



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Triângulos Esféricos

Paulo Aírton Cordeiro de Souza

Teresina - 2013

Paulo Aírton Cordeiro de Souza

Dissertação de Mestrado:

Triângulos Esféricos

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

Teresina - 2013

S729t

Souza, Paulo Aírton Cordeiro de

Triângulos Esféricos / Paulo Aírton Cordeiro de Souza. -
Teresina: 2013.

41 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal do Piauí,
Teresina, 2013.

Orientador: Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

1. Triângulos Esféricos. 2. Teorema de Euler.
3. Geometria Esférica. I. Título.

CDD 510

*À minha esposa Gerlane e aos meus filhos Paulo
Aírton, Suyene e Isaac.*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus por ter dado a força necessária para toda essa jornada, por ter iluminado minha mente nas dificuldades e por ter dado condições para concluir este curso.

Agradeço aos professores e tutores do curso pelos ensinamentos que foram valiosos nesse percurso e pelas orientações dadas que facilitaram a aprendizagem.

Agradeço aos amigos do curso que formaram um verdadeiro grupo de estudo que foi determinante na minha caminhada com êxito, onde fizemos discussões dos temas com dicas e estratégias de aprendizagem. Sou imensamente grato aos amigos Edivan, Hélder, Nascimento, Ethiamara, Valessa Zaigla e Valtércio. Em especial ao amigo Hélder por ter me ajudado a escolher o tema deste trabalho.

Agradeço à minha esposa Gerlane e meus filhos Paulo Aírton, Suyene e Isaac pela força que me deram para está sempre motivado, por compreenderem minha ausência nos finais de semana e feriados que utilizava para estudar.

Agradeço aos meus pais Raimundo e Maria pelo acompanhamento durante minha formação, aos meus irmãos pelo incentivo e minha madrinha Graça Caldas (*in memoriam*) por acreditar na minha capacidade para concluir este curso.

Agradeço ao meu orientador, Juscelino, pela grande colaboração na realização deste trabalho.

Agradeço ao Colégio Dez, em Parnaíba, por permitir que me ausentasse, utilizando o tempo disponível para estudar.

Agradeço ao Colégio das Irmãs, em Teresina, por ceder suas instalações nos finais de semana e feriados para que eu e meus colegas de curso nos reuníssemos para discutir os

temas propostos pelos professores.

Agradeço a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

“Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente.”

Roger Von Oech.

Resumo

Esta dissertação trata do estudo de uma geometria não euclidiana, onde definimos e classificamos triângulos esféricos. Demonstramos teoremas e fizemos aplicações na Geometria Espacial com a demonstração do Teorema de Euler nos poliedros convexos, assim como, na Navegação Marítima, onde mostramos que os conhecimentos sobre triângulos esféricos podem auxiliar o comandante de um navio na tomada de decisões para a escolha entre o caminho ideal a ser realizado através dos círculos máximos (geodésicas da Terra) e outros caminhos. Este trabalho objetiva levar aos professores de matemática do ensino médio o conhecimento de uma geometria nova, a saber, a geometria esférica, factível e essencial para o nosso mundo real e cujos resultados análogos como por exemplo o teorema dos cossenos, o teorema dos senos e a soma dos ângulos internos de um triângulo apresentam resultados novos impressionantes e distintos do caso plano.

Palavras-chave: Triângulos esféricos, o teorema de Euler, Geometria Esférica e Marítima.

Abstract

This thesis deals with the study of a non-Euclidean geometry, where we define and classify spherical triangles. We demonstrate theorems and do applications in Space Geometry with the demonstration of Euler's theorem on convex polyhedra, as well as the Maritime, where we show that the knowledge of spherical triangles can assist the master of a ship in choosing the best course to be taken through the great circles (Earth geodesic), among other paths. This paper aims to bring high school Mathematics teachers one more tool to calculate the distance between two points on a spherical surface, which is closer to reality.

Keywords: Spherical Triangles, Euler's Theorem, Maritime and Spherical Geometry.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Triângulos Planos, Paralelismo e Poliedros	5
1.1 Triângulos Planos	5
1.1.1 Definição	5
1.1.2 Classificação	6
1.1.3 Congruência de Triângulos	7
1.2 Paralelismo	11
1.3 Poliedros	17
1.3.1 Relação entre o número de arestas e o número de faces	18
1.3.2 Relação entre o número de arestas e o número de vértices	18
2 Triângulo Esférico	20
2.1 Fórmulas	22
2.2 Fórmulas Fundamentais	22
2.3 Analogia dos Senos	24
3 Aplicações dos Triângulos Esféricos	25
3.1 Teorema de Euler	25
3.2 Navegação Marítima	32
3.2.1 Referenciais na superfície da Terra	33
3.2.2 Coordenadas Terrestres	34
3.2.3 Fusos Horários	35
3.2.4 Relação entre o Arco de Paralelo e o correspondente Arco do Equador	37

Sumário	viii
3.2.5 Problemas	38
4 Considerações Finais	40
Referências	41

Introdução

Segundo Euclides, o conceito de retas paralelas: retas pertencentes ao mesmo plano e que, estendidas indefinidamente nos dois sentidos, não se cruzam. Muitos geômetras tentaram “provar” o quinto postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros, mas seus críticos, logo, perceberam que os quatro postulados anteriores não eram suficientes para concluir que o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta é outra reta.

Na tentativa de encontrar absurdos na justificativa do quinto postulado, o padre jesuíta italiano Girolamo Giovanni Saccheri (1667-1723), nascido em San Remo, descobriu os primeiros teoremas não euclidianos. Depois de muitos anos de estudos, publicou suas conclusões em um célebre livro chamado “Euclides livre de todas as máculas”.

O suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), conhecendo a obra de Saccheri, deu continuidade ao estudo de uma geometria não euclidiana, descobrindo novos teoremas. Outro matemático que estudou a teoria das paralelas foi Adrien Marie Legendre (1752-1833). No início não acreditava na existência de outras geometria (não euclidianas), mas, também, descobriu importantes teoremas não euclidianos.

Gauss também voltou sua atenção para a questão. No início, tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides por redução ao absurdo mas as conclusões que tirava pareciam-lhe possíveis em algum tipo de geometria. Escreveu para Farkas Bolyai: *“É verdade que eu cheguei a várias coisas que muitas pessoas considerariam uma prova: mas, em meus olhos, elas nada provam. Por exemplo, se alguém conseguisse demonstrar a possibilidade de um triângulo retilíneo cuja área fosse maior do que qualquer área dada, então eu estaria pronto para provar o conjunto da Geometria de maneira absolutamente rigorosa. Muitas pessoas admitiram isso como um axioma mas eu não. De fato, seria possível que a área ficasse sempre abaixo de certo limite, não importando o quão longe os três vértices do triângulo fossem colocados”*. Note que um triângulo sobre a superfície de uma esfera, a área desse triângulo esférico não pode ultrapassar certo limite. Depois de

muito estudo na tentativa de reduzir o quinto postulado a uma decorrência dos anteriores, admitiu a possibilidade de se construir outras geometrias em que o conceito de paralelismo fosse diferente daquele assumido por Euclides. Uma de suas conclusões foi que naquela geometria (hoje denominada Geometria Hiperbólica), a soma dos ângulos de um triângulo é menor do que dois retos. Gauss tinha muitos trabalhos, mas nunca os publicou.

Um gênio matemático alemão chamado Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) fez novas descobertas no estudo das Geometrias. Estudou na Universidade de Berlim e, mais tarde, transferiu-se para Göttingen, onde Gauss era considerado o maior matemático do mundo. Em 1854 surgiu a possibilidade de Riemann tornar-se professor daquela Instituição, para isto, deveria expor um trabalho diante de uma banca examinadora presidida por Gauss. Um dos trabalhos intitulado: “Sobre as hipóteses que constituem os fundamentos da Geometria”. Conta-se que Gauss, ao ler este título, teria dito: “Vamos ouvir o que este jovem tem a dizer sobre isso”.

Tal dissertação, deu novos rumos às pesquisas geométricas e tornou-se um marco na História da Matemática. Em seu trabalho, Riemann introduziu o conceito de espaços com mais de três dimensões, definiu espaços curvos e relacionou sua curvatura com a expressão do elemento de distância. Este novo campo de estudo criado por Riemann foi bastante útil para novos matemáticos explorarem suas consequências e fizeram notáveis descobertas.

Até então alguns geômetras, tais com Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bolyai e Lobachevsky não acreditavam existir uma Geometria em que a soma dos ângulos internos de um triângulo fosse maior do que dois ângulos retos. Conheciam a geometria Euclidiana que nos diz que esta soma é igual a dois ângulos retos e uma geometria não Euclidiana, hoje conhecida como geometria hiperbólica, afirma que esta mesma soma é menor do que dois ângulos retos.

Riemann resolveu pesquisar sobre esta impossibilidade, questionando o teorema do ângulo externo, quando afirma que duas perpendiculares a uma mesma reta não podem se cruzar, caso contrário, estaria formando um triângulo onde o ângulo externo não seria maior que os internos não adjacentes. Riemann percebeu que uma reta pode ser uma linha fechada, como um ciclo trigonométrico. Através desta idéia, o teorema do ângulo externo perde a validade e duas perpendiculares a uma mesma reta sempre se cruzam.

Assim, Riemann iniciou uma nova geometria não euclidiana, hoje conhecida como

Geometria Elíptica, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior do que dois ângulos retos. Sobre uma esfera as retas perpendiculares a uma reta passam por dois pontos diametralmente opostos.

No Ensino Fundamental toda a estrutura da Geometria Plana é estudada. Nesta etapa, almeja-se que o aluno seja capaz de compreender e interpretar postulados e teoremas, bem como aplicá-los na resolução de problemas. Com a ampliação dos conhecimentos geométricos, o educando pode realizar demonstrações para ter uma aprendizagem efetiva. Este conhecimento adquirido será utilizado no Ensino Médio, com o estudo da Geometria Espacial, relacionando-a com o cotidiano, observando formas dos sólidos geométricos. Neste contexto, calculam-se distâncias, áreas e volumes. Tem-se, ainda, a Geometria Analítica, onde se representa figuras planas através de equações, bem como, permite verificar o comportamento destas figuras no Plano Cartesiano.

Esta Geometria Clássica que se estuda na Educação Básica tem entre seus princípios básicos o quinto postulado de Euclides, que mereceu uma atenção especial dos principais geômetras de todos os tempos. Na tentativa de encontrar absurdos na justificativa do quinto postulado, geômetras criaram novas geometrias, uma delas é a Geometria Esférica.

Este trabalho vem apresentar uma nova visão da Geometria, através dos triângulos esféricos, onde seus conceitos apresentam resultados novos, impressionantes e essenciais para o nosso mundo real. Apresentamos uma proposta para se estudar uma nova Geometria, chamada de Geometria Esférica, através dos triângulos esféricos. Inicialmente queremos divulgar para que os professores de Ensino Médio passem a conhecê-la e se sintam motivados para inclui-la nos seus planos. Usando metodologias de ensino, visando à exploração dos seus conceitos, os professores têm a oportunidade de possibilitar aos estudantes discussões, análises, conjecturas e formulações de ideias, que possam se transformar em conhecimento desta nova Geometria. O estudo dos conceitos básicos da Geometria Esférica permite fazer uma integração da Matemática com a Geografia já que estes conceitos são estudados pelos alunos do Ensino Médio nesta disciplina.

O capítulo 1 trata dos conceitos básicos de Geometria Plana com a apresentação dos triângulos planos, onde demonstramos alguns teoremas, que são comparados, no capítulo 2, com os triângulos esféricos. Ainda, no capítulo 1, definimos poliedros e mostramos as relações entre seus elementos, para que seja feita uma aplicação, no capítulo 3, dos triângulos esféricos com a demonstração do Teorema de Euler.

No capítulo 2, fizemos uma abordagem dos triângulos esféricos com definições, classificações e demonstrações de teoremas que serão utilizados em aplicações destes triângulos. No capítulo 3, apresentamos duas aplicações dos triângulos esféricos, a saber, Teorema de Euler nos poliedros e Navegação Marítima. Na primeira aplicação, destacamos o uso da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico que está ao alcance dos professores de matemática do ensino médio e envolve um raciocínio que nos deixa encantados com extrema beleza. Na segunda aplicação, destacamos a importância dos conhecimentos sobre triângulos esféricos para que o comandante de um navio escolha a melhor alternativa para sua navegação através dos círculos máximos (geodésicas da Terra).

Capítulo 1

Triângulos Planos, Paralelismo e Poliedros

Neste capítulo seguimos as definições e resultados apresentados nos livros [2], [4], [6] e [8].

1.1 Triângulos Planos

1.1.1 Definição

Considere três pontos A , B e C no plano. Se C estiver sobre a reta AB , diremos que A , B e C são colineares; caso contrário, diremos que A , B e C são não-colineares (figura 1.1).

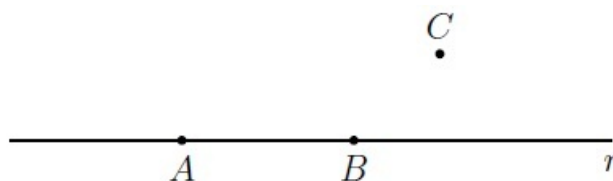


Figura 1.1: três pontos não-colineares

Três pontos não-colineares formam um triângulo. Nesse caso, a região triangular correspondente é região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A , B e C tais pontos, diremos que A , B e C são vértices do triângulo ABC (figura 1.2)

Ainda em relação a um triângulo genérico ABC , dizemos que os segmentos AB , AC e BC (ou seus comprimentos) são os lados do triângulo; escreveremos em geral $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo ABC (figura

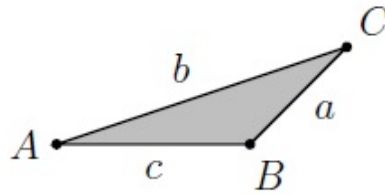


Figura 1.2: o triângulo ABC de vértices A, B e C.

1.2). A soma dos comprimentos dos lados do triângulo é seu perímetro, o qual será, doravante, denotado por $2p$; assim, p é o semiperímetro do triângulo. Nas notações da figura 1.2, temos

$$p = \frac{a + b + c}{2}. \tag{1.1}$$

Os ângulos $\angle A = \angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$ e $\angle C = \angle ACB$ (ou suas medidas $\hat{A} = \hat{BAC}$, $\hat{B} = \hat{ABC}$ e $\hat{C} = \hat{ACB}$) são os ângulos internos do triângulo.

1.1.2 Classificação

Podemos classificar triângulos de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às suas medidas de seus ângulos; vejamos, por enquanto, como classificá-los em relação a seus lados. Como todo triângulo tem três lados, as únicas possibilidades para os comprimentos dos mesmos são que haja pelo menos dois lados iguais ou que os três lados sejam diferentes dois a dois. Assim, um triângulo ABC é denominado:

- a) **Equilátero**, se $AB = AC = BC$.
- b) **Isósceles**, se ao menos dois dentre AB , AC , BC forem iguais.
- c) **Escaleno**, $AB \neq AC \neq BC \neq AB$.

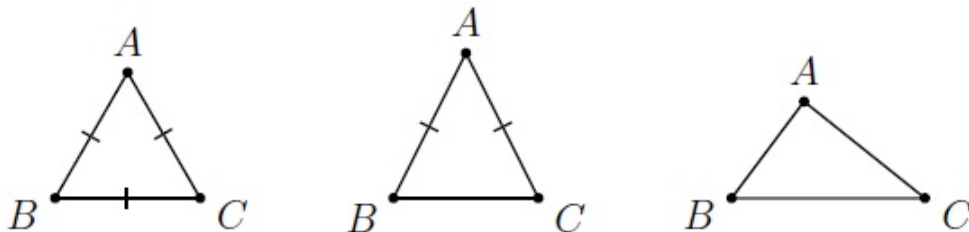


Figura 1.3: triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.).

1.1.3 Congruência de Triângulos

Dizemos que dois triângulos são **congruentes** se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Assim, se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ forem congruentes, deve existir uma *correspondência* entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes. A figura 1 mostra dois triângulos congruentes ABC , $A'B'C'$, com a correspondência de vértices

$$A \longleftrightarrow A'; \quad B \longleftrightarrow B'; \quad C \longleftrightarrow C'$$

Para tais triângulos, temos então

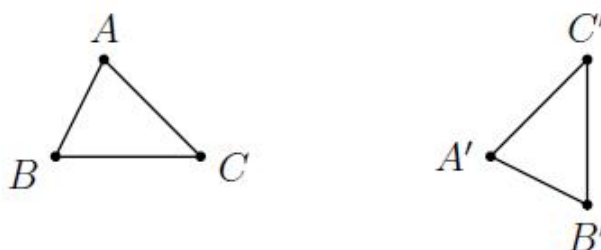


Figura 1.4: dois triângulos congruentes.

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A}'; & \widehat{B} = \widehat{B}'; & \widehat{C} = \widehat{C}' \\ AB = A'B'; & AC = A'C'; & BC = B'C' \end{cases}$$

É imediato que a congruência de triângulos possui as duas propriedades interessantes a seguir ¹:

1. **Simetria:** tanto faz dizermos que um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF quanto dizer que DEF é congruente a ABC , ou mesmo que ABC e DEF são congruentes. Isso porque se pudermos mover ABC , sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com DEF , então certamente poderemos fazer o movimento contrário com DEF até superpô-lo a ABC .

¹O leitor com algum conhecimento prévio de geometria Euclidiana notará que, no que segue, não listamos a propriedade *reflexiva* da congruência de triângulos. Nesse sentido, sempre que nos referirmos, em um certo contexto, a *dois triângulos*, ficará implícito que os mesmos são, necessariamente, *distintos*.

2. **Transitividade:** se ABC for congruente a DEF e DEF for congruente a GHI , então ABC será congruente a GHI . Isso porque podemos mover ABC até fazê-lo coincidir com GHI por partes; primeiro, movemos ABC até que ele coincida com DEF e, então, continuamos a movê-lo até que coincida com GHI .

Doravante, escreveremos

$$ABC \equiv A'B'C'$$

para denotar que os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, com a correspondência de vértices

$$A \longleftrightarrow A'; \quad B \longleftrightarrow B'; \quad C \longleftrightarrow C'.$$

Seria interessante dispormos de critérios para decidir se dois triângulos dados são ou não congruentes. Tais critérios deveriam ser os mais simples possíveis, a fim de facilitar a verificação da congruência. Esses critérios existem e são chamados **casos de congruência de triângulos**.

Axioma 1. *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

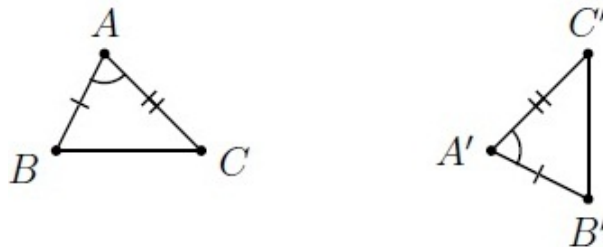


Figura 1.5: dois triângulos congruentes.

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados triângulos ABC e $A'B'C'$,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{cases} \xrightarrow{\text{LAL}} ABC \equiv A'B'C'.$$

Este axioma é conhecido como **primeiro caso de congruência de triângulos**. Outros dois casos serão apresentados a seguir.

Teorema 1. (2º Caso de congruência - ALA). *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

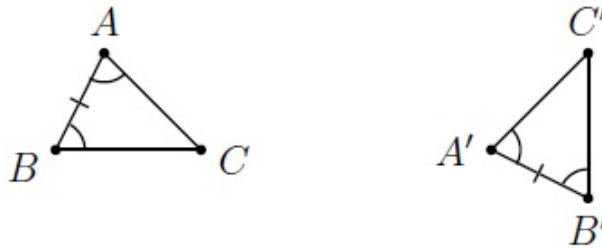


Figura 1.6: o caso de congruência ALA.

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right. \stackrel{ALA}{\implies} ABC \equiv A'B'C'.$$

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$. Seja D um ponto da semirreta AC tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$. Compare os triângulos ABD e $A'B'C'$. Como $\overline{AD} = \overline{A'C'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, concluímos, pelo Axioma 1, que ABD e $A'B'C'$ são congruentes. Como consequência, tem-se que $\hat{A}BD = \hat{B}'$. Mas, por hipótese, $\hat{B}' = \hat{A}BC$. Logo $\hat{A}BD = \hat{A}BC$. Consequentemente as semirretas BD e BC coincidem. Mas então o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD . Como já provamos que ABD e $A'B'C'$, então ABC e $A'B'C'$ são congruentes. \square

Teorema 2. (3º Caso de congruência - LLL). *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right. \stackrel{LLL}{\implies} ABC \equiv A'B'C'.$$

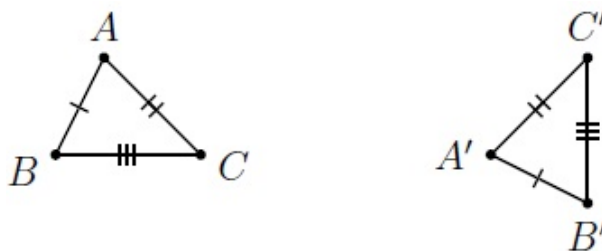


Figura 1.7: o caso de congruência LLL.

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Provaremos que ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

Para isto, construa, a partir da semirreta AB e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C , um ângulo igual ao ângulo \hat{A}' . No lado deste ângulo que não contém o ponto B , marque um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ e ligue D a B . Como $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (por hipótese), $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ (por construção) e $D\hat{A}'B = \hat{A}'$ (por construção), então ABD e $A'B'C'$ são congruentes pelo Axioma 1. Mostraremos agora que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto trace CD . Como $\overline{AD} = \overline{A'C'} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{B'C'} = \overline{BC}$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B$ e logo que $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Mas então, pelo Axioma 1, podemos concluir que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Como já tínhamos provado que ABD e $A'B'C'$, concluímos que ABC e $A'B'C'$ são congruentes. \square

Exemplo 1. São dados dois pontos A e B fora de uma reta m (figura 1.8). Determinar um ponto P sobre a reta m tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja o menor possível.

Solução. Inicialmente vamos supor que A e B estejam em semi-planos distintos relativamente a reta m . Neste caso o segmento AB intersecta a reta m num ponto P . Afirimo que este ponto é a solução do nosso problema. De fato, suponhamos que existe outro P' situado sobre a reta m , então, pela desigualdade triangular, teremos

$$\overline{AP'} + \overline{P'B} \geq \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB},$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $P = P'$.

No caso em que A e B estão em um mesmo semi-plano, seja B' o reflexo do ponto B relativamente a reta m . Se P' é qualquer ponto de m , então vemos que os triângulos BPD e $B'PD$ são congruentes, pelo Axioma (1), pois $BD = B'D$, $B\hat{D}P = B'\hat{D}P$ e DP é lado comum. Analogamente, os triângulos $BP'D$ e $B'P'D$ também são congruentes (figura

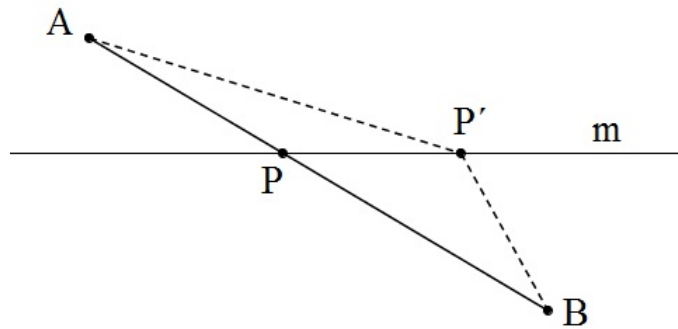


Figura 1.8: A e B em semi-planos distintos em relação a m.

1.9). Logo, as seguintes igualdades seguem diretamente dessas congruências: $BP = B'P$ e $BP' = B'P'$. Conseqüentemente, teremos que

$$\overline{AP'} + \overline{BP'} = \overline{AP'} + \overline{B'P'} \geq \overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB'} = \overline{AP} + \overline{BP}.$$

Assim, a solução é o ponto P obtido pela interseção de m com o segmento AB.

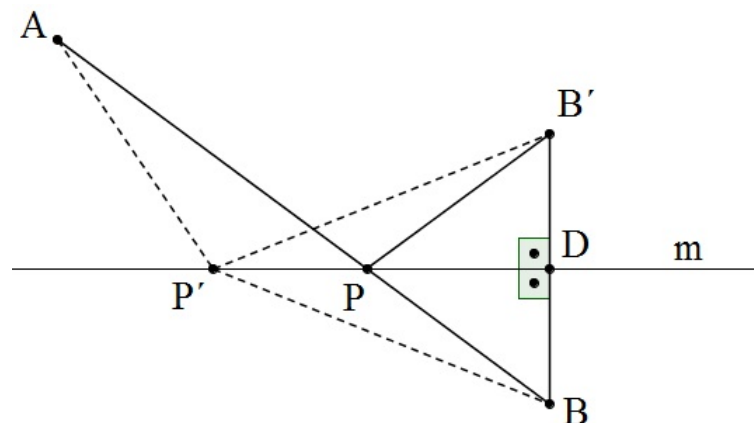


Figura 1.9: A e B no mesmo semi-plano em relação a m.

É interessante observar que este problema surge em Física, quando se tenta determinar um ponto P, sobre um espelho, onde deve ocorrer a reflexão de um raio de luz que vai do ponto A ao ponto B, refletindo-se no espelho. Ou quando tenta-se determinar um ponto onde uma bola de bilhar deve chocar-se com a lateral da mesa, para ir do ponto A, tocar na lateral e atingir uma bola que se encontra no ponto B.

1.2 Paralelismo

Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou elas têm um ponto em comum ou não têm nenhum ponto em comum; no primeiro caso, as

retas são ditas **concorrentes**; no segundo, as retas são **paralelas** (figura 1.10).



Figura 1.10: retas concorrentes (esq.) e paralelas (dir.).

Lema 1. *Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e M o ponto médio do lado AC (figura 1.12). Prolongue a semirreta BM até o ponto B' tal que $BM = MB'$, e considere os triângulos ABM e $CB'M$: temos $AM = CM$, $BM = B'M$ e $\widehat{AMB} = \widehat{CMB'}$ (ângulos opostos pelo vértice). Portanto, pelo caso LAL temos $\triangle AMB \equiv \triangle CMB'$ e, daí, $\widehat{B'CM} = \widehat{BAM}$. Logo,

$$\widehat{XCA} > \widehat{B'CA} = \widehat{B'CM} = \widehat{BAM} = \widehat{BAC}.$$

Analogamente, prova-se que $\widehat{XCA} > \widehat{ABC}$.

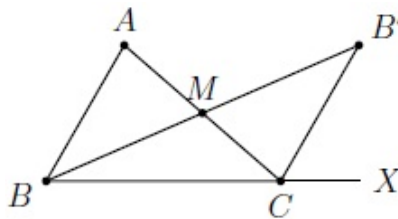


Figura 1.11: a desigualdade do ângulo externo.

□

Teorema 3. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.*

Demonstração. Consideremos D no lado \overline{BC} do triângulo ABC tal que $\overline{CD} \equiv \overline{AC}$. Sendo $\overline{BC} > \overline{AC}$, temos que D é interno a \widehat{CAB} e daí $\widehat{CAB} > \widehat{CAD}$. Pelo fato do triângulo CAD ser isósceles de base \overline{AD} vem $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CDA}$; logo

$$\widehat{CAB} > \widehat{CDA} \tag{1.2}$$

Como o ângulo $\widehat{C\hat{D}A}$ é ângulo externo no triângulo ABD , temos, pelo Lema (1), que

$$\widehat{C\hat{D}A} > \widehat{A\hat{B}D} = \widehat{A\hat{B}C} \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3), vem: $\widehat{C\hat{A}B} > \widehat{A\hat{B}C}$, ou seja, $\widehat{A} > \widehat{B}$. □

Postulado 1. (Quinto Postulado ou Postulado das Paralelas). *Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s , paralela a r e passando por A .*

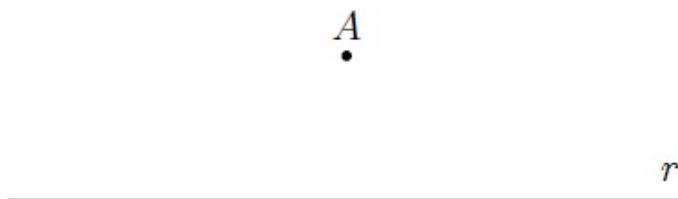


Figura 1.12: Postulado das paralelas.

De posse do quinto postulado, podemos enunciar e provar alguns dos mais importantes resultados da geometria Euclidiana. Para o primeiro deles, suponha dadas no plano retas r , s e t , com t intersectando r e s respectivamente nos pontos A e B (figura 1.13). Nas notações da figura 1, os ângulos α e β são ditos **alternos internos**, ao passo que os ângulos α e γ são chamados **colaterais internos**.

De posse da nomenclatura acima, temos o seguinte critério para o paralelismo de duas retas.

Proposição 1. *Nas notações da figura (1.13), temos*

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ.$$

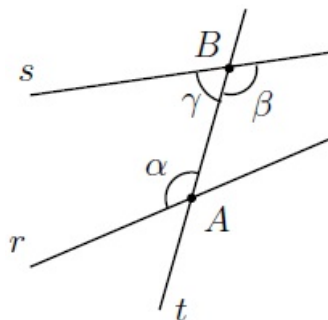


Figura 1.13: ângulos alternos internos e colaterais internos.

Demonstração. Inicialmente, note que, com $\beta + \gamma = 180^\circ$, temos que

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Portanto, basta provarmos que $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Se $\alpha = \beta$, então $r \parallel s$. De fato, se r intersectasse s num ponto P , como na figura 1, formar-se-ia um triângulo ABP , onde A e B são a interseção de t com r e s , respectivamente. Neste triângulo α é ângulo externo e β é um ângulo interno não adjacente a α , ou vice-versa. Assim, pelo Lema 1 teríamos $\alpha \neq \beta$, o que contradiz nossa hipótese. Portanto, r e s não se intersectam, ou seja, $r \parallel s$. Reciprocamente, se α e β não fossem congruentes,

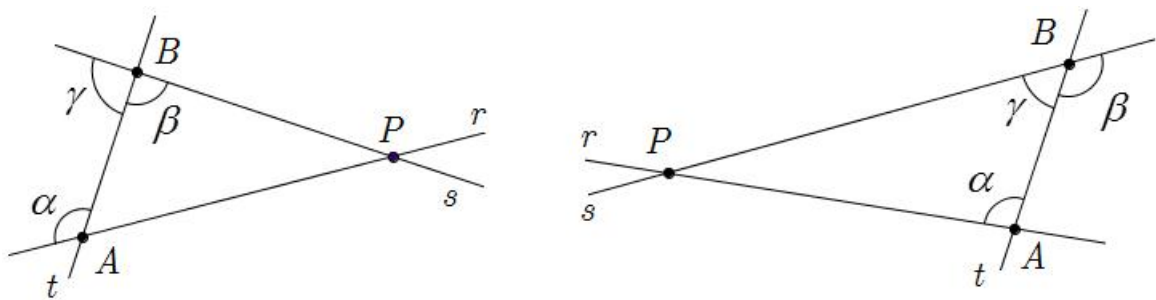


Figura 1.14: ângulos alternos internos e colaterais internos.

existiria uma reta m , distinta de s , passando pelo ponto B tal que $\beta' = \alpha$ (figura 1). Mas $\beta' = \alpha$ implica que $m \parallel s$. Assim, pelo ponto B teríamos retas distintas m e s , ambas

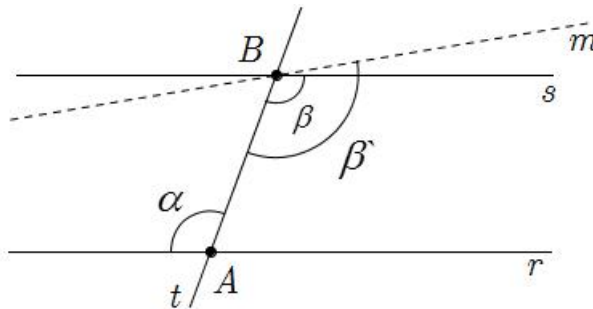


Figura 1.15: ângulos alternos internos e colaterais internos.

paralelas à reta r , o que contraria o Postulado 1. Logo, $r \parallel s \Rightarrow \alpha = \beta$. □

Exemplo 2. Considere que:

- Os raios de Sol incidem paralelamente sobre a Terra.
- O planeta Terra é uma esfera cuja linha do Equador tem 40.000 km de perímetro.

Na figura a seguir são representados os raios solares incidindo nos pontos P e Q da linha

do Equador do planeta Terra e são indicadas as medidas dos ângulos que esses raios formam com as normais à superfície terrestre nesses pontos.

Qual é o comprimento do arco PQ, que corresponde à menor distância de P a Q, em

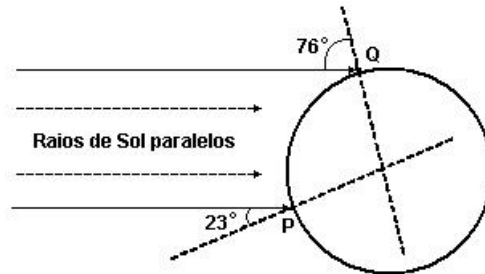


Figura 1.16:

quilômetros?

Solução. Seja C o centro da Terra. Pelo Postulado (1) podemos traçar pelo ponto C uma única reta t paralela às retas AP e DQ. Como $\widehat{APF} = \widehat{BCP}$ e $\widehat{DQE} = \widehat{BCQ}$, pela

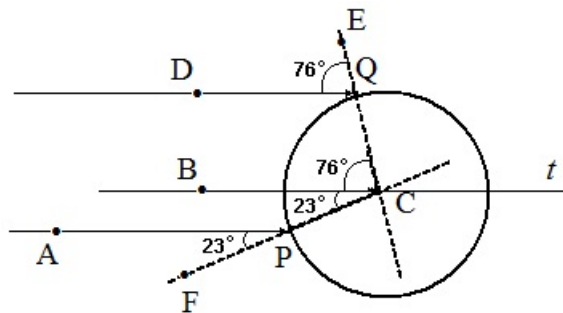


Figura 1.17:

Proposição (1), temos o ângulo central $\widehat{PCQ} = 76^\circ + 23^\circ = 99^\circ$. Assim, o comprimento do arco menor \widehat{PQ} é igual a $\frac{99^\circ}{360^\circ}$ do comprimento da Terra, isto é, $\frac{99}{360} \cdot 40000 = 11000$ km

Teorema 4. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, e XY a reta paralela a reta BC e passando por A (ver figura 1.18). Pela Proposição (1), temos que $\widehat{B} = \widehat{BAX}$ e $\widehat{C} = \widehat{CAY}$ e, daí,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{CAX} + \widehat{CAY} = 180^\circ$$

□

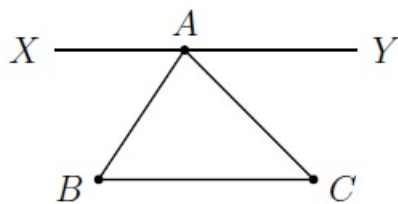


Figura 1.18: Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Teorema 5. (4º Caso de congruência - LAAo). *Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Em símbolos, dados triângulos ABC e A'B'C', temos:*

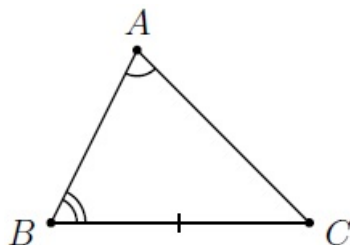


Figura 1.19: O caso de congruência LAAo.

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e A'B'C', temos:

$$\begin{cases} \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases} \stackrel{\text{LAAo}}{\implies} ABC \equiv A'B'C'.$$

Demonstração. Basta observar que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$ nos dão

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A'} - \widehat{B'} = \widehat{C'}.$$

Portanto, temos para os triângulos ABC e A'B'C' que

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

Pelo caso ALA, tais triângulos são congruentes. □

Exemplo 3. (União Soviética) *Em um país, certo dia, um avião partiu de cada cidade com destino à cidade mais próxima. Se as distâncias entre as cidades são duas a duas distintas, prove que em nenhuma cidade aterrissaram mais de cinco aviões.*

Solução. Consideremos que numa cidade A aterrissaram aviões provenientes das cidades B e C . Segue-se que BC é o maior lado do triângulo ABC . De fato, pois, se (por exemplo) AB (o mesmo é feito com AC) for o maior lado do triângulo ABC , então nem B é a cidade mais próxima para A , nem A é a cidade mais próxima para B e daí a estrada AB não deveria existir. Como BC é o maior lado do triângulo ABC , temos, pelo Teorema 3 que \widehat{BAC} é o seu maior ângulo. Segue-se que $\widehat{BAC} \neq 60^\circ$ pois o triângulo ABC é escaleno. Suponhamos que existam seis estradas que vão desde A até outras cidades. Então a soma dos seis ângulos em volta de A deveria ser maior que 360° , o que é impossível.

1.3 Poliedros

Definição 1. Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:

- a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro.

Dizemos que um poliedro (no sentido da definição 1) é *convexo* se o seu interior é convexo.

Um conjunto C , do plano ou do espaço, diz-se *convexo*, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C .

Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos (figura 1.20).

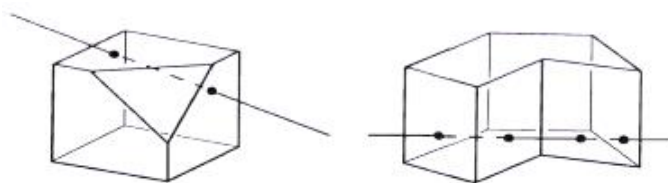


Figura 1.20: Um poliedro convexo e um não convexo.

1.3.1 Relação entre o número de arestas e o número de faces

Sejam o número de arestas e o número de faces de um poliedro denotados, respectivamente, por A e F . As faces podem ser de gêneros diferentes, representaremos por f_n ($n \leq 3$), o número de faces que possuem n lados. Temos que o total de faces é a soma de todas as faces de cada gênero

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \dots \quad (1.4)$$

e o total de arestas é igual à soma do número de faces triangulares multiplicado por 3, com o número de faces quadrangulares multiplicado por 4, com o número de faces pentagonais multiplicado por 5, e assim por diante. Mas, como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$2A = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \quad (1.5)$$

1.3.2 Relação entre o número de arestas e o número de vértices

Denotamos por V o número de vértices do poliedro. Como os vértices podem ser de gêneros diferentes, representaremos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas e percebe que cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas. O total de vértices é a soma de todos os vértices de cada gênero, ou seja,

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \dots \quad (1.6)$$

Podemos também contar as arestas observando os vértices do poliedro. Se em cada vértice contarmos quantas arestas nele concorrem, somando os resultados obteremos também o dobro do número de arestas (pois cada aresta terá sido contada duas vezes: num extremo e no outro). Logo,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots \quad (1.7)$$

Exemplo 4. (UERJ) *No icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas (figura 1.21). Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 centímetros de linha. Depois de pronta a bola, qual o comprimento*

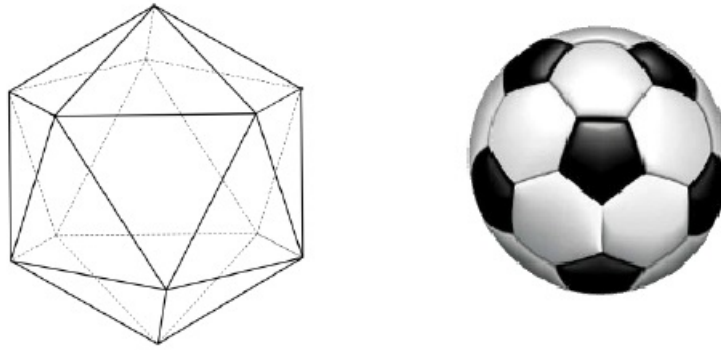


Figura 1.21:

mínimo de linha utilizado pelo artesão?

Solução. Cada face pentagonal do poliedro resultante P apareceu onde havia um vértice do icosaedro. Como o icosaedro tem 12 vértices então P tem 12 faces pentagonais. Cada face (triangular) do icosaedro deu origem a uma face hexagonal de P . Como o icosaedro tem 20 faces triangulares então P tem 20 faces hexagonais. Assim, $F_5 = 12$ e $F_6 = 20$ e daí o número de arestas de P é $A = \frac{5f_5 + 6f_6}{2} = \frac{5 \cdot 12 + 6 \cdot 20}{2} = 90$. Como em cada aresta ele gastou 7 cm de linha, então o artesão utilizou $90 \cdot 7 \text{ cm} = 630 \text{ cm} = 6,3 \text{ m}$.

Capítulo 2

Triângulo Esférico

Neste capítulo seguimos as definições e resultados apresentados no livro [1].

Se um plano passa pelo centro de uma esfera, ele a dividirá em dois hemisférios idênticos e a interseção entre eles determinam um círculo máximo cujo centro coincide com o centro da esfera. Qualquer plano que intersecta a esfera sem passar pelo seu centro determina um círculo menor (figura 2.1).

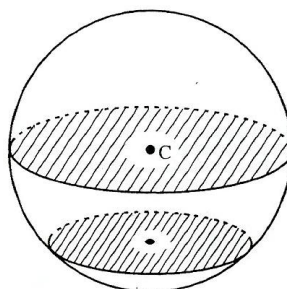


Figura 2.1: Círculos máximos e círculos menores.

Definição 2. Quando dois círculos máximos se intersectam em um ponto (figura 2.2), formam entre si um **ângulo esférico** e a sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes tiradas do ponto de interseção.

Definição 3. Sejam A , B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a um mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que une esses pontos dois a dois chama-se **triângulo esférico** (figura 2.3).

Denotamos os ângulos de um triângulo esférico por \widehat{BAC} , \widehat{ABC} e \widehat{ACB} e seus lados, respectivamente, por a , b e c .

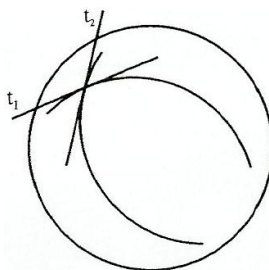


Figura 2.2: Ângulo esférico.

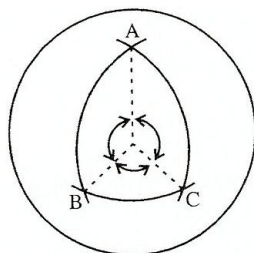


Figura 2.3: Triângulo esférico.

Os lados de um triângulo esférico são arcos de círculos máximos que divididos pelo raio da esfera nos dão o ângulo entre os pontos que ligam.

Ao contrário dos triângulos planos, os esféricos podem ter os três ângulos retos ou três lados, medindo cada um 90° . Assim, os triângulos esféricos classificam-se:

1) Quanto aos ângulos:

- a) *retângulo*, quando possuem um ângulo reto;
- b) *birretângulo*, quando possuem dois ângulos retos;
- c) *trirretângulo*, quando possuem os três ângulos retos.

2) Quanto aos lados:

- a) *retilátero*, quando possuem um lado medindo 90° ;
- b) *birretilátero*, quando possuem dois lados medindo 90° cada um;
- c) *trirretilátero*, quando possuem cada um dos lados medindo 90° .

Note que, se um triângulo esférico é trirretângulo, então é trirretilátero e, reciprocamente, ou seja, trata-se de um triângulo que cobre exatamente a oitava parte da superfície esférica associada.

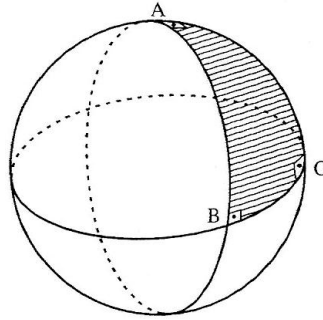


Figura 2.4: Oitava parte da superfície esférica.

2.1 Fórmulas

2.2 Fórmulas Fundamentais

Teorema 6. *Se ABC um triângulo esférico de lados a , b e c , respectivamente, opostos aos ângulos $\hat{B}AC$, $\hat{A}BC$ e $\hat{A}CB$, então*

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A. \quad (2.1)$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo esférico da esfera de centro O e lados a , b e c , medidos, respectivamente, pelos ângulos $\hat{B}OC$, $\hat{A}OC$ e $\hat{A}OB$. As tangentes t_1 e t_2 aos círculos máximos AB e AC são, ambas, perpendiculares ao raio OA da esfera. Os prolongamentos dos raios OB e OC encontram as tangentes t_1 e t_2 nos pontos D e E , formando o triângulo plano ADE .

De acordo com a figura ??, notam-se quatro triângulos planos, dois deles retângulos em A . À vista disto, escrevem-se as relações pertinentes.

No $\triangle AOD$ temos

$$\operatorname{tg} \hat{B}OA = \frac{AD}{OA} \Leftrightarrow AD = OA \cdot \operatorname{tg} \hat{B}OA \quad \text{e} \quad \operatorname{sec} \hat{B}OA = \frac{OD}{OA} \Leftrightarrow OD = OA \cdot \operatorname{sec} \hat{B}OA.$$

Como $\hat{B}OA = c$, resulta:

$$AD = AO \cdot \operatorname{tg} c \quad \text{e} \quad OD = OA \cdot \operatorname{sec} c. \quad (2.2)$$

No $\triangle AOE$ temos

$$\operatorname{tg} \hat{A}OC = \frac{AE}{OA} \Leftrightarrow AE = OA \cdot \operatorname{tg} b \quad \text{e} \quad \operatorname{sec} \hat{A}OC = \frac{OE}{OA} \Leftrightarrow OE = OA \cdot \operatorname{sec} b, \quad (2.3)$$

pois $\hat{A}OC = b$.

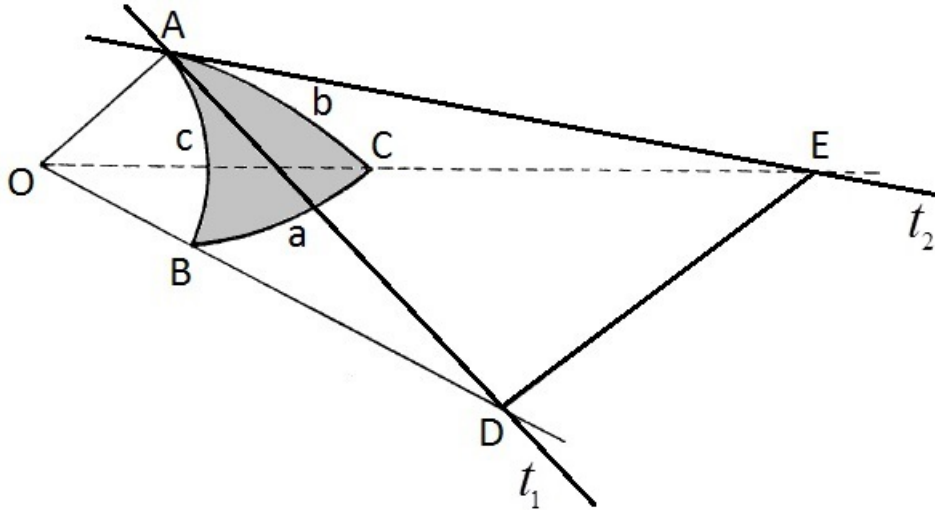


Figura 2.5: A região hachurada é a parte de um fuso completo contida num hemisfério arbitrário. Sua área é $2\alpha \cdot r^2$.

Nos triângulos DAE e DOE aplicamos a lei dos cossenos e obtemos

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \hat{D}AE \quad \text{e} \quad DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos \hat{D}OE. \quad (2.4)$$

Considerando a esfera de raio unitário e usando as igualdades (2.2) e (2.3), escrevem-se as relações (2.4) da seguinte forma:

$$DE^2 = \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \quad \text{e} \quad DE^2 = \sec^2 c + \sec^2 b - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a, \quad (2.5)$$

onde $\hat{D}AE$ e $\hat{D}OE$ medem, respectivamente, o ângulo esférico \hat{A} e o lado a do triângulo esférico ABC (ver figura 2.5).

Das relações (2.5), resulta

$$\begin{aligned} \sec^2 c + \sec^2 b - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 1 + \operatorname{tg}^2 c + 1 + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 2 - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= -2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 1 - \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= -\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 1 - \frac{1}{\cos b} \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \cos a &= -\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \cdot \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} \cdot \cos A \\ \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A + \cos b \cdot \cos c &= \cos a. \end{aligned} \quad (2.6)$$

□

2.3 Analogia dos Senos

Teorema 7. *Se ABC um triângulo esférico de lados a , b e c , respectivamente, opostos aos ângulos $\hat{B}\hat{A}C$, $\hat{A}\hat{B}C$ e $\hat{A}\hat{C}B$, então*

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}. \quad (2.7)$$

Demonstração. A partir da relação (2.1) temos $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\text{sen } b \cdot \text{sen } c}$ e $\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\text{sen } a \cdot \text{sen } c}$. Assim sendo, segue-se que

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 A &= 1 - \cos^2 A \\ &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\text{sen } b \cdot \text{sen } c} \right)^2 \\ &= \frac{\text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c} \end{aligned} \quad (2.8)$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 B &= 1 - \cos^2 B \\ &= 1 - \left(\frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\text{sen } a \cdot \text{sen } c} \right)^2 \\ &= \frac{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 c - \cos^2 b + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 a \cdot \cos^2 c}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 c} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Daí, multiplicando-se $1/\text{sen}^2 a$ pela equação (2.8) e subtraindo-se pela multiplicação de $1/\text{sen}^2 b$ pela equação (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 a} - \frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 b} &= \frac{\text{sen}^2 c \cdot (\text{sen}^2 b - \text{sen}^2 a) + \cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 c \cdot (\cos^2 a - \cos^2 b)}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c} \\ &= \frac{\text{sen}^2 c \cdot (\text{sen}^2 b - \text{sen}^2 a) + (\cos^2 b - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 c)}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c} \\ &= \frac{\text{sen}^2 c \cdot (\text{sen}^2 b - \text{sen}^2 a) + (\cos^2 b - \cos^2 a) \cdot \text{sen}^2 c}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c} \\ &= \frac{\text{sen}^2 c \cdot (\text{sen}^2 b - \text{sen}^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a)}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c} \\ &= \frac{\text{sen}^2 c \cdot [(\text{sen}^2 b + \cos^2 b) - (\text{sen}^2 a + \cos^2 a)]}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c} \\ &= \frac{\text{sen}^2 c \cdot [1 - 1]}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim a igualdade (2.10) nos diz que $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b}$. Analogamente, $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$.

Portanto,

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}.$$

□

Capítulo 3

Aplicações dos Triângulos Esféricos

Neste capítulo seguimos as definições e resultados apresentados no livro [1], [5], [7], [8] e [9].

3.1 Teorema de Euler

Seja E uma esfera de centro O e raio r . Um *fuso* é uma região da esfera compreendida entre dois círculos máximos. Esses círculos têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum, chamados os *vértices* do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo α entre os dois círculos máximos que constituem os lados do fuso.

Dado um fuso φ na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de φ é ainda um fuso φ' , chamado o fuso antípoda de φ . A reunião $\phi = \varphi \cup \varphi'$ chama-se um fuso completo (figura 3.1).

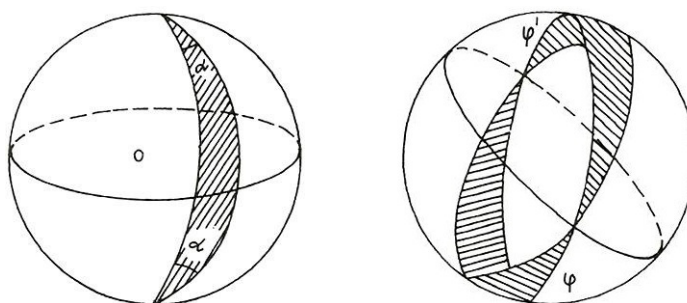


Figura 3.1: Um fuso de ângulo α e um fuso completo.

Teorema 8. *Seja ϕ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R , R'*

do fuso completo ϕ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha \cdot r^2$.

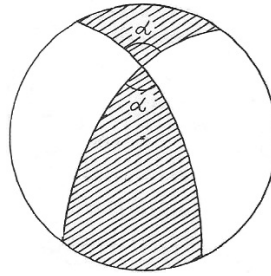


Figura 3.2: A região hachurada é a parte de um fuso completo contida num hemisfério arbitrário. Sua área é $2\alpha \cdot r^2$.

Demonstração. Basta provar que R e R' têm a mesma área porque então a área de

$$\phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2 \cdot (\text{área de } R)$$

e daí a área de $R = (\text{metade da área de } \phi) = \alpha \cdot r^2$. Ora, R e R' são figuras antípodas, isto é, cada ponto de R' é o antípoda de um ponto de R e vice-versa. Mais precisamente, $R = s \cup t$ é a reunião de dois triângulos esféricos com um vértice em comum e $R' = s' \cup t'$ é a reunião dos triângulos antípodas de s e t . Basta, portanto, provar que um triângulo esférico t e seu antípoda t' têm a mesma área. Observamos que t e t' têm ângulos iguais e lados congruentes, dois a dois, mas t e t' não são triângulos congruentes: não é possível, por um movimento rígido, mover um deles no espaço até sobrepor-se exatamente sobre o outro, a menos que t (e conseqüentemente t') seja isósceles. As figuras abaixo mostram duas tentativas de sobrepor t e t' . Numa delas fazem-se coincidir os três vértices. Na outra, coincide-se um ângulo de t com outro ângulo igual de t' .

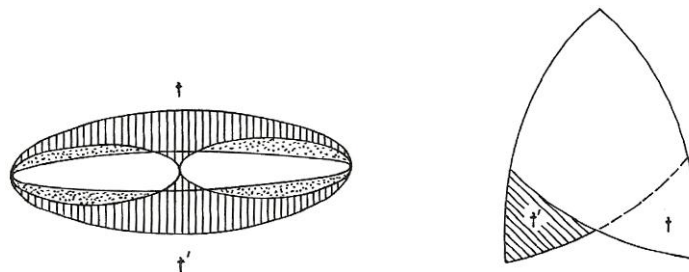


Figura 3.3: Um fuso de ângulo α e um fuso completo.

Na segunda tentativa, observamos que se t (e portanto t') for isósceles então t é congruente ao seu antípoda t' , logo estes dois triângulos esféricos têm a mesma área. No

caso geral, procede-se do seguinte modo. Os pontos A , B e C , vértices de t , determinam um pequeno círculo e portanto uma calota esférica que contém o triângulo t . Seja P o polo dessa calota. (P é o ponto de interseção da calota com a perpendicular ao plano ABC tirada pelo centro do círculo.) Os arcos de círculo máximo PA , PB e PC têm o mesmo comprimento, logo os triângulos esféricos PAB , PBC e PAC são isósceles. Se o ponto P estiver no interior do triângulo $t = ABC$, teremos

$$(\text{área de } t) = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PBC) + (\text{área de } PAC).$$

Ora, uma construção absolutamente análoga pode ser efetuada com o triângulo antípoda $t' = A'B'C'$, decompondo-o como reunião justaposta dos triângulos isósceles $P'A'B'$, $P'B'C'$ e $P'A'C'$, cada um deles antípoda do seu correspondente em t . Segue-se que a área de t é igual a área de t' .

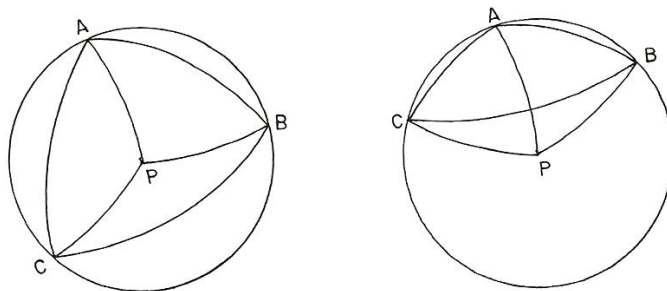


Figura 3.4: Um fuso de ângulo α e um fuso completo.

Pode ocorrer, entretanto, que o polo P esteja situado fora do triângulo t . Neste caso,

$$(\text{área de } t) = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PAC) - (\text{área de } PBC).$$

Uma situação análoga ocorre com t' e concluímos como antes que a área de t é igual a área de t' . □

Teorema 9. *Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, onde a é a área desse triângulo e r é o raio da esfera.*

Demonstração. Consideremos um hemisfério H que contenha o triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo α , até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtemos uma região $R_\alpha \subset H$, cuja área mede $2\alpha \cdot r^2$, de acordo com o Teorema (8).

Fazendo o mesmo com os ângulos β e γ , obtemos regiões R_β e R_γ , cujas áreas medem respectivamente $2\beta \cdot r^2$ e $2\gamma \cdot r^2$. A reunião dessas três regiões é o hemisfério H , com o

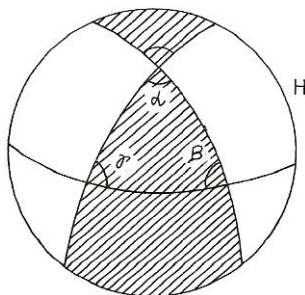


Figura 3.5: A parte hachurada é a região R_α .

triângulo dado contado três vezes (duas vezes mais do que devia). Segue-se que a soma das áreas das regiões R_α , R_β e R_γ é igual à área do hemisfério H mais duas vezes a área a do triângulo dado, ou seja,

$$2\alpha \cdot r^2 + 2\beta \cdot r^2 + 2\gamma \cdot r^2 = 2\pi \cdot r^2 + 2a,$$

pois a área de H é $2\pi \cdot r^2$. Simplificando, vem $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$. □

Exemplo 5. Calcule a área do triângulo esférico equilátero de lado igual a 60° da esfera de raio 2.

Solução. Seja λ a medida dos ângulos internos do triângulo equilátero de raio $r = 2$ e área a . Pelo Teorema 6 temos

$$\cos 60^\circ = \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ + \text{sen } 60^\circ \cdot \text{sen } 60^\circ \cdot \cos \lambda \Rightarrow \cos \lambda = \frac{1}{3},$$

ou seja, $\lambda = \arccos \frac{1}{3}$.

Logo, utilizando-se o Teorema 9, segue-se que

$$a = R^2 \cdot (3 \cdot \lambda - \pi) \Rightarrow a = 2, 2.$$

Portanto, a área do triângulo esférico é 2,2 unidades de área.

Lema 2. Seja P um poliedro convexo, com A arestas, F faces e V vértices. Consideremos que as faces de P são triângulos. Caso não sejam, por meio de diagonais, decomponemos cada face em triângulos, sem alterar o número $V - A + F$.

Demonstração. Cada vez que traçamos uma diagonal numa face, o número V não se altera, enquanto cada um dos números A e F aumenta de uma unidade, esses aumentos se cancelam na expressão $V - A + F$. □

Teorema 10. (Teorema de Euler). *Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente $F - A + V = 2$.*

Demonstração. Consideremos uma esfera E , de raio r , cujo centro O é o ponto situado no interior do poliedro P . Projetando radialmente o poliedro P sobre a esfera E , obtemos uma decomposição de E em triângulos esféricos, dispostos de modo semelhante à situação das faces de P . Em particular, a esfera E fica recoberta por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices.

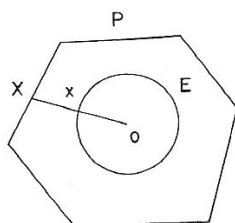


Figura 3.6: O ponto x da esfera E é a projeção radial do ponto X do poliedro P .

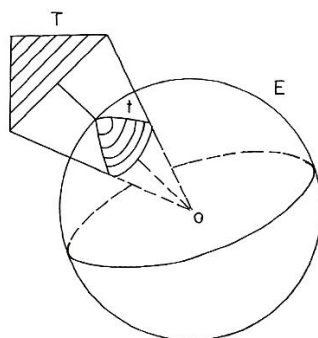


Figura 3.7: O triângulo esférico t , sobre a esfera E , é projeção radial do triângulo T .

Note que a interseção $E \cap L$ de uma esfera E com qualquer plano L que a encontre, é um círculo (ou um ponto, no caso excepcional em que o plano L é tangente à esfera). Quando o plano L passa pelo centro da esfera E , a interseção $E \cap L$ chama-se um círculo máximo.

A projeção radial de um segmento de reta AB é um arco de círculo máximo ab sobre a esfera E (salvo no caso em que A , B e o centro O da esfera estão na mesma reta). Com efeito, A , B e O determinam um plano, que corta a esfera segundo um círculo máximo do qual ab é um arco (figura 3.8).

Quando dois arcos de círculos máximos têm extremidade comum, o ângulo α formado por esses arcos é por definição, o ângulo entre as semirretas tangentes a esses arcos (figura

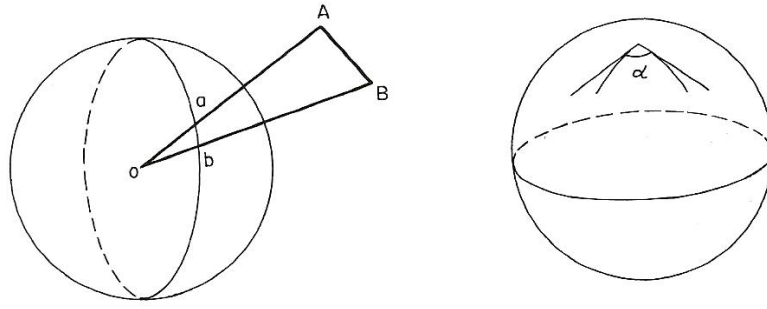


Figura 3.8: Projeção radial de AB e o ângulo α formado pelas semirretas tangentes aos arcos.

3.8).

Voltemos à nossa decomposição da esfera E em F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices. Para cada um desses triângulos t , vale a fórmula de Girard

$$s_t = \pi + \frac{\alpha_t}{r^2},$$

onde s_t é a soma dos ângulos e α_t é a área do triângulo esférico t .

Temos ao todo F igualdades como esta acima. Somando-as todas vem:

$$\sum s_t = \pi \cdot F + \frac{\sum \alpha_t}{r^2}. \tag{3.1}$$

Ora, $\sum s_t = 2\pi \cdot V$ porque a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a 2π . Além disso, $\sum \alpha_t = 4\pi \cdot r^2 =$ área da superfície esférica E . Portanto a igualdade (3.1) se escreve $2\pi \cdot V = \pi \cdot F + \frac{4\pi \cdot r^2}{r^2}$. Simplificando, temos:

$$2V - F = 4. \tag{3.2}$$

Para obter uma relação entre F (número de triângulos esféricos) e A (número total de lados desses triângulos), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulos, logo $3F = 2A$, ou seja,

$$F = 2A - 2F. \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3), vem $2V - 2A + 2F = 4$, donde

$$V - A + F = 2,$$

que é a relação de Euler. □

Exemplo 6. Um poliedro convexo possui, apenas, faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o faces pentagonais em 2 unidades. Calcule o número de faces de cada tipo, sabendo que o poliedro tem 7 vértices.

Solução. Temos que $f_3 = f_5 + 2$. Logo, $A = \frac{3f_3 + 4f_4 + 5f_5}{2} = 2f_4 + 4f_5 + 3$. Pelo Teorema 10, temos

$$F - A + V = 2 \Rightarrow f_3 + f_4 + f_5 - 2f_4 - 4f_5 - 3 + 7 = 2 \Rightarrow f_4 = 4 - 2f_5.$$

Como $f_4 > 0$ devemos ter $f_5 = 1$. Daí $f_4 = 2$ e $f_3 = 3$.

Exemplo 7. Determine todos os poliedros que possuem 10 arestas.

Solução Mostraremos inicialmente que $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$. De fato, observe que

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + F_4 + 2F_5 + \dots$$

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \dots$$

$$2A \geq 3F$$

Repare que a igualdade só vale se $F_4 = F_5 = \dots = 0$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares. A desigualdade $2A \geq 3V$ se justifica de forma análoga.

O Teorema 10 nos diz que $A + 2 = F + V$. Assim,

$$3A + 6 = 3F + 3V \leq 3F + 2A \iff 3A + 6 \leq 3F + 2A \iff A + 6 \leq 3F.$$

De $2A \geq 3F$ e $A + 6 \leq 3F$ temos $A + 6 \leq 3F \leq 2A$. Se $A = 10$ então $16 \leq 3F \leq 20$ e, portanto, $F = 6$. Temos agora, que

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \dots \Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \dots = 2.$$

Porém, isto só é possível em dois casos:

a) $F_4 = 2, F_5 = F_6 = F_7 = \dots = 0$ e, portanto, $F_3 = 4$.

b) $F_5 = 1, F_4 = F_6 = F_7 = \dots = 0$ e, portanto, $F_3 = 5$.

Existem, portanto, poliedros de dois tipos: um com duas faces quadrangulares e quatro triangulares e outro com uma face pentagonal e cinco triangulares.

3.2 Navegação Marítima

Qual é o caminho mais rápido e econômico para uma travessia oceânica com que comumente se depara o comandante de um navio?

O comandante tem duas opções: fazer a travessia em círculo máximo, o que significa dizer que estava acompanhando uma das geodésias da Terra ou, então, fazer a travessia em círculo menor e, neste caso, a sua navegação não levaria em conta a curvatura dos mares.

Quando a navegação é sobre um arco de círculo máximo, é preciso que ele conheça as fórmulas que relacionam os lados e os ângulos dos triângulos esféricos, os quais são modelos para os triângulos da geometria de Riemann.

Na navegação marítima, a unidade de distância é a milha marítima e quando referida à velocidade de um navio diz-se *nós* e não *milhas por hora*. Assim, um navio que percorra 16 milhas em cada hora, estará desenvolvendo uma velocidade de 16 nós.

A milha marítima é a principal unidade de distância usada pelo marinheiro correspondente ao comprimento do arco de meridiano de um minuto. Assim, quando um navio se desloca ao longo de um meridiano (círculo máximo), por uma distância de 1° (um grau), cobre um percurso de 60 milhas marítimas.

Acontece que a Terra, não tendo a forma perfeita de uma esfera, faz com que os seus meridianos se assemelhem a elipses, com curvatura variável em cada um de seus pontos. Há pontos do meridiano em que ele é mais ou menos curvo do que em outros, e sendo a milha marítima uma unidade de medida linear, o comprimento de um arco de um minuto de meridiano (assemelhado a uma elipse) vai variar com o local em que é medido. Se for medido próximo de um dos polos, onde o meridiano é menos curvo, o seu comprimento não é o mesmo do que quando medido nas proximidades do Equador terrestre.

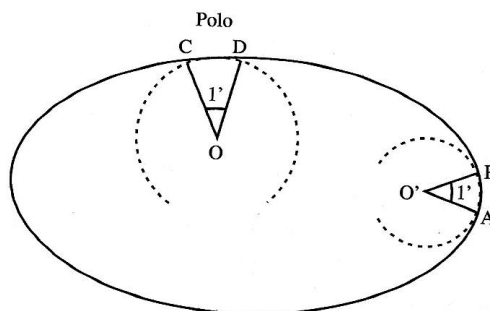


Figura 3.9: Milha marítima.

Pela figura 3.9, vê-se que a milha marítima, se definida pura e simplesmente como o comprimento de um arco de um minuto, não tem o mesmo comprimento e, como tal, não poderia servir de unidade padrão de medida. Para vencer essa dificuldade, estabeleceu-se a *milha marítima internacional* de 1852 metros, que vem a ser a média das milhas medidas no polo e no Equador.

Para os cálculos de navegação, no entanto, faz-se sempre a correspondente, de 60 milhas, para um arco de 1° (um grau) de círculo máximo.

O erro que se comete em razão do local em que se navega, se perto dos polos ou do Equador, é desprezível diante de outras incertezas da navegação marítima.

3.2.1 Referenciais na superfície da Terra

Um comandante para conduzir o seu barco de um ponto a outro da Terra, com economia e, principalmente, segurança, precisa saber, a intervalos de tempo, a posição do seu navio. As coordenadas empregadas na navegação marítima são a latitude e a longitude. Definem-se essas coordenadas baseando-se em certos referenciais que devem ser esclarecidos.

Polos. A Terra gira diariamente em torno do seu eixo de rotação, e os pontos P e P' em que esse eixo corta a sua superfície chamam-se, respectivamente, *Polo Norte* e *Polo Sul* (ver figura 3.10).

Equador. É o círculo máximo cujo plano é perpendicular ao eixo de rotação da Terra e, conseqüentemente, divide a Terra em duas partes iguais, denominadas *Hemisfério Norte* e *Hemisfério Sul*. Por isso, a distância angular de um dos polos a qualquer ponto do Equador mede 90° .

Meridianos. São os diversos semicírculos máximos, que vão de um polo ao outro. Assim, cada círculo máximo que passa pelos polos compreende dois meridianos, sendo um o antípoda ou o antimeridiano do outro.

Paralelos. São os diversos círculos menores paralelos ao Equador.

Leste e Oeste. A direção na qual a Terra gira chama-se *Leste*, e a direção oposta, *Oeste*. O Polo Norte fica à frente de um observador que tenha a direção Leste à sua direita (ver figura 3.11).

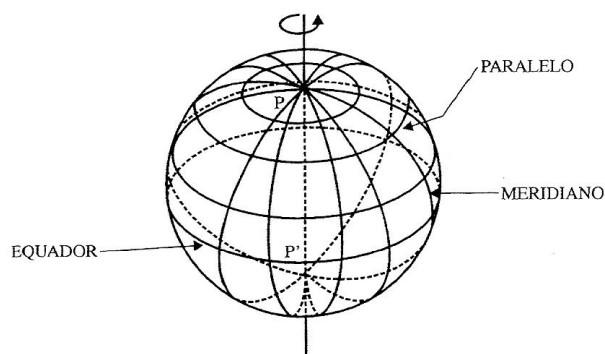


Figura 3.10: Polos, Equador, Meridianos e Paralelos.

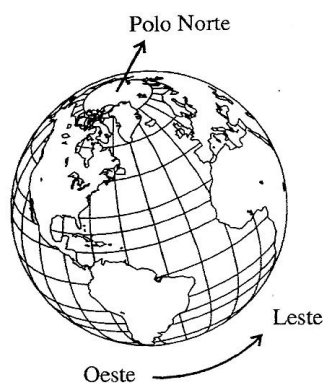


Figura 3.11: Leste e Oeste.

3.2.2 Coordenadas Terrestres

A posição de um lugar sobre a superfície da Terra pode ser fixada pelas coordenadas latitude, ϕ , e longitude, λ , assim definidas:

Latitude. A Latitude de um lugar A é o arco de meridiano que principia no Equador e vai até ao paralelo do lugar A , sendo denominada *norte* ou *sul*, de acordo com o hemisfério a que pertence o lugar A (ver figura 3.12)

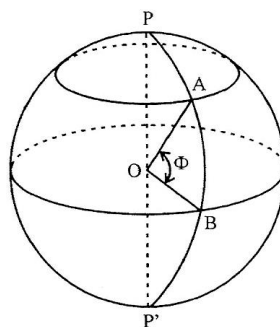


Figura 3.12: Latitude.

A latitude é usualmente medida em graus, minutos e segundos e, dependendo da

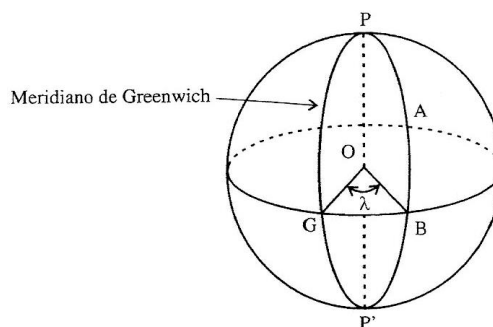


Figura 3.13: Longitude.

posição do lugar, pode assumir qualquer valor de 0° no Equador até 90° , que é a latitude de qualquer um dos polos. O complementar da latitude, isto é, $90^\circ - \phi$, chama-se co-latitude.

Longitude. A longitude tem por referência o Primeiro Meridiano, universalmente aceito, que passa pelo Observatório Astronômico de Greenwich, na Inglaterra. A longitude de um lugar A é o arco de Equador, contado a partir do ponto em que o meridiano de Greenwich corta aquele círculo máximo, até o meridiano do lugar, e é denominada *leste* ou *oeste*, dependendo se o lugar A fica, respectivamente, à direita ou à esquerda de um observador voltado para o meridiano de Greenwich (ver figura 3.13).

A longitude é medida em graus, minutos e segundos, e varia de 0° , em Greenwich, até 180° , que vem a ser a longitude de todos os lugares situados no antimeridiano de Greenwich.

3.2.3 Fusos Horários

No momento em que for meio-dia em São Paulo, será também meio-dia em todos os lugares situados ao longo do meridiano que passa por São Paulo: é o que chamamos hora verdadeira. Todas as localidades situadas sobre um mesmo meridiano têm a mesma hora verdadeira.

Assim, se é meio-dia em Belo Horizonte, isto é, se o Sol sobre Belo Horizonte está em seu ponto mais alto no céu, o mesmo não acontecerá em Brasília. Isso ocorre porque Belo Horizonte está no meridiano de longitude 44°W , enquanto Brasília encontra-se no meridiano de longitude 48°W . Portanto, meio-dia em Brasília ocorrerá um pouco depois do meio-dia em Belo Horizonte (lembre-se que a Terra gira em torno de seu eixo polar da esquerda para direita). Afinal, se em Belo Horizonte é exatamente meio-dia, qual será a

hora verdadeira em Brasília?

Assim, a hora verdadeira não é a mesma em Belo Horizonte, Brasília ou São Paulo. Você já imaginou a confusão que seria se cada lugar tivesse uma hora diferente, mesmo se tratando de lugares próximos uns dos outros? Cada vez que viajássemos para leste ou para oeste teríamos que mudar várias vezes os ponteiros do relógio.

Para tornar as coisas mais simples, foi necessário dividir o globo em 24 partes aproximadamente iguais, uma vez que a Terra leva 24 horas para efetuar seu movimento de rotação. Resultou assim o que chamamos de fusos horários. Cada fuso horário corresponde a uma faixa limitada por dois meridianos, distantes 15° um do outro (observe que $360^\circ \div 24 = 15^\circ$).

Dessa forma, embora haja diferença na hora verdadeira das localidades situadas dentro de um mesmo fuso horário, a hora marcada nos relógios será a mesma para todas essas localidades. É o que chamamos de hora oficial. Assim, Rio de Janeiro, Brasília, Belo Horizonte, São Paulo, embora sejam cidades situadas em meridianos diferentes, por encontrarem-se no mesmo fuso horário têm a mesma hora oficial.

O meridiano de 180° estabelece a *Linha Internacional de Mudança de Data*. Assim, se um navio cruza o antimeridiano de Greenwich de Oeste para Leste, o calendário de bordo deve ser adiantado em um dia e, em caso contrário, isto é, se o navio cruza de Leste para Oeste, a data deve ser atrasada em um dia. Além disso, à medida que um navio navega para Leste e muda de fuso horário, os relógios de bordo são adiantados em uma hora e, se navega para Oeste, os seus relógios são atrasados em uma hora para cada fuso percorrido.

Exemplo 8. (UEL) Às 16h30 em Pequim (capital da China), localizada nas coordenadas $39^\circ 50'N$ e $116^\circ 20'E$, em uma reunião de empresários, foi tomada a decisão de instalar uma filial de uma indústria em Londrina (Paraná), que tem como coordenadas $23^\circ 18'S$ e $51^\circ 10'W$. Duas horas após o término da reunião, a decisão foi comunicada para o representante da indústria em Londrina. A que horas, em Londrina, o representante recebeu o comunicado?

Solução. Pequim e Londrina encontram-se no fuso $120^\circ E$ e $45^\circ W$, respectivamente. Neste caso, Londrina é atrasada em $165^\circ : 15^\circ = 11\text{ h}$ em relação a Pequim. Assim, o horário em Londrina no momento que foi tomada a decisão era 5h30. O representante recebeu o comunicado 2 h após o término da reunião (5h30), portanto às 7h30.

3.2.4 Relação entre o Arco de Paralelo e o correspondente Arco do Equador

Em razão da convergência dos meridianos para os polos, os arcos que dois meridianos interceptam nos diversos paralelos diminuem com o aumento da latitude, isto é, quanto maior é a latitude de um paralelo, menor é a distância entre os dois meridianos, contada ao longo desse paralelo. Existe uma relação matemática entre um arco de paralelo e o correspondente arco do Equador, que será estabelecida a seguir.

Na figura 3.14, **ab** é um arco de paralelo de centro C, **AB** o correspondente arco do Equador e ϕ a latitude do paralelo.

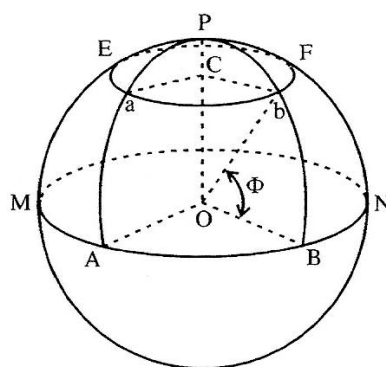


Figura 3.14: Arco de paralelo **ab** e o corresponde arco de Equador **AB**.

Desde que **OP**, raio da Terra, é perpendicular ao raio **Cb** do paralelo, tem-se o triângulo **COb** retângulo em C, e pode-se escrever:

$$Cb = Ob \cdot \text{sen}(90^\circ - \phi) \iff Cb = Ob \cos \phi. \tag{3.4}$$

Por outro lado:

$$\frac{\text{arco de paralelo } ab}{\text{arco do Equador } AB} = \frac{\text{raio de paralelo } Cb}{\text{raio da Terra } OB},$$

ou seja,

$$\frac{\widehat{ab}}{\widehat{AB}} = \frac{Cb}{OB} \tag{3.5}$$

Mas $OB = Ob$. Assim, de (3.4) e (3.5), resulta:

$$\widehat{ab} = \widehat{AB} \cdot \cos \phi \tag{3.6}$$

3.2.5 Problemas

Problema 1. Um navio X percorre 2700 milhas sobre o Equador, enquanto um outro navio Y cobre o correspondente arco no paralelo de 60° . Qual dos navios andou mais?

Solução. Sendo d a distância percorrida pelo navio Y, temos, pela relação (3.6), que

$$d = 2700 \cdot \cos 60^\circ = 1350 \text{ milhas.}$$

Portanto, o navio X andou mais.

Problema 2. O comandante de um submarino armado com mísseis de ogivas nucleares, posicionado na $\phi = 42^\circ 10' \text{N}$ e $\lambda = 51^\circ 20' \text{W}$, recebe ordem para disparar um míssil de longo alcance contra uma instalação inimiga de coordenadas $\phi = 68^\circ 40' \text{N}$ e $\lambda = 13^\circ 40' \text{E}$. Com que direção θ deve ser lançado o míssil e qual a distância geodésica d a ser vencida por este?

Solução Do triângulo esférico PSI (figura 3.15) conhecem-se:

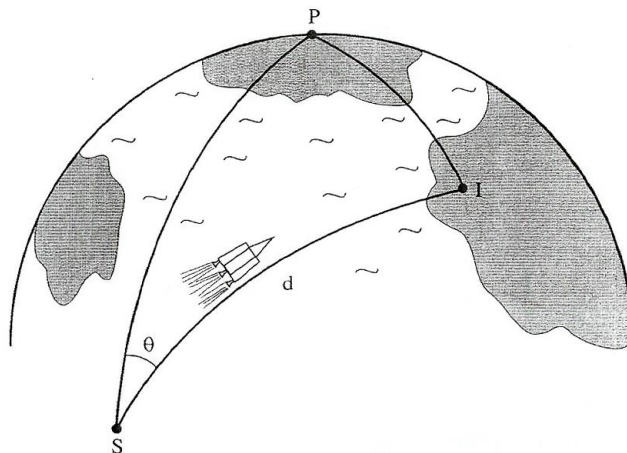


Figura 3.15: Missão de um submarino.

$$\text{lado SP} = 90^\circ - 42^\circ 10' = 47^\circ 50'$$

$$\text{lado IP} = 90^\circ - 68^\circ 40' = 21^\circ 20'$$

$$\hat{\text{ângulo P}} = 51^\circ 20' + 13^\circ 40' = 65^\circ$$

Aplicando o Teorema 6 temos

$$\cos d = \cos SP \cdot \cos IP + \sin SP \cdot \sin IP \cdot \cos \hat{P}$$

$$\cos d = \cos 47^{\circ}50' \cdot \cos 21^{\circ}20' + \sin 47^{\circ}50' \cdot \sin 21^{\circ}20' \cdot \cos 65^{\circ}$$

$$\cos d = 0,67129 \cdot 0,93148 + 0,74120 \cdot 0,36379 \cdot 0,42262$$

$$\cos d = 0,73925$$

$$d = 42^{\circ}20'$$

$$d = 2540 \text{ milhas marítimas}$$

Para o cálculo da direção de lançamento, usa-se o Teorema 7, ou seja,

$$\frac{\sin 21^{\circ}20'}{\sin \theta} = \frac{\sin 42^{\circ}20'}{\sin 65^{\circ}}.$$

Assim,

$$\sin \theta = 0,36379 \cdot 0,90631 \cdot 1,48491 = 0,48958 \Rightarrow \theta = 29^{\circ}18'.$$

O míssil deve ser lançado com o rumo inicial de $29^{\circ}18'$ em relação à direção norte-sul.

Capítulo 4

Considerações Finais

Pelos estudos realizados sobre os triângulos esféricos, dentro da Geometria Esférica, descobrimos um mundo novo da geometria, onde sua teoria apresenta resultados impressionantes e diferentes daqueles encontrados no caso plano. Demonstramos alguns Teoremas, como por exemplo, dos cossenos, dos senos e a soma dos ângulos internos de um triângulo, que permitiram ampliar nossos conhecimentos através desta nova Geometria.

Fizemos aplicações demonstrando o Teorema de Euler nos polígonos convexos e na Navegação Marítima, onde, nesta segunda aplicação os resultados apresentaram uma teoria acessível para o aluno do Ensino Médio, já que alguns conceitos básicos são conhecidos por eles através da Geografia como os referenciais terrestres e fusos horários. É importante ressaltar que é uma boa oportunidade de integrar a Matemática à Geografia, onde os professores podem estimular o aluno com discussões sobre esta teoria dos triângulos esféricos e suas aplicações.

Como no Ensino Médio a Esfera é estudada em Geometria Espacial, neste momento, podemos incluir o estudo dos triângulos esféricos com a apresentação dos principais teoremas aqui demonstrados.

Assim, esperamos que este trabalho venha a contribuir com os professores e alunos da Educação Básica para que possam usufruir como fonte de pesquisa em seus trabalhos.

Referências Bibliográficas

- [1] Coutinho, Lázaro, *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, Editora Interciência, 2001.
- [2] Muniz Neto, Antônio Caminha, *Tópicos de Matemática Elementar*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [3] Garbi, G. G., *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*, Quinta Edição, São Paulo, Editora Livraria da Física, 2010.
- [4] Barbosa, João Lucas Marques, *Geometria Euclidiana Plana*, Décima Edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [5] Lima, Elon Lages *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Quinta Edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
- [6] Dolce, O., Pompeu, J. N., *Fundamentos de Matemática Elementar*, Volume 9, Oitava Edição, São Paulo, Atual Editora, 2005.
- [7] Dolce, O., Pompeu, J. N., *Fundamentos de Matemática Elementar*, Volume 10, Sexta Edição, São Paulo, Atual Editora, 2005.
- [8] Lima, Elon Lages, *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, Nona Edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [9] ALVES, S. A Geometria do Globo Terrestre. Mini-Curso apresentado na II Biental da SBM em 2004 na UFBA. Disponível em www.bienasbm/M29.pdf. Acesso em 20.01.08.