UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Uso do jogo Yahtzee nas aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental

Lucas de Sousa Rebouças

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Lucas de Sousa Rebouças

Uso do jogo Yahtzee nas aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

USP – São Carlos
Julho de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R292u Rebouças, Lucas de Sousa
Uso do jogo Yahtzee nas aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental / Lucas de Sousa Rebouças; orientadora Rosana Retsos Signorelli Vargas. -- São Carlos, 2023.
65 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Aprendizagem baseada em jogos. 2. Resolução de problemas. 3. Probabilidade. 4. Análise combinatória. 5. Yahtzee. I. Vargas, Rosana Retsos Signorelli, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Lucas de Sousa Rebouças

Using Yahtzee in Math classes on elementary school

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

USP – São Carlos
July 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe, meu pai e minha irmã, Rosana, Marcos e Clarissa Rebouças, por todo incentivo e apoio que me deram para realização desse trabalho; a minha companheira Camila Moraes, pela parceria e cuidado nessa caminhada, aos meus demais familiares, a minha orientadora Rosana Vargas e demais professores do PROFMAT, aos meus colegas do PROFMAT, a meu sogro e minha sogra, Pedro Ferreira e Rosana Moraes e a todos aqueles que foram, são e serão meus alunos, o professor não teria razão de existir se não fossem os estudantes. Por fim, gostaria de me desculpar com sir Paul McCartney, pois deixei de ir ao show dele em Salvador para vir a São Paulo fazer o exame de acesso ao PROFMAT (sorry, Paul).

RESUMO

REBOUÇAS, L. S. **Uso do jogo Yahtzee nas aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental**. 2023. 65 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Este estudo teve como objetivo geral discutir a importância do uso de jogos no ensino de Matemática e como objetivos específicos: 1) Entender quais habilidades são desenvolvidas a partir do uso de jogos; 2) Compreender como a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas pode ser aplicada no contexto de um jogo e 3) Fornecer aos professores de Matemática dos anos finais do ensino fundamental ferramentas didáticas para o ensino de Probabilidade através do jogo Yahtzee. Para tanto, foi realizado um levantamento teórico sobre o tema, buscando evidenciar a relevância da utilização de jogos e resolução de situações-problema no ensino da matemática e a partir disso, foi proposta uma atividade com base no jogo Yahtzee, com o intuito de favorecer o ensino-aprendizagem de análise combinatória e probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. Com base na discussão realizada e na experiência inicial de aplicação da atividade foi possível observar o papel socializador do jogo, na medida em que promove discussões que estimulam o "letramento matemático". Além disso, o aprendizado das regras do jogo favoreceu o desenvolvimento da capacidade de organização e estimulou a criatividade para resolução de problemas. Também foi possível notar que o jogo escolhido favoreceu a mobilização de conhecimentos matemáticos relativos ao cálculo mental e ao tratamento de dados e também discussões iniciais acerca do cálculo de probabilidades.

Palavras-chave: Aprendizagem baseada em jogos, Resolução de problemas, Probabilidade, Análise combinatória, Yahtzee.

ABSTRACT

REBOUÇAS, L. S. **Using Yahtzee in Math classes on elementary school**. 2023. 65 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

The main objective of the present work is to discuss the importance of using games in math classes. The particular goals are: 1) Understand what skills are developed by using games; 2) Comprehend how the methodology of Problem Solving can be used associated with a game in math classes and 3) Provide for math teachers of elementary school resources to teach probability and combinatorial analysis using a dice game called Yahtzee. A theoretical study was done trying to show how relevant is using games and problem solving in math classes and from that an activity to teach probability and combinatorial analysis using Yahtzee was suggested. Based on this discussion and the initial experience of application of the activity it was possible to understand about the socializing role of the games because they stimulate mathematical literacy and the game's rule's learning encouraged the development of the ability to organize and stimulate the creativity of problem solving. As well, we could realize that the chosen game promoted the mobilization of mathematical knowledge, such as mental calculation, data processing and initial discussions about the calculation of probabilities.

Keywords: Game-based learning, Problem Solving, Probability, Combinatorial Analysis, Yahtzee.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O uso de jogos para ensinar é uma prática conhecida a muito tempo e utilizada por diversos ramos do conhecimento sendo até hoje recomendado pelos documentos balizadores da educação. Para o ensino de matemática, o uso de jogos é estudado por diversos pesquisadores que citam uma série de benefícios: desenvolve o raciocínio lógico, desperta a curiosidade, promove o desenvolvimento do poder de argumentação, dentre outros. (BRASIL, 2018; BORIN, 2007; MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000; BRASIL, 1998)

Apesar disso, é muito comum entre professores de Matemática a dificuldade em propor situações lúdicas que possam favorecer o aprendizado dos alunos e, ao mesmo tempo, despertar o interesse para essa disciplina, muitas vezes vista pelos estudantes como algo abstrato demais e, portanto, descolado da realidade. Pensando nisso, busquei nesse trabalho propor uma atividade que ao mesmo tempo traga a motivação promovida pelos jogos, promova o aprendizado em grupo e que também possa, de alguma forma, auxiliar professores que ensinam Matemática a criar um ambiente propício ao aprendizado.

Atuando como professor de Matemática em uma escola da rede privada do estado de São Paulo, percebi certa dificuldades dos meus alunos em torno do estudo de Análise Combinatória e Probabilidade. De fato, a resolução de problemas de contagem pode exigir muita abstração na contagem dos casos. Diante disso mostra-se a relevância de buscarmos alternativas para estudarmos aplicações dos conceitos na prática, de forma a motivar os estudantes para o aprendizado. A partir daí, o jogo Yahtzee mostrou-se uma ferramenta importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e probabilístico e por esse motivo foi escolhido como foco da presente pesquisa.

A partir da resolução de situações problema, que é uma metodologia vista pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) como um dos princípios norteadores do ensino-aprendizagem de Matemática, o uso do Yahtzee consiste em analisar algumas situações que podem ocorrer durante o jogo e pensar junto com os estudantes qual seria a melhor decisão a ser tomada em cada situação proposta ou até mesmo investigar as chances de determinadas jogadas acontecerem no decorrer de uma partida. Após discussões e análises, a partir do conhecimento intuitivo de cada um, introduzimos e utilizamos o cálculo das probabilidades para confirmar ou não aquilo que foi pensado, mostrando que é possível "quantificar o incerto", não para prever o que vai acontecer mas para tentar maximizar as chances de obter bons resultados.

Os PCNs (BRASIL, 1998) indicam o uso de jogos como recurso didático justamente por, dentre outros fatores, favorecer o planejamento de ações, a tomada de decisões, formulação e reformulação de hipóteses, o exercício da argumentação e o desenvolvimento da crítica e da intuição, isso tudo dentro de um ambiente onde não há o peso da obrigatoriedade nem da imposição.

Enquanto que Borin (2007, p. 9) complementa:

> Todas as habilidades envolvidas nesse processo, que exigem tentar, observar, analisar, conjecturar, verificar, compõem o que chamamos de raciocínio lógico, que é uma das metas prioritárias do ensino de Matemática e característica primordial do fazer ciência.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) (BRASIL, 2018, p. 276) também indica o uso de jogos como recurso didático mas ressalta que "esses recursos (...) precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos."

Frente às questões discutidas, esse estudo tem como objetivos:

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

- Discutir a importância do uso de jogos no ensino de Matemática

1.1.2 Objetivos específicos

- Entender quais habilidades são desenvolvidas a partir do uso de jogos;
- Compreender como a "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas" pode ser aplicada no contexto de um jogo;
- Fornecer aos professores dos anos finais do ensino fundamental ferramentas didáticas para o ensino de Probabilidade através do jogo Yahtzee.

CAPÍTULO

2

JOGOS E RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Sobre ensinar Matemática, Felippe e Macedo (2022) acreditam que é uma atividade que exige que o profissional esteja sempre repensando sua prática, buscando novas metodologias que possam auxiliar os estudantes em suas dificuldades e despertem o seu interesse em aprender.

Acerca dessa questão, Oliveira (2007 apud MARTARELLI *et al.*, 2020, p. 1) complementa:

> Ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Os educadores matemáticos devem procurar alternativas que motivem a aprendizagem e, desenvolvam a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando as interações do sujeito com outras pessoas.

Dessa forma, Martarelli *et al.* (2020) ressalta que é importante que aulas diferenciadas sejam utilizadas para que possam favorecer o aprendizado dos alunos. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 298) recomenda alguns recursos como "(...) malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica" que podem ser utilizados pelos professores como facilitadores do aprendizado dos conceitos matemáticos. Dentre esses recursos, muitos autores defendem o uso de jogos.

Menezes (2020), Caldas, Graça e Marques (2020), Pontes *et al.* (2020), Fagundes *et al.* (2021), Souza, Santana e Santos (2021), Felippe e Macedo (2022) e Krohl *et al.* (2022) são alguns pesquisadores que vem evidenciando a importância do tema nos últimos anos.

Pontes *et al.* (2020) discutem o uso de jogos e propõem uma atividade para o ensino de progressões aritméticas a partir de um jogo com bolas de gude. Já Felippe e Macedo (2022) discutem a importância do ensino contextualizado e analisam a influência do uso de jogos e de modelagem matemática como estratégias de ensino.

Fagundes *et al.* (2021) nos trazem um relato de experiência da aplicação de um jogo voltado para o estudo de frações em uma turma do 5º ano do ensino fundamental. Os autores defendem a importância do uso de jogos como ferramenta de ensino e destacam o seu papel socializador, pois ao aceitar cumprir as regras acordadas, fundamentais para a continuidade do processo, os estudantes estão desenvolvendo suas capacidades relacionadas ao convívio social.

Outros autores apresentam utilidades no uso de jogos no ensino além da compreensão dos conteúdos, como por exemplo:

Macedo, Petty e Passos (2000, p. 13) recomendam que jogos sejam utilizados como fonte de coleta de informações a respeito da forma de pensar dos estudantes e também como forma de criar um ambiente favorável para a introdução de problemas a serem resolvidos. Os autores defendem que o jogador deve ser estimulado a ter uma atuação consciente e intencional de modo que ele possa analisar os resultados obtidos e observar quais pontos podem ser melhorados.

Enquanto Borin (2007) recomenda o uso de jogos nas aulas de Matemática devido a possibilidade de diminuir as resistências apresentadas por aqueles alunos que se sentem incapazes de aprender Matemática. Estimulados pelos jogos, tais alunos passam a "falar matemática" e a entender melhor seus processos de aprendizagem.

Relativo a isso Brenelli (1996, p. 37) acrescenta que "Favorecer as "tomadas de consciência" em crianças com dificuldade de aprendizagem parece ser fundamental, já que nem sempre o meio em que elas vivem favorece as trocas simbólicas.".

Mas, afinal, como podemos definir os elementos que definem o que é um jogo? Muniz (2010) destaca alguns pontos importantes que uma atividade deve ter para que seja considerada um jogo:

- **Regras:** Para o autor as regras não são rígidas e podem haver regras explícitas, que são aquelas ditas de forma clara para os participantes mas podem haver também regras implícitas, que os jogadores vão percebendo e criando ao longo da partida.

- **Jogadores:** Os jogadores são todos aqueles que participam da atividade. O autor observa que para uma pessoa ser considerada uma jogadora, ela não precisa, necessariamente, estar em contato direto com o material concreto, podendo participar da atividade através de ações verbais, por exemplo.

- **Situação:** Segundo Muniz (2010) a partir de um material concreto e direcionado por regras, os jogadores buscarão criar, recriar e solucionar situações-problema, com base no seu pensamento e poder de imaginação.

- **Incerteza quanto ao resultado:** Segundo o autor, é a falta de certeza quanto ao resultado

> que manterá o sujeito participando da atividade. Portanto a probabilidade de ganhar ou perder a partida definirá o engajamento dos participantes.

Por outro lado, o uso de jogos em sala de aula requer bastante cuidado e planejamento para que não vire uma simples brincadeira, sem intenções pedagógicas.

Para Macedo, Petty e Passos (2000, p. 18):

> (...) pode-se trabalhar com uma ampla variedade de jogos, desde que não seja como fins em si mesmos, mas transformados em material de estudo e ensino (na perspectiva do profissional), bem como em aprendizagem e produção de conhecimento (na perspectiva do aluno).

Esse pensamento está de acordo com o que pensam Selva e Camargo (2009) que acreditam que, de fato, o uso de jogos matemáticos pode contribuir para a construção do conhecimento, desde que haja intencionalidade nas ações do professor, que deve planejar como e quando será feita a atividade, definindo objetivos que visem uma aprendizagem efetiva.

O cuidado ao se planejar uma atividade com jogos também encontra respaldo nos PCNs (BRASIL, 1998, p. 57) que dizem que os jogos "(...) precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão".

Logo, para que o uso de jogos nas aulas de Matemática produza nos estudantes os resultados esperados pelo docente e cumpra com os objetivos que foram determinados, é necessária a escolha de uma metodologia de trabalho que, segundo Silva e Kodama (2004, p. 4), "(...) permita a exploração do potencial dos jogos no desenvolvimento de todas as habilidades (raciocínio lógico e intuitivo)" o que, segundo as mesmas autoras, pode ser feito através da metodologia de resolução de problemas.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 266) valida o uso de situações-problema como estratégia de ensino.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Segundo Allevato e Onuchic (2021), a metodologia de resolução de problemas considera que o problema deve ser um guia para a aquisição de novas aprendizagens em Matemática. As autoras se referem a metodologia como "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas" e explicam o porquê:

> (...) consideramos que a expressão “através” – significando “ao longo”, “no decurso” – enfatiza o fato de que ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 40)

Já no que diz respeito ao uso do termo ensino-aprendizagem-avaliação, as mesmas autoras dizem que ensino, aprendizagem e avaliação devem acontecer simultaneamente, de forma que o professor atue como mediador entre o aluno e o conhecimento. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021)

É comum vermos autores se referirem a “ensinar” e “aprender” como processos que ocorrem simultaneamente e não como consequência um do outro. Em seu estudo Kubo e Botomé (2001, p. 9) dizem que “Os dois tipos de eventos estão relacionados e são interdependentes. São, de certa forma, “duas faces da mesma moeda””. Dessa forma, é comum ver esse processo descrito como “ensino-aprendizagem”.

Pironel e Onuchic (2021) acreditam que a junção do termo “avaliação” se dá pois o processo de avaliação também deve acontecer de forma simultânea ao processo de ensino-aprendizagem, recomendando que seja adotada uma avaliação formativa.

Sobre avaliação formativa, Caseiro e Gebran (2010) explicam que é uma avaliação que tem como objetivo contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, a medida que auxilia o professor a guiar suas ações e auxilia o aluno, que cria consciência das suas dificuldades e pode corrigir seus erros.

Barreira, Boavida e Araújo (2006, p. 95) definem avaliação formativa como sendo aquela que “(...) é realizada processualmente, durante o decurso do programa, para introduzir ajustamentos no sentido do seu aperfeiçoamento” e ressaltam: “A avaliação passa a ter uma importante função pedagógica, de ajuda, de reflexão, de tomada de decisão”.

Nesses casos, é importante que o professor se atente ao *feedback* que dará aos alunos. Essa devolutiva deve ser realizada para que os alunos observem o progresso do seu aprendizado e possam repensar suas ações no decorrer do processo.

Sobre o *feedback*, Villas-Boas (2006, p. 82) acredita que “A melhoria do trabalho do aluno é alcançada se o professor lhe oferece orientação e se o primeiro a segue” porém a autora alerta que o aluno não pode ficar dependente da orientação e o professor deve adotar práticas que priorizem a transição do *feedback* professor-aluno para o auto-monitoramento: “O desenvolvimento da capacidade de avaliação do próprio trabalho faz parte das aprendizagens a serem adquiridas.” (VILLAS-BOAS, 2006, p. 82).

Em “Aprender com Jogos e Situações-Problema”, Macedo, Petty e Passos (2000) recomendam que a atividade com jogos deve ser dividida em quatro etapas:

(1) **Exploração do material e aprendizagem das regras**

Como o nome sugere, nessa etapa os autores recomendam que o material utilizado na atividade seja apresentado aos alunos, embora não seja condição necessária para o domínio do jogo, a atividade exploratória do material favorece a aprendizagem através da observação.

Em seguida, as regras devem ser apresentadas. O entendimento e aceitação das regras é fundamental para que o jogo possa acontecer, por isso o profissional deve explorar bastante esse momento, ficando sempre disponível para dirimir as dúvidas que possam surgir.

Os autores sugerem duas maneiras para a apresentação das regras, que podem variar de acordo com o jogo. Na primeira o professor pode jogar uma partida demonstrativa, onde vai apresentando as regras enquanto que na outra o professor vai compondo as regras em conjunto com alunos que já conheçam o jogo.

Para o caso de um jogo com muitas regras, os autores recomendam que sejam jogadas partidas com menos regras, com novas sendo acrescidas a medida que os alunos vão mostrando domínio das anteriores.

Essa primeira etapa é importante para fazer o jogo acontecer, porém ela não é suficiente para se formar um bom jogador, por isso a necessidade da etapa seguinte.

(2) **Prática do jogo e construção de estratégias**

Nessa segunda etapa, os alunos devem pôr a mão na massa e jogar o jogo. Um bom tempo deve ser investido nesse momento, pois é durante essa etapa que os alunos irão se familiarizar com o jogo e suas situações, buscando criar e recriar estratégias para se chegar a vitória.

Para os autores, o professor tem papel fundamental nesse momento. O profissional deve questionar e incentivar os jogadores a refletirem sobre as ações (próprias e dos outros) dentro do jogo, para que possam ter uma atitude ativa e não dependam somente da sorte para obterem bons resultados.

Os questionamentos propostos pelo professor devem visar a observação e a superação dos erros, de modo que valorizem o desenvolvimento de competências como disciplina, concentração, perseverança e flexibilidade.

(3) **Construção de situações-problema**

Em um contexto onde o estudante esteja sendo desafiado a repensar suas estratégias diante de um jogo, é natural que situações-problema surjam. Essas situações-problema, que podem ser propostas pelo professor ou elaboradas pelos próprios alunos, se assemelham ao que Allevato e Onuchic (2021, p. 49) chamam de "problema gerador", a partir do momento que sua resolução está relacionada à construção de um novo conhecimento matemático.

Para Allevato e Onuchic (2021) um problema surge a partir da relação com quem vai resolvê-lo, de forma que se o aluno já conhecer ou tiver uma resposta pronta para a questão, ela não se torna um problema.

Macedo, Petty e Passos (2000, p. 21) observam que situações-problema apresentam as seguintes características:

a) são elaboradas a partir de momentos significativos do próprio jogo;
b) apresentam um obstáculo, ou seja, representam alguma situação de impasse ou decisão sobre qual a melhor ação a ser realizada;
c) favorecem o domínio cada vez maior da estrutura do jogo;
d) têm como objetivo principal promover análise e questionamento sobre a ação de jogar, tornando menos relevante o fator sorte e as jogadas por ensaio-e-erro.

Para o autor, trabalhar o uso de jogos através de situações problema possibilita "a investigação do pensamento infantil, num contexto de intervenção, visando transformar a relação com o conhecimento" (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 21).

Por fim, cabe observar que o favorecimento do aprendizado acontece não por causa dos jogos em si, mas a partir dos questionamentos e desafios propostos pelo professor. Aos jogos cabem o papel socializador pois a medida que favorecem a troca de informações entre os alunos, auxiliam no processo de construção do conhecimento.

(4) **Análise das implicações do jogar**

Nessa etapa professor e alunos irão rememorar e partilhar toda a experiência de jogar. Quais conhecimentos já aprendidos foram necessários? Quais novos conhecimentos precisaram ser mobilizados? Nesse momento o professor pode compartilhar as diferentes soluções que apareceram para um mesmo problema, valorizando diferentes pontos de vista, e também generalizar conhecimentos aprendidos no decorrer do jogo para outros contextos.

Claro que as análises a serem feitas vão depender de qual jogo está sendo proposto e de quais são os aspectos que o profissional deseja destacar com aquele jogo. Porém é importante destacar que a atividade com jogos passa a ser mais produtiva se compartilhamos com os alunos o que foi aprendido com as soluções dos problemas propostos e a transposição desses aprendizados para outras situações.

Portanto, como visto nesse capítulo, o uso de jogos no ensino pode ser bastante proveitoso se feito com intencionalidade e método por parte do professor. Uma forma eficaz de desenvolver o trabalho com jogos é a partir da análise de situações-problema que podem surgir ao longo do jogo ou que podem ser propostas pelo educador. Esse tipo de trabalho mobiliza conhecimentos prévios e auxilia na construção de novos conceitos, desperta o interesse pela matéria, favorece o desenvolvimento de competências como observar, analisar, questionar e corrigir ações, argumentar e solucionar e possibilita que os alunos criem uma relação positiva com seu processo de adquirir conhecimento.

CAPÍTULO

3

ALGUMAS ABORDAGENS UTILIZANDO JOGOS

Com o avanço da tecnologia e sua crescente utilização para fins de aprendizado, o termo gamificação vem ganhando bastante destaque. Mas será que toda atividade relacionada a jogos é uma atividade gamificada? Em seu estudo, Esquivel (2017) defende que o trabalho com jogos pode acontecer de diferentes maneiras, vamos discutir três delas abaixo: Gamificação, Jogo Sério e Aprendizagem baseada em jogos.

3.1 Gamificação

Gamificação (tradução de *gamification*, palavra derivada de *game*, ou jogo) é descrita por Esquivel (2017) como o uso de elementos presentes em jogos em outros contextos, sendo a educação uma das possibilidades. Tais elementos são exemplificados por Ramos e Marques (2017, p. 322):

> Entendendo-se por "elementos dos jogos" características tais como cumprir regras, estabelecer objetivos claros e premiar as conquistas através de sistemas de pontuação ou troféus (sistema de recompensa e feedback), lançar desafios, desenvolver a ação segundo níveis de dificuldade de forma a estimular desempenhos e promover a criação enredos-narrativas e de avatares, aqui entendidos como a personificação do alter-ego imaginário da própria pessoa (física e emocional) na forma de um personagem.

Portanto, falar em gamificação não necessariamente é falar em jogos, mas na utilização de elementos presentes em jogos em outros contextos com o objetivo de motivar os envolvidos. No ambiente acadêmico, podemos observar estudos relativos a atividades gamificadas. Pereira e David (2022), por exemplo, analisam o impacto do uso da plataforma gamificada MATIFIC em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. MATIFIC é uma plataforma digital de ensino de matemática onde os alunos podem ir progredindo de nível a medida que ganham pontos em atividades e mini-jogos atribuídos pelo professor. Lundgren e Felix (2017) também discutem o uso de atividades gamificadas. Em seu estudo os autores apresentam a plataforma SAM, cujo objetivo é estimular a aprendizagem de matemática de estudantes portadores de Síndrome de Down.

Embora seja mais comum tratarmos de gamificação em ambientes digitais, utilizando elementos de jogos digitais, também é possível encontrar material que trata de gamificação analógica, como por exemplo Carvalho *et al.* (2021) que propõem uma atividade gamificada baseada em *card games* e justificam a escolha pela gamificação analógica pois observam que nem toda escola dispõe de estrutura necessária para realização de atividades em ambientes digitais.

3.2 Jogo Sério

Machado *et al.* (2011) definem Jogo Sério (versão traduzida de Serious Game ou SG) como um tipo de jogo que pode ser utilizado com alguma finalidade específica, para além de somente servir como entretenimento.

Alguns trabalhos abordam o uso de Jogos Sérios, como por exemplo Theodório, Silva e Scardovelli (2020) que discutem o uso de Jogos Sérios no diagnóstico e tratamento do TDAH e Rocha (2015) que aborda o uso de Jogos Sérios para motivar pacientes que estão em processo de reabilitação cognitiva.

Esquivel (2017) observa que a diferença entre SG e Gamificação é que o primeiro se utiliza de jogos completos para atingir suas metas enquanto que o segundo utiliza somente elementos de jogos. Portanto, Jogos Sérios e atividades gamificadas podem até ter a mesma finalidade, porém utilizam-se de abordagens diferentes para atingir esses objetivos.

3.3 Aprendizagem baseada em jogos

Aprendizagem baseada em jogos, tradução de Game-Based Learning (GBL), é definida por Carvalho (2015, p. 176) como “uma metodologia pedagógica que se foca na concepção, desenvolvimento, uso e aplicação de jogos na educação e na formação”.

Outra variação que podemos encontrar é a DGBL, ou Digital Game-Based Learning. Nesse caso, a variação é vista quando tratamos de jogos digitais utilizados com motivações educacionais.

Esquivel (2017) observa que os conceitos de Aprendizagem baseada em jogos e Jogos Sérios são similares no que diz respeito ao uso de jogos completos, o autor, porém, vê diferença entre as abordagens. Para ele, embora não seja tão fácil fazer essa distinção, o mais comum é se utilizar “Aprendizagem baseada em jogos” para atividades com fins na educação escolar, enquanto que “Jogos Sérios” é uma nomenclatura utilizada para atividades que visem outras áreas, por exemplo treinamentos militares ou aplicações na área da saúde.

Esquivel (2017) também relaciona a Aprendizagem baseada em jogos com a Gamificação. Para ele, a principal diferença entre GBL e Gamificação também está no fato da primeira se utilizar de jogos completos, enquanto que a segundo utiliza elementos de jogos.

Mais autores discutem o uso dessa abordagem. Silva (2016) propõe uma atividade utilizando o jogo "Matemática Fácil" e analisa os resultados de sua aplicação com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental enquanto que Leitão (2013) desenvolve, propõe a utilização e analisa os resultados da aplicação de um jogo que utiliza realidade aumentada para favorecer o ensino de Geometria.

No Capítulo 6 desse trabalho, será proposta uma atividade visando o ensino de probabilidade através do jogo de dados Yahtzee. Por esta atividade utilizar um jogo completo e ser voltada para o ensino de matemática na educação básica, podemos considerar que ela está proposta dentro da "Aprendizagem baseada em jogos".

O uso desse tipo de abordagem traz vantagens. Para Brenelli (1996) o uso de jogos em contextos educacionais, especialmente com crianças com dificuldades de aprendizagem, se torna eficaz pois, por um lado, trazem interesse e motivação e, por outro, criam cenários favoráveis ao aprendizado de conteúdos. Os PCNs (BRASIL, 1998, p. 46) também validam a questão do uso de jogos:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.

Podemos então observar que existem diferentes abordagens utilizando jogos, sendo a Gamificação uma delas. Um fator importante é que as abordagens apresentadas propõem atividades que podem acontecer em ambiente digital ou não. O que diferencia as abordagens é se são utilizados jogos completos ou apenas elementos de jogos e se a abordagem utilizada tem somente fins escolares ou pode ser abordada em outros contextos.

CAPÍTULO

4

SOBRE O YAHTZEE

4.1 História

O Yahtzee é um jogo surgido na década de 1950 no Canadá. Um casal dono de um iate criou o jogo para jogar com seus amigos e funcionários, originalmente o jogo foi batizado como ”Jogo do Iate” (Yacht game, em inglês).

Com o sucesso do jogo, o empresário do ramo de brinquedos Edwin S. Lowe adquiriu os direitos de produção junto ao casal em troca de algumas unidades do jogo, que passou a se chamar Yahtzee.

Com algumas variações nas regras, outros jogos foram criados inspirados no Yahtzee, são eles: General, Yam (versão do Yahtzee vendida no Brasil pela Grow nas décadas de 1970 e 1980), Super Yam e Bozó (jogo bastante popular no centro-oeste do país).

Figura 1 – Primeira versão do Yahtzee, datada dos anos 1950

Fonte: <https://ludotecapampala.files.wordpress.com/2014/09/1950_yahtzee.jpg>, acesso em: 19 de julho de 2022

Figura 2 – Uma das versões do jogo Yam da Grow, datada dos anos 1980.

Fonte: <https://http2.mlstatic.com/D_NQ_NP_785984-MLB50132143515_052022-W.jpg>, acesso em: 24 de janeiro de 2023

4.2 Regras

O Yahtzee pode ser jogado por uma ou mais pessoas e o objetivo é obter o maior número de pontos possível. Para jogá-lo é necessário somente cinco dados comuns (dados de 6 lados), um copo, lápis e papel.

Cada jogador deverá utilizar o copo (comumente confeccionado em couro ou plástico) para chacoalhar os dados e jogá-los de maneira aleatória, de forma que os resultados não possam ser manipulados; o lápis e o papel serão utilizados para marcar a pontuação em uma tabela.

A cada rodada, o jogador terá direito a fazer até três lançamentos. No primeiro lançamento, todos os dados devem ser utilizados, o jogador deve avaliar o resultado obtido e, caso julgar necessário, poderá realizar o segundo lançamento, utilizando somente os dados que escolher. Após a análise da nova composição dos dados, o jogador poderá optar por fazer o terceiro lançamento. De forma similar ao segundo lançamento, o jogador deverá lançar os dados que escolher a fim de obter uma nova configuração para os dados.

Terminada a rodada, o jogador deverá escolher uma das treze jogadas (que estão representadas nas linhas da tabela) e marcar a pontuação referente ao resultado obtido nos dados. A cada rodada uma das jogadas deve ser obrigatoriamente escolhida. Caso o resultado obtido pelo jogador não permita pontuação em nenhuma das jogadas disponíveis o jogador deverá escolher uma das jogadas e atribuir zero pontos a ela.

No Yahtzee, as pontuações têm como base treze jogadas que são representadas na tabela por símbolos, a seguir, descreveremos cada uma das jogadas, relacionando-as com os respectivos símbolos.

(i) **1 ou Ás** - A pontuação será dada de acordo com a soma dos uns obtidos pelo jogador ao fim da rodada.

Exemplo: O jogador obteve {1,1,2,5,1} ao fim da rodada, portanto três dados caíram com o número um voltado para cima, então a pontuação será 1 + 1 + 1 = 3 pontos.

(ii) **2 ou Duque** - A pontuação será dada de acordo com a soma dos dois obtidos pelo jogador ao fim da rodada.
Exemplo: O jogador obteve {1,1,2,5,1} ao fim da rodada, como somente um dado caiu com o número dois voltado para cima, então o jogador faria 2 pontos nessa jogada.

(iii) **3 ou Trinca** - A pontuação será dada de acordo com a soma dos três obtidos pelo jogador ao fim da rodada.
Exemplo: O jogador obteve o mesmo {1,1,2,5,1} ao fim da rodada, como nenhum dado caiu com o número três voltado para cima, então o jogador poderia marcar zero pontos na linha referente a essa jogada.

(iv) **4 ou Quarta** - A pontuação será dada de acordo com a soma dos quatros obtidos pelo jogador ao fim da rodada.

(v) **5 ou Quina** - A pontuação será dada de acordo com a soma dos cincos obtidos pelo jogador ao fim da rodada.

(vi) **6 ou Sena** - A pontuação será dada de acordo com a soma dos seis obtidos pelo jogador ao fim da rodada.

(vii) **T ou Trio** - Caso o jogador obtenha três dados (ou mais) marcando o mesmo número, ele obterá a pontuação referente à soma dos cinco dados.
Exemplo: O jogador obteve {1,1,2,5,1} ao fim da rodada, portanto a pontuação será 1 + 1 + 2 + 5 + 1 = 15 pontos.

(viii) **Q ou Quadra** - Caso o jogador obtenha quatro dados marcando o mesmo número, ele obterá a pontuação referente à soma dos cinco dados.

(ix) **F ou Full House/Full Hand** - É válida quando o jogador obtém uma trinca e um par e vale 25 pontos, independente da combinação.

(x) **S- ou Sequência menor/baixa**[1] - O jogador deve obter, ao fim da rodada, a combinação {1,2,3,4,5}, vale 30 pontos.

(xi) **S+ ou Sequência maior/alta** - O jogador deve obter, ao fim da rodada, a combinação {2,3,4,5,6}, vale 40 pontos.

(xii) **Y ou Yahtzee** - É a jogada com pontuação mais alta do jogo. Vale 50 pontos que são obtidos quando o jogador obtém os cinco dados marcando o mesmo número.

[1] A depender de onde se joga, a **S-** pode ser considerada como sendo uma sequência qualquer com 4 dados, por exemplo {2,3,4,5} e a **S+** pode ser considerada como sendo uma sequência qualquer com 5 dados, por exemplo {2,3,4,5,6}. Nesses casos, entretanto, as pontuações se mantém da mesma forma.

Algumas variações dessa jogada incluem desde pontos extras, caso o jogador consiga mais de um Yahtzee na mesma partida, até a vitória do jogador a qualquer momento da partida, no caso dele obter um Yahtzee no primeiro lançamento de uma rodada.

(xiii) **X ou Chance ou Aleatório** - Essa jogada vale a soma dos resultados obtidos nos cinco dados. Podendo variar de 5 até 30 pontos. Nem todas as variações do Yahtzee trazem essa jogada.

Figura 3 – Modelo de tabela para dois jogadores utilizado no Yahtzee

Jogada	Jogador 1	Jogador 2
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Soma		
Bônus		
T		
Q		
F		
S-		
S+		
Y		
X		
Total		

Fonte: Elaborada pelo autor.

A primeira coluna trás os símbolos que estão relacionados a cada uma das jogadas enquanto que da segunda coluna em diante os espaços serão utilizados para marcar a pontuação relativa a cada jogador em cada uma das jogadas. O número de colunas da tabela varia de acordo com o número de jogadores.

Ao fim das treze rodadas, inicia-se a contagem dos pontos. Primeiramente devem ser somados os pontos relativos às jogadas **1, 2, 3, 4, 5 e 6**, o resultado da soma deve ser escrito na linha "Soma". Caso o jogador obtenha 63 pontos ou mais, ele ganhará um bônus de 30 pontos, que deve ser anotado na linha "Bônus". Caso a soma seja menor do que 63, então o jogador deverá marcar zero pontos na linha ”Bônus”.

Após a análise da pontuação extra, devem ser somadas, em cada coluna, as pontuações da linha ”Soma” até a linha ”X” e o resultado deve ser escrito em ”Total”. Ao fim, quem obtiver mais pontos, vence o jogo.

4.3 Jogos derivados do Yahtzee

4.3.1 *Super Yam*

As informações referentes ao Super Yam foram, em suma, retiradas do site Ludopedia (2013).

Um dos jogos baseados no Yahtzee que também foi lançado pela Grow nos anos 1980 é o Super Yam. O Super Yam preserva boa parte das regras do Yam (e consequentemente do Yahtzee) porém neste jogo a contagem dos pontos é feita através de um sistema que inclui um tabuleiro, um dado com cores e fichas coloridas similares às do jogo War.

Outras diferenças do Super Yam são a inclusão de uma jogada chamada **25**, em que o jogador deve obter, ao final da sua jogada, 25 ou mais na soma dos dados; e também que o jogo é recomendado para ser jogado por no mínimo duas e no máximo seis pessoas, enquanto que o Yahtzee pode ser jogado individualmente e não tem número máximo de jogadores.

Figura 4 – Jogo Super Yam comercializado no Brasil pela empresa Grow

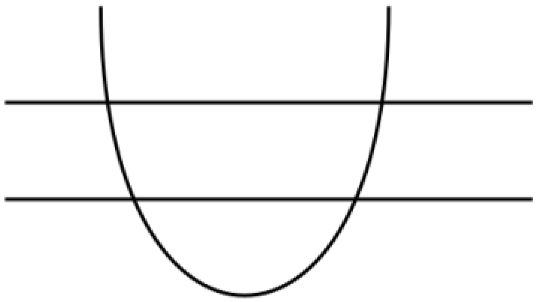
Fonte: <https://d1o6h00a1h5k7q.cloudfront.net/imagens/img_m/5767/2419204.jpg>, acesso em: 24 de janeiro de 2023

4.3.2 *Bozó*

As informações referentes ao Bozó foram, em suma, retiradas do trabalho "Uso do jogo Bozó na sala de aula" de Soares (2021).

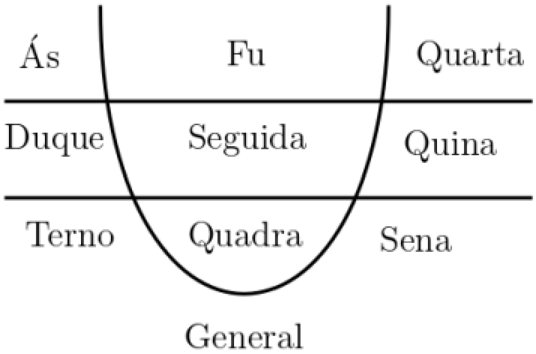
Ao que consta o Bozó surgiu no Brasil após a popularização do Yam e é muito comum nas ruas da região centro-oeste do país. O jogo tem regras bem parecidas com Yahtzee, sendo necessária uma tabela simplificada para marcar a pontuação de cada jogador.

Figura 5 – Tabela de pontos do Bozó vazia.



Fonte: Soares (2021, p. 28)

Figura 6 – Tabela de pontos do Bozó com os nomes das jogadas.



Fonte: Soares (2021, p. 28)

Na Figura 6 temos indicado onde devem ser escritas as pontuações referentes a cada resultado obtido pelo jogador ao fim da sua jogada, caso não seja formada nenhuma sequência, o jogador deve marcar zero pontos na casa referente a uma sequência a sua escolha.

O jogador pontuará seguindo a soma dos dados nas jogadas chamadas de Ás, Duque, Terno, Quarta, Quina e Sena, sendo cada uma delas a soma do total de faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Essas jogadas podem ser chamadas de “jogadas numéricas”.

O Bozó também tem as chamadas “jogadas especiais” onde as sequências obtidas têm pontuação fixa. Sâo elas:

(i) **Fu**: Três faces iguais de um mesmo número mais duas faces iguais de um outro número, similar ao *Full House*; vale 10 pontos.

(ii) **Seguida**: Uma junção das sequências baixa e alta do Yahtzee, onde o jogador marca 20 pontos se obtiver os cinco dados em sequência (1,2,3,4,5) ou (2,3,4,5,6).

(iii) **Quadra**: Similar a jogada presente no Yahtzee, o jogador ganha 30 pontos caso consiga quatro dados com faces iguais e uma diferente.

(iv) **General**: Similar a jogada chamada Yahtzee, o jogador ganha 40 pontos caso consiga cinco dados com faces iguais.

Além disso, no Bozó podem acontecer as jogadas "de boca", que é quando o jogador obtém uma das "jogadas especiais" no primeiro lançamento. Nesse o caso, o jogador recebe uma pontuação extra de 5 pontos. O jogador pode também, antes de lançar os dados, pedir que sejam considerados os resultados das faces que ficaram voltadas para baixo, manobra conhecida como "pedir de baixo".

CAPÍTULO

5

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS

5.1 Análise combinatória

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 528) se refere ao Ensino Fundamental como sendo o momento em que o letramento matemático deve ser favorecido, dessa forma, é importante que o professor priorize o princípio fundamental da contagem e o raciocínio dedutivo-intuitivo, deixando conceitos pré-estabelecidos como Permutações, Arranjos e Combinações para o Ensino Médio. Morgado e Carvalho (2015) reforçam essa ideia quando recomendam "Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas.".

Sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 65) recomendam, em especial no terceiro ciclo, atividades em que os estudantes do ensino fundamental possam:

> resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.

Para apresentar os conceitos que serão utilizados na atividade proposta foram utilizadas definições e exemplos do livro “Matemática Discreta” de Morgado e Carvalho (2015) da coleção PROFMAT.

5.1.1 O Princípio Fundamental da Contagem

Definição 1. O princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo) diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$.

Exemplo 1. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução. O algarismo da centena pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O algarismo da dezena pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao algarismo da centena porém pode ser 0. O algarismo da unidade pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual ao algarismo da centena nem da dezena. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

O autor ainda discute algumas estratégias que devem ser observadas para resolver problemas de Combinatória:

1. *Postura.* Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problemas e ver que decisões devemos tomar. No Exemplo 1, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria escrever o número de três dígitos.

2. *Divisão.* Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, no Exemplo 1, formar um número de três dígitos foi dividido em escolher cada um dos três dígitos.

   Ainda no caso do Exemplo 1, algumas pessoas conseguem, por erros de estratégia, tornar complicadas as coisas mais simples.

   Começando a escolha dos algarismos pela unidade, há 10 modos de escolhê-lo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo da dezena, pois não podemos repetir o algarismo que já foi utilizado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o algarismo da centena? A resposta é "depende". Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o algarismo da centena, pois não poderemos utilizar o 0 nem os algarismos utilizados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito.

   Um passo importante na estratégia para resolver problemas de Combinatória é:

3. *Não adiar dificuldades.* Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Exemplo 1, a escolha do primeiro dígito era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro dígito não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

Exemplo 2. Quantos são os casos possíveis, no lançamento de cinco dados? Para cada dado temos resultados possíveis, portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7.776$ resultados possíveis.

5.1.2 Princípio Aditivo da Contagem

Segundo Mota (2017, p. 30):

Definição 2. Denotaremos $|X|$ com sendo o número de elementos no conjunto X. Sejam A e B dois eventos distintos, o princípio aditivo no diz que no caso de A e B serem disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Esse conceito também pode ser generalizado para mais de dois eventos, logo dados os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, todos disjuntos entre si e com $|A_i| = a_i$, temos que $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Exemplo 3. Dentre os 7.776 casos possíveis para o lançamento de cinco dados visto no Exemplo 2, em quantos conseguimos formar uma sequência de cinco números?

Solução No exemplo podemos formar uma sequência com cinco dados de duas maneiras: com dados numerados de 1 a 5 ou dados numerados de 2 a 6.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que a escolha do resultado de cada dado é uma decisão a ser tomada. Portanto, para formarmos uma sequência com os números 1, 2, 3, 4 e 5 temos cinco opções para o primeiro dado, quatro opções para o segundo dado, três opções para o terceiro dado, duas opções para o quarto dado e uma opção para o quinto dado e assim temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ casos.

De forma análoga, podemos encontrar também 120 casos relativos a sequência formada com os números de 2 a 6.

Sendo assim, pelo Princípio Aditivo da Contagem temos que em 120 + 120 = 240 casos conseguimos formar alguma sequência com cinco números.

5.2 Probabilidade

No que diz respeito ao estudo de Probabilidade os PCNs (BRASIL, 1998, p. 52) nos diz que:

> a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis).

Por outro lado, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 268) elenca Probabilidade e Estatística como uma das cinco unidades temáticas que orientam as habilidades que devem ser desenvolvidas no Ensino Fundamental.

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos

> com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2018, p. 274)

5.2.1 Experimento aleatório

Definição 3. Experimentos aleatórios são aquele que quando repetidos sob as mesmas condições geram resultados que não podem ser previstos. Apesar disso, na maioria dos casos, podemos estimar quais são os resultados possíveis.

Exemplo 3. São exemplos de experimentos aleatórios.

1. Lançar uma moeda e observar qual face cairá voltada para cima.
2. Lançar um dado de 6 faces e observar qual face cairá voltada para cima.
3. Sortear uma bola numerada dentro de uma caixa e observar qual o número obtido.

5.2.2 Espaço amostral

Sobre o Espaço amostral e o cálculo da probabilidade de um evento, a BNCC destaca a importância de que seja uma ideia trabalhada desde cedo.

> os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL, 2018, p. 528)

Definição 4. Chamaremos de *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Representaremos o espaço amostral por S e só vamos considerar aqui o caso de S ser finito ou infinito enumerável. Os subconjuntos de S serão chamados de *eventos*. Diremos que um evento ocorre quando o resultado do experimento pertence ao evento.

Exemplo 5. Lança-se um dado e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e há 64 eventos. Alguns desses eventos são: $\varnothing$, que não ocorre nunca; S, que ocorre sempre; $A = \{2,4,6\}$, que ocorre se, e somente se, o resultado do lançamento for par. Se o resultado do lançamento for 6, ocorrem os eventos $\{6\},\{5,6\},\{2,4,6\}$, etc.

5.2.3 Cálculo da probabilidade de um evento

Associaremos a cada evento um número, que chamaremos de *probabilidade do evento* e que traduzirá nossa confiança na capacidade do evento ocorrer.

Definição 5. Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número P(A) de forma que:

(i) Para todo evento A, $0 \leq$ P(A) ≤ 1;

(ii) P(S) = 1;

(iii) Se A e B são eventos *mutuamente excludentes*, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente (isto é, A ∩ B = ∅) então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo 6. Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é S = cara, coroa e há 4 eventos: ∅, A = $\{cara\}$, B = $\{coroa\}$, S. Uma probabilidade que pode ser definida é

$$P(\varnothing) = 0, \ \ P(A) = P(\{cara\}) = 0{,}5, \ \ P(B) = P(\{coroa\}) = 0{,}5, \ \ P(S) = 1.$$

No Exemplo 4, as três condições são facilmente verificadas.

(i) P(A) = P(B) = 0,5 e $0 \leq 0{,}5 \leq 1$;

(ii) P(S) = 1;

(iii) Se A e B são eventos *mutuamente excludentes* pois o lançamento de uma moeda não pode resultar em cara e coroa simultaneamente, logo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1 = P(S) = P(\{cara, coroa\}).$$

Os modelos probabilísticos que usamos mais frequentemente são exatamente os apresentados no Exemplo 4. É um modelo **equiprobabilístico**. Se temos n elementos no espaço amostral e queremos que todos os eventos unitários tenham a mesma probabilidade, devemos atribuir a cada evento unitário a probabilidade $\frac{1}{n}$. Não poderia ser de outra forma pois se S = $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = k$, temos, por (iii),

$$\begin{aligned} 1 &= P(S) = P(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = P(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}) \\ &= P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) \\ &= \mathrm{k} + \mathrm{k} + \cdots + \mathrm{k} \\ 1 &= \mathrm{n} \cdot \mathrm{k} \end{aligned}$$

Assim temos que $k = \frac{1}{n}$.

Analogamente, é fácil ver que, nesse modelo, se um evento X é formado por j elementos, então $P(X) = \frac{j}{n}$. Ou seja, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis.

Outro modelo é o modelo frequencial. Se repetimos a experiência n vezes e o evento A ocorreu em j dessas experiências, adotamos para P(A) a frequência relativa do evento A, isto é, o número de vezes que o evento A ocorreu dividido pelo número total de repetições da experiência, ou seja, $P(A) = \frac{j}{n}$.

Exemplo 7.[1] No jogo de dados Yahtzee a jogada de maior valor é aquela em que o jogador consegue obter 5 dados marcando o mesmo número. Qual a probabilidade disso acontecer em uma rodada em que o jogador lançou os cinco dados simultaneamente?

Para contar os casos possíveis vamos retomar o Exemplo 2 e considerar todos os resultados possíveis para o lançamento de cinco dados. Portanto temos $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$ resultados possíveis.

Para os casos favoráveis, basta pensarmos que temos um caso com os cinco resultados iguais para cada um dos seis resultados possíveis. Portanto, seis casos favoráveis.

Temos assim que a probabilidade de obtermos 5 dados marcando o mesmo número em um lançamento é de $p = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296} \approx 0{,}077\%$.

[1] Exemplo retirado de (SOARES, 2021, p. 54)

CAPÍTULO

6

PROPOSTA DE ATIVIDADE

Essa atividade é recomendada para os últimos anos do ensino fundamental pois é quando a BNCC (BRASIL, 2018) começa a indicar o estudo de probabilidade como algo menos conceitual. Para esta etapa do ensino fundamental, as habilidades a serem desenvolvidas são:

No 6º ano: Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. **(EF06MA30)**

No 7º ano: Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências. **(EF07MA34)**

No 8º ano: Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1. **(EF08MA22)**

No 9º ano: Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. **(EF09MA20)**

A BNCC (BRASIL, 2018) também recomenda, para todo o Ensino Fundamental, o desenvolvimento da competência "Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados)".

Como o Princípio Fundamental da Contagem e o cálculo de probabilidades são aprofundados no 4º ciclo do Ensino Fundamental, estima-se que haverá um melhor aproveitamento nessas turmas, porém o trabalho com as séries anteriores também pode ser realizado, justamente para promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 136) complementam:

> A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório.

6.1 Orientações para a aplicação

6.1.1 Primeira etapa

Para realizar a atividade, é importante que os estudantes estejam familiarizados com as regras do jogo então a parte inicial do trabalho deve ter como objetivo essa aproximação.

A primeira etapa da atividade é sugerida para ser realizada em duas aulas, preferencialmente seguidas.

Os alunos podem ser introduzidos ao Yahtzee de forma simplificada através do "Jogo do um". No "Jogo do um" são rolados cinco dados, cada jogador faz até três lançamentos (jogando os cinco dados no primeiro lançamento e os dados que escolher nos lançamentos seguintes) e vence aquele que conseguir mais dados marcando um mesmo número.

O "Jogo do um" é interessante para introduzir os alunos ao Yahtzee pois ele simplifica o número de jogadas, saindo de treze para uma, mas não altera a mecânica do jogo.

Após esse primeiro contato através do "Jogo do um", que pode ser realizado em parte da primeira aula, o professor introduz as outras possibilidades de jogada e o restante das regras no segundo momento da primeira aula. Didaticamente pode ser interessante que o professor jogue uma partida sozinho (ou com algum aluno que já domine as regras) para que a turma entenda melhor a dinâmica do jogo. Caso o professor tenha os recursos necessários, a apresentação do Yahtzee pode ser feita de maneira digital, o site <https://pt.y8.com/games/yatzy_yam_s_>[1] disponibiliza o jogo de forma gratuita.

Na segunda aula, depois de o professor mostrar as regras e apresentar o jogo, é hora dos alunos experimentarem o Yahtzee. É importante lembrar que o número de jogadores em cada partida influencia no tempo necessário para a realização da mesma, então o professor pode separar os alunos em duplas ou trios de maneira que todos os alunos possam realizar ao menos uma partida. Nesse momento é interessante que o professor oriente os alunos em relação as regras mas que intervenha pouco nas estratégias adotadas pelos alunos deixando-os experienciar o jogo de maneira intuitiva e lúdica.

[1] Acesso em: 19 de fev. de 2023.

6.1.2 Segunda etapa

O segundo momento da atividade também é sugerido para duas aulas. Nessa etapa iremos associar algumas situações do Yahtzee ao cálculo da probabilidade de determinados eventos acontecerem, essa análise é importante para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e auxiliará os alunos na tomada de decisão em alguns momentos do jogo.

Como as etapas são sugeridas para serem realizadas em dias diferentes, pode ser interessante iniciar a segunda etapa recordando as regras do jogo ou até permitindo que os alunos joguem uma partida em duplas ou trios. Em seguida, o professor pode, por exemplo, propor à turma qual seria a chance de acontecer o sorteio de um Yahtzee logo na primeira jogada para que os alunos comecem a associar o jogo à matéria em si.

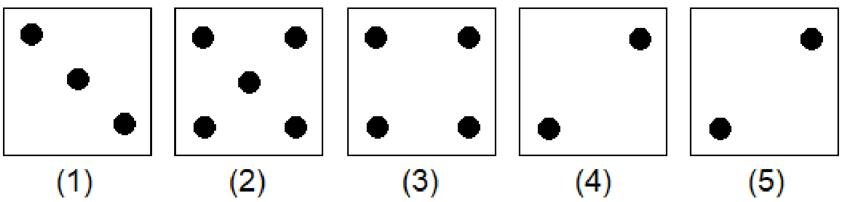
Após esse momento, o professor pode propor, sem maiores explicações teóricas, que os alunos analisem algumas situações que podem acontecer no jogo e que estimem qual seriam as melhores decisões a serem tomadas ou avaliem as chances de alguns eventos ocorrerem. As situações estão descritas a seguir. Nesta parte da atividade, pode ser recomendado o uso de calculadora por parte dos alunos e é fundamental que o professor solicite que os alunos registrem as respostas obtidas.

6.2 Situações-Problema

6.2.1 Situação 1

Após o segundo lançamento, o jogador se depara com a situação a seguir.

Figura 7 – Configuração dos dados apresentada na situação 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere que o jogador optou por relançar somente o dado indicado por (5).

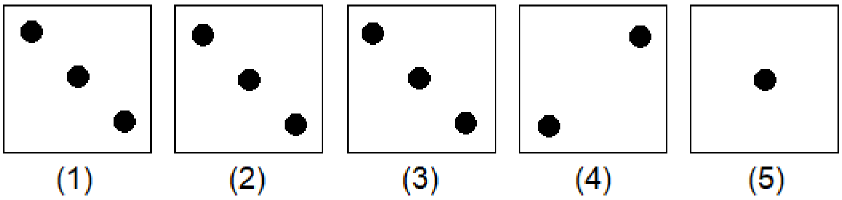
(a) Qual jogada tem mais chance de acontecer: uma sequência alta ou uma sequência baixa?

(b) Após o lançamento do dado, caso o jogador não obtenha uma das sequências, qual o maior número de pontos que ele pode marcar na rodada? Justifique.

6.2.2 Situação 2

Após dois lançamentos, o jogador obteve o seguinte resultado.

Figura 8 – Configuração dos dados apresentada na situação 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como já obteve uma trinca, o jogador optou por relançar os dados indicados por (4) e (5). Sendo assim, quais são as chances de o jogador obter como resultado final:

(a) Uma trinca;

(b) Uma quadra;

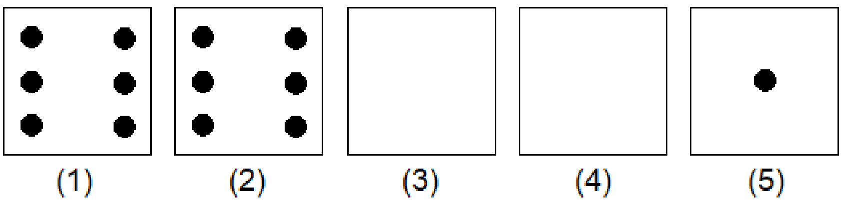
(c) Um Full House;

(d) Um Yahtzee.

6.2.3 Situação 3

Considerando que o jogador pode fazer somente mais uma jogada, observe a situação a seguir:

Figura 9 – Configuração dos dados apresentada na situação 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa maneira, o jogador pensou em relançar os dados (3) e (4), qual seria a probabilidade de obtermos:

(a) Uma trinca de ums;

(b) Um Full House;

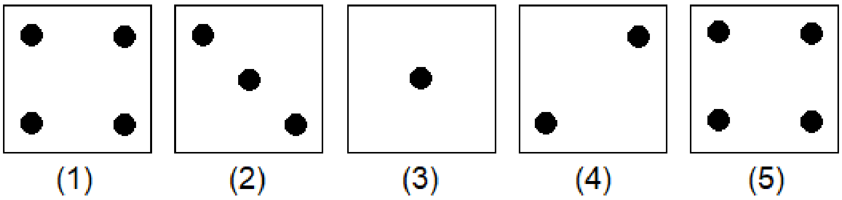
(c) Uma trinca de seis;

(d) Uma quadra.

6.2.4 Situação 4

Ao lançar pela segunda, das três vezes, o jogador se deparou com a seguinte situação dos dados:

Figura 10 – Configuração dos dados apresentada na situação 4



Fonte: Elaborada pelo autor.

E perguntou-se, qual a melhor jogada? Tentar uma sequência menor, jogando apenas o dado (1), tentando um 5 ou tentar uma trinca, recolhendo dados (2), (3) e (4) e tentando pelo menos um quatro? [2]

6.3 Comentários e possíveis resoluções

6.3.1 Situação 1

No item a, espera-se que os alunos percebam que uma das sequências será formado no caso do dado cair com as faces 1 ou 6 voltada para cima. Portanto, caso nenhum dos grupos relacione a ideia da fração $\frac{2}{6}$, o professor pode mostrar que temos 2 casos favoráveis em um total de 6 possibilidades.

No item b, espera-se que os alunos testem as opções possíveis mas percebam que a maior pontuação virá quando o dado cair com a face 5 voltada para cima e a jogada escolhida seja a aleatória.

Nesse ponto, vale comentar que ás vezes escolher uma jogada de menos pontos pode ser uma estratégia a se adotar visando utilizar o aleatório mais pra frente no jogo, em situação mais favorável.

[2] Inspirado em um problema citado no artigo de Aguilar *et al.* (2014)

6.3.2 Situação 2

A situação 2 foi pensada para discutirmos a ideia de espaço amostral. Nesse caso, o número total de possibilidades de resultado saltam de 6 para 36 devido ao fato de que analisaremos o lançamento de dois dados ao invés de um.

Sendo assim, podemos representar graficamente as possibilidades de resultado para facilitar a compreensão.

Figura 11 – Espaço amostral do lançamento de dois dados

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023

No item a, talvez o mais desafiador deles, os alunos devem perceber que para ocorrer uma trinca, nenhum dos dados pode cair com a face 3 voltada para cima e, além disso, devem ser necessariamente diferentes entre si. Das 36 possibilidades totais, em 20 casos temos as duas condições satisfeitas condições satisfeitas.

Figura 12 – Casos favoráveis para obtenção de uma trinca

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

No item b, para obtermos uma quadra um dos dados devem cair com a face 3 voltadas para cima, portanto isso ocorrerá em 10 dos 36 casos. Nesse item, vale lembrar, é importante que o professor ressalte que a ordem dos dados será relevante. Temos 5 casos favoráveis onde que o dado (4) cai com a face 3 voltada para cima e 5 casos favoráveis onde o dado (5) cai com a face 3 voltada para cima.

Figura 13 – Casos favoráveis para obtenção de uma quadra

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

No item c, um Full House será obtido caso os dois dados tenham resultados iguais porém diferentes de 3, o que ocorre em 5 dos 36 casos possíveis.

Figura 14 – Casos favoráveis para obtenção de um Full House

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

No item d, temos um Yahtzee em 1 dos 36 casos, que é aquele em que os dois dados caem com a face 3 voltada para cima.

Figura 15 – Casos favoráveis para obtenção de um Yahtzee

D_2 / D_1	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

Ao fim da discussão dos 4 itens, o professor ainda pode ir mais afundo e fazer questionamentos como "Qual das jogadas é a mais provável de acontecer?"ou "Existe mais alguma possibilidade de resultado para essa jogada?", sendo essa última uma forma de mostrar que a soma total das probabilidades é igual a 1.

6.3.3 Situação 3

Aqui temos mais uma vez uma situação em que o espaço amostral diz respeito aos resultados de dois dados. Nesse caso, vamos combinar possibilidades de jogadas em que os resultados são favoráveis com dois tipos de faces, 1 e 6.

No item a, a trinca de ums só será possível se os dois dados caírem com a face 1 voltada para cima, o que acontece em 1 dos 36 casos possíveis.

Figura 16 – Casos favoráveis para obtenção de uma trinca de ums

D_2 / D_1	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

No item b, espera-se que os alunos observem que duas maneiras de full house são possíveis. Nesse caso obtemos um Full House em 3 situações das 36 possíveis. Quando os resultados do lançamento são (6,1), (1,6) e (1,1). Em algumas turmas vale comentar da relação dos princípios aditivo e multiplicativo com os conectores lógicos "ou"e "e".

Figura 17 – Casos favoráveis para obtenção de um Full House

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

No item c, de forma geral, temos 10 possibilidades de resultado favorável para formar uma trinca de seis. Aqui cabe observar que os resultados (6,1) e (1,6) satisfazem tanto a condição para ser uma trinca de seis como para um Full House, o que deixa margem para abordar o tema da intersecção entre conjuntos.

Figura 18 – Casos favoráveis para obtenção de uma trinca de seis

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

No item d, apenas 1 dos 36 casos é favorável, que é quando os dois dados caem com a face 6 voltada pra cima.

Figura 19 – Casos favoráveis para obtenção de uma quadra de seis

D_2 / D_1	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: <https://pt-static.z-dn.net/files/d41/cbf4225b191691eb480801cd2527637a.jpg>, acesso em: 30 de julho de 2023, adaptado pelo autor.

Ao fim da discussão dos 4 itens, o professor pode repetir as perguntas feitas ao fim da análise da Situação 2, "Qual das jogadas é a mais provável de acontecer?"ou "Existe mais alguma possibilidade de resultado para essa jogada?", agora a expectativa é que as respostas sejam diferentes das obtidas na situação anterior e cabe a análise do que fazer caso os resultados obtidos não sejam um dos 4 citados nos itens.

6.3.4 Situação 4

Para responder ao questionamento feito é preciso analisar os dois resultados e depois compará-los. A primeira parte é mais tranquila, em 1 dos 6 casos o resultado é favorável, o que pode ser representado pela fração $\frac{1}{6}$. A segunda parte exige uma análise um pouco mais aprofundada. Aqui precisamos que pelo menos um dos dados caia com a face 4 voltada para cima e aqui cabe mostrar aos alunos que podemos contar os casos em que isso acontece ou podemos mostrar aos alunos em quantos casos isso não acontece e subtrair do total.

Temos 75 casos em que exatamente um dado cai com a face 4 voltada para cima, 15 casos em que exatamente dois dados caem com a face 4 voltada para cima e 1 caso em que os três dados caem com a face 4 voltada para cima, totalizando 91 dos 216 possíveis.

A outra maneira de se resolver esse problema é contando o número de casos em que não temos nenhuma face igual a 4 e depois subtraímos do total. Sendo assim, são 125 casos em que não temos nenhuma face igual a 4. E, portanto, temos 216 - 125 = 91 casos em que pelo menos uma face igual a 4 aparece.

Portanto, ao recolhermos os dados (2), (3) e (4), temos que a probabilidade de obtermos pelo menos um 4 é representada pela fração $\frac{91}{216}$. Aqui é importante deixar os alunos livres para comparar as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{91}{216}$ e verificar qual delas é maior.

Em tempo, vale observar que também podemos obter um Full House dentro do segundo questionamento, o que ocorre se um dos dados cair com a face 4 voltada para cima e os outros dois tiverem o mesmo resultado (o que ocorre em 15 casos) ou se os três dados tiverem o mesmo resultado, desde que diferentes de 4, o que ocorre em 5 casos, temos então um total de 20 possibilidades de obter um Full House.

CAPÍTULO

7

RELATO DE EXPERIÊNCIA

O presente relato foi feito com base na aplicação do jogo Yahtzee em quatro turmas do 6º ao 9º ano de uma escola privada da cidade de São Paulo. Pelo fato da aplicação da atividade ter se dado em início de ano letivo, portanto sem intenções de tratar sobre algum conteúdo em específico, seu uso ficou mais voltado para uma atividade lúdica. Ainda assim, foi possível tirarmos algumas conclusões.

7.1 Dia 1

Como visto no capítulo 2, Macedo, Petty e Passos (2000) sugerem quatro etapas para o trabalho com jogos. De acordo com a recomendação dos autores, iniciamos dividindo as turmas em duplas e/ou trios e propondo o "Jogo do um".

Conforme proposto no Capítulo 6, no primeiro momento, o "Jogo do um" foi introduzido aos alunos através de explicações na lousa. Nesse formato simplificado do Yahtzee, os integrantes dos grupos disputaram entre si para tentar conseguir a maior quantidade de dados com o número um voltados para cima. O objetivo dessa etapa era que os alunos aprendessem a mecânica do jogo, onde é permitido rolar os dados até três vezes sendo que na segunda e na terceira jogada, o jogador pode optar por lançar somente os dados cujo resultado queira modificar.

Após perceber que os alunos dominavam a mecânica do jogo, introduzi as outras jogadas numéricas do Yahtzee. Dessa forma, os alunos deveriam tentar obter o máximo possível de dados com o número um, depois com o número dois e assim sucessivamente.

Ao fim da primeira partida nesse formato informei que para a contagem da pontuação os jogadores deveriam somar o valor das faces do número referente a jogada, por exemplo, um jogador que conseguiu acertar três dados na jogada referente ao número quatro, marcava 4+4+4 = 12 pontos. Em todas as turmas, tal informação causou surpresa, pois houve a percepção de a pontuação era com base no número de dados obtidos de cada face, por exemplo, um jogador que conseguiu acertar três dados na jogada referente ao número quatro marcaria três pontos.

Até esse momento, havia deixado os alunos livres para anotar a pontuação como achassem adequado porém percebi que muitos grupos registravam as pontuações de maneira confusa e muitas vezes desorganizada. Foi então que foi introduzida a tabela do Yahtzee, com os devidos ajustes referentes às jogadas.

Após a introdução da tabela e das jogadas numéricas, sugeri também aos alunos que, a partir de agora, eles poderiam escolher em qual número pontuariam, não necessariamente em ordem. Nesse momento era esperado que começassem a desenvolver estratégias para obter uma maior quantidade de pontos, o que de fato aconteceu.

Alguns alunos passaram a focar em obter melhores resultados nos números 5 e 6, pois perceberam que isso lhes renderia uma maior quantidade de pontos, o que logo passou a ser reproduzido pelos demais colegas. “Se você escolher marcar dois pontos no 1 agora, você pode deixar o 5 livre e tentar obter mais pontos em outra rodada”, disse uma aluna do 8º ano à outra. Após algumas partidas nesse formato, foi a hora de discutir sobre o que havíamos visto até então.

Discutimos sobre a organização em formato de tabela e no 6º e no 7º ano ouvi comentários dizendo que facilitou o entendimento de quem não estava anotando a pontuação. Para eles, quando a forma de anotar era livre, somente quem estava anotando entendia como os dados estavam organizados. Nessas mesmas turmas, tiveram comentários a respeito da estratégia de focar em obter mais resultados positivos nos números maiores. Alguns jogadores perceberam que, após todos adotarem a mesma estratégia, os outros números passaram a decidir as partidas.

Em todas as turmas, foi possível chegar nesse ponto até o fim do primeiro dia. Até aqui foi possível perceber que a maioria dos alunos estavam engajados em buscar estratégias e apresentavam uma atitude positiva diante do jogo. O objetivo de apresentar o Yahtzee e ensiná-los a jogar foi atingido.

7.2 Dia 2

No segundo dia, iniciamos retomando o que foi visto no primeiro dia. Deixei os alunos jogarem uma partida para que se lembrassem da mecânica do jogo e também das regras e estratégias que vimos anteriormente. Foi curioso ver como os estudantes já haviam se apropriado da linguagem do jogo e como discutiam a respeito.

Em seguida, introduzi cinco novas jogadas. Foram elas: a Sequência Maior, a Sequência Menor, Full House, Aleatório e Yahtzee. A descrição de cada jogada encontra-se no Capítulo 4.

Com essas novas jogadas, somadas as anteriores, foi necessário que os jogadores criassem novas estratégias. Um fator que passou a ser bastante discutido, foi qual das jogadas valeria a pena zerar, em caso de um resultado desfavorável, pensando em arriscar obter maior pontuação em jogadas futuras. “Vale mais a pena arriscar fazer uma das sequências ou uma boa pontuação nas jogadas numéricas?", "E se a estratégia de obter uma das sequências der errado? Onde vale a pena zerar a pontuação?" foram alguns dos questionamentos que surgiram e foram debatidos no 8º ano.

Nesse momento, conforme a atividade proposta no Capítulo 6, seria a hora de problematizar a respeito das probabilidades envolvidas e seus respectivos cálculos. Como a atividade foi aplicada em um contexto de início de ano letivo, uma discussão mais aprofundada a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos teve de ficar para um outro momento, assim como a avaliação referente ao que seria trabalhado.

Porém um fato interessante surgiu na turma do 9º ano, que já havia estudado sobre Análise Combinatória e Probabilidade de forma introdutória no ano anterior, quando apareceu o seguinte comentário: "Já consegui 2, 3, 4 e 5, se eu jogar o último dado, tenho duas chances em seis de conseguir uma das sequências". A partir dessa fala, pude lembrar que por serem dois casos favoráveis (1 ou 6) em seis resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5 ou 6), podemos dizer que a probabilidade do resultado do lançamento daquele último dado tinha $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33,33\%$ de chance de formar uma das sequências. Também comentei que se estivéssemos falando sobre o lançamento de dois dados, o número de resultados possíveis subiria para $6 \times 6 = 36$ e com isso teríamos um conjunto maior de possibilidades para analisar.

Assim foi possível revisar a associação do cálculo da probabilidade de um evento a uma fração, como encontrar a porcentagem relativa a chance daquele evento dar certo e comentar a respeito do espaço amostral, o que revelou o potencial da atividade para discutir tais conteúdos.

Outra coisa importante de observar foi que na turma do 7º ano experimentei aplicar o jogo de forma online onde os integrantes de um mesmo grupo disputavam partidas dividindo um computador.

Alguns desafios foram encontrados nesse formato. O primeiro fator foi que o uso do computador gerou maior dispersão entre os alunos. Outra dificuldade encontrada, diz respeito ao excesso de propagandas veiculadas durante o jogo, o que, inclusive, talvez tenha contribuído para a perda do foco no decorrer da atividade. Essas impressões corroboram com Oliveira (2014) que, em seu trabalho, observa algumas desvantagens do uso da internet no ambiente escolar, como a facilidade em gerar distrações e a exposição ao excesso de informações, que muitas vezes são consumidas de forma superficial. Por outro lado, a autora ressalta a importância do uso da internet em sala de aula como uma ferramenta que pode ser utilizada para o desenvolvimento de diversas habilidades. Isso nos mostra que o professor deve tomar bastante cuidado com o direcionamento que dará e com o acompanhamento na execução da atividade, de modo a tentar contornar as dificuldades encontradas.

Quanto à aplicação do jogo na forma "analógica" ou "concreta", ainda foi possível observar que a espera pela manipulação dos dados e a atenção com o registro das pontuações, deixavam os alunos mais envolvidos na atividade. Outra vantagem vista na aplicação "concreta", é a possibilidade do aprendizado gradual do funcionamento do jogo e seus elementos: regras, planilha de contagem de pontos, estratégias e etc.

Por fim, foi interessante notar o envolvimento dos estudantes com a atividade. O jogo despertou interesses e curiosidades a respeito da matemática e fez com que os estudantes aprendessem em grupo, ao discutirem conceitos, trabalhassem o cálculo mental e a comparação entre somas e também pudessem observar a importância do uso de tabelas na organização dos dados.

CAPÍTULO

8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como pudemos ver ao longo deste trabalho, o uso de jogos nas aulas de Matemática envolve um conjunto de ações. Essas ações podem vir do professor, que planeja, propõe e conduz a atividade envolvendo jogos mas também podem vir do aluno, que se engaja na atividade e, guiado pelo professor, trabalha em prol do desenvolvimento do próprio aprendizado. Dessa maneira, foi possível contemplar o objetivo geral proposto para o trabalho, evidenciando o uso de jogos no ensino da Matemática.

No desenvolvimento do presente estudo, foi feito um levantamento teórico acerca do uso de jogos no ensino e seu potencial para gerar situações-problema que desafiem os alunos a mobilizar conhecimentos para buscar a resolução. Em seguida foi proposta uma atividade que utiliza o jogo Yahtzee para gerar tais situações-problema com o objetivo de discutir conceitos ligados a Análise Combinatória e Probabilidade. Por fim, avaliamos alguns resultados obtidos a partir de uma aplicação da atividade proposta.

Tendo em vista os objetivos específicos propostos, foi possível observar algumas habilidades desenvolvidas a partir do uso de jogos.

Confirmando o que foi discutido pelos autores apresentados no capítulo 2, a aplicação da atividade deixou os estudantes motivados, mesmo aqueles com menor aptidão para a matéria. A medida que foram se apropriando da linguagem e das regras do jogo, os alunos passaram a utilizar conceitos de aritmética e probabilidade para justificar suas escolhas dentro das situações-problemas apresentadas, favorecendo o desenvolvimento do letramento matemático. Além das habilidades descritas, também foi possível observar o papel socializador do jogo, na medida que os alunos passaram a compartilhar conhecimentos e estratégias.

A partir da experiência inicial com a atividade proposta no capítulo 6, foi possível notar que a introdução do jogo com um número menor de regras se demonstrou uma estratégia acertada pois permitiu que os estudantes fossem se apropriando da mecânica do jogo, a medida que a preocupação com o entendimento das jogadas e com as estratégias passou a ser gradual.

Finalmente, enquanto professor do Ensino Fundamental, esse trabalho simbolizou um enriquecimento da minha própria prática em sala de aula, servindo de estímulo para o ampliação do conhecimento sobre jogos e diferentes metodologias para o ensino de Matemática. Foi possível ainda pensar nos diferentes aspectos relativos à sistematização de uma atividade, buscando contemplar a sugestão dos documentos oficiais (BNCC e PCNs) quanto a utilização de diferentes recursos de ensino.

REFERÊNCIAS

AGUILAR, A. C.; MUNHOZ, J. A.; JUNIOR, L. B.; GÓES, R. da C. Jogos no ensino da Matemática: um General e suas probabilidades. **Anais do II Seminário Estadual PIBID do Paraná**, p. 1426–1430, 2014. Citado na página 47.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: Por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Ed.). **Resolução de problemas: Teoria e Prática**. 2. ed. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021. cap. 2. Citado nas páginas 21, 22 e 23.

BARREIRA, C.; BOAVIDA, J.; ARAÚJO, N. Avaliação formativa: Novas formas de ensinar e aprender. **Revista Portuguesa de Pedagogia**, n. 40-3, p. p. 95–133, Dez. 2006. Disponível em: <https://impactum-journals.uc.pt/rppedagogia/article/view/1647-8614_40-3_4>. Citado na página 22.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. 6. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2007. Citado nas páginas 17, 18 e 20.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília, 2018. Citado nas páginas 17, 18, 19, 21, 37, 39, 40 e 43.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Citado nas páginas 17, 18, 21, 27, 37, 39 e 43.

BRENELLI, R. P. **O jogo como espaço para pensar: A construção de noções lógicas e aritméticas**. Campinas-SP: Papirus, 1996. Citado nas páginas 20 e 27.

CALDAS, F. d. S.; GRAÇA, V. V. d.; MARQUES, V. R. Múltiplos e divisores: uma experiência com o uso do jogo de trilhas. **Revista Exitus**, scielo, v. 10, 00 2020. ISSN 2237-9460. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2237-94602020000100279&nrm=iso>. Citado na página 19.

CARVALHO, C. V. de. Aprendizagem baseada em jogos-game-based learning. In: **II World Congress on Systems Engineering and Information Technology**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 176–181. Citado na página 26.

CARVALHO, V. H. R.; BRITO, J. A.; BITENCOURT, R. B.; AMORIM, D. G. Uma gamificação analógica para conteúdos teóricos inspirada em jogos do gênero Card Game (CG). **Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco**, v. 11, n. 24, p. 147–175, fev. 2021. Disponível em: <https://www.periodicos.univasf.edu.br/index.php/revasf/article/view/1386>. Citado na página 26.

CASEIRO, C. C. F.; GEBRAN, R. A. Avaliação formativa: Concepção, práticas e dificuldades. **Nuances: Estudos sobre Educação**, v. 15, n. 16, mar. 2010. Disponível em: <https://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view/181>. Citado na página 22.

ESQUIVEL, H. C. da R. **Gamificação no ensino da Matemática: Uma experiência no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica-RJ, 2017. Citado nas páginas 25, 26 e 27.

FAGUNDES, A. P. d. O. V.; GUIMARÃES, E. S. de F.; WEINSCHENCK, G. H.; VIDIGAL, S. M. P. Relato de experência-o uso de jogo no ensino de matemática: uma possibilidade. **Cadernos de Educação**, v. 20, n. 41, p. 145–163, 2021. Citado nas páginas 19 e 20.

FELIPPE, A. C.; MACEDO, S. d. S. Contribuições dos jogos matemáticos e modelagem matemática no ensino da matemática. **Research, Society and Development**, v. 11, n. 1, p. e41411124886, jan. 2022. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/24886>. Citado na página 19.

KROHL, D. R.; POTRIKUS, B. H. P.; ARAÚJO, K. F.; OLIVEIRA, L. D.; DUTRA, T. C. Aprendizagem baseada em jogos: Reflexões sobre o uso de jogos de tabuleiro durante período de isolamento social na educação matemática. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 11, n. 01, ago. 2022. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/1248>. Citado na página 19.

KUBO, O. M.; BOTOMÉ, S. P. Ensino-aprendizagem: uma interação entre dois processos comportamentais. **Interação em Psicologia**, v. 5, p. 180, 2001. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/psicologia/article/view/3321>. Citado na página 22.

LEITÃO, R. **Aprendizagem baseada em jogos: realidade aumentada no ensino de sólidos geométricos**. Tese (Doutorado) — Universidade Aberta, 2013. Citado na página 27.

LUDOPEDIA. 2013. <https://ludopedia.com.br/jogo/super-yam>. Acesso em: 2023-01-25. Citado na página 33.

LUNDGREN, A.; FELIX, Z. Plataforma sam: a gamificação e a colaboração em uma plataforma de aprendizagem para o ensino da matemática em crianças portadoras de síndrome de down. In: **Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE)**. [S.l.: s.n.], 2017. v. 28, n. 1, p. 625. Citado na página 26.

MACEDO, L. de; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. Citado nas páginas 17, 20, 21, 22, 24 e 55.

MACHADO, L. d. S.; MORAES, R. M. d.; NUNESI, F. d. L. d. S.; COSTA, R. M. E. M. d. Serious games baseados em realidade virtual para educação médica. **Revista brasileira de educação médica**, v. 35, n. 02, p. 254–262, 2011. Citado na página 26.

MARTARELLI, L.; SOUTO, B.; TAJIMA, U.; SILVA, F. da. **ALGORITMO DO JOGO BICOLORIDO NO GEOGEBRA**. 2020. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPTEM/iieptem/paper/view/1425/1089>. Citado na página 19.

MENEZES, S. B. D. Jogos matemáticos: Estímulo e aprendizagem. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 9, n. 16, p. 4–21, mar. 2020. Disponível em: <https://revistas.cesmac.edu.br/psicologia/article/view/1168>. Citado na página 19.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado na página 37.

MOTA, A. B. da. **Princípios de contagem e aplicação do princípio aditivo: O problema de contagem dos quadrados em uma quadrícula e o código QQ**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, 2017. Citado na página 38.

MUNIZ, C. A. Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. In: **Coletânea Tendencias em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. Citado na página 20.

OLIVEIRA, R. A. d. **Potencialidades e dificuldades no uso dos tablets como ferramenta didática: O estado da arte das pesquisas**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2014. Citado na página 57.

OLIVEIRA, S. A. O lúdico como motivação nas aulas de matemática. **Jornal Mundo Jovem**, v. 377, 2007. Citado na página 19.

PEREIRA, D. G.; DAVID, J. M. N. Os efeitos da gamificação no processo de ensino aprendizagem. **Lynx**, v. 2, 2022. Citado na página 25.

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. de la R. Resolução de problemas: Oportunidade de avaliação para aprendizagem. In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Ed.). **Resolução de problemas: Teoria e Prática**. 2. ed. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021. cap. 3. Citado na página 22.

PONTES, E. A. S.; SILVA, A. J. C. d.; NETO, A. A. d. C.; ALMEIDA, E. C. d.; SANTOS, M. A. B. d.; ARAÚJO, N. d. C. Verificação experimental de um produto educacional: um jogo matemático desenvolvido a partir da ideia intuitiva de uma progressão aritmética. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 9, n. 18, p. 114–122, maio 2020. Disponível em: <https://revistas.cesmac.edu.br/psicologia/article/view/1214>. Citado na página 19.

RAMOS, V. P. P.; MARQUES, J. J. P. Dos jogos educativos à gamificação. In: **Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2017. p. 319–323. Citado na página 25.

ROCHA, R. M. B. **Jogos sérios para reabilitação cognitiva**. Tese (Doutorado) — Universidade do Minho, 2015. Citado na página 26.

SELVA, K. R.; CAMARGO, M. O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento. **X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, 2009. Citado na página 21.

SILVA, A. Engajamento no aprendizado baseado em jogos digitais: estudo de caso com o jogo matemática fácil. In: **Congresso Regional sobre Tecnologias na Educação**. [S.l.: s.n.], 2016. v. 1. Citado na página 27.

SILVA, A. F. da; KODAMA, H. M. Y. Jogos no ensino da matemática. **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBa**, 2004. Citado na página 21.

SOARES, A. H. **Uso do jogo Bozó na sala de aula**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2021. Citado nas páginas 33, 34 e 42.

SOUZA, J. d. S.; SANTANA, J. B.; SANTOS, D. B. Ludicidade no pibid: uma análise sobre o uso de jogos como recurso didático para aprendizagem de matemática / ludicity in pibid: an analysis on the use of games as a teaching resource for learning mathematics. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 3, p. 23122–23133, Mar. 2021. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/25940>. Citado na página 19.

THEODÓRIO, D. P.; SILVA, A. P. da; SCARDOVELLI, T. A. Jogos sérios brasileiros para auxílio do diagnóstico e tratamento de TDAH: revisão integrativa. **INTERFACES DA EDUCAÇÃO**, v. 11, n. 32, p. 60–78, set. 2020. Disponível em: <https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces/article/view/4298>. Citado na página 26.

VILLAS-BOAS, B. M. d. F. Avaliação formativa e formação de professores: ainda um desafio. **Linhas Críticas**, scielo, v. 12, p. 75 – 90, 06 2006. ISSN 1981-0431. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1981-04312006000100006&nrm=iso>. Citado na página 22.

GLOSSÁRIO

BNCC Base Nacional Curricular Comum.

DGBL Aprendizagem Baseada em Jogos Digitais ou Digital Game-Based Learning.

GBL Aprendizagem Baseada em Jogos ou Game-Based Learning.

PCNs Parâmetros Curriculares Nacionais.

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

SG Jogo Sério ou Serious Game.

TDAH Transtorno do deficit de atenção e hiperatividade.

ICMC USP
SÃO CARLOS