UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

João Paulo de Amorim Lima

SAEPE: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

RECIFE
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

João Paulo de Amorim Lima

SAEPE: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos

RECIFE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L732s Lima, João Paulo de Amorim

SAEPE: Uma abordagem através da metodologia de resolução de problemas / João Paulo de Amorim Lima. - 2023.
81 f. : il.

Orientador: Marcelo dos Santos.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2023.

1. SAEPE. 2. Avaliação. 3. Resolução. 4. Problemas. I. Santos, Marcelo dos, orient. II. Título

CDD 510

Trocar essa página pela Folha de Aprovação

Dedico este trabalho à minha filha Marina.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a vida e por me permitir, através da fé em sua existência, construir um mundo melhor.

Agradeço aos meus pais, Enaldo e Maria das Graças, por todos os esforços empenhados na minha educação e por ter me concedido condições dignas para chegar até aqui.

Agradeço ao meu Orientador, Professor Marcelo Pedro, por toda paciência, disposição, disponibilidade, companheirismo, afeto, conhecimento e experiência proporcionados na minha caminhada. Professor Marcelo Pedro é um ser humano ímpar que faz a diferença na educação do Brasil.

Agradeço aos colegas de turma do PROFMAT 2021, em especial aos colegas Fábio, Eliton, Mayco e Ricardo pelos grupos de estudo e afetos envolvidos, sem o espírito de grupo e empatia não teria chegado até aqui.

Agradeço aos amigos Ribamar e Rildo por todos os conselhos e pela amizade que tanto me passou segurança no processo.

Agradeço (in memoriam), ao meu professor de Física Thiago Costa, por ter despertado em mim o desejo de ENSINAR. Dedico esse título a este grande PROFESSOR.

Por fim, de maneira muito especial, agradecer a minha esposa Rafa, pela compreensão nas ausências e por me fazer acreditar no meu potencial.

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,
não é a posse, mas o ato de chegar lá,
que nos dá a maior satisfação."
(Carl Friedrich Gauss.)

Resumo

Esta dissertação propõe auxiliar os professores de matemática da rede pública de Pernambuco a compreender e melhorar o desempenho dos estudantes no Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE). Além de conhecer a proposta e relevância desta avaliação para a educação do estado, o trabalho utiliza a metodologia de **Resolução de Problemas** tendo como referências George Polya e Terence Tao. Explicita as técnicas desses dois matemáticos, combinando estratégias de solução e aplicando em alguns problemas como forma de validar o processo. É feita a sugestão, ainda, da **Formulação de Problemas** como técnica auxiliar que desenvolve a criatividade e ajuda na elaboração do plano de solução de um problema. Dominando essas técnicas é possível conhecer o funcionamento da prova do SAEPE e sua relevância para o desenvolvimento da educação pernambucana. Os resultados do SAEPE 2021 e 2022 são explicitados como forma de compreender os aspectos que compõem a avaliação e representar de maneira mais didática o desempenho dos estudantes. A prova do SAEPE 2021 é resolvida utilizando as técnicas de resolução de problemas estudadas, reiterando que a metodologia utilizada contribui com as dimensões de aprendizagem em matemática e está presente nas principais normativas da educação brasileira, tais como: BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais).

Palavras-chave: SAEPE; Avaliação; Resolução de problemas.

Abstract

This dissertation proposes to help public mathematics teachers in Pernambuco to understand and improve students' performance in the Pernambuco educational evaluation system (SAEPE). In addition to knowing the purpose and relevance of this assessment for education in the state, the work uses the methodology of **Problem Solving** with George Polya and Terence Tao as references. It explains the techniques of these two mathematicians, combining solution strategies and applying them to some problems as a way of validating the process. The suggestion is also made of **Problem Formulation** as an auxiliary technique that develops creativity and helps in the preparation of a problem solution plan. By mastering these techniques, it is possible to know how the SAEPE test works and its relevance for the development of education in Pernambuco. The results of SAEPE 2021 and 2022 are explained as a way to understand the aspects that make up the evaluation and represent students' performance in a more didactic way. The SAEPE 2021 test is solved using the studied problem solving techniques, reiterating that the methodology used contributes to the dimensions of learning in mathematics and is present in the main regulations of Brazilian education, such as: BNCC (common national curriculum base) and PCN's (national curriculum parameters).

Keywords: SAEPE; Assessment; Problem solving.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A proposta deste trabalho é auxiliar os professores de Matemática da rede pública do estado de Pernambuco a desenvolver técnicas e habilidades de resolução de problemas junto aos seus alunos tendo como foco o desempenho dos estudantes na avaliação do SAEPE[1]. Isto porque, sabemos da importância de um bom desempenho nas avaliações externas para o investimento e desenvolvimento da educação estadual. Veremos que o SAEPE surgiu como avaliação prévia, diagnóstica e preparatória para o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e, portanto é fundamental compreender o funcionamento da avaliação do SAEPE e obter bons resultados. Aliado a todos esses fatores é importante destacar que o tema **"Resolução de Problemas"** pertence as competências presentes nos PCN[2] e tem bastante relevância para qualquer avaliação que o estudante venha realizar e para o desenvolvimento da sua aprendizagem.

No Capítulo 1 apresentaremos técnicas de resolução de problemas de dois autores estudiosos do tema: George Polya e Terence Tao. Polya é um autor clássico e um dos pioneiros a estudar e propor técnicas de resolução de problemas. Em 1978, publicou sua obra mais conhecida: A arte de resolver problemas(1).

Além de propor maneiras de resolver um problema, Polya refletia sobre a mentalidade do professor e sua relação com os alunos no processo de ensino-aprendizagem. Sobre isto ele destaca:

> Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, sem dar na vista. O melhor é, porém, ajudar o estudante com neutralidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista dele, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante.(Polya, 1975, p.1)

Por uma perspectiva mais atual, Terence Tao é um matemático contemporâneo, ganhador da medalha Fields e que também traz suas experiências em resolução de problemas na obra: **Como resolver problemas matemáticos - uma perspectiva pessoal**(2). Nesta obra, ele mostra maneiras de resolver problemas e conta experiências de situações em que resolveu problemas considerados muito difíceis.

No Capítulo 2, sugerimos a formulação de problemas como exercício essencial e complementar às técnicas de resolução de problemas. A complexidade que envolve a articulação de saberes para formular um problema ajuda no desenvolvimento do raciocínio na resolução dos problemas. Mostraremos que fatores como comunicação, escrita e

[1] Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco
[2] Parâmetros Curriculares Nacionais

representações pictóricas são fundamentos que precisam ser analisados desde cedo na sala de aula, fazendo parte do cotidiano docente. Todo estudante utiliza alguma ferramenta (Oral, artística ou escrita) de comunicação e, portanto pode utilizar, inicialmente, a sua ferramenta de domínio para expor suas soluções. A partir desse ponto é que devemos investir na qualificação da escrita, apresentando e desenvolvendo com os alunos aspectos relacionados a estrutura e estética textual e utilização de definições lógico-matemáticas coerentes.

Apresentaremos diversos tipos de problema, reiterando a importância de perceber que não teremos sempre a objetividade de uma prova nos momentos de estudo e preparação em resolução de problemas, mas que essas situações fortalecem a criatividade e a imaginação dos estudantes e esse fator contribui diretamente na proposta de resolução das questões. Abordaremos fatores importantes na introdução de situações iniciais para formulação de problemas, isto porque a tarefa de formular problemas não é tão simples e gera dificuldades iniciais na proposição da atividade. Assim, a criação de problemas é sugerida a partir de desafios orientados, como por exemplo: criar um problema a partir de uma figura dada, criar um problema a partir de uma operação matemática ou a partir de um texto sugerido. Existem diversas maneiras de variar a proposta antes de propor ao aluno a criação de um problema livre.

No Capítulo 3 conheceremos como funciona a prova do SAEPE, como surgiu, quais as ambições da Secretaria de Educação e como ela pode nos revelar um diagnóstico da situação atual da aprendizagem dos alunos da rede. Iremos perceber que sua idealização surgiu de um modelo de gestão por resultados e foi aplicada, inicialmente, de forma experimental (única) e que, posteriormente, passou a ser aplicada todos os anos. Vamos observar que a prova possui uma matriz de referência das habilidades e competências a serem desenvolvidas pelos alunos e que essas habilidades são didaticamente listadas através dos descritores. Por exemplo: Descritor D10 - Geometria - 3º ano do Ensino médio - Reconhecer, dentre as equações de 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências. Desta maneira, facilita o entendimento de quais os déficits específicos de aprendizagem. Visualizaremos ainda que a avaliação segue a Teoria de Resposta ao Item (TRI) e que cada item possui sua escala de proficiência.

O ponto crucial de exposição de dados nesta dissertação deve-se ao fato de todos os anos o CAED[3] disponibilizar **A revista do professor de matemática**(3)[4] trazendo informações sobre o desempenho da escola, desempenho das turmas por descritores, desempenho médio da rede e participação dos estudantes na avaliação. Em especial, este trabalho transparece as informações da Escola São Miguel, localizada no Alto do Mandu, Zona Norte do Recife, na qual o mestrando está lotado exercendo a docência. As informações

[3] Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação
[4] In: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#\protect\protect\leavevmode@ifvmode\kern-.1667em\relax/colecoes>. Acessado em 01/02/2023.

são referente ao SAEPE 2021 e 2022 e deriva da ideia que são os resultados mais atuais, permitindo através da observação do desempenho de dois anos consecutivos compreender os aspectos da prova como total de acertos, percentual de acertos por descritores, proficiência e o movimento dos alunos nos padrões de desempenho de um ano para o outro.

Conhecendo as técnicas de resolução de problemas, resolvemos as questões da prova do SAEPE 2021, visto que é a prova mais recente disponibilizada, e evidenciamos as estratégias de resolução de problemas diante que cada questão.

1 TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Diante da importância da avaliação do SAEPE no contexto da educação em Pernambuco, faz-se necessário propor um planejamento aos professores que contemple os conteúdos previsto nos Parâmetros curriculares e que, ainda, priorize as técnicas de resolução de problemas e a utilização dessa metodologia nas aulas de Matemática. Dessa maneira, iremos destacar a importância do tema na BNCC(4) e PCN(5), assim como estudar as técnicas de resolução de problemas através de referências nesta área.

Resolver problemas consta na BNCC como um dos processos fundamentais para desenvolver o letramento matemático. Trata-se de um método e estratégia, concomitante, para atingir uma aprendizagem que seja utilizada na compreensão e atuação no mundo. A ideia é levar o estudante a articular os campos da matemática - Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Estatística e probabilidade - em busca de ação nas mais diversas situações escolares ou não, tendo como objetivo principal o desenvolvimento de autonomia para tomada de decisões. Sobre isto, a BNCC reitera:

> os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.(BRASIL, 2018, p. 529)

Ainda na temática de resolução de problemas na BNCC são destacadas 5 competências específicas de Matemática e suas Tecnologias. Dentre elas, temos mais uma vez destaque para o tema "resolução de problemas":

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531)

Percebendo a importância de utilizar a metodologia de Resolução de Problemas no ensino da matemática, iremos propor o estudo de técnicas de resolução de problemas, especificamente, sob a perspectiva de dois autores estudiosos do tema: George Polya e Terence Tao. O primeiro é um autor clássico e referência no tema, um dos primeiros a publicar obras e artigos sobre maneiras de resolver um problema. O segundo é um matemático contemporâneo notadamente reconhecido e ganhador da medalha Fields.

Entretanto, importante reiterar que a essência do trabalho é propor métodos de resolução de problemas que auxiliem os professores de matemática da educação básica. Este fato culmina na escolha da resolução de problemas como metodologia em detrimento da resolução de problemas sob a perspectiva de matemáticos que compartilham seus métodos de resolução baseados em suas experiências matemáticas.

Assim, antes de conhecermos tais técnicas de resolução de problemas, definiremos alguns conceitos.

1.1 O QUE É UM PROBLEMA?

De acordo com Dante (2009) na obra **Formulação e resolução de problemas de matemática:** *Teoria e prática*(6), Problema é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo. Destaca-se ainda que problema é um objeto subjetivo, pois depende da análise do contexto para ser definido como problema.

Conforme Lester (1982, *apud* Dante, 2010, p.12) Problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução. Ainda assim, o caráter subjetivo dessa definição merece atenção, pois existe a dependência de outras variáveis. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo. *Numa reunião de 7 amigos, no fim da festa eles se despedem. Sabendo que cada um deles cumprimentaram a todos com um aperto de mão, qual será o total de cumprimentos?* [1]

A depender do ano letivo que esta questão é apresentada ela pode ser considerada um problema ou não. No ensino fundamental é preciso pensar estrategicamente e fazer um esquema para responder a questão. No ensino médio, com o domínio das técnicas e ideias de combinação, a solução sai diretamente.

A importância da definição de problema é evidente nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998):

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. (BRASIL, 1998, p. 41)

[1] Questão adaptada disponível na obra **Formulação e resolução de problemas de matemática: *Teoria e prática.*** São Paulo: Ática, 2009.

Antes de propor as técnicas de Resolução de Problemas em auxílio a preparação para o SAEPE é importante distinguir um **problema** de um **exercício**, pois em alguns casos a solução é direta e não necessita de tais técnicas. Ainda, vale destacar que mesmo questões contextualizadas não implicam um problema. Da mesma forma, um problema não implica possui textos e contextos.

1.1.1 Distinguindo Problema de Exercício

Segundo Dante (2009), exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento. É a situação em que o aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas. Vejamos um exemplo:

Exemplo. *João tinha 25 balas e deseja dividir igualmente em seu grupo com mais 4 amigos. Quantas balas cada um receberá?*

Solução. $25 \div 5 = 5$. Então cada um ficará com 5 balas, inclusive João.

Problema, situação-problema ou problema-processo, Dante (2009) define como uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução. Esse tipo de questão exige uma certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias. Vejamos um exemplo:

Exemplo. *Num grupo de 10 pessoas, 5 são rapazes e 5 são moças. De quantas maneiras essas 10 pessoas podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?* [2]

Percebemos que não existe nenhum algoritmo pronto para ser aplicado e nenhuma resposta direta para o problema. É necessário refletir e até esboçar a situação para que fique mais claro o problema.

Solução. Podemos iniciar colocando os rapazes nos lugares. O primeiro rapaz pode se sentar em qualquer um dos 10 lugares. O segundo rapaz pode se sentar em qualquer um dos 8 lugares restantes, pois ao lado do primeiro rapaz sentará uma moça. E seguimos esse raciocínio para os demais rapazes. Em seguida, para colocar as 5 moças nos 5 lugares restantes, podemos fazer isso de $5!$ maneiras. A resposta é $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5! = 460800$ maneiras.

Conhecendo as características de um problema e distinguindo das características de um exercício, retornaremos no estudo das técnicas de resolução de problemas, tão útil à preparação para avaliação do SAEPE. Fez-se muito necessária essa distinção entre

[2] Problema extraído do livro: Análise Combinatória e Probabilidade(7)

problema e exercício, primeiro porque as técnicas se aplicam a problemas e segundo porque a avaliação do SAEPE é composta por 26 questões de matemática contendo problemas e exercícios.

1.2 GEORGE POLYA

George Polya foi um matemático húngaro que nasceu em Budapeste em 1887 e migrou para os Estados Unidos por causa da Segunda Guerra mundial vivenciada na Europa. Polya era de origem polonesa com uma família de raízes judaica e desenvolveu trabalhos como professor e pesquisador na Universidade de Stanford, em 1942, tendo como interesse o tema resolução de problemas. Polya se aposentou em 1953, mas continuou seus trabalhos ativamente até sua morte em 1985 com 98 anos.

Em 1924, Polya foi co-autor de um livro traduzido para o inglês em 1972, entitulado: **"Problem and Theorems in Analysis"**. Nesta obra, Polya já demonstra o interesse em desenvolver, continuamente, um método de resolução de problemas estimulando uma sequência de problemas e destacando as soluções dotadas de mais sofisticação.

Ao londo de uma vida muito produtiva, Polya escreveu livros, publicou diversos artigos e construiu uma carreira destacada como matemático. Desenvolveu trabalhos em Análise clássica, Combinatória e Probabilidades. Mas foi nos seus últimos 40 anos de trabalho que começou a interessar-se pelo ensino da matemática. Neste contexto, Polya escreve sua obra mais famosa: **"How to Solve It"**, em português **"A arte de resolver problemas"**. [3]

Polya propõe um plano sistemático para resolução de problemas. Vejamos a seguir:

1. Compreensão do problema
2. Estabelecimento de um plano
3. Execução do plano
4. Retrospecto

Na etapa 1, temos o primeiro contato com o problema. É o momento de leitura e registro das informações contidas na questão. Compreender corretamente a proposta do problema é fundamental para escolha correta da estratégia de solução. Um erro nesta fase acarreta perda de tempo e um possível direcionamento para solução incorreta. Segundo Polya,

[3] Informações extraídas do artigo: 10 mandamentos para professores(8)

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram em suas aulas.(POLYA, 1975, p.5).

Nesta etapa é importante destacar alguns fatores que auxiliam na organização e clareza no processo de busca da solução. Inicialmente precisamos identificar as condições oferecidas pela questão. As condicionantes são: Dados; Medidas; figuras ou regras determinadas pelo problema. Em seguida é necessário determinar a incógnita, isto é, o elemento que se busca no problema, a solução. Ainda nesta etapa é válido traçar figuras ou diagramas que organizem as informações fornecidas no problema. A etapa de compreensão do problema é dividida em duas: familiarização e aperfeiçoamento da compreensão. A familiarização é uma visualização geral do problema, fixando a atenção no enunciado do problema. No aperfeiçoamento da compreensão a busca pelas informações são mais específicas com a intenção de preparar o estabelecimento do plano. Vejamos um exemplo aplicado aos alunos do Ensino Médio, na prática, de como estabelecer os fatores fundamentais para compreensão do problema.

Exemplo. *Calcular a diagonal de um cubo conhecendo a medida de sua aresta.*

- A incógnita é o comprimento da diagonal do cubo.
- A condicionante que se relaciona com a incógnita é a medida da aresta do cubo.
- As letras escolhidas para os dados do problema são: D, d, a. Representando respectivamente a diagonal do cubo, a diagonal da base do cubo e a aresta do cubo.
- As condicionantes são suficientes para encontrar o valor da incógnita, apenas com uma restrição reconhecida na fase de estabelecimento do plano.
- É possível esboçar uma figura ou diagrama que facilite a compreensão do problema? Sim.

Figura 1 – Cubo

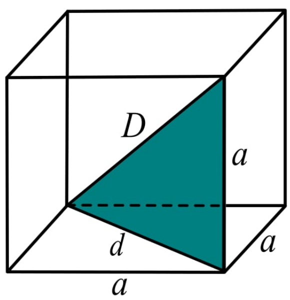


Figura 2 – Fonte: Produzido pelo autor

Na etapa 2, iremos estabelecer um plano para resolver o problema. Nesta etapa, vamos conectar os dados encontrados na etapa anterior com a incógnita. Alguns pontos devem ser questionados para auxiliar o estabelecimento do plano de resolução:

1. As condicionantes são suficientes para descobrir a incógnita?
2. Caso não seja suficiente, alguma definição ou teorema pode nos ajudar?
3. Algum problema auxiliar pode nos ajudar?
4. Através das experiências já vivenciadas, algum problema parecido já foi resolvido?

No exemplo anterior percebemos que as condicionantes não são suficientes para encontrar imediatamente a incógnita. Será necessário descobrir outras medidas para encontrar a solução do problema.

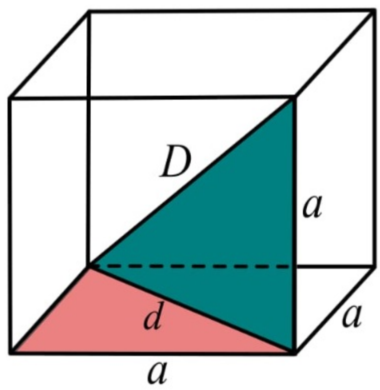


Figura 3 – Cubo hachurado

Após o esboço da figura, optamos por utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da diagonal D do cubo, visto que identificamos um triângulo retângulo em que a hipotenusa é exatamente a diagonal D do cubo.

Na etapa 3 é pôr em prática a estratégia escolhida, analisando criteriosamente se cada passo está correto. Para além, uma prática importante é verificar se é possível demonstrar que as etapas de resolução estão corretas.

$D^2 = a^2 + d^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + d^2}$ (triângulo verde)

Porém, o objetivo do problema é encontrar a diagonal do cubo sabendo do comprimento de sua aresta. Precisamos aplicar o Teorema de Pitágoras novamente para descobrir o comprimento d em função da aresta do cubo. Assim,

$d^2 = a^2 + a^2$, pois percebemos um triângulo retângulo (triâgulo rosa) na face base do cubo. Chegamos então a seguinte expressão:

$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}$

Na etapa 4 nos reportamos ao retrospecto, isto é, verificamos a solução e os argumentos utilizados sob o ponto de vista verídico da Matemática.

1. É possível chegar a esta solução por outro caminho?

2. Já vimos em outros problemas este tipo de solução?

3. O resultado encontrado pode ser generalizado ou utilizado em outra situação?

Em problemas que utilizam um paralelepípedo em vez do cubo é possível utilizar a mesma estratégia de resolução, atentando apenas para as dimensões do sólido e suas características.

É importante perceber também que o resultado encontrado pode ser utilizado para qualquer cubo, isto é, sabendo a medida da aresta do cubo encontra-se a diagonal do cubo através da expressão $D = a\sqrt{3}$.

Vejamos um problema do SAEPE 2021 (3º ano do Ensino Médio) na prática:

Questão 1.1 (Questão 29 - Prova tipo C1201 - SAEPE 2021)**.** Ao final de uma semana, a diferença entre o quadrado do tempo total gasto por José na fase de um jogo e o total desse tempo é de 156 horas. Quanto tempo, em horas, José gastou jogando essa fase do jogo?

A) 12 B) 13 C) 24 D) 25 E) 26

Solução.

- **Compreensão do problema**

  Percebemos que existe uma relação algébrica com a variável "tempo" indicada nas instruções do problema.

- **O plano e sua execução**

  Dessa forma, basta atribuírmos a essa variável uma incógnita "t" e seguir os caminhos indicados no problema.

  $t^2 - t = 156 \Rightarrow t^2 - t - 156 = 0 \Rightarrow t = 13$ e $t = -12$.

- **Retrospecto**

  Isto é, obtemos como possíveis candidatos a solução do problema $t = 13$ horas e $t = -12$ horas. Realizando o retrospecto da questão, percebemos que apenas a opção das 13 horas satisfaz o problema. É necessário rever todo processo de solução do problema, as ferramentas algébricas utilizadas e refletir sobre a solução encontrada. Ela faz sentido frente ao problema? No caso deste problema, a solução $t = -12$ não pode fazer parte da solução, pois tratamos da variável tempo e torna-se impraticável sua admissão na forma negativa.

Após a apresentação e exemplificação das técnicas de George Polya, iremos conhecer a proposta de Terence Tao, sob uma perspectiva contemporânea, para Resolução de Problemas.

1.3 TERENCE TAO

Terence Chi-Shen Tao é um matemático australo-americano de origem chinesa muito reconhecido no cenário matemático atual. Nascido no dia 17 de julho de 1975, Tao foi eleito por especialistas como uma das 10 mentes mais brilhantes do mundo. Com apenas 20 anos obteve seu doutorado na Universidade de Princenton, sendo promovido a professor titular aos 24 anos na Universidade da Califórnia em Los Angeles. Aos 31 anos, em 2006, recebeu a prestigiosa Medalha Fields, no congresso internacional de matemáticos, em Madrid (Espanha). [4]

Tao se destacou por resolver problemas dificílimos em diversas áreas da matemática, mas atualmente concentra seus estudos em análise harmônica, equações diferenciais parciais, combinatória algébrica, combinatória aritmética, combinatória geométrica, detecção comprimida e teoria de números analíticos. Sobre sua genialidade e efetividade nos estudos, observe abaixo um trecho de reportagem postada pelo IMPA [5]:

> Dizem que o talento precoce do matemático australiano Terence Tao apareceu pela primeira vez aos dois anos de idade, quando tentou ensinar outras crianças a contar com blocos. Começou o Ensino Médio e a aprender cálculo aos sete anos e, aos nove, já estava lidando com o cálculo do nível universitário! Foi o estudante mais jovem a participar da Olimpíada Matemática Internacional (IMO). Tinha dez anos e continua a ser o mais jovem vencedor a ganhar três medalhas na história da Olimpíada. [6]

Tao acumulou prêmios e honrarias ao longo de sua carreira como: prêmio Salem (2000), prêmio Bôcher (2002), Clay Research Award (2003), Prêmio Sastra Ramanujan (2006), entre outros. Entretanto, o que chama bastante atenção sobre a carreira desse gênio é sua produtividade acadêmica. Apenas até 2016, Tao já tinha publicado cerca de 300 trabalhos de pesquisa e 17 livros.[7]

---

4 Informações contidas em: <https://impa.br/noticias/terence-tao-mozart-of-math/>. Acessado em 01/02/2023

5 Instituto de Matemática Pura e Aplicada

6 In: <https://impa.br/noticias/terence-tao-mozart-of-math/>(9). Acessado em 01/02/2023

7 Informações contidas em: <https://impa.br/noticias/terence-tao-mozart-of-math/>. Acessado em 01/02/2023

Depois de três participações nas olimpíadas internacionais de Matemática, aos 15 anos de idade, Tao escreve um livro explicando suas técnicas de resolução de problemas, uma obra didática e denominada **Como Resolver Problemas Matemáticos: *Uma Perspectiva Pessoal***(2). Nesta obra, antes de resolver problemas das diversas áreas da matemática, Tao sugere algumas técnicas utilizadas por ele para resolução de problemas.

Segundo Tao, algumas estratégias podem ser utilizadas para facilitar a resolução do problema:

- Perceber o problema. Qual o tipo de problema? Demonstre que ...., calcule..., encontre ou encontre todos..., existe ou não existe
- Entender os dados. Quais são os dados do problema?
- Entender o objetivo. O que queremos?

Perceber o problema é o primeiro passo, pois irá direcionar os esforços na busca pela solução. Em alguns casos, apesar de muita informação que a questão disponibiliza é necessário apenas um contraexemplo. Ou, apesar de pouca informação é necessário demonstrar algum resultado. A estratégia correta dependerá da percepção do problema, de que tipo de problema estamos tratando.

Em seguida, precisamos entender os dados que são uma grande pista para solução da questão. Os dados indicam quais ferramentas utilizar, por exemplo: se são dados ângulos, triângulos e lados, inicialmente nos sugere a utilização da Lei dos senos, lei dos cossenos, Teorema de Pitágoras e etc.

É importante entender o objetivo da questão. E nesse momento subentende-se saber utilizar as estratégias dos passos 1 e 2. Com os dados da questão podemos descobrir diversas informações matemáticas que não estão ligadas ao objetivo da questão. Trata-se de ser objetivo com o que se pede “encurtando” caminhos. Uma observação importante é que abstrair e explorar outros caminhos e estratégias num momento de aula e preparação também é válido, desenvolve o raciocínio e melhora o repertório de ferramentas dos estudantes. Entretanto, no momento da avaliação, a objetividade economizará tempo e energia para solução de outros problemas.

Uma dica muito importante utilizada por Tao nos seus estudos é a tradicional utilização dos rascunhos no papel, pelos seguintes argumentos:[8]

1. Depois relembramos mais facilmente o problema;
2. O papel é bom para fixar o olhar quando emperramos na resolução;

[8] Extraído da obra: **Como Resolver Problemas Matemáticos:** *Uma Perspectiva Pessoal*. São Paulo: Ática, 2009.

3. O ato físico de escrever aquilo que sabemos pode detonar novas ideias e conexões.

Vejamos um problema e a aplicação das técnicas demandadas por Tao:

Questão 1.2 (Questão 30 - Prova tipo C1201 - SAEPE 2021 - (3º ano do Ensino Médio))**.** Para uma exposição de lançamento de marcas, serão colados 2 adesivos com o nome das empresas participantes em cada uma das faces de um poliedro convexo de 16 arestas e 10 vértices, feito de papelão. Quantos adesivos ao todo serão colados nesse poliedro de papelão?

A) 52 B) 48 C) 44 D) 20 E) 16

Solução. Entendemos que é um tipo de problema simples do tipo "calcule". Diante dos dados informados, percebemos a necessidade de descobrir a quantidade de faces do poliedro. Perceba que não conseguimos desenhar o poliedro ou descobrir de que poliedro se trata. Recorremos a relação de Euler: $V + F = A + 2$ e descobrimos a quantidade de faces do poliedro. Utilizando o princípio multiplicativo, descobrimos o total de adesivos colocados no poliedro. Importante ressaltar que poderíamos ter mais adesivos a serem colocados, assim como um poliedro com mais faces, tornando a estratégia de utilizar o princípio multiplicativo fundamental.

Existem problemas com um nível de complexidade alto, desde um problema de olimpíada até a demonstração de trabalhos e conjecturas. Para essas questões, Tao também sugere algumas dicas que surgem da ideia central de modificar o problema. [9]

1. Considerar casos especiais do problema, como por exemplo casos extremos ou degenerados;
2. Resolver uma versão simplificada do problema;
3. Formular uma conjectura que implicaria na solução do problema, e tentar resolvê-la primeiro;
4. Deduzir algumas consequências do problema, e tentar começar por demonstrá-las;
5. Reformular o problema (por exemplo, tomar o contra-positivo, demonstrar por absurdo, ou tentar alguma substituição) ;
6. Estudar soluções de problemas análogos;
7. Generalizar o problema.

[9] Extraído da obra: **Como Resolver Problemas Matemáticos:** *Uma Perspectiva Pessoal.* São Paulo: Ática, 2009.

Essa dicas são dadas por Tao numa situação que ele denomina da seguinte maneira: *"Isto é útil quando não conseguimos sequer iniciar um ataque ao problema"*.(TAO, 2013. p. 7)

As duas obras: **A arte de resolver problemas** de George Polya e **Como Resolver Problemas Matemáticos -** ***Uma Perspectiva Pessoal*** de Terence Tao são muito parecidas em suas estruturas. Capítulos iniciais dedicados as técnicas de resolução de problemas e os demais capítulos de resolução de problemas de áreas diversas, num nível mais elevado do que a avaliação do SAEPE. É imprescindível destacar que o objetivo é reter a essência da estratégia para resolver um problema e que a padronização das técnicas podem ser utilizadas independente do nível do problema.

2 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

A formulação de problemas é uma técnica utilizada em parceria com a metodologia de resolução de problemas que visa desenvolver a criatividade e aproximar o estudante de propostas de resolução de problemas. Sabemos que a avaliação do SAEPE é bem objetiva na avaliação das habilidades, mas acreditamos que um trabalho durante o ano em sala de aula eleve o nível de aprendizagem do aluno contribuindo para um bom desempenho no SAEPE. Em especial, vimos as técnicas sistematizadas por Polya e no quesito - Estabelecimento de um plano - é necessário, por vezes, medidas criativas que podem ser estimuladas com o exercício da formulação de problemas.

Diante da importância da formulação de problemas no contexto da aprendizagem matemática, as normativas nacionais já sugerem a utilização dessa prática:

> Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (BRASIL, 2018, p. 536)

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) é evidenciado como objetivo geral questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Na obra **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática* (10), os autores reiteram:

> Nesse processo, aproximam-se a língua materna e a matemática, as quais se complementam na produção de textos e permitem o desenvolvimento da linguagem específica. O aluno deixa, então, de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas.(SMOLE e DINIZ, 2001, p. 151).

Por se tratar de uma técnica faz-se necessário abordar um elemento que irá favorecer o desenvolvimento da aprendizagem no quesito formulação de problemas. Trata-se das representações de comunicação em sala de aula.

2.1 COMUNICAÇÃO

Observar as diversas maneiras de expressão dos estudantes nas atividades diárias é o ponto inicial do planejamento do professor que deseja qualificar os processos de resolução de problemas. Nesse momento inicial, faz-se um diagnóstico da habilidades comunicativas do aluno: expressões orais, artísticas, gestuais e etc. Adapta-se a experiência e vivência do estudante aos processos de resolução de problemas, sempre no sentido de inclusão.

"*No entanto, em matemática, a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática".* (SMOLE e DINIZ, 2001, p. 15).

A princípio, investir na qualificação da comunicação em matemática na sala de aula, consiste simplesmente em incentivar os alunos a descreverem suas observações, justificando suas soluções ou os caminhos que o fizeram chegar até ela e registrar suas ideias perante a experiência de resolver o problema.

Para facilitar a didática sobre o tema, separamos uma sequência de três recursos enfatizados na obra **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática*, fundamentais para exercer o poder na comunicação dentro dos estudos matemáticos:

1. Oralidade
2. Representações pictóricas
3. Escrita

2.1.1 Oralidade

A princípio a oralidade é um recurso que irá acompanhar o estudante em toda a sua vida estudantil e profissional, ou seja, é um investimento para além da matemática. Pensando no contexto da resolução de problemas, partimos do pressuposto que é um recurso que o aluno já domina. O estudante pode ter dificuldades, mas já sabe se comunicar através de sua oralidade, diferentemente da escrita e de outras exposições teóricas. Partir da oralidade é garantir o mínimo a contribuir com a solução de um problema. Entenderemos oralidade como a expressão principal de comunicação do estudante, seja através da fala ou de gestos (língua de sinais). É a utilização da maneira primária de comunicação.

"...a oralidade é o único recurso quando a escrita e as representações gráficas ainda não são dominadas ou não permitem demonstrar toda a complexidade do que foi pensado". (SMOLE e DINIZ, 2001, p. 17).

É importante utilizar essa metodologia ativa, permitindo os alunos exporem suas vivências, propostas de soluções, comparações com as sugestões dos colegas e dentro desse ambiente é inevitável não evoluir. Reiterando que por definição é exatamente esse o objetivo das metodologias ativas: propor aprendizagens autônomas e participativas, em que o aluno debate e constrói seu conhecimento.

"Oportunidade para os alunos falarem nas aulas faz com que eles sejam capazes de conectar sua linguagem, seu conhecimento e suas experiências pessoais com a linguagem da classe e da área de conhecimento que se está trabalhando". (SMOLE e DINIZ, 2009, p.17).

A comunicação oral permite a socialização da sala de aula, o convívio entre as diferenças, o respeito pela escuta do colega e acima de tudo o desenvolvimento da autoconfiança dos alunos de se expor perante a turma.

2.1.2 Representações pictóricas

Diante de um problema, utilizar expressões pictóricas possui níveis de importância:

1. Utilização do recurso para auxílio no esquema do problema e consequentemente num melhor entendimento da questão;
2. Utilização do recurso como parte da solução do problema, fazendo um papel auxiliar de uma solução escrita;
3. Utilização do recurso como solução do problema, isto é, a própria expressão pictórica soluciona o problema.

Vejamos um exemplo da utilização desses recursos:

Problema. *Um avião decola de um ponto B sob inclinação constante de 15° com a horizontal. A 2 km de B se encontra a projeção vertical C do ponto mais alto D de uma serra de 600 m de altura.*

É correto afirmar que:

A) Não haverá colisão do avião com a serra antes de alcançar 540 m de altura.

B) Haverá colisão do avião com a serra em 540 m de altura.

C) Haverá colisão do avião com a serra em D.

D) Se o avião decolar 220 m antes de B, mantendo a mesma inclinação, não haverá colisão do avião com a serra.

Dados: cos 15° = 0,97; sen 15° = 0,26; tg 15° = 0,27

Figura 4 – Representação pictórica

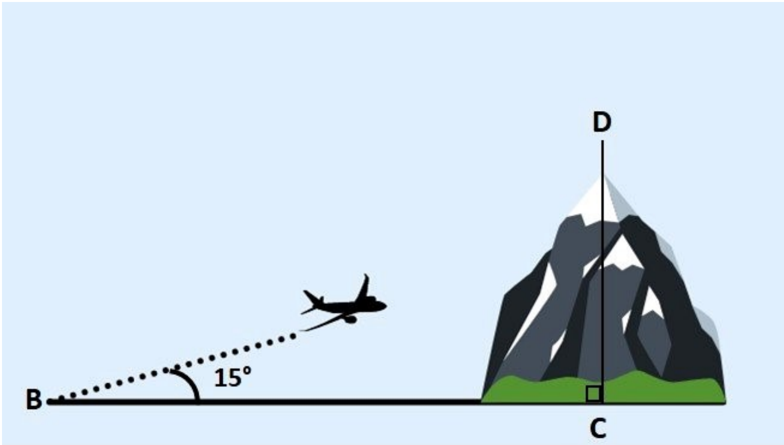


Figura 5 – Fonte: EPCAR 2001

A representação auxilia no entendimento do problema, conectando as informações da questão com as estratégias a serem utilizadas para solucionar o problema.

Questão. Roberto distribuiu 9 lápis em 3 estojos. Quantos lápis ficarão em cada estojo? [1]

Na figura a seguir temos duas representações solucionando o mesmo problema: Na representação à direita, o desenho faz parte da solução acompanhado da escrita. À esquerda, temos um desenho como solução do problema.

Expressão pictórica

Figura 6 – Fonte: SMOLE e DINIZ, 2001, p. 19

[1] Exemplo extraído de **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

Este problemas foi aplicado a crianças das séries iniciais do fundamental 1. Nas crianças a ideia de dividir é relacionada a divisão por igual, justa, mesmo a questão não solicitando uma divisão por igual do número de lápis por estojo. Entendemos que a questão não foi bem elaborada por deixar diversas possibilidades de interpretação, entretanto a intenção é observar as possíveis propostas dos alunos em utilizar representações pictóricas para solucionar ou para fundamentar uma solução. Nestes casos, esse tipo de comunicação favoreceu os estudantes que ainda não dominavam a técnica da divisão, mas conseguiram elaborar um determinado esquema que solucionou o problema.

2.1.3 Escrita

A escrita é mais um recurso que pode ser utilizado como representação das ideias dos alunos. No entanto, ela difere dos outros tipos de comunicação, pois ela permite um resgate a memória do que foi escrito. Dessa forma, escrever favorece o registro da experiência possibilitando o acesso do aluno ao que foi feito, ao compartilhamento com outros colegas e professores sobre o que foi pensado e vivido.

Desenvolver a escrita matemática é uma tarefa mais sofisticada e que depende do desenvolvimento da escrita da língua materna e da aprendizagem de símbolos e significados característicos da linguagem matemática.

A utilização de textos nas aulas de matemática favorece o desenvolvimento da escrita matemática dos alunos e ainda associados a outras estratégias de estímulo a essa aprendizagem tais como: estímulo a construção de problemas, estímulo a escrita de soluções e fazendo sempre a tentativa de relacionar com termos matemáticos.

Com os três fatores da comunicação (Oralidade, Representações pictóricas e Escrita) bem trabalhados e definidos, é sugerido a inserção de atividades introdutórias a formulação de problemas. Antes, porém, é necessário conhecer os tipos de problema.

2.2 TIPOS DE PROBLEMA

É importante definir os tipos de problema, pois facilita a sua utilização de acordo com a finalidade da questão. A estratégia adotada pelo professor para desenvolver determinada habilidade nos seus alunos deve levar em consideração os possíveis tipos de problema existentes.

2.2.1 Problemas convencionais

O problema convencional é o tipo mais comum trabalhado nas aulas de matemática e é geralmente encontrado nos livros didáticos. São questões elaboradas com frases curtas e objetivas, dispensando pensamentos mais sofisticados para sua solução. Algumas outras características são encontradas em problemas convencionais, tais como:

1. Todos os dados explícitos no texto de maneira ordenada;
2. Podem ser resolvidos através de um algoritmo;
3. Tem uma única resposta e é numérica.

O problema convencional foi definido no capítulo anterior como exercício.

2.2.2 Problemas não-convencionais

O problema não-convencional exige que o aluno seja mais cuidadoso com o texto, selecione fatos e informações, defina as prioridades e elimine dados que não auxiliam a resolução do problema. O pensamento precisa ser mais elaborado e a escolha da estratégia de resolução precisa planejada, pois neste tipo de problema ocorrem situações inusitadas, histórias com fantasias e que estimulam o imaginário. Essas questões motivam o aluno e envolvem sua atenção na resolução do problema além de estimular a mobilização de diferentes recursos de comunicação.

Vejamos dois problemas elementares de solução semelhante que distiguem um problema convencional e um problema não-convencional.

Problema convencional Ricardo comprou 3 pacotes de figurinhas. Em cada pacote há 4 figurinhas. Quantas figurinhas Ricardo tem ao todo?[2]

Problema não-convencional Isso é um cérbero. Cada vez que umas das suas cabeças está doendo, ele tem que tomar quatro comprimidos. Hoje as suas três cabeças tiveram dor. Mas o frasco já estava no fim e ficou faltando comprimidos para uma cabeça. Quantos comprimidos haviam no frasco?[3]

[2] Exemplo extraído de **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

[3] Exemplo extraído de **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

Cérbero

Figura 7 – Fonte: SMOLE e DINIZ, 2001, p. 104

Um problema não-convencional estimula o aluno a pensar estratégicamente sua solução, além de proporcionar diversas observações sobre o problema. Na questão anterior, por exemplo, podemos obter mais de uma solução e com respostas diferentes. A quantidade de comprimidos pode ser 8, 9, 10 ou 11, porque o problema afirma que ficou faltando comprimidos e nessas quatro opções de solução falta comprimido para uma das cabeças.

2.2.3 Problemas sem solução

Utilizar esse tipo de problema em sala de aula confronta com a ideia que precisamos utilizar os dados apresentados na questão. Além disso estimula o aluno a questionar, duvidar e criticar sobre o que se pede na questão. Vamos observar o exemplo abaixo:

Um menino possui 3 carrinhos com 4 rodas em cada um. Qual a idade do menino?[4]

Este é um problema mostrado aos estudantes do Ensino Fundamental 1 com o objetivo de observar a solução dos alunos sob a perspectiva da interpretação textual e relação com a Matemática. Observar se os estudantes são capazes perceber a ausência de lógica causal entre os dados do problema e o que se pede.

2.2.4 Problemas com mais de uma solução

Esse tipo de problema rompe com a tradicional ideia de que todo problema tem uma única resposta. Valoriza a resposta de cada aluno e expõe as diferentes maneiras de alcançarmos a solução. Uma outra proposta didática para este tipo problema é estimular os

[4] Exemplo extraído de **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

estudantes a buscarem a maior variedade de soluções para o mesmo problema, aumentando assim o seu próprio repertório de estratégias. Vejamos um exemplo abaixo:

Dados seis quadrados iguais, construir uma planificação para o cubo. [5]

É interessante neste tipo de problema, pedir para os alunos solucionarem e depois discutirem suas soluções, atentando para o fato de que não existe uma única solução para o problema proposto.

2.2.5 Problemas com excesso de dados

Trabalhar com esse tipo de problema rompe com a lógica dos problemas convencionais em que todos os dados são utilizados, numa ordem dada e previsível. Solucionar um problema com excesso de dados conduz o aluno a compreender o problema e utilizar apenas informações relevantes para sua resolução. Essa questões com excesso de dados traz a realidade do cotidiano para perto do aluno, pois na maioria dos casos os problemas não se apresentam de maneira concisa e objetiva. Vejamos um exemplo abaixo:

> Caio é um garoto de 6 anos e gosta muito de brincar com bolinhas de gude. Todos os dias acorda às 8 horas, toma o seu café e corre para a casa de seu amigo Júnior para brincar. Caio levou 2 dúzias de bolinhas coloridas para jogar. No final do jogo ele havia perdido um quarto de suas bolinhas e Júnior ficou muito contente, pois agora tinha o triplo de bolinhas de Caio. Quantas bolinhas Júnior tinha ao iniciar o jogo? (SMOLE e DINIZ, 2001, p. 111)

No contexto do Ensino Fundamental 1, este tipo de problema conduz os estudantes a interpretarem todos os dados fornecidos como relevantes para solução do problema. Neste problema, a idade de Caio e o horário que ele acorda são irrelevantes para solução do problema e por isso são vistos com excesso de dados.

2.2.6 Problemas de lógica

Esse tipo de problema possue uma proposta de solução dedutiva, argumentativa e de levantamento de hipóteses e suposições. Há o rompimento no ideal dos estudantes de que as soluções consistem apenas em números. Nos casos em que os alunos ainda não dominem um algoritmo ou operações matemáticas ele pode tentar descobrir uma solução utilizando métodos como tentativa e erro, uso de tabelas, diagramas e listas, são as soluções não-convencionais. Vejamos um exemplo[6] abaixo:

Alice, Bernardo, Cecília, Otávio e Rodrigo são irmãos. Sabemos que:

-Alice não é a mais velha.

---

[5] Exemplo extraído de **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

[6] Exemplo extraído de **Ler, escrever e resolver problemas** *Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

-Cecília não é a mais nova

-Alice é mais velha que Cecília

-Bernardo é mais velho que Otávio

-Rodrigo é mais velho que Cecília e mais moço que Alice.

Você pode descobrir a ordem em que nasceram esses cinco irmãos?

2.3 FORMULANDO PROBLEMAS

Estimular o aluno a formular seus próprios problemas garante o incentivo a organização de ideias, construção estruturada do texto e domínio do conteúdo matemático utilizado.

> Permitir expressar ideias, contar histórias, relatar e conservar traços, proporcionar prazer em inventar, construir um texto, compreender seu funcionamento, buscar palavras adequadas a ele, vencer dificuldades encontradas, encontrar o tipo de escrita e a formulação mais adequada à situação proposta e, finalmente, ver o texto acabado e bem-apresentado.(SMOLE e DINIZ, 2001, p. 152)

Entretanto é necessário ter cautela nas primeiras propostas de formulação de problemas, planejar a introdução dessa atividade com um repertório maior de estratégias de resolução e um conhecimento prévio dos tipos de problema. Seguem algumas propostas de introdução a formulação de problemas:

Formular problemas

- A partir de um problema dado, criar uma pergunta que possa ser respondida através dele;
- A partir de uma figura dada, criar uma pergunta;
- A partir de um início dado, continuar o problema;
- A partir de um problema dado, criar um parecido;
- Formular um problema a partir de uma pergunta;
- Formular um problema a partir de uma palavra;
- Formular um problema a partir de uma resposta dada;
- Formular um problema a partir de uma operação;
- Formular um problema a partir de um tema;

- Formular um problema com determinado tipo de texto e/ou contexto.

Diante das técnicas de resolução e formulação de problemas apresentadas, iremos nos debruçar sobre a avaliação do SAEPE, buscando compreender os aspectos da sua proposta, estrutura e finalidade de funcionamento, além da aplicação das técnicas vistas na prova do SAEPE 2021.

3 SAEPE

O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) foi criado para avaliar a situação educacional de Pernambuco funcionando especialmente de maneira diagnóstica revelando os aspectos positivos e negativos no desempenho dos alunos da rede pública. Os resultados nessa avaliação são explicitados de maneira quantitativa e qualitativa para as Gerência Regionais de Educação do Estado de Pernambuco, as quais compartilham com as escolas e toda comunidade escolar. O objetivo é transparecer o desempenho de maneira didática afim de que seja possível, saber o percentual de acertos, por exemplo, numa determinada habilidade avaliada. O resultado de cada escola é compartilhado com a comunidade escolar tornando possível a construção de um planejamento feito por alunos, professores e gestão a fim de superar desafios e desenvolver as aprendizagens esperadas. Como parte do processo a gestão da escola disponibiliza estrutura física, professores e equipe pedagógica debatem metodologias e propõem estratégias que resultem na aprendizagem das habilidades e competências que os alunos necessitam. Estes, por sua vez, participam das estratégias da escola, debatendo os temas abordados e propondo caminhos que facilitem sua evolução.

O SAEPE surge num contexto de busca por melhores resultados na educação no âmbito tanto nacional como internacional. O estado de Pernambuco utiliza em sua administração uma gestão conhecida como *gestão por resultados* em que qualquer objetivo a ser alcançado passa pelo processo de planejamento e acompanhamento das metas específicas até o resultado final. A seguir, o resultado final é avaliado e todo o processo recomeça do início. Tendo em vista a necessidade de resultados melhores, definidos nas políticas educacionais, o estado de Pernambuco passa a estudar estratégias que possibilitem a aprendizagem de seus alunos e culminem num melhor desempenho no âmbito nacional e internacional. No âmbito nacional temos o SAEB e no âmbito internacional o PISA[1]. É criado o SAEPE, ideal do modelo de gestão por resultados e produto da necessidade de desenvolvimento da educação e melhores colocações nos rankings das avaliações externas ao estado de Pernambuco.

O planejamento da avaliação do SAEPE seguiu a base do SAEB e como avaliação externa possui algumas características amparadas por elementos essenciais da prova. Nos debruçaremos adiante sobre cada componente essencial da avaliação, bem como do contexto histórico, séries/etapas avaliadas, excepcionalidades geradas por interferências da Pandemia vivida no mundo e ainda competências/habilidades abordadas e previstas como necessárias nos currículos dos normativos educacionais.

[1] Programa Internacional de Avaliação de Alunos

3.1 BREVE HISTÓRIA DO SAEPE

Inicialmente, o SAEPE foi aplicado nos anos de 2000, 2002 e 2005, nas séries do 3º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio. O processo foi sendo aperfeiçoado, a participação dos alunos aumentando e a avaliação foi se tornando fundamental até que em 2008 o SAEPE passou a ser um sistema de avaliação anual. Em 2016, uma mudança significativa ocorre: em vez do 3º ano do fundamental, o 2º ano do fundamental passa a ser avaliado. A intenção é captar informações sobre o desenvolvimento do processo de alfabetização, em Língua Portuguesa e Matemática, a tempo de desenvolver ações capazes de ajustar eventuais problemas identificados ao longo do processo. [2]

> Em 2000, o estado de Pernambuco, com o intuito de assegurar aos estudantes o acesso a uma educação de qualidade, criou o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco, o SAEPE. Seu objetivo primordial é, a partir dos instrumentos de avaliação, produzir diagnósticos sobre as redes públicas do estado, permitindo a identificação de problemas e virtudes, subsidiando assim ações e políticas públicas que visem a enfrentar os obstáculos encontrados. (CAED, 2016, p. 15)

Juntamente as ideias de avaliação que acompanharam o SAEPE desde 2000, alguns pontos são sugeridos para reflexão no momento diagnóstico da avaliação, são eles:

1. Quais são as principais defasagens percebidas nos alunos da escola?
2. Quais componentes curriculares as defasagens ficam mais evidentes?
3. Quais ações coletivas podem ser pensadas para cada etapa?
4. É possível realizar um trabalho conjunto entre professores de uma mesma área? E de áreas diferentes?

Como avaliação a prova do SAEPE têm objetivos e, o principal deles é o diagnóstico produzido pela realização da prova. Merecem destaque alguns pontos sobre a diagnose:

1. **Apresenta dados sobre estudantes e sobre o que são capazes de fazer.** O relatório enviado para as escolas revela o percentual de acertos em determinada habilidade matemática, auxiliando a equipe pedagógica na tomada de decisão de investimento nas competências mais defasadas.
2. **Possibilita um diagnóstico e possível planejamento sobre quais ações realizar.** Com o diagnóstico do nível de aprendizagem, as ações são tomadas de maneira mais assertiva. Foco nas competências com piores desempenhos e utilização de ferramentas tecnológicas nas aulas são exemplos de atitudes que podem ser tomadas na escola.

[2] Informações retiradas da Revista do Professor Matemática (SAEPE). Pernambuco, 2016.

3. **Avaliação externa se resume ao desempenho do aluno naquele momento, diferentemente das avaliações no cotidiano escolar.** A avaliação do SAEPE ocorre em um único dia do ano letivo, expondo o estudante a intercorrências comuns ao dia da prova. Logo, é importante destacar a importância do cotidiano escolar e interpretar os resultados levando em consideração esses fatores

4. **Conhecer como funciona a prova é fundamental para um bom desempenho**. Saber quais são os componentes curriculares exigidos, entender a pontuação em cada questão e dominar as estratégias de resolução de problemas aliadas ao tempo de prova.

3.2 SOBRE A AVALIAÇÃO

A prova do SAEPE é aplicada num único dia, no final do ano letivo em data escolhida pela Secretaria de Educação de Pernambuco e divulgada com antecedência para as escolas. Todas as escolas da rede estadual de Pernambuco fazem a prova no mesmo dia e horário, respeitando apenas o turno de estudo do aluno. Consiste de 26 questões de Português e 26 questões de Matemática além de um questionário socioeconômico, a ser respondido pelos alunos.

Todos os dados apresentados aqui neste trabalho referem-se a Escola São Miguel, localizada na 2º Travessa da rua Siriji, S/N, no Alto do Mandu, Zona Norte do Recife/PE. CEP 52071-000. A escola oferece turmas do 6º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio da rede pública do estado de Pernambuco. Por ter perfil público e transparência nos resultados a escola serve de base para exposição desse trabalho.

Para compreender a proposta da avaliação e como utilizar os seus resultados é fundamental entender cada elemento que compõe a prova. São elementos essenciais: Matriz de Referência, Item, Proficiência, Escala de Proficiência e o Padrão de Desempenho. A seguir iremos definir esses elementos e outros fatores que venham a surgir, de modo a deixar transparente todo o processo avaliativo.

3.2.1 Matriz de referência

A matriz de referência é um documento [3] com as habilidades e competências a serem avaliadas na prova. Trata-se de um "recorte", uma amostra dos temas a serem trabalhados em sala de aula previstos no currículo referente a etapa/série em questão. É uma maneira de avaliar se o aluno desenvolveu as habilidades e competências esperadas na etapa e no componente avaliado.

[3] Informações retiradas da Revista do Professor Matemática (SAEPE). Pernambuco, 2016.

Para facilitar a organização da avaliação de cada componente, chamaremos de *Descritor* cada componente que deseja ser avaliado. Por exemplo: **Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.** Esse é um descritor referente ao 9º ano do ensino fundamental no eixo [4] de Geometria. Assim como: **Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.** Esse é um descritor referente ao 3º ano do ensino médio no eixo de Estatística, Probabilidade e Combinatória. Vejamos abaixo os descritores do 3º ano do Ensino Médio associados ao eixo específico:

I.GEOMETRIA

- D01 Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
- D02 Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.
- D03 Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
- D04 Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
- D05 Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
- D06 Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D07 Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
- D08 Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
- D09 Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
- D10 Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

II. GRANDEZAS E MEDIDAS

[4] De acordo com os Parâmetros curriculares do estado de Pernambuco, os conteúdos são divididos em 5 eixos: Geometria, Estatística e probabilidade, Números e operações, Grandezas e medidas e Álgebra e funções.

- D11 Resolver problema envolvendo perímetro de figuras planas.
- D12 Resolver problema envolvendo área de figuras planas.
- D13 Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

III. NÚMEROS E OPERAÇÕES/ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- D14 Identificar a localização de números reais na reta numérica.
- D15 Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
- D16 Resolver problema que envolva porcentagem.
- D17 Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
- D18 Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- D19 Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.
- D20 Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- D21 Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral.
- D22 Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.
- D23 Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico ou vice-versa.
- D24 Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função polinomial do 2º grau.
- D25 Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.
- D26 Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- D27 Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
- D28 Resolver problema que envolva função exponencial.

- D29 Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.
- D30 Determinar a solução de um sistema linear.
- D35 Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

IV. ESTATÍSTICA, PROBABILIDADE E COMBINATÓRIA

- D31 Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.
- D32 Resolver problema que envolva probabilidade de um evento.
- D33 Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
- D34 Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Contudo, como a avaliação do SAEPE é um "recorte" do currículo, não são todos os descritores que são abordados na prova. Adiante veremos alguns descritores de Matemática utilizados no SAEPE 2021.

3.2.2 Item

Os itens são as questões presentes na avaliação que verificam se o estudante desenvolveu tal habilidade. Como a prova do SAEPE é objetiva, os itens são de múltiplas escolha, sendo uma das alternativas denominada gabarito e as demais são os distratores. Vale salientar que cada item avalia uma única habilidade com a intenção justa de ser preciso em relação ao desenvolvimento da aprendizagem do aluno. Segue abaixo um exemplo de item associado a um descritor:

Descritor: Resolver problemas que envolvam equação do 2º grau. (3º ano do Ensino Médio).

Questão (Questão adaptada SAEPE 2019). A equação $x + 2 = \sqrt{3x + 10}$ possui quantas soluções reais?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

3.2.2.1 Teoria de resposta ao item - TRI

A avaliação do SAEPE surge com a necessidade de um diagnóstico de aprendizagem e aspirando bons resultados na avaliação nacional do SAEB. Por isso, a prova do SAEPE é inspirada no formato da prova do SAEB utilizando os mesmos componentes curriculares e a TRI - Teoria de Resposta ao Item. Essa teoria, consiste numa metodologia que não se limita ao total de acertos na prova. São levados em consideração habilidades avaliadas, características do item entre outros fatores. Segue abaixo, de acordo com recomendação do MEC (11), três parâmetros que qualificam o TRI:

1. Poder de distinção entre o estudante que tem a proficiência avaliada e o estudante que não tem;
2. Grau de dificuldade;
3. Possibilidade de acerto ao acaso.

Neste tipo de metodologia é levada em consideração a proficiência do aluno, de modo que o aluno com proficiência maior tende a acertar questões com níveis de dificuldade menores que o da sua proficiência. Da mesma maneira, tendem a errar questões com níveis de proficiência maiores que a sua. Observamos então que o padrão de resposta do aluno é fundamental para o sucesso na avaliação. Importante frisarmos que nesse tipo de metodologia, a quantidade de acertos não é, necessariamente, determinante.

3.2.3 Proficiência

A proficiência é a medida do desempenho do estudante. Na avaliação do SAEPE é um número (nota) que leva em consideração a Teoria de resposta ao item e uma escala de proficiência que classifica o desempenho do estudante em cada item. Nessa avaliação é calculada a proficiência da instituição educacional, resultado da média aritmética das proficiências dos alunos.

Figura 8 – Proficiência - Escola São Miguel

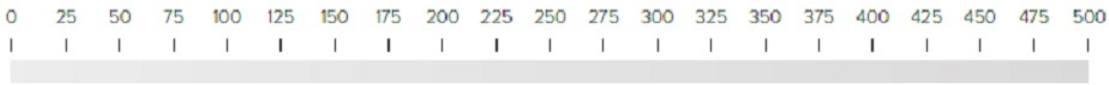
Fonte: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/>. Acessado em 01/06/2023.

A imagem anterior nos mostra a proficiência da Escola São Miguel nos anos de 2019, 2021 e 2022 e, em cada ano dispõe a proficiência média da rede estadual de Pernambuco. Logo é possível comparar e perceber pela seta comparativa se a proficiência está acima ou abaixo da média estadual.

3.2.3.1 Escala de proficiência

A escala de proficiência traduz o desempenho em diagnósticos qualitativos. Varia de 0 a 500 e se baseia na escala do SAEB.

Figura 10 – Exemplo de escala



3.2.4 Padrão de desempenho

Afim de tornar mais didático e compreensivo o entendimento dos dados e necessidades pedagógicas dos estudantes, a escala de proficiência é dividida em intervalos. Esses intervalos são os Padrões de Desempenho [5].

Padrões de desempenho em Matemática

Etapa	Elementar I	Elementar II	Básico	Desejável
5º ano EF	Até 150	150 a 185	185 a 220	Acima de 220
9º ano EF	Até 225	225 a 245	245 a 280	Acima de 280
3ª série EM	Até 250	250 a 290	290 a 325	Acima de 325

Fonte: Revista do Professor de Matemática/CAED-UFJF

Os padrões de desempenho são divididos em quatro: Elementar I, Elementar II, Básico e Desejável. Vamos definir cada um desses padrões de classificação:

Elementar I: Padrão de desempenho bem abaixo do mínimo esperado para etapa de escolaridade e a área do conhecimento avaliadas, revelando carências de aprendizagem. Para os estudantes que se encontram neste padrão, deve ser dada atenção especial, exigindo uma ação pedagógica intensiva por parte da instituição escolar.

Elementar II: Padrão considerado básico para a etapa e a área do conhecimento avaliadas. Os estudantes que se encontram neste padrão caracterizam-se por um processo

[5] Essa divisão e classificação dos padrões encontra-se na disponível na Revista do Professor- Matemática- SAEPE

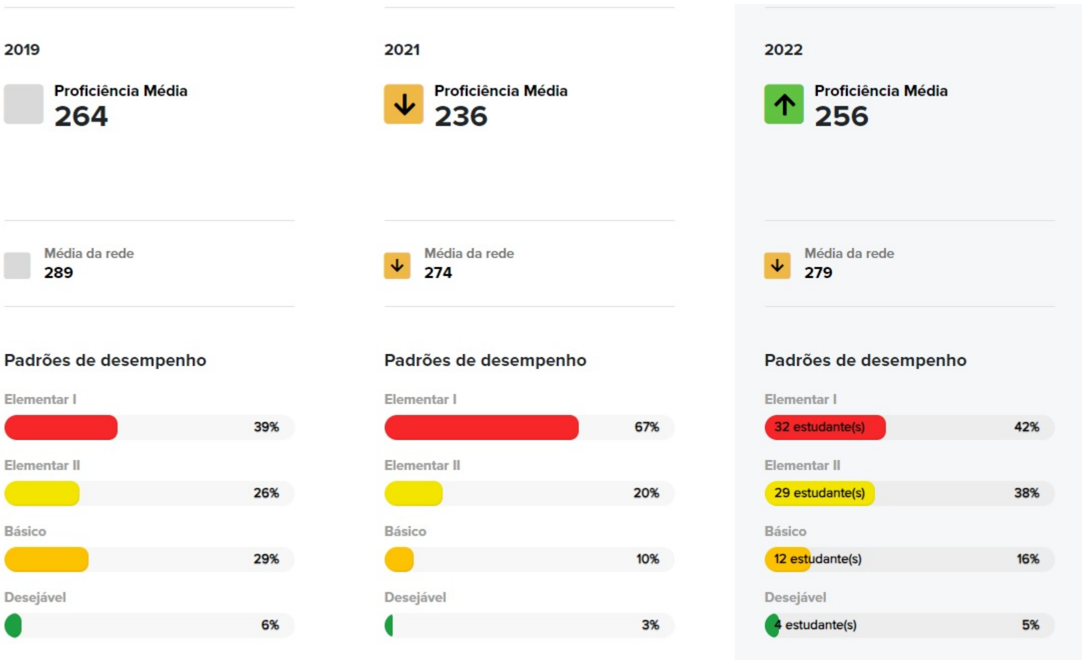
inicial de desenvolvimento de competências e habilidades correspondentes à etapa de escolaridade em que estão situadas.

Básico: Padrão considerado adequado para etapa e a área de conhecimento avaliadas. Os estudantes que alcançarem este padrão demonstram ter desenvolvido as habilidades essenciais referentes à etapa de escolaridade em que se encontram, demandando ações para aprofundar a aprendizagem.

Desejável: Padrão de desempenho desejável para a etapa e área do conhecimento avaliadas. Os estudantes alocados neste padrão demonstram desempenho além do esperado para a etapa de escolaridade em que se encontram, necessitando de estímulos para continuar avançando no processo de aprendizagem.

Na figura seguinte está representado o padrão de desempenho dos estudantes do 3º ano do ensino médio da escola São Miguel nos anos de 2019, 2021 e 2022. Esta representação mostra o percentual de estudantes que fizeram o SAEPE e o padrão de desempenho em que eles se encontram. Por exemplo, em 2021, 67% dos alunos que realizaram o SAEPE se enquadram no padrão Elementar I, 20% no padrão Elementar II, o padrão Básico foi atingido por 10% dos estudantes e apenas 3 % dos alunos atingiram o padrão desejável.

Figura 12 – Padrão percentual do 3º ano do Ensino Médio da Escola São Miguel



Fonte: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/>. Acessado em 01/06/2023.

3.2.5 Outros fatores sobre a avaliação do SAEPE

1. A participação de um número expressivo de estudantes daquela série é fundamental para trazer um diagnóstico mais próximo da realidade. Os dados só são divulgados

se as turmas relacionadas aquela série atingirem, no mínimo, 80% de presença no dia da prova. Assim, a proficiência da escola é resultado da média aritmética da proficiência dos alunos presentes no dia da avaliação.

2. A avaliação do SAEPE tem uma missão diagnóstica muito relevante e, assim, de maneira muito didática, um relatório é gerado e disponibilizado para a escola com as seguintes informações: proficiência média, padrão de desempenho médio, distribuição dos estudantes por padrão de desempenho e percentual de acertos por descritor.

3. Os padrões de desempenho do SAEPE são estabelecidos pela Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco (SEE-PE), a partir das expectativas de aprendizagem e componentes curriculares avaliados.

A figura seguinte nos mostra o percentual de frequência dos alunos do 3º ano do Ensino Médio na avaliação do SAEPE em 2019, 2021 e 2022. Faz uma comparação com o ano anterior através da seta indicativa e expõe o desempenho médio da rede estadual de Pernambuco. Esses dados permitem observar se houveram avanços na participação dos estudantes da escola em relação ao ano anterior e permite uma comparação com a participação da rede estadual de Pernambuco. Em 2021, por exemplo, tivemos uma participação de 95% dos alunos matriculados no 3º ano do Ensino Médio, um percentual um pouco abaixo da participação da escola em 2019 e um pouco acima da participação média da rede estadual de Pernambuco.

Figura 14 – Relatório de frequência dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio da Escola São Miguel.

Fonte: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/>. Acessado em 01/06/2023.

3.3 PANDEMIA - CARÁTER EXCEPCIONAL

O SAEPE 2021 tem uma característica diferenciada de todas as outras edições da avaliação: diagnosticar a aprendizagem no período da pandemia de COVID 19. Vários fatores influenciaram no desenvovimento da aprendizagem nessa fase dentre eles merecem destaque: o acesso as TIC's (Tecnologia da informação e comunicação), os impactos sociais e os impactos causados na saúde mental das pessoas.

TIC's - Com a impossibilidade das aulas presenciais, iniciou-se uma corrida tecnológica na educação. Sala de aula virtual, softwares de videoconferência, mesas digitais, câmeras e tantos outros equipamentos que fizessem com que os conteúdos chegassem até os alunos. Entretanto, as condições socioeconômicas de alunos e professores se tornaram um empecilho para aquisição dos equipamentos e acesso a tecnologia. Muitos profissionais ainda não dominavam as técnicas de transmissão de conteúdos digitais, assim como os alunos tinham problemas estruturais e de conexão. "Nesse período, as diferenças e desigualdades entre o alunado tornaram-se ainda mais evidentes, em especial no que se refere ao acesso às TIC's". (CAED, 2021, p. 13)

Impactos sociais - O desemprego e a crise econômica fez com que as famílias precisassem mudar de residência, muitos alunos foram em busca de gerar renda para auxiliar os pais, além de toda dificuldade em adquirir os equipamentos tecnológicos para acesso as aulas. O resultado desses fatores foi uma grande evasão escolar e dificuldade de acompanhamento escolar.

> Sabemos que, em função dessa mudança abrupta, inúmeras dificuldades surgiram pelo caminho, como falta de acesso aos meios digitais por parte de muitos alunos e dificuldade de adaptação a essa nova realidade por parte tanto de professores, quanto de alunos e dos demais agentes educacionais envolvidos no processo ensino-aprendizagem. (CAED, 2021, p.5)

Impactos na saúde mental - Professores, alunos, gestores, familiares dos alunos e comunidade escolar em geral tiveram impactos no processo de desenvolvimento da aprendizagem devido a problemas de saúde mental. Conviver com o medo gerado pelo contexto de mortes e isolamentos dificultou o acesso a aprendizagem.

> Além disso, um fator que não pode ser desconsiderado é a questão emocional que envolve o período, cercado por incertezas e uma sensação de insegurança, em função da pandemia e de suas consequências. Tudo isso deve ser levado em conta, ao refletirmos sobre o contexto e os resultados educacionais desse período. (CAED, 2021, p.5)

3.4 COMPARATIVO SAEPE 2021 e 2022

Tabela 1 – Total de acertos em percentual - Escola São Miguel

	2021	2022
Total de acertos	31%	34%

Fonte: Produzida pelo autor.

Tabela 2 – Percentual de acertos por descritor - Escola São Miguel

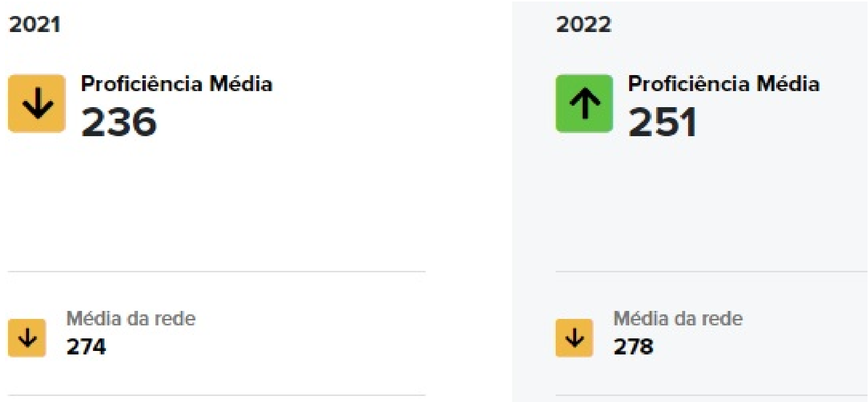
Descritor	2021	2022
D1	-	-
D2	-	8%
D3	-	-
D4	-	-
D5	20%	43%
D6	62%	34%
D7	-	-
D8	17%	10%
D9	46%	56%
D10	-	23%
D11	-	-
D12	20%	24%
D13	-	32%
D14	33%	69%
D15	34%	53%
D16	40%	52%
D17	19%	55%
D18	25%	26%
D19	26%	38%
D20	27%	18%
D21	-	-
D22	-	3%
D23	-	39%
D24	-	-
D25	19%	12%
D26	20%	10%
D27	-	-
D28	31%	35%
D29	14%	14%
D30	-	23%
D31	22%	18%
D32	44%	44%
D33	44%	66%
D34	73%	77%

Fonte: Produzida pelo autor.

Sabemos que são 26 questões e cada uma contém um descritor a ser avaliado. Assim, provas de anos distintos nem sempre avaliam os mesmos descritores. Nas provas de 2021 e 2022, 20 descritores coincidiram, obtendo uma melhora de acertos em 12 deles. Nos demais a diferença, em alguns casos, foi mínima.

Por se tratar de uma avaliação que utiliza o TRI, sabemos que o fator acerto, por si só, não é suficiente para uma melhora na proficiência da escola. Então, veremos a proficiência nesses anos e a movimentação dos alunos nos padrões de desempenho.

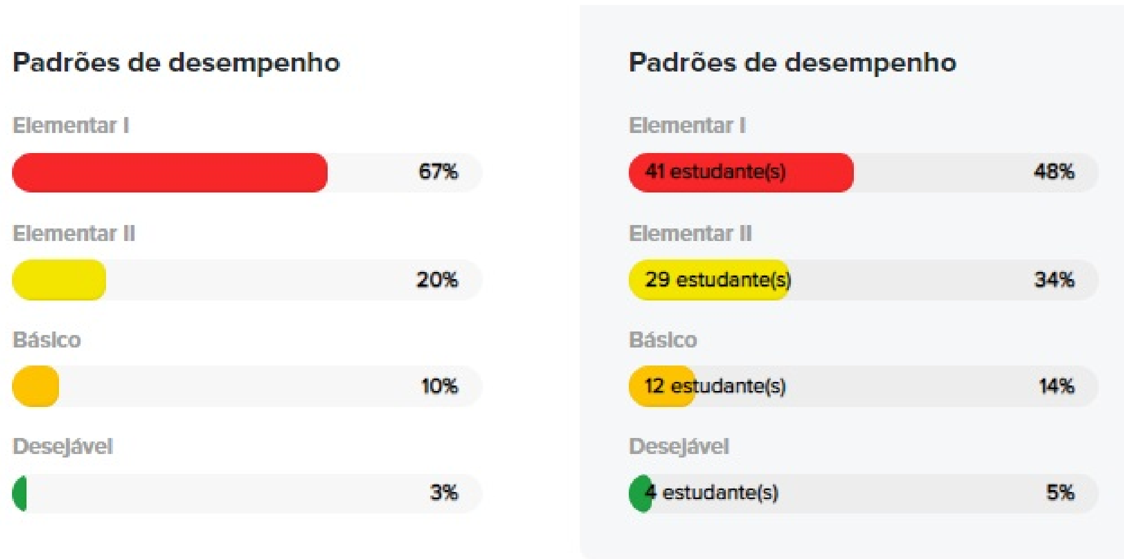
Figura 16 – Proficiência média - Escola São Miguel



Proficiência.
Fonte: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/>. Acessado em 01/06/2023.

A proficiência média da escola em matemática aumentou 15 pontos. Cresceu, em percentuais, mais do que a rede estadual.

Figura 18 – Padrões de desempenho



Fonte: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/>. Acessado em 01/06/2023.

O fator que demonstra mais evolução nos resultados de 2022 comparados a 2021 é a movimentação dos estudantes nos padrões de desempenho. Houve uma migração dos alunos do padrão Elementar I para Elementar II, Básico e Desejável.

3.5 UM AUXÍLIO DAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Conhecendo como funciona a avaliação e sua importância no contexto de desenvolvimento dos resultados nacionais e internacionais, torna-se fundamental refletir sobre o processo de aprendizagem dos alunos em Matemática, desde a didática implementada pelo professor em sala de aula, infraestrutura oferecida pela gestão da escola até os mínimos detalhes do momento em que os alunos realizam a avaliação. No cotidiano em sala de aula, é perceptível que o estudante quando se depara com um problema que exige conhecimentos de matemática para ser resolvido, ele encontra dificuldades elementares que vão desde o entendimento do problema até a escolha de uma estratégia para solucioná-lo. Percebemos que apenas o conhecimento matemático não é suficiente, e que a utilização da imaginação, criatividade e técnicas de resolução de problemas contribuem bastante no sucesso da resolução. Existem muitas técnicas à disposição e iremos mostrá-las adiante.

.

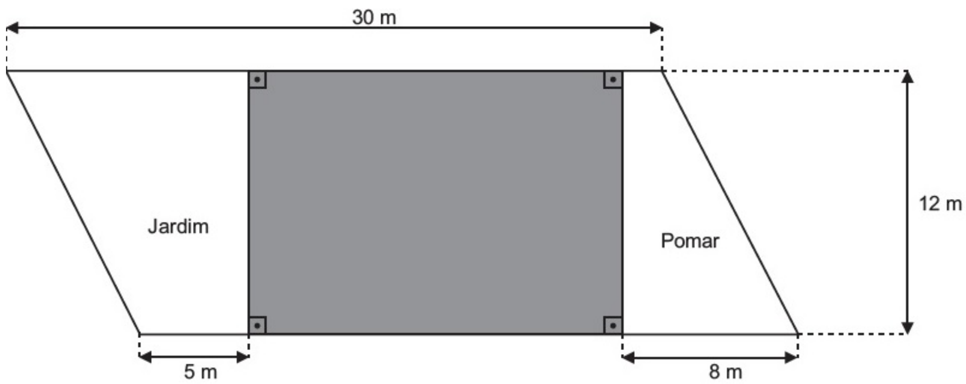
4 SOLUÇÃO DAS QUESTÕES DE MATEMÁTICA - SAEPE 2021

Nas soluções das questões do SAEPE 2021, iremos separar as resoluções dos problemas e dos exercícios. Na resolução dos problemas aplicaremos as técnicas conhecidas no Capítulo 1. Aos exercícios solucionaremos com comentários discretos, além de dar sugestões de elaboração de problemas a partir do contexto do exercício proposto. Ressaltamos que as propostas de elaboração de problemas serão relacionadas aos descritores de cada questão.

4.1 PROBLEMAS

Problema 4.1 (Questão 32 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D12 - Resolver problema envolvendo área de figura plana.

O desenho abaixo representa o terreno da chácara de Paula, que possui o formato de um paralelogramo. Parte do terreno desta chácara foi utilizado para fazer um jardim e um pomar e, na parte retangular colorida de cinza, Paula pretende construir uma casa. O jardim e o pomar dessa chácara ocupam, ao todo, uma área de:



A) 360 m^2 B) 204 m^2 **C) 156** m^2 D) 84 m^2 E) 55 m^2

Solução.

- Compreensão do problema

  Inicialmente quando nos deparamos com uma questão que pede o valor de área de determinada região, intuitivamente isso nos leva a tentar calcular diretamente a área dessa região. Entretanto, isso nem sempre será possível devido aos dados informados na questão. É o que ocorre nesse problema, pois as áreas solicitadas, individualmente, não permitem o cálculo da questão. Desse modo, Tao nos remete a recordar outros problemas resolvidos anteriormente, ou tentar minimizar o problema num outro menor e tentar trazer a estratégia para o problema em questão.

- Plano de execução do problema

  Podemos calcular a área da planta toda e subtrair a área da região cinza, mas ainda assim não teríamos as áreas individuais do jardim e do pomar. Porém a questão pede exatamente a área ocupada pelas áreas juntas e isso se torna possível com a estratégia indicada.

- Execução do plano

$$\text{Área Total} \Rightarrow 30 \cdot 12 = 360,$$
$$\text{e Área Cinza} \Rightarrow 17 \cdot 12 = 204.$$

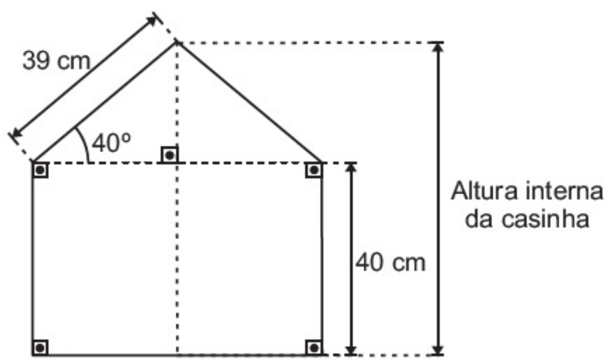
  Portanto, $360 - 204 = 156$ é a solução do problema.

- Retrospecto do problema

  Importante observar que essa estratégia de utilizar o cálculo do todo e subtrair o que não nos interessa é muito utilizada na Análise Combinatória, nos problemas de Contagem. Perceba que é uma estratégia muito utilizada em área diferente da geometria exigida na questão, reforçando as dicas orientadas por Tao em relacionar estratégias conhecidas anteriormente.

Problema 4.2 (Questão 38 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D05 - Resolver problemas que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (Seno, Cosseno e Tangente).

Juliano fez uma casinha de madeira para seu cachorro. Algumas medidas internas da parede traseira dessa casinha estão indicadas na figura abaixo. Qual a medida da altura dessa casinha?



Dados:
sen 40° ≅ 0,64
cos 40° ≅ 0,77
tg 40° ≅ 0,84

A) 64,96 *cm* B) 70,03 *cm* C) 72,76 *cm* D) 78,36 *cm* E) 79 *cm*

Solução.

- Compreensão do problema

  É necessário utilizar o triângulo retângulo que faz parte da figura, pois para solucionar o problema é preciso descobrir a medida de uma parte da parede interna que corresponde ao cateto oposto ao ângulo de 40 graus.

- Elaboração do plano

  Chamaremos de x o cateto oposto a 40° no triângulo que representa o teto da casa de madeira. x é parte da altura da casa. Percebemos que a aplicação de alguma fórmula ou regra matemática nem sempre nos levará diretamente para a solução. Em alguns casos será parte da solução, facilitará "caminhos" para chegar na solução. Utilizando o $\text{sen}(40°)$ descobriremos parte da altura interna da casinha e adicionaremos com a altura de 40 cm mostrada na figura da questão.

- Execução do plano

$$\text{sen}(40°) = \frac{x}{39} \Rightarrow x = 24,96$$
$$24,96 + 40 = 64,96\,\text{cm}.$$

- Retrospecto do problema

De maneira instintiva nos direcionamos a utilizar a razão trigonométrica. Entretanto, fazer o retrospecto do problema é fundamental, pois encontrar a medida do triângulo utilizando o sen 40° não satisfaz o problema. É necessário ainda, somar com os 40 cm informados na questão.

Problema 4.3 (Questão 33 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.

Uma empresa de construção aluga caçambas para entulhos, por dia, cobrando uma taxa fixa, referente ao deslocamento, acrescida do valor relativo às diárias da caçamba, conforme representado na tabela abaixo.

Dias	Taxa fixa (em R$)	Diárias (em R$)	Total (em R$)
1	20	30	50
2	20	60	80
3	20	90	110
4	20	120	140
5	20	150	170

A representação algébrica que permite calcular o valor V a ser pago pelo aluguel de uma caçamba em função da quantidade x de dias em que ela permaneceu alugada é:

A) $V = 30x + 20$ B) $V = 20x + 30$ C) $V = 50x + 30$

D) $V = 20x$ E) $V = 30x$

Solução.

Dentre as propostas técnicas de resolução de problemas oferecidas por Tao, ele destaca a tentativa de formular uma conjectura percebendo padrões nos problemas. Neste problema é importante representar os valores pagos na evolução dos dias, assim, fica bem visível a repetição de um padrão:

Dia 1: $20 + 30 \cdot 1 = 50$,

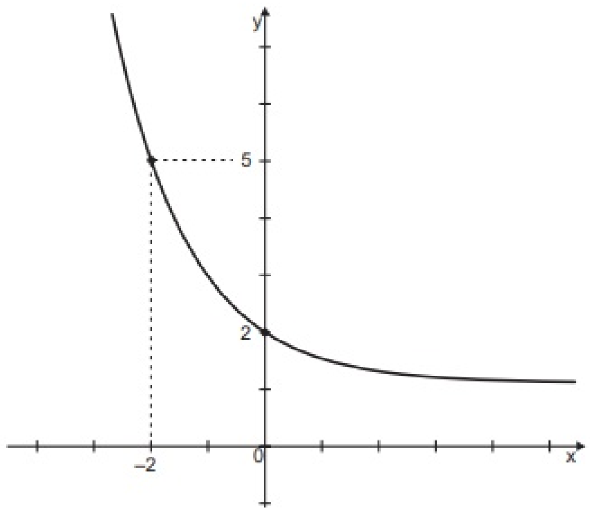
Dia 2: $20 + 30 \cdot 2 = 80$,

Dia 3: $20 + 30 \cdot 3 = 110$,

Percebemos um comportamento linear e podemos representar esse padrão através da expressão: $V = 20 + 30x$, V é o valor pago e x representa a quantidade de dias. A alternativa A é a resposta.

Problema 4.4 (Questão 39 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D26 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

O gráfico abaixo representa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que sua lei de formação é do tipo $f(x) = p^x + q$



A lei de formação dessa função f é:

A) $f(x) = 2^x$ B) $f(x) = 2^x + 1$ C) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

D) $f(x) = (\frac{1}{2})^x + 1$ E) $f(x) = (\frac{1}{2})^x + 6$

Solução.

- Compreensão do problema

  O problema sugere uma função em que a lei de formação típica é dada e um gráfico com informações possíveis de serem extraídas.

- Plano de execução

  Com os pontos (-2, 5) e (0, 2), pertencentes ao gráfico, substituímos na lei de formação da função do tipo $f(x) = p^x + q$.

- Execução do plano

$$\begin{cases} 5 = p^{-2} + q \\ 2 = p^0 + q \end{cases}$$

  Da segunda equação deduzimos que $q = 1$ e assim da primeira equação $p^{-2} = 4$. Então $p = \frac{1}{2}$. Alternativa D.

- Retrospecto

  É válido observar se os pontos do gráfico pertencem a expressão encontrada. Importante também explorar as condições que tornam a função crescente ou decrescente neste contexto exponencial, além de contextualizar situações com comportamentos exponenciais.

Problema 4.5 (Questão 48 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D19 - Resolver problema envolvendo função do 1º grau.

Luan trabalha com manutenção de lavadoras de roupas. Ele cobra, pelo seu serviço, uma taxa fixa de R$ 30,00, referente ao deslocamento, acrescida de R$ 15,00 por hora que trabalha. Em um determinado dia, Luan se deslocou para dois domicílios diferentes e fez a manutenção de uma lavadora de roupas em cada um deles, levando exatamente o mesmo tempo para realizar a manutenção em cada lavadora. Ao final do dia, Luan recebeu R$ 210,00 por esses dois serviços realizados. Quantas horas esse técnico levou para fazer a manutenção de cada uma dessas lavadoras de roupas?

A) 5 B) 6 C) 10 D) 12 E) 14

Solução.

- Compreensão do problema

  Serão dois serviços a serem executados. portanto duas expressões representarão cada serviço. O valor total informado refere-se a soma dos dois serviços juntos. Entretanto, vale ressaltar que a taxa é fixa e o valor da hora trabalhada também é fixa para os dois serviços.

- Plano de execução

  Como foram dois serviços se retirarmos as taxas fixas de ambos teremos apenas um valor relacionado as horas trabalhadas. Como é enfatizado na questão, as horas trabalhadas nos dois serviços são iguais. Dividiremos o valor por 15 (valor da hora de trabalho) e depois dividimos por 2 (dois serviços)

- Execução do plano

  Valor recebido - R$ 210,00

  Taxa fixa - R$ 60,00

  Resta - R$ 150,00

  Horas trabalhadas - $150 \div 15 = 10$

  Horas trabalhadas em cada serviço - $10 \div 2 = 5$

  Alternativa A.

- Retrospecto

  É interessante fazer o caminho inverso do problema, somando os valores das horas trabalhadas com as taxas fixas e verificar se resulta nos R$ 210,00.

  Fazendo o retrospecto do problema, indicado na última fase da técnica sugerida por Polya, importante destacar que só foi possível dividir as 10 horas por 2 domicílios porque o problema enfatiza que é gasto o mesmo tempo na manutenção de cada lavadora. Analisar o que se pede e utilizar as informações dadas na questão são estratégias fundamentais na solução de um problema.

4.2 EXERCÍCIOS

Exercício 4.6 (Questão 52 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D15 - Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

Vinícius é artesão e produz vasos de argila. Para produzir 5 vasos de mesmo tamanho e modelo, ele utiliza 2 quilogramas de um determinado tipo de argila cujo quilograma custa 8,00 reais. Vinícius recebeu uma encomenda de 60 desses vasos e comprou toda quantidade de argila necessária para produzi-los.

Qual foi o custo total da argila comprada por Vinícius para produzir essa encomenda?

A) 96 Reais B) 176 Reais **C)** 192 Reais D) 240 Reais E) 1200 Reais

Solução.

Podemos, por exemplo, separar os 60 vasos em grupos de 5 vasos, porque sabemos o quanto de argila utilizamos para 5 vasos. São 12 grupos de 5 vasos. Gastaremos então: $2 \cdot 8 \cdot 12 = 192$ Reais. Alternativa C

Sugestão.

Neste tipo de questão pode ser abordada uma relação geométrica associada ao custo de produção. Poderíamos oferecer alguns tipos geométricos de vasos de argila e suas dimensões de tal forma que deveríamos decidir qual seria a solução ótima, isto é, a melhor escolha sob a perspectiva do custo-benefício.

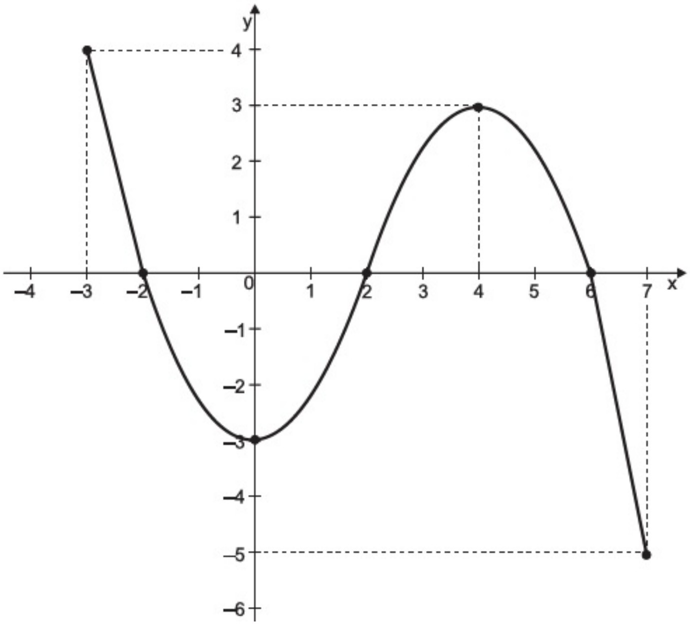
A proposta para criação de problema é: Crie um problema a partir da imagem a seguir:

Figura 20 – Torneiras

Figura 21 – Fonte: <http://www.profcardy.com/cardicas/juntos.php>

Exercício 4.7 (Questão 31 - C1201 - SAEPE 2021). D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

Observe abaixo o gráfico de uma função f:[-3,7]$\rightarrow \mathbb{R}$.



Quais são os zeros dessa função?

A) -5 e 4 B) -3, -2, 2, 6 e 7 C) -3 e 0

D) -3 e 7 **E)** -2, 2 e 6

Solução.

Essa questão requer, apenas um conhecimento sobre a definição do que representa os zeros de uma função: são valores atribuídos a variável "x" que correspondem a variável "y" igual a 0. Graficamente, são os pontos localizados no eixo das abscissas e pertencentes ao gráfico. Logo, os zeros da função são: -2, 2 e 6.

Vale ressaltar a importância de realizar o último passo do sistema indicado por Polya: o Retrospecto. Isto porque o domínio da função é restrito e os zeros da função devem pertencer ao domínio. Neste problema, os zeros da função fazem parte do domínio. Alternativa E é a resposta.

Sugestão.

Uma proposta neste tipo de questão é associar o gráfico à descrição de alguns fenômenos, como por exemplo, discriminação do lucro de uma empresa durante um espaço de tempo. Diante da proposta, enfatizar dentro de algum espaço de tempo o lucro máximo/mínimo obtido.

A proposta para criação de problema é: Criar um problema a partir do conteúdo jornalístico da capa da revista representada na imagem abaixo.

Figura 22 – Capa da revista Exame

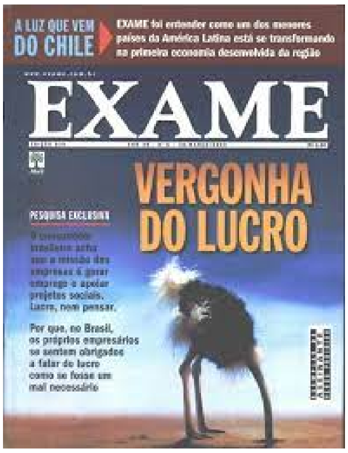


Figura 23 – Fonte:<https://www.traca.com.br/livro/463479/>

Exercício 4.8 (Questão 36 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D32 - Resolver problema que envolva probabilidade de um evento.

Uma escola de esportes comprou 30 bolas de basquete, 10 de vôlei e 20 de futebol para presentear seus alunos. Cada uma dessas bolas foi embrulhada em um pacote que não permitia sua identificação. Afonso, um dos alunos dessa escola, será o primeiro a escolher, aleatoriamente, um desses pacotes para ganhar de presente. Qual a probabilidade de Afonso ganhar uma bola de vôlei?

A) $\frac{1}{60}$ **B)** $\frac{10}{60}$ C) $\frac{10}{50}$ D) $\frac{50}{60}$ E) $\frac{60}{10}$

Solução.

Pela definição direta de como calcular probabilidade encontramos a solução da questão. Para isso basta identificar o evento e o espaço amostral e tomar a razão entre eles. Portanto, a probabilidade é expressa por $\frac{10}{60}$. Alternativa B.

Sugestão

Nos problemas que envolvem probabilidade de um evento é muito desafiadora a situação em que para calcular as possibilidades que satisfazem o evento precisaremos utilizar métodos de contagem. Combinações, arranjos e permutações são ferramentas disponíveis que permitem a utilização da criatividade na proposição da estratégia de resolução. No contexto da questão, poderíamos além de propor bolas de variados esportes, utilizar outras variáveis como cor, tamanho entre outros.

A proposta para elaboração de problema é a seguinte: Crie um problema a partir do jogo abaixo:

Figura 24 – Jogo de sinuca

Figura 25 – Fonte:<https://azeheb.com.br/blog/a-fisica-por-tras-das-tacadas-de-sinuca/>

Exercício 4.9 (Questão 35 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D25 - Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

Um polinômio é tal que suas raízes são – 5, – 2 e 3. Uma possível forma fatorada desse polinômio é:

A) $(x+5)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$ B) $(x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$ **C)** $(x+5)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

D) $(x-5)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$ E) $(x-5)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

Solução.

Sabemos que a raiz "a" de um polinômio P(x) é um valor tal que P(a)=0. Logo uma possível forma fatorada desse polinômio encontra-se na alternativa C.

Sugestão

Um polinômio pode ser expresso a partir de diversas situações. No contexto da questão, poderíamos elaborar um problema a partir do cálculo de área e/ou perímetro em que as dimensões seriam as incógnitas escolhidas de tal maneira a obter área máxima.

Como proposta para elaboração de problemas temos a seguinte: Criar um problema a partir da imagem seguinte:

Figura 26 – Terreno

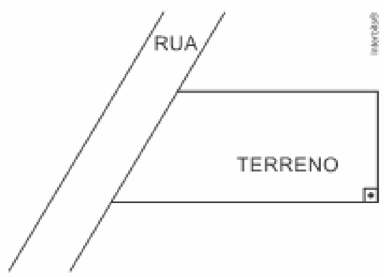


Figura 27 – Fonte:<https://conteudo.explicae.com.br/questao/10051>

Exercício 4.10 (Questão 37 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D16 - Resolver problema que envolva porcentagem.

Carolina participou de um processo seletivo para a obtenção de bolsas de estudo em um colégio particular de sua cidade. Para isso, ela fez uma prova que era composta de 90 questões e, ao verificar o gabarito, constatou que acertou 72 questões. Qual foi o percentual de questões dessa prova que Carolina acertou?

A) 20% B) 65% C) 72% **D)** 80% E) 82%

Solução.

Muito importante verificar as diversas maneiras de solucionar o problema. A regra de três é, geralmente, a maneira mais intuitiva que pode ser representada de forma fracionária: $\frac{72}{90} = 0.8$ e $0.8 = 80\%$. Letra D.

Sugestão

Poderíamos ampliar a abordagem do tema envolvendo a teoria dos conjuntos através da resolução utilizando o diagrama de Venn. Utilizando variações de acertos e erros sob a perspectiva do total de questões.

Uma sugestão de elaboração de problemas, seria: Crie um problema a partir da figura abaixo.

Figura 28 – Diagrama de Venn

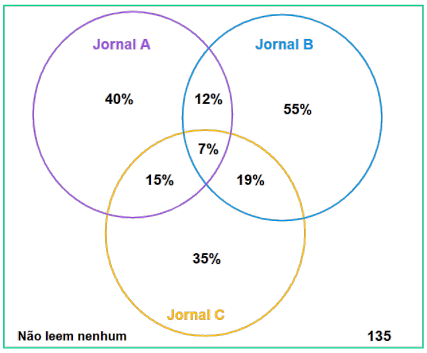


Figura 29 – Fonte:<https://lirte.pesquisa.ufabc.edu.br/matreematica/a-matematica-do-cotidiano/ramos/aritmetica/numeros/diagrama-de-venn/>

Exercício 4.11 (Questão 40 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D21 - Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral

Dentre os anos de 2000 e 2012, a exportação de uma fruta aumentou um total de 5 000 toneladas a cada ano. No ano de 2010, a exportação dessa fruta foi de 103 000 toneladas. Quantas toneladas dessa fruta foram exportadas no ano 2000?

A) 58 000 **B)** 53 000 C) 9 800 D) 7 923 E) 5 300

Solução.

Tao coloca como sugestão para solução de problema que o estudante sempre tente encontrar uma generalização para o problema. Essa questão pode ser resolvida intuitivamente, sem utilização de fórmulas, pois observando os dados da questão temos uma variação constante de 5000 toneladas a cada ano. De 2000 a 2010 são onze anos, então $103000 = 10.5000 + x$, x é o total exportado em 2000, ano inicial. Então, 53000 toneladas foram exportadas no ano 2000. Alternativa B.

Após a solução do problema é possível generalizar e encontrar a fórmula do termo geral da progressão aritmética. Exercendo a fase de Retrospecto sugerida por Polya é muito importante destacar que não é necessário fazer conversões a respeito das unidades de medida, visto que a resposta do problema se mantém na mesma unidade trabalhada na questão.

Sugestão

Algumas questões tornam-se muito interessantes quando há variação algébrica sob um ponto de vista desenvolvido geometricamente. No exercício em questão, poderíamos fornecer uma informação relacionada a volume de modo que nos permitisse deduzir a quantidade de frutas a partir do cálculo do volume do recipiente em que cada fruta estaria armazenada.

Uma maneira interessante de elaboração de problema sobre tema é a seguinte: Criar um problema a partir da sequência de figuras dada:

Figura 30 – Sequência de triângulos

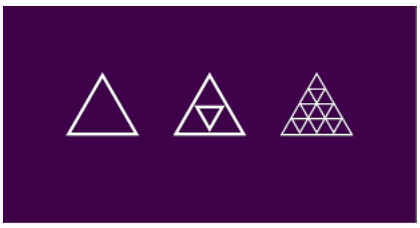


Figura 31 – Fonte:<https://matematicabasica.net/pg-progressao-geometrica/>

Exercício 4.12 (Questão 47 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D31 - Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.

Em uma lanchonete, os sanduíches vendidos são montados a partir das escolhas do próprio cliente. Para isso, essa lanchonete disponibiliza cinco variedades de pães, quatros tipos de carnes e cinco opções de saladas. De quantas maneiras diferentes um cliente pode montar um sanduíche nessa lanchonete escolhendo uma variedade de pão, uma de carne e uma de salada?

A) 14 B) 42 **C)** 100 D) 264 E) 364

Solução.

Nesta questão, a princípio é interessante montar um diagrama e contar todas as possibilidades de montar um sanduíche, para, em seguida, apresentar o princípio multiplicativo. Importante destacar que apesar da simplicidade do princípio multiplicativo utilizado como método de contagem, é uma ferramenta matemática muito útil. No mesmo problema, se tivéssemos 30 pães, 25 tipos de carne e 50 opções de salada seria inviável montar um diagrama com todas as possibilidades. Bastaria apenas multiplicar 30, 25 e 50 e teríamos a solução. Por isso, a importância da utilização da tentativa de generalizar o problema. Logo, para o problema em questão obtemos como solução: $5.4.5 = 100$. Alternativa C.

Sugestão

Nas questões que exigem métodos de contagem em suas soluções, atrelar as possibilidade à condições torna o problema mais complexo por causa da sensibilidade e da necessidade de observação na contagem. No contexto da questão, se determinado tipo de pão não pudesse ser combinado com determinado tipo de carne, por exemplo, como contaríamos as possibilidades de montagem do sanduíche?

A proposta de elaboração de problema sugerida é: Criar um problema a partir de uma Charge dada.

Figura 32 – Charge

Figura 33 – Fonte:<https://www.maxieduca.com.br/blog/matematica/principio-fundamental-contagem/>

Exercício 4.13 (Questão 43 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D08 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

Considere uma reta r que passa pelos pontos de coordenadas (– 12, 10) e (12, – 5). A equação geral da reta r está representada em:

A) $-24x - 15y + 60 = 0$. B) $-12x + 10y - 7 = 0$. **C)** $15x + 24y - 60 = 0$.

D) $17x + 22y - 60 = 0$. E) $22x + 17y - 94 = 0$.

Solução.

Basta substituir os pontos numa equação genérica $y = ax + b$, em que (a,b) é a representação genérica do ponto.

$$\begin{cases} 10 = -12a + b \\ -5 = 12a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos b=$\frac{5}{2}$ e a=$\frac{-5}{8}$

A equação geral da reta r é dada por y=$\frac{-5}{8}x + \frac{5}{2}$. Na fase de retrospecto da questão, observamos uma equação equivalente a $15x + 24y - 60 = 0$. Letra C é a solução.

Sugestão

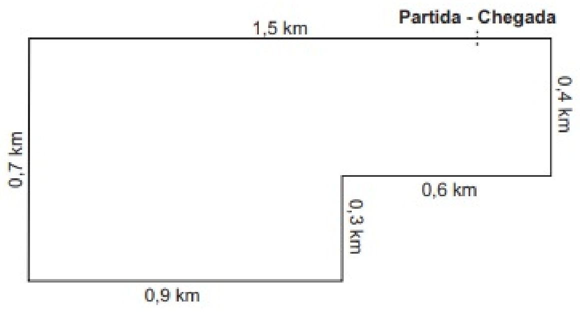
Realizar uma analogia dos pontos de coordenadas (x,y) com a posição de móveis em determinado espaço é uma estratégia interessante para formulação de problemas. Na referente questão poderíamos fazer associações com uma equação relacionando momentos diferentes em que um móvel passa por determinada posição. Existem ainda diversas variações para problemas desse tipo: móveis numa trajetória em sentidos diferentes fazendo analogias a duas retas que se interceptam.

A proposta para elaborar um problema, seria: Elaborar um problema que envolva a equação geral da reta a partir das palavras destacadas:

"Trajetória", **"Móvel"** e **"Posição"**.

Exercício 4.14 (Questão 45 - C1201 - SAEPE2021)**.** D11 - Resolver problema envolvendo perímetro de figuras planas.

Para comemorar o aniversário de uma cidade, foi promovida uma prova de corrida de rua em que os atletas participantes deveriam percorrer três voltas no circuito que está representado pelo contorno da figura abaixo.



Quantos quilômetros, no mínimo, percorreu um atleta que completou essa prova?

A) 2,61 B) 3,15 C) 6,60 D) 12,30 **E)** 13,20

Solução.

Os dados do problema são as dimensões do circuito e objetivo a ser alcançado é a medida de três voltas neste circuito. Portanto, basta calcular o perímetro da figura que equivale a uma volta no circuito: 4,4 km. Três voltas neste circuito equivalem a $13,20km$. Letra E é a solução.

Sugestão

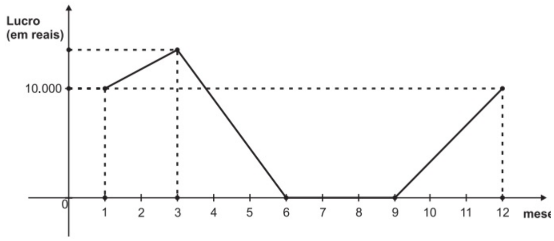
O cálculo do perímetro em questão poderia ser associado ao mapa de uma região em que o estudante deveria transformar a escala proposta no mapa antes de calcular a distância percorrida.

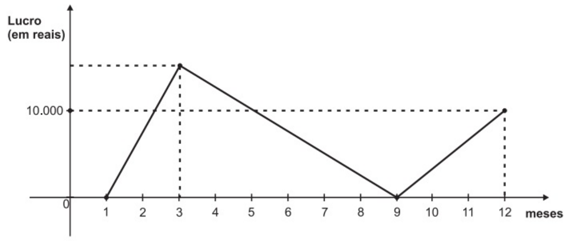
A proposta para elaboração de problema é: Criar um problema a partir da letra da música Mapa- múndi (Tiê).

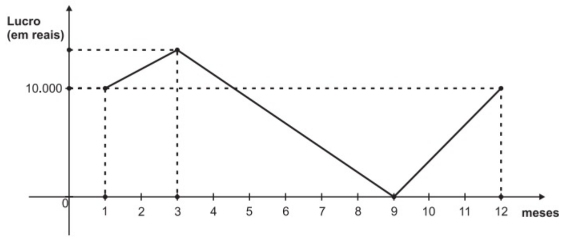
> "Descreva pra mim sua latitude Que eu tento te achar no mapa-múndi Ponha um pouco de delicadeza No que escrever e onde quer que me esqueças E eu te pergunto: o que será do nosso amor? Ah! se eu pudesse voltar atrás Ah! se eu pudesse voltar". (Tiê)

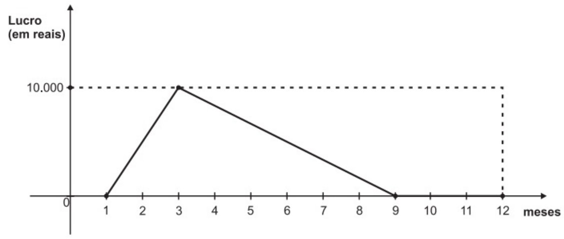
Exercício 4.15 (Questão 44 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D35 - Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

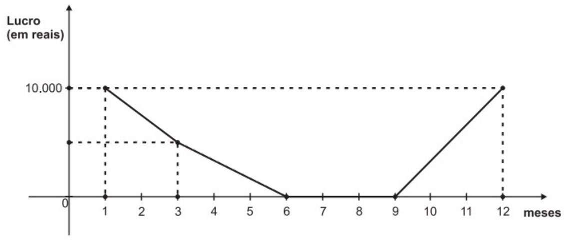
Paulo é dono de uma sorveteria e fez uma análise dos lucros dessa sorveteria no decorrer de um ano. Ele observou que no mês de janeiro (t=1), o lucro foi de 10 mil reais e continuou crescendo até o final do primeiro trimestre. No segundo trimestre, as vendas diminuíram e o lucro foi decrescendo até ficar nulo, e assim permaneceu até o final do terceiro trimestre do ano. Já no último trimestre, Paulo observou que o lucro voltou a crescer até atingir, no mês de dezembro, um lucro igual ao de janeiro. Qual é o gráfico que melhor representa o lucro dessa sorveteria em função dos meses do ano analisado por Paulo?

A)


E)


B)


D)


C)


Solução.

Os dados do problema podem ser associados num diagrama relacionando Lucro e Mês. Portanto, a única alternativa que relaciona corretamente as informações dadas na questão é a letra A.

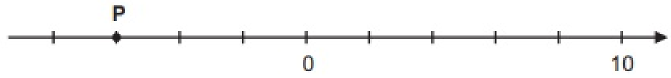
Sugestão Essa questão se envolvesse a relação *L*=*R*-*C* traria a possibilidade de termos outras opções de gráfico como solução. Poderíamos abordar o lucro máximo, de tal forma que a expressão dada tivesse uma parábola como gráfico. Entre outra variações como o cálculo do custo mínimo.

A proposta para elaborar um problema é a seguinte: Crie um problema parecido com o problema dado:

> De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática L = R – C, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria de peças automotivas produziu x unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 2000x$ e a receita representada por $R(x) = 6000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

Exercício 4.16 (Questão 42 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D14 - Identificar a localização de números reais na reta numérica.

Observe a reta numérica abaixo. Essa reta está dividida em segmentos de mesma medida.



Nessa reta numérica, o ponto P representa o número

A) 6 B) 3 C) 2 D) -3 **E)** -6

Solução.

Um dado importante fornecido no problema é que a reta está dividida em segmentos de mesma medida. Como plano de solução do problema, basta contar quantos segmentos entre 0 e 10. Como obtemos cinco segmentos, cada um mede dois. Portanto o ponto P representa o número -6. Alternativa E.

Sugestão

Em vez de uma reta numérica, poderíamos ter um sistema de duas coordenadas x e y, por exemplo, e a posição do ponto P não estar necessariamente sobre algum eixo. Poderíamos contextualizar o problema fazendo uma ligação com mapas e croquis tendo em vista que estamos solucionando um problema que envolve posição.

Uma proposta para elaborar problema seria: Crie um problema a partir do jogo abaixo:

Figura 34 – Batalha Naval

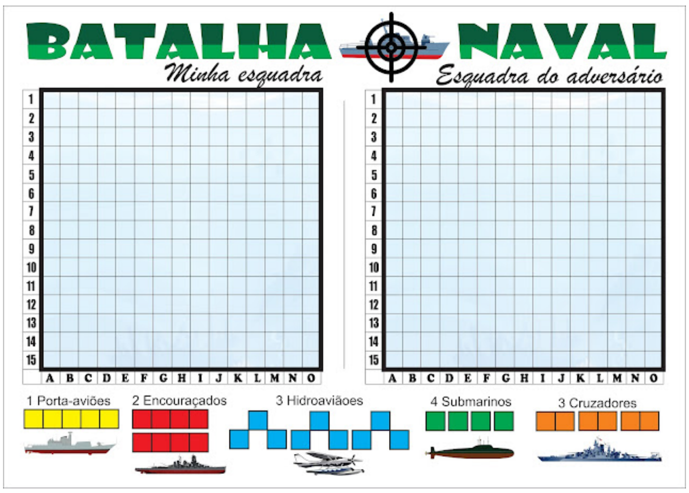
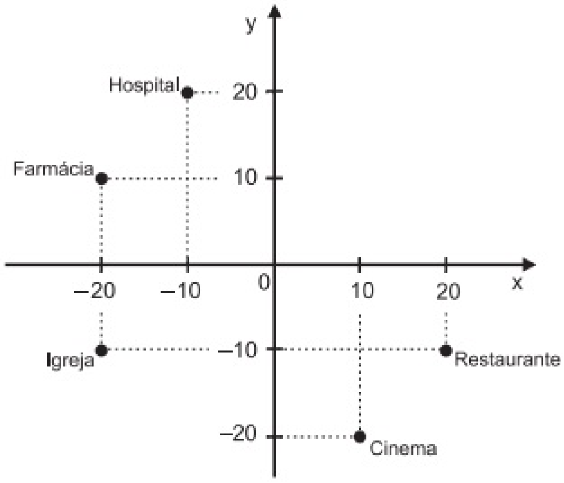


Figura 35 – Fonte:<https://professoravilmaribeiro.blogspot.com/2020/05/batalha-naval-no-papel.html>

Exercício 4.17 (Questão 28 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D06 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

O plano cartesiano abaixo representa parte do mapa de uma cidade em que os estabelecimentos estão associados a pontos desse plano.



Qual estabelecimento dessa cidade está associado ao ponto de coordenadas (– 20, –10)?

A) Cinema B) Farmácia C) Hospital

D) Igreja E) Restaurante

Solução.

A informação que nos leva a solução do problema é o ponto de coordenadas (-20,-10). A localização deste ponto no plano representa a Igreja. Alternativa D.

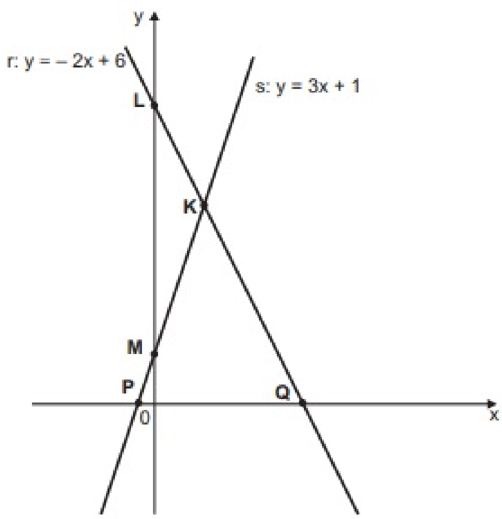
Sugestão

Uma abordagem interessante para o contexto da questão seria descobrir a distância entre estabelecimento nessa cidade, de tal forma que sentíssemos a necessidade de utilizar outras ferramentas como o Teorema de Pitágoras, por exemplo.

Como proposta para elaboração de problemas, temos a seguinte: Crie um problema, utilizando em seu texto, a Tecnologia do Google Maps ou Waze.

Exercício 4.18 (Questão 41 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D09 - Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

Observe as duas retas traçadas no plano cartesiano abaixo.



A solução do sistema

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

é dada pelo ponto:

A) K　　B) L　　C) M　　D) P　　E) Q

Solução.

A solução de um sistema de equações é um ponto que satisfaz as equações desse sistema. Entretanto nesse problema, o gráfico de cada equação está exposto e apresenta uma intersecção. A intersecção é exatamente um ponto que pertence a ambas as equações. Logo, a solução do sistema é representado pela letra K. Alternativa A.

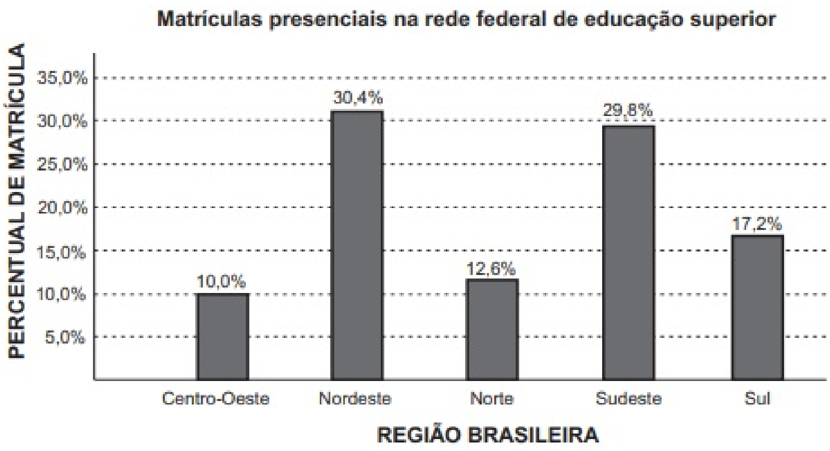
Sugestão

Em especial, nessa questão, poderíamos associar ao problema a ideia dos móveis que estão numa trajetória em sentidos contrários. O ponto K é o momento em que os móveis colidem.

Uma proposta para elaboração de problema seria: Elabore um problema a partir da seguinte frase: **"Carros colidem de frente, ficam destruídos e dois se ferem".**

Exercício 4.19 (Questão 27 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D34 - Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

De acordo com os dados do Censo da Educação Superior de 2016, divulgados pelo Ministério da Educação (MEC), no Brasil existem mais de um milhão de matrículas presenciais na rede federal de educação superior. A tabela abaixo apresenta o percentual dessas matrículas em cada uma das cinco regiões brasileiras.



A tabela que corresponde aos dados apresentados nesse gráfico é:

A)

Matrículas presenciais na rede federal de educação superior	
Região Centro-Oeste	17,2%
Região Nordeste	30,4%
Região Norte	12,6%
Região Sudeste	29,8%
Região Sul	10,0%

B)

Matrículas presenciais na rede federal de educação superior	
Região Centro-Oeste	10,0%
Região Nordeste	29,8%
Região Norte	12,6%
Região Sudeste	30,4%
Região Sul	17,2%

C)

Matrículas presenciais na rede federal de educação superior	
Região Centro-Oeste	10,0%
Região Nordeste	30,4%
Região Norte	12,6%
Região Sudeste	29,8%
Região Sul	17,2%

D)

Matrículas presenciais na rede federal de educação superior	
Região Centro-Oeste	30,4%
Região Nordeste	10,0%
Região Norte	12,6%
Região Sudeste	29,8%
Região Sul	17,2%

E)

Matrículas presenciais na rede federal de educação superior	
Região Centro-Oeste	10,0%
Região Nordeste	12,6%
Região Norte	30,4%
Região Sudeste	29,8%
Região Sul	17,2%

Solução.

Um problema que exige apenas leitura das informações gráficas. Baseando-se nos dados da questão, apenas a letra C condiz com os números de matrícula.

Sugestão

Nessa questão, ficaria interessante um problema com outros gráficos que complementassem as informações. Por exemplo, informações por trimestre, frequências relativas, percentis entre outras variações da estatística, de modo que reconhecer os dados por regiões fosse construído matematicamente.

A elaboração de um problema nesse contexto seria: Crie um problema a partir da tabela a seguir.

Figura 36 – Tabela

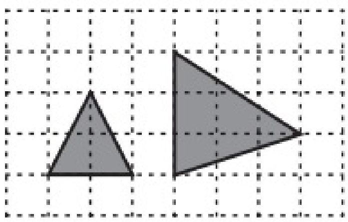
Região	Extensão territorial (km^2)	População (habitantes)
Centro-Oeste	1.606.371	14.058.094
Nordeste	1.554.257	53.081.950
Norte	3.853.327	15.864.454
Sudeste	924.511	80.364.410
Sul	576.409	27.386.891

IBGE: Sinopse do Censo Demográfico 2010 e Brasil em números, 2011.

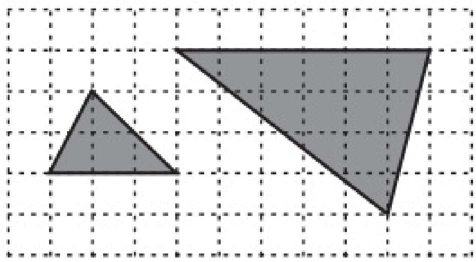
Exercício 4.20 (Questão 34 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D01 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

Um professor de Matemática desenhou vários triângulos em uma malha quadriculada. Qual par de triângulos desenhados pelo professor representa triângulos semelhantes?

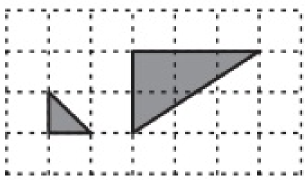
A)



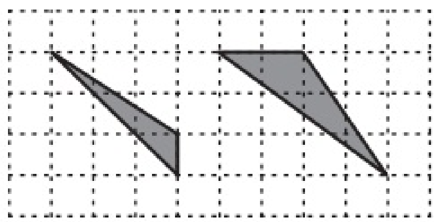
B)



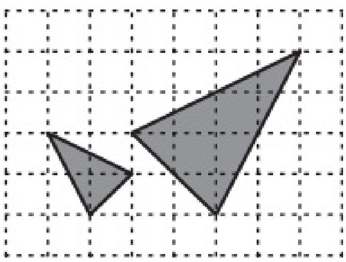
C)



D)



E)



Solução.

No caso da questão acima, a malha quadriculada ajuda na percepção de proporcionalidade. A letra E representa figuras semelhantes na proporção 1:2 com os lados dos triângulos inseridos como diagonais na malha.

Sugestão

A ideia de semelhança ligada ao contexto tecnológico atual nos remete as tecnologias de ampliação e redução de imagens. O problema poderia conter um contexto no sentido citado além de variar as figuras semelhantes.

A proposta de elaboração de problema é a seguinte: Criar um problema a partir da figura a seguir.

Figura 37 – Figura ampliada

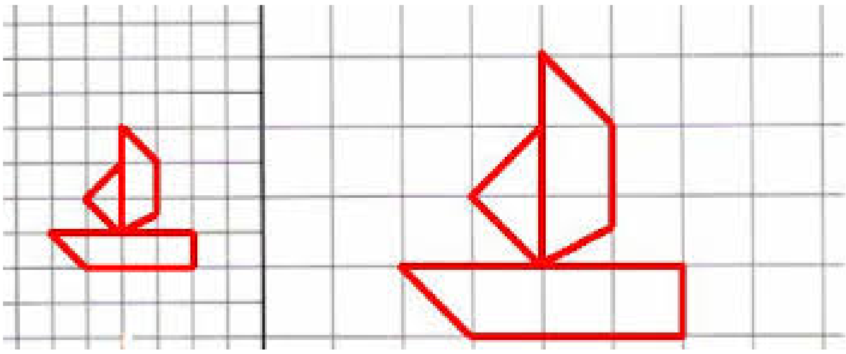


Figura 38 – Fonte:<https:wordpress.com/redematematica>

Exercício 4.21 (Questão 50 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D28 - Resolver problema que envolva função exponencial.

O Cobalto-60 é um elemento químico de transição usado como fonte de radiação gama em radioterapia e esterilização de alimentos. Esse elemento desintegra-se com o tempo e a relação que fornece a massa de Cobalto-60 em função do tempo é $M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$, em que M_0 é a massa inicial de Cobalto-60 e t é o tempo, em anos. A massa de Cobalto-60, após 20 anos, é dada pela expressão:

A) $\dfrac{M_0}{2^5}$ **B)** $\dfrac{M_0}{2^4}$ C) $\dfrac{M_0}{2}$ D) M_0 E) $2M_0$

Solução.

Basta substituir na função dada t por 20. Após 20 anos teremos uma massa de cobalto-60 igual a $\dfrac{M_0}{2^4}$. Alternativa B.

Sugestão

Vivenciamos um momento recente que trouxe vários impactos na sociedade, inclusive, na educação das pessoas. A Pandemia nos ensinou sobre várias situações sobre diversas áreas. Na matemática percebemos que a relação de contágio do vírus entre as pessoas crescia de maneira exponencial e, sendo assim seria interessante contextualizar um problema de função exponencial com um fator dessa importância. Os dados exponenciais poderiam ser expressos através de um gráfico trazendo consigo a necessidade de interpretação do estudante.

Como proposta para criação de problema teríamos a seguinte: Criar um problema a partir do seguinte gráfico:

Figura 39 – Gráfico de crescimento exponencial

Figura 40 – Fonte:<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-exponencial-1.htm>

Exercício 4.22 (Problema 51 - C1201 - SAEPE 2021.)**.** D33 - Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

O proprietário de um posto de combustíveis deseja completar os tanques de armazenamento de cada tipo de combustível. Cada um desses tanques tem capacidade total de 5 000 litros e, antes de completá-los, o proprietário fez um levantamento das quantidades de combustível que havia em cada tanque. Esses dados estão apresentados na tabela abaixo.

Estoque de combustível	
Tanque de armazenamento	**Quantidade (em litros)**
Diesel	3 283
Etanol	1 673
Gasolina	1 872
Gasolina aditivada	3 374

De acordo com essa tabela, para estar completo, quantos litros de combustível deverão ser colocados no tanque que precisava da maior quantidade de combustível?

A) 1626 B) 1673 C) 3128 **D)** 3327 E) 9798

Solução.

Inicialmente diferenciamos os tanques que têm mais combustível dos que precisam de mais combustível. O tanque que tem menos combustível é o que precisa da maior quantidade de combustível. O tanque de etanol precisa da maior quantidade de combustível: 3327 litros. Alternativa D.

Sugestão

Acrescentaríamos uma condição e tornaríamos o problema mais interessante. Imaginemos que quatro veículos com a mesma capacidade de combustível estivessem numa trajetória de mesma distância e que cada um tivesse um rendimento diferente do outro. Os combustíveis são os informados na questão. No fim da trajetória teríamos uma quantidade diferente de combustível e analisaríamos a pergunta da questão.

A proposta de elaboração do problema é a seguinte: Criar um problema a partir do infográfico.

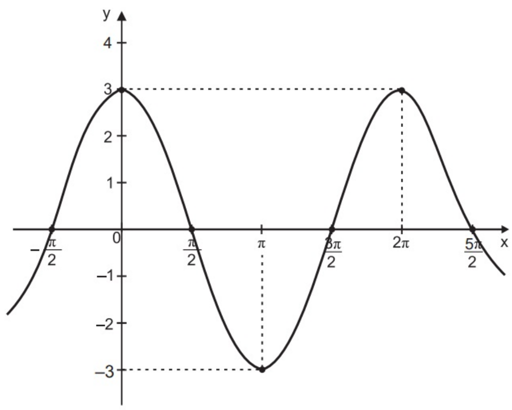
Figura 41 – Infográfico

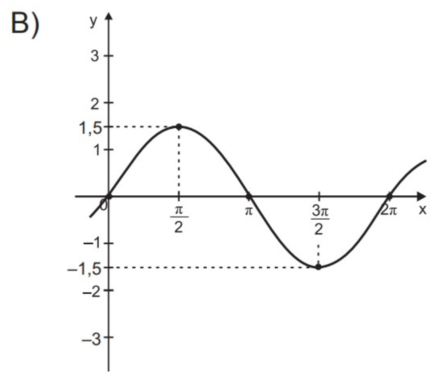
Figura 42 – Fonte:<https://portallubes.com.br/2017/08/economizar-combustivel/>

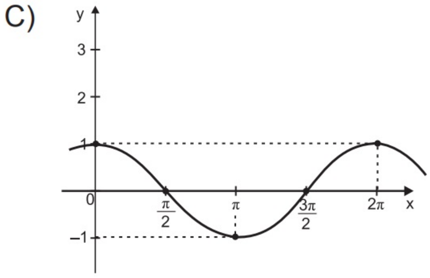
Exercício 4.23 (Questão 46 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D29 - Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

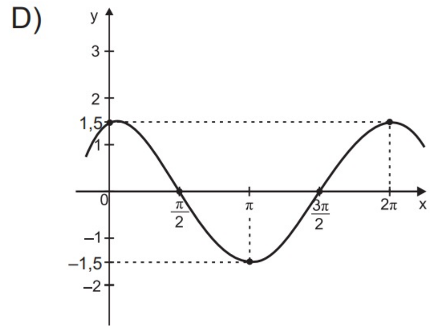
Qual é o gráfico que melhor representa a função trigonométrica $f(x) = \frac{3}{2}\cos x$

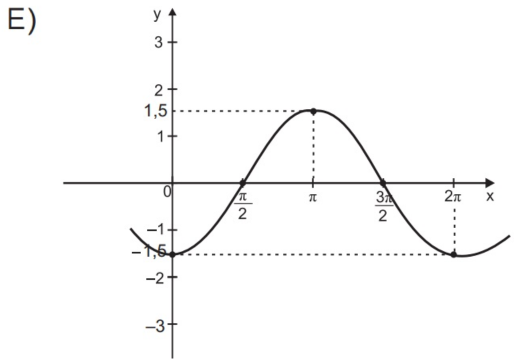
A)











Solução.

É necessário estudar o ciclo trigonométrico com os alunos e analisar o comportamento gráfico das funções e suas variações. As funções trigonométricas possuem seus gráficos, conhecê-los facilita identificar suas variações. Especialmente, as variações obtidas de $C.f(x)$, solucionam esse problema. Como o $\cos 0 = 1$, o gráfico da função passa no eixo da ordenada no ponto $(0, 1.5)$. A única alternativa correta é a letra D. Vários fatores podem ser explorados para esboçar o gráfico da função trigonométrica, dentre eles a classificação da função em par, ímpar ou nem par e nem ímpar e sua simetria com o eixo x. Podemos analisar a imagem da função quando atribuímos os valores notáveis 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Todas essas estratégias nos auxiliam na construção do gráfico em questão.

Sugestão

A relação entre música e matemática é próxima. O contexto entre notas musicas e gráfico de funções trigonométricas poderia ser explorado. Além disso, poderíamos explorar outras variações de classificação de funções e inverter a proposta: oferecer o gráfico e escolher entre as opções a função equivalente.

A proposta de criação de problema é a seguinte: Criar problema a partir do objeto da imagem a seguir

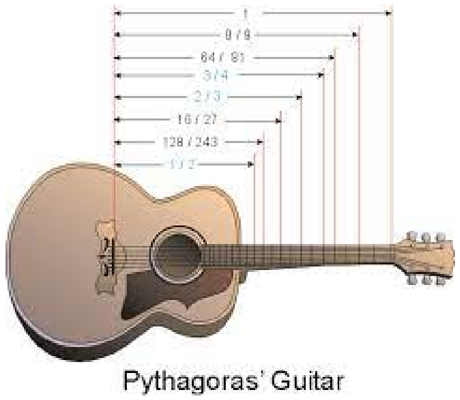
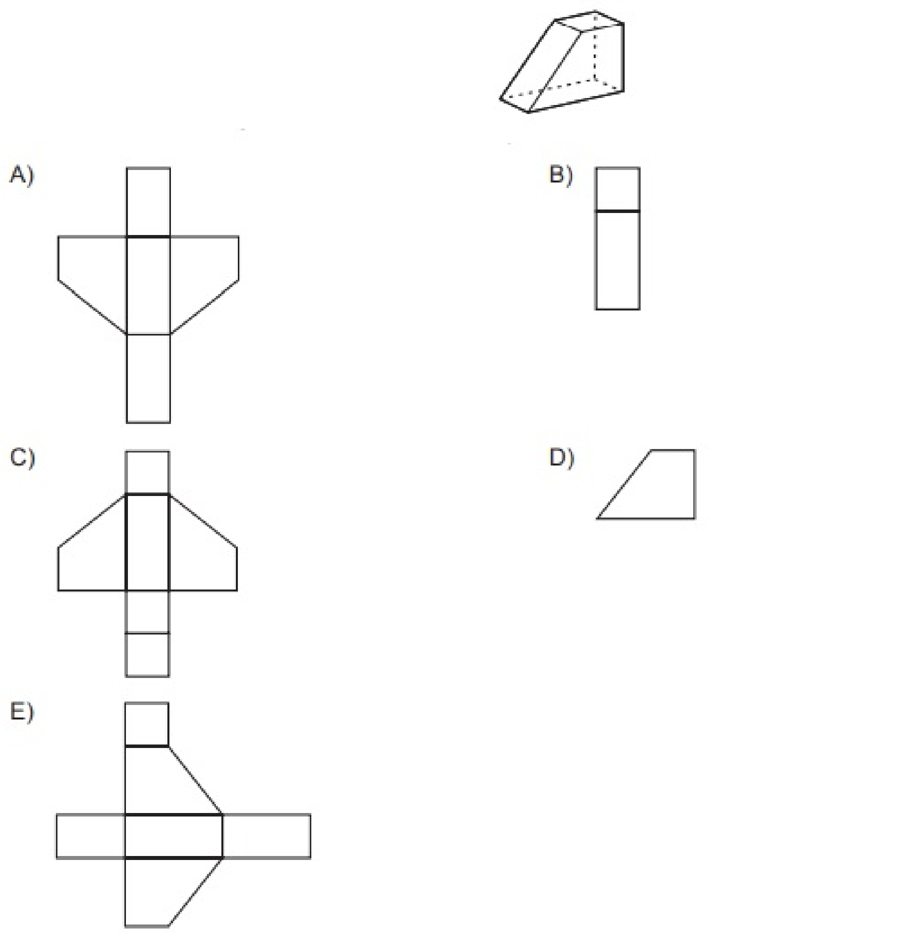


Figura 43 – Fonte:<http://sonsetrigonometria.blogspot.com/2015/>

Exercício 4.24 (Questão 49 - C1201 - SAEPE 2021)**.** D03 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

Observe o sólido geométrico abaixo e escolha uma representação de planificação desse sólido.



Solução.

A letra E é a única das alternativas que representa a planificação do sólido. Objetivamente para responder esse problema, basta contar as faces do sólido e perceber que apenas duas alternativas (C e E) contém 6 faces. Além disso, as dimensões das faces só estão representadas corretamente na letra E.

Estudar a planificação de outros sólidos estimula o desenvolvimento do raciocínio espacial. Outro fator importante é identificar a quantidade de planificações existentes de um sólido, pois em muitos casos existe mais de uma maneira de planificar o sólido.

Sugestão

Poderíamos associar embalagens que são vendidas de maneira planificada ao contexto da questão. Explorar as variações de volume da embalagem montada e a área do material utilizado.

A proposta de criação de problema poderia ser: Crie um problema a partir da embalagem a seguir:

Figura 44 – Embalagem planificada

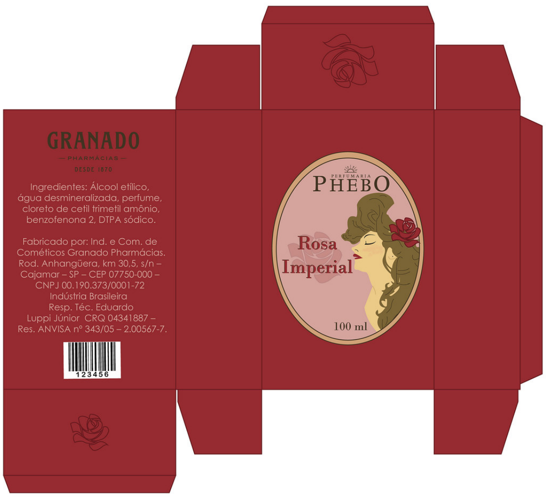


Figura 45 – Fonte:<<https://www.flickr.com/photos/suelencasagrande_/8488501807> >

4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS: PROBLEMA *versus* EXERCÍCIO

As técnicas de resolução estudadas se referem a problemas, tornando imprópria sua utilização em exercícios, salvo os casos em que a dificuldade devido a subjetividade de definição entre problema e exercício exista. Entretanto, a inclusão dos exercícios nos estudos em matemática revela-se fundamental, pois permite um contato inicial com os temas estudados além de promover a praticidade em solucionar questões simples que favorecem os processos de resolução de problemas mais complexos. Sobre a importância dos exercícios na rotina do estudante, Dante faz a seguinte afirmação:

"É muito importante ter em mente que, durante o ano letivo, deve haver um equilíbrio entre o número de exercícios e o de problemas que são dados a uma classe." (DANTE, 2009, p.49)

Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou a reflexão sobre a importância do SAEPE no contexto da educação pernambucana e consequentemente sobre estratégias utilizadas nas aulas de matemática que resultem numa evolução na proficiência dos estudantes nessa avaliação. Os professores da rede pública de pernambuco terão a oportunidade de conhecer o funcionamento da avaliação do SAEPE, obter o diagnóstico do desempenho das turmas da sua escola e compreender as técnicas de resolução de problemas sugeridas para preparar seus estudantes para essa avaliação.

A aplicação das técnicas de resolução de problemas propostas por George Polya e Terence Tao trazem consigo a credibilidade de quem é referência mundial no tema. Oferecer aos estudantes nas aulas de matemática a resolução de problemas sob o ponto de vista dos autores citados contribuiu com o desenvolvimento de habilidade que permitem despertar nos alunos o interesse por desafios.

Cientes da importância da metodologia de resolução de problemas e da necessidade de desenvolver aspectos criativos que favoreçam a construção de caminhos para resolver problemas, investimos em atividades de formulação de problemas. Essa atividade inseridas nas aulas de matemática elevam o nível de conhecimentos matemáticos dos estudantes fazendo com que eles dominem não apenas as ferramentas de resolução como também a sua comunicação, escrita e representações diversas na matemática.

Durante o ano letivo faz-se necessário apresentar a prova do SAEPE aos alunos, suas motivações e relevâncias na realidade da educação pernambucana, além de resolver as questões de provas anteriores sob a perspectiva das técnicas citadas neste trabalho. Isso permite uma maior proximidade com a avaliação e contribui com o sucesso no desempenho dos estudantes. Esperamos então fortalecer a aprendizagem dos estudantes da Rede Estadual de Pernambuco e elevar os índices educacionais do estado no âmbito Nacional.

Como proposta futura existe a intenção de dar continuidade a pesquisa principalmente por um questão temporal. Existem aplicações e conclusões que precisam de um tempo maior para fins de confiabilidade da pesquisa. Variações metodológicas podem ser utilizadas a fim de analisar os resultados e registrar as melhores estratégias a serem utilizadas num processo de preparação para avaliações externas.

Existe ainda, a pretensão de expandir a pesquisa sob a perspectiva geográfica, analisando dados estaduais, regionais e nacionais. Analisar os aspectos socioeconômicos, procurando compreender de que maneira esses fatores influenciam nos resultados.

Por fim, utilizar os resultados obtidos e a experiência dos estudos investidos na formação do professor, buscando compartilhar as vivências e auxiliar os professores da rede pública estadual a planejar e executar suas estratégias em busca de desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes.

Referências

1 POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: interciência, 1978. v. 1. 203 p.

2 TAO, T. *Como resolver problemas matemáticos-Uma perspectiva pessoal*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 1. 168 p.

3 CAED. *Revista do Professor de Matemática*. Juiz de Fora: Juiz de Fora - Anual, 2021.

4 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2017.

5 BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

6 DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática: Teoria e prática*. São Paulo: Ática, 2009. v. 1. 192 p.

7 MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: interciência, 1978. v. 1. 203 p.

8 PÓLYA, G. Dez mandamentos para professores. *Revista do professor de matemática*, v. 10, p. 2–10, 1987.

9 IMPA. *Terence Tao: o Mozart da matemática*. [s.n.], 2017. Disponível em: <https://impa.br/noticias/terence-tao-mozart-of-math/>.

10 SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. [S.l.]: Artmed editora, 2009.

11 MEC. Teoria de resposta ao item. 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/389-ensino-medio-2092297298/17319-teoria-de-resposta-ao-item-avalia-habilidade-e-minimiza-o-chute>.