CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

BRUNA RIBEIRO LACERDA

ENSINO DE FUNÇÃO AFIM COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE GEOGEBRA* EM TURMAS DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Belo Horizonte
2023

BRUNA RIBEIRO LACERDA

ENSINO DE FUNÇÃO AFIM COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE GEOGEBRA* EM TURMAS DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador:
Gilmer Jacinto Peres

Coorientação:
Fernanda Aparecida Ferreira

Banca Examinadora:
Dimas Felipe de Miranda
Pedro Henrique Pereira Daldegan

Belo Horizonte
2023

Lacerda, Bruna Ribeiro

L131e Ensino de função afim com o auxílio do software GeoGebra em turmas da 1ª série do ensino médio / Bruna Ribeiro Lacerda. – 2023.

84 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Gilmer Jacinto Peres.

Coorientadora: Fernanda Aparecida Ferreira.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Funções (Matemática) – Teses. 2. Tecnologia da informação – Teses. 3. Comunicação na tecnologia – Teses. 4. GeoGebra (Software) – Teses. 5. Aprendizagem cognitiva – Teses. 6. Multimídia interativa – Teses. I. Peres, Gilmer Jacinto. II. Ferreira, Fernanda Aparecida. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 512.5

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

BRUNA RIBEIRO LACERDA

ENSINO DE FUNÇÃO AFIM COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE GEOGEBRA* EM TURMAS DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 01 de setembro de 2023.

Bruna Ribeiro Lacerda

Bruna Ribeiro Lacerda
(Autora)

Gilmer Jacinto Peres
(Orientador)

Belo Horizonte
2023

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Juliana e Roberto, pelo amor e cuidado que sempre dedicaram a mim e por não medirem esforços para me ajudar a alcançar todos os meus objetivos e conquistas.

Ao meu marido e amigo Elcio, por estar sempre ao meu lado, por apoiar todas as minhas “loucuras”, por compreender minhas ausências e me incentivar na minha carreira acadêmica e profissional.

À minha família e amigos por sempre acreditarem e torcerem pelas minhas realizações. Em especial, à Marina por sempre me aconselhar nos momentos difíceis, à Rafaela por fazer de sua casa meu lar, tornando minhas noites e manhãs em Belo Horizonte mais descontraídas, permitindo o descanso que eu precisava para me concentrar em meus estudos e à Thais, que com toda sua dedicação e carinho, não me deixou desistir e contribuiu para a conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos Andréa e Pierre por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas e aprendizado, bem como me apoiarem e incentivarem nos momentos de frustações e desânimo.

À minha psicóloga, por sempre me ajudar a tomar decisões e a perceber o meu potencial.

A todos os professores que contribuíram com a minha formação acadêmica e profissional durante a minha vida.

Aos professores do PROFMAT, por contribuírem com minha formação e me tornarem uma professora melhor, em especial ao Pedro, cujas aulas e ensinamentos reacenderam meu amor pela docência.

Ao meu orientador Gilmer, e à minha coorientadora Fernanda. A experiência e o conhecimento de vocês, bem como todo o suporte dado, foram essenciais nessa trajetória.

E, finalmente, a todos os meus alunos, que me motivam a buscar ser uma professora cada vez melhor.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

O presente trabalho disserta sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na construção de sequências didáticas para o ensino de funções afim em turmas da 1ª série do Ensino Médio no Brasil, sob as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e da Lei do Novo Ensino Médio (13.415/2017). A princípio, fez-se um estudo do desenvolvimento histórico do conceito de função, na intenção de esclarecer a sua abrangência, e consequentemente as dificuldades apresentadas no seu processo de ensino-aprendizagem, bem como sua importância em aplicações de situações cotidianas. Em seguida, há uma breve apresentação das orientações de ensino da BNCC, competência 4, habilidade (EM13MAT501), no ensino de Matemática e suas tecnologias, bem como uma discussão sobre as potencialidades e dificuldades apresentadas na implantação das TIC na educação. Além disso, apresenta-se a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia (TCAM) e os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013) a serem observados no processo de construção de atividades apoiadas em recursos multimídia. O texto se debruça ainda sobre a análise de uma sequência didática, construída para este trabalho, que utiliza o *software GeoGebra*, aplicada na 1ª série do Ensino Médio, a qual conduziu às seguintes observações: o uso das TIC é bem-vindo no ensino da Matemática no Ensino Médio, mas que é preciso se fundamentar teoricamente no intuito de garantir os resultados almejados, isto é, percebe-se que, no percurso da sequência didática, podem ser necessárias adequações, o que demanda atenção e cuidado constantes do professor.

Palavras-chave: Funções Afim. Tecnologias da Informação e Comunicação. *GeoGebra*. Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia. Sequência Didática.

ABSTRACT

The present work discusses the use of Information and Communication Technologies (ICT) in the construction of didactic sequences for the teaching of linear functions in 1st year high school classes in Brazil, under the guidelines of the National Common Core (BNCC) and the New High School Law (13.415/2017). Initially, a study of the historical development of the function concept was carried out, intending to clarify its scope, and consequently the difficulties presented in its teaching-learning process, as well as its importance in applications of everyday situations. Then, there is a brief presentation of the BNCC teaching guidelines, competence 4, skill (EM13MAT501), in Mathematics teaching and its technologies, as well as a discussion about the potentials and difficulties presented in the implementation of ICT in education. We present, the Cognitive Theory of Multimedia Learning (CTML), and the principles proposed by Mayer (2009) apud Barros (2013) to be observed in the construction of activities supported by multimedia resources. The text also delves into the analysis of a didactic sequence, developed for this study, which uses the GeoGebra software, applied to the 1st year of High School, leading to the following observations:: the use of ICT is welcome in teaching mathematics in high school, but it is necessary to be theoretically grounded in order to guarantee the desired results, that is, it is noticed that, in the course of the didactic sequence, adjustments may be necessary, which requires constant attention and care from the teacher.

Keywords: Linear Functions. Information and Communication Technologies. GeoGebra. Cognitive Theory of Multimedia Learning. Didactic Sequence.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

ENA – Exame Nacional de Acesso

MU – Movimento Uniforme

MUV – Movimento Uniformemente Variado

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TCAM – Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia

TIC – Tecnologia da Informação e Comunicação

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Trajetória da autora

Moro e atuo como docente em Lagoa da Prata, uma cidade do interior de Minas Gerais, situada a aproximadamente duas horas e quarenta minutos de Belo Horizonte. A base econômica local se concentra em três setores industriais: farmacêutico, laticínios e produtos derivados da cana, além de atividades comerciais. Embora haja polos de ensino superior à distância na cidade, as instituições que oferecem cursos totalmente presenciais mais próximas estão a cerca de 50 minutos e são de natureza particular.

Em 2012, durante meu último ano no Ensino Médio, a situação era similar. Para dar continuidade à minha formação acadêmica, as alternativas eram optar por um curso técnico (sobretudo visando as indústrias citadas anteriormente), ingressar em uma universidade particular em cidades “vizinhas” de Lagoa da Prata ou mudar para cidades com instituições federais de ensino, como Belo Horizonte, sendo que os cursos considerados “válidos”, de maneira geral, eram Engenharia Civil, Medicina e Direito.

Durante minha formação escolar, especialmente no 9° ano do Ensino Fundamental II e ao longo do Ensino Médio, percebi crescer em mim uma paixão pelo ensino. Na escola particular onde estudei, tínhamos avaliações semanais, o que nos levou a criar grupos de estudo, principalmente em exatas. Comumente, eu era a responsável por esclarecer os tópicos para meus colegas. Ademais, sempre nutri profundo respeito e admiração por meus professores, observando o amor que tinham pela docência e o esforço constante na busca por métodos e ferramentas para potencializar nosso processo de aprendizado.

No último ano do Ensino Médio, ao refletir sobre qual graduação escolher, sempre me vinha à mente seguir licenciatura em algum campo das exatas. No entanto, a carreira docente era frequentemente estigmatizada, seja pelo baixo reconhecimento salarial, seja pelos desafios e desrespeito enfrentados por educadores. Adicionalmente, escutava frequentemente opiniões do tipo: "Se você é tão boa nas disciplinas, deveria optar por uma carreira 'melhor', como Engenharia Civil". Cedi a essas influências e iniciei minha jornada em Engenharia Civil numa universidade particular próxima à minha cidade, deslocando-me diariamente de ônibus para frequentar as aulas noturnas.

Ao começar o curso, iniciei também minha trajetória dando aulas particulares de Física, Química e Matemática para estudantes do Ensino Fundamental II e Médio. E no meu segundo ano da graduação em Engenharia Civil, apareceu uma oportunidade para lecionar como professora substituta no Ensino Médio em uma escola estadual. Essa vaga já estava disponível há meses sem ser ocupada. Assim, em 2014, dei início à minha trajetória como professora de Matemática.

Dessa forma, atuei como professora substituta naquela instituição durante alguns meses em 2014 e também em 2015. No início de 2016, recebi um convite para ensinar na escola particular onde havia estudado. Esse episódio me proporcionou o estímulo que precisava para reconhecer que desejava continuar minha carreira no campo da docência.

O meu conhecimento em Matemática se baseava no que havia aprendido durante a Educação Básica, em algumas disciplinas do curso de Engenharia Civil (nada orientado à docência, evidentemente) e por meio de estudos independentes. Assim, diante do desejo de solidificar minha carreira como docente de Matemática, percebi a importância de me capacitar formalmente. Contudo, com as aulas de Engenharia Civil à noite e um trabalho estável durante o dia, optei por um curso de Licenciatura em Matemática a distância, ofertado em um polo na minha cidade. Infelizmente, o curso deixou a desejar. O conteúdo era essencialmente o mesmo que já havia estudado no Ensino Médio, sem trazer novas perspectivas. Assim, o maior valor do diploma foi sua capacidade de me legitimar como licenciada em Matemática, abrindo portas para, por exemplo, concorrer a cargos públicos.

Diante disso, a inquietação em aperfeiçoar meus conhecimentos em Matemática e Educação ainda estava latente, e então me apresentaram o PROFMAT e, ao perceber que as inscrições estavam abertas, decidi prestar o ENA (Exame Nacional de Acesso), sendo que, até então, minha percepção sobre as instituições de ensino superior estava atrelada à ideia de alcançar um emprego. Até esse momento, via essas instituições simplesmente como uma ferramenta para ingressar no mercado de trabalho. Além disso, minha abordagem ao ensino era centrada em preparar os alunos para enfrentar o Enem e outros vestibulares.

Ao ingressar no PROFMAT pelo CEFET-MG, tive a oportunidade de entender os reais benefícios de uma educação superior. Primeiramente, no que se refere ao aprofundamento e à aprendizagem de conteúdos teóricos da Matemática. Adicionalmente, estive cercada por diversos colegas professores e me envolvi em discussões focadas na prática sobre diferentes metodologias e recursos que podem contribuir para o processo de ensino-aprendizagem.

Essa experiência me fez refletir e questionar sobre a realidade educacional da minha cidade e, consequentemente, sobre minha trajetória. Com frequência, observava que a prioridade era preparar o aluno para os vestibulares e para um mercado de trabalho. Indiscutivelmente, isso é importante. No entanto, muitas vezes o enfoque está voltado principalmente para os ganhos financeiros que o aluno pode alcançar, negligenciando as particularidades de cada estudante, e além disso, sem considerar que a educação também deve ser reconhecida por sua capacidade de formar cidadãos reflexivos, aptos a tomar decisões conscientes em sua vida cotidiana.

1.2 Motivação e Objetivo

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática se torna um grande desafio para os professores e estudantes brasileiros. Isso ocorre porque, em diversos momentos, os conceitos matemáticos são ensinados de forma pouco concreta, ou mesmo sem considerar a sua aplicação fora das escolas (ALVARENGA; BARBOSA; FERREIRA, 2014).

Diante disso, a eficiência no ensino dos conteúdos fica comprometida, principalmente nas escolas públicas, uma vez que pouco se explora de forma ampla as competências e habilidades a serem desenvolvidas na Educação Básica, seja em razão da infraestrutura escolar, da falta de ferramentas didáticas adequadas, ou mesmo da carência de investimentos e políticas públicas voltadas para o aperfeiçoamento do professor e para a implantação de novas metodologias e recursos (COSTA, 2013; SILVA; CAMPELO; BORGES, 2022).

Mais especificamente no ensino de função, com base nas pesquisas de autores, como Borba e Confrey (1996) e das experiências passadas e atuais da autora como docente, desde o ano de 2014, tanto nas escolas públicas quanto nas escolas privadas, foram observadas dificuldades, principalmente no que se refere à associação entre as suas representações analítica e gráfica.

Nesse sentido, o *software GeoGebra* se apresenta como uma ferramenta para potencializar o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo, pois além de ser um recurso acessível e permitir a realização e manipulação de construções gráficas de maneira fácil e rápida, ele proporciona a visualização simultânea da representação analítica e gráfica de uma função (BORBA; PENTEADO, 2007).

Diante da oportunidade do desenvolvimento dessa dissertação, duas questões vêm à tona. Sendo a primeira a inquietação sobre a inserção de recursos tecnológicos – como o *software GeoGebra* – no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, e a segunda ligada à dificuldade no processo ensino-aprendizagem de função observada nas experiências da autora como docente e no trabalho de diversos pesquisadores.

A partir dessas questões, esse trabalho se propõe ao desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino de função afim com o auxílio do *GeoGebra*, a qual será apoiada na TCAM e nos princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013).

Para o desenvolvimento das atividades, foram convidadas as turmas da 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Lagoa da Prata, Minas Gerais, as quais iriam participar das aulas no contraturno. No total, 15 alunos se interessaram e se voluntariaram para o projeto que permitiu uma análise dos dados obtidos com a aplicação dessa sequência didática, de forma a auxiliar na compreensão de quais contribuições o *GeoGebra* pode fazer no processo de ensino-aprendizagem da função afim na 1ª série do Ensino Médio.

1.3 Estrutura da dissertação

Esta pesquisa foi dividida em seis capítulos. No **Capítulo 2 - Função,** são apresentados o desenvolvimento histórico do conceito de função, suas aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento, e finalmente as dificuldades percebidas no seu processo de ensino-aprendizagem tanto sob relatos de professores, quanto da vivência da autora e de registros bibliográficos.

No **Capítulo 3 - Educação e Tecnologia,** incialmente discute-se o ensino de função sob a ótica da BNCC, em seguida trata-se sobre tecnologias digitais na educação, principalmente no ensino da Matemática, destacando suas potencialidades no processo de ensino-aprendizagem, bem como as dificuldades para sua inserção. Além disso, é feito um debate sobre a influência do isolamento da pandemia da Covid-19, em março de 2020, na utilização dessas ferramentas. Por fim, é apresentada a TCAM e os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013), os quais deverão ser observados no processo de construção de atividades apoiadas em recursos multimídia e que fundamentam a construção da Sequência Didática 2, a que se refere esse trabalho.

O **Capítulo 4** - **Metodologia** apresenta a Sequência Didática 1, proposta incialmente pela autora. Em seguida é descrito o processo de elaboração da Sequência Didática 2, composta por quatro atividades e fundamentada pela TCAM e pelos princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013).

No **Capítulo 5 - Análise dos Resultados Obtidos,** tem-se a análise dos resultados obtidos na aplicação da SD2, bem como a discussão sobre algumas contribuições observadas pela autora sobre o uso das TIC no ensino de Matemática.

Finalmente, no **Capítulo 6**, apresentam-se as percepções e considerações observadas a partir do desenvolvimento dessa pesquisa.

2 FUNÇÃO

Esse capítulo contém três seções que tratam sobre função: conceito, sua aplicação no cotidiano e as dificuldades apresentadas no seu processo de ensino-aprendizagem.

Na primeira seção, será apresentado o desenvolvimento histórico do conceito de função. Seu estudo se torna importante para que o professor se aprofunde um pouco mais nos diferentes aspectos relacionados à função e na reflexão sobre as diferentes formas que o assunto pode ser apresentado em sala de aula.

Uma possível abordagem do conteúdo se dá a partir do estudo das aplicações das funções no cotidiano, sendo que algumas delas estão apresentadas na segunda seção desse capítulo. Finalmente, na terceira seção, é realizada uma discussão de algumas dificuldades observadas por outros pesquisadores e pela autora no processo de ensino-aprendizagem de função.

2.1 Conceito de função

Nessa seção, será abordado o desenvolvimento histórico do conceito de função, o qual teve início a partir da necessidade de entender e estudar fenômenos do cotidiano, principalmente no contexto da Física, e foi sendo gradualmente formalizado até chegar na definição utilizada atualmente.

Salienta-se que o intuito é abordar aspectos sobre a construção do conceito de função que sirvam de ferramenta para uma compreensão mais profunda sobre ele e dê condições para uma análise crítica sobre as diferentes formas em que o conceito de função pode ser explorado em sala de aula.

Não parece existir um consenso entre os diversos autores a respeito da origem do conceito de função.

Nesse sentido:

> Alguns deles consideram que os babilônios já possuíam um “instinto de funcionalidade”. Pode-se encontrar este “instinto de funcionalidade”, que precede uma ideia mais geral de função, desde cerca de 2000 a.C., em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser tomadas como “funções tabuladas”, e que eram destinadas a um fim prático (ZUFFI, 2016, p. 11).

Por sua vez, Roque (2012) defende que apesar das tabelas babilônicas tratarem de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem esse número), há um componente fundamental para o desenvolvimento do conceito de função que não estava presente nesse momento: a variação, dado que uma função é expressa atualmente em termos do que chamamos de variável.

A contribuição da Física na utilização de uma representação simbólica de uma quantidade desconhecida, proposta por Viète (1540-1603) no século XVI e aprimorada no século XVII, desempenhou um papel essencial no desenvolvimento do conceito de variável. No entanto, é importante ressaltar que a formalização da noção de variável se deu somente no século XIX (ROQUE, 2012).

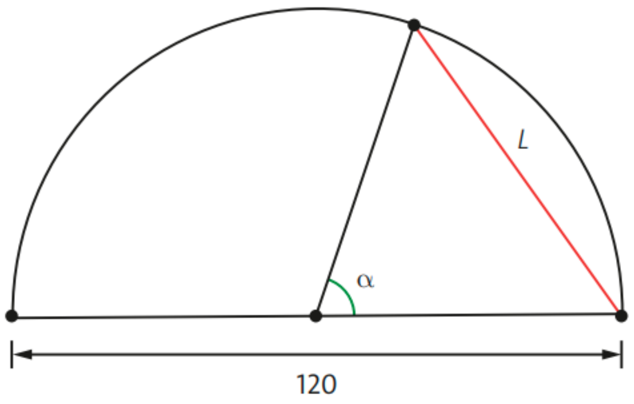
Embora essa adoção de simbolismo para representar uma quantidade desconhecida tenha sido um passo fundamental no desenvolvimento do conceito de função, é importante destacar uma diferença em relação à escrita de uma equação que precisa ser resolvida. A quantidade desconhecida possui um valor determinado obtido por meio da solução da equação correspondente.

Já nas expressões analíticas que representam uma função, podem existir duas ou mais incógnitas, que estão “indeterminadas”, isto é, não se acha apenas um valor para a quantidade desconhecida e sim uma infinidade de valores que “variam” de acordo com os valores de outra quantidade.

Para Dante (2016), o conceito de função já aparecia, de maneira intuitiva, na forma de tabela que relaciona os valores de duas grandezas variáveis desde a Antiguidade. Como exemplo, tem-se a Tabela de Cordas, que foi um instrumento fundamental para cálculos de astronomia e de navegação, elaborado por Cláudio Ptolomeu (90-168), cientista do século II que viveu em Alexandria durante o período romano.

Essa tabela foi construída considerando uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades e relacionava as grandezas ângulo central α e comprimento L da corda correspondente, como representado na Figura 1.

Figura 1 – Semicircunferência referência para a construção da Tabela de Cordas



Fonte: Dante (2016, p. 41)

Salienta-se que Ptolomeu utilizava o sistema sexagesimal babilônico, o que explica a adoção de uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades para a construção da Tabela de Cordas (BRIGUENTI, 1996).

Na Tabela de Cordas de Ptolomeu, os ângulos são expressos em graus, com variação de meio grau de um valor para o seguinte, e o comprimento da corda é determinado na semicircunferência em função de um ângulo entre 0° e 180°. O Quadro 1 mostra alguns valores da Tabela de Cordas de Ptolomeu.

Quadro 1 – Alguns valores da Tabela de Cordas de Ptolomeu

α (°)	L (unidades)
...	...
18,5	19,27
...	...
70	68,86
...	...
114	100,67
...	...

Fonte: Dante (2016, p. 41)

Sabe-se que existe uma expressão analítica que permite calcular para cada valor de α o comprimento L da corda, mas naquele tempo esse conceito de “expressão analítica” ainda não estava bem definido.

Caraça (1951) apud Ponte (1990) defende que a noção de função surgiu como instrumento matemático para o estudo quantitativo de fenômenos naturais. Ao observar na natureza algo que muda, que varia, busca-se alguma outra coisa que varie, com qual a variação observada inicialmente possa se relacionar.

Ferreira (2004) destaca o trabalho de Galileu Galilei (1564-1642) no campo de estudo da mecânica, no qual ele se preocupava com a representação de realidades observadas através da quantificação, em que o principal objetivo era conseguir estabelecer relações matemáticas que, mais tarde, permitiriam elaborar leis generalizáveis a casos ou acontecimentos similares.

Nessa perspectiva:

> Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Nessa época, o aprimoramento dos instrumentos de medida propiciou a busca de resultados inspirados na experiência e na observação (ZUFFI, 2016, p. 11).

A primeira de suas grandes experiências deu origem à lei do pêndulo. Depois de repetir a experiências várias vezes, com um pêndulo construído por Galileu, ele chegou à relação: o período de oscilação de um pêndulo independe da massa e é diretamente proporcional ao comprimento (FROTA; MORAES, 2001).

No entanto, ressalta-se que, nessa época, não se conhecia uma equação geral que representasse uma classe inteira de equações, o que se fazia era apenas encontrar os valores desconhecidos numa equação com coeficientes numéricos específicos. A ideia de fazer uma distinção entre parâmetros e variáveis surgiu com o matemático Viète, como mencionado anteriormente.

No desenvolvimento da Física pós-Galileu, a ideia de uma variação em função do tempo é fundamental, pois já se encontra uma certa noção de função no sentido de uma associação entre duas grandezas que variam. O caso mais comum é o do espaço em relação ao tempo, ao observar alguma coisa móvel se deslocar no espaço surge a pergunta se há alguma lei que governe esse movimento em função do tempo (ROQUE, 2012).

Prosseguindo com o desenvolvimento do conceito de função, tem-se que Descartes (1696-1650) introduz pela primeira vez de modo claro a ideia de que uma equação em x e y é uma forma de representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possa calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra (ROQUE, 2012).

Já a característica de relacionar às funções equações algébricas estendeu-se ao cálculo infinitesimal com Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Zuffi (2016) afirma que as primeiras contribuições efetivas para o delineamento do conceito de função se deram a partir de seus trabalhos.

Newton usava o termo “fluentes” para descrever suas ideias de funções, que se encontravam bastante ligadas à noção de curva e às “taxas de mudança” de quantidades variando continuamente, restringindo-se a “imagens geométricas de uma função real, de variável real” (CARAÇA, 1952, apud ZUFFI, 2016).

De acordo com Oliveira (1997), em alguns trabalhos publicados, entre 1692 e 1694, Leibniz usa o termo “função”, para se referir a “certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas.

Ressalta-se que os trabalhos desenvolvidos por Newton e Leibniz até então tinham como principal objetivo estudar as curvas geométricas e não o estudo das funções em si (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003), sendo que os primeiros conceitos de função desvinculados de geometria apareceram no século XVIII, com Johann Bernoulli (1667-1748) e Leonard Euler (1707-1783).

Apesar de terem pesquisado inúmeras relações funcionais, Leibniz e Newton não explicitam o conceito de função em suas obras. A palavra função, no sentido utilizado hoje, é expressa pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli (1667 – 1748) (DANTE, 2016).

De acordo com Dante (2016), nessas correspondências, Leibniz dizia, falando de um problema de geometria, que certos elementos devem ter alguma função. Então, em uma carta de Johann Bernoulli para Leibniz, em 1968, tem-se a seguinte frase: *“... função é uma quantidade que de alguma maneira é formada por quantidades indeterminadas e quantidades constantes*”. Ao que Leibniz responde afirmando que Johann Bernoulli utilizou o termo função de acordo com o sentido adotado por ele.

Ainda assim, a definição explícita da noção de função com base nessa perspectiva só começou a ser delineada alguns anos mais tarde, em um artigo de Johann Bernoulli apresentado em 1718 à Academia de Ciências de Paris em que ele diz o seguinte: “*Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes”* (ROQUE, 2012).

No mesmo artigo, ele usa a letra grega φ para representar a “característica” da função, ou seja, o nome da função, escrevendo o argumento sem os parênteses: φx.

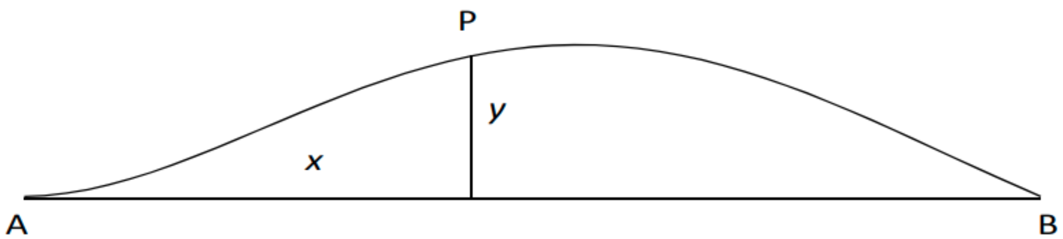
Segundo Dante (2016), é atribuída ao pupilo de Johann Bernoulli, Leonard Euler (1707 – 1783), a representação de uma função pela notação $f(x)$. Ele ainda apresentou outra definição de função dada por: “*Uma função de uma quantidade variável é uma expressão* *analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes"* (SIERPINSKA, 1992, apud ZUFFI, 2016). No entanto, a definição dada por Euler não explicita o que é uma "expressão analítica".

Em meados do século XVII, foram introduzidas séries infinitas para estudar curvas. A relação entre as variáveis podia ser dada por uma série de potências infinita. Supunha-se, implicitamente, que todas as funções pudessem ser escritas como uma série de potências da forma $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$, ainda que fosse preciso considerar expoente dados por qualquer número (e não apenas por números inteiros) (ROQUE, 2012).

No entanto, no século XVIII, como consequência dos problemas da Matemática Aplicada, como a teoria das vibrações e a teoria do calor, houve a necessidade de utilizar novos métodos de descrição analítica, uma vez que essas regularidades já não podiam ser expressas numa forma tão simples como uma série de potência. Dessa forma, a partir da segunda metade do século XVIII, um novo método foi utilizado para definir dependências funcionais que expressavam essas regularidades: as séries trigonométricas (ALVARENGA; BARBOSA; FERREIRA, 2014).

No século XVIII, o problema físico denominado "Problema das Cordas Vibrantes" gerou discussões e influenciou na evolução do conceito de função. Tal problema consiste em uma corda elástica uniforme presa em dois pontos A e B, a uma distância de l unidade, conforme representado na Figura 2.

Figura 2 – Esquema para o estudo do "Problema das Cordas Vibrantes"



Fonte: Correia (1999, p. 45)

Seja o referencial cartesiano, em que A é a origem, AB é o eixo Ox e a linha perpendicular a AB é o eixo Oy. A corda assume a posição de equilíbrio ao longo do eixo Ox. Ao oscilar a corda da sua posição inicial, ela inicia um movimento vibratório em virtude das tensões que agem nos seus pontos. É possível encontrar uma equação que represente o movimento ondulatório da corda, sendo o deslocamento y de cada ponto uma função de x e do tempo t.

Em consequência ao estudo do "Problema das Cordas Vibrantes", Euler sentiu necessidade de trazer uma definição mais geral para o conceito de função. No prefácio da obra *Institutiones calculo differentialis* (Fundamentos do cálculo diferencial), publicada em 1755, Euler formula uma nova definição de função que não se identifica com expressão analítica:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x. (ROQUE, 2012, p. 342).

Ainda no contexto do "Problema das Cordas Vibrantes", Fourier (1768-1830) defende que qualquer função $y = f(x)$ poderia ser representada por uma série do tipo:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin n\, x),$$

a qual conferiria maior generalidade ao tipo de função que poderia ser estudada (ZUFFI, 2016).

Além disso, o trabalho de Fourier sobre a teoria da propagação do calor, datada dos primeiros anos do século XIX, está associada à redefinição do conceito de função. Nesse estudo, analisa-se o problema da propagação do calor nos sólidos, que consiste em descrever o comportamento do fenômeno de propagação, buscando o que é estável e permanente, que se conserva inalterável com o passar do tempo, ou seja, a equação que governa o comportamento do sistema (FARFÁN, 2003).

Ao trabalhar nesses problemas, Fourier conclui que duas funções dadas por expressões analíticas diferentes podem coincidir em um intervalo, sem necessariamente coincidirem fora desse intervalo. Essa evidência trouxe a necessidade de se prestar atenção à noção de intervalo, que nesse momento era interpretada como uma das possibilidades de variação de x, quando essa quantidade varia entre certos valores determinados (ROQUE, 2012).

Ao fornecer a solução do problema considerando somente um intervalo ou definir uma função somente em um intervalo, Fourier apresentava um recurso inovador em relação à definição da função pela sua expressão analítica. Nesse caso, uma função era determinada automaticamente se a expressão analítica estivesse bem estabelecida. Não era necessário prestar atenção ao domínio de definição da função; aliás, sequer existia essa noção de domínio. Essa e outras definições desse tipo, que são bastante familiares, começaram a aparecer neste momento, mas só se desenvolveram com o estudo dos conjuntos numéricos (ROQUE, 2012).

Em um trabalho enviado à Academia de Ciências de Paris em 1807, Fourier afirmava que qualquer função, ainda que "descontínua", pode ser expressa como soma de uma série trigonométrica, uma vontade que Euler, contra a alusão de Daniel Bernoulli (1700-1782), tinha rejeitado (CORREIA, 1999).

Até os anos 1820, as séries de Fourier eram vistas com desconfiança, pois contradiziam a concepção aceita sobre a natureza das funções. A razão dessa desconfiança não advinha tanto do fato de ele enxergar a soma de uma série de potências como uma função, isso estava de acordo com os padrões da época, e sim de afirmar que uma função qualquer pode ser representada por uma série trigonométrica. Ora, isso implicava dizer que a função era algo mais do que a sua representação. Ou seja, implicava dizer que existe um objeto que é a função e que esse objeto pode ser representado por uma série. A expressão analítica, nesse caso, não seria a função (ROQUE, 2012).

No entanto, para além de exemplos específicos, Fourier não demonstrou realmente que uma função qualquer pode ser representada por uma série trigonométrica em um intervalo. Ou seja, mesmo em um intervalo restrito, não havia uma demonstração satisfatória de que essa série convergisse para a função (ROQUE, 2012).

O problema da convergência das séries trabalhado por ele foi abordado por Cauchy (1789 – 1857) em 1826. Cauchy definia função a partir da distinção entre variáveis independentes e dependentes, já usada por Ampère (1775-1836). Duas quantidades variáveis podem ser relacionadas de modo que, dados os valores para uma delas, pode-se obter os valores da outra, que será a função:

> Quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente essas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de "variável independente"; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos funções desta variável. (ROQUE, 2012, p. 376).

No entanto, segundo Roque (2012), a noção de função se relacionava implicitamente a curvas, uma vez que exemplos de funções que não podem ser vistas como curvas ainda não intervinham na Matemática da época. Veremos, adiante, que um passo fundamental nessa direção será dado por Dirichlet (1805-1859).

Dirichlet em seu artigo, *Sur la covergence des séries trigonométriques que servente à représenter une function arbitraire entre des limites donnés* (Sobre convergência das séries trigonométricas que servem para representar uma função arbitrária entre limites dados), publicado em 1829, propõe um exemplo de função real bastante "mal comportada" e não-visualizável num gráfico, dada por: $f(x) = c$, para os valores de x irracionais, e $f(x) = d$, para os valores de x racionais (BOYER, 1974 apud ZUFFI, 2016).

O exemplo de Dirichlet é tido como o primeiro passo para que se percebesse a necessidade de expandir a noção de função, uma vez que, nesse caso, esta não tinha nenhuma das propriedades admitidas tacitamente como gerais: não pode ser escrita como uma expressão analítica (segundo Dirichlet); não pode ser representada por uma série de potências; e não é contínua em nenhum ponto (também não é derivável nem integrável). Logo, o exemplo de Dirichlet só pode ser visto como uma função se esse conceito for entendido como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas (ROQUE, 2012).

Nesse sentido, Dirichlet propõe a seguinte definição geral de função, que foi amplamente aceita no século XX: "*Se uma variável y está relacionada a uma variável x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x*" (ZUFFI, 2016).

Antes de tudo, observa-se que essa definição enfatiza o fato de que, dadas duas quantidades variáveis x e y, para que y seja uma função de x não é necessário que exista uma expressão algébrica associando essa variável a x. Além disso, para que a função esteja bem determinada, $y = f(x)$ deve receber apenas um valor para cada x. Embora essa definição chegue próximo à noção moderna de função, àquela época, os conceitos de "conjunto" ainda não tinham sido precisamente estabelecidos (ROQUE, 2012).

A predominância do ponto de vista conceitual em Matemática, que abriu caminho para a abordagem conjuntista, foi estimulada por Dirichlet. Mas essa tendência seria reforçada por Riemann (1826-1866) e Dedekind (1831-1916), nos seus estudos sobre o desenvolvimento da noção de conjunto (ROQUE, 2012).

Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função acabaria por ser estendida já no século XX de forma a incluir todas as correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não (PONTE, 1990).

Antes, as funções surgiam de problemas concretos, como os de natureza física; agora vinham do interior da Matemática, a partir dos esforços dos matemáticos para delimitar os novos conceitos que estavam sendo forjados e deviam servir de fundamento para a análise, como os de função, continuidade e diferenciabilidade. Essa autonomia sinalizava a tendência crescente de se estabelecer as definições sobre bases abstratas, independentes da intuição sensível e da percepção geométrica (ROQUE, 2012).

Na primeira metade do século XX, surgem publicações de Bourbaki, pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos franceses dos anos 1930. É de Bourbaki a definição de função usada atualmente nos meios matemáticos e científicos, e que foi proposta em 1939: "Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de XxY, tal que se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ então $y = y'$ (SIERPINSKA, 1992 apud ZUFFI, 2016).

Diante do que foi apresentado sobre o conceito de função, nota-se que ele se desenvolveu a partir da necessidade de quantificar fenômenos naturais e estava associado a variações de grandezas e estudo de suas relações. No entanto, a definição de função, adotada até os dias de hoje, vai além da compreensão dos fenômenos a que se aplica; a abordagem é dada em termos mais gerais, envolvendo problemas fora do mundo tangível, ampliando-se para conjuntos de objetos matemáticos abstratos (ZUFFI, PACCA, 2002).

Nesse sentido, Silva e Rezende (1999) destacam três ideias básicas sobre o conceito de função: a de transformação, a de relação entre quantidades variáveis e a de relação entre conjuntos.

Na primeira ideia mencionada anteriormente, na interpretação de função como uma transformação, tem-se a concepção de uma função f que transforma x no valor $f(x)$, tratando-a de uma maneira mais analítica, associando-se a ideia de uma máquina de entradas e saídas.

A segunda ideia, a de relação entre quantidades, mostra como a função se tornou, e ainda é, um instrumento fundamental para a ciência e para o cotidiano, na busca por quantificar e estabelecer relações entre grandezas em diferentes âmbitos: no estudo de fenômenos naturais, dentro da própria Matemática e em situações do cotidiano.

Já a ideia de relação entre conjuntos é a interpretação mais geral e abstrata do conceito de função. Essa abordagem conjuntista das funções elimina todas as ideias originais associadas à variação e, portanto, à noção de variável. Podemos definir variável usando a noção de conjunto, mas ao preço de conceber todos os valores possíveis da variável a um só tempo. Logo, ao invés de ser entendida como uma quantidade indeterminada que varia, a variável passa a ser um elemento de um conjunto numérico (ROQUE, 2012).

Nesse sentido, para a compreensão do conceito de função, as três ideias apresentadas anteriormente devem ser contempladas. Portanto, o estudo da função segundo a ideia de relação de conjuntos é sem dúvida importante, mas a introdução dessas noções sem levar em conta se os alunos estão ou não em condições de tirarem proveito delas, se torna sem sentido.

Tendo isso em vista, torna-se necessário, primeiramente, tornar o conceito de função palpável aos alunos, e isso pode ser potencializado a partir da ideia de relação entre quantidades, apresentada anteriormente.

Dessa forma, a próxima seção tem o intuito de apresentar algumas aplicações das funções na realidade dos alunos e em outros campos da Ciência, a fim de aproximar os alunos da noção de função, evidenciando a importância do seu estudo, para que assim seja construída a base para trabalhar o conceito de função segundo seu caráter mais geral e formal.

2.2 Aplicações das funções

Nessa seção, o intuito é apresentar a noção de função segundo a ideia de relação entre grandezas, a partir da apresentação de algumas aplicações das funções dentro da própria Matemática, no cotidiano do aluno e em outras áreas do ensino, com o intuito de destacar a importância de apresentar e discuti-las em sala de aula, a fim de mostrar aos alunos que as noções de função servem como ferramentas para a modelagem de fenômenos da natureza e situações da sua realidade.

Inicialmente, será feito um apanhado geral de algumas situações nas quais os diversos tipos de função são utilizados na modelagem de problemas da Matemática e de outras áreas do conhecimento (Física, Química, Biologia e Geografia). Posteriormente, será dado um enfoque em algumas aplicações da noção de função afim em contextos comuns no dia a dia.

Ressalta-se que as situações apresentadas ao longo desse capítulo terão como base a experiência da autora e alguns livros didáticos, a saber: “Matemática em contextos: função afim e função quadrática”, de autoria de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana; “Matemática em contextos: função exponencial, função logarítmica e sequências”, de autoria de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana; “Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares”, de autoria de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana e “Prisma Matemática: funções e progressões”, de autoria de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa.

O conceito de função é considerado um dos mais importantes e úteis em Matemática, pois seu estudo propiciou um grande avanço no desenvolvimento tecnológico em diferentes áreas do conhecimento. Por meio de Modelagem Matemática, o trabalho com funções possibilita atribuir tratamento matemático a situações da realidade, permitindo a compreensão de fenômenos e a ação sobre suas manifestações (DANTE; VIANA, 2020b).

Tratando das aplicações das funções dentro da própria Matemática, temos o estudo das progressões aritméticas e geométricas, que são apresentadas como funções afim e exponencial, respectivamente, com domínio no conjunto dos números naturais.

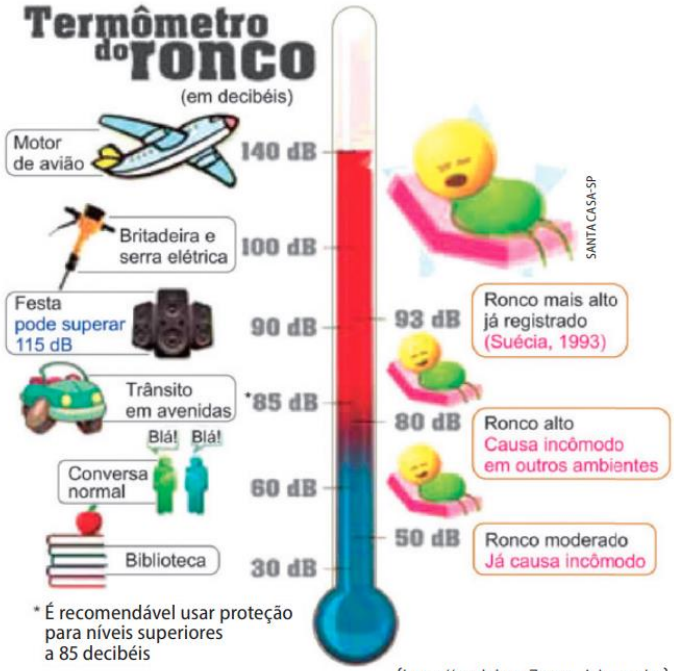
Dentro do campo da Matemática Financeira, no estudo de juros simples, são utilizados conceitos ligados à função afim e às progressões aritméticas, e no estudo de juros compostos, tem-se o uso das funções exponenciais e progressões geométricas.

Na Física, destacam-se as aplicações no estudo do Movimento Uniforme (MU) e do Movimento Uniformemente Variado (MUV), os quais utilizam conceitos como taxa de variação de uma função associado à velocidade média de um móvel, função afim e quadrática nas representações da relação entre posição de um móvel e tempo, no MU e MUV, respectivamente, entre outros.

Ainda na Física, tem-se a intensidade dos sons associada à escala logarítmica. Temos como exemplo uma questão contextualizada, apresentada na Figura 3, da Faculdade de Ciência Médicas da Santa Casa de São Paulo (FCMSCSP) extraída do livro didático "Prisma Matemática: funções e progressões", de autoria de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa, que utiliza uma função logarítmica para relacionar o Nível de Pressão Sonora (NPS) e a Intensidade Sonora (I).

Figura 3 – Exemplo de exercício aplicando função logarítmica

(Santa Casa-SP) O Nível de Pressão Sonora (*NPS*) é uma medida que determina o grau de potência de uma onda sonora, sendo o decibel (dB) sua unidade de medida mais usual. O infográfico traz dados do *NPS* de alguns sons:



(http://noticias.r7.com. Adaptado.)

O *NPS*, em dB, de um som emitido está relacionado à sua Intensidade Sonora (I), em W/m^2, pela seguinte lei:

$$NPS = 120 + 10 \cdot \log I$$

Desse modo, a razão entre a intensidade sonora do ronco mais alto já registrado e a do ronco moderado, nessa ordem, é um valor entre

a) 10 e 100.

b) 1 e 10.

c) 100 e 1 000.

d) 10 000 e 100 000.

e) 1 000 e 10 000.

Fonte: Bonjorno; Giovanni Jr.; Sousa (2020, p. 115)

No estudo do decaimento radioativo, em Química, a massa de uma substância radioativa é dada em função do tempo de decaimento, através de uma função exponencial. Além disso, a função exponencial pode ser utilizada na Biologia, no cálculo do tempo necessário para que um determinado medicamento seja eliminado do organismo, que depende da sua meia-vida.

No livro didático “Matemática em contextos: função exponencial, função logarítmica e sequências”, de autoria de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, o conceito de meia-vida de uma substância e sua modelagem através de uma função exponencial é abordado através de situações contextualizadas como a concentração de medicamentos e massa de uma substância radioativa em função do tempo.

Em especial, na seção do livro denominada “Leitura e compreensão”, que consta na página 54, os autores abordam o tema “Anticoncepcional e meia-vida” trazendo um texto sobre o assunto e algumas questões relacionadas. Alguns recortes do texto e das questões estão representados na Figura 4 e Figura 5, respectivamente.

Figura 4 – Exemplo de texto contextualizando o estudo de função exponencial

O que fazer se esquecer de tomar a pílula

As pílulas que contêm somente progesterona devem ser tomadas rigorosamente no mesmo horário. Já as pílulas combinadas de estrogênio e progesterona oferecem uma flexibilidade maior: se esquecer, você pode tomar até 3 a 4 horas depois do horário estabelecido.

Algumas pílulas trazem a informação de 12 horas de tolerância em caso de atraso. Contudo, a demora não deve se tornar um hábito, pois a eficácia do método é comprometida gradativamente conforme passam as horas, mesmo que você se mantenha no limite do atraso. "Os hormônios possuem meia-vida e duram certo período no organismo, então, mudanças de horário podem comprometer a eficácia", reforça a ginecologista. [...]

Caso você esqueça por mais tempo, será necessário iniciar todo o ciclo novamente, como se fosse a primeira pílula da cartela, pois nesse caso não é possível estimar com precisão o risco de gravidez.

CONTE, Juliana. Esqueci de tomar a pílula. E agora? *UOL*. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/sexualidade/contracepcao/esqueci-de-tomar-a-pilula-e-agora/. Acesso em: 17 mar. 2020.

Fonte: Dante; Viana (2020b, p. 54)

Figura 5 – Exemplo de exercício aplicando função exponencial

2. O etinilestradiol é um tipo de estrogênio com meia-vida de aproximadamente 25 horas, e o levonorgestrel é um tipo de progesterona com meia-vida de 24 horas.

Considere a situação em que uma mulher ingeriu uma pílula com esses hormônios, pela primeira vez, em determinado horário do dia.

a) Após 24 horas, antes de tomar a próxima pílula, qual é o nível de cada um desses hormônios em relação à dosagem inicial?

b) Se a pílula não for tomada no horário correto, então qual será o nível desses hormônios 4 horas após o horário no qual deveria ter ocorrido a segunda dosagem? E 12 horas após esse horário?

Fonte: Dante; Viana (2020b, p. 54)

As funções trigonométricas são importantes na modelagem e na análise de fenômenos reais que se repetem periodicamente. Dentro do campo da Geografia Física elas são usadas para aproximar o movimento das marés e ter condições para prever comportamentos futuros.

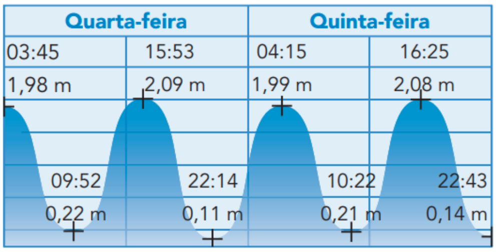
Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, no livro didático "Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares", trazem a situação representada na Figura 6, para contextualizar o estudo de funções trigonométricas a partir do estudo do movimento das marés.

Figura 6 – Exemplo de exercício aplicando função trigonométrica

Marés

No início deste capítulo, você viu exemplos de diversas atividades que se ajustam em decorrência das marés. Para essas e outras atividades, é comum a consulta de uma tábua de marés, que mostra o horário e o nível do mar nas marés alta e baixa de cada dia.

Veja a seguir um exemplo de tábua de marés de uma cidade litorânea, em 2 dias consecutivos, e a representação gráfica ao lado.



Representação gráfica de uma tábua de marés em 2 dias consecutivos.

Quarta-feira

Horário	Nível do mar
03:45	↑ 1,98 m
09:52	↓ 0,22 m
15:53	↑ 2,09 m
22:14	↓ 0,11 m

Quinta-feira

Horário	Nível do mar
04:15	↑ 1,99 m
10:22	↓ 0,21 m
16:25	↑ 2,08 m
22:43	↓ 0,14 m

a) Em cada um desses dias estão indicados dois horários para a maré mais alta e dois para a maré mais baixa. Quais são esses horários?

b) As marés mais altas que ocorreram nesses dias tiveram mesmo nível? E as marés mais baixas?

c) Qual foi a amplitude das marés na quinta-feira, ou seja, qual foi a diferença entre a maré mais alta e a mais baixa desse dia?

d) Entre quais horários a maré estava baixando (secando) nesses dias?

e) Qual foi a medida de intervalo de tempo entre as duas marés mais baixas na quarta-feira? E entre as duas marés mais altas na quinta-feira?

O fenômeno periódico das marés também pode ser modelado por uma **função do tipo trigonométrica**, pois as características da variação do nível do mar se repetem, aproximadamente, após o mesmo intervalo de tempo.

Fonte: Dante; Viana (2020c, p. 38)

O problema apresentado na Figura 6 é interessante, pois retrata como essa situação realmente seria na realidade — as marés mais altas e as marés mais baixas não possuem valores exatamente iguais, ao contrário do que é mostrado na maioria das questões envolvendo o assunto.

Dessa forma, é possível mostrar aos alunos que apesar de o fenômeno das marés ser periódico e podermos fazer aproximações para modelá-lo por uma função do tipo trigonométrica, na realidade, existem variações entre o intervalo de tempo entre duas marés altas ou baixas ao longo dos dias, assim como das medidas de amplitude do nível do mar.

Essas variações ocorrem, pois, as marés sofrem influência de outros fatores além das forças gravitacionais da Lua e do Sol, como as condições geográficas e meteorológicas (DANTE; VIANA, 2020b).

A partir do que foi apresentado até o momento, percebe-se que os diversos tipos de função (afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométricas) são utilizadas na modelagem de problemas tanto dentro da própria Matemática, como em outras áreas do conhecimento. Ademais, as noções de funções podem ser utilizadas nas situações mais simples do cotidiano, as quais serão abordadas a seguir, tendo como destaque aquelas em que função afim é aplicada.

No livro didático "Matemática em contextos: função exponencial, função logarítmica e sequências", de autoria de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, o capítulo de função afim é introduzido com algumas situações do dia a dia em que a ideia de função é aplicada, como (a) no cálculo da quantidade de quilômetros que um automóvel pode percorrer em função da quantidade de combustível que há em seu tanque; (b) o valor pago em um estacionamento em função do intervalo de tempo que o carro fica no mesmo; (c) a quantidade de medicação em função da massa da pessoas; (d) preço a ser pago em um restaurante do tipo self-service em função da quantidade de gramas de comida e (e) distância percorrida por um automóvel em função de sua velocidade.

A situação (c) está representada na Figura 7, como um exemplo, para que seja feita uma análise sobre como o problema é apresentado.

Nota-se, na Figura 7, que nesse momento inicial os autores apresentam algumas ideias do conceito de função, sem, no entanto, partir para definições e representações mais formais. Dessa forma, o aluno é levado a pensar o conteúdo de acordo com o seu cotidiano, o que pode contribuir para tornar o estudo de função afim um pouco menos abstrato.

Figura 7 – Exemplo de exercício contextualizando o estudo de função

Os medicamentos líquidos, geralmente administrados em gotas, são uma opção para pessoas que têm dificuldade de engolir cápsulas ou comprimidos.

Dose de medicamentos

Muitos medicamentos líquidos são administrados em gotas de maneira que, para crianças, a quantidade de gotas é calculada de acordo com a medida de massa. Isso ocorre porque os órgãos das crianças ainda estão em desenvolvimento e, por isso, é necessário recomendar doses mais específicas. Essas recomendações costumam ser dadas para crianças com até 30 kg de medida de massa; depois disso a dosagem costuma ser única para qualquer pessoa.

Dessa maneira, quanto maior a medida de massa de uma criança, maior deve ser a quantidade de medicação administrada a ela. Assim, podemos dizer que a quantidade de gotas de um remédio é dada em **função** da medida de massa da criança.

Considere que a bula de um remédio antitérmico recomende que a dosagem seja de 2 gotas para cada quilograma de massa da criança.

a) Qual deve ser a quantidade de gotas desse medicamento que uma criança de 5 kg deve tomar? E uma criança de 10 kg?

b) Qual operação matemática você utilizou para calcular a resposta do item anterior?

c) Escreva no caderno uma relação que indique como uma pessoa pode calcular a dosagem desse remédio, em gotas, a partir da medida de massa da criança, em quilogramas.

Fonte: Dante; Viana (2020a)

Diante do que foi apresentado nessa seção, é possível perceber que as funções são muito importantes na modelagem de problemas tanto dentro da própria Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Além disso, suas ideias podem ser aplicadas em diversos problemas comuns no dia a dia.

Portanto, abordar o conteúdo a partir da sua contextualização se torna uma ferramenta eficiente para tornar mais concretos alguns aspectos relacionados ao estudo da função, de maneira que, em seguida, possa ser feita a formalização do conteúdo, tendo em mente que o conceito de função é muito mais abrangente que sua aplicação.

Nessa perspectiva, temos:

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade (BRASIL, 2008, p. 42).

Logo, tomando o cuidado para que o caráter formal do conceito de função não seja negligenciado, a abordagem do conteúdo de função a partir de suas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento e da vida podem servir como um recurso para tornar a aprendizagem mais significativa.

Ao longo dessa seção e da anterior, é possível perceber que o estudo de função envolve diversos aspectos que devem ser contemplados para o real entendimento do conteúdo. Dessa forma, o processo de ensino-aprendizagem de função é uma tarefa complexa, o que demanda constantes reflexões sobre as formas como abordar o conteúdo e de recursos que possam ser utilizados para potencializá-lo.

Tendo isso em vista, na próxima seção serão discutidas algumas dificuldades observadas pela autora e por outros professores e pesquisadores.

2.3 Dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de função

Nessa seção, serão discutidas algumas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de função, as quais serão analisadas sob a ótica de estudiosos que abordaram a análise do desenvolvimento histórico do conceito histórico de função, de relatos de professores em suas pesquisas e da experiência da autora.

O estudo sobre os possíveis desafios a serem encontrados no ensino de função tem o intuito de contribuir para reflexões por parte dos professores sobre suas práticas pedagógicas, mas, principalmente, embasar a autora na elaboração de uma sequência didática voltada para a 1ª série do Ensino Médio, que utilize metodologias e ferramentas de maneira assertiva no intuito de minimizar dificuldades de aprendizagem.

Ponte (1990), ao discutir sobre as funções no currículo de Matemática, afirma:

> O papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências (PONTE, 1990, p. 6).

Em (a), destaca-se, por um lado, a representação da função por meio de expressões analíticas e, por outro lado, a representação gráfica, contida no universo do conjunto dos números reais. Em (b), temos a concepção do conceito de função se contrapondo ao tratamento numérico, privilegiando uma abordagem em termos mais gerais, envolvendo correspondência entre elementos dos mais diversos conjuntos. Já em (c), a abordagem do conceito de função se dá pela sua aplicação em situações da vida real e de outras ciências.

Tendo isso em vista, é possível perceber a abrangência alcançada pelo conceito de função, afinal as ideias associadas a ela passam pela compreensão dos fenômenos a que se aplica, mas não se restringem a isso. Em sua definição formal, utilizada até os dias de hoje, tem-se que a função é um conceito matemático que atinge patamares “fora do mundo tangível, num mundo de abstrações muito próprias da Matemática” (ZUFFI; PACCA, 2002, p. 2).

Portanto, uma das dificuldades apresentada pelo professor é conseguir trabalhar e interligar os diversos aspectos relacionados à função, os quais são muito importantes para a compreensão desse conceito, sendo que nenhum deles pode ser negligenciado, pois por um lado, a ideia apresentada em (c) possibilita ao aluno tornar a aprendizagem de função mais significativa, ao aproximá-lo de sua realidade, e por outro lado, a ideia em (b) trata da compreensão do conceito de função em seu caráter mais geral, para ele possa ser aplicado em situações abstratas dentro da própria Matemática, como, por exemplo, a modelagem de uma transformação de um espaço vetorial.

Nesse viés, destaca-se que a definição formal de função, que aprendemos na escola, adota o padrão *bourbakista*, que segue o aspecto da generalidade do conceito, definido por Ponte (1990) (ROQUE, 2012). No entanto, segundo Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014), muitas vezes os alunos enxergam e se queixam que conteúdos vistos em Matemática são desvinculados da realidade.

Portanto, também é necessário trabalhar o conceito de função de acordo com o seu caráter mais intuitivo, segundo a ideia de aplicação à realidade do aluno definida por Ponte (1990), pois, se não, o professor estaria apenas introduzindo terminologias abstratas, que nunca chegam a ser usadas de forma significativa, o que leva os alunos a simplesmente memorizar conceitos sem compreender ou mesmo enxergar como a realidade (PONTE, 1990).

No que se refere a terminologias abstratas, Ponte, Branco e Matos (2009) apontam que muitos alunos têm dificuldade em compreender termos como domínio, contradomínio e imagem, tanto quando tratados exclusivamente em contextos puramente matemáticos quanto quando usado em situações da realidade, por soarem como artificiais.

Além da consideração dos aspectos (b) e (c), é necessário discutir o conceito de função do ponto de vista de (a), no qual a abordagem tem uma natureza mais algébrica ou funcional, em que é dado um enfoque numérico, ou seja, o estudo de função é restringido ao conjunto dos números reais. De acordo com Ponte (1990), segundo essa perspectiva, consideram-se múltiplas representações para as funções, sendo elas as representações analíticas, as representações gráficas e as representações tabulares.

Daí, surge um outro desafio no processo de ensino-aprendizagem das funções, em que o intuito não é trabalhar com cada uma dessas representações de forma isolada e sim a coordenação entre elas (BORBA; CONFREY, 1996).

Nesse contexto, muitas vezes o aluno tem conhecimento sobre o gráfico, a tabela ou a fórmula, mas não consegue fazer a sua conversão e, portanto, pode-se afirmar que ele não tem compreensão do objeto matemático função como um todo, e sim de alguma de suas representações.

Segundo Borba e Penteado (2007), usualmente, a ênfase para o ensino de funções se dá via álgebra, em que é dado um destaque para a expressão analítica de uma função em detrimento dos aspectos gráficos ou tabulares, o que pode ser justificado em grande parte pela dificuldade de geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel.

Em resposta à dificuldade de abordar as representações múltiplas das funções em sala de aula com os recursos mencionados anteriormente, Borba e Penteado (2007) apontam as calculadoras gráficas como um recurso para potencializar a visualização gráfica e a coordenação com as representações tabulares e algébricas.

Destaca-se, quanto ao estudo da representação gráfica da função, um desafio identificado pela autora ao longo de sua docência, quanto à compreensão do funcionamento do plano cartesiano, no que se refere, por exemplo, na determinação de coordenadas, principalmente de pontos localizados sobre os eixos das abscissas e das ordenadas, os quais carregam informações importantes sobre o comportamento das funções.

Diante desse contexto, antes de iniciar o conteúdo de função propriamente dito, é interessante retomar o estudo do plano cartesiano, mesmo que rapidamente, e uma possível estratégia é associá-lo ao jogo “Batalha Naval”, a fim de contextualizar e potencializar a aprendizagem desse conceito.

No que se refere ao estudo de função em sua representação analítica, Ponte, Branco e Matos (2009) destacam a importância da simbologia x, y e $f(x)$ no estudo de funções em contraposição à dificuldade dos alunos em compreender e lidar com ela. Nesse sentido, Booth (1984) afirma que os alunos tendem a interpretar as letras como representantes de números específicos, e não compreendem o seu caráter variável quando se trata de função.

Nesse contexto, a fim de minimizar tais dificuldades, Sfard (1991) sugere que o estudo de funções seja introduzido através da ideia de dependência entre variáveis e só então a definição formal seja trabalhada de maneira gradual. Além disso, as expressões algébricas devem ser apresentadas em diversos contextos, trabalhando a sua interpretação.

Nota-se que os desafios enfrentados no estudo das funções se dão pela abrangência de seu conceito e pelos diferentes aspectos pelos quais podem ser tratadas, o que leva professores a reflexões sobre metodologias e ferramentas a serem utilizadas com o intuito de minimizar as dificuldades e potencializar o processo de ensino- aprendizagem.

No Capítulo 3 serão discutidos, com mais aprofundamento, ferramentas e metodologias a serem utilizadas na elaboração das atividades da sequência didática para o estudo de função na primeira série do Ensino Médio, sendo elas, o uso das TIC, em especial o *GeoGebra*, e os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013) a partir do desenvolvimento da TCAM.

3 EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA

Tendo em vista os desafios enfrentados no processo de ensino-aprendizagem de função, esse capítulo tem o intuito de discutir ferramentas e metodologias que possam minimizar as dificuldades apresentadas na Seção 2.3 do capítulo anterior, como, por exemplo, o uso das TIC e os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013) a partir do desenvolvimento da TCAM.

Dessa forma, este capítulo será dividido em quatro seções. A primeira seção trata do ensino de funções pautado na BNCC. Na segunda, será feito um debate sobre a inserção das TIC na educação, dando ênfase em pesquisas relacionadas ao campo da Matemática, apontando suas potencialidades e as dificuldades para sua implantação.

Na terceira seção, serão apresentados a TCAM e os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013) para a elaboração de materiais multimídia que tornem a aprendizagem mais eficaz.

3.1 Matemática e suas Tecnologias no Novo Ensino Médio

A Lei nº 13.415/2017 foi responsável pela mudança na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a qual reestruturou o Ensino Médio da Educação Básica brasileira, não só por meio da ampliação da carga horário anual mínima para 1.000 horas até 2022, mas também por meio de uma nova organização curricular, que possui como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC é um conjunto de orientações para os currículos das escolas públicas e privadas de todo o Brasil. Ela terá que definir "os direitos e objetivos de aprendizagens do Ensino Médio" a fim de desenvolver competências e habilidades específicas das quatro áreas do conhecimento: 1) Linguagens e suas tecnologias, 2) Matemática e suas tecnologias, 3) Ciências da Natureza e suas tecnologias e 4) Ciências Humanas e sociais aplicadas, conforme ficou estabelecido no artigo 3º da Lei 13.415/2017. Vale destacar, ainda, que em seu §7° a mesma lei diz que "os currículos do Ensino Médio deverão considerar a formação integral do aluno, de maneira a adotar um trabalho voltado para a construção de seu projeto de vida e para sua formação nos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais" (BRASIL, 2017).

Em outras palavras, a BNCC define "aquilo que os estudantes devem aprender na Educação Básica, o que inclui tanto os saberes quanto a capacidade de mobilizá-los e aplicálos" (BRASIL, 2018). Isto quer dizer que esse documento é a diretriz que determina o currículo mínimo a ser trabalhado nas instituições educacionais brasileiras. Essa iniciativa propõe a garantia de uma educação de qualidade a todos os jovens que estudam no Brasil e busca aproximar os conteúdos educacionais lecionados nas escolas brasileiras à realidade que os futuros jovens egressos do sistema educacional encontrarão. Isto é, o Novo Ensino Médio deve sempre levar em consideração as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade (BRASIL, 2017).

Nesse sentido, é fato que essa nova direção educacional pode promover maior interação entre professor e estudante, o que pode levar a uma forma de aprendizagem mais dinâmica, o que no estudo da Matemática, sobretudo das funções afim, pode ser muito vantajoso.

Para melhor entender, é preciso falar sobre como a BNCC é estruturada. Além da divisão pelas áreas do conhecimento, no caso desta pesquisa, a da Matemática e suas Tecnologias, tem-se a divisão por competências específicas a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Médio. Essas competências serão alcançadas à medida em que as habilidades forem também desenvolvidas durante as três séries do Ensino Médio.

Ao introduzir a área da Matemática, o documento já ressalta a importância da sua relação com as experiências da vida dos alunos e enfatiza como é preciso fazer um bom aproveitamento das tecnologias disponíveis no processo de aprendizagem. Como se vê:

> [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se <u>ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a Investigação Matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional,</u> iniciado na etapa anterior (BRASIL, 2018, p. 518. grifo da autora).

Ao todo, essa área apresenta cinco competências específicas, dentre as quais destaca-se neste momento a de número 4, já que dialoga diretamente com o estudo das funções afim. Seu objetivo é fazer com que os alunos possam "compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas" (BRASIL, 2018, p. 530).

Como se vê, ao trabalhar as habilidades que darão base para a Competência 4, os alunos terão contatos com diferentes atividades, também em diferentes níveis, para que possam estabelecer relações matemáticas tanto na conceituação, quanto na interpretação e na representação. Isto é o será feito logo à frente na sequência didática proposta, que foi construída a partir da habilidade (EM13MAT401):

> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 531).

Levando todas essas diretrizes em consideração, é necessário estudar mais a fundo como as tecnologias digitais, os *softwares* e os aplicativos, podem ser aproveitados de forma eficiente dentro da sala de aula, a fim de permitir que os alunos possam desenvolver em plenitude as habilidades e competências propostas pela BNCC para o Novo Ensino Médio.

3.2 Ferramentas Digitais e Ensino da Matemática

Ao longo da história da educação, sobretudo até o início dos anos 2000, a busca por informações era limitada a recursos físicos, como livros, enciclopédias, demais materiais impressos e outras fontes presentes em bibliotecas e centros de pesquisa por exemplo. Portanto, a quantidade e a qualidade das informações disponíveis eram limitadas e sujeitas a restrições geográficas e financeiras. Hoje o acesso à internet e aos diversos conteúdos disponíveis através desse acesso possibilita diversas consultas de maneira rápida e fácil.

Nesse contexto, destacam-se as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), um conjunto de ferramentas tecnológicas que possibilitam novas formas de ensino e aprendizagem. Elas englobam uma série de recursos, entre os quais se sobressaem os computadores, *tablets*, *smartphones*, *softwares*, plataformas online e jogos.

Tais ferramentas têm se tornado grandes aliadas no processo de ensino e aprendizagem, principalmente no contexto da Educação Básica. Todavia, frente a esse cenário, é essencial destacar que a facilidade de acesso a informações na era digital pode gerar dificuldades na seleção e organização das informações relevantes, bem como afetar a capacidade de abstração e reflexão, culminando em uma redução na qualidade do pensamento crítico, conforme ressaltado por Coll e Monereo (2010).

A facilidade de divulgação de informações proporcionada pela internet, por vezes, possibilita a publicação de conteúdos que não passaram por qualquer revisão, seja gramatical ou do conteúdo em si. Assim, há ainda grandes desafios no que diz respeito à análise e à crítica das informações, em especial no que se refere ao julgamento para determinar se elas são verdadeiras ou não (DELFINO, PINHO NETO, SOUSA, 2019).

Dessa forma, cabe ao professor atuar como mediador na relação entre os alunos e as informações disponíveis na internet, orientando-os a avaliar a relevância, a credibilidade e a veracidade das fontes consultadas. Além disso, é importante que os alunos aprendam a desenvolver o pensamento crítico, de forma a serem capazes de analisar e questionar as informações que encontram, verificando se são coerentes com o conhecimento que já possuem e se estão baseadas em fontes confiáveis e seguras. Nesse sentido, é papel do docente orientá-los na criação de filtros para seleção de informações comprováveis e ensinar a atribuir significado às mensagens, informações e conteúdos recebidos das mídias, multimídias e outras formas digitais de compartilhamento de informações (LIBÂNEO, 2011).

Para alcançar esses objetivos, existem diversas estratégias a serem ensinadas aos alunos, algumas delas incluem verificar a fonte para avaliar se ela é confiável e possui credibilidade; checar a data de publicação para garantir que a informação é atual e ainda relevante; contextualizar os dados obtidos, avaliando o momento histórico, social e político em que a informação foi gerada; questionar as informações apresentadas; e buscar outras fontes para confirmar ou refutar as primeiras conclusões de uma pesquisa.

Nesse sentido, quando utilizada de forma analítica e crítica, as consultas à internet far-se-ão como uma ferramenta digital que potencializa o desenvolvimento do conhecimento, tanto dos alunos quanto dos professores, pois permite o acesso rápido e eficiente a uma ampla gama de informações.

Ademais, além de facilitar o contato com as informações, as tecnologias digitais proporcionam o acesso a diferentes ferramentas e recursos — como vídeos, animações, jogos, *softwares* e simulações — que tornam a aprendizagem dos conteúdos mais dinâmica e interativa, o que reflete em uma maior receptividade e interesse dos alunos (CURSINO, 2019).

Dentre as potencialidades oferecidas por essas ferramentas e recursos, Cursino (2019) destaca sua eficiência no que tange à rapidez na realização de processos que anteriormente durariam longos períodos para serem concluídos, como construção de gráficos e de tabelas. Um outro exemplo é a utilização de *softwares* que permitem que os alunos realizem cálculos complexos com grande agilidade e precisão, o que lhes possibilita maior concentração e compreensão dos conceitos e das aplicações dos cálculos.

Destarte, é possível citar também o uso de *softwares*, como os que fornecem calculadoras gráficas que viabilizam a criação de gráficos a partir de dados e funções matemáticas, auxiliando os alunos a entenderem conceitos matemáticos abstratos e visualizá-los de forma mais clara e concreta.

No estudo das funções, por exemplo, tais recursos permitem a construção de gráficos a partir de sua lei de formação e mudanças dos seus coeficientes de maneira fácil e rápida, possibilitando o desenvolvimento de atividades investigativas sobre a relação entre as representações analíticas e gráficas de uma função.

Apesar das potencialidades destacadas até o momento, a implantação efetiva das TIC como ferramentas para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem enfrenta algumas dificuldades, principalmente no contexto das escolas públicas, que carecem de maiores investimentos e políticas públicas, no que se refere à adequação da infraestrutura para suprir a demanda por recursos tecnológicos e espaço físico para tal e à formação docente voltada para o aperfeiçoamento do professor quanto à mediação e uso das tecnologias (COSTA, 2013).

Ressalta-se que o tipo e o grau da dificuldade na inserção das TIC no processo de ensino-aprendizagem variam de acordo com cada contexto, dependendo das características específicas de cada escola e de cada comunidade escolar. Existem escolas que não possuem acesso à internet de qualidade, disponibilidade de *softwares* e *hardwares* adequados ou até mesmo espaço físico suficiente para a instalação de equipamentos.

Quanto ao desenvolvimento de habilidades dos professores para a mediação e para o uso das tecnologias em sala de aula, temos, por um lado, a falta de políticas públicas e investimentos, e, por outro lado, a sobrecarga de trabalho à qual os professores são submetidos. Esses fatores se somam e impedem o aperfeiçoamento dos docentes, visto que dificilmente eles encontrarão tempo e oportunidades para se dedicar às novas tecnologias e ferramentas de ensino.

Sabe-se que os professores têm uma grande demanda de trabalho, incluindo preparação de aulas, preenchimento de diários, elaboração e correção de atividades e avaliações e participação em reuniões administrativas e pedagógicas. Além disso, frequentemente precisam assumir mais de um cargo para conseguirem arcar com suas despesas.

Vale ressaltar que, apesar dos desafios apresentados anteriormente, estão sendo tomadas ações para o aperfeiçoamento dos professores em relação às TIC. No que tange ao *software GeoGebra*, seu site oficial oferece diversas atividades e construções matemáticas gratuitamente a todos os educadores. Há, ainda, um curso chamado "*GeoGebra* para Licenciatura em Matemática", desenvolvido pelo Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga, com o objetivo de ensinar professores e futuros professores a trabalharem os conteúdos da Matemática por meio do *GeoGebra*.

Adicionalmente, existem tutoriais disponíveis no YouTube, criados por diversos professores. Outra menção relevante é a iniciativa de instituições, como o CEFET-MG, que proporcionam capacitações, tanto online quanto presenciais, não somente sobre o *GeoGebra*, mas também sobre outros recursos tecnológicos aplicáveis à educação.

Mediante uma pesquisa realizada por Silva, Campelo e Borges, em 2019, uma parte considerável dos professores (51%) afirmou não ter uma formação adequada no que se refere ao uso das TIC na educação, o que implica a dificuldade em conhecer os recursos existentes e desenvolver habilidades para avaliarem o potencial de aplicações das tecnologias digitais em suas aulas (SILVA; CAMPELO; BORGES, 2022).

Nesse sentido, há a preocupação com o fato de que a utilização da tecnologia na educação possa resultar em uma abordagem superficial de aprendizado, na qual os alunos são meros executores de tarefas mecânicas, seguindo as orientações das máquinas (BORBA; PENTEADO, 2007).

Segundo Masetto (2010), a tecnologia reveste-se de um valor relativo, sendo assim, o professor precisa ter em mente que as TIC são um meio para alcançar os objetivos de aprendizagem, e não um fim em si mesma. Logo, todas as potencialidades oferecidas pelas tecnologias digitais devem estar atreladas ao planejamento do professor e da escolha de ferramentas e metodologias adequadas ao objetivo a que se propõe para que se tenha uma aprendizagem significativa.

Nessa perspectiva,

> O verdadeiro potencial dos computadores está dependente principalmente do modo como as ferramentas são usadas e só existe quando, por seu uso e, situações concretas, se estimula o questionamento por parte do aluno na realização de um problema ou tarefa qualquer, envolvendo-o ativamente do ponto de vista intelectual e dentro do que as suas estruturas cognitivas num determinado momento lhe permitem realizar (VYGOSTKY, 1978, apud COSTA, 2013, p. 59).

Ou seja, é fundamental que a tecnologia seja integrada a uma abordagem de aprendizagem ativa, envolvendo os alunos em atividades que os desafiem, permitindo-lhes desenvolver habilidades cognitivas e críticas, evitando um ensino cujo foco constitua apenas em operar ou manejar dispositivos tecnológicos.

Diante de tudo o que foi discorrido, percebe-se que o uso das TIC na educação pode trazer muitos benefícios, tais como tornar as aulas mais interativas, dinâmicas e atraentes, bem como ampliar o acesso a informações e recursos educacionais. No entanto, é importante destacar que é necessário investimentos e políticas públicas para formação docente voltada para o aperfeiçoamento do professor quanto à mediação e uso das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, para que ele desenvolva habilidades para identificar as melhores práticas pedagógicas que possam ser associadas às novas tecnologias, a fim de garantir que seu emprego seja feito de forma adequada, visando sempre a melhora na qualidade do ensino e da aprendizagem

Segundo Linhares, Cerveró e Paixão (2017), para que os professores possam verdadeiramente contribuir no desenvolvimento das habilidades digitais e da criticidade dos alunos, é necessário que eles tenham formações e capacitações continuadas que abordem e discutam constantemente essas tecnologias.

Nesse sentindo, com o crescente acesso à internet e com o surgimento de novas tecnologias — como *softwares* educativos, plataformas de aprendizagem online — o uso das TIC na educação se tornou uma temática de grande interesse para diversos pesquisadores. Nos últimos anos, houve uma intensificação no desenvolvimento de pesquisas e estudos sobre o uso das TIC no processo de ensino, especialmente após 2020, quando se tornou necessário adotar práticas pedagógicas remotas em função da pandemia de COVID-19.

Devido à pandemia e à necessidade de distanciamento social, as escolas precisaram se adaptar e, a fim de garantir a educação de crianças e jovens, passaram a oferecer seus conteúdos por meios remotos.

Segundo Boto et al. (2020), nesse contexto, principalmente nas escolas públicas, ao passo que há alunos que podem acompanhar as atividades a distância, a maior parte da população escolar não tem acesso à internet, computador ou *smartphone*.

Além disso, cabe ressaltar que a realidade do ensino remoto surgiu repentinamente para todos, inclusive para os professores, que tiveram que adaptar suas práticas para atender às demandas educacionais, sem ter uma formação adequada que pudesse lhes oferecer o suporte necessário ao desenvolvimento das atividades neste momento.

Assim, de acordo com Silva et al. (2021), surgem desafios na dinâmica de aulas remotas, a exemplo de problemas com manuseio das tecnologias necessárias — computador, internet e celulares — e da falta de infraestrutura básica, sobretudo nas escolas públicas, para fornecer aos professores e aos alunos o material necessário ao desenvolvimento das aulas remotas.

Dessa forma, é possível perceber o quão difícil foi o processo de adaptação ao modelo de aulas remotas, nas quais os professores tiveram que lidar com problemas de conexão com a internet, falta de equipamentos adequados e a necessidade de adaptar seus métodos de ensino para um ambiente virtual; além disso, esses profissionais não tiveram uma preparação para o uso de tecnologias e na maioria das vezes já possuíam dificuldades com o manuseio destas ferramentas.

Por outro lado, a experiência de educação em tempo de pandemia trouxe a oportunidade de repensar o papel das TIC na educação e, mesmo com todos os desafios citados anteriormente, elas finalmente foram incorporadas ao universo da escola. (BOTO et al., 2020). Nesse cenário, temos experiências de professores que tiveram sucesso ao utilizar ferramentas e recursos tecnológicos de forma eficaz nas aulas remotas, o que será abordado na seção a seguir.

Parras e Mascia (2022) apontam que o uso das TIC no ensino remoto propiciou um aglomerado de ferramentas que podem contribuir para a inovação do processo de ensino-aprendizagem. Muitas escolas e educadores começaram a explorar novas metodologias e recursos educacionais, como a criação de ambientes de aprendizagem online e interativos, incluindo videoconferências, aulas gravadas, vídeos, fóruns de discussão, jogos educativos, entre outras ferramentas.

Na pesquisa realizada por Vieira e Silva (2020), destaca-se o uso, pelos professores, de sistemas gerenciadores de cursos online — como o *Moodle*, *Google Classroom* e *Microsoft Teams* — como recursos fundamentais para a mediação dos processos de aprendizagem; o uso de sistemas de videoconferência — como o *Zoom* e o *Google Meet* —; *softwares* para gravação de videoaulas e recursos digitais para auxiliar a avaliação formativa — como o *Google Forms, Kahoot* e *Socrative*.

No contexto do ensino de Matemática, a partir da experiência da autora, tem-se o *Excel*, por exemplo, que possibilita a criação de tabelas e gráficos, permitindo a visualização de dados e a aplicação de fórmulas matemáticas; o *GeoGebra*, que é uma ferramenta que permite a criação de construções geométricas dinâmicas, o qual permite a visualização de funções matemáticas de uma maneira interativa; aplicativos para computador e para *smartphones*, como o *iCross* e o *Poly Pro*, são usados no estudo de geometria espacial; além disso, jogos, como *Euclidea* e *Pytagorea*, tornaram-se ferramentas para despertar o interesse do aluno pela geometria e tornaram alguns conceitos desse conteúdo mais concretos.

Ou seja, uma gama de recursos e ferramentas digitais foram utilizadas pelos professores no ensino remoto, dentre eles, muitos mostraram-se eficazes no processo de ensino-aprendizagem. Sob essa ótica, vale uma reflexão de que a utilização desses recursos não precisa ser abandonada após o período de pandemia e aulas online. Ao contrário, essas ferramentas podem ser incorporadas ao ensino presencial, enriquecendo ainda mais as aulas e tornando o aprendizado mais dinâmico e engajador para os alunos.

Nesse contexto, desde o início do isolamento imposto pela pandemia de COVID-19, em 2020, até o presente momento, vários estudiosos têm debatido sobre a adoção das TIC, mesmo após o retorno das aulas presenciais. Defende-se a tese de que essas tecnologias permitem interação entre os alunos e professores, além da realização de atividades mais dinâmicas e do grande acesso a recursos educacionais diversificados, o que pode contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem.

Almeida et al. (2020) afirmam que a pandemia levou a uma mudança significativa no papel dos professores, que tiveram que se reinventar rapidamente e incorporar as novas tecnologias em suas metodologias atuais. O autor ainda defende que os contatos constantes com elas tendem a despertar no professor a vontade de continuar incorporando tais métodos, mesmo no período pós-pandemia. Além disso, acredita-se que o uso contínuo das tecnologias na rotina escolar se tornará cada vez mais frequente, com diferentes utilidades e formas, sendo as metodologias ativas especialmente trabalhadas para melhorar a aprendizagem.

Segundo Rosa (2020), a pandemia trouxe um cenário que já deveria fazer parte da educação, no que se refere ao uso de recursos tecnológicos nas práticas escolares. Embora algumas escolas e professores utilizassem tecnologias em suas práticas pedagógicas antes da pandemia, a proliferação da Covid acelerou sua integração no ambiente escolar e trouxe à tona a importância do uso de recursos tecnológicos na educação, demonstrando que essa é uma tendência inevitável e que deve fazer parte das práticas escolares.

Boto et al. (2020) defendem que as ferramentas e recursos tecnológicos utilizados durante o ensino remoto possuem um grande potencial pedagógico e podem ser repensados e adaptados para o ensino presencial.

Nesse sentido, as plataformas de aprendizagem *online* podem ser utilizadas para complementar as aulas presenciais, permitindo que os alunos tenham acesso a conteúdos adicionais, interajam com colegas e professores e realizem atividades de forma autônoma. Os jogos educacionais, os aplicativos de realidade aumentada, os *softwares* educativos e outros recursos podem ser utilizados para enriquecer as atividades presenciais, ao permitir uma experiência mais imersiva e divertida de aprendizagem. Além disso, novas tecnologias digitais, com potencial pedagógico, continuam sendo desenvolvidas e lançadas.

Diante do que foi apresentado, é perceptível que apesar das dificuldades apresentadas no ensino remoto, essa realidade teve um efeito impulsionador no uso das TIC no cenário educacional.

No entanto, é importante que os professores tenham acesso às oportunidades e às condições de participar de formações continuadas para se atualizarem e se aperfeiçoarem na intenção de desenvolver habilidades quanto às TIC e, dessa forma, ter total domínio para não apenas utilizá-las, mas o fazer de forma eficiente e adequada ao objetivo a que se propõe.

Dessa forma, o planejamento cuidadoso e estratégico é essencial para a eficácia da incorporação das TIC no processo de ensino-aprendizagem. Os professores precisam identificar como as TIC podem melhorar a aprendizagem dos alunos e estabelecer objetivos claros para sua inclusão nas atividades de ensino.

Além disso, é importante envolver os alunos na incorporação das TIC no ensino, incentivando-os a participar ativamente e a contribuir com ideias e *feedback*. Isso pode ajudar a aumentar o engajamento e a motivação dos alunos.

Os professores também precisam avaliar regularmente o impacto das TIC no ensino e aprendizagem. Isso pode ser feito por meio de avaliações diagnósticas para identificar o que está funcionando bem e o que precisa ser ajustado. Além disso, é interessante haver um compartilhamento de ideias, experiência e recursos entre os professores, a partir da divulgação de pesquisas, grupos de discussão on-line, comunidades de prática e fóruns de discussão.

Tendo em vista que o potencial das TIC está associado ao planejamento do professor e à escolha de ferramentas e de metodologias adequadas ao objetivo a que se propõe, na próxima seção será apresentada a TCAM e os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013), os quais têm o intuito de auxiliar na elaboração de atividades utilizando as tecnologias de multimídia de maneira a tornar a aprendizagem mais significativa.

3.3 Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia

De acordo com Mayer (2009) apud Barros (2013), a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia (TCAM) estuda a aprendizagem por meio da apresentação de informações em múltiplos formatos (palavras e imagens). Nesse contexto, considera-se palavra toda mídia escrita ou falada e imagens, abrange toda mídia gráfica, como vídeos, animações, jogos e ilustrações (MAYER, 2003 apud BARROS, 2013).

Essa teoria é fundamentada em três suposições sugeridas pelas pesquisas cognitivas: **canal duplo**, **capacidade limitada de suposição** e **processo ativo** (MAYER; MORENO, 2002 apud BARROS 2013).

O conceito do **canal duplo** se refere à ideia de que os seres humanos possuem canais separados para processar informações visuais e auditivas. Segundo essa teoria, quando informações são apresentadas por meio de recursos multimídia, como textos, imagens e sons, é possível utilizar ambos os canais para aumentar a compreensão e retenção dessas informações.

A **capacidade limitada de suposição** sugere que o cérebro humano é capaz de processar apenas uma quantidade limitada de informação de cada vez. Por esse motivo, é importante que as informações sejam apresentadas de maneira clara e organizada, para evitar sobrecarga cognitiva.

E o **processo ativo** leva em consideração que a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno se engaja nos processos cognitivos para selecionar, organizar, representar e integrar a informação ao conhecimento prévio.

Segundo Mayer (1996) apud Barros (2013), uma aprendizagem significativa ocorre quando os estudantes constroem mentalmente uma representação coerente do conhecimento, ou seja, um **modelo mental**. Esse modelo mental é uma representação pessoal do indivíduo a respeito de algum conceito ou ambiente (MAYER, 1989 apud BARROS, 2013). Essa representação mental é importante porque serve como um guia para a compreensão e o armazenamento de informações novas, e também ajuda na recuperação dessas informações da memória de longo prazo.

Mayer (2001) apud Barros (2013) argumenta que as pessoas aprendem de maneira mais profunda quando as ideias são apresentadas por meio de palavras e imagens combinadas, em vez de apenas palavras. Assim, o autor propõe uma apresentação que utilize tanto palavras quanto imagens com o objetivo de promover a aprendizagem significativa, a qual é denominada **apresentação multimídia**.

Ainda de acordo com Mayer e Moreno (2002) apud Barros (2013), durante a apresentação multimídia, a narração ou animação entra pelo canal auditivo, e o aluno seleciona as palavras que serão processadas pela memória de trabalho verbal. Nesse processo, as palavras selecionadas são organizadas e integradas ao material visual e ao conhecimento prévio do aluno. Por outro lado, a animação entra pelos olhos do aluno, e ele seleciona as imagens que serão processadas pela memória de trabalho visual. Em seguida, as imagens são organizadas e integradas ao material verbal e ao conhecimento prévio do aluno.

Para que ocorra a aprendizagem significativa através de mensagens multimídias, é essencial que o professor manipule essas mensagens em um ambiente de aprendizagem apropriado e que promova experiências que incentivem o aluno a aprender. Esses dois pontos são fundamentais para que a manipulação das mensagens seja efetiva e contribua para o processo de aprendizagem.

Com base em pesquisas experimentais abrangentes, Mayer (2009) apud Barros (2013) propõe doze princípios de design multimídia que, após testes, foram comprovados por Mayer como fatores promotores da aprendizagem e contribuintes para o processo cognitivo do aluno, os quais podem servir como orientação para a criação de atividades envolvendo recursos multimídias bem projetadas.

Tais princípios estão sistematizados em três grupos distintos: promoção do processamento gerador de aprendizagem multimídia, apresentados no Quadro 2; gestão de processamento essencial, apresentados no Quadro 3; e redução de processamentos estranhos, apresentados no Quadro 4.

Quadro 2 – Princípios de promoção do processamento que gera a aprendizagem multimídia

Personalização	Colocar as palavras da mensagem multimídia no estilo de conversação em vez do estilo formal. Sendo que, o estilo de conversação permite que o aluno sinta um contato com a realidade, além de tornar o assunto mais interativo e dinâmico, permitindo que ele tenha um maior empenho na realização das atividades.
Multimídia	Apresentar materiais com o uso de palavras e imagens, em vez de apenas com palavras.
Voz	Falar, enquanto narrador ou tutor, com voz humana, em vez de uma voz de máquina.
Imagem	Apresentar uma imagem do narrador ou tutor na tela durante a aprendizagem.

Fonte: Mayer (2009) apud Barros (2013).

Quadro 3 – Princípios para gestão de processamento essencial

Segmentação	Dividir uma apresentação inteira em partes coerentes que podem ser digeridas sequencialmente.
Pré-Treinamento	Ajudar os alunos a conhecer nomes e características dos conceitos chave antes de receberem toda a apresentação.
Modalidade	Apresentar palavras como texto falado ao invés de texto impresso.

Fonte: Mayer (2009) apud Barros (2013).

Quadro 4 – Princípios para redução de processamentos estranhos

Coerência	Excluir palavras, sons e imagens que não são relevantes ao assunto. Esse princípio pode ser muito importante para os alunos com baixa capacidade de memória de trabalho ou/e baixo conhecimento do conteúdo.
Sinalização	Destacar as palavras e imagens essenciais em uma lição multimídia. Esse princípio é útil quando os sinais são usados com moderação, quando o aluno tem pouca habilidade de leitura ou quando o material está desorganizado.
Redundância	Remover legendas redundantes de animações narradas.
Contiguidade espacial	Colocar as palavras ao lado dos gráficos correspondentes na tela ou página — alunos aprendem melhor quando as palavras e imagens correspondentes estão mais próximas do que distanciadas, por exemplo, na mesma tela.
Contiguidade temporal	Apresentar simultaneamente uma narração que corresponde aos gráficos — os alunos aprendem melhor quando palavras e imagens são apresentadas simultaneamente ao invés de sucessivamente.

Fonte: Mayer (2009) apud Barros (2013).

Os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013) a partir do desenvolvimento da TCAM ofereceram subsídios, para que fossem elaboradas e aplicadas as atividades da sequência didática deste presente trabalho, favorecendo uma aprendizagem significativa, com o uso do *software GeoGebra*. No Capítulo 4, essas contribuições serão apresentadas e discutidas.

4 METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA

Esse capítulo é constituído de duas seções. Na primeira será descrito o processo de construção da Sequência Didática 2 para o ensino de função afim com o auxílio do *software GeoGebra* em turmas da 1ª série do Ensino Médio, a qual foi fundamentada segundo princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013) a partir do desenvolvimento da TCAM. Já na segunda seção serão apresentadas as condições sob as quais a Sequência Didática 2 foi aplicada.

4.1 Elaboração da Sequência Didática 2

A construção da sequência didática para o estudo de função afim empregando o *software GeoGebra* voltada para turmas da 1ª série do Ensino Médio passou por dois momentos. Primeiramente, foi desenvolvida uma sequência didática inicial, denominada Sequência Didática 1 (SD1) e descrita no APÊNDICE I, na qual, as atividades foram elaboradas pela autora, a título experimental e com formato sujeito a revisão.

Em um segundo momento, estudos e orientações relacionados à aprendizagem via recursos tecnológicos conduziu o olhar para a TCAM e para os princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013), para a construção de materiais didáticos envolvendo recursos de multimídia, e possibilitaram uma revisão das atividades propostas incialmente. Dessa forma, foi possível realizar alterações que tornariam a sequência didática mais eficiente quanto à aplicação aos alunos, resultando na versão final da sequência didática, denominada Sequência Didática 2 (SD2) e descrita no APÊNDICE II.

A SD1 é composta apenas por três passos representados nas Figuras 8, 9 e 10, respectivamente, sendo eles: criar Controles Deslizantes no *software GeoGebra*, para os coeficientes a e b; em seguida, inserir a fórmula geral da função afim, dada por $y = ax + b$, na Caixa de Entrada do *software GeoGebra* e, por fim, analisar qual a influência dos valores desses coeficientes no gráfico da função afim.

Figura 8 – Primeiro passo da SD1

- Digite a na Caixa de Entrada e aperte *enter*. Perceba que foi criada uma "barra", a partir da qual você pode alterar os valores de a.
- Digite b na Caixa de Entrada e aperte *enter*. Perceba que foi criada uma "barra", a partir da qual você pode alterar os valores de b.

Fonte: A autora (2023)

Figura 9 – Segundo passo da SD1

- Na Caixa de Entrada digite $y = ax + b$ e aperte *enter*.

Fonte: A autora (2023)

Figura 10 – Terceiro passo da SD1

Pergunta 1: O que podemos concluir sobre relação entre o valor de a e a inclinação do gráfico?

Pergunta 2: O que podemos dizer sobre o sinal de a e o fato de a função ser crescente ou decrescente?

Pergunta 3: Qual é a relação entre o valor de b e o ponto em que o gráfico corta o eixo y?

Fonte: A autora (2023)

Percebe-se que o objetivo principal da SD1 é estudar como os coeficientes a e b de uma função afim influenciam em seu gráfico, no entanto, ao elaborar o seu roteiro, a autora não levou em consideração que nas turmas em que a SD1 será aplicada os alunos ainda não tiveram a oportunidade de trabalhar com o *software GeoGebra*, o que significa que o layout, as ferramentas e a forma de utilizá-las são conhecimentos novos que também precisarão ser aprendidos por eles.

Ou seja, a forma direta e rápida em que os passos para a realização da SD1 foram apresentados geraria uma sobrecarga de novas informações, o que provavelmente prejudicaria a aprendizagem efetiva do conteúdo de função afim. Nesse sentido, em sua teoria, Mayer (2001) apud Barros (2013) fala sobre a capacidade limitada de suposição, que sugere que o cérebro humano é capaz de processar apenas uma quantidade limitada de informação de cada vez.

A fim de resolver esse problema, seguindo o princípio de segmentação, proposto por Mayer (2009) apud Barros (2013), que implica a divisão de uma tarefa complexa em partes coerentes e sequenciais, a SD2 consta de quatro atividades — Atividade 1: Ponto no plano cartesiano; Atividade 2: Ferramenta Controle Deslizante; Atividade 3: Estudo do valor de "b" na função afim e Atividade 4: Estudo do valor de "a" na função afim — sendo a primeira para trabalhar a localização de pontos no plano cartesiano, prerrequisito para o estudo do gráfico de uma função, a segunda para o desenvolvimento de conhecimentos relativos ao *software GeoGebra* e as duas últimas para trabalhar conceitos da função afim.

Dessa forma, seguindo o princípio de pré-treinamento, proposto por Mayer (2009) apud Barros (2013), que, nesse contexto, implica possibilitar aos alunos a primeiramente conhecer o *layout*, nomes e propriedades das ferramentas do *software GeoGebra*, para que só assim seja trabalhado o conteúdo de função, foi elaborada, na SD2, a Atividade 2.

Portanto, a Atividade 2 tem o intuito de apresentar o *software GeoGebra,* ensinando a inserção de informações na Janela de Álgebra a partir da Caixa de Entrada; a utilização de algumas ferramentas, a exemplo do Controle Deslizante; a identificação da existência das janelas de Álgebra e de Visualização Gráfica e a habilidade de fazer correspondência entre as informações apresentadas por elas. A Figura 11 mostra um recorte dessa atividade.

Figura 11 – Recorte da Atividade 2 da SD2

- Na Caixa de Entrada do *GeoGebra* digite c e aperte *enter*.

Agora, vamos associar esse valor de c com o objeto Segmento Com Comprimento Fixo. Para isso, faça o que se pede:

- Selecione a ferramenta Segmento Com Comprimento Fixo.

- Clique em qualquer ponto da tela "da direita" e digite que o comprimento é igual a c.

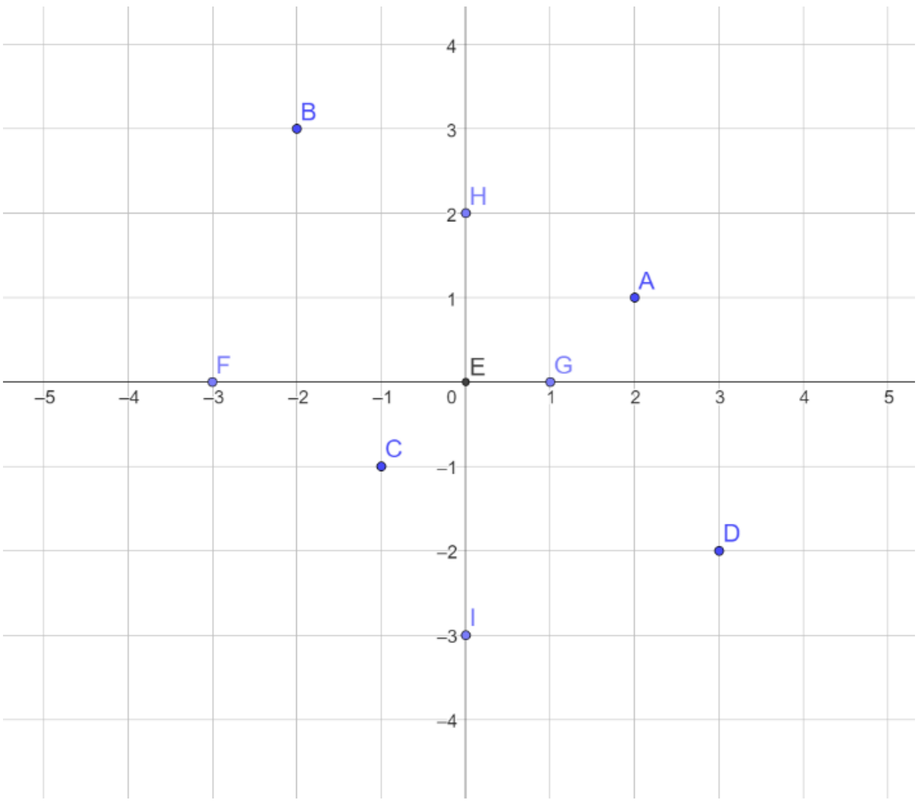
- Utilize a "barra" com o valor de c (alterando seus valores, clicando e arrastando) e observe o que acontece com o comprimento do segmento de reta quando você altera o valor de c.

Fonte: A autora (2023)

Aliado a isso, pelo princípio da coerência proposto por Mayer (2009) apud Barros (2013), que implica a exclusão de informação que não é relevante no momento, foram realizados alguns ajustes nas atividades. Alguns exemplos serão apresentados a seguir.

Na construção referente à Atividade 1 realizada no *GeoGebra*, por exemplo, a Janela de Álgebra foi ocultada, pois nessa atividade, os alunos, precisavam apenas localizar os pontos indicados e dar as suas coordenadas, além disso, as Malhas Secundárias foram excluídas, dessa forma a tela ficou menos sobrecarregada. A Figura 12 mostra como a tela da construção referente à Atividade 1 realizada no *GeoGebra* é apresentada.

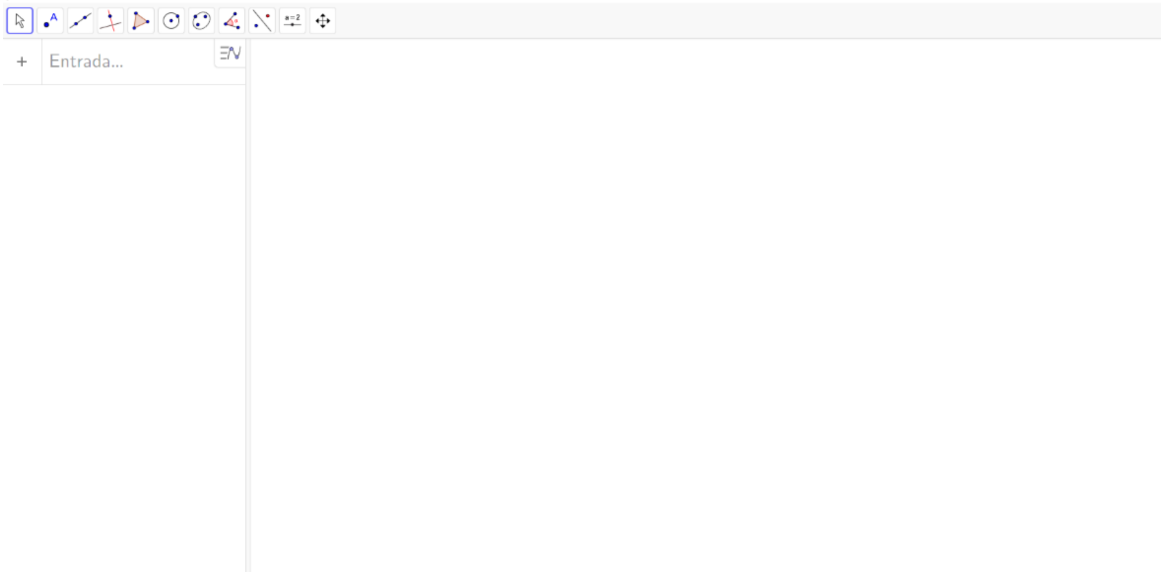
Figura 12 – Princípio da coerência representado na construção referente à Atividade 1 realizada no *GeoGebra*



Fonte: A autora (2023)

Como o conhecimento das coordenadas dos pontos não eram o foco da Atividade 2, as Malhas Principais e Secundárias, bem como os Eixos foram retirados na construção realizada no *GeoGebra*, como mostra a Figura 13.

Figura 13 – Princípio da coerência representado na construção referente à Atividade 2 realizada no *GeoGebra*

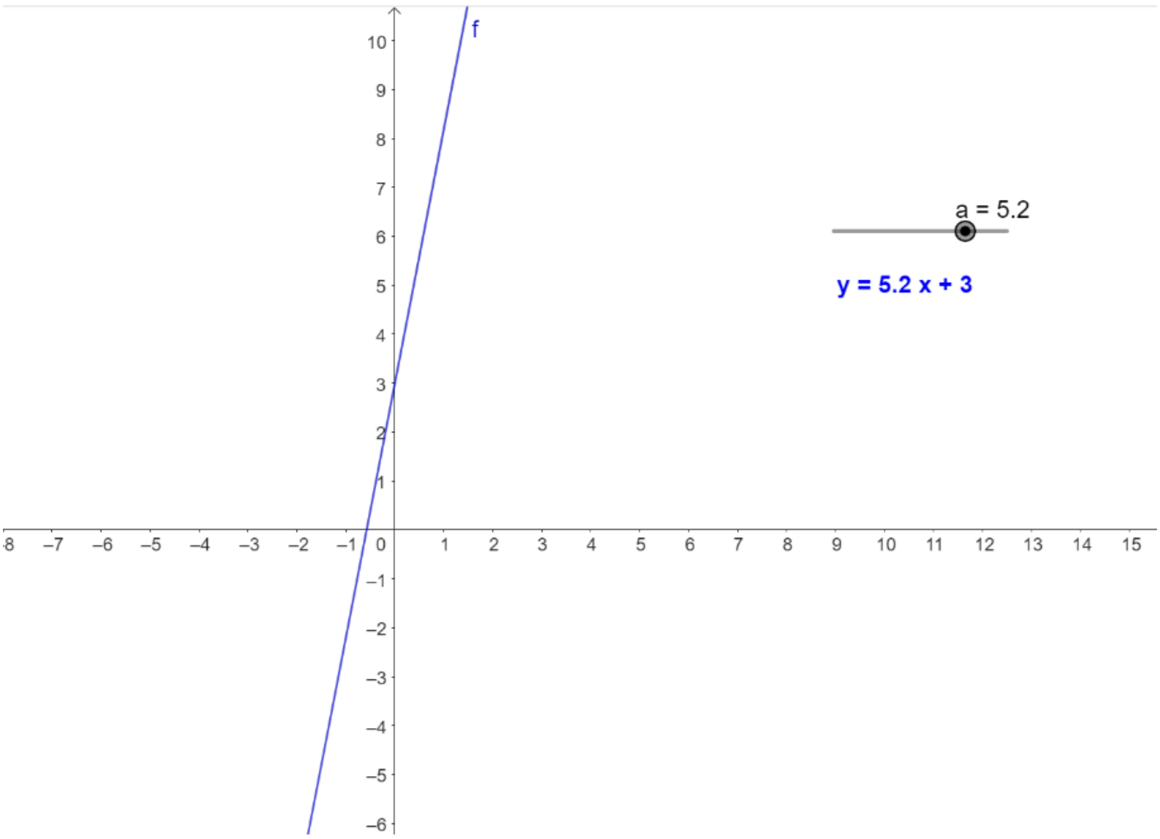


Fonte: A autora (2023)

Na construção referente à Atividade 4 realizada no *GeoGebra*, além do princípio da coerência ter sido observado, a partir da retirada das Malhas Principais e Secundárias e a ocultação da Janela de Álgebra, utilizou-se os princípios da sinalização, da redundância e da contiguidade espacial propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013) para sua elaboração, os quais serão descritos nos próximos três parágrafos.

O princípio da sinalização implica destacar imagens essenciais em uma lição multimídia. A Figura 14 mostra que foi utilizada a cor azul para evidenciar o gráfico da função afim apresentado na construção referente à Atividade 4 realizada no *GeoGebra*, para que os alunos focassem sua atenção nele. Além disso, ele tem a mesma cor da sua expressão algébrica, o que permite ao aluno, intuitivamente, fazer uma associação entre esses elementos.

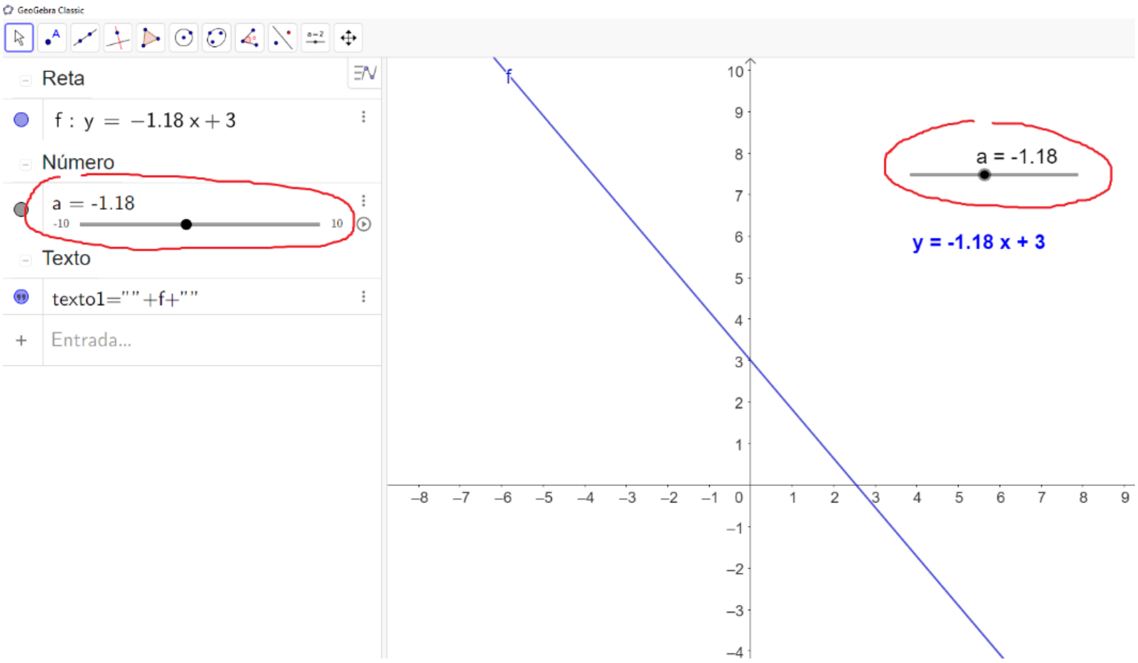
Figura 14 - Princípio da sinalização representado na construção referente à Atividade 4 realizada no *GeoGebra*



Fonte: A autora (2023)

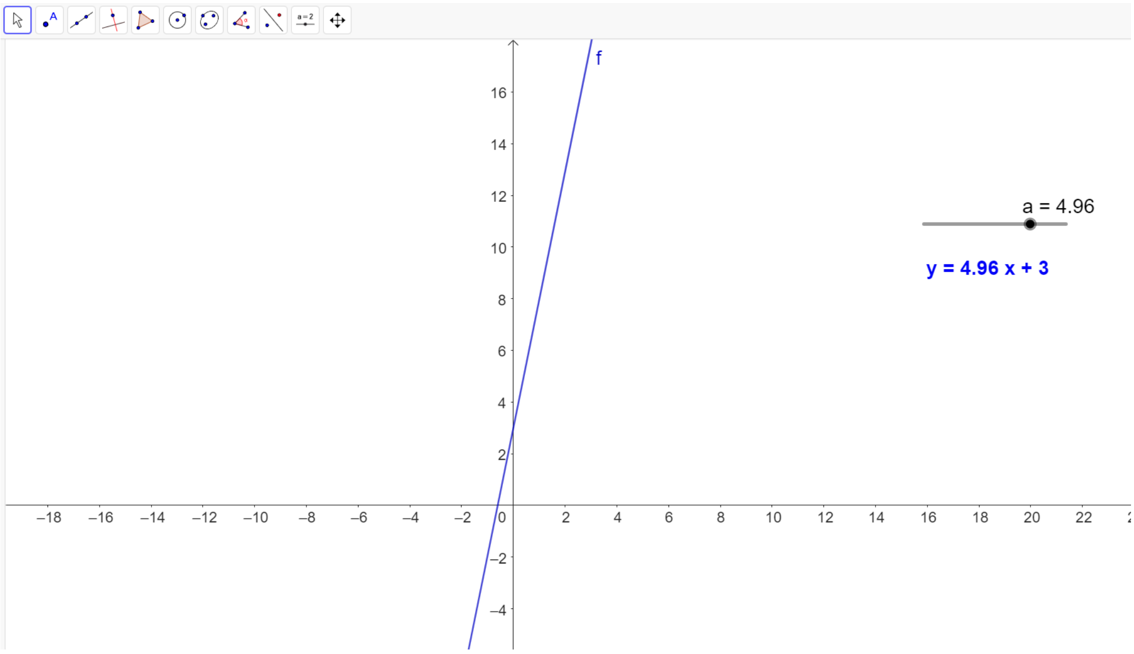
O princípio da redundância refere-se à remoção de legendas redundantes. Na construção referente à Atividade 4 realizada no *software GeoGebra*, incialmente o Controle Deslizante aparecia na Janela de Álgebra e na Janela Gráfica, como mostrado na Figura 15, mas, para que a informação não ficasse repetida e sobrecarregasse sem necessidade o aluno, a Janela de Álgebra foi ocultada, como representado na Figura 16.

Figura 15 – Construção referente à Atividade 4 realizada antes do uso do princípio da redundância



Fonte: A autora (2023)

Figura 16 - Construção referente à Atividade 4 realizada antes do uso do princípio da redundância



Fonte: A autora (2023)

Além disso, na construção referente à Atividade 4 realizada no *software GeoGebra* observa-se o princípio da contiguidade espacial, que nesse contexto, implicou em colocar o Controle Deslizante, bem como a expressão analítica da função afim, ao lado do seu gráfico, pois os alunos aprendem melhor quando as informações e imagens correspondentes estão próximas.

Ainda na elaboração da SD2, observou-se a suposição do processo ativo, no qual a TCAM é fundamentada, e que leva em consideração que a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno se engaja nos processos cognitivos para selecionar, organizar, representar e integrar a informação ao conhecimento prévio. Nesse sentido, a aplicação da SD2, dada individualmente, possibilitará que os alunos interajam com o *software GeoGebra* de acordo com o ritmo de seu desenvolvimento.

Finalmente, ressalta-se que, em todas as atividades, foi considerada a suposição do canal duplo, proposta por Mayer (2001) apud Barros (2013), a qual defende que quando informações são apresentadas por meio de recursos multimídia, como textos, imagens e sons, é possível utilizar os canais visual e o auditivo para aumentar a compreensão e retenção dessas informações. Em alguns momentos, por exemplo, teremos a explicação da professora associada com a visualização, a partir de um projetor, da tela do *software GeoGebra*. Já na realização das atividades propostas os alunos contarão com os comandos escritos e a visualização dos resultados no *software GeoGebra*.

4.2 Contexto da pesquisa

A escola onde os dados foram coletados é estadual e se localiza em um bairro periférico da cidade de Lagoa da Prata-MG. A autora atua nessa escola como efetiva desde o segundo semestre de 2022 e no ano de 2023 ministra aulas de Matemática para os alunos do 1° e do 2° ano do período matutino.

O seu ambiente escolar encontra-se em um período de transição devido à troca de direção que ocorreu entre 2022 e 2023, o que tem proporcionado à escola a chance de reavaliar práticas, refletir sobre sua trajetória e traçar novos rumos.

Nesse contexto, no começo do ano de 2023, foi instalado um laboratório de informática, o qual conta com 15 computadores com acesso à internet. No entanto, apesar desses recursos tecnológicos estarem disponíveis, até o momento, eles são utilizados apenas pelos funcionários em geral, sobretudo pelos professores, para atividades “administrativas”, como preencher diários, inserir gabaritos de avaliações externas realizadas por alunos em plataformas do estado, elaborar e encaminhar avaliações e atividades internas, entre outras tarefas similares.

Essa situação ocorre principalmente pelo fato de que as turmas do turno matutino, geralmente, têm entre trinta a quarenta alunos. Portanto, não há máquinas disponíveis para todos os alunos. A ideia de ter mais de um aluno compartilhando um computador é inviável devido ao espaço limitado do laboratório, cuja infraestrutura faz com que os computadores estejam muito próximos.

No que se refere à aplicação da SD2, uma possível solução para o problema apresentado anteriormente seria a divisão da turma em dois grupos, em que um grupo frequentaria o laboratório enquanto o outro permaneceria na sala de aula engajado em outra atividade. No entanto, essa proposta parece pouco viável, pois utilizar o dobro de aulas que seriam necessárias para concluir essa dinâmica poderia prejudicar o andamento do conteúdo de acordo com o plano de curso, especialmente nas turmas do Novo Ensino Médio, que possuem um número de aulas de Matemática reduzido. Além do mais, normalmente não há funcionários disponíveis para supervisionar os alunos que ficarão na sala de aula, o que poderia levar a um tumulto na escola.

Diante do que foi exposto, foi encontrada, em conjunto com a diretora da escola, uma solução que consiste na aplicação da sequência didática desenvolvida neste trabalho no contraturno (período vespertino). No entanto, é importante ressaltar que nem todos os alunos têm disponibilidade para participar nesse horário, devido a outros compromissos como trabalho ou cursos profissionalizantes. Portanto, a atividade foi direcionada aos alunos que se voluntariaram a participar.

Dessa forma, a Sequência Didática 2 (SD2) foi aplicada nessa escola estadual da cidade de Lagoa da Prata, em um encontro com duração em torno de duas horas e meia, no contraturno, contando com 15 alunos da 1ª série do Ensino Médio para a sua realização, na qual cada aluno tinha acesso a um computador com o *software GeoGebra* instalado.

Esses estudantes cursam a disciplina de Matemática, lecionada pela autora desde o início do ano letivo de 2023, sendo assim, a seguir discutem-se alguns pontos sobre a abordagem do conteúdo de função afim na turma frequentada por esses alunos.

A apresentação da noção de função afim se deu pela ideia de relação entre grandezas, a partir da discussão de algumas aplicações das funções na realidade do aluno. Na introdução do conteúdo, por exemplo, utilizou-se a situação que relacionava o valor gasto para completar o álbum de figurinhas da Copa do Mundo de 2022 com a quantidade de pacotes de figurinhas comprados, o que proporcionou aos alunos verificar o caráter variável das grandezas envolvidas. Além disso, com essa situação foi possível trabalhar os conceitos de taxa de variação (preço de cada pacote de figurinha) e de valor fixo (preço do álbum).

Ressalta-se que outras situações foram exploradas de acordo com a demanda dos alunos, como o preço pago em uma padaria em função da quantidade de pães compradas, o salário de um cabelereiro em função da quantidade de cortes realizado em um determinado mês, a quantidade de quilômetros percorridos por uma motocicleta em função da quantidade de gasolina gasta e o valor do desconto dado em uma compra em função do seu valor.

Nesses momentos, foi possível associar o conteúdo de função com a realidade dos alunos da turma, que contava com um barbeiro, um vendedor, além disso, foi abordada uma atividade que a maioria dos alunos faziam diariamente, que era ir à padaria comprar o pão para o café da tarde e até mesmo trabalhou com o sonho de alguns em comprar uma motocicleta e se planejar quanto ao gasto com combustível.

Acredita-se que a abordagem mais intuitiva de função afim proporcionou aos alunos uma maior facilidade na realização de questões que abordavam situações-problema, em que os alunos facilmente conseguiam identificar a "taxa fixa" e a "taxa de variação" de cada função, escrever a expressão algébrica que a representava, interpretar as informações do gráfico de uma função afim e raciocinar para obter algum dado pedido. As Figuras 17 e 18 mostram alguns exemplos de exercícios trabalhados.

Figura 17 – Exemplo 1 de exercício trabalhado na turma frequentada pelos alunos que participaram da aplicação da SD2

Um cabeleireiro cobra R$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável x de clientes sem hora marcada.

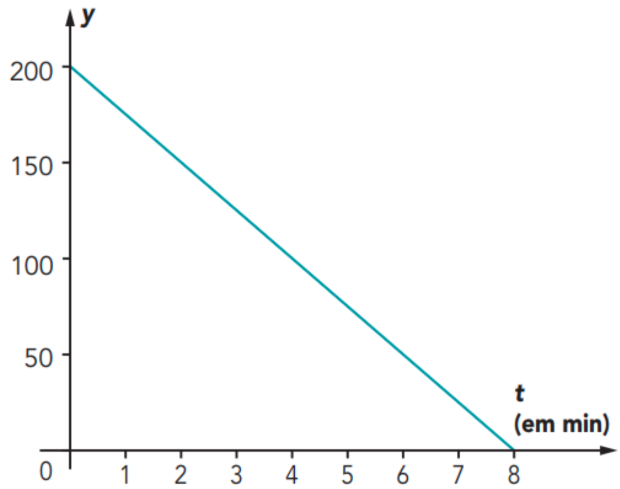
a) Escreva no caderno a fórmula matemática que fornece a quantia Q arrecadada por dia em função do número x.

b) Qual foi a quantia arrecadada em um dia em que foram atendidos 16 clientes?

Fonte: Dante (2016, p. 47)

Figura 18 – Exemplo 2 de exercício trabalhado na turma frequentada pelos alunos que participaram da aplicação da SD2

Um estabelecimento em situação de emergência retira de maneira organizada todos os convidados em segurança, usando uma única saída de emergência, em apenas 8 minutos. O gráfico a seguir representa a quantidade de pessoas dentro do estabelecimento (*y*) em função da medida de intervalo de tempo (*t*), em minutos.



Quantas pessoas ainda estavam no interior do estabelecimento após 5 minutos de evacuação?

a) 100 **c)** 80 **e)** 60

b) 90 **d)** 75

Fonte: Dante; Viana (2020a, p. 42)

As ideias de “taxa fixa” e “taxa de variação” de uma função afim foram assimiladas de maneira eficiente pelos alunos, portanto, no estudo do gráfico dessa função os alunos já tinham uma noção de que o “valor inicial”, ou seja, a “taxa fixa” era a ordenada do ponto em que o gráfico corta o eixo y. Além disso, os alunos, em sua maioria, conseguiram associar o fato de uma função ser crescente com o valor positivo de sua “taxa de variação” e que no gráfico, à medida que um ponto se “desloca para a direita” os valores correspondentes da variável y “aumentam”.

Portanto, a partir das aulas lecionadas nessa turma antes da aplicação da SD2 os alunos já tinham noção de como os coeficientes linear e angular influenciam em uma situação problema modelada por uma função afim, bem como no seu gráfico. Além disso, ressalta-se que antes da introdução do conteúdo de função foi feita uma revisão sobre a localização de pontos no plano cartesiano, associando esse conteúdo ao jogo de batalha naval, conhecido pela maioria dos alunos devido às brincadeiras interativas realizadas no programa de televisão brasileiro *"Bom dia & Cia"* exibido pelo SBT.

No entanto, um outro prerrequisito para a realização das atividades da SD2 era ter noção sobre a inclinação de uma reta. Nas aulas anteriores à aplicação dessa sequência didática esse tópico não foi abordado, o que gerou dúvidas durante a sua realização, o que será abordado na Seção 5.4.

É importante salientar que os alunos dessa turma, em sua maioria, apresentam um excelente desenvolvimento do raciocínio lógico, embora tenham dificuldade em entender a Matemática em seu aspecto mais formal. Diante disso e de circunstâncias como a defasagem provocada pela pandemia de Covid-19, a redução do número de aulas de Matemática com a implantação do Novo Ensino Médio e o fato de a maioria dos alunos não possuir uma rotina de estudos em casa, priorizou-se a abordagem de função afim segundo a ideia de relação entre grandezas.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

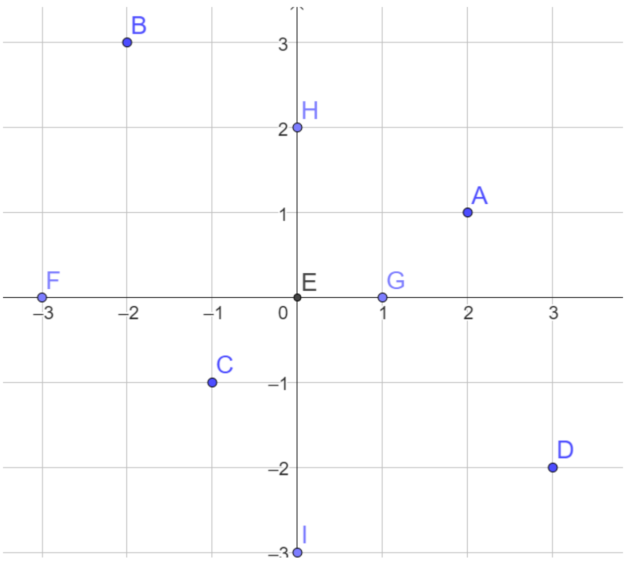
Esse capítulo é composto por cinco seções. Nas quatro primeiras seções serão analisados os dados obtidos a partir da aplicação das Atividades 1, 2, 3 e 4, respectivamente, que compõem a SD2, a qual foi aplicada em um contexto de 15 alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Lagoa da Prata-MG, segundo as condições apresentadas na Seção 4.2. Já na última seção, serão discutidas algumas contribuições observadas em sala de aula após a aplicação da SD2.

5.1 Análise dos resultados obtidos na aplicação da Atividade 1 da SD2

A Atividade 1 trata do estudo das coordenadas de um ponto no plano cartesiano, sendo que ela foi elaborada com o intuito de trabalhar a dificuldade dos alunos em entender que a localização de um ponto no plano se dá por duas coordenadas, que devem ser identificadas e registradas em uma ordem correta (primeiramente a coordenada x e em seguida a coordenada y).

Ela é composta de exercícios numerados de 1 a 5, para a resolução deles os alunos tiveram acesso a um arquivo do *GeoGebra*, no qual nove pontos, nomeados de A a I, estavam plotados, como mostra a Figura 19.

Figura 19 – Pontos A a I plotados no *GeoGebra* referentes à Atividade 1



Fonte: A autora (2023)

A partir disso, no Exercício 1, os alunos deveriam identificar em uma tabela quais eram as coordenadas dos pontos indicados, como representado na Figura 20.

Figura 20 – Exercício 1 da Atividade 1

1- Observe os pontos nomeados de A até I e complete a tabela abaixo com as suas coordenadas:

PONTO	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{A}$		
$\boldsymbol{B}$		
$\boldsymbol{C}$		
$\boldsymbol{D}$		
$\boldsymbol{E}$		
$\boldsymbol{F}$		
$\boldsymbol{G}$		
$\boldsymbol{H}$		
$\boldsymbol{I}$		

Fonte: A autora (2023)

Durante a aplicação, as dúvidas que surgiram foram relacionadas à identificação das coordenadas dos pontos F, G, H e I, sendo que os dois primeiros estavam localizados no eixo x e os dois últimos estavam localizados no eixo y. Esse questionamento era esperado, devido à dificuldade já notada pela autora em sua experiência docente, na identificação das coordenadas de pontos localizados nos eixos.

Observa-se que 13 alunos (aproximadamente 87%) conseguiram responder ao Exercício 1 corretamente, sendo que dois alunos — Aluno 1 e Aluno 2 — se equivocaram na identificação das coordenadas dos pontos D e F respectivamente, como representado na Figura 21.

Figura 21 – Respostas dadas pelos Alunos 1 e 2 no Exercício 1

Resposta do Aluno 1

PONTO	x	y
A	2	1
B	-2	3
C	-1	-1
D	-2	3
E	0	0
F	-3	0
G	1	0
H	0	2
I	-0	-3

Resposta do Aluno 2

PONTO	x	y
A	2	1
B	-2	3
C	-1	-1
D	-3	-2
E	0	0
F	0	-3 → -3 e 0
G	1	0
H	0	2
I	0	-3

Fonte: A autora (2023)

As respostas corretas seriam: ponto D, com coordenadas $x = 3$ e $y = -2$ e ponto F, com coordenadas $x = -3$ e $y = 0$. Portanto, percebe-se que os dois alunos se equivocaram ao inverter os valores das coordenadas x e y, considerado um erro comum cometido pelos alunos.

No Exercício 2, tem-se a seguinte pergunta: "Quais pontos estão localizados no eixo x?", sendo que a resposta esperada era: "Os pontos E, F e G estão localizados no eixo x."

A partir da análise das respostas obtidas no Exercício 2, tem-se que 14 alunos (87,5%) responderam corretamente, sendo que apenas um aluno se equivocou ao não colocar que o ponto E $(0,0)$ está localizado no eixo x. No entanto, vale ressaltar que durante a aplicação surgiram indagações de outros alunos sobre o fato de o ponto E $(0,0)$ estar ou não localizado no eixo x.

O Exercício 3 traz a seguinte pergunta: "O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão no eixo x?". Sendo que a resposta esperada era: "Quando um ponto está localizado no eixo x o valor de sua coordenada y é igual a zero".

No decorrer da realização do Exercício 3 surgiram dúvidas quanto à interpretação da pergunta, então foi proposto que eles analisassem os valores das coordenadas dos três pontos que se localizavam no eixo x e concluíssem o que eles tinham em comum. Ainda assim, obtiveram-se respostas do tipo: "Quando um ponto está no eixo x, é zero", dessa forma foi necessário a condução da linha de raciocínio do aluno a partir de perguntas como: "Quem é zero? A coordenada x? A coordenada y? As duas coordenadas?".

Mesmo após as discussões durante a aplicação da Atividade 1, observa-se que um aluno respondeu à pergunta da seguinte maneira: "Sempre que estão no eixo x é 0", ou seja, ou ele não soube expressar seu raciocínio na forma escrita, ou ele realmente não conseguiu entender o que era pedido e fazer conjecturas.

No Exercício 4, temos a seguinte pergunta: "Quais pontos estão localizados no eixo y?", sendo que a resposta esperada era: "Os pontos E, H e I estão localizados no eixo y".

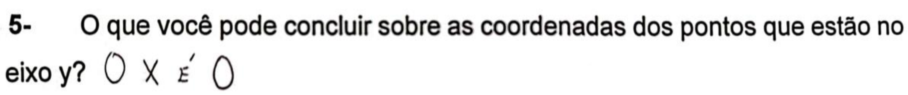
A partir da análise das respostas obtidas, dois alunos não apontaram que o ponto $E\ (0,0)$ estava localizado no eixo y, ou seja, esses alunos não perceberam que quando um ponto está localizado na origem ele está localizado simultaneamente nos eixos x e y.

Finalmente, o Exercício 5 tem como pergunta: "O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão no eixo y?", na qual se desenvolve um raciocínio semelhante ao do Exercício 3.

A partir da análise das respostas redigidas pelos alunos percebe-se que o mesmo aluno que não conseguiu concluir seu raciocínio no Exercício 3, dessa vez apresentou uma resposta incoerente, sendo ela: "Sempre que estão no eixo". Ou seja, esse aluno em específico, conseguiu, visualmente, a partir do *GeoGebra*, identificar quais pontos estavam localizados no eixo x ou no eixo y, mas não cumpriu a habilidade de fazer conjecturas a partir de observações ou de redigir uma argumentação coerente. Isso, por um lado, mostra que o *software GeoGebra* pode potencializar o aprendizado de um conteúdo, mas, por outro lado, evidencia a dificuldade na formulação de respostas completas e que façam sentido.

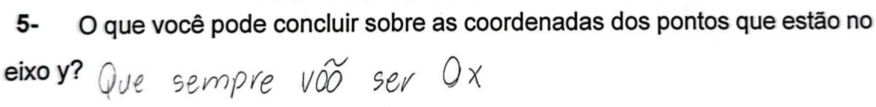
Ressalta-se ainda que outros alunos também tiveram problemas para apresentar suas ideias de maneira coerente na escrita, sendo que a partir da análise das respostas redigidas nos Exercícios 3 e 5, apesar de que foi possível entender o que o aluno queria dizer, em alguns momentos ele não conseguiu se expressar de maneira clara e plena. As Figuras 22, 23, 24 e 25 trazem alguns exemplos de respostas dadas pelos alunos que comprovam isso.

Figura 22 – Exemplo 1 de resposta formulada de maneira incompleta


5- O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão no eixo y? 0 X é 0

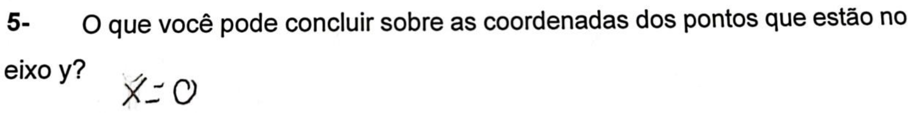
Fonte: A autora (2023)

Figura 23 – Exemplo 2 de resposta formulada de maneira incompleta


5- O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão no eixo y? Que sempre vão ser 0x

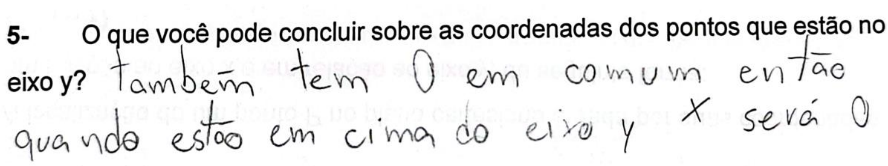
Fonte: A autora (2023)

Figura 24 – Exemplo 3 de resposta formulada de maneira incompleta


5- O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão no eixo y? X=0

Fonte: A autora (2023)

Figura 25 – Exemplo de resposta com ideias mal estruturadas


5- O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão no eixo y? também tem 0 em comum então quando estão em cima do eixo y X será 0

Fonte: A autora (2023)

5.2 Análise dos resultados obtidos na aplicação da Atividade 2 da SD2

A Atividade 2 foi elaborada com o objetivo de apresentar aos alunos a ferramenta do *GeoGebra* denominada Controle Deslizante.

Incialmente, a partir de um passo a passo impresso e disponibilizado para os alunos e da visualização dos comandos em tempo real realizados pela professora no *software GeoGebra,* a partir do recurso de projeção, foi gerado um segmento de reta com comprimento igual a *c*, sendo que esse comprimento c estava associado a um Controle Deslizante. Um recorte do roteiro para essa construção está representado na Figura 26.

Figura 26 - Roteiro para a construção referente à Atividade 2

- Na Caixa de Entrada do *GeoGebra* digite c e aperte *enter*.

Agora, vamos associar esse valor de c com o objeto Segmento Com Comprimento Fixo. Para isso, faça o que se pede:

- Selecione a ferramenta Segmento Com Comprimento Fixo.

- Clique em qualquer ponto da tela "da direita" e digite que o comprimento é igual a c.

Fonte: A autora (2023)

Em seguida, a Atividade 2 apresentou um desafio que consistia em, a partir da construção realizada incialmente — um segmento de reta com comprimento igual a c, no qual seu valor pode ser alterado a partir de um Controle Deslizante — os alunos pensassem em uma maneira de simular o efeito de uma vela (na vertical) queimando e o representasse no *GeoGebra*.

A realização desse desafio não resultou em dados escritos para a análise, mas, a partir da observação durante a aplicação, são feitas algumas considerações descritas a seguir.

Primeiramente, todos os alunos conseguiram simular o efeito pedido, alguns sozinhos, outros com a ajuda de colegas ou da professora. Além disso, nesse momento, os alunos foram instigados a completar o desafio e, sem seguir um roteiro, interagiram com o *software GeoGebra*, testando ferramentas, arrastando objetos, descobrindo novos recursos, o que vai de encontro com o processo ativo, no qual a TCAM é fundamentada, que leva em consideração que a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno se engaja no seu processo cognitivo.

5.3 Análise dos resultados obtidos na aplicação da Atividade 3 da SD2

A Atividade 3 é composta por cinco exercícios, numerados de 1 a 5 e foi elaborada com o objetivo de estudar como o coeficiente linear de uma função afim influencia no comportamento do seu gráfico. Nesse contexto, considera-se uma função afim dada por $y = ax + b$, na qual b representa o seu coeficiente linear.

Ressalta-se que, em decorrência das aulas anteriores à aplicação da SD2, os alunos já tinham a noção de que na modelagem de uma situação, a partir de uma função afim, o coeficiente b indica o valor inicial ou a taxa fixa, e em alguns momentos já tinha sido discutido que o gráfico corta o eixo de y no ponto $(0, b)$.

Na primeira parte da Atividade 3 pede-se que os alunos insiram a função afim dada por $y = x + 4$ no *software GeoGebra* a partir da Caixa de Entrada. A partir disso, os Exercícios 1 e 2 apresentam perguntas sobre a expressão analítica e o gráfico dessa função, sendo elas, respectivamente, "Qual é o valor de b nessa função?" e "Qual é a coordenada y do ponto em que o gráfico dessa função corta o eixo de y?".

O intuito era de que os alunos percebessem que o valor de b é igual ao valor da coordenada y do ponto em que o gráfico dessa função corta o eixo de y. Seguindo essa mesma linha, temos os Exercícios 3 e 4, representados na Figura 27.

Figura 27 – Exercícios 3 e 4 da Atividade 3

- Na Caixa de Entrada digite $y = x - 8$.

3. Qual é o valor de b nessa função?

4. Qual é o valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y?

Fonte: A autora (2023)

Assim, a partir das respostas dadas aos Exercícios 1, 2, 3 e 4, o objetivo era de que o aluno tivesse condições para responder à pergunta feita no Exercício 5, sendo ela: "Qual a sua conclusão sobre o valor de b e o valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y?". Esperava-se que os alunos respondessem que "O valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y é igual ao valor do coeficiente b".

Com a análise das respostas dadas nos Exercícios da Atividade 3, observa-se que apenas 6 alunos (40%) conseguiram responder corretamente ao que foi pedido. A seguir são discutidos alguns casos de erros observados nas respostas dos demais alunos.

Um aluno respondeu corretamente aos Exercícios 1 a 4, mas no Exercício 5 registrou a seguinte resposta: "que o eixo de y é negativo". Acredita-se que esse aluno queria dizer que o valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y é negativo, sendo que nos Exercícios 3 e 4 as respostas realmente eram valores negativos, no caso - 8, portanto, parece que o aluno não entendeu que era necessário analisar os Exercícios de 1 a 4 para chegar a uma conclusão.

Outro aluno respondeu: “o valor de x fica 0”, o que contém um raciocínio correto, mesmo que escrito de forma incompleta, mas ele não respondeu à pergunta, ou seja, novamente ocorreu um erro de interpretação.

Ainda, três alunos responderam incorretamente alguns dos Exercícios de 1 a 4 e, mesmo assim, redigiram um argumento correto no exercício, o que permite indagações de que se eles realmente entenderam ou só copiaram do colega.

Finalmente, um aluno escreveu respostas incoerentes, não soube identificar o coeficiente b, conceito já trabalhado em sala de aula, bem como não conseguiu identificar o ponto em que o gráfico cortava o eixo de y.

Diante de tantos erros apresentados por diversos alunos considera-se que devem ser feitos novos ajustes na Atividade 3, como, por exemplo, uma mudança na forma como a pergunta do Exercício 5 foi realizada, a qual muitos alunos não conseguiram interpretar. Além disso, o uso de apenas duas funções para que fosse feita a análise da relação entre os valores de b e os valores das coordenadas y dos pontos em que os seus gráficos cortam o eixo y, parecem insuficientes para a elaboração de conjecturas. Para esse problema, talvez o uso do Controle Deslizante associado ao valor de b seria uma saída a ser pensada em uma próxima oportunidade.

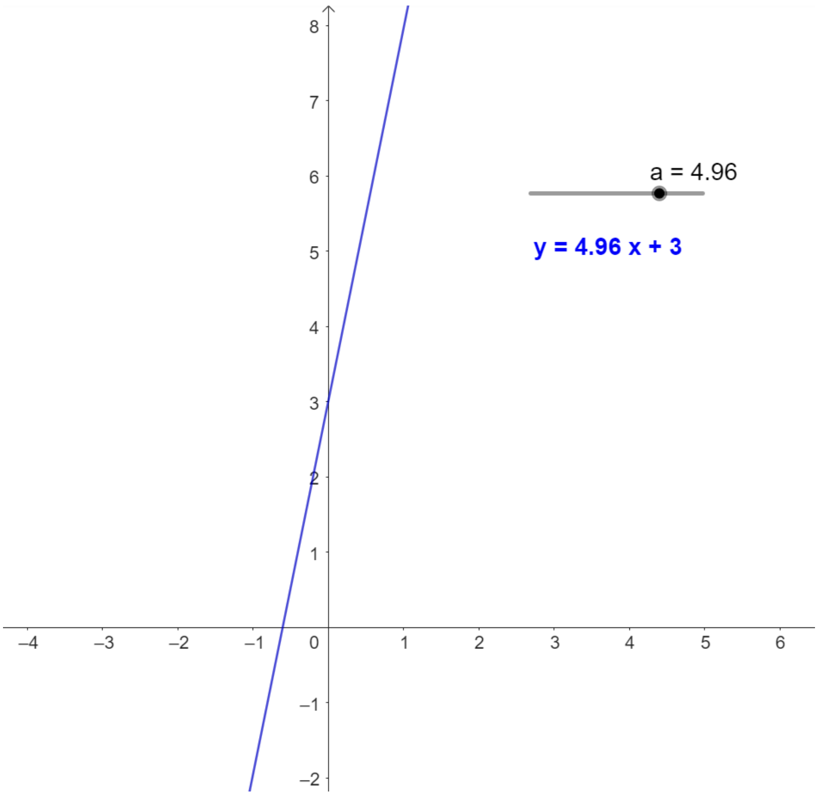
5.4 Análise dos resultados obtidos na aplicação da Atividade 4 da SD2

A Atividade 4 é composta por alguns comandos e pelos Exercícios 1 e 2, e foi elaborada com o objetivo de estudar como o coeficiente angular de uma função afim influencia no comportamento do seu gráfico. Nesse contexto, considera-se uma função afim dada por $y = ax + b$, na qual a representa o seu coeficiente angular.

Ressalta-se que em decorrência das aulas anteriores à aplicação da SD2, os alunos já tinham a noção de que na modelagem de uma situação, a partir de uma função afim, o coeficiente a representa a taxa de variação, e houve discussões superficiais sobre o fato de que, se ela for positiva, a função é crescente, e, se for negativa, a função é decrescente.

Incialmente, os alunos tiveram acesso a um arquivo do *GeoGebra*, representado na Figura 28, no qual havia o gráfico de uma função afim e a sua expressão analítica, sendo que o valor de a estava associado a um Controle Deslizante, para que os seus valores pudessem ser alterados.

Figura 28 - Construção do GeoGebra referente à Atividade 4



Fonte: A autora (2023)

No Exercício 1 temos a seguinte pergunta: “O que você conclui sobre o sinal de a e o fato de a função ser crescente ou decrescente?”. Esperava-se como resposta: “Quando o valor de a é positivo a função é crescente e quando o valor de a é negativo a função é decrescente”.

Todos os alunos conseguiram responder corretamente a essa pergunta, sendo que muitos associaram uma função ser crescente quando da esquerda para a direita o seu gráfico “está subindo” e uma função ser decrescente quando da esquerda para a direita o seu gráfico “está descendo”.

No Exercício 2, tem-se a seguinte pergunta: “O que você conclui sobre a inclinação da reta e o valor de a?”. Esperava-se que os alunos respondessem que quanto maior é o valor de a, em módulo, a reta tem uma maior inclinação, e quanto menor é o valor de a, em módulo, a reta tem uma menor inclinação.

Os alunos, em sua maioria, não conseguiram responder à pergunta proposta, sendo que foram necessárias discussões sobre o que seria a inclinação de uma reta e o desenvolvimento do raciocínio foi realizado apenas oralmente e com a orientação da professora, ou seja, não foram obtidos dados escritos para a análise do Exercício 4.

Sendo assim, para o melhor desenvolvimento dessa parte da Atividade 4, deveria ter sido feita uma explicação prévia sobre o conceito de inclinação de uma reta.

5.5 Análise das aulas após a aplicação da SD2

Ainda são observadas as repercussões do ensino de função afim a partir do *software GeoGebra*, mesmo após semanas da aplicação da SD2. No que se refere ao estudo do comportamento dos gráficos de funções afim e quadrática percebe-se uma maior facilidade por parte dos alunos em identificar intervalos de crescimento e decrescimento de função, bem como reconhecer em quais intervalos a função é positiva ou negativa. Além disso, observa-se um avanço no que se refere à localização e determinação das coordenadas do ponto em quem essas funções interceptam os eixos x e y.

Em uma situação específica, durante a introdução do conceito de zero da função afim e a sua localização no gráfico, uma aluna observou que o zero da função separa a função em intervalos em que ela é positiva e negativa e afirmou que ter tido contato, durante a realização da SD2, com o *software GeoGebra* ajudou muito na visualização desse comportamento.

Além disso, houve demandas de alguns alunos para que fossem realizadas mais atividades utilizando tecnologias digitais, pois, para eles o ensino se torna mais instigante; no caso do estudo do gráfico de funções, por exemplo, é mais fácil visualizar suas características a partir do *software GeoGebra* do que no quadro.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa foi desenvolvida uma sequência didática (SD2) para trabalhar o conteúdo de função afim, utilizando o *software* GeoGebra como recurso didático, a fim de verificar as contribuições das TIC na Educação Matemática.

Para a construção desta sequência didática foi necessário estudar o desenvolvimento histórico do conceito de função, expor algumas de suas aplicações, destacando sua importância na modelagem de situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, bem como discutir sobre algumas das dificuldades identificadas pela autora em sua experiência como docente e por outros pesquisadores no processo de ensino-aprendizagem de Função.

Além disso, a escolha de uma tecnologia digital como ferramenta para o desenvolvimento das atividades da sequência didática fundamentou-se no estudo da BNCC e em pesquisas sobre a utilização das TIC no ensino da Matemática, que permitiu a percepção do seu potencial para tornar o ensino mais eficaz, o que ganhou ainda mais destaque com a necessidade de implantação do ensino remoto em razão da pandemia causada pelo coronavírus (COVID-19).

Devido à abstração e à abrangência alcançada pelo seu conceito, o ensino de função se depara com um grande desafio, sendo que uma das principais dificuldades, abordada por pesquisadores e observada na experiência da autora, é a coordenação entre suas representações analíticas e gráficas. Nesse sentido, o *GeoGebra* se tornou uma ferramenta relevante para o estudo desse conteúdo, pois além de ser um recurso acessível e permitir a realização e manipulação de construções gráficas de maneira fácil e rápida, ele proporciona a visualização simultânea da representação analítica e gráfica de uma função.

Além disso, a elaboração de tal sequência foi fundamentada segundo princípios propostos por Mayer (2009) apud Barros (2013), a partir do desenvolvimento da TCAM, os quais serviram como orientação para a criação de atividades envolvendo recursos multimídias que potencializam o processo de ensino-aprendizagem.

A partir da aplicação da sequência didática em uma turma da 1ª série do Ensino Médio e da análise dos resultados obtidos, tanto durante a realização das atividades, quanto nas aulas posteriores, foi possível notar que os alunos conseguiram entender melhor o significado dos coeficientes angular e linear na modelagem de situações do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento.

Também foi possível perceber que os alunos tiveram uma maior facilidade na interpretação do comportamento dos gráficos, como, por exemplo, na análise dos intervalos de crescimento e decrescimento, bem como dos intervalos em que a função é positiva ou negativa. Além disso, a simples inserção da tecnologia e a mudança de ambiente já despertou um entusiasmo nos alunos, o que tornou o processo de ensino-aprendizagem mais prazeroso.

Visando a aplicação da Sequência Didática 2 no próximo ano, pretende-se aprimorar as suas atividades, como por exemplo a Atividade 3, relativa ao estudo da influência do coeficiente linear de uma função afim no comportamento do seu gráfico, na qual, após a análise dos resultados obtidos, supõe-se que a utilização da ferramenta Controle Deslizante do *software GeoGebra* teria potencializado a investigação sobre a relação entre o valor do coeficiente linear e o valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y.

Além disso, em aulas anteriores à aplicação da sequência didática a que se refere essa dissertação, foram discutidas situações do dia a dia do aluno que podiam ser descritas por uma função afim, debatendo-se sobre a "taxa de variação" e a "taxa fixa" para formular a sua expressão analítica e a sua representação gráfica. Verificou-se, a partir da análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização de atividades em momentos anteriores e posteriores à aplicação da sequência didática, que essa abordagem de função se tornou uma potencializadora no processo de ensino-aprendizagem, portanto, dando continuidade a essa pesquisa, objetiva-se o desenvolvimento de atividades focadas no estudo de função segundo sua aplicação no cotidiano.

Por fim, espera-se que essa pesquisa sirva de inspiração para outros professores na busca de metodologias e ferramentas que possam potencializar o processo de ensino-aprendizagem, destacando aqui o uso das TIC, que fazem parte do cotidiano do aluno e precisam ser pensadas para serem incluídas na educação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. G. et al. **Ensino remoto e tecnologia: uma nova postura docente na educação pós-pandemia**. Anais VII CONEDU. Campina Grande: Realize Editora, 2020.

ALVARENGA, K. BARBOSA, C. V., FERREIRA, G. M. **O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a.C. até o século XX.** Revista Eletrônica de Matemática. Florianópolis, Santa Catarina, v. 9, n. 1, p. 159 -178, 2014.

BARROS, A. P. R. M. **Contribuições de um micromundo composto por recursos do *GeoGebra* e da coleção M³ para a aprendizagem do conceito de volume de pirâmide**. 2013. 162 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

BONJORNO, J. R. GIOVANNI, J. R. SOUSA, P. R. C. **Prisma Matemática: funções e progressões: Ensino Médio: área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BOOTH, L. R. **Algebra: Children's Strategies and Errors**. Windsor, UK: NFER-Nelson, 1984.

BORBA, M.C.; CONFREY, J. **A student´s constructioon of transformations of functions in a multiple representacioonal environment, Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht, v. 31, p. 319-337, 1996.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOTO, C.; SANTOS, V. M.; SILVA, V. B.; OLIVEIRA, Z. V. (Orgs.). **A escola pública em crise: inflexões, apagamentos e desafios**. São Paulo: FEUSP, 2020.

BRASIL**.** Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. LEI N.º 13.415, de 16 de fevereiro de 2017- Diário Oficial da União - Seção 1 - 17/2/2017, Página 1 (Publicação Original).

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ministério da Educação e do Desporto – Secretaria de Educação Fundamental, terceiro e quarto ciclo. Brasília, 2008.

BRIGUENTI, M. J. L. **Considerações sobre a história da Trigonometria: uma abordagem sobre o trabalho de Ptolomeu**. Métrica, São José do Rio Preto, n. 56, p. 1-25, 1996.

COLL, C.; MONEREO, C. **Psicologia da educação virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação.** Porto Alegre: Artmed, 2010.

COSTA, F. A. O potencial transformador das TIC e a formação de professores e educadores. In: ALMEIDA, M. E. B.; DIAS, P., SILVA, B. D. **Cenários de inovação para a educação na sociedade digital.** São Paulo: Edições Loyola, p. 47-74, 2013.

CURSINO, A. G. **Tecnologias na educação: contribuições para uma aprendizagem significativa**. Curitiba: Appris, 2019.

CORREIA, C. **A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII**. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações I**. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, L. R. VIANA, F**. Matemática em contextos: função afim e função quadrática**. São Paulo: Ática, 2020a.

DANTE, L. R. VIANA, F. **Matemática em contextos: função exponencial, função logarítmica e sequências**. São Paulo: Ática, 2020b.

DANTE, L. R. VIANA, F. **Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares**. São Paulo: Ática, 2020c.

DELFINO, S. S.; PINHO NETO, J. A. S.; SOUSA, M. R. F. **Desafios da sociedade da informação na recuperação e uso de informações em ambientes digitais**. Revista Digital de Biblioteconomia & Ciência da Informação, v. 17, 2019.

FARFÁN, R. M. **Uma pesquisa em Educação Matemática. Da propagação do calor à noção de convergência**. Educação Matemática Pesquisa. v. 5, n. 2, São Paulo, 2003.

FERREIRA, R. B. **Galileu e a sua importância epistemológica**. Spectrum, p.162-167, 2004.

FROTA, P.; MORAES, M. **Calculando com Galileu: os desafios da Ciência Nova**. Linguagens, Educação e Sociedade, v. 6, n. 6, p. 13-27. Teresina, 2001.

LIBÂNEO, J. C. **Adeus Professor, Adeus Professora? Novas exigências educacionais e profissão docente**. 13ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LINHARES, R. N.; CERVERÓ, A. C.; PAIXÃO, P. B. S. **Pesquisa online como estratégia pedagógica nos contextos científicos da cibercultura**. Notandum. São Paulo. v. 43, jan- abr, 2017.

MASETTO, M. T. Mediação Pedagógica e o uso da tecnologia. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 17ª ed. Campinas: Papirus, p. 133 – 173, 2010.

OLIVEIRA, N. **O conceito de função: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 1997.

PARRAS, R.; MASCIA, M. A. **Efeitos da pandemia na educação escolar**. Linha Mestra. v. 16, n. 46, 2022.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática. n. 15, p. 3-9, 1990.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, R. T. N. **Das aulas presenciais às aulas remotas: as abruptas mudanças impulsionadas na docência pela ação do Coronavírus – o COVID-19**. Revista Científica Schola. Santa Maria, Rio Grande do Sul, v. 6, n. 1, jul, 2020.

VIEIRA, M. F.; SILVA, C. M. S. **A educação no contexto da pandemia de COVID-19: uma revisão sistemática de literatura.** Revista Brasileira de Informática na Educação. v. 28, p. 1013-1031, 2020.

SÁ, P.F.; SOUZA, G.S.; SILVA I. D. B. **A construção do conceito de função: alguns dados históricos.** Traços, v. 6, n. 11, p. 123-140. Belém, 2003.

SFARD, A. **On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics**, n. 22, p. 1-36, 1991.

SILVA, M. L. F.; CAMPELO, C. L. F.; BORGES, E. L. M. **Tecnologias na Educação: perspectivas e desafios na formação de professores frente à pandemia do novo coronavírus.** Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v. 22, n. 4, 2022.

SILVA, M. H. M; REZENDE, W. M. **Análise histórica do conceito de função.** Caderno Dá Licença. v. 2, ano 2, dez. 1999.

SILVA, M. J. S. et al. **Educação e ensino remoto em tempos de pandemia: desafios e desencontros.** Anais VII CONEDU. Campina Grande: Realize Editora, v. 3, p. 827-841, 2021.

ZUFFI, E. M. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função**. Revista Brasileira de História, Educação e Matemática. v. 1, n. 1, p 10-16, 2016.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. **O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de ciências**. Ciência e Educação. v. 8, n. 1, p. 1-2, 2002.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1

Primeiro passo: criar um Controle Deslizante para o coeficiente a e um Controle Deslizante para o coeficiente b.

Para isso, faça o que se pede:

- Digite a na Caixa de Entrada e aperte *enter*. Perceba que foi criada uma "barra", a partir da qual você pode alterar os valores de a.
- Digite b na Caixa de Entrada e aperte *enter*. Perceba que foi criada uma "barra", a partir da qual você pode alterar os valores de b.

Segundo passo: inserir a função afim dada por $y = ax + b$, para que seu gráfico seja plotado na Janela de Visualização Gráfica.

Para isso, faça o que se pede:

- Na Caixa de Entrada digite $y = ax + b$ e aperte *enter*.

Terceiro passo: Investigar a influência dos coeficientes a e b no gráfico da função afim dada por $y = ax + b$.

Para isso, faça o que se pede:

- Na "barra" para o valor de a, criada no primeiro passo, clique na "bolinha preta" e arraste para os lados, para que o seu valor seja alterado.
- Na "barra" para o valor de b, criada no primeiro passo, clique na "bolinha preta" e arraste para os lados, para que o seu valor seja alterado.

A partir da análise realizada no terceiro passo, responda às perguntas propostas a seguir.

Perguntas:

Pergunta 1: O que podemos concluir sobre relação entre o valor de a e a inclinação do gráfico?

Pergunta 2: O que podemos dizer sobre o sinal de a e o fato de a função ser crescente ou decrescente?

Pergunta 3: Qual é a relação entre o valor de b e o ponto em que o gráfico corta o eixo y?

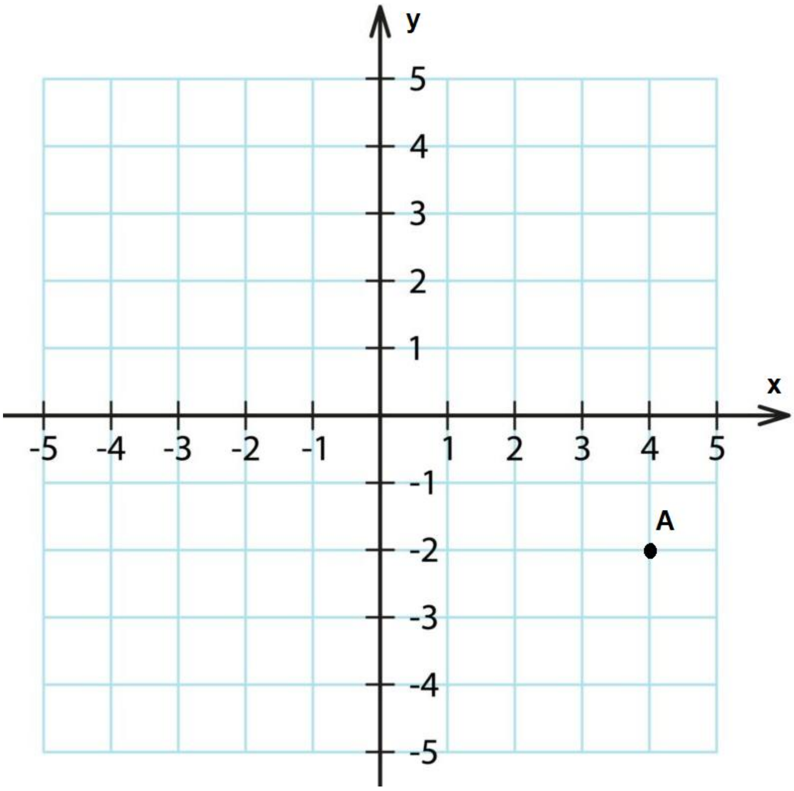
APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2

Atividade 1: Ponto no plano cartesiano

A localização de um ponto P no plano cartesiano é dada por suas coordenadas em relação ao eixo x e em relação ao eixo y, da seguinte forma:

$$P = (x, y)$$

Exemplo:



Para o ponto A temos:

$x = 4; y = -2.$

Então: $A = (4, -2)$

- Abra o arquivo ATIVIDADE 1.

1- Observe os pontos nomeados de A até I e complete a tabela abaixo com as suas coordenadas:

PONTO	x	y
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		

2- Quais pontos estão localizados no eixo x?

3- O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão localizados no eixo x?

4- Quais pontos estão localizados no eixo y?

5- O que você pode concluir sobre as coordenadas dos pontos que estão localizados no eixo y?

Atividade 2: Ferramenta Controle Deslizante

A ferramenta Controle Deslizante permite causar variações em objetos (alterar o comprimento de um segmento, mudar a inclinação de uma reta, entre outros).

Exemplo:

- Abra o arquivo ATIVIDADE 2.

- Na Caixa de Entrada do *GeoGebra* digite c e aperte *enter*.

- Foi criada uma "barra" com o valor de c. Perceba que se você clicar na "bolinha preta" e arrastar para qualquer lado o valor de c vai mudar.

Agora, vamos associar esse valor de c com o objeto Segmento Com Comprimento Fixo. Para isso, faça o que se pede:

- Selecione a ferramenta Segmento Com Comprimento Fixo.

- Clique em qualquer ponto da tela "da direita" e digite que o comprimento é igual a c.

- Utilize a "barra" com o valor de c (alterando seus valores, clicando e arrastando) e observe o que acontece com o comprimento do segmento de reta quando você altera o valor de c.

- Clique no "play" ao lado da "barra" com o valor de c e observe a animação.

1- Considere que o segmento de reta criado anteriormente seja o comprimento de uma vela. Pense em uma estratégia para simular o efeito de uma vela (na vertical) queimando. Represente esse efeito no *GeoGebra*.

Atividade 3: Estudo do valor de "b" na função afim

Seja uma função afim dada por $y = ax + b$**.** Lembre-se que o valor de b representa a taxa fixa ou o valor inicial.

Vamos analisar como o valor de b influencia no gráfico de uma função afim.

- Abra o arquivo ATIVIDADE 3.

- Na Caixa de Entrada digite $y = x + 4$.

1. Qual é o valor de b nessa função?

2. Qual é o valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y?

- Clique na reta e depois na tecla delete.

- Na Caixa de Entrada digite $y = x - 8$.

3. Qual é o valor de b nessa função?

4. Qual é o valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y?

5. Qual a sua conclusão sobre a relação entre valor de b e o valor da coordenada y do ponto em que o gráfico corta o eixo y?

Atividade 4: Estudo do valor de "a" na função afim

Seja uma função afim dada por $y = ax + b$**.** Lembre-se que o valor de a é a taxa de variação da função.

Vamos analisar como o valor de a influencia no gráfico de uma função afim.

- Abra o arquivo ATIVIDADE 4.

- Clique com o botão direito em cima da "barra" com o valor de a e em seguida clique em animação.

- A partir da animação, analise como o valor de a influencia no gráfico da função.

1- O que você conclui sobre o sinal de a e o fato de a função ser crescente ou decrescente?

2- O que você conclui sobre a inclinação da reta e o valor de a?