professor e estar relacionadas com conceitos de Geometria Analítica. Por exemplo:

   - Pista 1: "O tesouro está horizontalmente a 5 unidades de distância do ponto A(2, 3)."
   - Pista 2: "O tesouro está verticalmente a 4 unidades de distância do ponto B(7, 2)."

4. Os alunos deverão trabalhar em grupo para interpretar as pistas e utilizar os conceitos de Geometria Analítica para encontrar o tesouro. Neste caso, eles precisarão usar as fórmulas de distância entre pontos e resolver um sistema de equações.

5. Os grupos podem compartilhar suas soluções e discutir diferentes abordagens utilizadas. Ao final, o professor pode apresentar a solução correta, explicando os passos e reforçando os conceitos estudados.

6. O professor pode criar variações dessa atividade, utilizando diferentes pistas e conceitos (como equações de retas, coeficientes angulares e interseção de retas) para explorar ainda mais tópicos da Geometria Analítica e tornar a atividade mais desafiadora. É importante destacar a necessidade de que, ao final da atividade, o professor faça uma síntese do que foi apresentado, reforçando os conceitos abordados da Geometria Analítica, ajustando, sempre que necessário, equívocos das apresentações das equipes.

0.5cmEssa atividade prática permite que os alunos apliquem conceitos de Geometria Analítica de maneira lúdica e colaborativa, facilitando o entendimento e a retenção desses conceitos.

### 4.4.3 Uso de tecnologia na forma do software de geometria dinâmica: Geogebra

O GeoGebra é uma ferramenta poderosa e versátil para ensinar Geometria Analítica aos alunos. Aqui estão algumas formas para usar o GeoGebra de maneira efetiva: Mostrar gráficos interativos: O GeoGebra permite que você mostre gráficos de funções e equações de maneira interativa, permitindo que os alunos visualizem e experimentem diferentes valores. Demonstrar conceitos matemáticos: O GeoGebra oferece uma série de ferramentas que permitem que você demonstre conceitos matemáticos de maneira clara e concisa, como o cálculo de distância e interseção de retas. Nurnberg [16], diz que:

> [...] podem ser trabalhados muitos conceitos relacionados a retas, interpretações gráficas de um sistema de equações, representação de retas perpendiculares, trabalhadas distancia entre dois pontos e reta, inequações e suas variáveis, e outras situações, realizadas aplicações de funções e construção de gráfico de maneira fácil e prática. Já que este trabalho é dinâmico, o aluno vai adquirindo habilidade de trabalhar o programa e as construções são desenvolvidas com maior agilidade. Mas, para se trabalhar com o geogebra é viável o aluno conheça a teoria para que ele possa ir desenvolvendo as construções e analisando os seus resultados com os resultados esperados, para que o professor possa trabalhar de maneira a orientar o discente até que o mesmo chegue aos resultados esperados. (NURNBERG, 2016, p. 172)

São várias as possibilidade de uso do Geogebra, como: Criar e compartilhar atividades. Com ele é também possível que você crie e compartilhe atividades interativas e desafiantes para seus alunos, ajudando-os a fixar os conceitos aprendidos; realizar simulações: Este programa de celular e computador oferece uma série de simulações que permitem que você e seus alunos experimentem em diferentes situações matemáticas, ajudando os alunos a compreender como as equações se aplicam no cotidiano; Incentivar a colaboração: O Geogebra permite que os alunos trabalhem juntos em atividades e projetos, incentivando a colaboração e a troca de ideias. Em resumo, ele é uma ferramenta poderosa e versátil para ensinar Geometria Analítica aos alunos, oferecendo uma série de recursos interativos e práticos para ajudar na compreensão dos conceitos da Geometria Analítica.

### 4.4.4 Atividades em grupos

Esta é uma forma de abordagem comum, mas que deve ter sua importtância reafirmada, pois esses tipos de trabalhos possibilitam maior interação entre os alunos. É importante que o professor organize esses grupos em níveis, pondo sempre em cada grupo ao menos um aluno que possa ajudar os demais, ou seja, algum aluno que possua maior familiaridade com a Matemática. Em seguida, o professor pode atribuir à cada grupo uma tarefa relacionada a Geometria Analítica. Por exemplo, cada grupo pode receber um problema de geometria analítica para resolver e apresentar à turma. Essa abordagem ajuda a promover a colaboração e a discussão entre os alunos.

Será dado a seguir um possível exemplo de atividade que pode ser aplicada no Tempo Eletivo de Geometria Analítica:

- Atividade: Construindo formas geometricas notáveis com coordenadas no Plano Cartesiano.

- Os objetivos são: compreender o sistema de coordenadas cartesianas, identificar as relações entre as coordenadas e as figuras geométricas, aplicar os conceitos de distância, inclinação, interceptação, retas e áreas.

  Materiais que podem ser usados:

- Papel milimetrado;

- Lápis;

- Régua;

  Passo a passo:

  1. Divida os alunos em grupos de 3 a 5 integrantes;
  2. Entregue uma folha de papel milimetrado e um lápis para cada grupo;
  3. Explique o sistema de coordenadas cartesianas, mostrando como cada ponto é representado por uma dupla ordenada (x, y);
  4. Mostre como desenhar uma reta a partir de uma equação linear, explicando como a inclinação e a interceptação são identificadas na equação;
  5. Peça aos alunos que, em grupo, escolham um desenho de uma figura geométrica simples (por exemplo, um triângulo, um quadrado ou um círculo);
  6. Solicite que os alunos discutam e definam as coordenadas de cada vértice ou ponto da figura escolhida, e que desenhem a figura no papel milimetrado;
  7. Para as figuras mais complexas, sugira que os alunos utilizem um software de desenho vetorial;
  8. Peça que cada grupo apresente a figura que desenhou e explique como chegou às coordenadas de cada ponto;
  9. Faça perguntas sobre as relações entre as coordenadas e a figura desenhada, e como as equações das retas e curvas podem ser utilizadas para descrever a figura;

10. Finalmente, peça que os alunos identifiquem as semelhanças e diferenças entre as figuras desenhadas pelos diferentes grupos, discutindo as diferentes abordagens utilizadas.

    Essa atividade permite que os alunos apliquem os conceitos de Geometria Analítica na prática, estimula a colaboração entre os membros do grupo, e promove a discussão e reflexão sobre os resultados obtidos. Além disso, a utilização do papel milimetrado e do software de desenho vetorial permite que os alunos visualizem as figuras de forma mais clara e precisa.

## 4.5 Principais Dificuldades encontradas pelos professores de Matemática quanto aos Tempos Eletivos da Matemática

Embora os Tempos Eletivos sejam uma possibilidade para que os alunos estudem Geometria Analítica, a maioria dos professores encontra desafios para que desenvolvam suas atividades nesses horários diferenciados. As principais dificuldades, segundo relatos dos professores nas reuniões escolares e encontros de professores da área, são: falta de interesse dos alunos devido aos Tempos Eletivos não terem uma média/nota oficial que indicará se o aluno será ou não aprovado. Infelizmente muitos alunos ainda desfrutam de uma mentalidade na qual priorizam notas e não aprendizagem. Outra dificuldade é a falta de formações contínuas voltadas para atividades práticas, já que na grande maioria dos casos, os cursos superiores do magistério não contemplam atividade contextualizadas. Mais entraves são:

- Falta de motivação dos alunos: muitos alunos não se sentem motivados a aprender Matemática, seja por medo, desinteresse ou por terem experimentados experiências negativas anteriores. Isso pode dificultar a participação ativa dos alunos em sala de aula e tornar o processo de aprendizagem mais desafiador;

- Dificuldades de compreensão: a Matemática é uma disciplina que exige uma compreensão conceitual sólida, e muitos alunos têm dificuldade em entender os conceitos matemáticos abstratos. Isso pode levar a um aprendizado superficial e à dificuldade de aplicar esses conceitos na resolução de questões e em situações do mundo real;

- Falta de recursos didáticos adequados: muitos professores enfrentam dificuldades em encontrar e utilizar materiais didáticos que sejam adequados e efetivos para ensinar Matemática. Além disso, a falta de recursos tecnológicos e laboratoriais pode dificultar a compreensão de conceitos abstratos e o desenvolvimento de habilidades práticas. Há também relatos de escolas que não buscam cuidar dos materiais já adquiridos, fazendo com que seu tempo de uso seja abreviado;

- Dificuldades em ensinar de forma contextualizada: é importante que os professores relacionem a matemática com situações cotidianas e contextualizadas, para que os alunos compreendam a aplicabilidade e relevância dos conceitos matemáticos. No entanto, muitos professores têm dificuldade em encontrar exemplos concretos e em tornar a matemática mais interessante e significativa para os alunos, pois na grande maioria das vezes, o professor não desfrutou de uma nesses moldes.

## 4.6 Possibilidades para melhores resultados nos Tempos Eletivos de Matemática

Nesta seção serão apresentadas sugestões para a correção dos problemas apresentados na seção anteror. Inicialmente, quanto à falta de interesse dos alunos devido a ausência de uma nota oficial para os tempos eletivos, uma possível saída seria disponibilizar, assim como nas disciplinas oficiais como Química, Física e etc, a inserção das médias dos tempos eletivos no diário online, a qual os alunos possuem acesso. Outro problema citado acima foi a falta de formação adequada para se trabalhar os tempos eletivos de forma aplicada. A formação da grande maioria dos professores não foi estruturada com foco num ensino contextualizado. Assim, diante deste delicado problema, é necessário que haja formações para aqueles que já concluíram a graduação e estão atuando e, para as próximas gerações de professores, é de fundamental relevância inserir na grade curricular das faculdades de licenciatura, disciplinas focadas na aplicação do conhecimento teórico.

Prosseguindo, outro grande desafio para a comunidade escolar é vencer problemas de motivação. Este é, sem dúvidas, um ponto indispensável que necessita ser pensado. Uma forma de atacar este problema é contar com a presença sistemática de profissionais ligados às àreas emocionais como psicologia. Mostrar também que através da educação é possível alcançar melhores condições em vário aspectos, é importante. A presença constante dos pais na escola e o acompanhamento diário por eles, são indispensáveis para que seja amenizado a problemática da falta de motivação.

Conforme a ordem das dificuldades apresentadas, é necessário agora que seja falado sobre a falta de preparo dos alunos, isto é, a maior parte dos alunos não está na série adequada, considerando os conhecimentos matemáticos necessários. Uma forma de amenizar este problema é inicialmente fazer o mapeamento dos alunos com mais dificuldades dos primeiros anos e usar os tempos eletivos, os horários de estudo, a matemática II, cujo foco é revisar conteúdos básicos e/ou as aulas de aprofundamento para tentar amenizar essas principais dificuldades, para que este grave problema seja atacado de fato.

É bem conhecido que os recursos tecnológicos são grandes aliados da aprendizagem. Mais investimentos e mais cuidados com os equipamentos já disponíveis na escola são pontos cuja importância deve ser reafirmada. Não basta apenas atualizar os recursos disponíveis e trazer novos, é importante também criar um ambiente mantenedor dessas tecnologias que são verdadeiras aliadas da educação. Assim faz-se necessário que haja mais investimentos e mais cuidados com os materiais ja disponíveis, pois muitos aparelhos tecnologicos poderiam ainda estarem em pleno funcionamento se muitas escolas melhorassem a forma como lidam com esses materiais. Portanto, nesta seção, o foco será sugerir possíveis soluções para os problemas apresentado na seção anterior e que, sem dúvidas, possuem relevants influências numa educação de mais qualidade.

## 4.7 A Matemática II, Aulas de Aprofundamento e Horários de Estudo como potencializadores da aprendizagem da Matemática

As aulas da Matemática II e de Aprofundamento, possuem como foco melhorar a aprendizagem dos estudantes em conteúdos-base necessários para maior entendimento dos assuntos da série na qual estão matriculados. Já os Horários de Estudo são usados para que os alunos se mantenham atualizados quanto aos conteúdos vistos diariamente nas mais variadas disciplinas estudadas. Eles não são Tempos Eletivos, mas estão presentes nas Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral e buscam de forma geral amenizar os problemas de aprendizado em conteúdos básicos da Matemática de séries anteriores. As aulas de aprofundamento iniciaram-se no ano de 2022, com a chegada do Novo Ensino Médio e estão sendo implementada de forma gradativa. Elas substituirão, até o ano de 2024, as aulas de Matemática II. Nas subseções a seguir, serão expostos de forma mais detalhada cada um desses aliados do aprendizado da Matemática.

### 4.7.1 Funcionamento da Matemática II nas EEMTI's do Ceará

A disciplina de Matemática II ainda está presente nas escolas integrais, mas apenas nos terceiros anos, pois, no Novo Ensino Médio, está sendo substituída pelas aulas de aprofundamento que possuem praticamente o mesmo foco e mesma carga horária. Esta matemática possui uma média oficial, que é disponibilizada para os alunos no sistema online. Este horário de estudo visa possibilitar aos alunos o acesso à conteúdo das séries anteriores que por algum motivo não foram assimilados de forma integral pelos estudantes.

### 4.7.2 Conhecendo as Aulas de Aprofundamento das EEMTI's do Ceará

Quanto às aulas de aprofundamento, pode-se dizer que esta possui carga horária semanal de 2h/aula. Ao ser ofertado pela escola, esta é uma possibilidade para que os alunos adentrem mais ainda em determinados conteúdos-base indispensáveis para uma aprendizagem da Matemática de forma estruturada. Assim, é indispensável que o professor responsável por esta importante aliada da aprendizagem, busque desenvolvê-la de forma que os alunos possam assimilar o máximo possível de conhecimento. Aulas contextualizadas com a realidade dos discentes são indispensáveis para que essa aprendizagem possa ocorrer de fato.

### 4.7.3 Como funcionam os Horários de Estudos nas Escolas Integrais de ensino

Nesta subseção, será apresentado esse importante ativo para a aprendizagem. As aulas do Horário de Estudo ocorrem semanalmente e durante duas horas-aula. Este é um espaço de tempo destinado exclusivamente para que os alunos possam estudar os conteúdos vistos nas aulas semanais. Diante da grande carga horária dos diversos conteúdos estudados diariamente. Apenas duas aulas semanais costumam ser insuficientes, mas, infelizmente, é o que se tem disponível. Logo, usar este horário como aliado para aprendizagem de Matemática é fundamental. Vale destacar que este tempo de estudo é destinado para todas as disciplinas, mas há sim a possibilidade de que ao menos parte desses 100 minutos semanais sejam usados para que os alunos possam rever o que foi exposto em sala de aula.

# Capítulo 5

# Principais Tópicos de estudo da Geometria Analítica no Tempo Eletivo de Geometria III

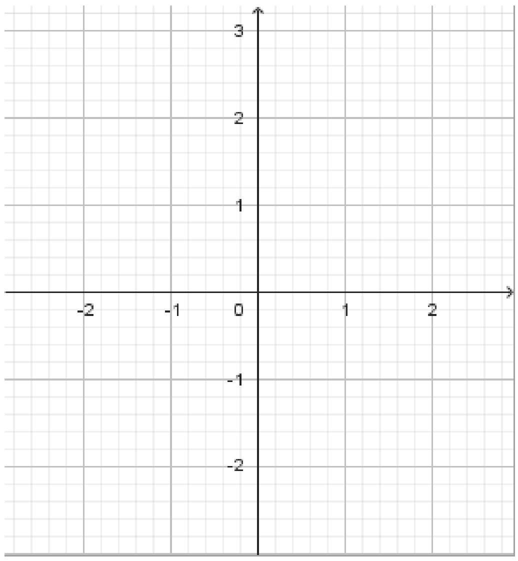
De acordo com o Catálogo das Unidades Curriculares Eletivas [5], a Unidade Curricular Eletiva de Gemetria III possui como objetivo geral obter instruções pertencentes aos assuntos de Geometria Analítica, como plano cartesiano e equações de retas, por exemplo, e como objetivo específico, rever assuntos da Geometria vistos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, por meio de aspectos práticos e prazerosos. Os objetivos da aprendizagem são: desenvolver ações de acordo com a demanda local, priorizando a comunidade do aluno, incentivando o desenvolvimento do uso de medidas de comprimento, território e espaço.

Neste capítulo, vamos expor os assuntos da Geometria Analítica que, conforme sugerido em [14], podem ser abordados em sala nesse Tempo Eletivo. Serão explanados, de forma sucinta, os seguintes assuntos: plano cartesiano, distância entre dois pontos no plano cartesiano, equação da reta, equação da circunferência e posições relativas entre uma circunferência, ponto e retas.

## 5.1 Plano Cartesiano

O sistema de coordenadas cartesianas, também conhecido como plano cartesiano, consiste em um par de retas perpendiculares $OX$ e $OY$ do plano, que se intersectam no ponto $O$. As retas $OX$ e $OY$ são chamadas eixos coordenados e o ponto $O$ é denominado a origem do sistema de coordenadas. O eixo $OX$ é chamado de eixo das abscissas e o eixo $OY$, de eixo das ordenadas. Ao optar por este sistema no plano, que podemos chamar de $\alpha$, é possível obter uma relação na qual, a cada ponto $P$ pertencente a $\alpha$, está associado um único par da forma $(x, y)$ e vice-versa, coforme exposto em [17]. Temos aqui uma relação biunívoca entre $\alpha \to \mathbb{R}^2$, onde $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados $(x, y)$ de números reais. Desta forma, o par $(x, y)$ se apresenta como as coordenadas cartesianas de um ponto $P$ do plano $\alpha$. Assim, $\alpha$ pode ser entendido como um plano numérico, composto por pontos da forma $P = (x, y)$. Temos que, os valores $x$ e $y$ são chamados de coordenadas de $P$, em relação ao sistema $XOY$, onde $x$ é a abscissa e $y$ a ordenada desse ponto, conforme [18]. Na Figura 5.1, temos a representação de um plano cartesiano, como explicado anteriormente:

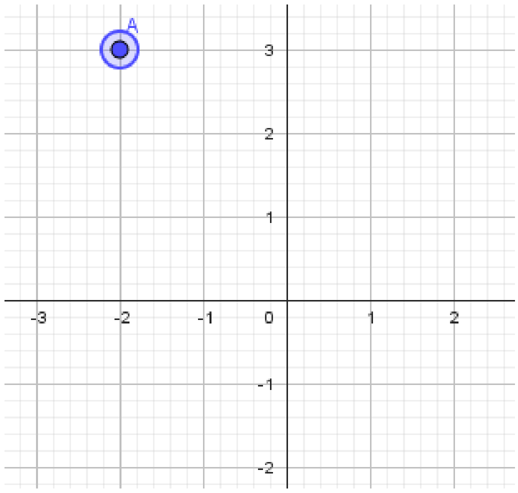
Figura 5.1: O Plano Cartesiano




Fonte: O autor

É importante que seja falado sobre o funcionamento da representação de pontos no plano cartesiano. Considerando $P$ um ponto qualquer, se ele está sobre o eixo $OX$, o par ordenado associado será da forma $(x, 0)$, onde $x$ é a abscissa deste ponto no eixo $OX$. Se $P$ estiver sobre o eixo $OY$, correspondente a ele está o par ordenado $(0, y)$, tal que $y$ é a ordenada de $P$ nesse eixo. Agora, se $P$ não pertence a nenhum dos eixos coordenados, é necessário que sejam traçadas por esse ponto uma reta paralela ao eixo $OY$, a qual corta $OX$ no ponto de abscissa $x$ e também uma reta paralela ao eixo $OX$, que corta $OY$ no ponto de ordenada $y$, de acordo com [18]. Na Figura 5.2, está marcado o ponto $A(-2, 3)$, isto é, de abscissa $-2$ e ordenada 3

Figura 5.2: Exemplo de ponto do plano




Fonte: O autor

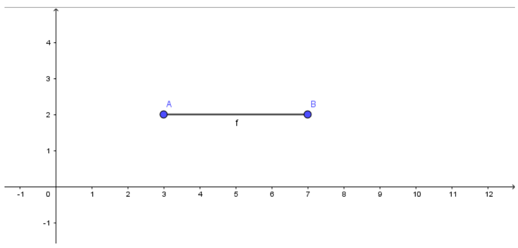
### 5.1.1 Distância entre dois Pontos no Plano Cartesiano

A distância entre dois pontos no plano cartesiano é uma medida importante na geometria e em diversas áreas da matemática e da ciência. Ela é dada pela raiz quadrada da soma do quadrado da diferença entre as abscissas com o quadrado da diferença entre as ordenadas dos pontos. Esta fórmula é conhecida como a fórmula de distância euclidiana. Basicamente, são três os casos possíveis para a distância entre dois pontos: quando o segmento $\overline{AB}$ que une os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é paralelo ao eixo x, quando o segmento $\overline{AB}$ que une os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é paralelo ao eixo y e quando este segmento é oblíquo em relação aos eixos. A seguir, veremos esses três casos de forma mais detalhada, um por um.

Caso 01: Quando o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo $x$, Conforme a Figura 5.3, a distância entre $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ será dada por:

$$d(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

Figura 5.3: Caso 01: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x



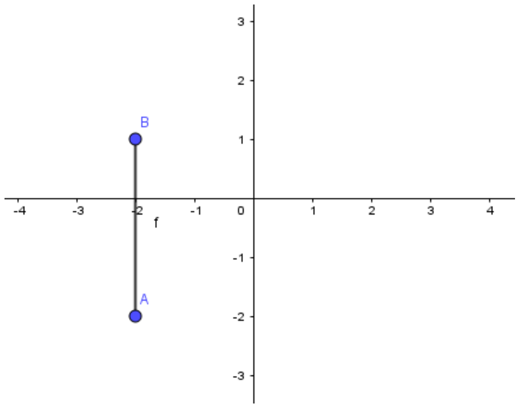

Fonte: O autor

Agora, considerando que os dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ estejam de tal forma que o segmento $\overline{AB}$ seja paralelo ao eixo y, de modo análogo ao anterior, neste caso, a distância entre $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ será dada por:

$$d(A, B) = |y_2 - y_1|.$$

Esta ilustração consta na Figura 5.4.

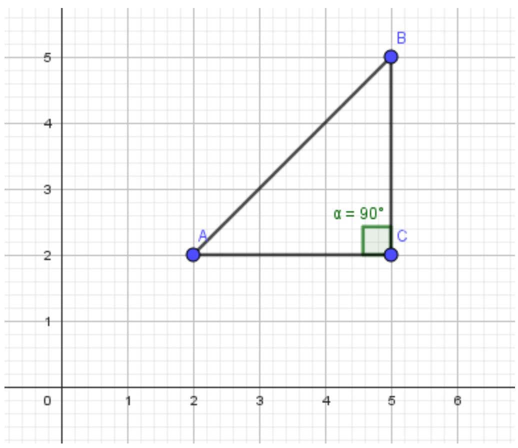
Figura 5.4: Caso 02: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo y




Fonte: O autor

No caso em que o segmento $\overline{AB}$ é obliquo aos eixos, a distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é dada por: $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Esta fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos é facilmente demonstrada fazendo o uso do Teorema de Pitágoras associado ao triângulo retângulo, cula hipotenusa é o segmento $\overline{AB}$. Na Figura 5.5, temos a ilustração deste caso.

Figura 5.5: Caso 03: O segmento $\overline{AB}$ é oblíquo em relação aos eixos




Fonte: O autor

Note que na imagem, o ponto de coordenadas $C(x_3, y_3)$ possui papel central para a determinação da fórmula da distância deste último caso. O segmento $\overline{AC}$

é paralelo ao eixo $x$. Assim, o comprimento deste segmento é dado por $|x_3 - x_1|$. Perceba também que, $\overline{BC}$ é paralelo ao eixo y. Logo, a distância de $B$ a $C$ é dada por $|y_2 - y_1|$. Segue que, a distância $d(A, B)$ entre $A$ e $B$ é encontrada fazendo $d(A, B)^2 = |x_3 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$, ou seja:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### 5.1.2 Coordenadas do Ponto Médio de um segmento no Plano Cartesiano

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos do plano cartesiano. O ponto médio $M = (x, y)$ do segmento $\overline{AB}$ é definido como o ponto que está exatamente no meio do segmento. As coordenadas do ponto médio $M(x, y)$ do segmento $\overline{AB}$ são dadas por:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Para provar essas relações, podemos usar a distância entre os pontos $A$ e $B$. A distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é dada pela fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Como o ponto médio $M$ está no meio do segmento $\overline{AB}$, a distância de $A$ a $M$ é igual à distância de $M$ a $B$. Podemos escrever isso como:

$$d(A, M) = d(B, M).$$

Usando a fórmula de distância, podemos escrever:

$$\begin{aligned} d(A, M) &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ d(B, M) &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \end{aligned}$$

Usando o fato de que as distâncias $d(A, M)$ e $d(B, M)$ são iguais, podemos elevar essas igualdades ao quadrado e simplificar para obtermos:

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ x^2 - 2x_1 \cdot x + x_1^2 + y^2 - 2y_1 \cdot y + y_1^2 &= x^2 - 2x_2 \cdot x + x_2^2 + y^2 - 2y_2 \cdot y + y_2^2 \\ 2x_2 \cdot x - 2x_1 \cdot x + 2y_2 \cdot y - 2y_1 \cdot y &= x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

O que mostra que as fórmulas para as coordenadas do ponto médio são válidas.

## 5.2 Equação da Reta

O estudo da equação da reta é de fundamental importância tanto na Matemática, quanto em outras áreas do conhecimento, como Física e Engenharia. Ela pode ser usada para modelar relações entre variáveis e para fazer previsões em uma variedade de campos. Por exemplo, na Física, a equação da reta é usada para modelar a relação entre duas variáveis, como a posição e o tempo. Já na Engenharia, a equação da reta pode ser usada para modelar a relação entre duas variáveis, como a pressão e o volume.

Antes do Novo Ensino Médio, o conteúdo de equação da reta era visto no terceiro ano do Ensino Médio. Ela é geralmente apresentada nas formas reduzida, segmentária, paramétrica e na forma geral. Cada uma dessas formas tem seus próprios benefícios e desafios, dependendo da situação em que estão sendo usadas.

Nesta dissertação, exploraremos a equação da reta nas formas geral e reduzida. Vamos começar com uma revisão das formas mais comuns da equação da reta e examinar suas propriedades e aplicações. Em seguida, vamos aprofundar em tópicos mais avançados, como a distância de um ponto a uma reta e retas perpendiculares.

A equação da reta $r$ que passa pelos pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pode ser encontrada através do cálculo do determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante acima, chegaremos em:

$$(y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) = 0.$$

Na equação acima, fazendo $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$, teremos a equação da reta na forma geral, onde todo ponto $Q(x, y)$ de $r$ deve estar de acordo com a equação, ou seja, suas coordenadas satisfazem esta equação:

$$ax + by + c = 0.$$

A partir da equação na forma geral $a{\cdot}x{+}b{\cdot}y{+}c = 0$, isolando o y, encontramos:

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}.$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, teremos a equação da reta em sua forma reduzida:

$$y = mx + n.$$

## 5.3 Posições Relativas entre Retas

As três posições relativas entre duas retas são:

- Retas paralelas: Duas retas são paralelas quando elas não têm ponto em comum. Se as retas $r_1$ e $r_2$ são paralelas, escreve-se: $r_1 \parallel r_2$.
- Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes quando elas têm um único ponto em comum;
- Retas coincidentes: Duas retas são coincidentes quando elas contêm exatamente os mesmos pontos. Para indicar que as retas $r_1$ e $r_2$ são coincidentes, podemos escrever: $r_1 = r_2$.

## 5.4 Coeficiente angular

O coeficiente angular (ou a inclinação) de uma reta é definido como sendo a tangente do menor ângulo que ela faz com eixo $x$. Assim, chamando de $\alpha$ o ângulo que a reta $r$ forma com o eixo $x$, e de $m$ o coeficiente angular de $r$, temos que $m = \tan\alpha$.

Vale comentar que, como é visto no segundo ano do Ensino Médio, no assunto de trigonometria, se $\alpha$ é agudo (isto é, $\alpha < 90°$), então $\tan\alpha > 0$; se $\alpha$ é reto (isto é, $\alpha = 90°$), então $\tan\alpha$ não é definida; se $\alpha$ é obtuso (isto é, $90° < \alpha < 180°$), então $\tan\alpha < 0$. Por fim, se $\alpha$ é nulo (isto é, $\alpha = 0°$), então $\tan\alpha = 0$.

Em termos de coordenadas, temos que, dados dois pontos distintos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, de uma reta $r$, o coeficiente angular $m$ de $r$ será dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

com $(x_2 - x_1) \neq 0$.

### 5.4.1 Retas paralelas

Duas retas distintas $r$ e $s$ são paralelas se, e somente se, ambas possuem o mesmo coeficiente angular. Ou seja,

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s.$$

Vale salientar que para retas verticais, a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo $x$ não está definida, já que o ângulo em questão vale $90°$. Retas verticais são retas cujas equações são da forma $x = k$, para $k \in \mathbb{R}$

### 5.4.2 Retas perpendiculares

Dadas as retas $r : y = m \cdot x + n$ e $s : y = m' \cdot x + n'$, analisemos quais condições devem ser satisfeitas para que essas retas sejam perpendiculares. Note que as retas $r' : y = m \cdot x$ e $s' : y = m' \cdot x$ são, respectivamente, paralelas às retas $r$, $s$ dadas, já que possuem mesmos coeficientes angulares. Note também que elas contém a origem do plano cartesiano, pois fazendo $x = 0$ em ambas, o $y$ encontrado será 0. Assim, analisar a perpendicularidade entre $r$ e $s$ equivale à verificar se as retas $r'$ e $s'$ formam $90°$ entre si. Tomando os pontos $P(1, m) \in r'$ e $Q(1, m') \in s'$, a situação se remete a verificar se os segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ são perpendiculares. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, os segmentos dados serão perpendiculares se, e somente se, $\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2$. Fazendo uso da fórmula da distância entre dois pontos, temos:

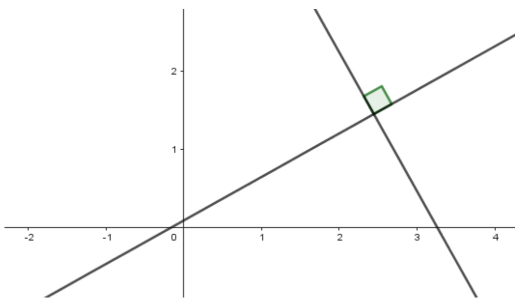
$$(1-1)^2 + (m - m')^2 = (1-0)^2 + (m-0)^2 + (1-0)^2 + (m'-0)^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 \cdot m' \cdot m + m'^2 = 1 + m^2 + 1 + m'^2$$

$$\Rightarrow -2 \cdot m' \cdot m + = 1 + 1 \Rightarrow m \cdot m' = -1$$

Logo, duas retas $r$ e $s$ são perpendiculares se, somente se, seus coeficientes angulares são tais que $m_r \cdot m_s = -1$, conforme exposto em [17]. A Figura 5.6 apresenta duas retas perpendiculares:

Figura 5.6: Par de retas perpendiculares.




Fonte: O autor

## 5.5 Coeficiente Linear

Dada uma reta de equação reduzida $y = mx + n$, como visto, $m$ é chamado de coeficiente angular. Já o coeficiente $n$, recebe o nome de coeficiente linear. Sabe-se que toda reta não vertical corta o eixo $y$ em um único ponto. Como todo ponto do eixo $y$ possui abscissa nula, segue que fazendo $x = 0$ em $y = mx + n$, teremos:

$$y = m \cdot 0 + n = n$$

Logo, toda reta do tipo $y = mx + n$, intersecta o eixo y no ponto $(0, n)$.

## 5.6 Distância de um ponto a uma reta

Seja $r$ uma reta de equação:

$$ax + by + c = 0. \tag{5.1}$$

Considere agora a reta $s$ que passa na origem do plano, tal que $s \perp r$. Sendo assim, $s$ tem equação:

$$bx - ay = 0 \tag{5.2}$$

Logo, se o sistema de equações (5.2) e (5.3) for resolvido, será determinado o ponto de encontro entre essas retas $r$ e $s$. Seja $P(x, y)$ o ponto de interseção entre $r$ e $s$. Elevando ambos os membros das equações acima ao quadrado, encontraremos:

$$(ax + by)^2 = (-c)^2 \tag{5.3}$$

$$(bx - ay)^2 = 0^2. \tag{5.4}$$

Desenvolvendo os quadrados acima, adicionando membro a membro essas duas equações e organizando, encontraremos facilmente a equação: $(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2) = c^2$. Fazendo $d = x^2 + y^2$ temos $d^2 = \frac{c^2}{a^2+b^2}$. Finalmente, chegamos à equação para a distância $d$, da origem à reta $r$:

$$d = |\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}|.$$

Porém, o que nos interessa de fato é determinar a distância de um ponto qualquer a uma reta qualquer. De forma geral, a ideia é considerar esse ponto qualquer como a origem de um plano transladado e por fim, aplicar a ideia exposta acima. Assim sendo, a reta $r$ terá, no sistema transladado, a equação $ax + by + c = 0 \Rightarrow a \cdot (x' + x_0) + b \cdot (y' + y_0) + c = 0 \Rightarrow a \cdot x' + b \cdot y' + a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0$. Chamando $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = c'$ e, conforme foi exposto no caso da distância da origem a uma reta, a distância de um $P(x, y)$ à reta $r$ é dada por:

$$d = |\frac{c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}|.$$

Da fórmula acima, deduz-se que:

$$d = |\frac{a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}|.$$

### 5.6.1 Equação da Circunferência

Dados um número real $r > 0$ e um ponto $C = (a, b)$, a circunferência de centro $C$ e raio $r$ é a coleção de todos os pontos do plano que estão à distância $r$ de $C$. Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da circunferência, como a distância de $P$ a $C$ é $r$, temos que a equação da circunferência é dada por:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r^2 \qquad (5.5)$$

A equação (5.5) é denominada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo os quadrados de (5.5) e organizando os termos, encontraremos a chamada equação geral da circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \qquad (5.6)$$

### 5.6.2 Posições relativas entre ponto e circunferência

São três as posições relativas entre um ponto P e uma circunferência $\lambda$:

- P é interno a $\lambda$;
- P pertence a $\lambda$;
- P é externo a $\lambda$.

Logo, temos que:

- O ponto P é interno a circunferência se a distância de $P$ ao centro de $\lambda$ for menor que o raio $r$;
- Diremos que P pertence a $\lambda$ se a distância de $P$ ao centro de $\lambda$ for igual ao raio $r$;
- Já se P é externo a $\lambda$, diz-se a distância de $P$ ao centro de $\lambda$ é maior que o raio $r$

Assim, se quisermos identificar a posição relativa entre um ponto e uma circunferência, basta que seja calculada a distância do ponto dado ao centro dessa circunferência, e verificar em qual dos casos acima essa distância se encaixará.

### 5.6.3 Posições relativas entre reta e circunferência

De forma semelhante ao exposto no tópico anterior, são 3 as posições possíveis entre uma reta $r$ e uma circunferência $\lambda$:

- $r$ é externa, ou seja, não possui ponto em comum;
- $r$ é tangente a $\lambda$, ou seja, possui apenas um ponto em comum;
- $r$ é secante, isto é, possui dois pontos em comum com a circunferência.

Assim, dada uma reta $s$ e uma circunferência $\lambda$ de raio $r$, a forma mais comum para determinação da posição relativa entre esta reta e a circunferência é através do cálculo da distância $d$ medida do centro da circunferência à reta $s$, usando a fórmula da distância entre ponto e reta. Logo, se essa distância for maior que o raio da circunferência, $s$ será externa, se $d = r$, $s$ será tangente e se $d < r$, a reta $s$ será secante a $\lambda$

## 5.7 Algumas aplicações dos tópicos anteriores e suas resoluções

Nesta seção serão expostos alguns problemas. Todos eles foram obtidos da apostila [19] e tratam sobre os tópicos vistos nas seções anteriores. Todos eles são aplicações de nível médio, baseados em variados livros didáticos, materiais de estudo e avaliações externas. Não serão apresentadas questões de todos os tópicos devido ao foco deste trabalho não ser o de resolver questões. Porém, como estes conteúdos são de suma importância para a Geometria Analítica, decidiu-se por apresentar algumas questões e suas soluções para que estas possam servir de exemplos de como os professores podem elaborar suas próprias questões para trabalhar no Tempo Eletivo de Geometria III.

- **Problema 01.** (Área de um triangulo) Um fazendeiro pretende construir um cercado em seu terreno para separar a área para pastagem para seus animais. Usando um sistema de coordenadas cartesianas em terreno, ele verificou que o terreno tem vértices nos pontos $A(1,1)$, $B(5,1)$ e $C(3,4)$, onde a unidade de medida em ambos os eixos é o quilômetro. Determine a área do terreno que será destinada a pastagem.

**Solução:** Note que os pontos $A$ e $B$ possuem o mesmo valor de $y$. Assim, tomando como base do triângulo o segmento $\overline{AB}$, a área do triângulo pode facilmente ser encontrada por $A = \frac{Base \cdot Altura}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$.

Portanto, a área do terreno destinada a pastagem é de $6km^2$.

- **Problema 02.** (Distância entre dois pontos) Um geólogo que está estudando a topografia de uma região montanhosa precisa calcular a distância entre dois pontos no mapa, que representam a localização de duas exposições de rochas diferentes. Os pontos têm as coordenadas $(3, 4)$ e $(-2, -1)$. Qual é a distância exata entre esses dois pontos?

  **Solução:** Basta que seja usada a fórmula da distância entre dois pontos. Sendo $d$ a distância entre os pontos dados, temos:

$$d = \sqrt{(3-(-2))^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5 \cdot \sqrt{2}$$

  Assim, a distância entre os dois pontos é $5 \cdot \sqrt{2}$

- **Problema 03.** (Distância de um ponto a uma reta) Um engenheiro que está projetando um viaduto sobre uma estrada precisa determinar a distância entre um ponto da estrada e a reta que representa a trajetória do viaduto que passa acima desse ponto. A equação da reta representada pelo viaduto é $2y = -5x - 3$ e o ponto na estrada tem coordenadas $(3, 5)$. Qual é a distância entre o ponto e o viaduto?

  **Solução:** Escrevendo a equação da reta na forma geral, fica $2x + y - 3 = 0$. Substituindo os valores de $a, b$ e $c$ na fórmula da distância de um ponto a uma reta, fica,

$$d = \frac{|2.3 + 1.2 + (-3)|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

- **Problema 04.** (Baricentro) Um arquiteto está projetando uma nova casa em um terreno na forma de triângulo com vértices nos pontos $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ e $C(10, 2)$. Ele precisa calcular as coordenadas do baricentro do terreno para determinar onde será a localização da piscina. Determinar as coordenadas do baricentro.

  **Solução:** É preciso inicialmente que seja feita a definição de mediana e baricentro. Mediana nada mais é do que um segmento de reta que parte do vértice de um triângulo até ao lado oposto deste vértice, dividindo-o ao meio. O baricentro possui relação com as medianas de um triângulo, isto é, ele é o ponto de encontro dessas medianas, conforme se vê em [20]. Retornando a resolução da questão, o arquiteto pode calcular as coordenadas do baricentro usando as fórmulas:

$$X_b = \frac{X_a + X_b + X_c}{3} \quad \text{e} \quad Y_b = \frac{Y_a + Y_b + Y_c}{3}$$

Fazendo as substituições, fica:

$$X_b = \frac{2+6+10}{3} = \frac{18}{3} = 6 \quad \text{e} \quad Y_b = \frac{4+8+2}{3} = \frac{14}{3}$$

Portanto, as coordenadas do baricentro do terreno são $(6, \frac{14}{3})$.

- **Problema 05.** Sendo $A(3,1)$, $B(4,-1)$ e $C(-2,2)$ vértices de um triângulo, classifique-o quanto aos seus lados.

  Solução: Para resolver este problema, basta que sejam calculadas as distâncias e, em seguida, analisando se o triângulo formado pelos pontos dados é escaleno, isósceles ou equilátero. Calculando as distâncias entre os pontos, temos:

  – Distância entre $A$ e $B$: $d = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$;

  – Distância entre $A$ e $C$: $d = \sqrt{(-2-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$;

  – Distância entre $B$ e $C$: $d = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$

  Como as 3 distâncias resultaram em valores diferentes, segue que o triângulo em questão é escaleno, ou seja, possui lados de medidas diferentes.

- **Problema 06.** Um engenheiro quer construir uma estrada de ferro que passa pelos pontos de coordenadas $A(2,3)$ e $B(7,-1)$. Determine a equação da reta que representa a linha do trem.

  **Solução:** A equação da reta na forma reduzida é dada por $y = m \cdot x + n$, com $m$ e $n$ números reais e $m \neq 0$. Usaremos a equação da reta nessa forma. No ponto A, temos que $x = 2$ e $y = 3$. Substituindo esses valores de $x$ e $y$ na equação da reta acima, fica: $3 = 2m + n \Rightarrow n = 3 - 2m$. Procedendo do mesmo modo para o ponto B, temos que $-1 = 7m + n$. Fazendo a substituição na última equação, do valor de n que foi isolado, vem que $-1 = 7m + 3 - 2m \Rightarrow -1 - 3 = 5m \Rightarrow -4 = 5m \Rightarrow m = \frac{-4}{5}$. Assim, resta apenas determinar o valor de $n$, que pode ser obtido usando-se a equação $n = 3 - 2m \Rightarrow n = 3 - 2 \cdot \frac{-4}{5} = 3 + \frac{8}{5} = \frac{23}{5}$. Assim, a equação da reta procurada é $y = \frac{-4}{5} \cdot x + \frac{23}{5}$

- **Problema 07.** Se $a < 0$ e $b > 0$, os pontos $P(a, -b)$ e $Q(b, -a)$ pertencem, respectivamente, a quais quadrantes?

  **Solução:** De acordo com as informações dadas, as coordenadas do ponto $P$ possuem, respectivamente, como sinais $(-,-)$, ou seja, $P$ está no 3° quadrante. Já o ponto $Q$, possui abscissa positiva e ordenada positiva também. Logo, o ponto $B$ está no primeiro quadrante.

- **Problema 08.** Dadas as equações $x^2+2x+y^2-15=0$, $x^2+3y^2-5x-7y-1=0$, $3x^2+3y^2+4x-6y+15=0$ e $x^2+y^2-2x-2y+2=0$, determinar quais representam equações de circunferências.

  **Solução:** Na primeira equação, podemos reescrever as parcelas $x^2+2x$ e $y^2$ na forma $(x+1)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 1+1-1$ e $y^2=(y-0)^2$, respectivamente. Logo, a equação dada, fica $x^2+2\cdot x+1-1+y^2-15=0$. Agora, ao usar o método de completar quadrados, teremos $(x+1)^2+(y-0)^2=16 \Rightarrow (x+1)^2+y^2=16=4^2$, que é uma circunferência centrada no ponto $(-1,0)$ e de raio $r=4$. Quanto a segunda equação, note que, ela encontra-se na forma geral e, de acordo com 5.6, os coeficientes dos termos que estão elevados ao quadrado valem 1. Como o coeficiente de $x^2$ vale 1 e o de $y^2$ é 3, esta equação não representa uma circunferência. Fazendo uso do mesmo método, o de completar quadrado, para análise das outras equações, iremos estudar desta vez a equação 3. Dividindo todos os membros por 3, fica $x^2+y^2+\frac{4}{3}\cdot x-2\cdot y+5=0$. Organizando, adicionando e subtraindo os termos que completarão o quadrado, temos $x^2+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+y^2-2\cdot y+1-1+5=0 \Rightarrow x^2+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{4}{9}+y^2-2\cdot y+1-\frac{4}{9}-1+5=0$. Assim, $x^2+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{4}{9}+y^2-2y+1=\frac{4}{9}+1-5 \Rightarrow (x+\frac{2}{3})^2+(y-1)^2=-5+\frac{4}{9}+1=\frac{-20}{9}$ isto é, o raio seria um número complexo. Quanto a última equação, fazendo as adições e subtrações necessárias para completar o quadrado, temos que $x^2-2\cdot x+1-1+y^2-2\cdot y+1-1+2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x+1+y^2-2\cdot y+1=-2+1+1=0$. Assim, neste último caso, escrevendo a equação na forma reduzida, fica $(x-1)^2+(y-1)^2=0$, ou seja, o raio seria 0, não representando uma circunferência.

- **Problema 09.** Uma circunferência possui centro no ponto $(2,2)$ e passa pela origem do plano cartesiano. Qual é a equação reduzida dessa circunferência?

  **Solução:** necessita-se aqui que seja determinado o raio dessa circunferência. Como o centro é o ponto $(2,2)$ e ela passa na origem, segue que o raio será a distância entre esses dois pontos, que é encontrada através da fórmula da distância $d=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$. Como visto anteriormente em 5.5, a equação da circunferência na forma reduzida é dada por $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, onde $a$ e $b$ são as coordenadas do centro e $r$ é o raio da circunferência. Fazendo as substituições, a equação resulta em $(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{8})^2=8$

- **Problema 10.** Sabe-se que a reta $r$ passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos $A=(2k,1)$ e $B=(1,k)$. Qual o valor de $k$?

$$r: 2\cdot x-y+4=0$$

**Solução:** A abscissa do ponto médio de um segmento no plano é a metade da soma das abscissas de suas extremidades. Da mesma forma, a ordenada do ponto médio é a metade da soma das ordenadas de suas extremidades. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos que, $x_M = \frac{2k+1}{2}$ e $y_M = \frac{1+k}{2}$. Daí, as coordenadas do ponto médio são $M(\frac{2k+1}{2}, \frac{1+k}{2})$. Como $M$ está na reta r, suas satisfazem a equação de $r$. Assim,

$$2 \cdot \frac{2k+1}{2} - \frac{1+k}{2} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4k+2}{2} - \frac{1+k}{2} = -4.$$

Por fim,

$$\frac{3k+1}{2} = -4 \Rightarrow 3k = -8 - 1 = -9 \Rightarrow k = -3$$

Portanto, $k = -3$.

# Capítulo 6

# Considerações Finais

Conforme exposto ao longo deste trabalho, com a chegada do Novo Ensino Médio, alguns conteúdos de Matemática deixaram e deixarão de serem estudados. Diante disso, é necessário que o professor desse nível de ensino reinvente-se e busque saídas para amenizar a falta dos conteúdos importantes que foram retirados da da disciplina de Matemática. Como exposto no texto, um desses conteúdos retirados foi o de Geometria Analítica. Diante da importância dessa matéria, que possui papel de destaque na Matemática, Física e engenharias, por exemplo, e possui vasta aplicação em situações cotidianas, torna-se necessário buscar meios para que os alunos não deixem de terem contato com os assuntos trabalhados nesta matéria. Esta dissertação trouxe uma alternativa para se trabalhar esses assuntos através dos Tempos Eletivos, principalmente para os alunos que seguirão os itinerários formativos relacionados à Matemática. Isso torna possível aos alunos que escolherem participar do tempo eletivo relacionado a esta disciplina, aprofundarem ainda mais seus conhecimentos matemáticos e, além disso, ajudarem seus colegas de turma nas aulas desta matéria, possibilitando assim melhorar ainda mais os resultados das turmas e, consequentemente, das escolas estaduais em tempo integral.

Diante da nova configuração do Novo Ensino Médio, buscar formas que potencializem a aprendizagem Matemática na Educação Básica é de fundamental relevância. Isso faz parte também da postura que escolas e professores devem ter diante das mudanças constantes. É necessário um esforço conjunto para que essas potencialidades sejam trabalhadas e aplicadas visando melhorias nos ambientes escolares. A inclusão da Geometria Analítica nos Tempos Eletivos das escolas integrais pode trazer vários benefícios, como aperfeiçoar a compreensão matemática dos alunos, melhorar a capacidade de resolução de problemas e a habilidade de pensar de forma lógica e crítica. Finalizamos este trabalho com a recomendação da implantação contínua da Geometria Analítica nos Tempos Eletivos nas escolas integrais do estado do Ceará, pois isso pode trazer muitos benefícios para os alunos e contribuir ainda mais para o seu sucesso escolar. É extremamente importante que se invista em educação e na formação de jovens capazes de enfrentar os desafios do mundo atual para a construção de um futuro melhor.

# Referências Bibliográficas


1 WATSON, R. A. *René Descartes*. 2023. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Rene-Descartes>. Acesso em: 03 de setembro de 2023.

2 BOYER, C. B. *Pierre de Fermat*. 2023. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Pierre-de-Fermat#/media/1/204668/10637>. Acesso em: 03 de setembro de 2023.

3 SILVA, A. M. *A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a melhoria da qualidade da educação brasileira*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Paulo, 2023.

4 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Brasília. Ministério da Educação.

5 OCDE. *Horários Escolares: o Tempo que os Alunos Passam Aprendendo Resultados do PISA 2014*. 2014. <https://bit.ly/oecdpisa15>. Acesso em: 07 de agosto de 2023.

6 PEREIRA, G. S. S.; CORDEIRO, S. M. S. Geogebra: Uma proposta para o ensino de geometria analítica na educação básica. II Jornada de Estudos em Matemática, Marabá, PR, 2016.

7 BRASIL. *Novo ensino médio começa a ser implementado gradualmente a partir de 2022*. 2021. Disponível em: <https://bit.ly/brasilnovoemimp22>. Acesso em: 10 de setembro de 2023.

8 BRASIL, P. C. N.; MÉDIO, E. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, v. 32, 2002.

9 VYGOTSKY, L. S. *A Formação Social da Mente*. [S.l.]: Martins Fontes, 1978.

10 ALARÇÃO, I. Formação de professores, currículo e práticas pedagógicas. *Revista Brasileira de Educação*, INEP, v. 13, n. 40, p. 31–44, 1998.

11 CAVALIERE, A. M. Educação integral: uma nova identidade para a escola brasileira? *Campinas, Educação e Sociedade*, Unicamp, v. 23, n. 81, p. 247–270, 2002.

12 RIBEIRO, A. O.; ALMEIDA, A. P.; FERREIRA, M. d. A. Avaliação externa no ensino médio: uma análise crítica da lacuna entre os conteúdos abordados em sala de aula e os tópicos cobrados. *Educação e Sociedade*, v. 44, n. 132, p. 130–148, 2023.

13 UFJF, C. *Matrizes de Referência de Matemática*. 2023. Disponível em: <https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/programa>. Acesso em: 03 de setembro de 2023.

14 GOVERNO DO ESTADO DO CEARÁ. Catálogo unidades curriculares eletivas. Secretaria de Educação. 2023.

15 ROBINSON, K.; ARONICA, L. *Escolas criativas: a revolução que está transformando a educação*. São Paulo: Editora Objetiva, 2018.

16 NURNBERG, I. d. S. O geogebra como ferramenta para o ensino de geometria analítica. *Ensino da Matemática*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 23, n. 3, p. 163–183, 2016.

17 LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018. v. 3.

18 LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018. v. 1.

19 MATOS, P. de Matemática da E. P. E. *ENEM, SAEB E SPAECE MATEMÁTICA*. 2019. Disponível em: <https://drive.google.com/drive/folders/1LVJQ4dsa9y3GffjcLetARjfdRAmwW6Yc?usp=sharing>. Acesso em: 03 de setembro de 2023.

20 IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar Geometria Analítica*. São Paulo: Atual Editora, 2013. v. 7.