Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Virginia Stephany Nunes Reis

CONSTRUINDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM *POP UP*: Uma abordagem histórica para o ensino de Geometria Espacial na Educação Básica

Belo Horizonte
2023

Virginia Stephany Nunes Reis

CONSTRUINDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM *POP UP*: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Davidson Paulo Azevedo Oliveira

Coorientação
Pedro Henrique Pereira Daldegan

Banca Examinadora
Marcela Richele Ferreira
Roseli Alves de Moura
Warley Machado Correia

Belo Horizonte
2023

Reis, Virginia Stephany Nunes
R375c Construindo sólidos geométricos em *POP UP*: uma abordagem histórica para o ensino de geometria espacial na educação básica / Virginia Stephany Nunes Reis. – 2023.
107 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Davidson Paulo Azevedo Oliveira.
Coorientador: Pedro Henrique Pereira Daldegan.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Geometria espacial – Teses. 2. Geometria física – Teses. 3. Matemática – História – Teses. 4. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 5. Euclides, Elementos de – Teses. 6. Livros-brinquedo – Teses. I. Oliveira, Davidson Paulo Azevedo. II. Daldegan, Pedro Henrique Pereira. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 516.23

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Virginia Stephany Nunes Reis

CONSTRUINDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM *POP UP*: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 22 de agosto de 2023.

Virginia Stephany Nunes Reis

Virginia Stephany Nunes Reis
(Autora)

DPAOliveira

Davidson Paulo Azevedo Oliveira
(Orientador)

Belo Horizonte
2023

Dedico este trabalho às minhas afilhadas, Micaela e Eduarda, que tanto sentiram minha ausência durante sua escrita.

Também aos meus alunos, antigos, atuais e futuros, sem os quais esta pesquisa não teria razão de ser.

Agradecimentos

Agradeço à minha família e amigos por todo apoio, incentivo e compreensão nos momentos de ausência.

Agradeço aos meus orientadores do mestrado, Davidson e Pedro, por toda ajuda, pelos ensinamentos e pela paciência. Agradeço ao Davidson por me oferecer a oportunidade de escrever e publicar um livro e participar de um grande evento no cenário da História da Matemática no Brasil. Agradeço ao Pedro por aceitar participar desse desafio, pelos aconselhamentos, pelo ombro amigo e por sempre me socorrer.

Agradeço aos meus queridos alunos que com carinho, empenho e dedicação realizaram a atividade proposta nesta dissertação em apoio ao meu trabalho.

Agradeço também às professoras Marcela e Roseli e ao professor Warley pela participação na banca e pelas frutíferas contribuições.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Esta dissertação é uma revisão de bibliografia que busca unir tópicos de História da Matemática com a Geometria Espacial dos sólidos geométricos. Assim, como parte do estudo bibliográfico começamos apresentando uma revisão de literatura sobre as produções do PROFMAT em Geometria Espacial e História da Matemática. Fazemos também um estudo sobre o livro XI da obra *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria (*c.* 300 a.E.C.), sob a ótica de duas traduções, a versão inglesa feita por Henry Billingsley em 1570 e tradução brasileira feita por Irineu Bicudo em 2009. Discutimos sucintamente o contexto das matemáticas e das ciências no período em que possivelmente viveu Euclides na Idade Antiga e Billingsley no Renascimento Europeu. Ponderamos como o apoio de material concreto pode auxiliar na visualização dos objetos tridimensionais. Apresentamos um breve histórico dos livros móveis, ou livros *pop up*, (elementos em papel que saltam do livro ao virar a página), e propomos um roteiro para construção dos dez principais sólidos geométricos utilizando esse recurso, tais como definidos no livro XI de Euclides na versão de Billingsley. A construção desses objetos é feita com régua e compasso, instrumentos muito difundidos nas matemáticas da época de Euclides e retomados no período de Billingsley. Ao final da construção de cada sólido, elencamos algumas questões motivadoras para guiar a discussão acerca dos elementos de cada figura.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Sólidos Geométricos. História da Matemática. Material concreto. Euclides. *Os Elementos*. *Pop Up*.

Abstract

This thesis is a literature review that seeks to connect topics in the History of Mathematics with Spatial Geometry of geometric solids. Therefore, as part of the literature study, we begin by presenting a literature review on the productions of PROFMAT in Spatial Geometry and the History of Mathematics. We also conduct a study on Book XI of Euclid's work *The Elements*, by Euclid of Alexandria (*c.* 300 BCE), from the perspective of two translations: the English version by Henry Billingsley in 1570 and the Brazilian translation by Irineu Bicudo in 2009. We briefly discuss the context of mathematics and sciences during the period in which Euclid possibly lived in the Ancient Age and Billingsley in the European Renaissance. We consider how the support of concrete material can aid in visualizing three-dimensional objects. We provide a brief history of pop-up books (paper elements that pop out of the book when turning the page) and propose a guide for constructing the ten main geometric solids using this resource, as defined in Book XI of Euclid in Billingsley's version. The construction of these objects is done with ruler and compass, instruments widely used in the mathematics of Euclid's time and revived during Billingsley's period. At the end of the construction of each solid, we list some motivating questions to guide the discussion about the elements of each figure.

Keywords: Spatial Geometry. Geometric Solids. History of Mathematics. Concrete Material. Euclid. *The Elements*. *Pop Up*.

Lista de Figuras

2.1 Número de dissertações encontradas por categoria. 17
2.2 Sólidos com material concreto. 19

3.1 Construção da Proposição 4. 33
3.2 Papiro de Oxirrinco. 36
3.3 Proposição 5, Livro II. 37

4.1 Frontispício da tradução inglesa de Henry Billingsley. 40
4.2 Título da versão inglesa de Henry Billingsley. 40
4.3 Subtítulo da versão inglesa de Henry Billingsley. 41
4.4 Inscrição em latim. 42
4.5 Frontispício *The Cosmographical Glasse*. 45
4.6 Outros frontispícios. 46
4.7 Prefácio John Dee. 47
4.8 Planos paralelos e perpendiculares em *pop up*. 48
4.9 Pirâmides em *pop up*. 49
4.10 Livros com elementos em *pop up*. 51

5.1 Planificação de um cubo. 54
5.2 Cone em definição moderna 56
5.3 Pirâmides (oblíqua e reta) 56
5.4 Planificação do prisma triangular. 60
5.5 Molde do prisma triangular regular (fora de escala). 61
5.6 Plano de montagem do prisma triangular regular reto (fora de escala). . . . 61
5.7 Molde da esfera. 64
5.8 Cálculo do raio da base a partir da geratriz do cone. 69
5.9 Método de Kochanski. 71
5.10 Plano de montagem do cilindro (folha A4). 72
5.11 Montagem do cilindro em *pop up*. 72
5.12 Tetraedro. 76
5.13 Construção da planificação do tetraedro com régua e compasso. 76
5.14 Montagem do tetraedro em *pop up*. 77
5.15 Hexaedro. 78
5.16 Construção da planificação do hexaedro em *pop up*. 79
5.17 Montagem do octaedro em *pop up*. 79
5.18 Octaedro. 81
5.19 Construção da planificação do octaedro com régua e compasso. 82
5.20 Montagem do octaedro em *pop up*. 82
5.21 Dodecaedro. 83

5.22 Montagem do dodecaedro em *pop up*. 84
5.23 Icosaedro. 85
5.24 Construção da planificação do icosaedro com régua e compasso. 86
5.25 Montagem do icosaedro em *pop up*. 87

Lista de Tabelas

2.1 Habilidades e competências em Geometria Espacial. 18
2.2 Dissertações analisadas. 20
2.3 Número de dissertações analisadas por categoria. 23
2.4 Referencial teórico das dissertações em História. 24

5.1 Construindo uma pirâmide quadrangular regular em *pop up*. 57
5.2 Construindo uma esfera em *pop up*. 64
5.3 Construindo um cone circular reto em *pop up*. 67

Sumário

1 Introdução **11**

2 Revisão de Literatura **15**
2.1 Das dissertações do PROFMAT sobre Geometria Espacial e Sólidos Geométricos . . . 16
2.1.1 O uso de materiais concretos no ensino de Geometria Espacial . . . 20
2.2 Das dissertações do PROFMAT sobre História da Matemática, Euclides e *Os Elementos* . . . 23
2.2.1 A História da Matemática como recurso didático . . . 27

3 A Matemática Grega **29**
3.1 Euclides e *Os Elementos* . . . 31

4 Tradução de Henry Billingsley **39**
4.1 Livros móveis . . . 50

5 Construindo sólidos geométricos em *pop up* **53**
5.1 Pirâmides . . . 55
5.1.1 Pirâmide Regular Reta de Base Quadrada . . . 57
5.2 Prismas . . . 59
5.2.1 Prisma Regular Reto de Base Triangular . . . 60
5.3 Corpos Redondos . . . 62
5.3.1 Esfera . . . 63
5.3.2 Cone Circular Reto . . . 66
5.3.3 Cilindro . . . 70
5.4 Poliedros Regulares . . . 74
5.4.1 Tetraedro . . . 75
5.4.2 Hexaedro . . . 77
5.4.3 Octaedro . . . 80
5.4.4 Dodecaedro . . . 83
5.4.5 Icosaedro . . . 84

6 Considerações Finais **88**

Referências **92**

Apêndices

A Moldes dos sólidos **96**

1 Introdução

Durante minha vida escolar sempre cultivei o gosto por ensinar Matemática aos meus colegas de turma e já pensava em seguir a carreira docente. Assim, me formei em licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais e durante dois anos atuei como monitora do Projeto Visitas, um projeto de extensão universitária que atende professores e alunos da rede pública e privada para realizar oficinas de jogos matemáticos. Além de apresentar os jogos já existentes no projeto, também pude desenvolver jogos, desafios e atividades com material concreto. Este projeto tem um lugar cativo na minha formação e costumo incorporar algumas dessas experiências em minhas aulas ainda hoje. Além disso, considero também muito proveitoso o trabalho interdisciplinar, já tendo realizado trabalhos juntamente com as disciplinas de Arte, sobre a relação entre a Sequência de Fibonacci e Proporção Áurea, e História, sobre criptografia e a máquina de Turing no contexto da Segunda Guerra Mundial.

Em minha experiência enquanto professora, ao longo de três anos trabalhando como monitora em cursos pré-vestibulares e outros cinco lecionando para os três segmentos do Ensino Médio em escolas estaduais de Minas Gerais, pude observar que os alunos chegam a essa etapa de ensino com grande defasagem de aprendizado em Geometria, seja Plana ou Espacial, tendo sido um desafio adequar o conteúdo do Ensino Médio enquanto resgatava aprendizagens do Ensino Fundamental. Como educadora, acredito ser papel do professor buscar novas metodologias a fim de diversificar suas aulas e facilitar o aprendizado para seus alunos, sendo esta uma das motivações para escolha do tema desta pesquisa de mestrado. Além do meu próprio interesse em trabalhar com materiais manipuláveis e curiosidade sobre o desenvolvimento do pensamento matemático, acredito que, quando os alunos compreendem esse processo e o contexto em que ocorreu, o potencial de aprendizado se multiplica.

Utilizaremos, portanto, a História da Matemática como metodologia de ensino da Geometria Espacial, mais precisamente sobre os sólidos geométricos. A questão orientadora desta pesquisa é: "Como auxiliar os alunos da educação básica no processo de abstração para visualização de figuras tridimensionais?". Para responder a esta questão, trazemos ao final desta dissertação um roteiro para construção de figuras tridimensionais com uso de material concreto, visando construir dez sólidos geométricos dentre pirâmides, prismas, poliedros regulares e corpos redondos, tais como descritas por Euclides no volume XI de *Os Elementos*, na versão de Billingsley, nossa principal fonte histórica.

Os Elementos, tratado matemático compilado em 13 volumes e atribuído a Euclides de Alexandria (*c.* 300 a.E.C), constitui um dos livros mais influentes da História por ser um dos principais responsáveis por sistematizar e divulgar o método de escrita lógico-dedutivo utilizado nas Matemáticas e nas Ciências de sua época e posterior.

Neste sentido, o objetivo geral desta pesquisa é estudar *Os Elementos* de Euclides em duas versões, a primeira tradução em português brasileiro, feita por Irineu Bicudo em 2009 e a primeira tradução em língua inglesa feita por Henry Billingsley na Inglaterra em 1570, sendo a última a principal obra deste estudo. Também apresentamos um breve contexto da época de Euclides e de Billingsley. O objetivo específico é construir os dez principais sólidos geométricos descritos por Euclides no volume XI de seus *Elementos*, inspirados nos elementos em *pop up* presentes na versão de Billingsley. Assim como Billingsley, nosso intuito é, a partir dos modelos manipulativos, facilitar a visualização dos elementos dessas figuras, como vértices, arestas, faces, planificação, área e volume.

Sendo assim, esta pesquisa trata-se de uma revisão bibliográfica, de cunho qualitativo, e seu referencial teórico está ancorado, principalmente, em: Roque (2012) e Saito (2015) sobre as Matemáticas da Grécia Antiga e período Renascentista; Miguel (2009), Mendes & Chaquiam (2016) e Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) sobre o uso da História da Matemática no ensino; Kaleff (1994), Castro & Carvalho (2018), Lorenzato (2006) e Base Nacional Comum Curricular (2015) sobre uso de materiais concretos no ensino de Geometria Espacial; Lima *et. al.* (2006) e Iezzi *et. al.* (2006) sobre a Matemática no Ensino Básico.

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. Neste primeiro capítulo, apresentamos a motivação e os objetivos da pesquisa, a metodologia empregada neste estudo, bem como o referencial teórico. O Capítulo 2, traz uma revisão de literatura sobre as produções do PROFMAT[1] em Geometria Espacial, com ênfase no uso de materiais concretos, também

[1] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

sobre a História da Matemática e como ela é abordada na sala de aula. Desse modo, discutimos a importância da utilização de materiais concretos nas aulas de Geometria Espacial, uma vez que é conhecida a dificuldade que os alunos da Educação Básica têm com a abstração das figuras tridimensionais.

Adentrando à nossa pesquisa, o Capítulo 3 apresenta um breve histórico da Matemática na Grécia antiga, período em que Euclides estava inserido, a relação dessa ciência com a filosofia, seus desdobramentos e o papel da experimentação e das construções geométricas feitas com régua e compasso.

Dando continuidade, apresentamos Euclides de Alexandria e sua obra magna, *Os Elementos*. Para tanto, trazemos algumas considerações sobre sua vida e um pequeno resumo de cada livro da obra completa, destacando alguns resultados importantes de cada um deles.

No Capítulo 4, trazemos um estudo um pouco mais detalhado sobre a primeira tradução dos *Elementos* em língua inglesa, realizada por Henry Billingsley em 1570 na Inglaterra, além de uma análise sucinta sobre o período em que nosso tradutor estava inserido. Além disso, abordamos sobre os primeiros livros móveis[2] que temos conhecimento e suas funções didáticas na época.

O Capítulo 5 apresenta um guia com passo a passo para construção de dez sólidos geométricos. Os objetos construídos serão: pirâmide, prisma, cone, cilindro, esfera, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Os cinco últimos objetos são o que conhecemos por sólidos de Platão. A maioria das construções aqui sugeridas serão feitas com régua e compasso, materiais bastante difundidos na Grécia Antiga e provavelmente utilizados por Euclides e pelos estudiosos da época. Após a construção de cada figura, sugerimos algumas questões orientadoras para que o professor/leitor reflita junto com seus alunos sobre os objetos estudados. Este trabalho também deu origem ao site Puxando Cordinhas[3], onde podem ser encontrados tutoriais em vídeo dos objetos construídos neste capítulo.

Por último, o Capítulo 6 traz nossas considerações acerca deste trabalho, bem como algumas reflexões sobre o desenvolvimento da atividade aqui proposta em três momentos: em duas turmas de 2° ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de

[2]Livros móveis (ou livros *pop up*), são livros que apresentam algum tipo de mecanismo manipulativo em papel ou imagens e cenários que saltam do livro ao virar da página. Esses elementos são bastante conhecidos em livros infantis e cartões de aniversário.

[3]Disponível em: https://puxandocordinhas.wordpress.com/

Contagem-MG, em que a autora leciona; para alunas do curso de formação pedagógica de professores de Matemática do CEFET-MG; bem como em um minicurso oferecido no XV Seminário Nacional de História da Matemática, ocorrido em abril de 2023 e realizado pela Sociedade Brasileira de História da Matemática, que nos rendeu a publicação do livro "*OS ELEMENTOS* DE EUCLIDES E ORIGAMIS ARQUITETÔNICOS: Uma abordagem histórica para o ensino de Geometria Espacial na Educação Básica"[4]. Este livro é um recorte desta dissertação.

O leitor poderá perceber o uso de pronomes na primeira pessoa do singular em algumas passagens, designando experiências da autora, e na primeira pessoa do plural no restante, salientando que esta pesquisa não seria possível sem o apoio dos professores orientadores da autora.

[4]Disponível em: https://www.crephimat.com.br/visor_mnc.php?id_t=127

2 Revisão de Literatura

Antes de iniciar nosso trabalho, neste capítulo apresentamos uma breve análise acerca da produção discente do Mestrado Profissional em Matemática em âmbito nacional, o PROFMAT, sobre os temas de interesse: História da Matemática, Geometria Espacial e *Os Elementos* de Euclides. A pesquisa teve como parâmetro o período de 2013 a 2022, intervalo de tempo que contempla dez, dos doze anos de existência do programa de pós-graduação.

Com a revisão de literatura é possível observar as tendências de pesquisa em determinada área do conhecimento, época ou região e, assim, tentar entender o contexto em que se deu tal tendência e desenvolver teorias sobre as possíveis motivações para esses estudos. No âmbito da educação, o trabalho de revisão contribui para que o pesquisador possa fazer inferências sobre inovações pedagógicas no ensino, interesses de pesquisa ou detectar possíveis dificuldades no ensino e aprendizado de certa disciplina.

Contudo, selecionar os trabalhos a serem avaliados não é tarefa fácil. Diante de tantas produções, elencar as que mais se adequam à nossa proposta requer etapas importantes de filtragem. A esse respeito, Ramos *et. al.* (2014) afirma ser primordial

> [...] procurar definir critérios, métodos precisos e sistemáticos, por forma a identificar e selecionar as fontes bibliográficas com o máximo rigor, grau de eficiência e confiança no trabalho desenvolvido. (RAMOS *et. al.*, 2014, p. 20)

A busca foi feita no repositório de dissertações do site oficial do PROFMAT[1], que só permite a pesquisa de termos presentes no título, nome do autor ou instituição. Desse modo, a seleção de trabalhos fica um pouco restrita, sendo necessário um refinamento com base nas palavras-chave, resumo, introdução, considerações finais e, em algumas situações, com a localização de alguns termos relevantes no corpo da dissertação. Nos próximos tópicos, falaremos um pouco mais sobre a estratégia de pesquisa e os critérios utilizados

[1] https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

para seleção e análise das dissertações. Trataremos, em separado, de duas revisões, primeiro abordaremos a Geometria Espacial, com foco no trabalho com sólidos geométricos em materiais concretos, bem como algumas reflexões sobre o ensino da Geometria. Em seguida, trazemos a revisão de História da Matemática, com foco no trabalho com a Geometria ou com *Os Elementos* de Euclides. Em seguida, ponderamos sobre o uso da História nas aulas de Matemática.

2.1 Das dissertações do PROFMAT sobre Geometria Espacial e Sólidos Geométricos

A busca de dissertações sobre nosso tema de interesse, a Geometria Espacial, foi feita de duas maneiras: com a busca das palavras-chave no título "Geometria Espacial", tendo sido encontrados 83 resultados e "sólid"[2] com 50 registros, totalizando 133 trabalhos. Se considerarmos os 6821 trabalhos publicados no repositório do PROFMAT nos últimos dez anos, 1,95% dos trabalhos publicados, aproximadamente, se dedicaram a estudar algum aspecto da Geometria Espacial. Percentual este que parece pequeno em comparação com os 8,47%[3] que optaram por pesquisar funções, por exemplo.

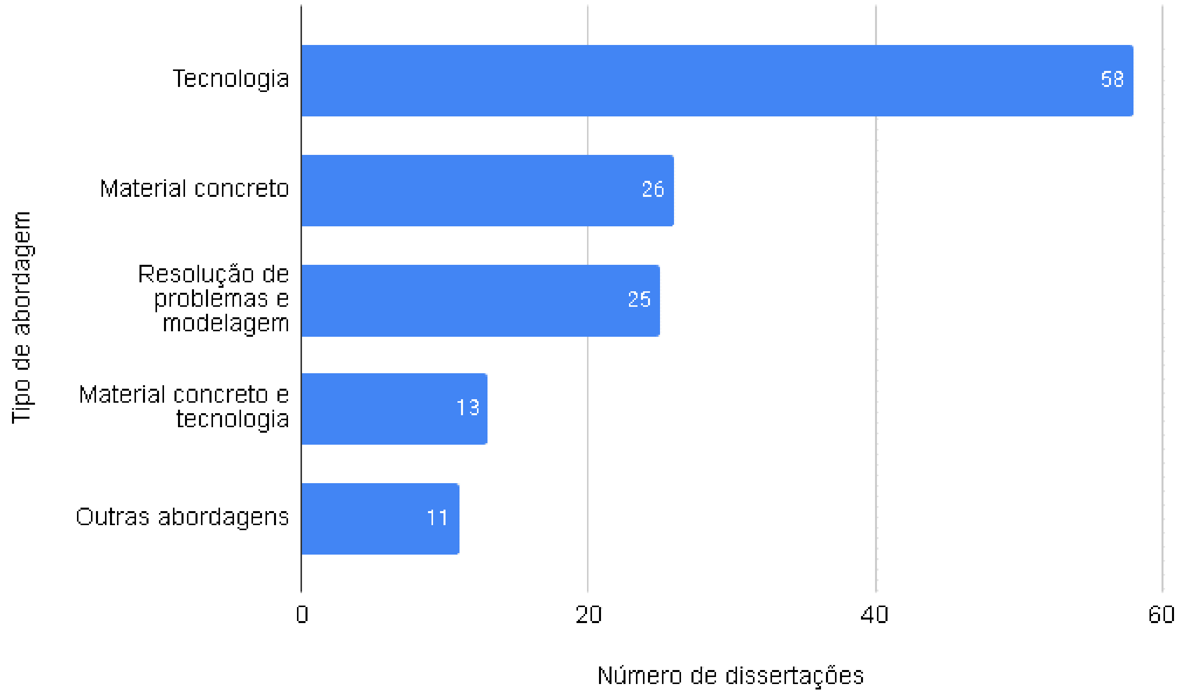
A partir da leitura do título das dissertações, das palavras-chave, resumo, sumário, introdução e considerações finais, os trabalhos foram separados em quatro categorias: a primeira, considera os que fizeram uso de tecnologias como aplicativos de celular e programas de computador; a segunda, sobre os que utilizaram material concreto; a terceira é composta das dissertações que usaram a metodologia da resolução de problemas e modelagem; a última, são as dissertações que mesclam ou comparam o ensino da Geometria Espacial com uso de tecnologia, material concreto e aula tradicional. Temáticas como jogos e aplicabilidade concreta, por exemplo, se encaixam em outras abordagens. Os números podem ser vistos na Figura 2.1.

As dissertações que propõem um trabalho com material manipulável concomitante com *softwares* foram descartadas após uma segunda revisão, pois todas incentivam que seja feita uma comparação entre os modelos concretos e as figuras virtuais. Das 26 produções que fazem uso apenas de material concreto, sete tratam da Geometria Espacial de posição,

[2]A busca por esse termo se deve ao fato da pesquisa poder retornar a palavra sólido ou sólida.

[3]Ao pesquisar os termos "funções" e "função" no campo de título, foram encontrados 578 trabalhos ao todo, de um total de 6821 dissertações publicadas no período em questão.

Figura 2.1: Número de dissertações encontradas por categoria.



Fonte: Autoria Própria (2023)

sendo assim, restaram 19 trabalhos que abordam a Geometria dos sólidos geométricos.

Nossa revisão nos permite, ainda, observar que dos 19 trabalhos pré-selecionados, dez estão concentrados em Universidades da região Sudeste do país, das quais cinco pertencem ao Rio de Janeiro. Nordeste e Norte aparecem com quatro trabalhos cada, sendo três da UFPA. A região Sul do Brasil conta com uma dissertação e o Centro-Oeste não teve trabalho selecionado.

Desses 19 trabalhos, 11 são direcionados para o 2° ano do Ensino Médio, o que concorda com o proposto pela BNCC e conforme consta no Currículo Referência de Minas Gerais, que pode ser visto na Tabela 2.1 e que é utilizado nas escolas do Estado.

Cinco trabalhos foram desenvolvidos com o Ensino Fundamental, apenas um com o 3° ano do Ensino Médio e dois não especificaram o ano de ensino ou deram indicação de faixa etária. A maioria dos trabalhos iniciam com aplicação de um questionário diagnóstico para identificar conhecimentos prévios, e segue com a aplicação de uma sequência didática desenvolvida pelo autor que, no final, apresenta uma série de resultados, subjetivos à sua análise, quanto ao desenvolvimento dos alunos. Três dos autores analisados fizeram um comparativo, trabalhando de forma tradicional em uma turma e com atividade diferenciada com material concreto em outra e compararam os resultados.

Tabela 2.1: Habilidades e competências em Geometria Espacial.

Competência Específica	**Habilidade**	**Objetos do Conhecimento/Conteúdos Relacionados**
Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT309A) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	- Geometria Métrica: poliedros e corpos redondos. - Área total de prismas, pirâmides e corpos redondos.
	(EM13MAT309B) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo da capacidade de uma caixa d'água em diferentes formatos), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	- Geometria Métrica: poliedros e corpos redondos. - Volume de prismas, pirâmides e corpos redondos.

Fonte: Adaptado do Currículo Referência de Minas Gerais (2013, p. 19)

Analisando o produto educacional oferecido nas dissertações sobre o tópico da Geometria Espacial, quase em sua totalidade, os trabalhos apresentam uma proposta de construção dos sólidos geométricos a partir de suas planificações, o que é possível encontrar na Base Nacional Comum Curricular, nos objetos de conhecimento da área de Matemática do 6° ano do Ensino Fundamental, ao destacar a importância de se trabalhar com a planificação dos objetos tridimensionais, devendo o aluno reconhecer as "*planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)*" (BRASIL, 2015, p. 302).

Algumas das dissertações selecionadas apresentam uma sequência didática que utiliza sólidos prontos, em madeira ou acrílico, para um apoio visual ao material que os alunos construiriam, outras, fazem uso de embalagens de produtos do cotidiano. A proposta mais recorrente dentre os autores é a construção de sólidos com cartolina, origami modular e esqueletos de sólidos com canudinhos, palitos e jujubas, como podem ser vistos nas Figuras 2.2a, 2.2b e 2.2c.

Após esta etapa, um novo processo de refinamento foi feito com intuito de identificar o referencial teórico que os autores utilizaram, o tipo de pesquisa elaborada, a teoria

Figura 2.2: Sólidos com material concreto.

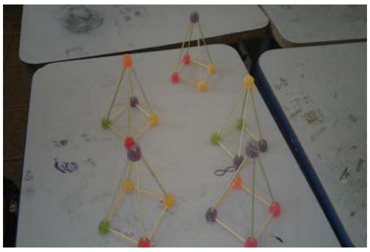
(a) Prismas em cartolina.

Fonte: OLIVEIRA (2020, p. 52)

(b) Icosaedro em origami modular.

Fonte: SANTOS (2021, p. 54)

(c) Pirâmides com palitos e jujubas.



Fonte: MONTEIRO (2016, p. 58)

de aprendizagem adotada e a relação do tema com a História da Matemática, tópico de interesse da nossa pesquisa. Observamos que mais da metade das dissertações pesquisadas se baseiam no trabalho com materiais concretos do laboratório de ensino de Matemática de Lorenzato (2006), enquanto o restante se pautam na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel (2012), na teoria das inteligências múltiplas de Gardner (1999) e nos níveis de Van Hiele por Kaleff (1994). Outros autores bastante citados também foram Eves (2011) e Boyer (1974).

Desse modo, selecionamos quatro trabalhos[4], conforme listados na Tabela 2.2, que priorizam a construção dos sólidos com cartolina ou origami para uma leitura um pouco mais cuidadosa, de modo a observar o intercâmbio com os outros temas de interesse de nossa pesquisa.

Ao final de todas as revisões, selecionamos o trabalho de Oliveira (2020), autora da dissertação "*Aprendizagem significativa: utilização de materiais didáticos manipuláveis para a aprendizagem da Geometria Espacial*", orientada pela Profª Drª Sânzia Alves do Nascimento em 2020 na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Em sua pesquisa, a autora traça o perfil do ensino de Geometria apontando dificuldades e potencialidades com uso de material concreto, apoiada na teoria das Inteligências Múltiplas de Gardner e na teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Antes de apresentar sua atividade, Oliveira (2020) traz uma discussão teórica sobre os poliedros e a metodologia da pesquisa. Por fim, apresenta uma sequência didática e os

[4]A lista completa das dissertações analisadas pode ser acessada em: https://docs.google.com/spreadsheets/d/11qQdLiLxFIvN7tAm19x-BVIomjEH9kVpRS_ghBN1Th0/edit?usp=sharing.

Tabela 2.2: Dissertações analisadas.

Autor	Teoria de Aprendizagem	Produto Educacional
Oliveira, 2020	- Teoria das Inteligências Múltiplas - Teoria da Aprendizagem Significativa	Construção de prismas com cartolina
Costa, 2020	Análise de erros	Construção de sólidos com origami modular
Pereira, 2020	Laboratório de Ensino de Matemática	Construção dos sólidos de Platão com origami modular
Silva, 2018	Laboratório de Ensino de Matemática	Construção dos sólidos de Platão com origami modular, canudinhos e palitos com jujubas

Fonte: Autoria própria (2023)

resultados obtidos. Na atividade proposta por Oliveira (2020), é aplicado um questionário inicial aos alunos quanto à percepção dos mesmos com relação à Geometria e conhecimentos prévios da disciplina. Num segundo momento, foram apresentadas figuras sólidas aos alunos que, em seguida, construíram sólidos geométricos com cartolina a partir de suas planificações.

Após apresentar conceitos como vértices, arestas, faces, poliedros, área e volume, a autora aplicou um segundo questionário para que os alunos avaliassem a atividade realizada. A atividade proposta por Oliveira (2020) tem motivações e objetivos bem estabelecidos, assim como cada etapa de seu desenvolvimento. Ainda mais, fazendo uso de materiais concretos que, de acordo com Peretti (2013), facilita a construção do conhecimento por parte dos alunos.

No próximo tópico trazemos algumas reflexões sobre como o uso de materiais concretos podem auxiliar no ensino da Geometria Espacial.

2.1.1 O uso de materiais concretos no ensino de Geometria Espacial

Historicamente, a Matemática tem fama de ser um conhecimento de ordem superior que apenas mentes mais evoluídas são capazes de compreender (ROQUE, 2012). Diante dessa cultura e dos desafios contemporâneos do ensino da Matemática, o professor, ainda visto como o principal sujeito transmissor de conhecimentos, precisa sempre procurar renovar suas práticas pedagógicas na incumbência de facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

Ao lecionar Geometria, não é incomum que o professor se esbarre na falta de bagagem de uma Geometria Plana consistente. Kaleff (1994) argumenta que muito dessa dificuldade é herança do rigoroso método de ensino lógico dedutivo da Geometria praticado até o final do século XIX, inclusive para adolescentes em idade escolar. As dificuldades enfrentadas pelos alunos com a argumentação lógico-filosófica chegou a tal ponto que

> [...] a Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com consequências que se fazem sentir até hoje. (KALEFF, 1994, p. 20)

Caldatto & Pavanello (2015) complementam que esse abandono da Geometria perdurou até os anos 2010, e que muito se deve à flexibilização dos currículos escolares que ocorreu nos anos 1970 com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), fazendo com que professores postergassem esse conteúdo para o final do ano, caso houvesse tempo, ou simplesmente que abolissem a Geometria do currículo escolar, por razões diversas. Ou seja, ainda estamos no processo de retomada do ensino da Geometria. Em vista disso, é legítimo que o atual professor de Matemática se aproprie de recursos pedagógicos diferenciados para tentar resgatar o ensino da Geometria em suas aulas e sanar possíveis dificuldades que os novos alunos possam apresentar. Porém, Murari (2011) alerta que

> [...] ensinar de maneiras diferentes pode não ser tão simples para os professores. A mudança em sua prática é um processo que exige mudanças de comportamento como, por exemplo, ser de novo aprendiz, desenvolver novas compreensões dos conteúdos ensinados e estar engajado em um grupo de pessoas que tenham, também, o objetivo de repensar ou mudar suas práticas. (MURARI, 2011, p. 189)

Diante do exposto, notamos que é necessário que haja uma motivação pessoal que estimule o professor a buscar aperfeiçoar suas práticas, a fim de sair do lugar comum e melhorar a qualidade do ensino no país. O PROFMAT é um programa de mestrado em rede nacional de aperfeiçoamento para professores que lecionam Matemática na Educação Básica. Portanto, podemos inferir que seus participantes estejam buscando essa mudança.

No ensino da Geometria Espacial, uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos alunos é a visualização de figuras tridimensionais, uma vez que são representadas no plano e exigem que o aluno recorra a um pensamento abstrato mais elaborado e muitas vezes ainda não adquirido. Sobre isso, Kaleff (1994) afirma que

> [...] a maior parte do material visual geométrico didático que apresentamos às crianças é bidimensional como, por exemplo, desenhos no papel ou no quadro-negro. Mesmo quando apresentamos fotografia e desenhos animados, os quais mostram até movimentos, ou empregamos sofisticados gráficos advindos de programas de computador, que até reproduzem objetos tridimensionais, ainda assim estamos trabalhando num ambiente bidimensional. (KALEFF, 1994, p. 21)

Apesar dos avanços tecnológicos e da quantidade de recursos computacionais existentes, Castro & Carvalho (2018) reforçam a importância de se utilizar materiais concretos, uma vez que pode auxiliar na transição do pensamento concreto para o abstrato, se bem orientado. Outra vantagem de se usar materiais concretos é que os recursos são acessíveis, podendo este trabalho ser realizado em escolas e contextos dos mais diversos.

Concordando com Castro & Carvalho (2018), a Competência 5 da área de Matemática do Ensino Médio da Base Nacional Comum Curricular, reforça a importância da experimentação como parte da investigação Matemática, identificação de padrões e processo de inferências e conjecturas acerca da construção do pensamento matemático abstrato.

> O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. (BRASIL, 2015, p. 540)

Sobre a experimentação nas aulas de Matemática, Lorenzato (2006) defende que o ensino deve partir do concreto para o abstrato, e para isso os materiais manipuláveis são de extrema importância. Esses materiais podem ser estáticos e permitir apenas sua observação, como sólidos em madeira. Outros porém, permitem a interação do aluno com o objeto de estudo, como ábaco, material dourado e jogos. Lorenzato (2006, p. 19) ainda afirma que o uso desses materiais manipulativos "*facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem*". Contudo, alerta que o simples uso de material concreto não fornece garantias para essa aprendizagem, o papel mediador do professor é fundamental nesse processo.

Pensando nesse potencial do uso de materiais manipuláveis, principalmente no que concerne aos materiais dinâmicos, no Capítulo 5 traremos um roteiro para construção dos principais sólidos geométricos, sendo a maioria deles interativo. Kaleff (1994) também defende que essa prática possibilita uma melhor compreensão das propriedades e elementos de um sólido, etapa essencial para a formalização dos conceitos e propriedades desses objetos.

Aliada à experimentação, a História da Matemática pode contribuir efetivamente para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Sólida. Na próxima seção apresentamos um estudo sobre as produções do PROFMAT em História da Matemática e, em seguida, algumas ponderações sobre as potencialidades do uso da História nas aulas de Matemática.

2.2 Das dissertações do PROFMAT sobre História da Matemática, Euclides e *Os Elementos*

Dando continuidade à nossa investigação, nesta seção abordamos como a História da Matemática, Euclides de Alexandria e sua obra *Os Elementos* aparecem nas produções do PROFMAT. A busca foi feita, também, no repositório de dissertações do site oficial do PROFMAT, de três formas: buscando a palavra-chave "História" no título da dissertação, foram encontrados 96 registros; fazendo a busca do termo "Euclid"[5] no título, foram encontrados 86 registros; fazendo a busca por "elementos", esperava-se encontrar resultados sobre o livro *Os Elementos*, porém, dos 13 registros retornados pelo buscador, apenas dois fazem referência à obra de Euclides e um deles já havia sido contemplado na busca do termo "História".

Tabela 2.3: Número de dissertações analisadas por categoria.

Tópico	**Número de dissertações**
História da Matemática	13
Euclides	6
Os Elementos[6]	1
Total	**19**

Fonte: Autoria própria (2023)

[5]O uso do termo "euclid" se deve à possibilidade de aparecerem resultados como "Euclides", "Euclidiana" ou "Euclidiano", em referência a Geometrias euclidianas.

[6]Esta foi a dissertação encontrada nas pesquisas dos termos "História" e "elementos", portanto, não foi acrescentada ao total.

De um total de 194 dissertações, após uma primeira inspeção nos títulos, palavras-chave e resumo foram pré-selecionados 19 trabalhos que, de alguma forma, versam sobre a Geometria, sobre o uso da História da Matemática no ensino ou sobre Euclides e *Os Elementos*. Os números e categorias iniciais das dissertações supracitadas estão na Tabela 2.3.

Após esta etapa, um novo processo de refinamento foi feito com intuito de identificar o referencial teórico que os autores das dissertações do tópico "História da Matemática" utilizaram. Analisamos dois aspectos desse referencial teórico, a abordagem da História nas aulas de Matemática como recurso pedagógico e a abordagem da História da Matemática de modo geral. Os principais nomes podem ser observados na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Referencial teórico das dissertações em História.

Tópico	**Autor**	**Número de dissertações**
Uso da História da Matemática como recurso didático	D'Ambrosio	10
	Fauvel	2
	Fossa	3
	Mendes	4
	Miguel	3
	Miguel e Miorim	6
	Saito	2
	Vianna	2
História da Matemática	Boyer	8
	Eves	9
	Roque	3
	Roque e Carvalho	3

Fonte: Autoria própria (2023)

Com esse estudo, pudemos notar que as dissertações mais antigas, anteriores a 2018, apresentam uma tendência a utilizarem referências tradicionais, que vêm sendo bastante questionadas nas últimas décadas pela historiografia atual. Para entendermos melhor o que é essa historiografia tradicional e atualizada, Borges (2013) aponta primeiramente que História é um conjunto de acontecimentos passados e que a historiografia é a maneira como os historiadores a analisam. Em linhas gerais, a historiografia tradicional é uma abordagem que perpetua mitos e denomina gênios, desconsiderando o contexto histórico, social e cultural, e que, geralmente, centraliza o conhecimento matemático na Europa. A historiografia atualizada, busca refutar esses mitos e considerar as contribuições de outros povos e civilizações do Oriente e das Américas (ROQUE, 2012). Sobre a historiografia atual, Fernandes (2022) aponta que

> [...] esta nova forma de "contar a História", sugere um rompimento com o fazer antigo, contudo, sem desqualificar o legado da Historiografia tradicional. Acerca disso, vale destacar que a esta última, não devemos atribuir uma conotação negativa, uma vez que as produções escritas sob esta perspectiva foram e ainda são referências para as pesquisas atuais. (FERNANDES, 2022, p. 16)

Desse modo, não estamos desconsiderando as contribuições dos representantes tradicionais da História da Matemática, porém, observamos se os autores das dissertações analisadas cuidaram de confrontar os dois modos de se encarar a História ou se atentaram a apenas um desses segmentos.

Dito isto, dos 13 trabalhos pré-selecionados sobre o tópico História da Matemática, selecionamos três que abordam as práticas experimentais associadas à História, e após uma leitura nas introduções, considerações finais, referencial e partes do corpo da dissertação, optamos pelo trabalho de Silva (2021) para uma leitura um pouco mais detalhada, a dissertação de título "*Diálogos entre Histórias da Matemática e práticas experimentais na Escola Básica*", orientada pela Profª Christine Sertã Costa, da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2021. Essa escolha se deve tanto ao fato de Silva (2021) se valer de estudiosos da historiografia atual, quanto de nomes que defendem a experimentação como aliada ao ensino juntamente com a História.

Silva (2021) começa seu trabalho com uma fundamentação teórica baseada principalmente em D'Ambrósio (1999) e Miguel & Miorim (2011) sobre o uso da História nas aulas de Matemática, defendendo o trabalho com atividades experimentais. Em seguida, reconta mitos sob o ponto de vista atual da História e pondera sobre nomenclaturas que usamos para alguns teoremas, como o das paralelas de Tales, por exemplo, argumentando . Conta a história de Pitágoras, fala sobre os números figurados e discute o conhecimento desse resultado por diferentes civilizações anteriores a Pitágoras. Aborda, ainda, a demonstração de Euclides para esse teorema, sempre propondo atividades para cada tema discutido. Seu produto educacional é orientado para turmas de 9° ano do Ensino Fundamental e sua intenção é desmistificar histórias já muito repassadas e recontá-las, ao mesmo tempo que propõe um estudo bibliográfico acerca das personalidades estudadas e dos conteúdos por elas desenvolvidos.

Passando agora para o tópico "Euclides", conforme posto na Tabela 2.3, das seis dissertações pré-selecionadas, após leitura dos resumos, introduções, considerações finais, checagem do referencial e de partes do corpo do texto, notamos que todas elas trazem um estudo e produto pedagógico voltados à Geometria Euclidiana Plana. Neste sentido, não selecionamos trabalhos deste tópico, pois além de não versarem sobre os sólidos geométricos ou sobre Euclides, a revisão apresentada na Seção 2.1 já contempla este estudo[7].

Por último, o principal trabalho encontrado, sobre *Os Elementos* de Euclides, é a dissertação de Diniz (2020), "*Uma análise histórica sobre Os Elementos de Euclides*", orientada pelo Prof. Dr. José Santana Campos Costa da Universidade Federal do Maranhão em 2020. Esta pesquisa constitui-se de uma análise do livro *Os Elementos* e do período histórico antes e depois de Euclides. Diniz (2020) utiliza a primeira tradução em português brasileiro para orientar sua investigação, versão traduzida do grego por Bicudo (2009).

Diniz (2020) apresenta um histórico sobre as Matemáticas antes de Euclides e os caminhos que a levaram até ele. Pondera sobre a existência e feitos de Euclides. Faz um apanhado de cada volume dos *Elementos*, apresenta os cinco postulados do Volume I e discute um pouco sobre as tentativas de demonstração do postulado das paralelas. O autor baseia sua pesquisa principalmente em referências tradicionais da História da Matemática, como Bicudo (2009), Boyer (1974) e Mol (2013), mas aparecem também Roque & Pitombeira (2012) da historiografia atual. Diniz pondera sobre os fatos históricos que cita, porém não evitou o anacronismo ao dizer que no Volume VIII dos *Elementos*, Euclides "*trata dos números enquanto progressão geométrica*" (p. 15). Porém, esta é uma terminologia moderna, na tradução de Bicudo (2009, p. 299), podemos ver que Euclides falava de números em proporção continuada.

Seu produto educacional é um estudo direcionado ao professor de Matemática, um incentivo para que o mesmo possa abordar os conteúdos originais na sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Como exemplo, apresenta um estudo sobre o que hoje conhecemos por teorema de Pitágoras, a partir do original de Euclides, na versão de Bicudo. Pautado na BNCC e PCN, conclui que a História é um agente motivador para o estudo da Matemática na Educação Básica. Sobre isso, trazemos algumas ponderações na próxima seção.

[7] A lista completa das dissertações analisadas pode ser acessada no link.

2.2.1 A História da Matemática como recurso didático

Uma das motivações para escrita deste trabalho é encontrar na História argumentos capazes de incentivar o estudo da Matemática escolar. Muitas são as formas de tentar motivar os alunos a respeito da Matemática e os livros atuais estão apostando na contextualização com situações cotidianas e na interdisciplinaridade[8]. Acreditamos que, levar ao conhecimento do aluno o contexto e o processo de desenvolvimento dos conteúdos matemáticos em seu tempo e necessidades, sejam cotidianas, científicas, sociais, comerciais, ou mesmo na própria Matemática, bem como os percalços e disputas enfrentadas pelos estudiosos, é mais efetivo que impor uma contextualização em termos atuais. A BNCC promove esse resgate da História, afirmando ser "*fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria História da Matemática*" (BRASIL, 2015, p. 301). A respeito dessa contextualização, D'Ambrosio (2007) defende ser

> [...] muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a Matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico. (D'AMBROSIO, 2007, p. 31)

Ainda sobre a contextualização histórica, podemos notar em Mendes & Chaquiam (2016) um incentivo para que o professor apresente a Matemática em suas aulas de modo material, a partir de fontes originais. A partir dos documentos antigos, o professor pode introduzir um conteúdo, "*ilustrar, ou mesmo aprofundar um conceito a ser ensinado*" (MENDES & CHAQUIAM, 2016, p. 4). Desse modo, espera-se que a exploração dessas fontes primárias e do contexto de sua época possam motivar os alunos a pensarem de maneira diferente, redirecionarem o olhar para a Matemática e reconhecerem que ela não é um simples conjunto de regras e fórmulas abstratas, mas sim uma ciência proveniente da produção humana.

Por outro lado, Miguel (1997, p. 75) questiona se a História é suficiente para motivar um aluno e acrescenta que "*se fosse esse o caso, o ensino da própria História seria auto motivador*". Daí a importância de não tratar a História como uma simples

[8] Vide: PNLD 2023.

coleção de curiosidades, é necessário que os alunos percebam se aquele conhecimento foi, de fato, relevante para a época e em que medida permanece nos dias atuais.

Em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais já apontavam a História como um dos caminhos para favorecer o ensino de Matemática. E acrescenta:

> A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. (BRASIL, 1997, p. 34)

A respeito desses outros recursos didáticos, a História da Matemática quando aliada a atividades experimentais, pode levar os alunos a participarem mais ativamente do processo de aprendizagem, permitindo que eles vivenciem a Matemática de maneira concreta. Outro ponto a se considerar é o desenvolvimento da criatividade, do pensamento crítico e do trabalho em equipe. Sobre essas atividades experimentais, Miguel *et. al.* (2009) defende que a partir de materiais manipuláveis concretos, que representam uma forma matemática abstrata, podem propiciar

> [...] reflexões sobre o tema matemático em estudo. E é a partir destas reflexões discutidas com seus pares e/ou com o professor que o estudante produz conhecimento. (p. 18)

Diante do exposto, nos próximos capítulos trazemos uma estruturação histórica seguida de atividades experimentais para a construção de sólidos geométricos interativos. Reforçamos que essa formulação oferece a alunos e professores a oportunidade de desenvolver habilidades de percepção espacial e formalização concreta de conceitos abstratos.

3 A Matemática Grega

Para iniciar nosso estudo sobre *Os Elementos*, obra de Euclides de Alexandria (*c.* 300 a.E.C.), trazemos neste capítulo um breve histórico da Matemática praticada na Grécia Antiga, local onde provavelmente viveu nosso autor. Mas, para isso, começaremos falando da Filosofia, que parece andar de mãos dadas com a Matemática pois, conforme sugerido por Bicudo (1998), a influência da Filosofia de Platão pode ter feito com que a Matemática empírica conhecida naquela época desse lugar à uma Matemática baseada na dialética, como veremos logo mais.

A partir do século VII a.E.C. já existia um fazer matemático na Grécia, e em outras regiões, pautado em questões práticas do dia a dia, como problemas geométricos e contábeis. Contudo, em dado momento essa percepção passou por importante reformulação.

O crescimento populacional na Grécia do século V a.E.C. deu origem às pólis, organização da população em cidades-Estados e, com elas, surgiu a necessidade de se eleger um de seus cidadãos para regê-la. De acordo com Roque (2012), eram promovidos debates entre os cidadãos, homens livres, com objetivo de observar o poder de argumentação e persuasão de seus debatedores. Desse modo, era eleito aquele com maior poder de convencimento. Platão defendia que essa habilidade perpassava pelo conhecimento matemático abstrato avançado, de modo que os jovens governantes, com um pensamento puro, estariam mais perto de conhecer a verdade em sua essência, estariam mais perto de transcender a alma do seu Ser (SAITO, 2015). A Matemática seria, então, a porta de entrada do mundo inteligível para se atingir o pensamento mais puro e verdadeiro, que era a capacidade da dialética.

Os gregos não acreditavam no que viam os olhos físicos, porém no que viam os olhos da razão (BICUDO, 2009). Platão, importante personagem neste contexto, teria encontrado nesta ocasião, a necessidade de sistematizar os discursos, organizar a lógica argumentativa que, a partir de hipóteses, levasse os ouvintes a conceber a tese como verdadeira. Teria sido este o início do que mais tarde viria a se chamar Filosofia (ROQUE, 2012).

Esse novo modo de encarar a Filosofia teria importado para a Matemática, ciência até então prática e numérica, a mesma estruturação lógica dos debates, com levantamento de hipóteses e demonstrações da veracidade de conceitos predefinidos. Para Platão,

> as Matemáticas: 1) eram indispensáveis para a formação dos jovens gregos, principalmente, dos futuros governantes e (principalmente pelo seu valor militar); 2) orientavam de modo especial o pensamento para a essência das coisas, ou seja, arrastavam a alma do homem para o Ser. (SAITO, 2015, p. 40).

No entanto, Roque (2012) argumenta que,

> [...] não sabemos exatamente se a Academia de Platão contribuiu para o desenvolvimento efetivo da Matemática, fornecendo novas técnicas e ferramentas, ou se teve um papel mais reflexivo, de cunho filosófico, investigando os fundamentos e a metodologia da Matemática já existente. Os membros da academia debatiam o modo de descrever as disciplinas Matemáticas, o que pode ter tido um papel na legitimação desse saber em sua forma abstrata, fixando-a como uma disciplina do pensamento puro. (ROQUE, 2012, p. 103)

Sobre isso, Bicudo (2009, p. 81) acrescenta que, talvez, Platão tenha apenas aperfeiçoado a sistematização lógica das definições e métodos empregados. Neugebauer (1969, p. 152) cita que Platão não deu contribuições efetivas para a Matemática, nem mesmo para Teeteto e Eudoxo, alunos notáveis de sua academia. No entanto, não é em vão que o nome de Platão seja reverberado, pois sua filosofia foi pano de fundo para muitos matemáticos, filósofos e cientistas de sua época e posteriormente.

Algumas figuras importantes neste contexto devem ser lembradas. Os matemáticos e filósofos Tales, Pitágoras[1], Eudoxo e Teeteto, por exemplo, já estudavam Aritmética e Geometria e imprimiam certo rigor aos seus trabalhos. Geometria e Aritmética não se dissociavam na Grécia antiga. A Aritmética tratava da contagem e a Geometria das medidas. Com a incessante busca grega por explicar as coisas por meio da razão, os pensadores evitavam a utilização de materiais e ferramentas, pois não eram apropriadas para esse fim.

É inegável o papel de *Os Elementos* de Euclides na divulgação do método sistemático grego, mas é difícil dizer se já não existia formalização como a dos *Elementos* antes dele.

[1] Assim como Euclides, a existência de Tales e Pitágoras também gera controvérsias entre historiadores. Não há documentos que confirmem essa hipótese, apenas relatos de outros escritores, distantes da época em que os mesmos teriam vivido (NOBRE, 2009).

Sobre isso, Roque (2012) argumenta que acredita-se ter existido um primeiro livro de "elementos" escrito por Hipócrates, porém poucos fragmentos sobreviveram.

Muitas vezes esses conhecimentos eram passados de maneira oral dentre os frequentadores das academias. Os registros escritos parecem ter perdurado apenas depois de Euclides ter reunido e organizado os conhecimentos gregos da época e, mesmo assim, o trabalho de Euclides só foi adiante devido às inúmeras traduções que o popularizaram.

Esse trabalho dedica-se, então, a Euclides de Alexandria (*c.* 300 a.E.C.) e sua obra mais importante, *Os Elementos* (do grego, $\Sigma\tau\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$). Nas próximas seções trazemos uma discussão um pouco mais elaborada acerca desse trabalho e das implicações de suas traduções para a divulgação do conhecimento matemático.

3.1 Euclides e *Os Elementos*

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides e sua existência ainda é um mistério. Proclus de Atenas, um escoliasta do século V da Era Comum, escreveu um comentário sobre o Livro I dos *Elementos*, e é através dele que temos as principais informações sobre Euclides. Sobre nosso protagonista, Proclus comenta:

> Não muito mais jovem do que esses (sc. Hermotimus de Colophon e Philippus de Medma) é Euclides, que reuniu os Elementos, coletando muitos dos teoremas de Eudoxo, aperfeiçoando muitos dos resultados de Teeteto, e também trazendo a demonstrações irrefutáveis as coisas que foram provadas descuidadamente por seus predecessores. Este homem viveu no tempo do primeiro Ptolomeu. Pois Arquimedes, que veio imediatamente após o primeiro (Ptolomeu), faz menção a Euclides: e, além disso, dizem que uma vez Ptolomeu lhe perguntou se havia na Geometria um caminho mais curto que o dos Elementos, e ele respondeu que não havia atalho real para a Geometria. Ele é então mais jovem que os discípulos de Platão e mais velho que Eratóstenes e Arquimedes; pois estes últimos eram contemporâneos uns dos outros, como diz Eratóstenes em algum lugar[2]. (HEATH, 1926, p. 1. Tradução nossa)

[2] *Not much younger than these (sc. Hermotimus of Colophon and Philippus of Medma) is Euclid, who put together the Elements, collecting many of Eudoxu's theorems, perfecting many of Theaetetus', and also bringing to irrefragable demonstration the things which were only somewhat loosely proved by his predecessors. This man lived in the time of the first Ptolemy. For Archimedes, who came immediately after the first (Ptolemy), makes mention of Euclid: and, further, they say that Ptolemy once asked him if there was in geometry any shorter way than that of the elements, and he answered that there was no royal road to geometry. He is then younger than the pupils of Plato but older than Eratosthenes and Archimedes; for the latter were contemporary with one another, as Eratosthenes somewhere says.*

No relato de Proclus (412 – 485 E.C.), notamos que nem mesmo ele sabia ao certo informações sobre o nascimento de Euclides e do local em que ele teria vivido. É possível inferir, no entanto, que Euclides tenha vivido na época de Ptolomeu I e, provavelmente, que foi discípulo de Platão e antecessor a Arquimedes (HEATH, 1926, p. 1).

Euclides então teria sido uma figura histórica que reunira, organizara e completara os escritos de Hipócrates de Quios, Leon, Theudius de Magnésia, Teeteto e Eudoxo, e acrescentado muitos outros resultados aos *Elementos* (BICUDO, 2005, p. 7). Isso justificaria os diferentes estilos de escrita observados ao longo da obra. Além disso, vários outros trabalhos também entrariam em sua conta, os mais importantes seriam os livros *Óptica* e *Catóptrica*, de grande relevância para a Física, *Sectio Canonis*[3], um tratado musical que define as características do som, notas, intervalos e harmonia e o livro *Data*, antecessor aos *Elementos*.

De acordo com Bicudo (2009), Euclides era, possivelmente, discípulo da lógica e filosofia platônica, e imprimiu em seu trabalho o rigor lógico-matemático no método dedutivo e axiomático nas demonstrações das 465 proposições e construções contempladas em sua obra ao longo dos 13 volumes que a compõem.

Os livros de I a IV estruturam toda a Geometria Plana, os de V a X apresentam resultados do que hoje conhecemos como Aritmética e Teoria dos Números, além de comensurabilidade e incomensurabilidade. Os volumes de XI a XIII, nosso objeto de estudo, contemplam a Geometria Espacial. A seguir, apresentamos alguns dos principais resultados presentes em cada volume:

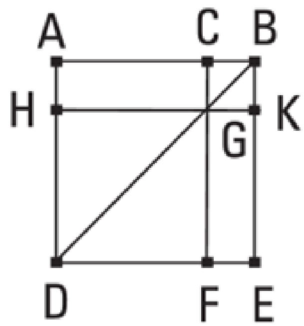
Livro I Mais importante da obra, o Livro I apresenta 23 definições e conceitos primitivos de Geometria Plana. Os principais são ponto, reta e plano, objetos sobre os quais Euclides estrutura toda a sua Geometria. Antes de fazer as 48 construções, Euclides descreve o que ele chama de noções comuns em 9 tópicos.

Livro II Este volume contém apenas duas definições sobre paralelogramos. Dentre as proposições demonstradas, uma delas trata de um resultado que hoje conhecemos por produto notável, e sua ilustração pode ser vista na Figura 3.1: *"Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos."* (BICUDO,

[3]Vide: BARBOSA, G. Euclides–*Sectio Canonis*–Apresentação e Tradução. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 18, n. 36, p. 31-75, 2018.

2009, p. 137).

Figura 3.1: Construção da Proposição 4.



Fonte: Bicudo (2009, p. 137)

Livro III Após definir o círculo no Livro I, Euclides apresenta em 11 definições as suas propriedades. Uma delas bem conhecida, trata da tangência entre retas e círculos: "*Uma reta que, tocando o círculo e, sendo prolongada, não o corta, é dita ser tangente ao círculo.*" (BICUDO, 2009, p. 151).

Livro IV Este livro traz sete definições sobre figuras inscritas e circunscritas em círculos. Em 16 construções, algumas mais simples, Euclides aborda resultados como, por exemplo, a inscrição de um pentágono regular em uma circunferência.

Livro V Em 18 definições, este volume trata de magnitudes, razões e proporções entre segmentos, que são discutidas em 33 proposições.

Livro VI Cinco definições sobre semelhança entre figuras planas dadas a partir das proporções discutidas no livro anterior.

Livro VII Trata das propriedades dos números em 23 definições iniciais. Um importante resultado sobre as proporções é introduzido na Proposição 2 deste livro: "*Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.*" (BICUDO, 2009, p. 271). Este resultado deu origem ao que hoje conhecemos por máximo divisor comum entre dois números. Além deste, outros resultados são demonstrados ao longo das 39 proposições e tratam de divisibilidade, números primos e compostos, números perfeitos, paridade e multiplicidade.

Livros VIII e IX Estes dois volumes são uma continuação do anterior. Com um total de 63 proposições, demonstram mais resultados de proporções e de números perfeitos.

No Livro VIII, aparecem resultados de números em proporção continuada, o que hoje chamamos de progressão geométrica.

Livro X Este é o maior e mais complexo volume da obra de Euclides, com quatro definições primárias sobre segmentos comensuráveis e incomensuráveis, seis definições secundárias sobre números irracionais e seis definições terciárias sobre áreas de figuras, que são discutidas e demonstradas em um total de 115 proposições.

Livro XI É o primeiro de três volumes sobre Geometria Espacial. Apresenta 28 definições, dentre ângulos no espaço, figuras tridimensionais e semelhança entre figuras no espaço.

Livro XII Em 18 proposições, Euclides demonstra a relação entre áreas e volumes de figuras quaisquer a partir de figuras elementares.

Livro XIII Apresenta as construções dos sólidos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro.

No Livro I, na verdade, as proposições são construções geométricas que, apesar de Euclides não citar que as construções, necessariamente, devam ser feitas com régua e compasso, assim ele as faz a partir da reta e do círculo. Era, então, obrigatório utilizar a régua e o compasso? Schubring & Roque (2014) nos ensinam que não era bem assim,

> [...] Euclides não afirma explicitamente, em lugar nenhum dos treze livros que compõem essa obra, que as construções tenham que ser efetuadas com régua e compasso. Simplesmente, elas são, de fato, realizadas desse modo. Além disso, tal restrição não se verifica na prática geométrica de sua época. (SCHUBRING & ROQUE, 2014, p. 93)

Roque & Schubring (2014, p. 93) afirmam ainda que Arquimedes, "*que viveu logo depois de Euclides, não seguiu a regra e empregou outros métodos de construção*". Para os autores, nomes importantes da historiografia tradicional fizeram com que a lenda da imposição das construções à régua e ao compasso na Antiguidade atribuída a Platão repercutisse, pois Platão valorizava apenas os conhecimentos concebidos por meio exclusivo de argumentações lógicas. Porém, apesar de contrário à utilização de instrumentos mecânicos, via com bons olhos o uso da régua e do compasso, pois seriam representantes da reta e do círculo, formas simples e mais aceitáveis.

Além disso, conforme a lógica da filosofia de Platão, todos os livros que compõem a obra de Euclides são baseados em dois conceitos hoje bem definidos na Matemática:

conceitos primitivos e conceitos derivados (BICUDO, 2005, p. 6). O primeiro é o ponto de partida, tomado como verdadeiro sem necessidade de demonstração. O último é demonstrado a partir de encadeamentos lógicos dos conceitos primitivos.

Chamamos de axioma toda proposição aceita sem demonstração. Para os antigos, axioma e postulado[4] tinham significados distintos, apesar de ambos serem tomados como verdades incontestáveis. Enquanto os axiomas eram aplicáveis à Matemática em geral, os postulados diziam respeito a áreas específicas, no caso de Euclides aplicam-se à Geometria. E teorema é toda proposição demonstrável a partir das definições e resultados anteriormente provados.

Euclides apresenta em sua obra, no início de cada livro, as definições que usará para articular suas demonstrações. No Livro I, porém, observamos também a existência de postulados e noções comuns que, assim como os axiomas, também são aceitos sem demonstração. Bicudo (2009, p. 98), faz-nos saber quais são:

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.

[4]Axiomas e postulados são conceitos primitivos.

5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.

6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.

7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

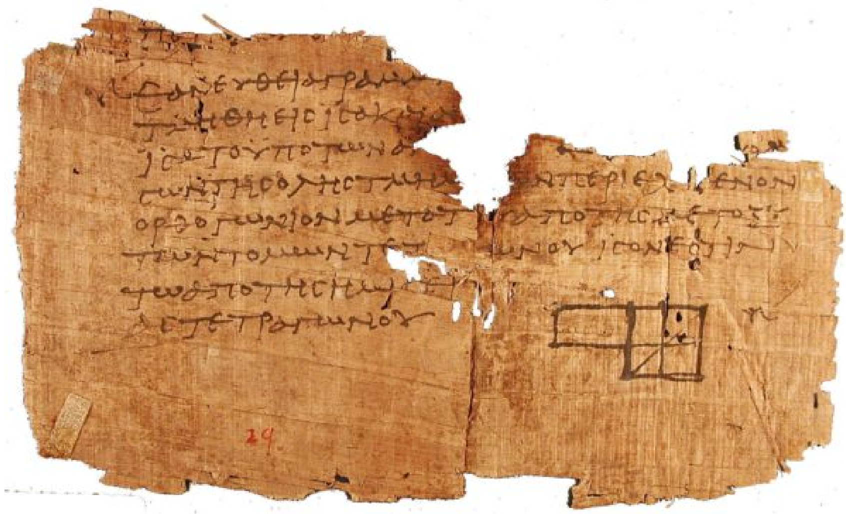
8. E o todo [é] maior do que a parte.

9. E duas retas não contêm uma área.

O quinto postulado, o das paralelas, gerou muitas discussões entre os estudiosos da Matemática ao longo do tempo. Não entraremos em detalhes, pois não é foco de nosso estudo, mas deixamos como sugestão aos leitores mais curiosos o texto de Nobre (2009)[5], que discute as tentativas de demonstração desse postulado e as consequências que geraram.

Os trabalhos originais de Euclides e de seus antecessores padeceram frente ao inevitável corroer do tempo, no entanto, seu legado permanece. O documento mais antigo que se tem notícia é o papiro de Oxirrinco, encontrado no Egito por volta dos anos 1700 a 1800, datado dos anos 100 da nossa Era, ou seja, quase 400 anos após o tempo de Euclides. No fragmento da Figura 3.2 podemos ver essa imagem, que provavelmente foi uma versão ou tradução grega.

Figura 3.2: Papiro de Oxirrinco.



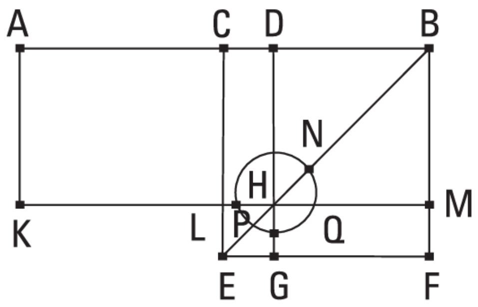
Fonte: Roque (2012)

Historiadores relacionaram essa imagem com a Proposição 5 do Livro II dos *Elementos*, que demonstra geometricamente resultados que hoje chamamos de produtos notáveis.

[5]NOBRE, S. Introdução Histórica às Geometrias Não-Euclidianas - uma proposta pedagógica. Coleção História da Matemática para Professores - V2. SBHMat. Belém - PA. 2009. Disponível em: https://crephimat.com.br/visor_mnc.php?id_t=59

Na versão de Bicudo (2009, p. 139), essa proposição diz que "*caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade*". A construção dessa proposição pode ser vista na Figura 3.3.

Figura 3.3: Proposição 5, Livro II.



Fonte: Bicudo (2009)

Aproveitando o gancho dessa versão encontrada no fragmento do Papiro de Oxirrinco, pudemos notar que as traduções e comentários acerca de uma obra são de extrema importância para sua perenização, e com *Os Elementos* não foi diferente. Escrito originalmente em grego, muitas foram as versões traduzidas, reescritas, manuscritas, melhoradas e comentadas da obra de Euclides. À exceção da bíblia cristã, *Os Elementos* de Euclides constituem-se como o livro mais traduzido e publicado da História (FILHO, 2005, p. 8).

Dentre as inúmeras versões e traduções que se tem conhecimento, escolhemos tratar neste texto de duas em particular: primeira tradução em português brasileiro por Irineu Bicudo (2009), e primeira tradução completa em inglês, feita por Henry Billingsley (1570), com prefácio de John Dee, importante personagem da História britânica.

Mais de 400 anos separam as duas traduções retratadas neste texto e, muitas vezes, foi necessário recorrer à mais antiga para uma melhor compreensão do trabalho de Euclides. De fato, enquanto Billingsley traduziu *Os Elementos* adaptando a linguagem para o contexto Renascentista, com intuito de popularizar este livro para outros países de língua inglesa, Bicudo fez uma tradução *ipsis litteris* para o português brasileiro, isto é, ele apresenta uma tradução fiel, como se lêssemos o texto grego com um dicionário ao lado.

A versão brasileira carrega uma leitura densa do grego antigo que foi preservado na tradução de Bicudo, de forma a manter a essência do texto grego, que utilizou como referência "*a edição de Heiberg-Stamatis, da Editora Teubner, de Leipzig, 1969-1977*", conforme enunciado pelo tradutor, Bicudo (2009, p. 21). Mesmo os leitores mais habilidosos podem ter dificuldades com a escrita sintética de Euclides e com a erudição de seu tradutor, que acrescenta, ainda, uma tradicional introdução histórica acerca da Matemática grega, dos *Elementos* e dos sábios daquele tempo. Por outro lado, Billingsley fez uma tradução crítica, atualizando a escrita para os termos de sua época, acrescentando explicações a cada definição, postulado e proposição, além de notas nas margens das páginas que auxiliam no entendimento do leitor.

Nosso foco de estudo, o Livro XI, conta com 28 definições sobre a Geometria tridimensional na versão de Bicudo e 25 na versão de Billingsley. Essa diferença se deve a Billingsley, em alguns casos, ter reunido numa mesma definição o que Bicudo divide em duas. Além dessa, outras diferenças podem ser observadas, como a tradução das definições e demonstrações, os desenhos presentes e diferenças conceituais, talvez por conta da tradução e da escolha do texto base, como veremos no Capítulo 5. Uma diferença importante se refere à definição do tetraedro, que discutiremos com mais detalhes junto à proposta de construção desse objeto, no Capítulo 4, onde trazemos um estudo mais elaborado acerca da obra do tradutor inglês e o contexto em que ele estava inserido.

4 Tradução de Henry Billingsley

Para falar da tradução inglesa feita por Henry Billingsley, começaremos por uma análise sucinta do frontispício[1] de sua versão, que muito nos sugere tanto sobre o período em que foi escrito quanto ao contexto grego de Euclides. A Figura 4.1 mostra a página de título da obra de Billingsley que, repleta de personalidades gregas, apresenta elementos importantes em sua arte e nos remete ao contexto em que nosso tradutor estava inserido. Discorreremos sobre esses elementos nos parágrafos a seguir.

O título da obra, "*THE ELEMENTS OF GEOMETRIE of the most auncient Philosopher EVCLIDE of Megara*[2]", escrito no retângulo ao centro da arte do frontispício mostrado na Figura 4.1, indica um engano comum que ocorria na Idade Média e que foi carregado até meados de 1500. Observamos que a autoria dos *Elementos* foi atribuída ao filósofo grego Euclides de Mégara (*c.* 400 a.E.C.), como bem pode ser visto na Figura 4.2.

Sobre isso, Heath (1926) aponta que existiu uma confusão sobre o nome de Euclides que teria começado no início do século I da Era Comum, quando Valerius Maximus se refere a Euclides como predecessor de Platão, o que se concluiu, na época, que só poderia ser o Euclides de Mégara, discípulo de Sócrates. Essa teoria teria perdurado até o Renascimento, quando Federico Commandinus (1509 – 1575) desfez o engano ao traduzir e publicar *Os Elementos* em latim em 1572 (HEATH, 1926).

Outro ponto importante a ser considerado é o que se afirma no subtítulo da obra, transcrito da Figura 4.3. A expressão contida nos parênteses, "*now first*", confere à versão de Billingsley o título de primeira tradução inglesa.

> Traduzido fielmente (agora o primeiro) para a língua inglesa, por H. Billingsley, cidadão de Londres. Ao qual estão anexados certos escoliastes, anotações e invenções dos melhores matemáticos, tanto do passado quanto

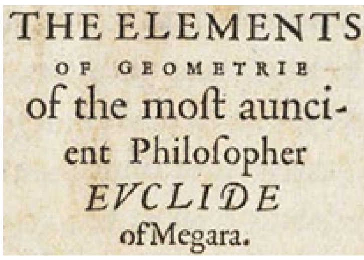
[1] Arte decorativa ou informativa na folha de rosto de um livro.

[2] OS ELEMENTOS DE GEOMETRIA do mais antigo filósofo EUCLIDES de Mégara. (Tradução nossa)

Figura 4.1: Frontispício da tradução inglesa de Henry Billingsley.

Fonte: Billingsley (1570)

Figura 4.2: Título da versão inglesa de Henry Billingsley.


THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the moſt aunci-
ent Philoſopher
EVCLIDE
of Megara.

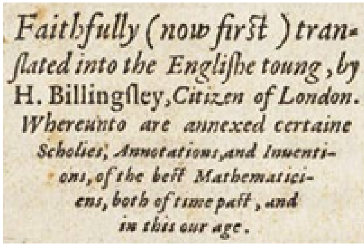
Fonte: Billingsley (1570)

desta nossa era[3]. (Tradução nossa)

De acordo com Leão (2019), de fato, é de Billingsley a primeira tradução inglesa. No entanto, o também inglês Robert Recorde teria traduzido os quatro primeiros livros dos *Elementos* antes de Billingsley, em 1551 (BARROW-GREEN, 2006). Bento (2018)

[3] *Faithfully (now first) translated the English toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations and Inventions, of the best Mathematiciens, both of time past, and in this our age.*

Figura 4.3: Subtítulo da versão inglesa de Henry Billingsley.


Faithfully (now first) tran-
slated into the Englishe toung, by
H. Billingsley, Citizen of London.
Whereunto are annexed certaine
Scholies, Annotations, and Inventi-
ons, of the best Mathematici-
ens, both of time past, and
in this our age.

Fonte: Billingsley (1570)

afirma que "*The Pathwaie to Knowledge*", obra de Recorde, apresentava um caráter mais prático, com aplicações em problemas de demarcações de propriedades dos ingleses do século XVI, por ser Recorde um agrimensor. Depreende-se então que a versão de Billingsley foi a primeira tradução completa dos *Elementos* com finalidade educacional e de modo a dar notoriedade a essa obra aos mais variados públicos, uma vez que John Dee afirma que a obra foi traduzida, explicada e comentada para que o conhecimento matemático e geométrico de Euclides fosse compreendido até mesmo por leigos, não somente pelos eruditos da época (OLIVEIRA *et. al.*, 2021, p. 57).

Sir Henry Billingsley (1538-1606), britânico de uma rica família de comerciantes e, mais tarde, prefeito da cidade de Londres (1591-1603), estudou Matemática na Universidade de Cambridge mas se manteve no ofício de mercador viajante (CASTILLO, 2016). Não se sabe ao certo o ano em que ocorreu, mas, segundo Halsted (1879, p. 46), foi durante uma viagem à Espanha quando Billingsley teria tido contato com o livro *Os Elementos* de Euclides na primeira versão grega impressa de Theon de Alexandria, traduzida do latim por Simon Grynaeus e impressa por John Hervagius em 1533. Billingsley, versado em grego e amante da Matemática, estudou, traduziu e deu seu contributo pessoal ao publicar, em 1570, a primeira versão inglesa da obra do matemático de Alexandria. Para essa empreitada, o estudioso teria convidado seu amigo de Cambridge, John Dee (1527-1608), matemático, mago e influente conselheiro da Rainha Elizabeth I, para escrever o prefácio da obra (CASTILLO, 2016).

Ainda sobre o subtítulo, corroborando com o que se afirma no trecho "*Ao qual estão anexados certos escoliastes, anotações e invenções dos melhores matemáticos, tanto do passado quanto desta nossa era*", além da tradução à versão de Theon, outros três livros, XIV, XV e XVI, que não são da autoria de Euclides complementam os 13 volumes que compõem seu trabalho, nas palavras de Billingsley. Os livros XIV e XV teriam sido escritos por Campanus de Novara como um adendo à versão latina do século XII do monge inglês Adelardo de Bath, em tradução da versão árabe (HALSTED, 1879) ao que possivelmente escreveu Hípsicles de Alexandria (190-120 a.E.C.).

Estes livros apresentam teoremas sobre polígonos inscritíveis numa circunferência e sólidos inscritos em outros sólidos. O Livro XVI, um adendo de Flussas, versa sobre sólidos regulares inscritos uns nos outros (BILLINGSLEY, 1570, fl. 416 – 458). Castillo (2016, p. 63) acrescenta que por muitos anos posteriores à sua publicação, a versão de Billingsley foi referência nas Matemáticas e nas ciências em língua inglesa.

Continuando a análise do frontispício, vemos no topo, logo acima da caixa de título, a inscrição "*VIRESCIT VVLNERE VERITAS*" (Figura 4.4), que em tradução livre do latim quer dizer "a verdade sangra da ferida". O Renascimento foi um período baseado em uma educação aristocrática, que resgatava a cultura da Antiguidade e incentivava a busca de conhecimento. Nesse sentido, o ensino de latim e grego era "obrigatório" para os membros da alta classe britânica. Ao mesmo tempo, nesse período, muitas obras estavam sendo traduzidas em linguagem vernacular a fim de divulgar e popularizar o conhecimento científico (SAITO, 2015).

Figura 4.4: Inscrição em latim.

Fonte: Billingsley (1570)

Num cenário onde a maioria dos europeus ainda eram analfabetos e o conhecimento era uma cultura reservada aos cidadãos mais abastados, a prática das traduções resultou em uma popularização de textos científicos dentre uma nova classe de burgueses que surgia na Inglaterra do século XVI. Segundo Roque (2012), a partir do século XIII a prática das traduções já estava acontecendo na Europa, e a Matemática abstrata deu lugar a uma Matemática prática do dia a dia, realizada por artesãos e viajantes.

> No século XV e, principalmente, no XVI, intensificou-se o interesse pela Matemática por parte de artesãos e engenheiros que desejavam resolver problemas dinâmicos, levando-os a fazer pesquisas sobre balística, bombas de água e outros assuntos ligados à vida comum. (ROQUE, 2012, p. 321)

Nos séculos XIV a XV houve um movimento "anticientífico" na Europa, como uma crítica à erudição e ao conservadorismo da época. Estudiosos como Juan Luis Vives

(1492-1540) e Peter Ramus (1515-1572) propunham um ensino voltado a questões mais práticas, do dia a dia, em detrimento do pensamento abstrato. Nesse sentido, o ensino da Matemática em universidades, por exemplo, passou a abarcar apenas questões mais elementares (SAITO, 2015).

O século XV marcou a transição desse movimento "anticiência" com a contemplação da literatura clássica Greco-Romana. Com essa retomada da cultura clássica, as artes liberais (ligadas ao intelecto) deram espaço às artes mecânicas (ligadas ao trabalho manual). Mas não podemos nos enganar em achar que a Matemática estava adormecida nesse período na Europa, estudiosos como Johannes Müller von Königsberg (1436-1476), Luca Pacioli (1445-1517) e Leonardo da Vinci (1452-1519) se dedicavam a uma Matemática mais avançada e abstrata, concomitantemente com seus trabalhos de ordem prática.

De acordo com Saito (2015, p. 179), as matemáticas práticas do período em questão, aprimoravam artes como "*a navegação, o comércio, a cartografia, a geografia, a astrologia/astronomia, a música etc., para o bem-estar do homem*". Nesse contexto, podemos observar as personalidades gregas que figuram na arte de capa da obra de Billingsley, geógrafos, matemáticos, astrônomos, filósofos e comerciantes. Discorreremos sobre cada um deles nos parágrafos seguintes.

Ptolomeu I, Marinus de Tiro, Strabo e Polibius, importantes geógrafos, cartógrafos e historiadores da Grécia antiga, aparecem na página de título utilizando instrumentos bastante populares naquele século (SAITO, 2015) e que, em princípio, não possuem uma conexão com a obra de Euclides. Vemos Polibius manuseando uma balestilha, instrumento de observação celeste, Strabo parece desenhar em um mapa enquanto Ptolomeu e Marinus manipulam um globo terrestre. Aratus de Soli, poeta e astrônomo grego, e Hiparco de Niceia, matemático e astrônomo, aparecem na arte da capa segurando um quadrante, instrumento utilizado na navegação[4].

No período Renascentista, observou-se na Europa um movimento de resgate à cultura da Antiguidade (SAITO, 2015, p. 38), e com ela vigorava o modelo greco-romano de ensino, baseado nas chamadas sete artes liberais, que eram divididas em *trivium* e *quadrivium*. O *trivium* (cruzamento de três caminhos) é composto por três artes baseadas na linguagem: a dialética, a retórica e a gramática (PEINADO, 2009, p. 2). Já o *quadrivium* (cruzamento de quatro caminhos) é composto pelas quatro artes Matemáticas:

[4]Vide: https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-L-AST-00009-00044-C-00005/1

Geometria, Aritmética, Música e Astronomia (OLIVEIRA, 2020, p. 54). Na parte inferior do frontispício da tradução de Billingsley, pode-se observar figuras femininas representando o *quadrivium*. A Geometria aparece segurando um compasso e algo que parece um esquadro, a Aritmética uma régua ou tábua de cálculos, a Música aparece tocando alaúde, antigo instrumento de corda e a Astronomia segurando uma esfera armilar. Junto com elas, em destaque, aparece Mercurius, deus Romano protetor dos negócios e dos comerciantes.

Ao pesquisar sobre os elementos presentes no frontispício de Billingsley nos deparamos com a mesma arte em outras obras desse período. Segundo Lopez (2015), o pintor inglês John Bettes, cujas iniciais aparecem no canto inferior esquerdo da arte como "I.B, F", teria criado a arte do frontispício especificamente para o trabalho do médico, geógrafo e astrólogo inglês, William Cuningham. A arte da capa, uma xilogravura talhada em madeira, depois foi reaproveitada por vários editores e impressores britânicos dos anos 1500 até início de 1600 (LOPEZ, 2015). A obra de Cuningham, "*The Cosmographical Glasse*" (Figura 4.5), trata de assuntos da Matemática e da Cartografia, o que justifica a escolha das figuras de geógrafos em sua capa, tendo sido impressa e publicada em 1559 em Londres pelo tipógrafo inglês John Day (1522-1584), mais de dez anos antes de Billingsley, como pode ser lido na transcrição a seguir.

> O Plano COSMOGRÁFICO, contendo os agradáveis Princípios da Cosmografia, Geografia, Hidrografia ou Navegação. Compilado por William Cuningham, Doutor em Física. Um empréstimo de Londres. Tipógrafo Daji. Ano 1559.[5]. (Tradução nossa)

Day foi responsável pela impressão e distribuição de muitos trabalhos durante sua vida, incluindo as obras de Cuningham e Billingsley. Particularmente para a obra de Cuningham, Day investiu bastante em sua impressão, tendo reunido texto e imagens derivadas dos trabalhos dos matemáticos Peter Apian, Oroncio Fineo (1494-1555) e Robert Recorde (1515-1558) para o conteúdo da obra do geógrafo[6]. Além de um poema, de autoria desconhecida[7], transcrito a seguir.

In this glasse if you will beholde
The Sterry Skie, and Yearth so wide,

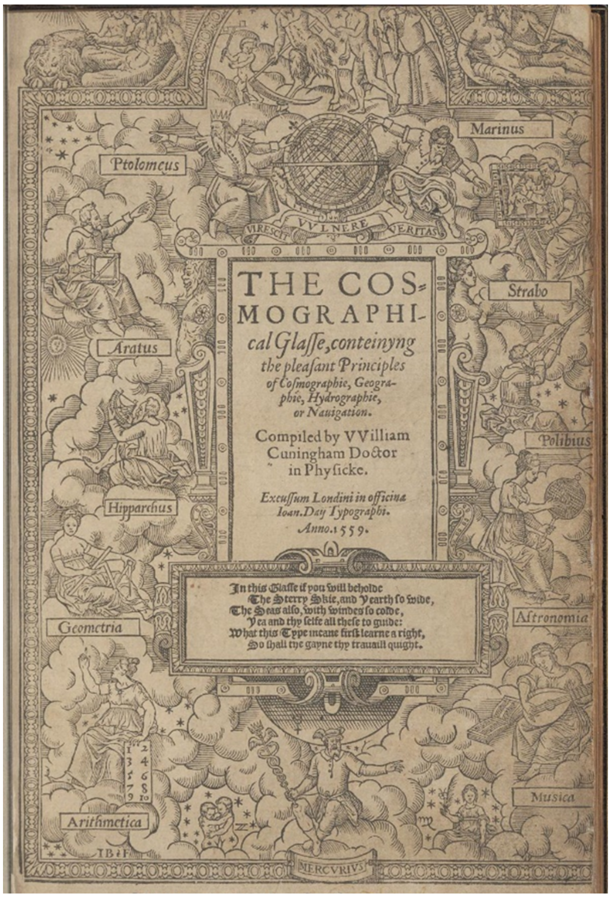
[5]*THE COSMOGRAPHICAL Glasse, conteinyng the pleasant Principles of Cosmographie, Geographie, Hydrographie, or Navigation. Compiled by William Cuningham Doctor en Physicke. Excussum Londini offina loan. Daji Typographi. Anno 1559.*

[6]Vide: https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-L-AST-00009-00044-C-00005/1

[7]Vide: https://corymbus.co.uk/through-the-looking-glass/

The Seas also, with windes so cold,
Yea and thy selfe all these to guide,
What this type meane first learn aright,
So shall the gayne thy travaill quight.[8]

Figura 4.5: Frontispício *The Cosmographical Glasse*.



THE COS-
MOGRAPHI-
cal Glasse, conteinyng
the pleasant Principles
of Cosmographie, Geogra-
phie, Hydrographie,
or Nauigation.

Compiled by VVilliam
Cuningham Doctor
in Physicke.

Excussum Londini in officina
Ioan. Day Typographi.
Anno. 1559.

In this Glasse if you will beholde
The Sterry Skie, and Yearth so wide,
The Seas also, with windes so colde,
Yea and thy selfe all these to guide:
What this Type meane first learne a right,
So shall the gayne thy trauaill quight.

Fonte: Cuningham (1559)

Depois de Day, Peter Short, outro editor e impressor inglês, foi responsável pela impressão de dois tratados musicais: "*The First Booke of Songes or Ayres*", de John Dowland (Figura 4.6a), e "*A Plaine And Easie Introduction To Practicall Musicke*", de Thomas Morley (Figura 4.6b), ambos do ano de 1597. Uma segunda edição do trabalho de Morley foi republicado com correções em 1608 pelo impressor Humfrey Lownes, tendo utilizado o mesmo frontispício e inscrições da primeira edição (Figura 4.6c). O último trabalho encontrado com esse mesmo frontispício é do ano de 1605. "*The Countesse of*

[8] Se nesse espelho fixares o olhar, O céu estrelado e a vasta Terra verás, Os mares também, com ventos gélidos, E até a ti mesmo, a tudo isso a guiar, Primeiro, compreenda corretamente o significado deste símbolo, Assim, o ganho tornará tua jornada leve.

Pembrokes Arcadia" era uma peça de teatro escrita por Philip Sidney Knight (Figura 4.6d).

Figura 4.6: Outros frontispícios.

(a)

Fonte: Dowland (1597)

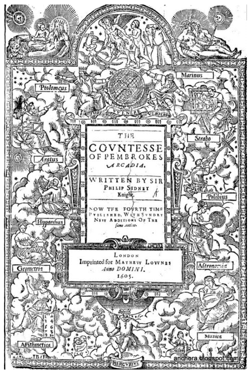
(b)

Fonte: Morley (1597)

(c)

Fonte: Morley (1603)

(d)



Fonte: Knight (1605)

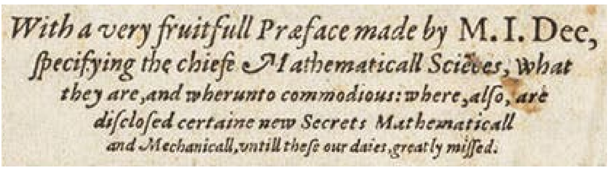
Limitamos nossa pesquisa a essas cinco obras, mas acreditamos existirem muitas outras. A imprensa de tipos móveis do alemão Johann Gutenberg propiciou ampla divulgação de conhecimento na Europa a partir do século XV, porém era um processo caro. Fato este, justificaria a reutilização da arte do frontispício de Cuninhgam.

Antes de adentrar à obra de Billingsley, falaremos sobre John Dee (1527-1608). Logo abaixo da caixa de título do frontispício, há uma área dedicada a Dee e sua importante contribuição ao escrever um prefácio sobre as Matemáticas de seu tempo. A transcrição desse trecho pode ser vista na Figura 4.7.

> Com um prefácio muito frutífero feito por M. I. Dee, especificando as principais Ciências Matemáticas, o que são e para que servem: onde, também, são revelados alguns novos segredos matemáticos e mecânicos,

> até estes nossos dias, muito esperados[9]. (Tradução nossa)

Figura 4.7: Prefácio John Dee.


With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee, ſpecifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what they are, and wherunto commodious: where, alſo, are diſcloſed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, vntill theſe our daies, greatly miſſed.

Fonte: Billingsley (1570)

John Dee foi um nome muito importante no cenário das matemáticas e ciências da segunda metade do século XVI. Estudioso e dono da mais extensa biblioteca da Inglaterra no seu tempo, ele se preocupou em organizar e classificar as Matemáticas daquele período. Mas, segundo Saito (2015), Dee se interessava também por questões mágicas e místicas relacionadas aos números, prática comum de sua época, e,

> [...] seu interesse pela Aritmética, por exemplo, estava relacionado com seus estudos sobre os três mundos dos cabalistas (inferior, celeste e superceleste).
> [...] Dee acreditava ter encontrado a fórmula que ligava as ciências cabalística, alquímica e Matemática e que por meio da qual era possível manipular as esferas mais altas e as mais baixas dos seres. (SAITO, 2015, p. 176)

Ainda de acordo com Saito (2015, p. 159), "*estudos baseados em documentos originais têm revelado que magia e ciência estiveram muito mais relacionadas do que se havia pensado*", a magia teria sido um dos pilares da ciência moderna e influenciado "*estudiosos como Heinrich Cornelius Agrippa Von Nettesheim (1486-1535), John Dee (1527-1608) e Giambattista della Porta (1535-1615)*".

Além de seus trabalhos como matemático, o ofício de geógrafo, astrônomo, alquimista, ocultista e principalmente como astrólogo, renderam a Dee o posto de alta confiança na monarquia britânica, o de conselheiro particular da Rainha Elizabeth I. Sua influência era de tal importância, que a rainha confiava apenas nele e em suas previsões astrológicas, horóscopos e mapas astrais para tomada de decisões de atividades militares e marítimas britânicas do século XVI.

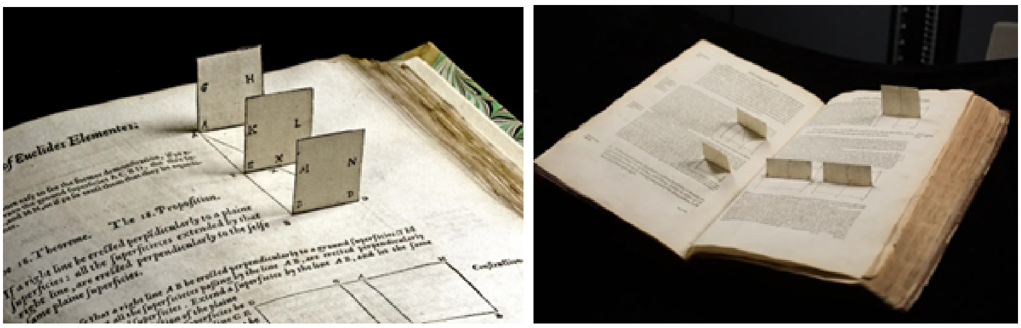
Adentrando à obra de Billingsley, a primeira dificuldade que enfrentamos foi a leitura do texto escrito no *Early Modern English*, com terminologias, significados, vocábulos, letras

[9] *With a very fruitfull Preface made by M. J. Dee, specifying chiefe Mathematicall Scieces, what They are, and whereunto commoditious: where, also, are disclosed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, until these our daies, grearly missed.*

e símbolos diferentes. A maioria das vezes foi necessário recorrer a tradutores virtuais e pessoas nativas em língua inglesa para uma melhor compreensão dos textos. Assim que se abre o livro de Billingsley, nos deparamos com as 54 páginas[10] do rico prefácio de John Dee, além de uma página com diagrama que ele elaborou para classificar as Matemáticas de seu tempo. Dee separou as Matemáticas essencialmente em Aritmética e Geometria, como artes principais ou derivadas[11], e, de acordo com ele mesmo, até a publicação de seu prefácio nenhum outro autor havia conseguido tal façanha na qualidade com que o fizera (OLIVEIRA *et. al.*, 2021). Para essas classificações, Dee recorre a definições de filósofos platônicos e reforça ser a Aritmética a ciência dos números e a Geometria, a ciência das grandezas (SAITO, 2015).

Ainda no prefácio, Dee reforça que o texto de Billingsley é destinado para que os leigos possam compreendê-lo, não os estudiosos das universidades que provavelmente eram educados em latim (OLIVEIRA *et. al.*, 2021, p. 57). Estudando o conteúdo da versão de Billingsley, de fato, percebemos uma certa preocupação de nosso tradutor quanto ao entendimento do leitor. Ao longo das quase 1000 páginas de sua versão, podem ser encontrados elementos manipuláveis e interativos, os quais Billingsley aponta que sua finalidade é facilitar a visualização dos objetos tridimensionais.

Figura 4.8: Planos paralelos e perpendiculares em *pop up*.



Fonte: University Libraries of Oklahoma[12].

No livro XI, que trata da Geometria tridimensional, podemos ver papéis colados às páginas, que podem ser erguidos representando planos secantes a elas. A imagem da

[10]Em contagem de páginas. À época, a impressão era feita por fólios, folha dobrada ao meio e contada frente e verso.

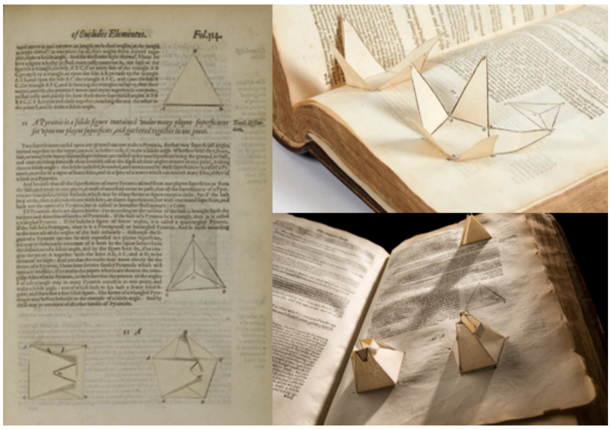
[11]Para consultar a versão traduzida da classificação das Matemáticas de John Dee, vide: OLIVEIRA, Z.V., SILVA, I.C. e GODOY, K.V. As classificações das Matemáticas de John Dee e Adriaan Van Roomen: um estudo sobre a organização dos conhecimentos matemáticos nos séculos XVI e XVII. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 21, n. 42, p. 52-80, 2021.

[12]Disponível em: https://galileo.ou.edu/exhibits/elements-geometry-1570. Acesso em: 10 nov. 2022.

esquerda, Figura 4.8, exemplifica o Teorema 16, Proposição 18 (da tradução de Billingsley), sobre linhas cortadas por planos paralelos formando segmentos proporcionais. A da direita, ilustra as proposições 3, 4 e 5 do Livro XI, que tratam da inclinação dos planos, em *pop up*, com relação aos planos desenhados na página do livro.

Ainda no livro XI, podemos observar abas que se levantam da página formando pirâmides em *pop up*. A Figura 4.9 apresenta a mesma página do livro de Billingsley em três perspectivas diferentes, para que o leitor possa compreender como os *pop ups* aparecem em sua tradução. São três pirâmides em *pop up*, de bases triangular, quadrada e pentagonal com as abas dobradas, levantadas, e reunidas formando a pirâmide. O desenho no meio da página representa a vista superior de uma pirâmide de base triangular.

Figura 4.9: Pirâmides em *pop up*.



Fonte: University Libraries of Oklahoma.

Como de costume em sua tradução, Billingsley acrescenta uma explanação sobre a definição de Euclides acerca da pirâmide e acrescenta que, se de todo modo o leitor ainda não compreendesse, que os papéis anexados à página o ajudariam na visualização do objeto tridimensional, conforme consta no trecho:

> [...] E, no entanto, para que o leitor possa ver mais claramente a forma de uma Pirâmide, coloquei aqui duas Pirâmides que parecerão sólidas se você erguer os papéis onde são desenhados os lados triangulares de cada Pirâmide, de tal forma que as pontas F de cada triângulo coincida em um ponto, a formar um ângulo sólido: um dos quais tem na base uma figura de quatro lados e o outro uma figura de cinco lados[13]. (Billingsley 1570, fl. 314. Tradução nossa)

[13]*And yet that the reader may more clerely see the forme of a Pyramis, I have here set two fundry Pyramids which will appeare bodilike, if ye erecte the papers wherin are drawen the triangular sides of eche Pyramis, in such sort that the pointes if the angles F of ech triangle may in every Pyramis concurre in one point, and make a solide angle: one of which hath to his base a fower sided figure, and the other a five sided figure.*

Ele justifica ainda que, a partir das pirâmides de base triangular, quadrangular e pentagonal, seria possível conceber qualquer outro tipo de pirâmide, ou seja, construir pirâmides com um polígono com qualquer quantidade de lados como base.

As figuras manipuláveis presentes na obra de Billingsley nos serviram de inspiração para este estudo, tanto que ao pesquisar sobre esses recursos de papéis e tridimensionalidade, percebemos que os elementos em *pop up* eram bastante populares no século XVI, período onde nosso tradutor se situa. Finalizamos, por enquanto, nossa análise da obra de Billingsley para, na Seção 4.1, entender um pouco mais sobre esses materiais interativos. No Capítulo 5 voltaremos com uma análise mais objetiva sobre as definições de Euclides e sobre as figuras tridimensionais.

4.1 Livros móveis

Os livros móveis, ou livros *pop up*, são bastante conhecidos do público infantil. Diversos cenários, personagens e figuras saltam das páginas do livro e encantam crianças e adultos, mas, nem sempre foi assim. Originalmente, essas técnicas eram utilizadas para fins didáticos e educacionais, eram encontrados principalmente em livros acadêmicos de astronomia e medicina do século XVI.

Esses objetos fazem parte do que se conhece atualmente por engenharia do papel. O objetivo principal da engenharia do papel é dar mobilidade aos seus elementos, gerando figuras que podem ser planas ou tridimensionais. Para isso, podem ser utilizados mecanismos em papel como volantes, que são círculos de papel giratórios, linguetas, que são tipo alavancas em papel e abas que se levantam da página (SANTOS, 2019, p. 38). Esses mecanismos podem ser observados na tradução de Henry Billingsley, conforme posto na Seção 4.

Santos (2019, p. 38) reitera que "*os livros nos quais são utilizados, em algum nível, os mecanismos da engenharia do papel são denominados livros móveis*". Os livros móveis, ou livros *pop up*, podem apresentar algum tipo de mecanismo de acionamento manual ou os elementos podem surgir automaticamente ao virar uma página. O principal é que o leitor possa interagir com o livro, dando "vida" aos elementos dentro dele.

A literatura mostra que o primeiro livro *pop up*[14] conhecido é do escriba e monge inglês Matthew Paris (1200-1259), que acumulava também as funções de ilustrador, escultor,

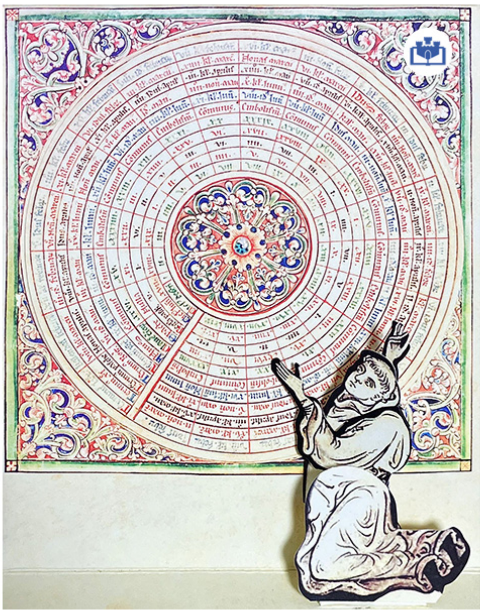
[14]Sobre a História dos livros *pop up*, visite: https://popuplady.com/.

cartógrafo e historiador. Paris criou um mecanismo que utilizava volantes de papel que mais tarde ficou conhecido por *Volvelle*, que consiste em vários círculos concêntricos sobrepostos, presos à página do livro por uma cordinha ou grampo. Escrito na primeira metade do século XIII, *Chronica Majorca* traz em uma de suas páginas (Figura 4.10a) vários círculos que giram em torno de seu centro, cujas informações quando alinhadas, representavam um tipo de calendário que marcava as principais datas de feriados cristãos.

De acordo com Killacky (2022), os primeiros livros *pop up* de anatomia foram impressos na Alemanha, por Heinrich Vogtherr no ano de 1538. Nos dois anos seguintes, outras publicações apareceram nas demais regiões do continente europeu, atuais França, Itália, Holanda e Inglaterra. Na Figura 4.10b é possível observar uma dessas obras na qual abas, representando camadas do corpo humano, se levantam dando acesso a diferentes sistemas do corpo humano.

Figura 4.10: Livros com elementos em *pop up*.

(a) Volvelle de Mathew Paris do século XIII.



Fonte: Paris (2004)

(b) Livro de medicina do século XVI.

Fonte: *Anathomia oder abconterfettung eynes Mans leib, wie er inwendig gestaltet ist.* (1544)

Articulando tópicos de História da Matemática, as técnicas apresentadas e juntando o fator surpresa do *pop up*, aplicados ao ensino da Matemática, os livros móveis podem ser uma boa ferramenta para visualização e estudo dos sólidos geométricos. É neste sentido que apresentamos, no Capítulo 5, uma sequência de atividades para construção dos dez principais sólidos geométricos descritos no Livro XI dos *Elementos* de Euclides, da versão de Billingsley. Enfatizamos que as possibilidades são diversas e não se restringem às sugestões aqui elencadas.

5 Construindo sólidos geométricos em *pop up*

Neste último capítulo, oferecemos ao professor/leitor nosso produto educacional, um roteiro para construção dos dez principais objetos tridimensionais descritos por Euclides em algumas definições do Volume XI dos *Elementos*. Os modelos serão construídos com recursos de livros móveis, sendo a maioria feita com régua e compasso.

Passado e presente não se dissociam e o modo como o encaramos passa por diferentes percepções em diferentes épocas. Nosso referencial teórico perpassa por definições modernas da Geometria, a fim de adaptar a linguagem para nossos estudantes e adequar à sua função pedagógica. Isto também pode gerar uma boa pauta para incentivar a discussão sobre como a Geometria era e como é vista atualmente.

É importante ressaltar que alguns passos das construções com régua e compasso serão omitidos, por exemplo o ponto médio de um segmento. Desse modo, sugerimos o texto de Várhidy (2010) como leitura de apoio, que apresenta, em detalhes, as construções elementares. Para uma melhor compreensão, também é possível acompanhar as construções em nosso site, Puxando Cordinhas[1].

Os objetos construídos serão de dois tipos, *pop up* que surge automaticamente ao virar da página e modelos planificados que ganham forma quando cordinhas são tensionadas. Com objetivos similares aos de Billingsley (1570) de facilitar para o(a) leitor(a) a visualização de figuras tridimensionais quando se ergue o papel, construiremos o sólido a partir de sua planificação, habilidade necessária a estudantes da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular da área de Matemática do 6° ano do Ensino Fundamental destaca a importância de se trabalhar com a planificação dos objetos tridimensionais. Sobre prismas e pirâmides, o aluno deve reconhecer as planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas) (BRASIL, 2015, p. 302). Podemos ver

[1]Disponível em: puxandocordinhas.wordpress.com.

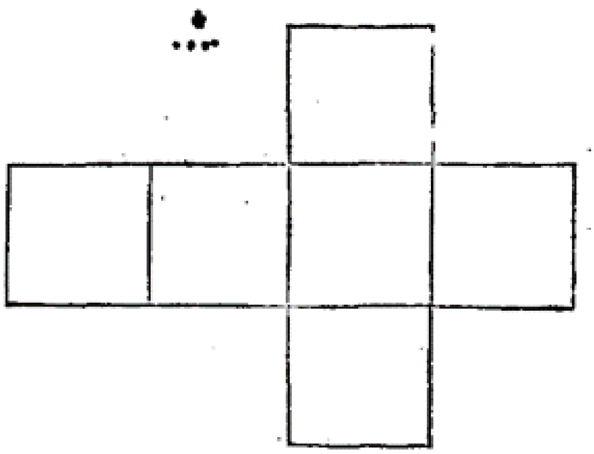
ainda que, ao final do 6° ano um aluno deve ser capaz de:

> (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (BRASIL, 2015, p. 303)

Destacamos que a obra de Billingsley apresenta os desenhos e a descrição das planificações dos poliedros regulares, algumas pirâmides e prismas. Na versão de Bicudo não é possível ver esses objetos e ele nem menciona a planificação das figuras. Lembramos que o cerne da tradução de Billingsley tinha intuito didático, diferente de Bicudo, que quis manter seu texto fiel ao de Heiberg, que se aproxima muito dos textos mais antigos.

Em vista do exposto e tomando por base as figuras presentes na versão de Billingsley, a maioria dos objetos a serem construídos nas atividades propostas a seguir serão realizados a partir de sua planificação. A Figura 5.1 ilustra um exemplo das planificações apresentadas por Billingsley.

Figura 5.1: Planificação de um cubo.



Fonte: Billingsley (1570, fl. 320)

O leitor mais curioso perceberá que este material apresenta os objetos em uma ordem diferente da apresentada nas traduções de Bicudo e Billingsley, para um melhor sequenciamento didático, não sendo anacrônica essa adaptação, visto que o conteúdo original é preservado. É importante salientar que tomaremos como base de nossas atividades as definições apresentadas por Billingsley, mas faremos sempre a comparação entre as duas traduções.

As atividades serão divididas em: pirâmides, prismas, poliedros regulares e corpos redondos. Os três primeiros formando os poliedros, figuras tridimensionais formadas apenas por polígonos planos, e os últimos, contendo pelo menos uma superfície não plana.

Gostaríamos de ressaltar que o foco desta atividade está em construir os modelos com material concreto, desse modo, não vamos discutir a teoria que cabe a esses elementos. Ao final da construção de cada sólido, deixamos como sugestão algumas questões motivadoras para que o professor possa guiar o estudo em suas aulas, mas neste momento não é nosso objetivo respondê-las.

5.1 Pirâmides

Livro XI: Definição 12

"Uma pirâmide é uma figura sólida contida por várias superfícies planas, colocadas sobre uma superfície plana e reunidas em um ponto.[a]"(Tradução nossa)

[a]"*A Pyramis is a solid figure contained vnder many playne superficieces set vpon one playne superficies, and gathered together to one point.*" (Billingsley, 1570, fl. 314)

Como de costume na tradução de Billingsley, ele apresenta uma explanação do que deveria ser o objeto geométrico em cada definição de Euclides. Na Definição 12, Bicudo diz que a pirâmide "*é uma figura sólida contida por planos, construída a partir de um plano até um ponto*[2]" (2009, p. 482). Cotejando as definições dos dois tradutores, não é possível inferir, inicialmente, qual deveria ser o formato da base dessa pirâmide, no que Billingsley completa ser necessário que:

> [...] todas as superfícies erguidas de uma Pirâmide são triangulares, exceto a base, que pode ser de qualquer forma ou figura, exceto um círculo. Pois se a base é um círculo, então ele não se erguerá com lados ou superfícies planas, mas com uma superfície arredondada, e não tem o nome de Pirâmide, é chamado (como aparecerá daqui em diante) um Cone[3]. (Billingsley, 1570, f1. 314. Tradução nossa)

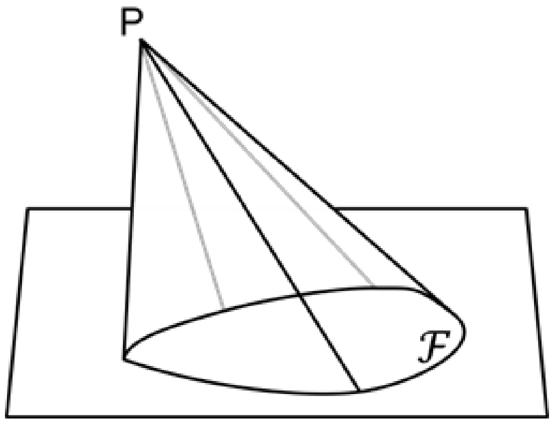
Na Geometria moderna, um cone é um objeto que possui como base uma figura plana $\mathcal{F}$ (podendo ser um disco), e como vértice um ponto P exterior ao plano de $\mathcal{F}$, de forma que o cone é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos

[2]A escrita de Bicudo é bastante sintética e pode causar estranheza, porém, isso se deve à sua escolha em fazer uma tradução literal das definições de Euclides direto do grego.

[3][...] *of euery Pyramis ascend from one playne superficies as from the base,and tende to one poynt,it must of necesirie come to passe, that all the superficieces of a Pyramis are trianguler, except the base, which may be of any forme or figure except a circle. For if the base be a circle, then it ascendeth not with sides, or diners superficieces, but with one round superficies, and hath not the name of a Pyramis, but is called (as here after fhall appeare) a Cone.*

de $\mathcal{F}$ (Figura 5.2). Um cone cuja base é um polígono é chamado de pirâmide (LIMA *et. al.*, 2006).

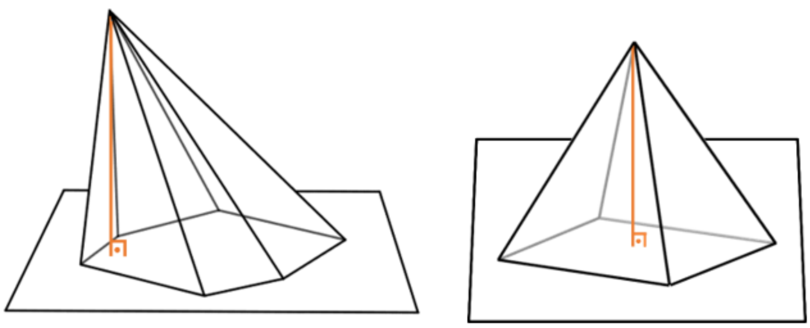
Figura 5.2: Cone em definição moderna



Fonte: Autoria própria (2023)

Com base no exposto e fazendo uso do presentismo pedagógico defendido por Fendler (2008), consideramos nesta atividade a definição moderna de pirâmide. Uma pirâmide pode ser reta, isto é, o pé da altura com relação ao vértice da pirâmide coincide com o centro geométrico do polígono da base, ou oblíqua, caso contrário, conforme pode ser observado na Figura 5.3.

Figura 5.3: Pirâmides (oblíqua e reta)



Fonte: Autoria própria (2023)

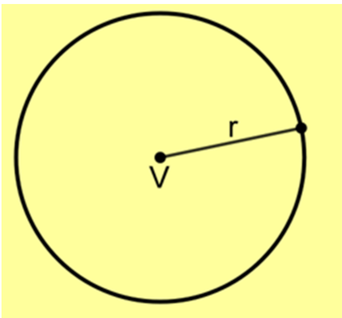
Para facilitar a construção do objeto e compreensão por parte dos estudantes, focaremos na pirâmide reta, visto que BNCC e PCNs também não contemplam os sólidos oblíquos. De todo modo, incentivamos que o(a) professor(a) promova discussões a respeito desses modelos.

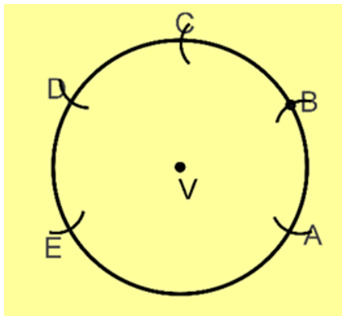
5.1.1 Pirâmide Regular Reta de Base Quadrada

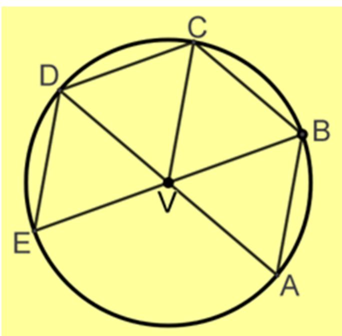
Apesar de Billingsley trazer a planificação da pirâmide de base quadrada em seu texto, modelo que ele utiliza para montar seu *pop up*, como sua construção é intuitiva, faremos aqui de modo diferente, sugerimos uma construção em *pop up* automático, isto é, a pirâmide surgirá ereta ao se abrir a página em 180°, explorando, ainda, a construção com régua e compasso.

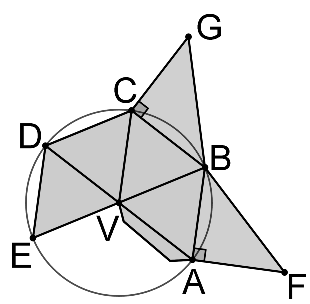
- **Materiais necessários:** Duas folhas tamanho A4, compasso, régua, lápis, borracha, tesoura e cola.

Tabela 5.1: Construindo uma pirâmide quadrangular regular em *pop up*.

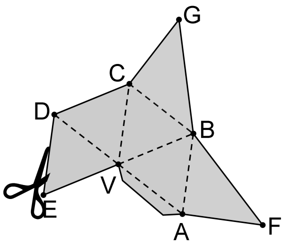
<table>
<tr>
<td>


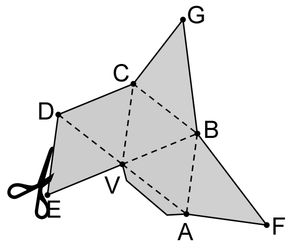
1. Marque um ponto V em uma folha A4. Desenhe uma circunferência de centro V e raio r (o professor pode definir o tamanho do raio ou deixar livre);
</td>
<td>


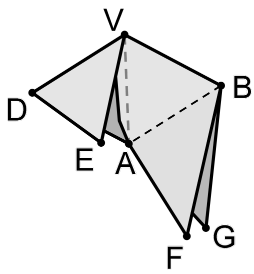
2. Com o compasso centrado em um ponto qualquer sobre a circunferência, escolha uma abertura no compasso e marque 5 pontos, A, B, C, D e E, sobre a circunferência;
</td>
</tr>
<tr>
<td>


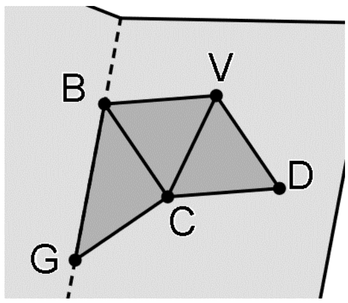
3. Trace os segmentos AB, BC, CD, DE, VA, VB, VC, VD e VE, deixando uma aba adjacente ao segmento VA;
</td>
<td>


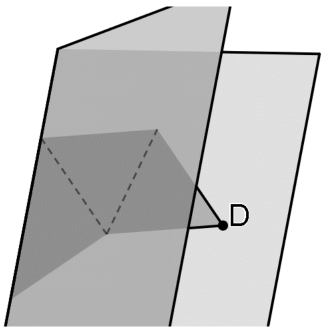
4. Trace duas perpendiculares aos segmentos AB e BC, passando por A e por C. Marque os pontos F e G sobre as perpendiculares, de modo que $AF = AB$ e $CG = CB$. Trace os segmentos BF e BG;
</td>
</tr>
</table>

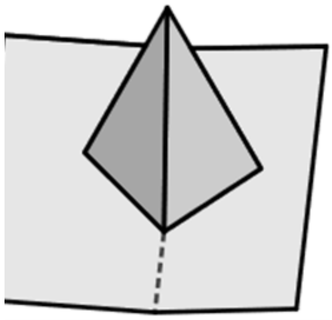
<table>
<tr>
<td>

6. Recorte a planificação da pirâmide deixando as abas e dobrando todos os segmentos pontilhados;</td>
<td>

6. Recorte a planificação da pirâmide deixando as abas e dobrando todos os segmentos pontilhados;</td>
</tr>
<tr>
<td>

7. Passe cola na aba do segmento VA por dentro da face VDE, de forma que VE coincida com VA;</td>
<td>

8. Dobre ao meio uma folha A4 em sentido paisagem, marcando o centro do papel;
Passe cola no triângulo ABF e cole na folha base do *pop up*, de modo que o segmento BF coincida perfeitamente com a dobra do papel. Fixe bem;</td>
</tr>
<tr>
<td>

9. Passe cola no triângulo BCG e feche a folha. Fixe bem;</td>
<td>
10. Abra seu *pop up*.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- Quantos vértices, arestas e faces tem a pirâmide construída?

- Determine as medidas do apótema, da altura, do volume e da área superficial da pirâmide a partir do modelo construído em *pop up*.

- Se utilizarmos uma abertura fixa no compasso em toda a construção da planificação da pirâmide, quantos polígonos diferentes para a base poderão ser formados?

- Com essa técnica, é possível construir uma pirâmide regular em *pop up*, com qualquer polígono na base? E se o polígono for regular, porém com uma quantidade ímpar de lados?

- De acordo com a definição de Euclides, uma pirâmide, necessariamente, tem que ser reta? Como poderíamos construir pirâmides oblíquas em *pop up*?

- Qual é a pirâmide de maior altura que pode ser construída em *pop up* com a técnica sugerida, de modo que a pirâmide permaneça dentro do papel? E a de maior volume? E a de maior área lateral? O mesmo acontece com o modelo sugerido por Billingsley?

- Pense em uma maneira de se calcular a altura dessa pirâmide, dado que não é possível ver por dentro do modelo construído.

Sugerimos, também, que o(a) professor(a) de Matemática trabalhe interdisciplinarmente com a área de língua inglesa, a fim de promover discussões sobre as diferenças do inglês antigo de Billingsley para o contemporâneo. Por exemplo, a grafia, pronúncia e significado das palavras: *vnder*, *vpon*, *playne* e *superficieces*.

5.2 Prismas

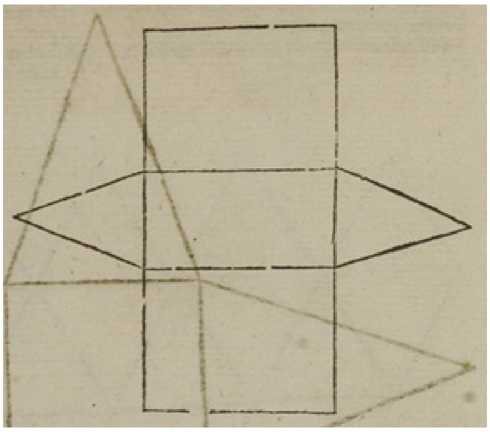
Livro XI: Definição 12

"*A prisme is a solide or a bodily figure contained vnder many plaine superficieces which are opposite, are equall and like, and parallells, and all the other superficieces are parallelogrames*[a]. (Billingsley, 1570, fl. 314)

[a]"Um prisma é uma figura sólida ou corpórea contida por superfícies planas que são opostas, iguais e semelhantes, e paralelas, e todas as outras superfícies são paralelogramos." (Tradução nossa)

Na tradução de Bicudo, "*Prisma é uma figura sólida contida por planos, dos quais os dois opostos são tanto iguais quanto também semelhantes e paralelos, e os restantes são paralelogramos.*" (BICUDO, 2009, p. 482). Notamos que, na tradução de Billingsley, o autor considera figura sólida e corpórea como sinônimos. Ambos os tradutores consideram o interior da figura, ou seja, o prisma seria uma figura maciça. Para explicar melhor essa definição, Billingsley também acrescenta o prisma em *pop up*, com abas representando as suas superfícies planificadas e, ao final das definições do Livro XI, ele apresenta a planificação de um prisma triangular (Figura 5.4).

Figura 5.4: Planificação do prisma triangular.



Fonte: Billingsley (1570, fl. 323)

É interessante notar que Billingsley não menciona o fato de ter definido o prisma como uma figura sólida e que o prisma em *pop up* é "oco". Em uma nota na margem da página, Billingsley acrescenta que a definição de prisma pode ser aplicada também aos paralelepípedos (Billingsley, 1570, fl. 315). Ambas as traduções não deixam claro se esse prisma deve ser reto ou oblíquo.

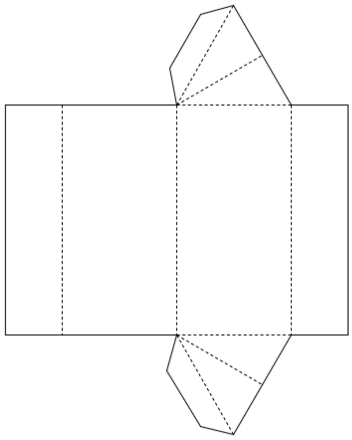
Na definição moderna, um prisma é uma figura tridimensional constituída por um par de faces opostas, congruentes e paralelas entre si. Essas faces são chamadas bases desse prisma e podem ser qualquer polígono convexo, regular ou não, e essas faces são conectadas por paralelogramos (LIMA *et. al.*, 2006, p. 286). Quando esses paralelogramos são retângulos, dizemos que este é um prisma reto.

5.2.1 Prisma Regular Reto de Base Triangular

O prisma triangular regular reto é um prisma cujas bases são triângulos equiláteros. Faremos a construção desse prisma em *pop up* automático, isto é, ele surgirá, deitado, ao virar da página. Faremos a construção a partir de um modelo pronto[4], que pode ser visto na Figura 5.5.

[4]Disponível no Apêndice A

Figura 5.5: Molde do prisma triangular regular (fora de escala).



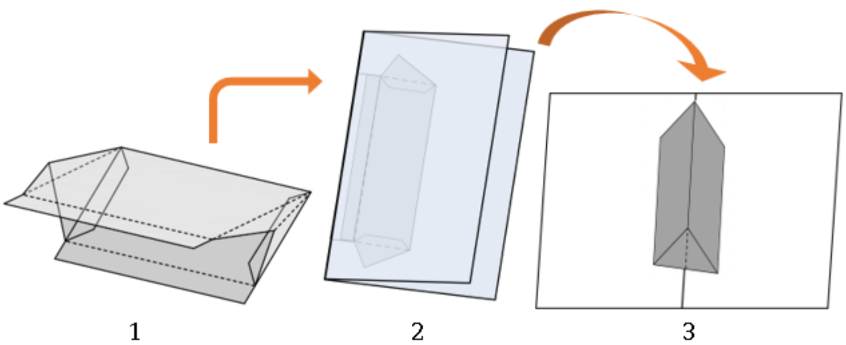
Fonte: Autoria própria (2023)

Materiais necessários: Molde do prisma, uma folha A4, tesoura e cola.

Recorte o modelo do prisma, dobre sobre as linhas pontilhadas e faça a construção que se segue:

1. Cole as abas dos triângulos por dentro do retângulo adjacente;
2. Dobre uma folha A4 ao meio e cole uma das abas adjacentes aos retângulos na folha, de modo que coincida perfeitamente com a linha da dobra;
3. Passe cola na outra aba que ficou para cima, feche a folha base do *pop up* e fixe bem. Abra seu *pop up*.

Figura 5.6: Plano de montagem do prisma triangular regular reto (fora de escala).



Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- Quantas faces, vértices e arestas tem o prisma construído?
- Determine a altura, área superficial e volume desse prisma.
- É possível criar outros prismas em *pop up*, com uma base diferente da triangular, com a técnica utilizada neste modelo?
- De acordo com a definição de Euclides, todo prisma tem que ser reto? É possível construir um prisma oblíquo em *pop up* com essa técnica?
- Qual é a relação entre o polígono da base e o volume de um prisma?
- Qual prisma em *pop up* de maior altura pode ser construído em uma folha tamanho A4, de forma que a figura permaneça dentro do papel quando dobrado? E de maior volume? E de maior área superficial?
- Um prisma pode ser considerado um paralelepípedo? A recíproca é verdadeira? Determine uma condição necessária e suficiente para que um paralelepípedo seja um prisma.

5.3 Corpos Redondos

As figuras que hoje conhecemos por corpos redondos (cone, cilindro e esfera), Euclides as define a partir da rotação de um triângulo retângulo (cone circular reto), de um paralelogramo retângulo (cilindro regular reto) e de um semicírculo (esfera). Em termos atuais, esses objetos são sólidos de revolução. Iezzi *et. al.* (2006) acrescenta que corpos redondos são sólidos geométricos que possuem ao menos uma superfície não plana.

Nesta seção nos esbarramos em duas dificuldades: visualizar as superfícies dos objetos rotacionados e a construção da esfera. Apesar de Bicudo e Billingsley não apresentarem a planificação desses objetos em suas versões, nós o faremos, de modo a facilitar sua construção e oportunizar o trabalho com a área superficial dessas figuras. Fazemos isso ancorados na Competência 3 da BNCC do Ensino Médio, na habilidade que o aluno deve adquirir de:

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos

> estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2015, p. 537)

Não apresentaremos esses cálculos em situações reais, mas, uma vez que o(a) aluno(a) compreende os elementos e propriedades das figuras aqui estudadas, depreende-se que o mesmo seja capaz de aplicar esse conhecimento em outras áreas, como, por exemplo, nas situações descritas na BNCC.

Com a esfera o desafio será um pouco maior. Círculos e esferas são abstrações Matemáticas, então construir uma esfera com papel é uma tarefa ainda mais complicada. Assim, usaremos um poliedro como uma razoável aproximação para o formato da esfera.

5.3.1 Esfera

Livro XI: Definição 12

"*A Sphere is a figure which is made, when the diameter of semicircle abiding fixed, the semicircle is turned round about, vntill it returne vnto the selfe same place from whence it began to be moued*[a]. (Billingsley, 1570, fl. 315)

[a]"Uma esfera é uma figura obtida, quando o diâmetro do semicírculo permanece fixo e o semicírculo é girado, até retornar ao mesmo lugar de onde começou a ser girado." (Tradução nossa)

Euclides define a esfera como sendo a figura obtida pela rotação de um semicírculo em torno de seu diâmetro, isto é, a superfície dessa esfera é a figura obtida pelo "rastro" do arco de 180° que compõe o semicírculo. A interpretação das definições das duas traduções é análoga, pois Bicudo diz que esfera

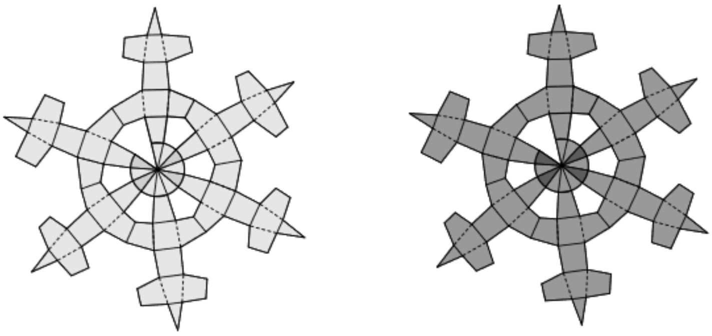
> [...] é a figura compreendida quando, o diâmetro do semicírculo permanecendo fixo, o semicírculo, tendo sido levado à volta, tenha retornado, de novo, ao mesmo lugar de onde começou a ser levado. (BICUDO, 2009, p. 482)

A construção desse objeto será feita a partir de um modelo pronto que, na verdade, formará um poliedro composto de muitas faces. O molde representa o que seriam os gomos da esfera que serão encaixados formando nossa figura. Contudo, ressaltamos ao leitor que nem por isso a montagem se torna mais simples. Para uma melhor compreensão, sugerimos acompanhar o tutorial em vídeo em nosso site[5]. Comece imprimindo duas cópias do molde da esfera (Figura 5.7).

Materiais necessários: Molde da esfera ($\times 2$), uma folha A4, tesoura, cola e barbante.

[5]Molde e tutorial em vídeo disponível em: puxandocordinhas.wordpress.com.

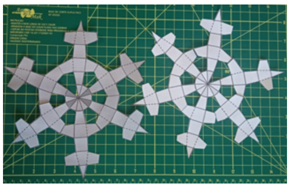
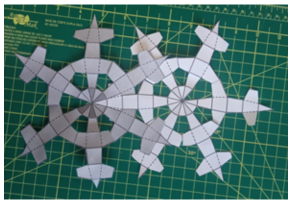
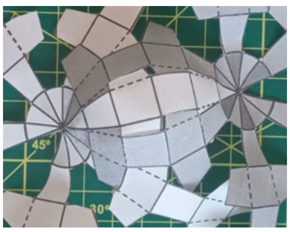
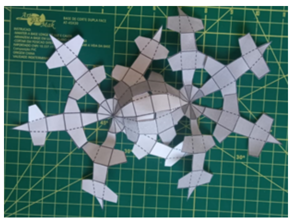
Figura 5.7: Molde da esfera.

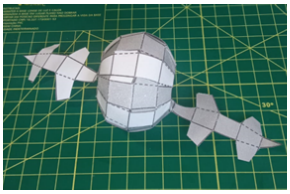
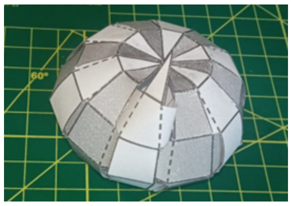
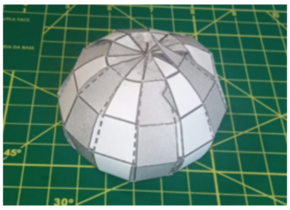
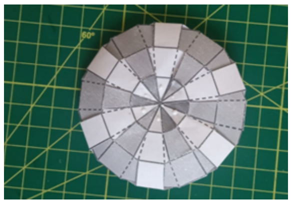
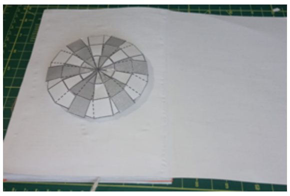
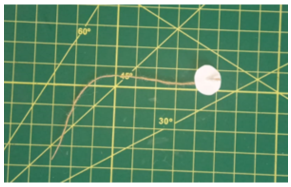
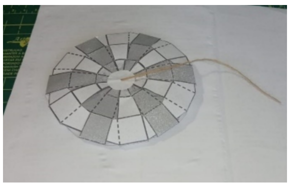
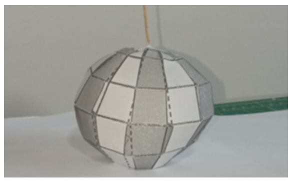


Fonte: Autoria própria (2023)

Em nossa construção, utilizamos uma peça clara e uma escura apenas para facilitar a explicação. Perceba que a Figura 5.7 representa uma aproximação para a planificação da esfera. Cada peça contém 6 gomos e, em alguns deles, existem abas que serão usadas para encaixar uma peça na outra. Agora, vamos unir as duas partes, encaixando os gomos da esfera, formando uma peça única. Acompanhe a construção na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Construindo uma esfera em *pop up*.

 1. Recorte as duas peças da esfera, conforme figura acima;	 2. Vamos começar a unir os gomos de cada peça. Cole a ponta de um gomo da peça clara no centro da peça escura;
 3. Encaixe os dois gomos escuros adjacentes ao gomo da peça clara que foi colado, sempre colocando as abas dos gomos para dentro da peça. Observe como as abas se encaixam, se entrelaçando por dentro da peça;	 4. Cole as pontas dos gomos da peça escura no centro da peça clara, tomando cuidado para fazer coincidir perfeitamente os triângulos do gomo de uma peça com os triângulos do centro da outra peça;

 5. Repita o processo até sobrarem apenas dois gomos, um de cada peça;	 6. Encaixe as abas do último gomo, colocando-as para dentro da esfera;
 7. Perceba que o último gomo ficará solto, a princípio;	 8. "Amasse" a esfera, dobrando-a ao meio. Coloque alguns pingos de cola bem próximos ao centro da esfera;
 9. Cole-a em outra folha A4. Fixe bem;	 10. Recorte um pequeno círculo de papel e passe um barbante pequeno pelo centro desse círculo;
 11. Repita o processo até sobrarem apenas dois gomos, um de cada peça;	 12. Encaixe as abas do último gomo, colocando-as para dentro da esfera;

Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- O que significa dizer que a esfera é uma abstração Matemática?

- Tente medir o diâmetro da esfera construída. Compare com os valores obtidos pelos seus colegas.

- Sabendo que o volume V de uma esfera de raio r é dado pela expressão $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, obtenha o volume da esfera que foi construída. Compare os resultados obtidos pelos seus colegas.

- A partir do modelo construído, é possível obter algum valor aproximado para sua área superficial? Explique como isso poderia ser feito.

- Sabendo que a área superficial A de uma esfera de raio r é dada pela expressão $A = 4\pi r^2$, obtenha a área da esfera construída e compare com o valor encontrado no item anterior. Compare com os resultados obtidos pelos seus colegas.

5.3.2 Cone Circular Reto

Livro XI: Definição 16

"*A cone is a solide or bodely figure which is made, when one of the sides of a rectangle triangle, namely, one of the sides which contayne the right angle, abiding fixed, the triangle is moued about, vntill it returne vnto the selfe fame place from whence it began first to be moued. Now if the right line which abideth fixed be equall to the other side which is moued about and containeth the right angle: then the cone is a rectangle cone. But if the be lesse, then is it an obtuse angle cone. And if it be greater, the is it an acute-angle cone*[a]. (Billingsley, 1570, fl. 316)

[a]"Um cone é uma figura sólida ou corpórea obtida quando um dos lados de um triângulo retângulo, ou seja, um dos lados que contém o ângulo reto, permanecendo fixo, o triângulo é girado, até retornar ao lugar de onde começou a ser girado. Agora, se a linha reta que permanece fixa for igual ao outro lado que se move ao redor e contém o ângulo reto: então o cone é um cone retangular. Mas se for menor, então é um cone obtusângulo. E se for maior, é um cone acutângulo." (Tradução nossa)

Conforme já citamos anteriormente, Euclides define o cone como o que hoje conhecemos por sólido de revolução, pelo fato de a rotação de um triângulo retângulo, em torno de um eixo que contém um de seus catetos produzir um cone (LIMA *et. al.*, 2006). As traduções de Billingsley e Bicudo são semelhantes, Bicudo define o cone como:

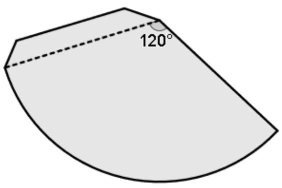
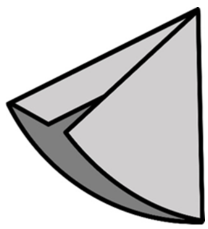
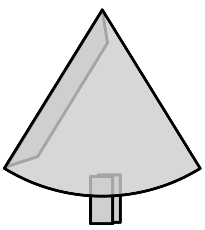
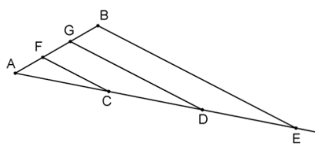
> [...] a figura compreendida, quando um lado, dos à volta do ângulo reto, de um triângulo retângulo, permanecendo fixo, o triângulo, tendo sido levado à volta, tenha retornado ao mesmo lugar de onde começou a ser

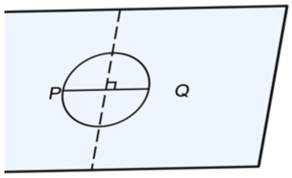
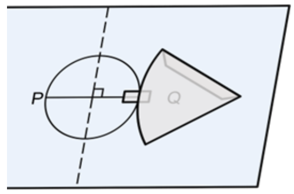
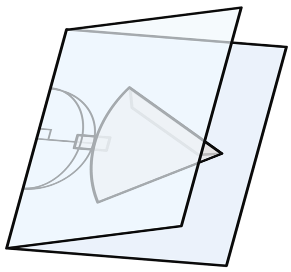
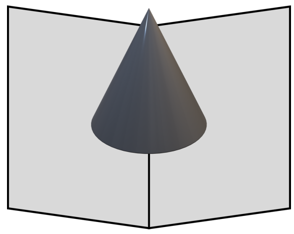
> levado. E, caso, por um lado, a reta que permanece fixa seja igual à restante, [a] levada à volta do ângulo reto, o cone será retângulo, caso, por outro lado, menor, obtusângulo, e caso maior, acutângulo. (BICUDO, 2009, p. 482)

Notamos que essa definição descreve, na verdade, cones circulares retos e o cone, então, seria a superfície obtida pelo "rastro" da hipotenusa desse triângulo. Os dois tradutores deixam a entender que o cone é maciço. Porém, pela impossibilidade de construir essa figura sólida em *pop up*, com papel, optamos por fazê-lo a partir da planificação da sua superfície lateral, que proporcionará, inclusive, a discussão da relação entre o comprimento da circunferência base do cone e sua geratriz. Além disso, é possível observar se o cone é retângulo, acutângulo ou obtusângulo, conforme especifica Euclides em sua definição.

Materiais necessários: Duas folhas tamanho A4, compasso, régua, lápis, borracha, tesoura e cola.

Tabela 5.3: Construindo um cone circular reto em *pop up*.

 1. Em uma folha A4, construa um setor circular de raio g qualquer, com ângulo central de 120°, deixando uma aba em um dos lados do setor;	 2. Dobre a aba que ficou e cole o outro lado do setor sobre essa aba, dobrando o setor ao meio;
 3. Cole duas hastes por dentro do cone, no meio da borda que ficou, uma em cada lado do cone dobrado;	 4. Trace o segmento $\overline{AB} = g$. Em seguida, trace um segmento $\overline{AE} = 3g$, obtendo os pontos C, D e E sobre $\overline{AE}$, tais que $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = g$. Trace os segmentos $\overline{BE}$, $\overline{GD}$ e $\overline{FC}$, de modo que $\overline{BE} \parallel \overline{GD} \parallel \overline{FC}$, com F e G pontos de $\overline{AB}$;

 5. Dobre uma folha A4 ao meio. Com centro sobre a linha da dobra, desenhe uma circunferência de raio $\overline{AF}$. Trace o diâmetro da circunferência perpendicularmente à linha da dobra e marque os pontos P e Q;	 6. Cole uma das hastes sobre o ponto Q, de modo que a borda do cone tangencie a circunferência na base do *pop up*;
 7. Passe cola na haste que ficou para cima, fazendo coincidir a borda do cone com o ponto P. Feche o papel e fixe bem;	 8. Abra seu *pop up* e obtenha o cone.

Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- Qual foi a medida g que você escolheu?
- Calcule a altura, área da base, área lateral e volume do seu cone.
- Veja com seus colegas quem obteve o cone de maior altura e volume. Compare as medidas de g usadas por cada um.
- Determine as medidas do triângulo retângulo gerador do seu cone.
- Seu cone é retangular, acutângulo ou obtusângulo?
- O que acontecerá com a altura do cone se o setor inicial, gerador do cone, tiver o mesmo raio g e um ângulo maior que 120°? E se esse ângulo for menor?
- Se dobrarmos a medida da geratriz, qual será a medida da área da base?

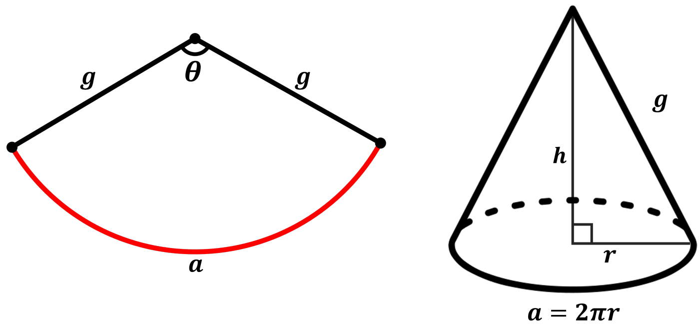
- De acordo com a definição de Euclides, cone só pode ser reto? Pense se é possível construir cones oblíquos em *pop up*.

- Qual é o cone de maior altura que pode ser construído em *pop up*? E de maior volume? E de maior área lateral? E total? Ao realizar essa construção com um papel em tamanho A4, o cone permanecerá dentro da folha ao dobrá-la?

- Por que o raio da base foi igual a $\frac{1}{3}$ da geratriz? Mostre por que a construção é válida para um setor de 120° (ou $\frac{2\pi}{3}$ em radianos) e mostre que, para outros ângulos, a relação entre o raio r da base e a geratriz g do cone é $r = \frac{g\theta}{2\pi}$, com θ em radianos.

A demonstração do último item é bastante simples, acompanhe-a com base na Figura 5.8.

Figura 5.8: Cálculo do raio da base a partir da geratriz do cone.



Fonte: Autoria própria (2023)

Demonstração. O setor gerador do cone de raio g e ângulo central θ, determina um arco de comprimento a. O comprimento da circunferência é dado por $2\pi g$, correspondente ao ângulo central de 2π radianos. Com uma regra de três simples, encontramos o comprimento do arco a como $a = g\theta$, com θ em radianos.

A base do cone é um círculo de raio r e comprimento $2\pi r$, que é igual ao comprimento do arco do setor gerador do cone, assim, $2\pi r = a$, mas $a = g\theta$, portanto $2\pi r = g\theta$, o que dá $r = \frac{g\theta}{2\pi}$.

O setor utilizado na construção corresponde a um ângulo central de 120°, ou $\frac{2\pi}{3}$ em radianos. Substituindo na fórmula do raio da base do cone, temos,

$$r = \frac{g\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{2\pi g}{3 \cdot 2\pi} = \frac{g}{3}.$$

$\square$

5.3.3 Cilindro

Livro XI: Definição 18

"*A cylinder is a solide or bodely figure which is made, when one of the sides of a rectangle parallelogramme, abiding fixed, the parallelogramme is moued about, vntill it returne to the selfe same place from whence it began to be moued*[a]. (Billingsley, 1570, fl. 317)

[a]"Um cilindro é uma figura sólida ou corpórea obtida, quando um dos lados de um paralelogramo retângulo, permanecendo fixo, o paralelogramo é girado até retornar ao mesmo lugar de onde começou a ser girado." (Tradução nossa)

Terceira e última figura de revolução definida por Euclides, o cilindro é a figura obtida ao se girar um paralelogramo retângulo em torno de um de seus lados. Em suas explicações, Billingsley aponta que é preciso muita imaginação para conceber, apenas na abstração, uma figura girando em torno de si mesma e formando um sólido. Por essa razão, e pelo já exposto na seção introdutória aos corpos redondos, o cilindro também será construído a partir de sua planificação, oportunizando a discussão acerca de sua área lateral e total. Bicudo define o cilindro como sendo:

> [...] a figura compreendida, quando um lado, dos à volta do ângulo reto, de um paralelogramo retângulo, permanecendo fixo, o paralelogramo, tendo sido levado à volta, tenha retornado ao mesmo lugar de onde começou a ser levado. (BICUDO, 2009, p. 482)

Na Geometria moderna, o cilindro é a figura compreendida entre dois planos congruentes e paralelos entre si. Neste ponto de vista, um prisma é considerado um caso particular de cilindro, isto é, quando esses planos paralelos são polígonos (LIMA *et. al.*, 2006, p. 295). Note que a mesma observação vale para a relação entre pirâmides e cones.

A construção do cilindro será feita com régua e compasso com base no Método de Kochanski. Esse método consiste em retificar uma circunferência, isto é, obter uma aproximação geométrica para o valor de π. Deste modo, poderemos explorar a relação entre o comprimento da circunferência da base e o comprimento do retângulo que forma a superfície lateral do cilindro, importante assunto a ser abordado no Ensino Básico.

- **Materiais necessários:** Duas folhas tamanho A4, compasso, régua, lápis, borracha, tesoura, cola e barbante.

Desenhe três circunferências de centro O e raio OB (Figura 5.10). Uma delas será suporte para a construção a seguir:

1. Trace o diâmetro AB.

2. Trace uma reta t, tangente à circunferência em B.

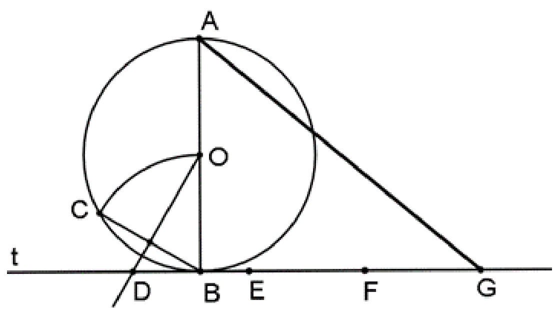
3. No sentido anti-horário, trace um arco de centro B e raio OB, obtendo o ponto C, que é a interseção desse arco com a circunferência.

4. Trace a mediatriz do segmento BC e obtenha D, que é a interseção da mediatriz com a reta t.

5. Marque três pontos sobre a reta t, sempre à direita do anterior. Com centro em D e raio OB, marque o ponto E. Com centro em E e raio OB, marque o ponto F. Por fim, com centro em F e raio OB, marque o ponto G.

6. Trace o segmento AG.

Figura 5.9: Método de Kochanski.



Fonte: Autoria própria (2023)

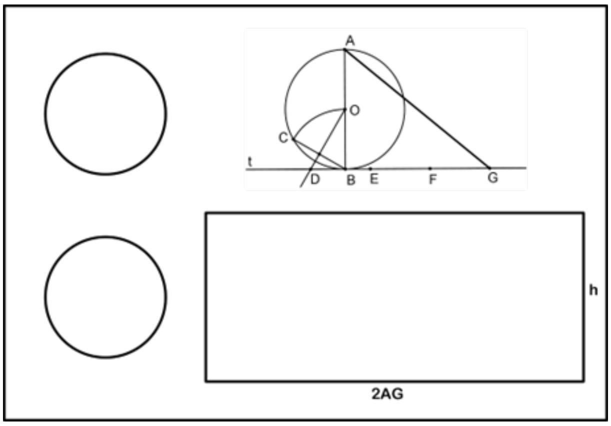
7. Desenhe um retângulo de base $2AG$ e altura qualquer h.

8. Recorte os elementos desenhados, faça um furo próximo de cada vértice do retângulo e um furo próximo à borda de cada circunferência.

9. Una o retângulo com as circunferências utilizando fita adesiva ou um pequeno pedaço de papel e cola, de modo que o ponto diametralmente oposto ao furo de cada circunferência tangencie o ponto médio de cada um dos lados de comprimento $2AG$ do retângulo (Figura 5.11).

10. Cole uma das circunferências em uma folha A4.

Figura 5.10: Plano de montagem do cilindro (folha A4).

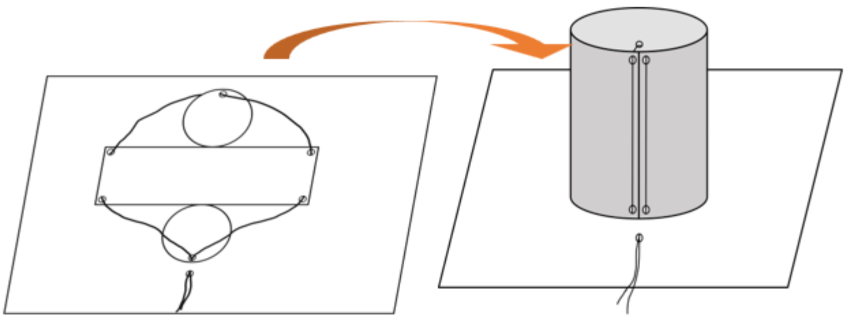


Fonte: Autoria própria (2023)

11. Passe um barbante fino nos furos, começando e terminando no furo da circunferência fixada no papel, de acordo com a Figura 5.11.

12. Puxe o barbante e obtenha o cilindro.

Figura 5.11: Montagem do cilindro em *pop up*.



Fonte: Autoria própria (2023)

Ao final da construção do cilindro, questionamentos e indagações podem ser levantadas, como:

- Qual foi a medida do raio inicial da construção que você utilizou?
- Qual é a medida da área da base do cilindro construído?
- Qual é o volume do cilindro que você construiu?
- Dentre seus colegas, quem obteve o cilindro de maior área da base circular?

- A partir de um mesmo retângulo, quantos cilindros retos distintos podem ser formados? Qual deles tem maior volume? O que acontece se esse retângulo for um quadrado?

- Quais são as medidas da seção meridiana do cilindro montado? Quais são as medidas do retângulo gerador do cilindro de revolução? É possível obtê-lo a partir do modelo construído?

- De acordo com a definição de Euclides, cilindro só pode ser reto? É possível construir cilindro oblíquo com essa técnica do barbante?

- Qual o cilindro de maior altura que pode ser construído em uma folha tamanho A4? E de maior volume? E de maior área lateral? E total? Ao realizar essa construção, o cilindro permanecerá dentro do papel quando dobrado?

- Explore juntamente com os alunos a construção feita para o retângulo. Mostre a relação entre o comprimento da circunferência, do retângulo e do valor de π. Encoraje os alunos a demonstrarem que a construção representa, de fato, uma boa aproximação para o comprimento do retângulo que forma a superfície lateral do cilindro.

Não é nosso propósito responder às questões levantadas, mas trazemos aqui, como suporte para o professor/leitor, a prova que o Método de Kochanski, de fato, representa uma boa aproximação para o comprimento da circunferência. Acompanhe a demonstração com base na Figura 5.9.

Método de Kochanski. Queremos mostrar que $\overline{AG} \approx \overline{OB}\pi$, com $\overline{OB}$ raio da circunferência construída.

Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro O e raio $\overline{OB}$ e $\overline{AB}$ diâmetro de $\mathcal{C}$. Temos que t é perpendicular à $\mathcal{C}$ passando por B, por construção, logo, $\overline{AB} \perp t$.

O triângulo OBC é equilátero, por construção, logo, $C\hat{O}B = 60°$. Num triângulo equilátero, altura, mediana e bissetriz coincidem, assim, a mediatriz de BC também é bissetriz do ângulo $C\hat{O}B$, portanto, $D\hat{O}B = 30°$, com D ponto de interseção entre a mediatriz e a semirreta t.

O triângulo DOB é retângulo em B, e sabendo que $\operatorname{tg} 30° = \frac{\overline{DB}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos que $\overline{DB} = \frac{\overline{OB}\sqrt{3}}{3}$. Ainda, $\overline{DE} = \overline{OB}$ e visto que $\overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE}$, então

$$\overline{OB} = \frac{\overline{OB}\sqrt{3}}{3} + \overline{BE} \Longleftrightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{OB}(3-\sqrt{3})}{3}.$$

Agora, observemos o triângulo ABG, retângulo em B. Visto que $\overline{EG} = 2\overline{OB}$, por construção, temos que

$$\overline{BG} = \overline{BE} + \overline{EG} = \frac{\overline{OB}(3-\sqrt{3})}{3} + 2\overline{OB} = \frac{\overline{OB}(9-\sqrt{3})}{3}. \tag{5.1}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABG e considerando que $\overline{AB} = 2\overline{OB}$, pela relação (5.1) temos que

$$\begin{aligned}
\overline{AG}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 \\
\overline{AG}^2 &= (2\overline{OB})^2 + \left(\frac{\overline{OB}(9-\sqrt{3})}{3}\right)^2 \\
\overline{AG}^2 &= 4\overline{OB}^2 + \frac{\overline{OB}^2(84-18\sqrt{3})}{9} \\
\overline{AG}^2 &= \frac{\overline{OB}^2(120-18\sqrt{3})}{9} \\
\overline{AG} &= \sqrt{\frac{\overline{OB}^2(120-18\sqrt{3})}{9}} \\
\overline{AG} &= \overline{OB}\,\frac{\sqrt{120-18\sqrt{3}}}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{AG} \approx \overline{OB} \cdot \frac{9{,}4246}{3} \approx \overline{OB} \cdot 3{,}1415334\ldots \approx \overline{OB}\pi$. □

Perceba que o valor encontrado de fato representa uma boa aproximação para π, com quatro casas decimais corretas. Desse modo, obtemos um retângulo cuja largura é muito próxima ao comprimento da circunferência.

5.4 Poliedros Regulares

Billingsley aponta que existem cinco sólidos Platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, os quais nomeia por corpos regulares, que são figuras tridimensionais que possuem em todas as faces polígonos congruentes entre si. Já Bicudo, termina o livro XIII de sua versão com a demonstração de que os sólidos construídos por figuras planas iguais são inscritíveis em uma esfera, nomeando-os por pirâmide, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro. Notamos aqui, que o segundo tradutor não menciona sobre essas figuras serem platônicas.

Na Geometria moderna, um sólido regular é definido como um poliedro convexo cujas faces são todas polígonos regulares e congruentes entre si, em que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas (LIMA *et. al.*, 2006, p. 266).

Neste sentido, corroborando com Billingsley e tratando aqui os sólidos regulares como definimos hoje na Geometria moderna, faremos a construção dessas figuras a partir da planificação desses objetos, baseado nos desenhos de Billingsley no final do Livro XI em sua versão. Porém, algumas adaptações nessas planificações serão observadas, de modo a se adequar melhor à nossa proposta de gerar os objetos a partir de um mecanismo com cordinha. Algumas construções serão feitas com régua e compasso, apesar de Billingsley não evidenciar ter usado estes instrumentos em sua versão.

5.4.1 Tetraedro

Livro XI: Definição 22

"*Tetrahedron is a solide whicb is contained vnder fower triangles equall and equilater*[a]. (Billingsley, 1570, fl. 318)

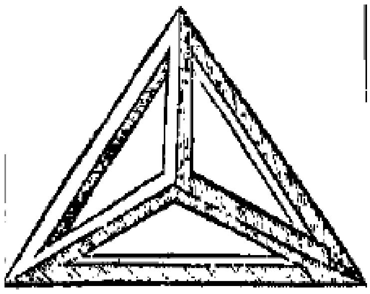
[a]"Tetraedro é um sólido que está contido por quatro triângulos iguais e equiláteros." (Tradução nossa)

Há uma diferença importante entre as duas traduções aqui estudadas com relação ao tetraedro. Billingsley define o tetraedro no livro XI, Definição 22, e destaca que antigos filósofos não consideravam necessário fazê-lo, uma vez que essa figura representa um caso particular de pirâmide, bem definida anteriormente. Porém, o tradutor argumenta que é necessário definir tetraedro separadamente pois, além de contemplar as características de uma pirâmide, compõem o conjunto dos sólidos regulares, os sólidos platônicos. Na Figura 5.12, podemos observar a ilustração que Billingsley traz para o tetraedro.

De todo modo, Billingsley nos alerta que a recíproca não é verdadeira, isto é, nem toda pirâmide é um tetraedro. Já Bicudo não menciona essa figura, seguindo, talvez, a linha de pensamento desses filósofos antigos e não define separadamente o tetraedro em sua versão de *Os Elementos*.

A construção do tetraedro é relativamente simples e será feita com régua e compasso. Além disso, introduziremos um mecanismo feito com barbante, a fim de facilitar a visualização desse objeto e trabalhar com sua planificação.

Figura 5.12: Tetraedro.



Fonte: Billingsley (1570, fl. 318)

- **Materiais necessários:** Duas folhas tamanho A4, compasso, régua, lápis, borracha, tesoura, cola e barbante.

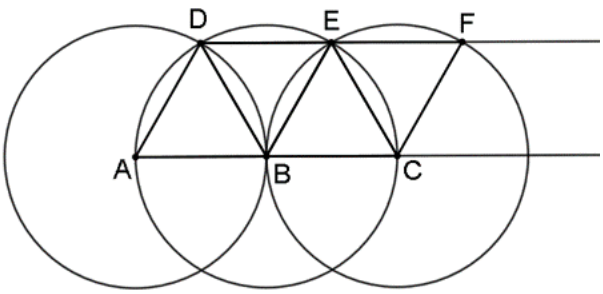
Em uma das folhas, trace uma semirreta t de origem A e faça a construção que se segue:

1. Com o compasso centrado em A e uma abertura l, trace uma circunferência obtendo o ponto B, interseção entre a circunferência e a reta (Figura 5.13).

2. Com o compasso centrado em B, trace uma circunferência de raio l obtendo um novo ponto C, interseção dessa circunferência com a reta, e um ponto D acima de t, interseção entre as duas circunferências.

3. Trace uma terceira circunferência de raio l e centro C, obtendo um novo ponto E, acima de t, interseção entre essas duas circunferências.

Figura 5.13: Construção da planificação do tetraedro com régua e compasso.



Fonte: Autoria própria (2023)

4. Trace a semirreta DE, obtendo F, ponto de interseção entre essa semirreta e a última circunferência traçada.

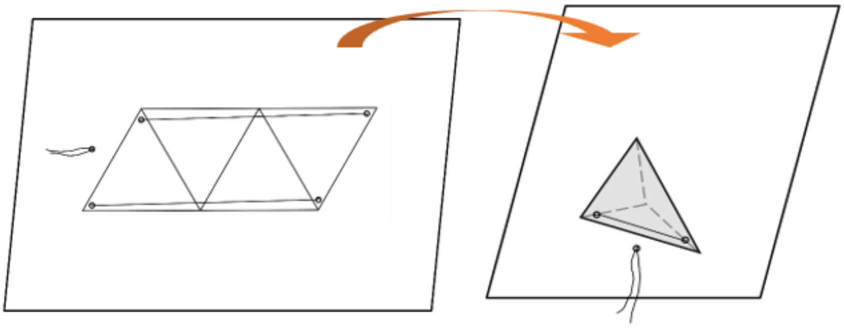
5. Trace os segmentos AD, DB, BE, EC e CF.

6. Recorte em volta da figura $ADFC$, faça furos perto dos vértices A, D, F e C e cole o triângulo ADB em outra folha A4 (Figura 5.14).

7. Passe o barbante nos furos, começando e terminando na aresta AD.

8. Puxe o barbante e obtenha o tetraedro.

Figura 5.14: Montagem do tetraedro em *pop up*.



Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- Quantas faces, vértices e arestas tem o tetraedro?
- Qual foi a medida l que você usou para construir seu tetraedro?
- Determine a altura, área superficial e volume desse tetraedro.
- Um tetraedro é uma pirâmide? A recíproca é verdadeira? Determine uma condição necessária e suficiente para que uma pirâmide seja um tetraedro.
- Qual o tetraedro de maior altura pode ser construído em uma folha tamanho A4 dobrada ao meio, de forma que a figura planificada permaneça dentro do papel? E de maior volume? E de maior área superficial?

5.4.2 Hexaedro

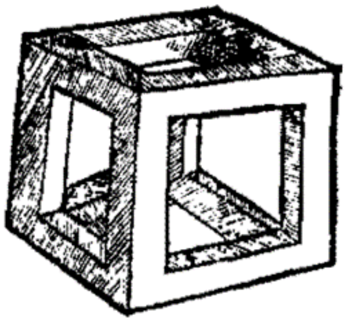
Livro XI: Definição 21

"*A cube is a solide or bodely figure contayned vnder sixe equall squares*[a]. (Billingsley, 1570, fl. 318)

[a] "Um cubo é uma figura sólida ou corpórea contida por seis quadrados iguais." (Tradução nossa)

Billingsley, em sua tradução, explica que o cubo é uma figura composta por seis quadrados iguais. Além disso, ele argumenta que a definição de cubo se encaixa também na definição de prisma e de paralelepípedo, sendo então uma figura de três dimensões, com medidas iguais para o seu comprimento, largura e altura. Na Figura 5.15, podemos observar a ilustração que Billingsley traz para esse objeto.

Figura 5.15: Hexaedro.



Fonte: Billingsley (1570, fl. 318)

Concordando com Billingsley, Bicudo define o cubo como sendo *"uma figura sólida contida por seis quadrados iguais"* (BICUDO, 2009, p. 483). Porém, Bicudo prossegue com as demonstrações das proposições de Euclides, sem considerar as particularidades dessa figura.

Construiremos o cubo a partir de sua planificação, conforme Billingsley apresenta em sua versão (Ver Figura 5.1). A construção desse sólido será feita com régua e compasso, mas também é possível fazê-lo a partir de um modelo pronto para impressão, que pode ser encontrado no Apêndice A desta dissertação.

- **Materiais necessários:** Duas folhas tamanho A4, cartolina, barbante fino, tesoura, cola, régua e compasso.

Em uma das folhas, trace uma semirreta t de origem A e faça a construção que se segue:

1. Com o compasso centrado em A e uma abertura l, trace uma circunferência obtendo o ponto B, interseção entre a circunferência e a reta t (Figura 5.16).

2. Trace uma perpendicular a t passando por A. Marque o ponto C, interseção entre a perpendicular e a circunferência.

3. Trace uma paralela a t, passando por C.

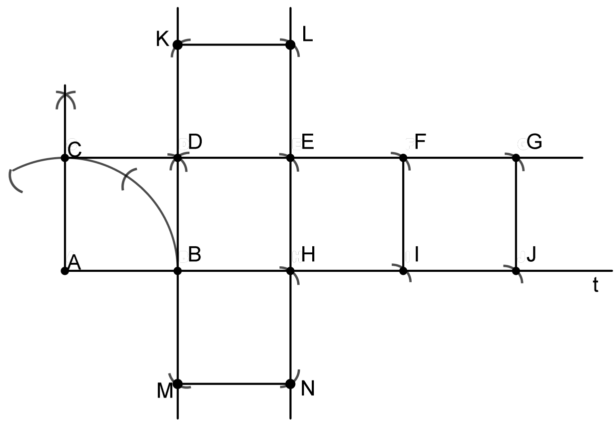
4. Com a mesma abertura l, faça três marcações sobre a reta t, obtendo os pontos H, I e J. Sobre a paralela, faça quatro marcações, obtendo os pontos D, E, F e G.

5. Trace duas perpendiculares a t, passando por $\overline{DB}$ e $\overline{EH}$. Trace os segmentos $\overline{FI}$ e $\overline{GJ}$.

6. Com a mesma abertura l no compasso, marque os pontos K, L, M e N sobre as perpendiculares, de modo que $\overline{DK} = \overline{EL} = \overline{BM} = \overline{HN} = l$

7. Trace os segmentos $\overline{KL}$ e $\overline{MN}$.

Figura 5.16: Construção da planificação do hexaedro em *pop up*.

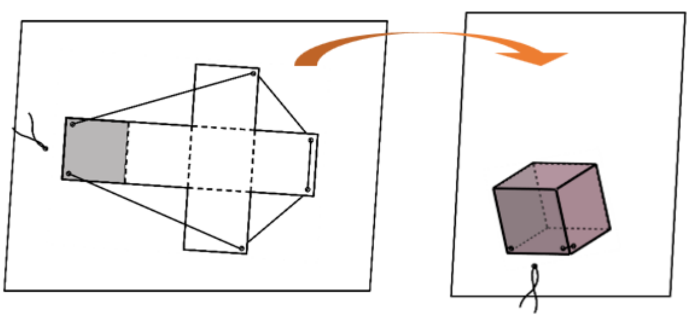


Fonte: Autoria própria (2023)

8. Recorte em volta da figura $ABMNHJGELKDC$ e faça furos perto dos vértices A, C, M, K, G e J. Passe o barbante nos furos, começando em G e terminando em J.

9. Cole o quadrado $FGJI$ em outra folha A4, de forma que o modelo permaneça dentro da página (Figura 5.17).

Figura 5.17: Montagem do octaedro em *pop up*.



Fonte: Autoria própria (2023)

10. Puxe o barbante e obtenha o cubo em *pop up*.

Questões motivadoras:

- Quantas faces, arestas e vértices tem o cubo?
- Meça a aresta do cubo e determine sua área total e seu volume. Os resultados obtidos por você e seus colegas foram os mesmos? Se não, explique por que isso acontece.
- Determine a relação entre o lado do cubo com a área total e com o volume.
- É possível medir a diagonal do cubo a partir do modelo construído?
- Um cubo pode ser considerado um paralelepípedo? A recíproca é verdadeira? Determine uma condição necessária e suficiente para que um paralelepípedo seja um cubo.
- Um cubo pode ser considerado um prisma? A recíproca é verdadeira? Determine uma condição necessária e suficiente para que um prisma seja um cubo.

5.4.3 Octaedro

Livro XI: Definição 23

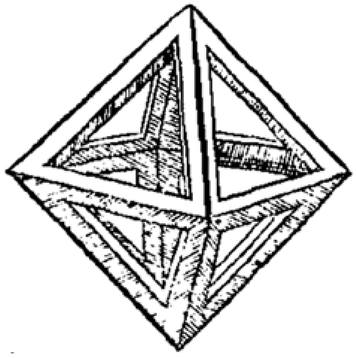
"*An Octohedron is a solide or bodily figure contained vnder eight equall and equilater triangles*[a]." (Billingsley, 1570, fl. 318)

[a]"Um octaedro é uma figura sólida ou corpórea contida por oito triângulos iguais e equiláteros". (Tradução nossa)

O octaedro, segundo nossos dois tradutores, é "*uma figura sólida contida por oito triângulos iguais e equiláteros*" (BICUDO, 2009, p. 483). Billingsley, em sua descrição, demonstra uma certa preocupação com a visualização desse sólido, portanto, usa de recursos de desenhos, como sombreamento, para garantir o entendimento do leitor, como pode ser visto na Figura 5.18. Nos sólidos regulares, notamos que Billingsley apresenta esse tipo de desenho ao invés de usar os *pop ups*.

A construção desse sólido será feita com régua e compasso, mas também é possível obter o modelo para impressão no Apêndice A. Para o octaedro, faremos uma planificação um pouco diferente da sugerida por Billingsley, para se adequar melhor à nossa proposta de trabalhar com o mecanismo do barbante.

Figura 5.18: Octaedro.



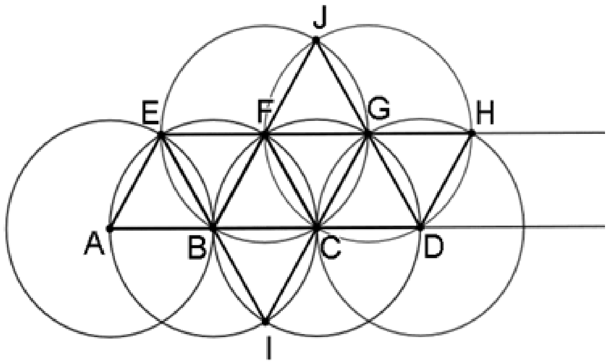
Fonte: Billingsley (1570, fl. 319)

- **Materiais necessários:** Duas folhas tamanho A4, barbante fino, tesoura, cola, régua e compasso.

Em uma das folhas, trace uma semirreta t de origem A e faça a construção que se segue:

1. Com o compasso centrado em A e uma abertura l, trace uma circunferência obtendo o ponto B, interseção entre a circunferência e a reta (Figura 5.19).
2. Com o compasso centrado em B, trace uma circunferência de raio l obtendo um novo ponto C, interseção dessa circunferência com a reta, e um ponto E acima de t, interseção entre as duas circunferências.
3. Com o compasso centrado em C, trace uma circunferência de raio l obtendo um novo ponto D, interseção dessa circunferência com a reta, um ponto F acima de t e um ponto I abaixo de t, interseção entre as duas circunferências.
4. Trace uma quarta circunferência de raio l e centro D, obtendo o ponto G acima de t, interseção entre as duas últimas circunferências.
5. Trace duas circunferências de raio l, uma com centro em F, outra com centro em G e marque J ponto de interseção entre essas duas circunferências.
6. Trace os segmentos AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, CI, BI, FJ e JG.
7. Recorte em volta da figura $ABICDHGJFE$ e faça furos perto dos vértices A, E, D, H, I, J. Cole o triângulo AEB em outra folha A4, de forma que o modelo permaneça dentro da página (Figura 5.20).

Figura 5.19: Construção da planificação do octaedro com régua e compasso.

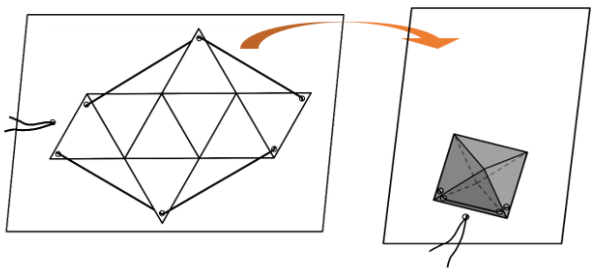


Fonte: Autoria própria (2023)

8. Passe o barbante nos furos, começando em A e terminando em E.

9. Puxe o barbante e obtenha o octaedro.

Figura 5.20: Montagem do octaedro em *pop up*.



Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- Quantas faces, arestas e vértices tem o octaedro?
- Qual foi a medida l que você usou para construir seu octaedro?
- Determine a área total do octaedro construído.
- Estabeleça uma relação entre o comprimento do lado dos triângulos equiláteros que compõem o octaedro e a área superficial dessa figura.
- Como podemos determinar o volume do octaedro? Estabeleça uma fórmula que permita encontrar essa medida.

5.4.4 Dodecaedro

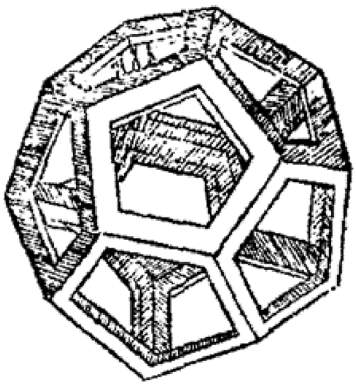
Livro XI: Definição 24

"*A Dodecahedron is solide or bodily figure contained vnder twelue equall, equilater, and equiangle Pentagons*[a]." (Billingsley, 1570, fl. 319)

[a]"Um dodecaedro é uma figura sólida ou corpórea contida por doze pentágonos iguais, equiláteros e equiângulos". (Tradução nossa)

Assim como Billingsley, Bicudo define o dodecaedro como "*uma figura sólida contida por doze pentágonos iguais e equiláteros e equiângulos*" (BICUDO, 2009, p. 483). Billingsley argumenta que acrescentou o desenho do dodecaedro utilizando sombreamento na figura, para que o leitor pudesse compreender melhor o formato desse sólido, como podemos observar na Figura 5.21.

Figura 5.21: Dodecaedro.



Fonte: Billingsley, 1570, fl. 319.

A construção do pentágono com régua e compasso não é trivial e é passível de muitos erros de medida por ser necessário modificar a abertura do compasso algumas vezes[6]. Portanto, para essa construção optamos por usar o modelo impresso e fazer a montagem do sólido com o auxílio de um barbante.

- **Materiais necessários:** molde da planificação do dodecaedro, uma folha A4, tesoura, cola e barbante fino.

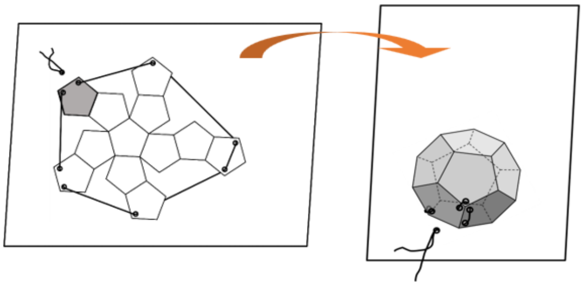
1. Recorte o molde da planificação do dodecaedro, faça os furos indicados na Figura 5.22 e cole o pentágono hachurado em outra folha A4.

[6]Euclides apresenta uma construção do pentágono regular a partir de um triângulo isósceles inscrito numa circunferência no volume IV de sua obra. Na versão de Bicudo, é a Proposição 11, que pode ser contemplada na página 196 de sua tradução.

2. Passe o barbante nos furos, começando e terminando pelo pentágono hachurado.

3. Puxe o barbante e obtenha o dodecaedro.

Figura 5.22: Montagem do dodecaedro em *pop up*.



Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- Quantas faces, arestas e vértices tem o dodecaedro?

- Determine a área total do dodecaedro. Compare com os resultados obtidos por seus colegas.

- Estabeleça uma relação entre o comprimento do lado dos pentágonos regulares que compõem o dodecaedro e a área superficial dessa figura.

- Tente encontrar uma forma aproximada de determinar o volume do dodecaedro.

- Se o volume V de um dodecaedro de aresta l é dado pela fórmula $V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}l^3$, determine seu volume e compare com o valor que você encontrou no tópico anterior.

5.4.5 Icosaedro

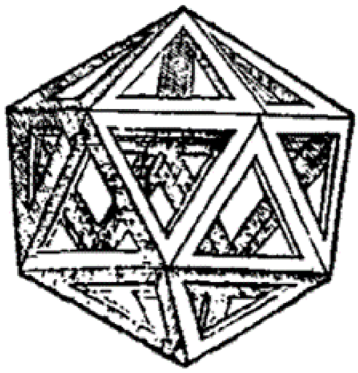
Livro XI: Definição 24

"*An Icosahedron is solide or bodily figure contained vnder twentie equall and equilater triangles*[a]." (Billingsley, 1570, fl. 319)

[a] "Um icosaedro é uma figura sólida ou corpórea contida por vinte triângulos iguais e equiláteros". (Tradução nossa)

O icosaedro é "*uma figura sólida contida por vinte triângulos iguais e equiláteros*" (BICUDO, 2009, p. 483). Novamente, Billingsley descreve o sólido e apresenta as dificuldades de se fazer o desenho de um objeto tridimensional em um plano. Para facilitar a compreensão do icosaedro, Billingsley traz o desenho dessa figura utilizando efeitos de luz e sombra, de modo a criar uma ilusão de profundidade no objeto, como bem pode ser observado em ilustrações que Leonardo da Vinci fez para o trabalho de Luca Pacioli em sua obra *De Divina Proportione* de 1509 (SILVA, 2020), conforme observamos na Figura 5.23.

Figura 5.23: Icosaedro.



Fonte: Billingsley (1570, fl. 319)

A construção do icosaedro com régua e compasso é relativamente simples e segue a mesma dinâmica do tetraedro e do octaedro. A dificuldade que pode ser encontrada aqui, diz respeito à quantidade de triângulos a serem construídos. Desse modo, a construção que sugerimos será feita a partir de uma planificação um pouco diferente da apresentada por Billingsley, para que, assim como o octaedro e o dodecaedro, se adeque melhor ao mecanismo do barbante.

Materiais necessários: Duas folhas tamanho A4, barbante fino, tesoura, cola, régua e compasso.

Em uma das folhas, trace uma semirreta t de origem A e faça a construção que se segue:

1. Com o compasso centrado em A e uma abertura l, trace cinco circunferências, interceptando a circunferência anterior e a reta t, obtendo os pontos B, C, D, E e F (Figura 5.24).

2. Trace uma reta que passa pelas interseções das circunferências, os pontos G, H, I, J e K.

3. Trace os segmentos que passam por $\overline{HC}$, $\overline{ID}$, $\overline{JE}$, $\overline{HB}$, $\overline{IC}$ e $\overline{JD}$.

4. Trace os segmentos $\overline{AG}$, $\overline{GB}$, $\overline{KE}$ e $\overline{KF}$.

5. Com a mesma abertura l no compasso, com centro em H, trace uma circunferência que intercepta os dois segmentos que passam por $\overline{HC}$ e $\overline{ID}$, obtendo os pontos Q e R. Trace os segmentos $\overline{QR}$ e $\overline{QH}$.

6. Com centro em C, trace uma circunferência que intercepta os dois segmentos que passam por $\overline{IC}$ e $\overline{JD}$, obtendo os pontos L e M.

7. Com centro em M, trace uma circunferência que intercepta os dois segmentos que passam por $\overline{HC}$ e $\overline{ID}$, obtendo os pontos N, P e o ponto O, interseção entre a circunferência e o segmento que passa por $\overline{JD}$.

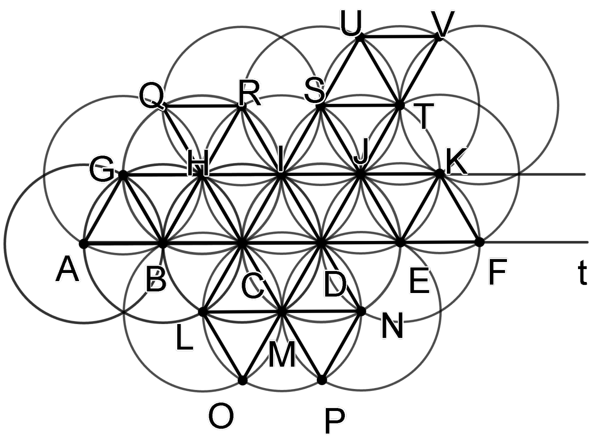
8. Trace os segmentos $\overline{LN}$, $\overline{LO}$ e $\overline{NP}$.

9. Com centro em J, trace uma circunferência que intercepta os dois segmentos que passam por $\overline{IC}$ e $\overline{JD}$, obtendo os pontos S e T.

10. Com centro em T, trace uma circunferência que intercepta os dois segmentos que passam por $\overline{IC}$ e $\overline{JD}$, obtendo os pontos U e V.

11. Trace os segmentos $\overline{SJ}$, $\overline{ST}$, $\overline{UT}$ e $\overline{UV}$.

Figura 5.24: Construção da planificação do icosaedro com régua e compasso.



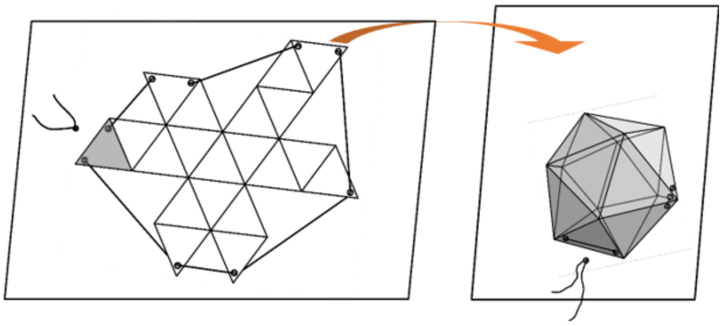
Fonte: Autoria própria (2023)

12. Recorte em volta da figura $ACLOMPNDFKJVUIRQHG$ e faça furos perto dos vértices A, O, P, F, V, U, R, Q e G. Passe o barbante nos furos, começando em A e terminando em G.

13. Cole o triângulo ABG em outra folha A4, de forma que o modelo permaneça dentro da página (Figura 5.25).

14. Puxe o barbante e obtenha o icosaedro.

Figura 5.25: Montagem do icosaedro em *pop up*.



Fonte: Autoria própria (2023)

Questões motivadoras:

- Quantas faces, arestas e vértices tem o icosaedro?

- Determine a área total do icosaedro. Compare com os resultados obtidos por seus colegas.

- Estabeleça uma relação entre o comprimento do lado dos triângulos equiláteros que compõem o icosaedro e a área superficial dessa figura.

- Tente encontrar uma forma aproximada de determinar o volume do icosaedro.

- Se o volume V de um icosaedro de aresta l é dado pela fórmula $V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12} l^3$, determine seu volume e compare com o valor que você encontrou no tópico anterior.

6 Considerações Finais

Com o aporte da História da Matemática, atividades diferenciadas com materiais concretos podem ser bastante proveitosas em sala de aula. Além de oferecer estímulo visual, facilita a compreensão de propriedades e casos mais gerais a partir da observação de casos particulares. As atividades aqui propostas, baseadas nos objetos tridimensionais contidos em *Os Elementos* de Euclides na versão inglesa de Henry Billingsley, favorecem uma aprendizagem crítica com o estudo da História desses objetos e da própria Matemática.

Para além das atividades aqui sugeridas, fizemos um trabalho de pesquisa cotejando duas versões dos *Elementos* de Euclides que devem ser consideradas, tradução em língua inglesa de Henry Billingsley de 1570 e tradução brasileira de Irineu Bicudo de 2009. Ao analisarmos as escolhas de tradução dos dois autores, pudemos entender um pouco das intenções de cada um em seus respectivos momentos históricos. O primeiro, com intuito de popularizar o conhecimento matemático Grego, o segundo, resgatando a obra o mais próximo possível do original, dentro das condições que a literatura permitem.

Do ponto de vista da História da Matemática, a leitura semiótica dos elementos presentes no frontispício da obra do autor renascentista, nos ajudaram a entender as concepções de ensino daquele período, deixando suas intenções ainda mais evidentes.

Incentivo aos professores/leitores deste texto que trabalhem interdisciplinarmente com as disciplinas de História e de Língua Inglesa, pois alguns aspectos inerentes à área podem passar despercebidos aos olhos do professor de Matemática pura. Essa discussão não cabe neste espaço, mas a licenciatura em Matemática deixa uma lacuna com relação à uma formação mais ampla do professor, sendo esta uma das dificuldades da própria autora no desenvolvimento da pesquisa e escrita desta dissertação.

Por se tratar de uma proposta que foge dos padrões tradicionais de uma aula de Matemática, salientamos a importância desse tipo de atividade não ser tratada como mera recreação. É necessário que os alunos adquiram uma aprendizagem de fato significativa, identificando os elementos principais dos objetos aqui estudados e, a partir da observação, consigam atingir o próximo passo imprescindível para a Matemática, a abstração.

Não era nosso intuito fazer uma análise sobre a aplicabilidade da sequência de atividades aqui sugerida, porém, gostaríamos de comentar brevemente sobre os três momentos em que essa atividade foi desenvolvida com estudantes. A primeira, para as duas turmas de 2° ano do Ensino Médio da autora desse trabalho. A proposta era estudar os elementos, verificar a relação de Euler, área e volume de sólidos geométricos, como poliedros e corpos redondos. Primeiramente, a autora apresentou os conceitos iniciais de sólidos geométricos e suas propriedades, o que levou duas aulas de 50 minutos cada. Em seguida, foram necessárias cinco aulas de 50 minutos para que os alunos construíssem um caderninho com os dez sólidos bem como dispostos no livro XI de Euclides na versão de Billingsley.

Não foi possível construir os elementos com régua e compasso como aqui sugerido, pois a atividade foi desenvolvida já no final do ano letivo de 2022. Para trabalhar com régua e compasso, seria necessário antes ensinar pelo menos as construções principais, o que não foi possível encaixar no currículo daquele último bimestre, portanto, foram utilizados os modelos recortáveis disponíveis no Apêndice A deste trabalho. Após a construção desse caderninho de sólidos, os alunos tiveram que observar, medir, contar, identificar vértices, faces e arestas dos modelos construídos, calcular área e volume dos mesmos. Algumas dificuldades puderam ser observadas no decorrer da atividade, como por exemplo na coordenação motora. Alguns alunos apresentaram dificuldade no recortar, dobrar e colar, sendo necessário dedicar uma maior atenção e auxílio a esses estudantes.

Os alunos demonstraram empenho e entusiasmo no desenvolvimento desta atividade e após esta etapa, foi aplicada uma atividade “formal” com desenhos representados no plano do papel de uma lista de exercícios, em uma aula de 50 minutos. Durante a realização desta atividade, foi interessante notar que alguns estudantes usaram o caderninho de sólidos como fonte de consulta e conferiram, no concreto, se suas respostas estavam de acordo com o esperado.

Como foi a primeira vez que esse trabalho foi desenvolvido, alguns erros nos moldes foram identificados e puderam ser corrigidos antes de serem reaplicados para uma turma de formação de professores de Matemática do CEFET-MG. Para essa aplicação, foi elaborada uma apresentação sobre o livro *Os Elementos* de Euclides, sobre as definições, conceitos e propriedades de um sólido geométrico e, ao final, propusemos a construção de dois dos modelos elencados no Capítulo 5, a pirâmide e o cubo, a fim de mostrar as potencialidades do trabalho com material concreto. Essas duas construções foram feitas a partir de modelos recortáveis.

Por último, ministramos um minicurso no XV Seminário Nacional de História de Matemática, organizado pela Sociedade Brasileira de História da Matemática. Essa participação nos rendeu a publicação do livro "*OS ELEMENTOS* DE EUCLIDES E ORIGAMIS ARQUITETÔNICOS: Uma abordagem histórica para o ensino de Geometria Espacial na Educação Básica[1]". Esse Seminário, tem intuito de promover estudos em História da Matemática e pesquisas em Educação Matemática. Para tanto, apresentamos o minicurso dividido em dois dias, no primeiro, fizemos uma explanação sobre o período histórico de nosso estudo, sobre Euclides e *Os Elementos*, sobre o contexto do autor da versão inglesa, Henry Billingsley, montamos os caderninhos e começamos a construção dos sólidos pelo hexaedro em *pop up* a partir de um molde impresso. No segundo dia, fizemos a construção de uma pirâmide quadrangular regular com régua e compasso e montamos uma esfera a partir do molde impresso. A atividade propiciou algumas discussões sobre as potencialidades do uso desse material em sala de aula, visto que a maioria dos participantes do minicurso eram professores de Matemática atuantes na Educação Básica.

Esta pesquisa expandiu, em primeiro lugar, meus conhecimentos com relação à própria Geometria Euclidiana e sobre o livro *Os Elementos* de que tanto ouvia falar. Neste sentido, acredito que enquanto professora serei capaz de transmitir esses conhecimentos com maior qualidade para meus alunos. Com este trabalho aprendi também como fazer uma pesquisa acadêmica e descobri que pesquisa em História da Matemática pode não ser tão simples. Apesar de não ser possível compreender o processo de desenvolvimento do pensamento matemático com este estudo, pude entender o contexto e as intenções dos tradutores em seus respectivos momentos históricos. Espero que este trabalho possa contribuir para o ensino de Matemática na educação básica e que o(a) professor(a)/leitor(a) possa fazer bom uso desse material em sua totalidade ou parcialmente, agregando conhecimentos relevantes com relação à História da Matemática e acrescentando uma perspectiva diferente para o ensino de Geometria Espacial.

Todos os modelos utilizados neste livro e nesta dissertação, bem como tutoriais em vídeo, podem ser acessados em nosso site[2] juntamente com outras propostas de construção

[1] Disponível em: https://www.crephimat.com.br/visor_mnc.php?id_t=127
[2] https://puxandocordinhas.wordpress.com/

para esses objetos e sugestões de outras figuras.

Referências

1 ROQUE, T. *História da Matemática*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

2 SAITO, F. História da matemática e suas (re) construções contextuais. *São Paulo: Livraria da Física*, 2015.

3 MIGUEL, A. et al. *História da Matemática em atividade didáticas*. [S.l.]: Editora Livraria da Fisica, 2009.

4 MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores. *Belém: SBHMat*, 2016.

5 BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1997.

6 KALEFF, A. M. M. R. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos... *A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA - SBEM*, n. 2, p. 19–25, 1994.

7 CASTRO, A. D. d.; CARVALHO, A. M. P. d. *Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média*. [S.l.]: Cengage Learning, 2018.

8 LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. [S.l.]: Autores Associados, 2006.

9 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2015.

10 LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio. *REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA*, v. 44, p. 51, 2006.

11 IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. dos S. *Matemática e realidade*. [S.l.]: Atual, 2006.

12 RAMOS, A.; FARIA, P. M.; FARIA, Á. Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em ciências da educação. *Revista Diálogo Educacional*, PUCPR, v. 14, n. 41, p. 17–36, 2014.

13 OLIVEIRA, M. d. C. C. A. d. *Aprendizagem significativa: utilização de materiais didáticos manipuláveis para a aprendizagem da Geometria Espacial*. 89 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cruz das Almas, BA, 2020.

14 SANTOS, L. G. d. *O origami como ferramenta didática para o ensino de Geometria Plana e Espacial: história, teoremas e atividades em sala*. 73 p. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

15 MONTEIRO, B. N. d. S. *Utilização de modelos concretos como uma alternativa para o ensino de Geometria Espacial*. 72 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Pará, 2016.

16 AUSUBEL, D. P. *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

17 GARDNER, H. *Inteligência um conceito reformulado*. [S.l.]: Editora Objetiva, 1999.

18 KALEFF, A. M. M. R. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico–o modelo de van hiele. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 9, n. 10, p. 21–30, 1994.

19 EVES, H. Introdução à história da matemática-tradução. *Campinas, SP: Editora da Unicamp*, p. 847, 2011.

20 BOYER, C. B. *História da Matemática*. [S.l.]: Universidade de São Paulo, 1974.

21 PERETTI, L.; COSTA, G. Sequência didática na matemática. instituto de desenvolvimento educacional do alto uruguai (ideau). *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, 2013.

22 CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no brasil: de 1500 até os dias atuais. *Quadrante*, v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015.

23 MURARI, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da matemática. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 25, n. 41, p. 187–211, 2011.

24 BORGES, M. F. As abordagens historiográficas da matemática e sua importância para a educação matemática. SEMUR, 2013.

25 FERNANDES, R. A. *Um estudo sobre o planímetro de Amsler: Contribuições de Arthur Thiré no Brasil*. 62 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Rio de Janeiro, 2022.

26 SILVA, A. O. M. *Diálogos entre Histórias da Matemática e Práticas Experimentais na Escola Básica*. 110 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2021.

27 D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP*, p. 97–115, 1999.

28 MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. *História da Matemática: propostas e desafios*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

29 DINIZ, A. S. M. *Uma análise histórica sobre Os Elementos de Euclides*. 82 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, São Luís, 2020.

30 BICUDO, I. *Os Elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009.

31 MOL, R. S. Introdução à história da matemática. *Belo Horizonte: CAED-UFMG*, p. 17, 2013.

32 ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de história da matemática.* [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

33 D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* [S.l.]: Papirus Editora, 2007.

34 MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores p. 73-106 (primeira parte: 73-89). *Zetetiké*, v. 5, n. 2, 1997.

35 BICUDO, I. Platão e a matemática. *Letras clássicas*, n. 2, p. 301–315, 1998.

36 NEUGEBAUER, O. *The exact sciences in antiquity.* [S.l.]: Courier Corporation, 1969. v. 9.

37 NOBRE, S. *Introdução Histórica às Geometrias Não-Euclidianas - uma proposta pedagógica.* [S.l.]: SBHMat, 2009.

38 EUCLIDES; HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements: Translated from the Text of Heiberg. Books X-XIII and Appendix.* [S.l.]: Cambridge at the University Press, 1926.

39 BICUDO, I. Histórias paralelas: O v postulado de euclides e o axioma da escolha. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 5, n. 9, p. 05–17, 2005.

40 SCHUBRING, G.; ROQUE, T. O papel da régua e do compasso nos elementos de euclides: uma prática interpretada como regra. *História Unisinos*, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, v. 18, n. 1, p. 91–103, 2014.

41 FILHO, F. B. *O desenho e o canteiro no renascimento medieval (séculos XII e XIII): indicativos da formação dos arquitetos mestres e construtores.* 262 p. Dissertação (Doutorado) — Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, USP, São Paulo, 2005.

42 EUCLID; BILLINGSLEY, S. H.; DEE, J. *The Elements of Geometrie of the most auncient Philosopher Evclide of Megara.* [S.l.]: Imprinted by I. Daye, 1570.

43 LEÃO, A. F. *Euclides e a incomensurabilidade: o profundo tear das abrangências: Os sumos e segredos do Livro X.* [S.l.]: Chiado Brasil, 2019.

44 BARROW-GREEN, J. 'much necessary for all sortes of men': 450 years of euclid's elements in english. *BSHM Bulletin*, Taylor & Francis, v. 21, n. 1, p. 2–25, 2006.

45 BENTO, R. T. F. et al. Um estudo das geometrias prática e teórica presentes em the pathewaie to knowledge de robert recorde: possíveis diálogos. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2018.

46 OLIVEIRA, Z. V.; SILVA, I. C. da; GODOY, K. V. As classificações das matemáticas de john dee e adriaan van roomen: Um estudo sobre a organização dos conhecimentos matemáticos nos séculos xvi e xvii. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 21, n. 42, p. 52–80, 2021.

47 CASTILLO, A. R. M. Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (cross-staff) em a boke named tectonicon de leonard digges. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.

48 HALSTED, G. B. Note on the first english euclid. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 2, n. 1, p. 46–48, 1879.

49 PEINADO, M. R. S. d. S. Santo agostinho, o teórico da igreja na idade média. ANPUH – XXV SIMPÓSIO NACIONAL DE HISTÓRIA, 2009.

50 LOPEZ, J. Spectacular performances: Essays on theatre, imagery, books, and selves in early modern england. stephen orgel. manchester: Manchester university press, 2011. xix+ 284 pp. 80. *Renaissance Quarterly*, Cambridge University Press, v. 68, n. 2, p. 772–773, 2015.

51 SANTOS, V. S. d. *Engenharia do papel no mercado editorial dos livros móveis contemporâneos*. 92 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, Departamento de Artes e Design, Rio de Janeiro, 2019.

52 KILLACKY, M. Lifting the flap: Anatomical pop-up books, introduced in the 16th century, took anatomy out of the lecture hall and into the home. *History Today*, History Today Ltd., v. 72, n. 7, 2022.

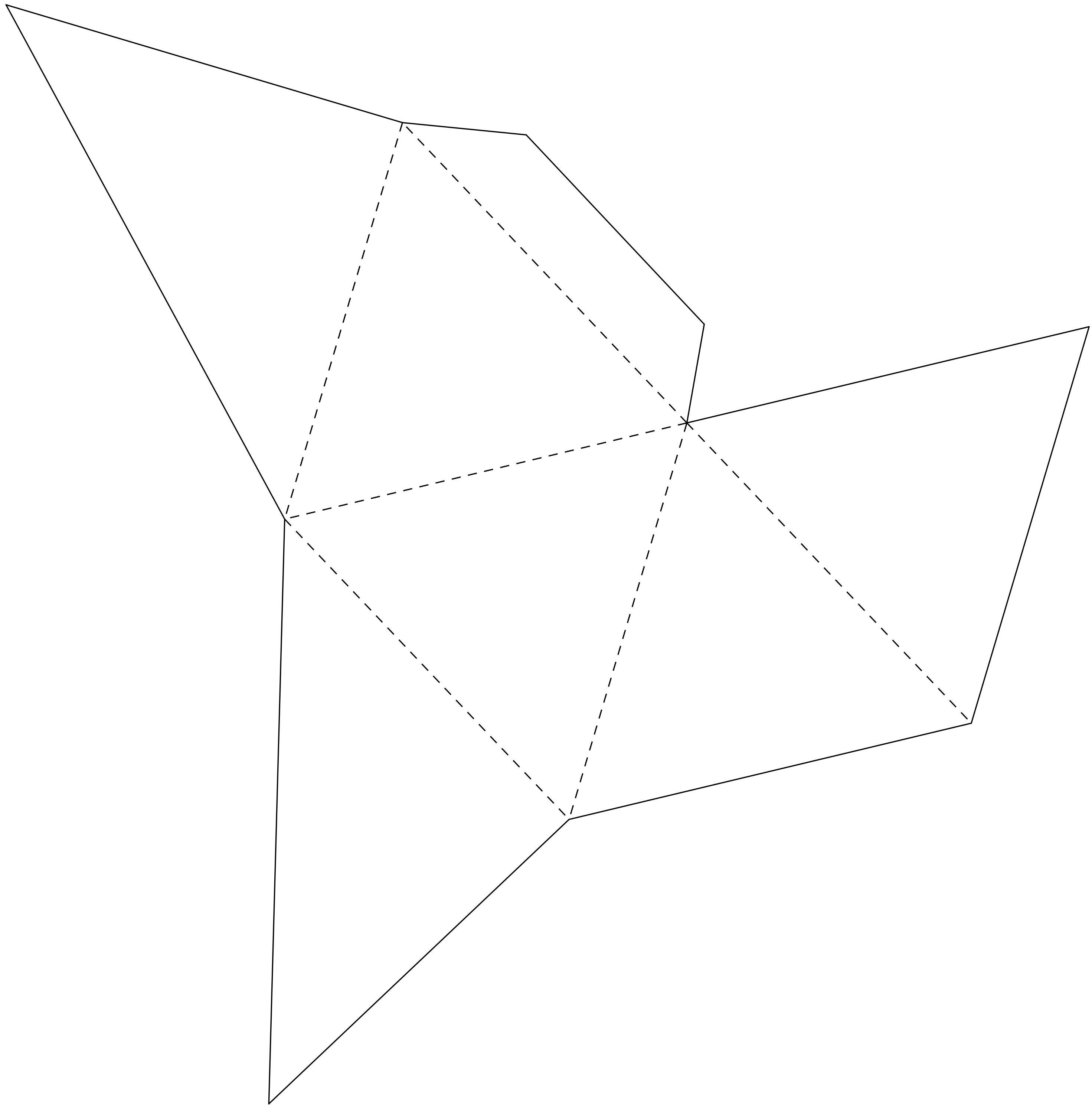
53 VARHIDY, C. G. J. L. Desenho geométrico uma ponte entre a álgebra e a geometria: resolução de equações pelo processo euclidiano. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Departamento de Matemática, 2010.

54 FENDLER, L. The upside of presentism. *Paedagogica Historica*, Taylor & Francis, v. 44, n. 6, p. 677–690, 2008.

55 SILVA, A.; PEREIRA, A. C. Um estudo sobre o capítulo xxv da de divina proportione (1509) de luca pacioli (1447-1517). *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática*, Universidade do Extremo Sul Catarinense, v. 15, n. 2, p. 1–17, 2020.

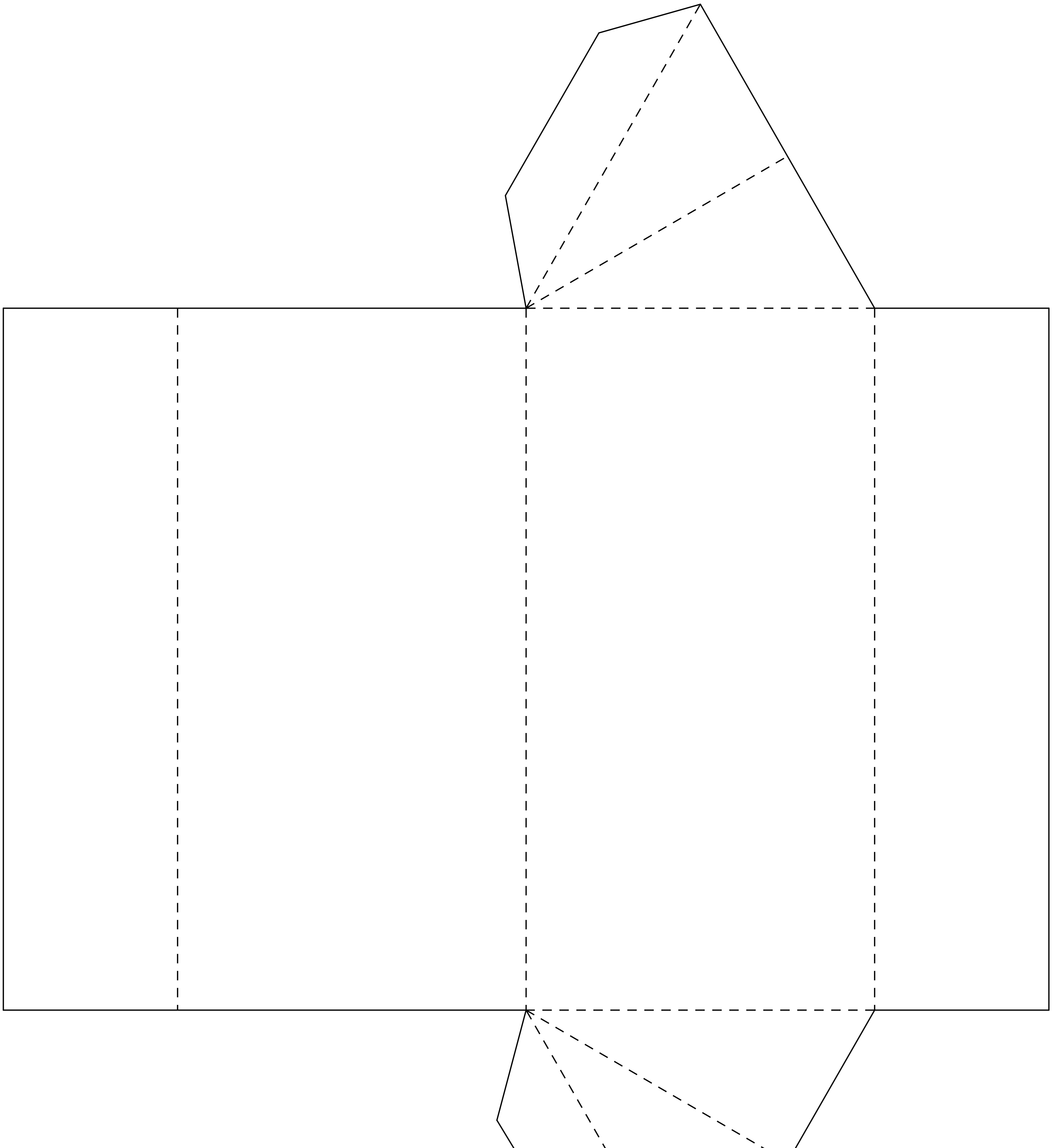
Apêndice A
Moldes dos sólidos

PIRÂMIDE REGULAR DE BASE QUADRADA

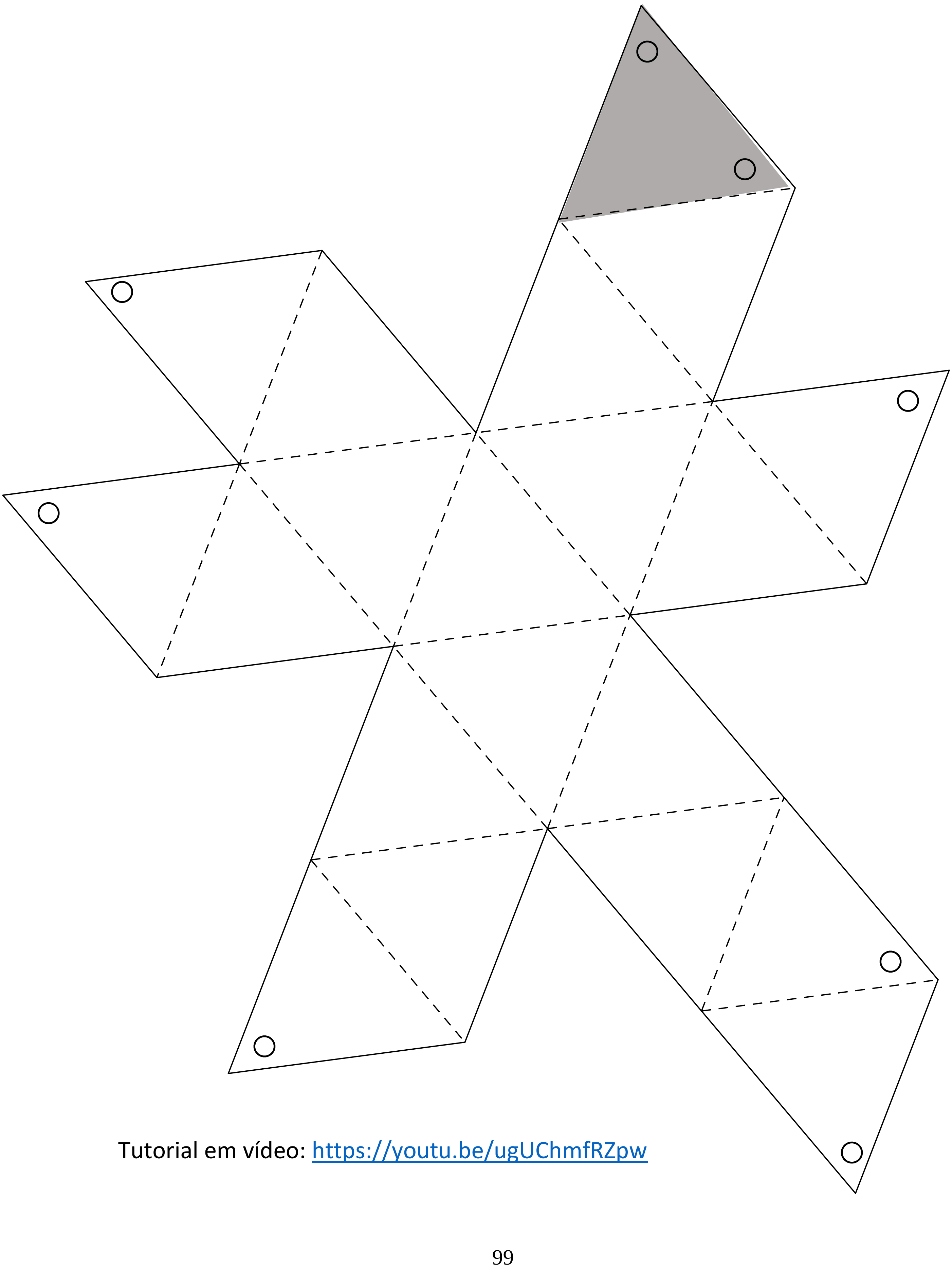


Tutorial em vídeo: https://youtu.be/vfiRONEAv4Y

PRISMA RETO DE BASE TRIANGULAR

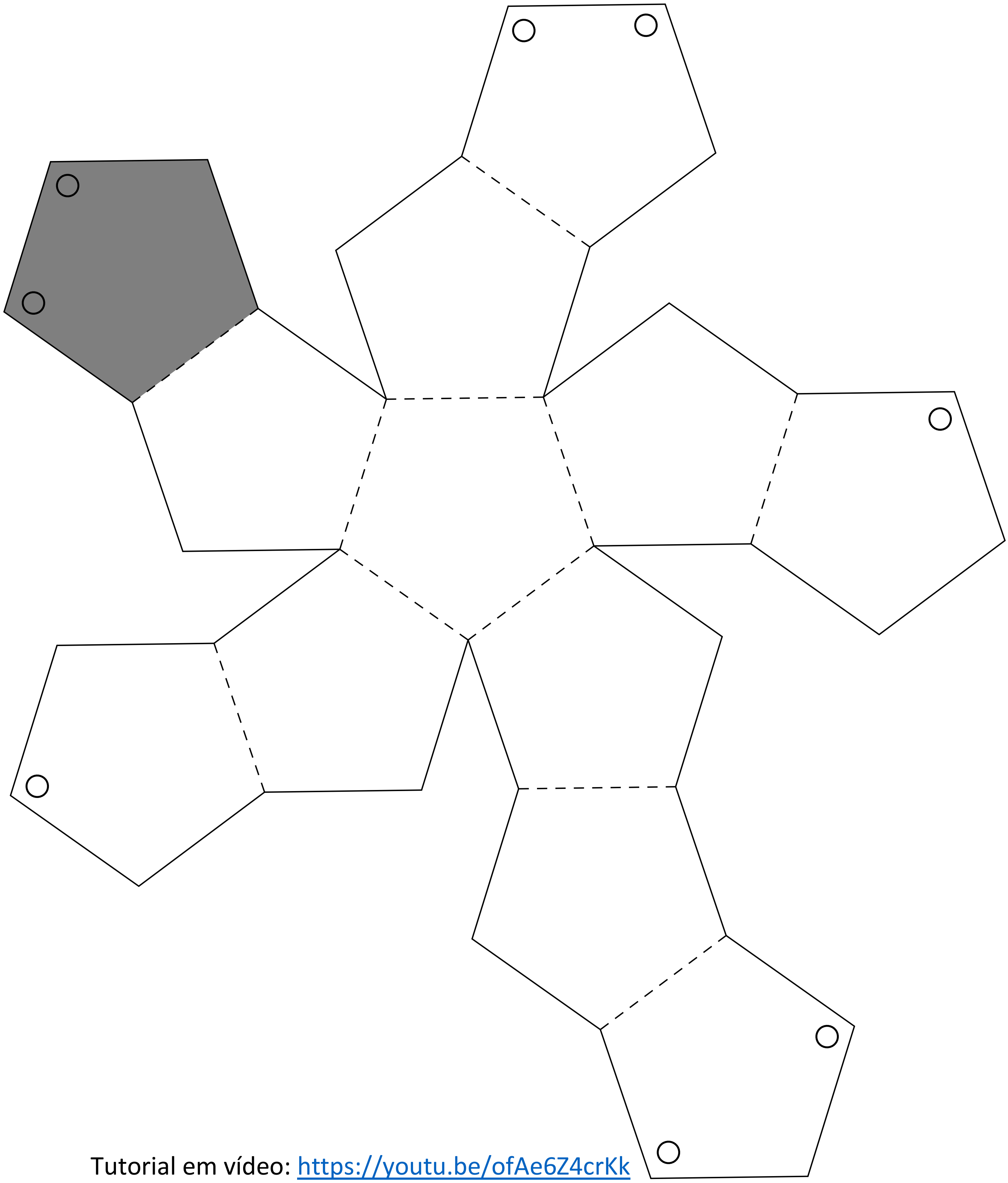


ICOSAEDRO REGULAR



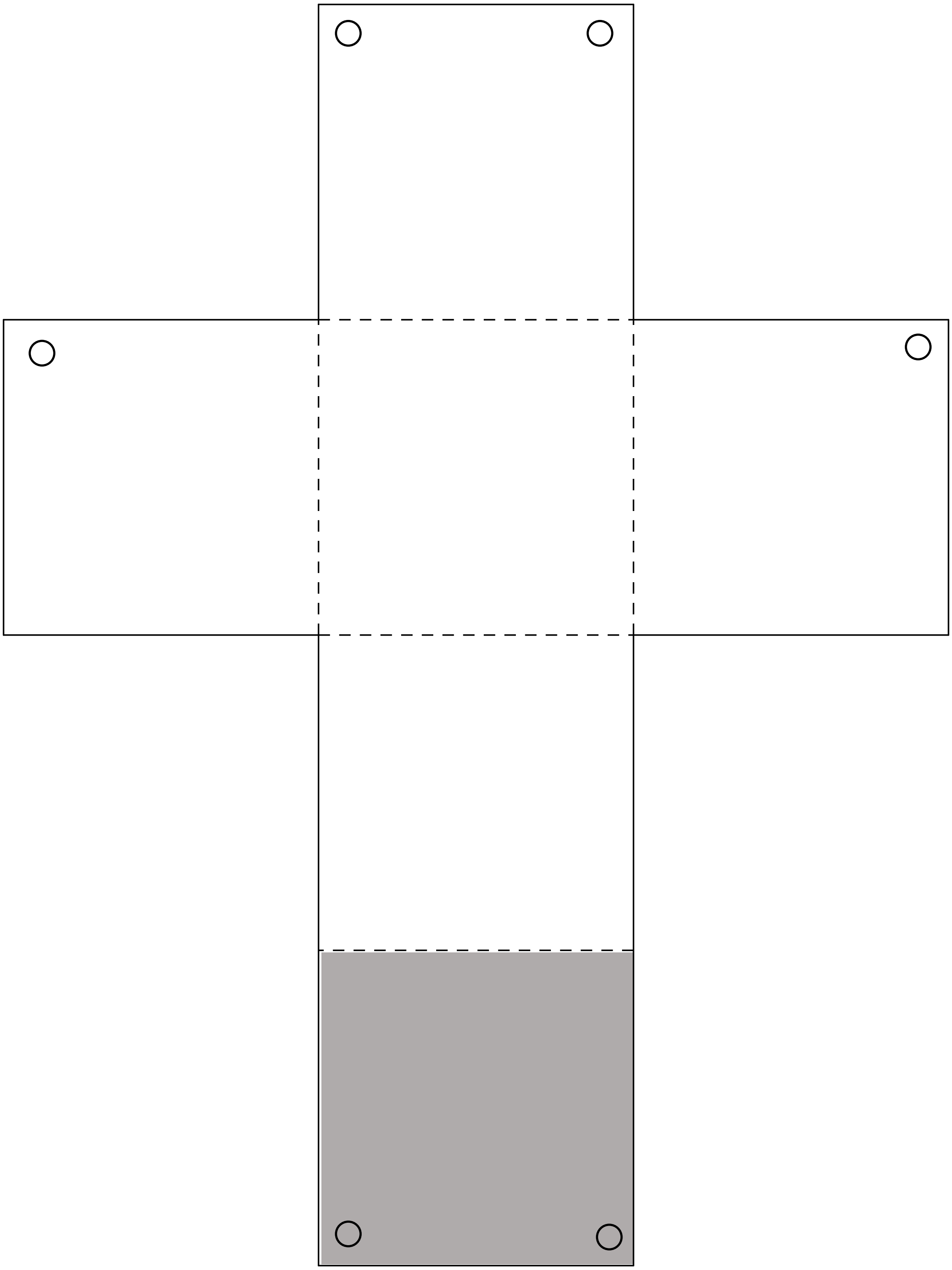
Tutorial em vídeo: https://youtu.be/ugUChmfRZpw

DODECAEDRO REGULAR



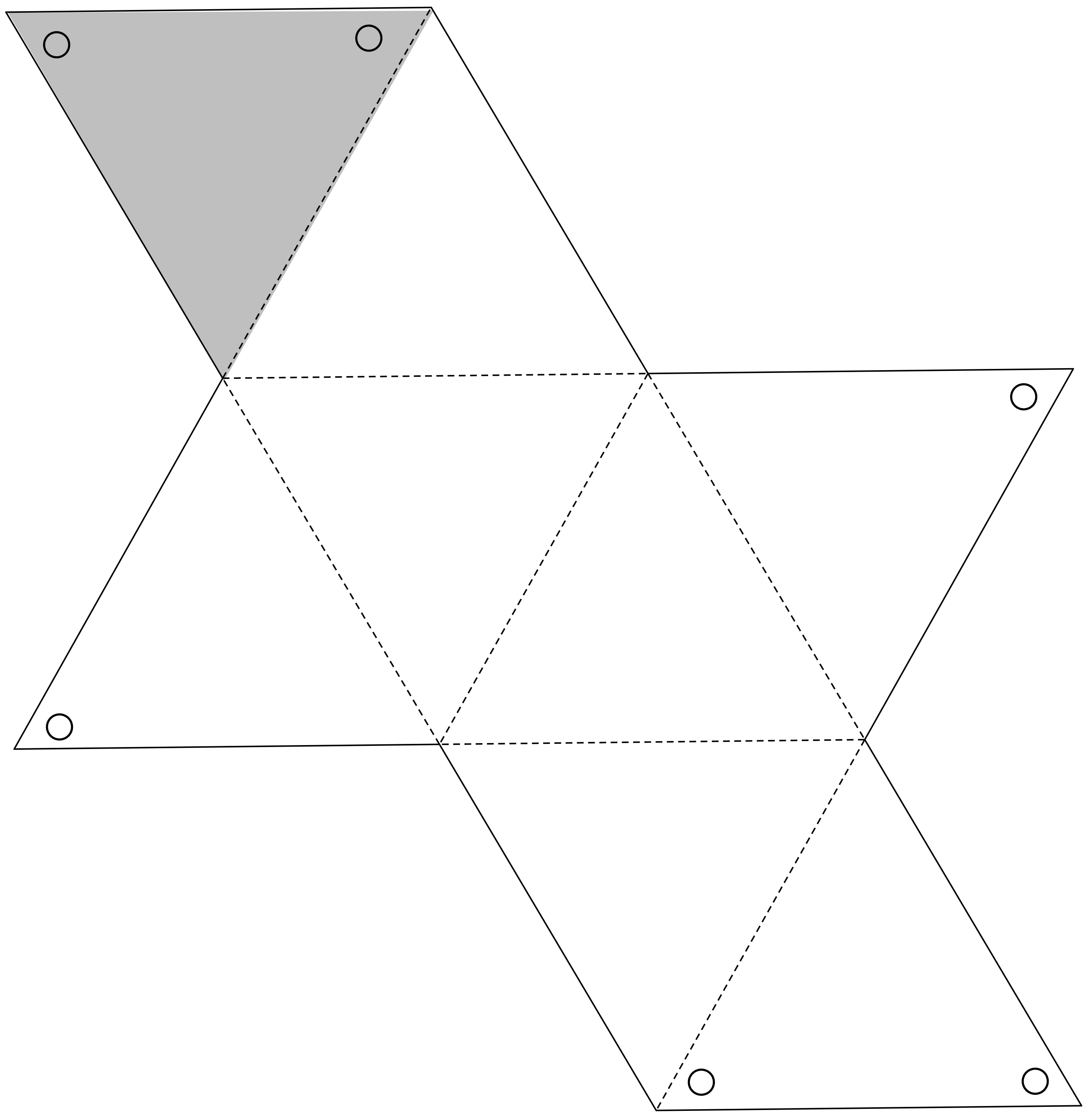
Tutorial em vídeo: https://youtu.be/ofAe6Z4crKk

HEXAEDRO REGULAR (CUBO)



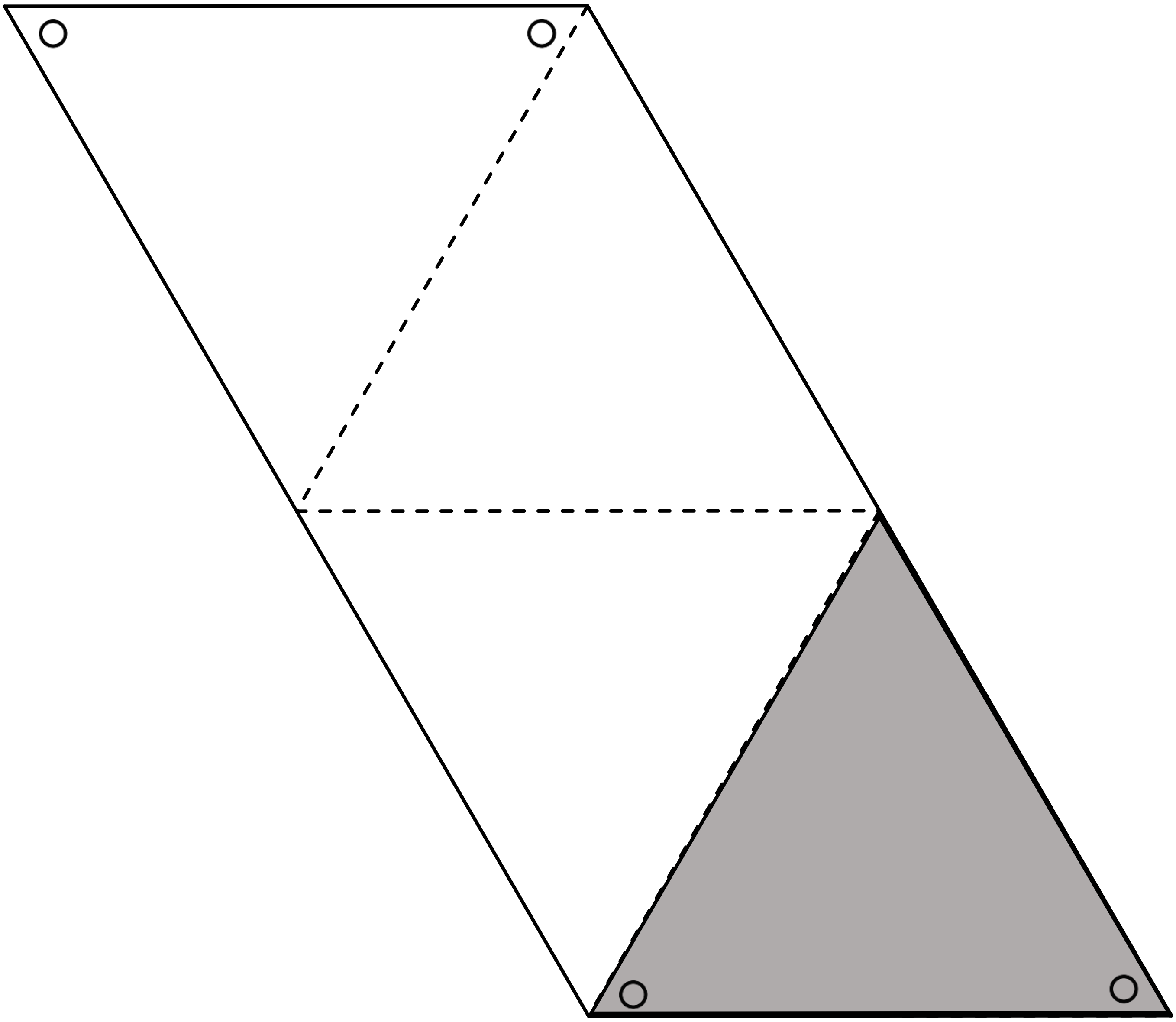
Tutorial em vídeo: https://youtu.be/iuZIn53znp8

OCTAEDRO REGULAR



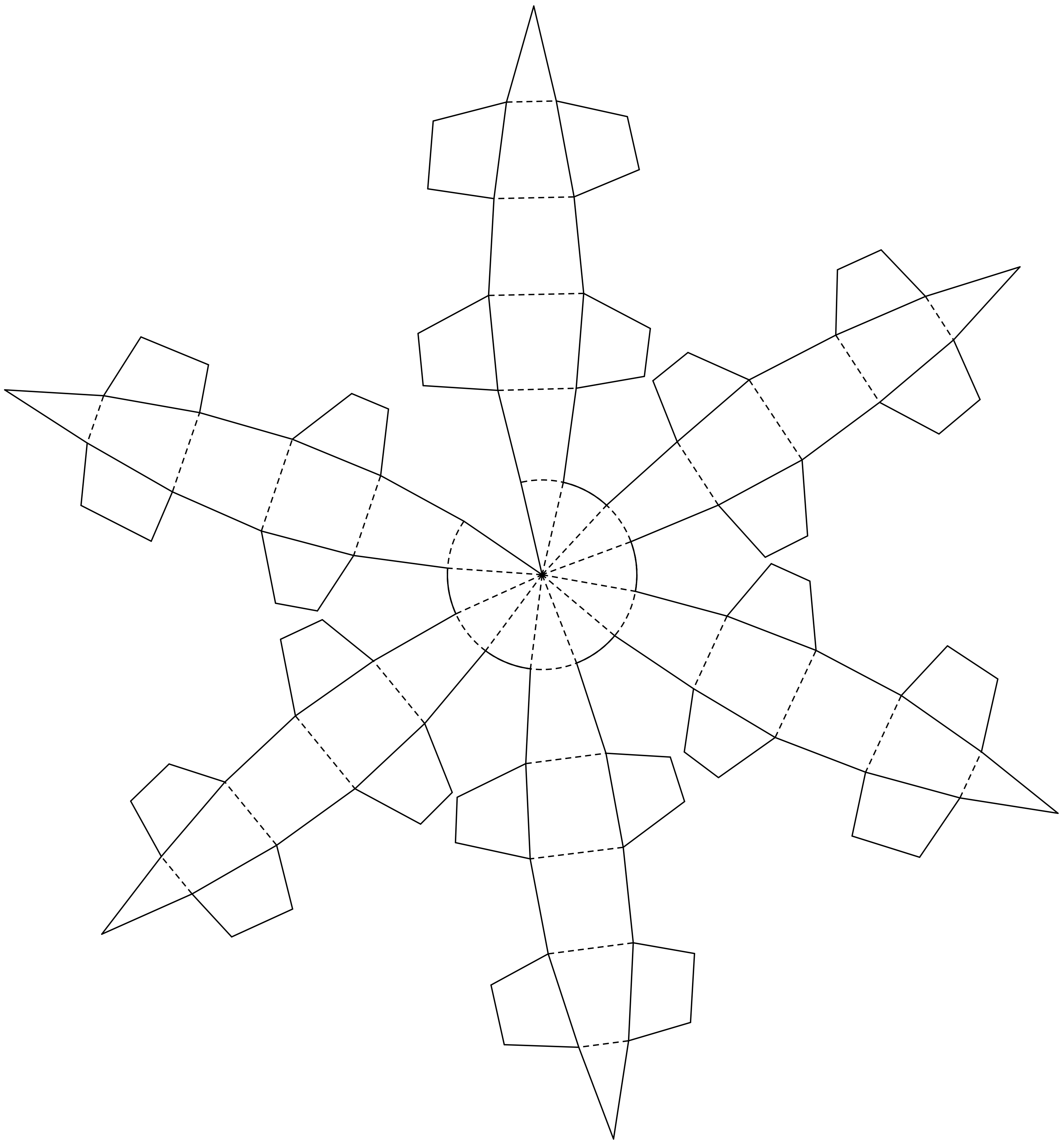
Tutorial em vídeo: https://youtu.be/N5GrpdjokLc

TETRAEDRO REGULAR



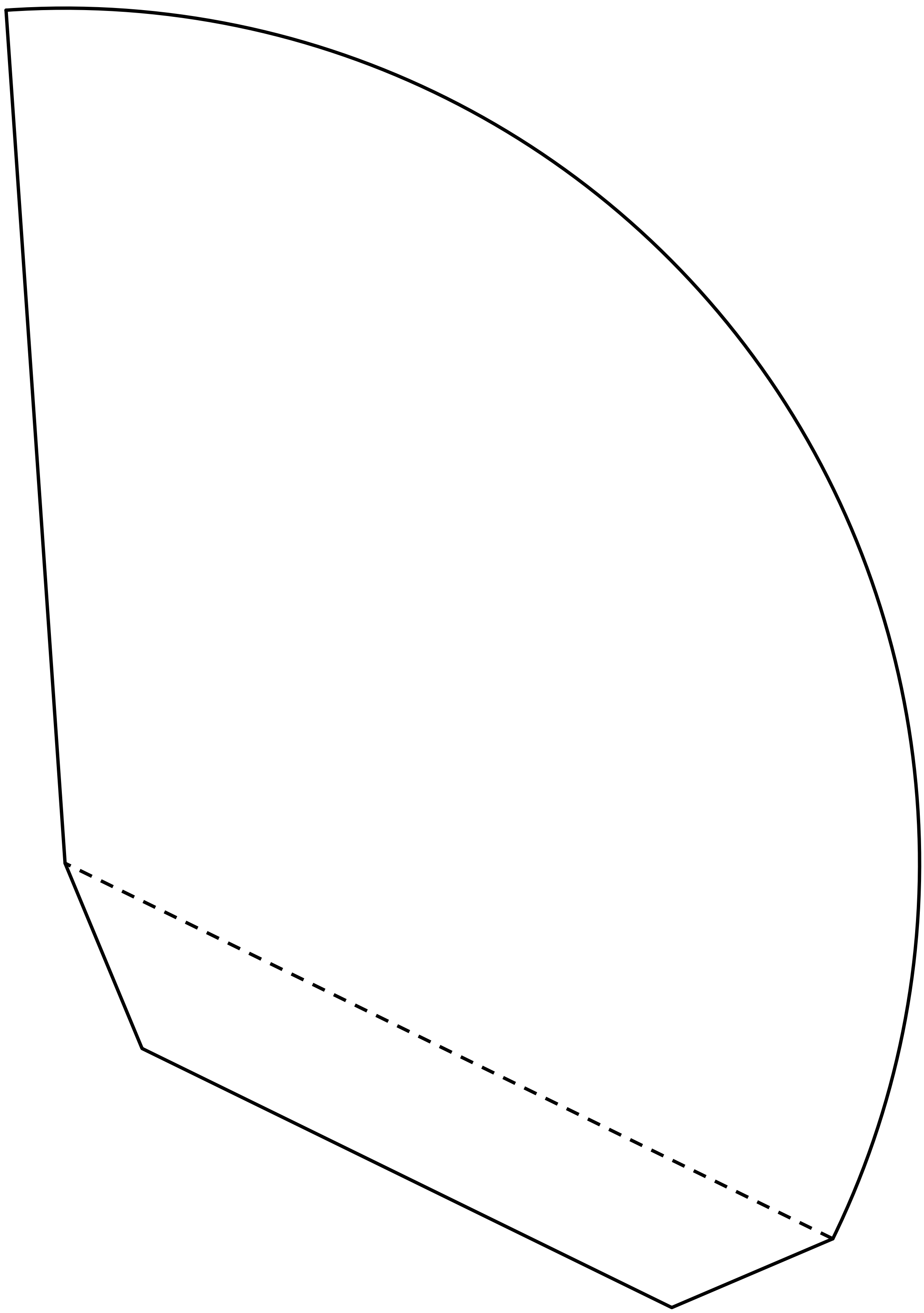
Tutorial em vídeo: https://youtu.be/_Cek9gwpOvw

ESFERA (imprimir 2 vezes)



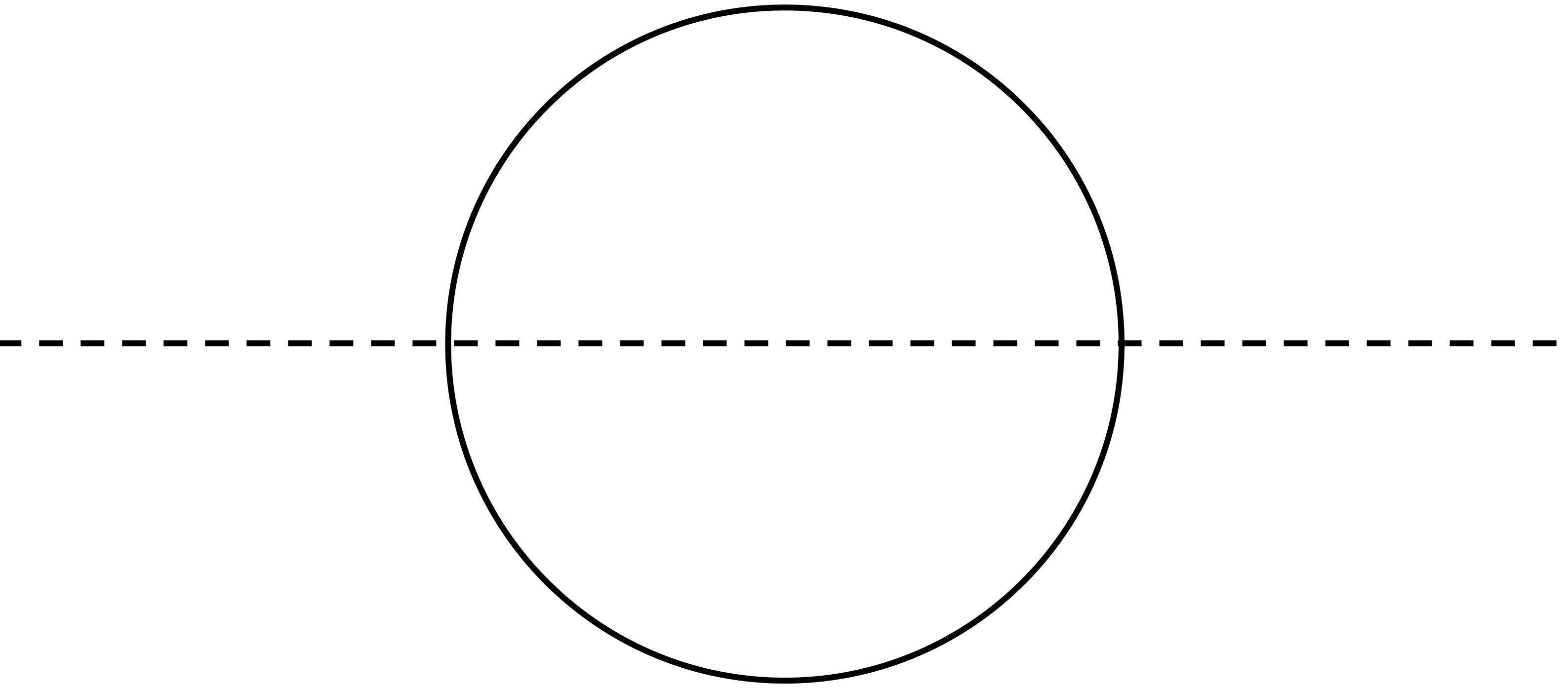
Tutorial em vídeo: https://youtu.be/PhUtxSSkg0o

CONE CIRCULAR RETO

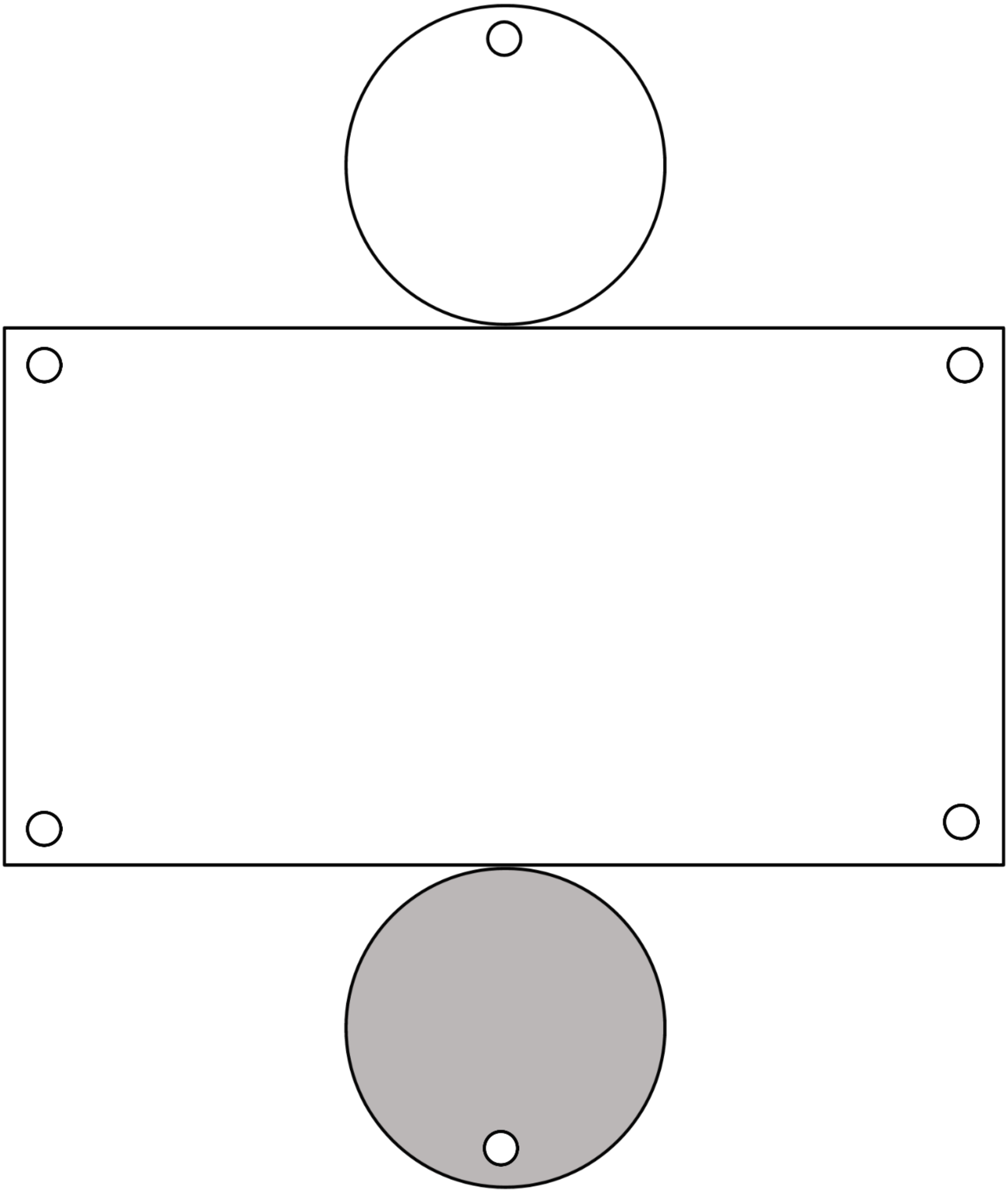


Tutorial em vídeo: https://youtu.be/emZm4kV14Vk

CONE CIRCULAR RETO



CILINDRO CIRCULAR RETO



Tutorial em vídeo: https://youtu.be/tYl_Pnu9Ttw