UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

CECÍLIA MARTINEZ VELHO

TRÊS LAGOAS – MS
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

CECÍLIA MARTINEZ VELHO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS – Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Romanini.

TRÊS LAGOAS – MS
2023

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

UFMS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Campus de Três Lagoas

Metodologias Ativas no Ensino de Sistemas Lineares no Ensino Fundamental

por

CECÍLIA MARTINEZ VELHO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS – Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edivaldo Romanini (Orientador)

UFMS/CPTL

Prof. Dr. Renato César da Silva

UFMS/CPTL

Prof. Dr. José Antônio Menoni

UFMS/CPTL

AGRADECIMENTOS

Nesses anos de mestrado, de muito esforço, estudo e empenho, gostaria de agradecer a algumas pessoas que me acompanharam ao longo da jornada e foram fundamentais para a concretização deste sonho.

Assim, primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por me dar saúde, sabedoria e força na realização de meus objetivos.

A minha querida mãe que sempre estará no meu coração.

Agradecer ao meu esposo que sempre acreditou no meu potencial, incentivou, deu forças durante as derrotas e comemorou cada vitória, estando sempre ao meu lado, por todo seu amor e sua paciência.

A minha querida irmã, e meus familiares, que sempre torceram por mim e foram compreensivos com a minha ausência.

Agradeço também aos meus amigos; Paulo e Beatriz, por todo o incentivo e auxílio.

A minha amiga Jaqueline por todo o incentivo.

A todos os meus amigos e colegas de turmas, pelo apoio, amizade, horas de estudos e troca de conhecimentos.

Bem como a todos os meus amigos e colegas de trabalho que torceram por mim verdadeiramente, em especial as professoras auxiliares; Rafaela e Adriana que estiveram presentes na aplicação das atividades auxiliando os estudantes.

Gostaria de agradecer a todos os meus professores do Mestrado do Profmat, por todo o auxílio em busca de conhecimento.

Ao professor Mestre Bruno pelo curso preparatório para o ENQ.

A professora Ms. Rafaela Fabro por autorizar o uso de seus materiais em parte dessa dissertação.

E em especial, ao meu professor orientador; doutor Edivaldo Romanini, pelos ensinamentos, atenção, dedicação e ajuda na realização deste trabalho.

RESUMO

A ideia central neste trabalho foi analisar o tema Metodologias Ativas, suas aplicações em sala de aula, quais são os objetivos e apresentar alguns exemplos relacionados. Os conceitos das Metodologias Ativas foram aplicados para um tema específico do ensino fundamental, a saber, Sistemas Lineares. Elaboramos uma sequência didática com a aplicação de algumas Metodologias Ativas em atividades de Sistemas Lineares para o ensino fundamental, tais como atividades de desafios com figuras (linguagem pictórica), jogos com planos cartesianos, resolução de problemas com Sistemas Lineares fazendo uso de linguagem algébrica e representação geométrica com auxílio do software Geogebra.

Fazendo uma pesquisa rápida pelo site do Profmat sobre dissertações relacionadas a Metodologias Ativas, percebemos que há 18 dissertações que contém “Metodologias Ativas” e 5 dissertações que contém “Metodologia Ativa” em seus títulos, num total de 6.608 registros até a data de 03 de setembro de 2022. Atualmente esse tema é constantemente abordado em orientações técnicas oferecidas pela diretoria de ensino de Araçatuba - SP e nas formações oferecidas pela secretaria de educação do Estado de São Paulo, logo percebemos que embora as Metodologias Ativas não sejam algo novo, elas têm sido bastante utilizadas.

Esse trabalho foi aplicado em uma turma de 9º ano do ensino fundamental de uma escola estadual de Araçatuba – SP, no 2º bimestre de 2022, porém não pudemos concluir os resultados, pois durante a aplicação houve um surto de covid 19 e muitos estudantes faltaram, atrapalhando a sequência e os resultados.

Palavras Chave: Metodologias Ativas, Sistemas Lineares, Álgebra Linear.

ABSTRACT

The central idea of this work was to analyze the active methodologies theme, their applications in the classroom, their objectives and present some related examples. The concepts of active methodologies were applied to a specific theme of elementary education, namely Matrices and Linear Systems. We elaborated a didactic sequence with the application of some active methodologies in linear systems activities for elementary education, such as challenges with figures (pictorial language), games with Cartesian planes, problem-solving with linear systems using algebraic language, and geometric representation with the aid of Geogebra software.

Upon quickly searching the Profmat website for dissertations related to active methodologies, we noticed that there are 18 dissertations containing "Active Methodologies" and 5 dissertations containing "Active Methodology" in their titles, totaling 6,608 records as of September 3, 2022. Currently, this theme is constantly addressed in technical guidelines offered by the Education Department of Araçatuba - SP and in the training sessions offered by the Education Secretary of the State of São Paulo. Thus, we perceive that although active methodologies are not something new, they have been widely used.

This work was applied to a 9th-grade class of an elementary school in Araçatuba - SP, in the second quarter of 2022, but we could not conclude the results, as during the application there was a Covid-19 outbreak, and many students were absent, hindering the sequence and the results.

Keywords: Active Methodologies, Linear Systems, Linear Algebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 2022 com o retorno das aulas presenciais, nós professores enfrentamos grandes desafios. Os estudantes de escolas estaduais, sobretudo as que atendem uma clientela mais carente de recursos financeiros, ficaram praticamente 2 anos sem uma rotina de estudos, embora tenham sido oferecidos pela secretaria de educação um aplicativo do qual os estudantes puderam acessar gratuitamente as aulas online, além das atividades impressas fornecidas na escola. Sabemos que nenhum desses recursos atingiu minimamente a maioria dos estudantes, a questão é que os estudantes dos 9º anos praticamente passaram do 6º ano para o 9º ano, assim a introdução a Álgebra que é feita nos 7º e 8º anos, ficou totalmente comprometida.

Esse trabalho tem como objetivo minimizar essas defasagens fazendo o uso de Metodologias Ativas, que são metodologias que visam propiciar uma aprendizagem ativa, por meio da realização de diversas atividades que proporcionam a construção do conhecimento, encorajando o estudante a interpretar desafios e situações-problema com figuras (linguagem pictórica) compreendendo a transposição de tais problemas para a linguagem algébrica, tornando assim a introdução a Álgebra um processo mais simples e agradável.

Os Sistemas Lineares por sua vez, é um conteúdo apresentado inicialmente no 8º ano do ensino fundamental com sistemas 2 por 2, continuando na 2ª série do ensino médio com abordagens mais aprofundadas de sistemas maiores com a utilização de matrizes. Geralmente são feitas abordagens teóricas e algumas contextualizações, os livros e apostilas trazem o tema de uma forma muito teórica e de pouco entendimento aos estudantes dessa faixa etária. O presente trabalho é a união de algumas Metodologias Ativas aplicadas no ensino de Sistemas Lineares, a ideia é apresentar uma sequência didática que ofereça subsídios para que professores possam ministrar o conteúdo com uma abordagem simples e gradativa, desde a linguagem pictórica até a compreensão da linguagem algébrica dos sistemas, bem como, suas respectivas representações geométricas.

A sequência didática aqui apresentada tem uma gama de atividades, com diferentes níveis de dificuldade, uma vez que as turmas são heterogêneas, ou seja, os estudantes aprendem de diferentes formas, assim com uma variedade maior de metodologias pode haver maior aprendizagem. Embora seja um conteúdo de 8º ano, em 2022 houve adaptações devido a defazagem na aprendizagem em decorrência da pandemia do coronavírus. Estruturamos esta dissertação em 4 capítulos, o primeiro enfoca as Metodologias Ativas com a abordagem de alguns autores e alguns exemplos, tendo em vista que o tema é muito amplo. O segundo capítulo é teórico sobre matrizes e Sistemas Lineares, uma abordagem sobre resolução de Sistemas Lineares com uso de matrizes e escalonamento, assim como suas respectivas representações geométricas tanto no $\mathbb{R}^2$ quanto no $\mathbb{R}^3$, embora não seja o foco desse trabalho, ele servirá como base para professores que queiram aprofundar sobre o tema ao usá-lo em sala de aula. O terceiro capítulo é uma sequência didática com diversas atividades, desde o plano cartesiano até a resolução de Sistemas Lineares de ordem 2, tanto em sua forma algébrica como em sua forma geométrica, cada atividade apresenta uma Metodologia Ativa em sua aplicação, as metodologias variam entre resoluções de problemas, grupos produtivos, utilização do Software Geogebra e jogos analógicos. Por fim, no quarto capítulo são apresentados os registros das aplicações com os estudantes durante as aulas. Seguem as considerações finais desse trabalho, assim como a bibliografia.

Capítulo 1

METODOLOGIAS ATIVAS

Metodologias Ativas são métodos de ensino que tem como principal característica colocar o estudante como parte do processo de aprendizagem, ou seja, o estudante é protagonista e participa do processo de aprendizagem construindo seu próprio conhecimento com o auxílio de professores, estudantes e ferramentas metodológicas que auxiliem nesse processo. Nesse primeiro capítulo procuramos abordar um pouco sobre a origem, o conceito e alguns tipos de Metodologias Ativas [1].

1.1 ORIGEM E CONCEITO

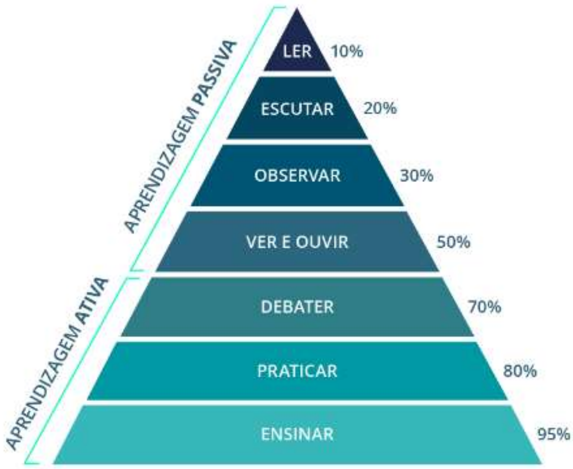
Desde a antiguidade, quando Sócrates indiretamente usando perguntas, nas quais os interlocutores precisavam refletir para responder ou levantar hipótese, estava fazendo uso de uma Metodologia Ativa, ou seja, as Metodologias Ativas não são novidades do século XXI são simplesmente uma forma de ensinar na qual o estudante é ativo durante o processo de aprendizagem [15].

Paulo Freire por sua vez, em uma época bem mais recente, propunha uma aprendizagem mais ativa por parte dos estudantes, uma educação pautada no diálogo confrontando a "educação bancária", como ele chamou o processo em que os estudantes participavam de aulas expositivas sem questionar ou discutir sobre o conteúdo ministrado pelo professor, o qual era considerado o detentor do conhecimento [15].

A Matemática por sua vez é um dos componentes curriculares que desde sempre pôde ser trabalhado de forma ativa na resolução de problemas, o fato do estudante resolver problemas, elaborar hipóteses já é uma Metodologia Ativa, partindo disso, percebemos então que a Metodologia Ativa não substitui uma aula teórica, mas a complementa.

A Pirâmide de Aprendizagem é conhecida como uma abordagem pedagógica desenvolvida por William Glasser, mestre em psicologia e doutor em psiquiatria. Ele realizou estudos sobre como aprendemos os conteúdos conforme o que recebemos de informações, esse estudo resultou em uma pirâmide conforme a figura 1.1 a seguir [3].

Figura 1.1 – Pirâmide de aprendizagem William Glasser.



Fonte: https://blog.flexge.com/metodologias-ativas-ensino-aprendizagem/ - Acesso 27/04/2022.

Segundo Glasser, a capacidade de assimilação e absorção das informações as quais somos expostos, conseguimos aprender 10% se apenas lemos, 20% do que escutamos, 30% ao observarmos e 50% se observamos e escutamos simultaneamente, essas são consideradas aprendizagens passivas. Na base da pirâmide, onde a assimilação e absorção é maior estão as aprendizagens ativas. Aprendemos 70% quando além de observar, ler, ou ouvir também discutimos o assunto com outras pessoas, 80% quando colocamos em prática, no caso por exemplo de uma resolução de problemas. Por fim, aprendemos 95% de um conteúdo quando ensinamos aquele determinado conhecimento a outras pessoas, como por exemplo, na monitoria [5].

Durante algum tempo os métodos considerados tradicionais de educação o professor é o agente e o aluno é o receptor passivo [8].

Uma nova estrutura educacional surge entre os séculos XIX e XX através de estudos realizados por John Dewey (1859–1952), filósofo e pedagogo norte-americano, o qual defendia um modelo educacional que valorizava as qualidades individuais dos estudantes. Essas estruturas foram conhecidas como Escola Nova ou Escola Progressista, a partir de então Dewey inaugura uma nova ideia sobre educação, a de que estudantes participam ativamente na busca do conhecimento [4].

“A educação é um processo social, é desenvolvimento. Não é a preparação para a vida, é a própria vida”.

John Dewey

No livro “Metodologias Ativas para uma educação inovadora” José Moran e Lilian Bacich descrevem sobre a utilidade da diversidade de técnicas para uma aprendizagem ativa e o equilíbrio entre o individual e o coletivo, faz uma analogia à alimentação saudável que não pode ser composta com apenas um tipo de refeição, para que seja saudável é necessário uma combinação de diversos alimentos. Na educação não é diferente, o sucesso vem com a diversidade e as inúmeras experiências, sempre inovando, adaptando e reinventando [1].

1.2 A IMPORTÂNCIA DAS METODOLOGIAS ATIVAS

As Metodologias Ativas exercem papel fundamental na construção do conhecimento uma vez que o estudante é o protagonista no processo de ensino - aprendizagem, os conteúdos e ideias a qual é exposto fixam melhor fazendo mais sentido, o estudante participa ativamente do processo, discutindo, perguntando, criando, produzindo, resolvendo, mas sempre com a supervisão e orientação do professor, que por sua vez, age como um mediador do conhecimento [1].

Segundo Moran, tal metodologia é constituida por várias estratégias de ensino que visam a participação efetiva do estudante. A junção de ensino híbrido, que conecta modelos flexiveis com o mundo conectado, contribui para soluções atuais de aprendizagem [1].

O estudante geralmente mostra mais interesse ao se deparar com aulas mais atrativas e interessantes quando elaboradas com novas práticas metodológicas que proporcionam uma diversidade maior na maneira de ensinar do professor [13].

Quando os estudantes são estimulados a desenvolverem estratégias para resolver equações, formular hipóteses e discutir sobre as estratégias de resolução, a criatividade é estimulada. Para que isso ocorra é necessário o uso de metodologias que envolvam a capacidade de tomada de decisões por parte dos estudantes, levando-os a diversas experiências que os estimulem a experimentar possibilidades e ter iniciativa no processo de resolução da atividade proposta, desenvolvendo assim o seu protagonismo [2].

De um modo geral, é nítida a resistência à matemática por parte dos estudantes, isso se deve à uma série de fatores, entre eles a falta de estímulo quanto ao protagonismo do estudante. Sabemos que a matemática exige raciocínio lógico, logo é importante que o estudante seja estimulado a desenvolver estratégias para a resolução de problemas. Hoje em dia, em meio a tantas plataformas digitais, videoaulas, aplicativos entre outros recursos, os estudantes estão expostos a todo o conhecimento que quiserem, basta um clique, porém essa infinidade de informação não será util se não for direcionada de forma sistemática, é aí que está a importância do professor como mediador do conhecimento, ele pode direcionar e estimular o estudante a realizar pesquisas, assistir videoaulas, fazer uso de plataformas com jogos matemáticos, discutir sobre o tema e trazer as dúvidas e os conhecimentos adquiridos, isso faz com que o estudante participe de uma forma mais ativa em aulas que antes seriam apenas expositivas, tornando assim o mundo digital um aliado no processo de ensino.

1.3 ALGUNS EXEMPLOS DE METODOLOGIAS ATIVAS

Existe um grande número de Metodologias Ativas, pois elas podem ser criadas, adaptadas e reinventadas conforme a criatividade e a necessidade do professor no processo de ensino e aprendizagem. Destacamos a seguir algumas Metodologias Ativas;

- Sala de aula invertida

Na sala de aula invertida, vemos uma troca na sequência de ensinar. Os estudantes realizam pesquisas e tem acesso ao conteúdo antes da aula para estudar em casa, através de links, videoaulas, livros, plataformas digitais entre outros, e apresentam para a turma como se fossem os professores. Com isso, o estudante deixa de ter uma postura passiva de ouvinte e assume o papel de protagonista do seu aprendizado. O professor por sua vez, assume o papel de mediador que tem objetivo de direcionar e orientar o estudante na construção do seu próprio conhecimento [17].

- Aprendizagem por jogos

A utilização de jogos como parte da metodologia, auxilia e incentiva os estudantes, além de tornar a aula mais atrativa e dinâmica. Os jogos podem ser os mais diversos desde jogos de tabuleiro, cartas, bingos até jogos digitais. Os principais objetivos para uso dos jogos são: treinamento na tomada de decisão; como didática para ensinar e assimilar algum conhecimento específico, estudar o comportamento individual ou em grupo [18].

- Manuseio de ferramentas digitais

As ferramentas digitais podem ser as mais diversas como: atividades desenvolvidas em plataformas digitais, aplicativos em celulares, softwares, jogos, quiz, videoaula e até mesmo redes sociais. Todas essas ferramentas podem contribuir com o desenvolvimento do protagonismo do estudante, facilitando a aprendizagem e motivando os estudantes [6].

- Monitoria

A monitoria é uma metodologia em que os envolvidos são: estudantes monitores, estudantes participantes e professores. Consiste em uma aprendizagem mútua na qual os monitores aprofundam seus conhecimentos enquanto os participantes aprendem. O professor por sua vez é um monitor geral que auxilia a todos fazendo intervenções sempre que necessário [16].

- Grupos produtivos

A ideia do agrupamento produtivo é que todos os estudantes sejam beneficiados com a aprendizagem, é importante reunir estudantes que dominam diferentes habilidades sobre o mesmo conteúdo para que a aprendizagem seja mútua.

Podem ser formadas duplas, trios ou grupos, dependendo do conteúdo e objetivo da aula. É bastante enriquecedor quando ao final de uma aula os estudantes apresentem seus resultados para a turma, isso contribui para a melhora da oralidade.

Mais do que multiplicar conhecimento, os agrupamentos produtivos são uma importante metodologia para estimular a participação e **engajamento** dos estudantes. Para eles, muitas vezes pode ser mais interessante uma troca horizontal (estudante com estudante) do que vertical (professor com estudante) [11].

- Resolução de problemas

A aprendizagem baseada em problemas é um método de ensino que lembra o tradicional, pois não é novidade na matemática. Essa metodologia consiste na realização de atividades guiadas, com o objetivo de preparar os estudantes para resolverem questões contextualizadas. Essa estratégia faz parte das Metodologias Ativas, pois o protagonista, na aula, passa a ser o estudante, é ele quem resolve os problemas e apresenta soluções e estratégias de resolução.

- Rotação por estações

A rotação por estações consiste em criar diferentes ambientes "estações" dentro da sala de aula e formar uma espécie de circuito, de tal forma que os estudantes possam ter acesso a determinado conteúdo de diferentes maneiras, é importante que cada estação traga uma proposta diferente sobre o mesmo conteúdo [7].

- Gamificação

A gamificação pode ser definida com o uso de técnicas de jogos adaptadas para o contexto de sala de aula, essa prática conta com características inerente ao jogo como: desafios, pontuação, premiação, etc, estimulando a competição saudável e a evolução em busca da recompensa que pode ser de diferentes formas como pontuação na nota, ranking através de cartazes expositivos dentro e fora da sala ou até mesmo em redes sociais, pequenos mimos, entre outros. Na verdade é definir e aplicar os aspectos 'jogáveis' de uma situação ou problema, levando os estudantes a usarem as estratégias na busca de um objetivo comum. Essas estratégias contribuem para um aprendizado estimulante e tem por objetivo definir as regras criadas para guiar o jogador ao objetivo do jogo, aliado à vontade de se divertir.

- World Café

O World Café como Metodologia Ativa é um processo criativo baseado em diálogos entre estudantes, numa **elaboração coletiva e colaborativa** para discutir problemas, conceitos e questões. Os participantes são divididos em grupos para conversar sobre um determinado tema previamente escolhido. As conversas acontecem em rodadas com duração determinada e, ao final de cada uma, os grupos são redefinidos de maneira que os participantes vão se misturando ao conversar com diferentes pessoas. A estratégia tem algumas características em comum com a rotação por estações, algumas diferenças são: no word café, cada "estação " pode ter um estudante fixo, ou seja, que não muda de estação, uma espécie de anfitrião que recebe os outros estudantes, esse fica responsável por apresentar o tema da estação aos demais estudantes que trocam de estação a cada rodada, esses são denominados "viajantes" e podem mudar a composição dos grupos, no final é oferecido aos estudantes alguma guloseima ou café. Mudar a composição dos grupos durante a atividade garante a máxima variação na combinação das ideias. Quanto maior a polinização de ideias, melhor o resultado do World Café [19].

- Cultura maker

Exemplo perfeito de Metodologia Ativa de aprendizagem, a cultura *maker* é baseada nos princípios do "*faça você mesmo*". Na prática, quando falamos da cultura *maker* na educação, falamos da apresentação de problemas e recursos para resolvê-los.

Assim, de maneira intuitiva, os alunos devem criar as soluções por si só, utilizando os conhecimentos aprendidos em sala de aula.

Após apresentarmos os conceitos básicos das Metodologias Ativas, vamos então retomar o conteúdo de Sistemas Lineares. O próximo capítulo fará uma abordagem sobre o tema, embora o foco desse trabalho seja apenas Sistemas Lineares de duas incógnitas e duas equações, pois foi projetado para aplicação no ensino fundamental, iremos aprofundar um pouco mais, citando sistemas maiores e matrizes. Isto servirá como base para professores que queiram ampliar os conhecimentos ao utilizar esse trabalho em sala de aula.

Capítulo 2

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

As Metodologias Ativas no processo de ensino e aprendizagem dos Sistemas Lineares, podem ser grandes aliadas quando aplicadas em conjunto com aulas teóricas. Nesse capítulo faremos uma abordagem teórica para subsidiar os professores que queiram usar esse material, embora a aplicação do objeto de conhecimento no ensino fundamental seja apenas com sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas, com representação geométrica de retas no plano cartesiano. Falaremos aqui sobre o conceito de matrizes e transformações lineares, pois essa é a base para a resolução de Sistemas Lineares conhecida popularmente nessa etapa de ensino como "método da adição".

Neste capítulo serão definidos os conceitos de Matrizes e Sistemas Lineares. Todas as propriedades e definições apresentadas a seguir, foram extraídas das obras dos seguintes autores: HEFEZ e FERNANDEZ (2016), IEZZI e HAZZAN (2004) , IEZZI *et al*. (2016) e LIMA E MORGADO (2006).

2.1 FATOS HISTÓRICOS

O trecho a seguir é parte do texto extraído do livro Fundamentos da Matemática Elementar, volume 4 (8ª edição - 2013) Gelson Iezzi.

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os Sistemas Lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim, acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento são encontrados nos nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século III a.C. Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção por meio do estudo de Sistemas Lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

2.2 MATRIZES

As Matrizes são ferramentas básicas da Álgebra Linear, pois fornecem meios para a resolução de Sistemas Lineares através de operações e transformações lineares.

2.2.1 Definição de Matrizes

Dados *m* e *n* em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos uma matriz real de ordem *m* por *n*, ou simplesmente uma matriz *m* por *n* (escrevemos $m \times n$), como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em *m* linhas e *n* colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz. Por exemplo, a matriz [5] é uma matriz 1×1 , ao passo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 3×2. As entradas da primeira linha da matriz são dadas pelos números reais 1 e 2, as entradas da segunda linha da matriz são dadas pelos números reais 3 e 4 e as entradas da terceira linha da matriz são dadas pelos números reais 5 e 6. É usual indicarmos as entradas de uma matriz arbitrária *A* pelos símbolos A_{ij} , ou ainda a_{ij} , onde os índices indicam, nessa ordem, a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é usualmente representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou por $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$. O símbolo $M_{(m,n)}$ denota o conjunto das matrizes $m \times n$.

Dependendo dos valores de *m* e *n*, uma matriz $m \times n$ recebe um nome especial. De fato, toda matriz $1 \times n$ é chamada de matriz linha e toda matriz $m \times 1$ é chamada de matriz coluna. Uma matriz é chamada de matriz quadrada de ordem *n* quando $m = n$, ou seja, quando o número de linhas é igual ao número de colunas.

Vamos ver alguns exemplos, a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz coluna de ordem 2 × 1 e a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 2.

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n, as entradas a_{ii}, com $1 \leq i \leq n$, formam a diagonal principal de A. Uma matriz quadrada A de ordem n é chamada de matriz diagonal quando $a_{ij} \neq 0$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, ou seja, a diagonal principal é formada por elementos não nulos e os demais elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A matriz-identidade $n \times n$ é a matriz $I_n = [\delta_{ij}]$ cujos elementos são $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1, se$ se $i = j$. Assim

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 - Adição e subtração de matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ a soma $A+B$ é igual a uma matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ tal que $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [c_{ij}]_{m \times n}$

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Concluimos, então, que a soma ou subtração de duas ou mais matrizes resulta em uma matriz de mesmo número de linhas e colunas, pois só é possivel somar duas matrizes se o número de linhas e colunas forem iguais.

2.2.3 – Multiplicação por escalar

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, definimos o produto de A pelo número real k, como

$kA = \left[ka_{ij}\right]_{m \times n}$, chamamos essa operação de multiplicação por escalar.

Por exemplo:

$$2\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$$

2.2.4 – Multiplicação de matrizes

Sejam $M = \left[a_{ij}\right]$ e $N = \left[b_{ij}\right]$ matrizes do tipo $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. O produto dessas matrizes é a matriz $M . N = C$, com $C = \left[c_{ij}\right]$ do tipo $m \times p$, cujo *ij*-ésimo elemento é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{in}\, b_{nj}$$

Assim o *ij*-ésimo elemento da matriz produto $M . N$ é o produto da *i*-ésima linha da matriz *M* pela *j*-ésima coluna da matriz *N*. Logo se,

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} s_1 & r_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$$

$M . N$ é a matriz a seguir especificada

$$M . N = \begin{bmatrix} a_1 s_1 + b_1 r_2 & a_1 r_1 + b_1 s_2 \\ a_2 s_1 + b_2 r_2 & a_2 r_1 + b_2 s_2 \end{bmatrix}$$

Por exemplo:

Dadas as Matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, a matriz *C* que resulta do produto $A . B$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 3 & 2 \times 2 + 3 \times 4 \\ 1 \times 1 + 5 \times 3 & 1 \times 2 + 5 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}$$

Logo, $C = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}$.

Notemos que o produto de matrizes não é comutativo, ou seja, $A . B \neq B . A$, em geral. Vamos ver um exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 3 + 2 \times 5 \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 & 3 \times 3 + 4 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 10 & 29 \end{bmatrix}$$

Este resultado comparado com o exemplo anterior, em que as mesmas matrizes foram multiplicadas na ordem inversa, resulta em matrizes diferentes.

2.2.5 -Transformações elementares de matrizes

Seja A uma matriz $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotaremos por L_i a i-ésima linha de A. Definimos as transformações elementares nas linhas da matriz A como segue:

1) Permutação das linhas L_i e L_j, indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$.

2) Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com c vezes uma outra linha L_j indicada por $L_i \rightarrow L_i + cL_j$.

3) Multiplicação de uma linha L_i por um número real c não nulo, indicada por $L_i \rightarrow cL_i$.

Por exemplo, vamos efetuar algumas transformações elementares nas linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por -2 e somando a segunda linha temos

$$L_2 \rightarrow (-2)L_1 + L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por 3 e somando a terceira linha temos

$$L_3 \rightarrow (-3)L_1 + L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Finalmente, multiplicando a segunda linha por -4 e somando com a terceitra linha temos

$$L_3 \rightarrow (-4)L_2 + L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{bmatrix}$$

Dizemos então que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{bmatrix}$$

São equivalentes por linhas por ter sido aplicada sucessivas transformações elementares na primeira para obter a segunda.

2.2.6 – Forma Escalonada de uma matriz

Uma matriz $A_{m\times n}$ está na forma escalonada se for nula, ou se:

1) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1;

2) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

3) toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

4) se $L_1, \ldots L_p$, são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha L_i ocorre na coluna K_i , então $K_1 < K_2 < \cdots < K_p$.

Toda matriz é equivalente a uma matriz na forma escalonada. Vejamos a seguir o exemplo a transformação de uma matriz em sua forma equivalente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

A seguir vamos aplicar uma sequência de transformações elementares sobre as linhas da matriz A. Observemos que no final a matriz obtida não vai estar na forma escalonada. Assim

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_1 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} L_3 \to L_1 - L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} L_2 \to L_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} L_3 \to - L_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são equivalentes, mas a matriz final não está na forma escalonada.

2.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um Sistema Linear é um conjunto de m equações lineares ($m\geq 1$), nas incógnitas, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Por exemplo,

$$
(1)\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\
\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

2.3.1 – Sistemas Lineares com duas equações e duas incógnitas

Um conjunto com duas equações lineares nas incógnitas x e y, é chamado de Sistema Linear com duas equações e duas incógnitas [12]. Assim o seguinte sistema, é um Sistema Linear com duas equações e duas incógnitas:

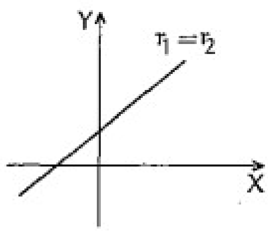
$$
(2)\begin{cases}
a_1x + b_1y = c_1\\
a_2x + b_2y = c_2
\end{cases}
$$

Do ponto de vista da existência ou não de solução do sistema anterior, há 3 situações geométricas para as equações das retas definidas pelas duas equações. Vejamos essas situações.

1º - As retas coincidem

O sistema (2) é dito indeterminado, quando admite mais de uma solução e as retas r_1 e r_2 representadas pelas duas equações, coincidem. Observemos a representação geométrica na figura 2.1 a seguir.

Figura 2.1 – Representação geométrica de sistema indeterminado



Fonte: A matemática do ensino médio – Volume 3 – Página 97.

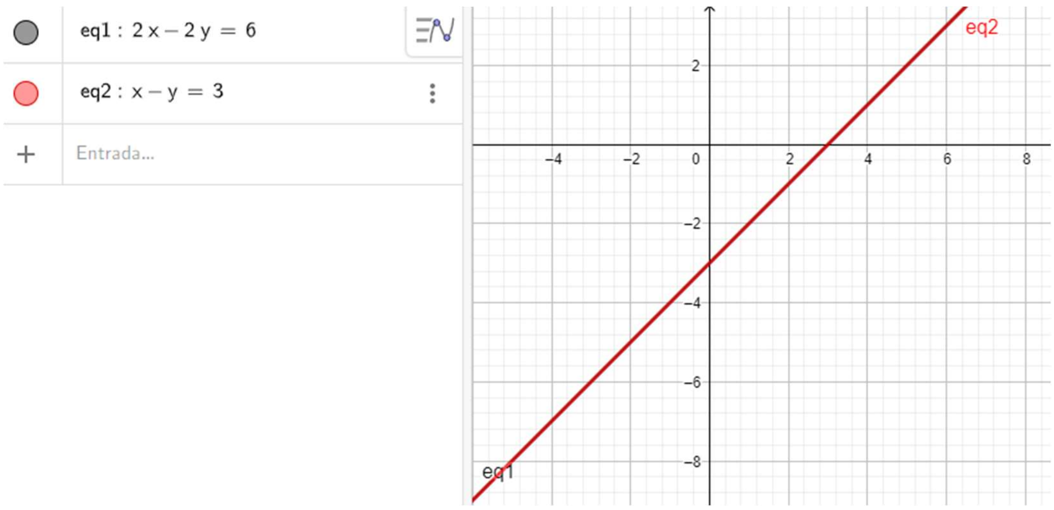
Vejamos um exemplo:

$$
(3)\begin{cases}
2x - 2y = 6\\
x - y = 3
\end{cases}
$$

Notemos que há infinitos valores para x e y que satisfazem o sistema.

A figura 2.2, a seguir, é a representação geométrica das retas coincidentes das equações do sistema (3).

Figura 2.2 – Representação geométrica do sistema (3)

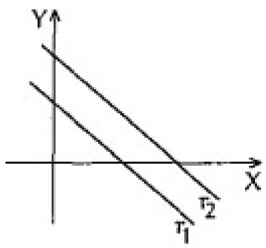


Fonte: Produção através do software Geogebra (2022). Própria autora.

2º - As retas são paralelas

O sistema (2) é dito *impossível* quando não admite solução e as retas r_1 e r_2 representadas pelas duas equações são paralelas. Observemos a representação geométrica na figura 2.3 a seguir.

Figura 2.3 – Representação geométrica de sistema impossível.



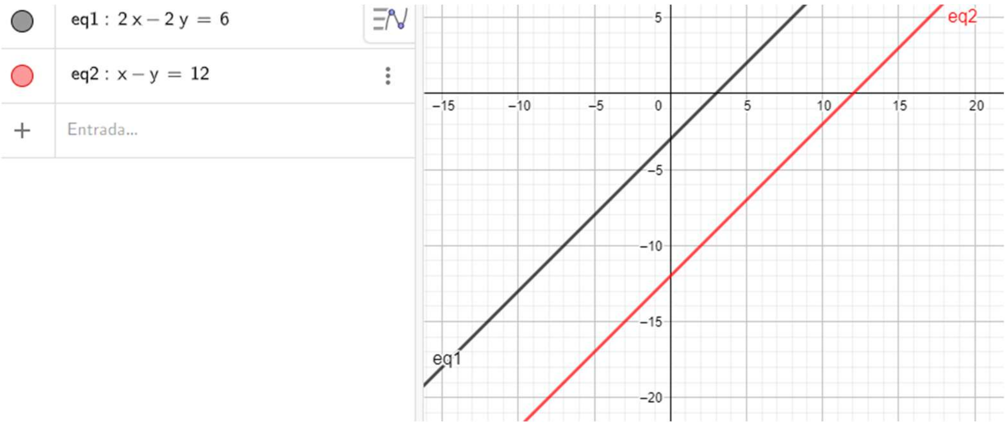
Fonte: A matemática do ensino médio – Volume 3 – Página 97.

Vejamos um exemplo:

$$(4)\begin{cases}2x - 2y = 6 \\ x - y = 12\end{cases}$$

Notemos que não há valores para x e y que satisfazem o sistema. A figura 2.4, a seguir, é a representação geométrica das retas paralelas referentes as equações do sistema (4).

Figura 2.4 – Representações geométricas do sistema (4) .

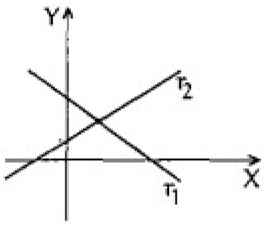


Fonte: Produção através do software Geogebra (2022). Própria autora.

3º - As retas são concorrentes

O sistema (2) é dito *determinado* quando admite solução e as retas r_1 e r_2 representadas pelas duas equações são concorrentes. Observemos a representação geométrica na figura 2.5 a seguir.

Figura 2.5 – Representação geométrica de sistema possível e determinado.



Fonte: A matemática do ensino médio – Volume 3 – Página 97.

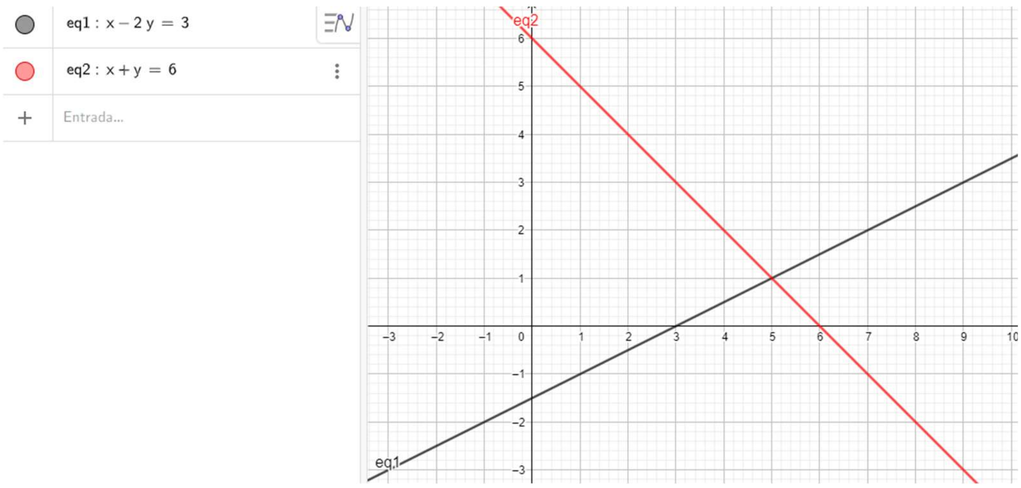
Vejamos um exemplo:

$$(5)\ \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Notemos que o sistema possui apenas uma solução, ou seja, para $x = 5$ e $y = 1$, as igualdades são verificadas.

A figura 2.6, a seguir, é a representação geométrica das retas concorrentes referentes as equações do sistema (5). Elas se intersectam no ponto (5,1).

Figura 2.6 – Representação geométrica do sistema (5).



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022). Própria autora.

2.3.2 – Sistemas Lineares com três equações e três incógnitas

Os Sistemas Lineares com três equações e três incógnitas, não são tratados no ensino fundamental, porém, consideramos essa análise para possíveis trabalhos futuros.

Sejam os planos π_1, π_2 e π_3, esses planos são definidos nessa ordem pelas equações do sistema

$$(6)\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Uma solução do Sistema Linear descrito anteriormente, é um trio (*x,y,z*) em $\mathbb{R}^3$, cujas coordenadas satisfazem todas as equações do sistema.

No sistema (6) temos uma matriz 3×3 chamada de matriz dos coeficientes, nessa matriz temos os coeficientes das variáveis em um conjunto de equações lineares, a matriz aumentada é uma matriz obtida anexando uma coluna com os termos independentes. A matriz de coeficientes e a matriz aumentada estão representadas a seguir:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

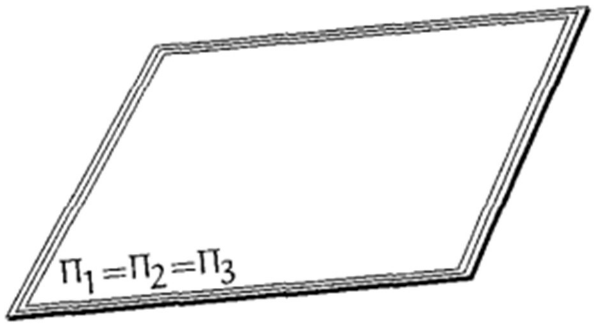
Os vetores-linha da matriz dos coeficientes são l_1= (a_1, b_1, c_1), l_2= (a_2, b_2, c_2), e l_3= (a_3, b_3, c_3). Eles são perpendiculares aos planos π_1, π_2 e π_3 respectivamente. Os vetores-linha, da matriz aumentada são L_1= (a_1, b_1, c_1, d_1), L_2= (a_2, b_2, c_2, d_2), e L_3= (a_3, b_3, c_3, d_3).

Do ponto de vista da existência ou não de solução do sistema (6), há 8 situações possíveis para os planos definidos pelas três equações. Vejamos essas situações:

1º Caso - Os três planos coincidem

O sistema é indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções quando os vetores L_1, L_2 e L_3 são colineares, isto é, múltiplos uns dos outros e, portanto, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$, conforme a figura 2.7 a seguir.

Figura 2.7 – Representação geométrica de sistema indeterminado



Fonte: A matemática do ensino médio – Volume 3 – Página 108.

Exemplo:

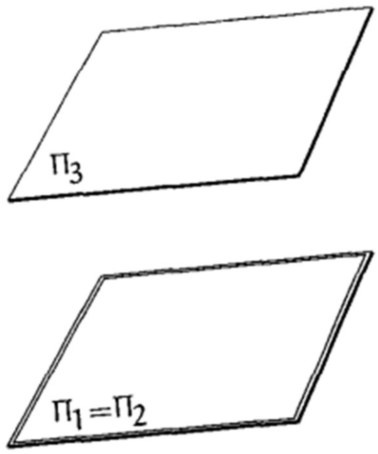
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Notemos que, $L_2 = 2.L_1$ e $L_3 = 3.L_1$.

2º Caso: Dois dos planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles.

O sistema é impossível, ou seja, não tem solução, quando os vetores $L_2 = \alpha\, L_1$ e $l_3 = \beta l_1$, mas L_3 não é múltiplo de L_1, portanto, $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_3 // \pi_1$, conforme a figura 2.8 a seguir.

Figura 2.8 – Dois planos coincidentes e outro paralelo a eles.



Fonte: Livro A matemática do Ensino Médio Volume 3, página 108.

Exemplo:

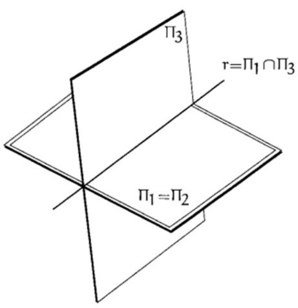
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$$

Notemos que $L_2 = 2\,L_1\ e\ l_3 = \ 3l_1$ mas L_3 não é múltiplo de L_1.

3º caso: Dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta.

O sistema é indeterminado, quando os vetores $L_2 = \alpha\, L_1$ mas l_3 não é múltiplo de l_1, portanto, $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_3\ \cap\ \pi_1 = r,$ conforme a figura 2.9 a seguir.

Figura 2.9 - Dois planos coincidentes e o terceiro intersecta segundo uma reta.



Fonte: Livro A matemática do Ensino Médio Volume 3, página 109.

Exemplo: O sistema a seguir

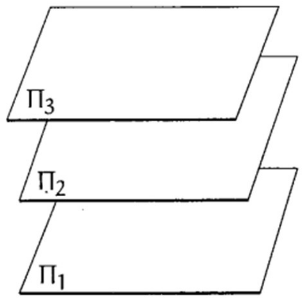
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases}$$

Apresenta a solução $\left(x, \frac{3-x}{2}, 0\right)$ para qualquer valor real de *x*.

4º caso: Os planos π_1, π_2 e π_3 são paralelos dois a dois.

O sistema é impossível, ou seja, não admite solução, essa situação se dá quando os vetores l_1, l_2 e l_3 são múltiplos um do outro mas os vetores L_1, L_2 e L_3 não são. Vejamos a figura 2.10 a seguir.

Figura 2.10 – Planos paralelos dois a dois.



Fonte: Livro A matemática do Ensino Médio Volume 3, página 110.

Exemplo:

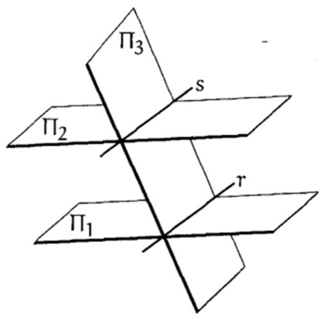
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

Notemos que $l_2 = 2l_1$ e $l_3 = 3l_1$ mas $L_2 \neq 2L_1$ e $L_3 \neq 3L_1$. Neste caso, não há solução.

5º Caso: Os planos π_1 *e* π_2 são paralelos e π_3 os intersecta segundo paralelas r e s.

O sistema não possui solução, portanto é impossível e os planos $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ e $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$, vejamos a representação geométrica na figura 2.11 a seguir.

Figura 2.11 - Planos π_1 e π_2 paralelos e π_3 os intersecta segundo paralelas s e r.



Fonte: Livro A matemática do Ensino Médio Volume 3, página 110.

Exemplo:

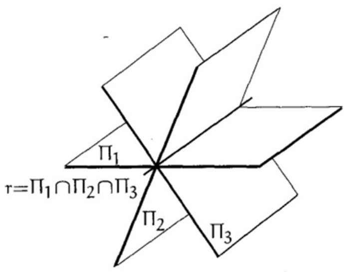
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

Notemos que, $l_1 = (1, 2, -1)$, $l_2 = (2, 4, -2)$ e $l_3 = (1, 2, 1)$ e $L_1 = (1, 2, -1, 3)$, $L_2 = (2, 4, -2, 5)$ e $L_3 = (1, 2, 1, 9)$. Assim, $l_2 = 2l_1$ mas $L_2 \neq 2L_1$. Portanto, os planos π_1 e π_2 são paralelos. Notemos ainda que l_3 não é multiplo de l_2. Logo, o plano π_3 corta os planos paralelos π_1 e π_2 segundo as retas *s* e *r*.

6º caso: π_1, π_2 e π_3 são três planos distintos que tem uma reta *r* em comum.

Nesse caso, o sistema é indeterminado, isso ocorre quando os vetores l_1 , l_2, l_3 não são múltiplos um do outro e $L_3 = \alpha L_2 + \beta L_1$. Suas soluções (*x,y,z*) são as coordenadas dos pontos da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, representado geometricamente pela figura 2.12 a seguir.

Figura 2.12 – Planos distintos com reta r em comum.



Fonte: Livro A matemática do Ensino Médio Volume 3, página 112.

Exemplo: Os planos definidos pelas equações do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

são dois a dois distintos e têm uma reta em comum. O sistema é indeterminado. Suas soluções são os pontos da forma

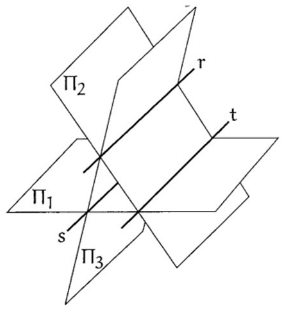
$$\left(x,\ \frac{1}{2}x - 1, 2 - \frac{3}{2}x\right),$$

onde x assume qualquer valor real. Isso se dá porque os vetores $l_1 = (1, 1, -1)$, $l_2 = (2, -1,1)$ e $l_3 = (5,2,4)$, são dois a dois não colineares.

7º caso: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $s = \pi_1 \cap \pi_3$ e $t = \pi_2 \cap \pi_3$, paralelas umas às outras.

Neste caso, o sistema é impossível. O fato de não haver paralelismo nem coincidência entre quaisquer dos planos π_1, π_2 e π_3, equivale a dizer que nenhum dos vetores l_1, l_2, l_3 é múltiplo um do outro. Os vetores l_1 e l_2 são ortogonais a reta r, porque ela está contida em π_1 e π_2. O vetor l_3 é ortogonal a s, porque essa reta está contida em π_3. Como r e s são paralelas, vemos que l_1, l_2 e l_3 são ortogonais a r, portanto l_1, l_2, l_3 são coplanares: temos que $l_3 = \alpha l_2 + \beta l_1$. Mas não podemos ter $L_3 = \alpha L_2 + \beta L_1$, como vimos no 6º caso. A figura 2.13 é uma representação geométrica desse caso.

Figura 2.13 – Planos se intersectam dois a dois.



Fonte: Livro A matemática do Ensino Médio Volume 3, página 114.

Exemplo: No sistema

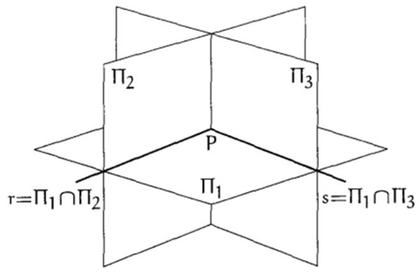
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + \ y + z = 2 \\ 8x + y + 6z = 6 \end{cases}$$

Os vetores $l_1 = (1, 2, -3)$, $l_2 = (3, 1,1)$, e $l_3 = (8, 1,6)$, são dois a dois não-colineares. Temos $l_3 = 3l_2 - l_1$, de modo que l_1 , l_2 e l_3 são coplanares. Mas, $6 \neq 3.2 - 1$ logo $L_3 \neq 3L_2 - L_1$. Portanto os planos definidos pelas equações do sistema descrito anteriormente intersectam-se dois a dois segundo três retas paralelas.

8º caso: Os planos π_1, π_2 e π_3 tem um único ponto em comum.

Neste caso, o sistema é possível e determinado, isso ocorre pois os vetores l_1, l_2 e l_3 não são múltiplos um do outro, e ainda não ocorre qualquer caso como os citados anteriormente. A figura 2.14 é uma representação gráfica desse caso.

Figura 2.14 – Planos π_1, π_2 e π_3 com um único ponto em comum.



Fonte: Livro A matemática do Ensino Médio Volume 3, página 116.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + \ y + z = 12 \\ 3x - y + 2z = 10 \end{cases}$$

O sistema possui única solução que é dada pelo trio (2,4,4). Portanto, os planos π_1, π_2, π_3 tem um único ponto em comum.

Convém reforçar que o estudo de sistemas 3×3 não é trabalhado no ensino fundamental. Como dito anteriormente, foram analisadas algumas destas situações apenas para que os leitores tenham noção da representação geométrica de tais situações, para possíveis análises de Sistemas Lineares 3×3 no ensino médio. No próximo capítulo apresentaremos algumas atividades desenvolvidas em sala de aula.

Capítulo 3

ATIVIDADES DIDÁTICAS APLICADAS

As atividades contidas neste capítulo foram desenvolvidas no nono ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública. Utilizamos como referência parte do material contido no capítulo 2 deste trabalho juntamente com uso de jogos, atividades impressas, geoplano de madeira, materiais manipuláveis e o software Geogebra.

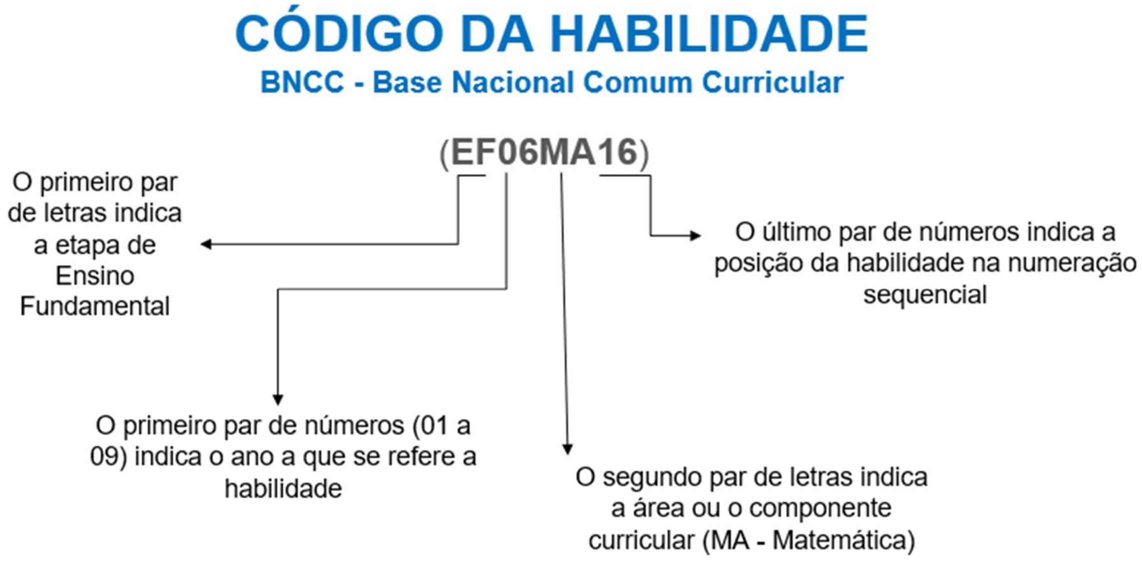
3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Geralmente nas escolas, o tópico sobre resolução de sistemas é trabalhado apenas através de manipulações algébricas com equações e matrizes, baseada em um conjunto de regras, sem maiores explicações, portanto desprovidas de significado para os estudantes.

O objetivo desta seção é estruturar uma sequência didática para abordar algumas estratégias de ensino e aprendizagem sobre o tema de sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas, usamos algumas Metodologias Ativas numa tentativa de despertar o interesse dos estudantes pelo assunto e facilitar a compreensão, uma vez que, quando contextualizado, o objeto de conhecimento se torna mais compreensível para estudantes do ensino fundamental. A aplicação foi realizada durante as aulas com uma turma do 9º ano, no momento em que, na programação do currículo, foi trabalhado sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas. Embora a habilidade seja de 8° ano, o currículo do Estado de São Paulo em 2022 foi reestruturado devido a pandemia do coronavírus, dando prioridade a algumas habilidades essenciais.

Todas as habilidades da Base Nacional Comum Curricular são descritas com um código conforme a figura 3.1, esses códigos serão usados na descrição das aulas.

Figura 3.1 – Código de habilidades BNCC.



Fonte: A própria autora.

3.1.1 - Aula: Atividade de revisão

Embora o bingo seja considerado um jogo de azar, nesse contexto, ele se tornou um grande aliado como instrumento educativo para auxiliar o ensino e aprendizagem da Matemática. O jogo de bingo, normalmente, é utilizado como atividade de lazer na sociedade, e é facilmente adaptável para outras realidades. Os estudantes ficaram muito estimulados com o jogo, isso tornou a aula mais atrativa.

Objetivos: Revisar os conteúdos que são pré-requisitos para compreender a localização de pontos no plano cartesiano. Aprender de forma lúdica e cooperativa.

Habilidade da BNCC: (EF06MA16) – Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

Competências socioemocionais: Entusiasmo e acertividade.

Objetos de conhecimento: Localização de pontos no plano cartesiano.

Duração: 4 aulas de 45 minutos cada.

Local: Sala de aula.

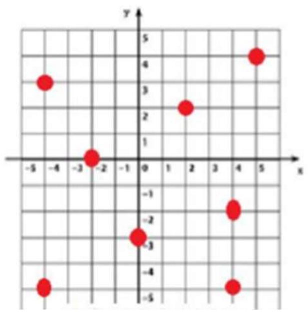
Organização dos estudantes: Sala em forma de “U”, um ao lado do outro.

Recursos e materiais: Atividade impressa (bingo do plano cartesiano), fichas para sorteio, lápis, borracha.

Metodologia Ativa: Jogo.

Desenvolvimento: No primeiro dia com duas aulas de quarenta e cinco minutos cada, foi aplicada uma atividade de revisão sobre o plano cartesiano (eixos, coordenadas, quadrantes e pontos). No segundo dia dessa atividade, também com duas aulas seguidas de quarenta e cinco minutos cada uma, organizamos a sala com a disposição das carteiras em forma de “U”, uma ao lado da outra de forma que estudantes com pouco domínio da habilidade ficaram ao lado de estudantes com maior domínio. Em seguida foram distribuídas cartelas impressas dos bingos conforme a figura 3.2, em que cada cartela continha 8 pontos já estabelecidos, havia várias cartelas com coordenadas diferentes, sorteamos as coordenadas dos pontos uma a uma, conforme a figura 3.2. Os estudantes que tinham em suas cartelas o ponto de coordenadas que foi sorteado, marcou com um “X” as coordenadas sorteadas, assim foi feito sucessivamente os sorteios. O estudante que marcou os 8 pontos primeiro, ganhou o bingo.

Figura 3.2 - Cartela do Bingo do Plano Cartesiano



Fonte: https://rafaelafabroinspira.lojaintegrada.com.br/jogos-em-pdf-para-imprimir. Acesso em: 22/04/2022.

Avaliação da atividade: Nessa atividade havia 26 estudantes, percebemos que todos gostaram muito de participar, houve uma boa interação entre os estudantes. O jogo ajudou os estudantes a entender melhor sobre o plano cartesiano. Os estudantes ajudavam uns aos outros, a disposição das mesas contribuiu para isso. Um erro frequente que observamos foi a troca do par ordenado (x,y), alguns estudantes confundiam por exemplo (3,2) com (2,3), porém, pudemos notar que sempre que isso ocorria, outros estudantes intervinham explicando a diferença entre as ordenadas e abscissas.

3.1.2 Aula: Resolução de desafios

Os estudantes apresentam muita dificuldade na resolução de situações problemas que envolvam Álgebra, a assimilação de “letras” que representam incógnitas ou variáveis parece muito estranha, para amenizar essa situação utilizamos linguagem pictórica que é a utilização de imagens em uma situação problema. De forma lúdica e gradativa apresentamos uma atividade cujo objetivo é a transposição da linguagem pictórica para a linguagem algébrica, assim como a compreensão de que ambas linguagens tratam da mesma situação problema. Essa aula foi inspirada no plano de aula da revista virtual Nova Escola. A Associação Nova Escola é uma organização de impacto social sem fins lucrativos que trabalha para o Brasil ter professores da Educação Básica fortalecidos em suas práticas, contribuindo para a melhoria da aprendizagem e do desenvolvimento dos estudantes [19]. Essa aula poderá ser acessada através do site: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/valor-numerico-de-uma-expressao-algebrica/949.

Objetivos: Calcular o valor numérico de expressões algébricas através de figuras diversas; elaborar problemas que envolvam o valor numérico de expressões algébricas, através de figuras. Compreender que as linguagens pictóricas e algébricas representam a mesma situação problema.

Habilidade da BNCC: (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Competências socioemocionais: Curiosidade para aprender e entusiasmo.

Objeto de conhecimento: Expressão algébrica (através da comparação entre figuras).

Duração: 2 aulas de 45 minutos cada.

Local: Sala de aula.

Organização dos estudantes: Duplas.

Recursos e materiais: Atividade impressa (desafios), folhas sulfite, lápis, caneta e lápis de cor.

Metodologias Ativas: Duplas produtivas e aprendizagem baseada em problema.

Desenvolvimento: Essa atividade foi dividida em 4 etapas:

1ª Etapa:

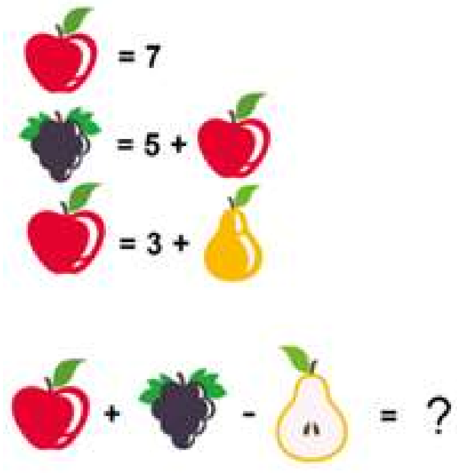
Os estudantes receberam uma folha impressa com os desafios das figuras 3.3. 3.4 e 3.5 que são desafios com figuras para calcular os valores. Resolveram cada um dos desafios em seguida, alguns estudantes apresentaram suas estratégias de resolução na lousa, discutimos sobre as resoluções e corrigimos a atividade.

A atividade aplicada foi a seguinte:

1 – Resolução de desafios

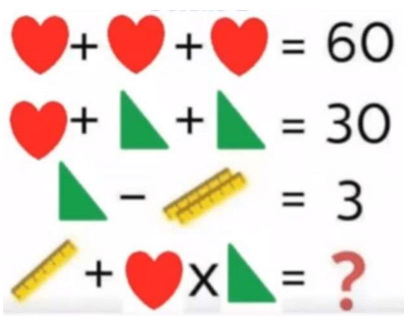
Resolver cada desafio registrando seu raciocínio.

Figura 3.3 – Desafio 1.



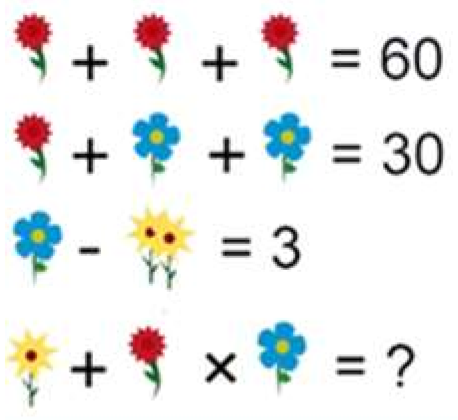
Fonte: https://rafaelmatematico.blogspot.com/2018/06/desafios-matematicos-43.html.

Figura 3.4 – Desafio 2.



Fonte -https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/sistema-de-equacoes-o-desafio/.

Figura 3.5 – Desafio 3.



Fonte:https://daqui.opopular.com.br/editorias/minha-dica-e/voc%C3%AA-consegue-resolver-esse-desafio-maluco-de-matem%C3%A1tica-1.1106158.

2ª Etapa:

Os estudantes elaboraram um novo desafio na folha da atividade e resolveram no caderno, cada desafio foi trocado com outra dupla, assim ambas duplas resolveram os desafios elaborados e depois destrocaram de forma que puderam corrigir e discutir sobre as estratégias de resolução. Nesse momento auxiliamos os estudantes que apresentaram dificuldades na elaboração e corrigimos as resoluções apresentadas nos desafios.

3ª Etapa:

Os estudantes escolheram um desafio que estava em linguagem pictórica e transpuseram para a linguagem algébrica usando a primeira letra de cada figura como representação da figura. Em seguida, resolveram o desafio que representava a mesma situação, porém de forma algébrica. Os estudantes puderam perceber que ambas as linguagens eram referentes ao mesmo desafio e portanto possuíam a mesma resolução.

4ª Etapa:

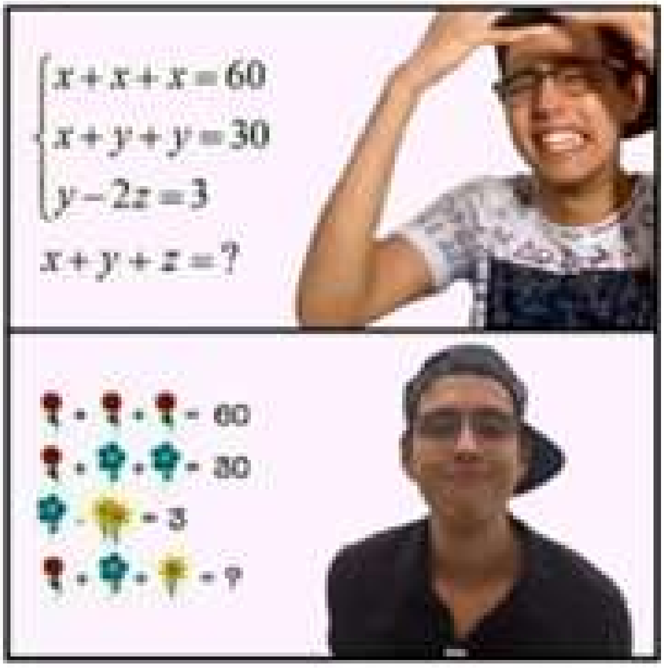
O memes são imagens de conteúdo engraçado, que acabam se espalhando na internet por meio das redes sociais. Uma das principais características do meme é que ele pode ser adaptado ou modificado dependendo da situação. Por causa disso, ele acaba viralizando com facilidade. O meme a seguir, remete a ironia de que, o mesmo desafio, representado de formas diferentes teriam níveis de dificuldade diferentes. Na figura 3.6 podemos ver que "Xande" primeiramente aparece fazendo cara de desesperado ao se deparar com um Sistema Linear (com linguagem algébrica). Na imagem debaixo faz cara de satisfação ao se deparar com o mesmo sistema agora escrito por meio de figuras (linguagem pictórica), como se os desafios fossem diferentes e com figuras fosse muito mais fácil.

Alexandre de Souza Rodrigues Júnior, mais conhecido como "Xande do Super Exatas" é medalhista de bronze da Olimpíada Internacional de Matemática IYMC, realizada na Índia em 2016, atualmente trabalha como influenciador digital ensinando matemática, em suas redes sociais sempre posta "memes nerds" levando humor e conhecimento aos seus seguidores.

4- Interpretação de "meme"

Relatar sobre a mensagem de humor e conhecimento que trata o "meme" a seguir.

Figura 3.6 – "Meme" Desafio em linguagem algébrica e em linguagem pictórica.



Fonte: Instagram: @super.exatas – Acesso em: 22/04/2022.

Avaliação da atividade: Nessa atividade participaram 19 estudantes, notamos que, na primeira etapa, a maioria dos estudantes conseguiram solucionar os desafios encontrando os valores correspondentes as figuras, na segunda etapa, os estudantes apresentaram um pouco de dificuldade em elaborar novos desafios, foi necessárias algumas intervenções, já na terceira etapa os estudantes apresentaram uma dificuldade ainda maior. Na quarta etapa, relataram que quando o desafio apresenta figuras (linguagem pictórica) é mais fácil do que quando apresenta letras (linguagem algébrica).

3.1.3 - Aula: Contextualização

Essa atividade foi inspirada em um plano de aula da revista virtual Nova Escola, podendo ser acessada através do link: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/solucoes-de-uma-equacao-linear/679#:~:text=Habilidade%20da%20BNCC,o%20plano%20cartesiano%20como%20recurso.

Nos livros didáticos e apostilas do ensino fundamental 2, o objeto de conhecimento de Sistemas Lineares, geralmente causa estranheza aos estudantes, pois ao relacionar duas variáveis x e y, os estudantes ficam sem entender o contexto. A atividade a seguir trouxe uma proposta um pouco diferente com o objetivo de tornar a compreensão mais simples. Ao invés dos tradicionais eixos x e y do plano cartesiano, substituímos por eixos intitulados com as incógnitas apresentadas nos enunciados, facilitando assim o entendimento sobre a correlação entre as incógnitas. A proposta da atividade leva os estudantes a construção do próprio conhecimento, uma vez que os estudantes irão se deparar com questionamentos diversos ao invés de ter o conteúdo explicado apenas teoricamente

Objetivos: Interpretar enunciado e equacionar separadamente cada parte do enunciado.

Compreender que uma equação com duas incógnitas possui uma relação de dependência.

Associar as possíveis soluções a pares ordenados substituindo as coordenadas x e y por letras que representam as incógnitas de cada enunciado.

Compreender que o enunciado todo é composto por duas equações e duas incógnitas.

Compreender que ao resolver as duas equações simultaneamente pode haver uma solução, várias soluções ou nenhuma solução, assim, o sistema pode ser definido como sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

Compreender a representação geométrica de cada equação e assimilar os eixos do plano cartesiano com as respectivas incógnitas.

Habilidades da BNCC: (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Competência socioemocional: Curiosidade para aprender.

Objeto de conhecimento: Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.

Duração: 2 aulas de 45 minutos cada.

Local: Sala de aula.

Organização dos estudantes: Duplas produtivas.

Recursos e materiais: Atividade impressa, régua, caneta, projetor, mesa digitalizadora, computador e brinquedos (carros, motos, vacas e galinhas), réplicas de cédulas de dinheiro.

Metodologias Ativas: Duplas produtivas e aprendizagem baseada em problema.

Desenvolvimento: Primeiramente na lousa colocamos alguns problemas do tipo:

Em um estacionamento há carros e motos num total de 18 rodas. Quantas são as motos e quantos são os carros?

Os estudantes discutiram sobre as várias possibilidades de resolução, os estudantes que apresentavam maior dificuldade na compreensão do enunciado, puderam manusear os brinquedos (carros e motos) para facilitar a compreensão. Eles perceberam que havia várias possibilidades e que a quantidade de rodas de carros estava correlacionada com a quantidade de rodas de motos, construindo intuitivamente a noção de relação de dependência entre duas variáveis.

Em seguida colocamos outro problema:

Num estacionamento há carros e motos, num total de 6 veículos. Quais são as possibilidades?

Depois de discutirmos os enunciados separadamente, propomos os enunciados juntos num mesmo problema para que os estudantes pudessem perceber que haveria uma única solução.

O enunciado completo foi:

Num estacionamento há carros e motos, num total de 6 veículos e 18 rodas. Quantas são as motos?

Discutimos com os estudantes como poderíamos equacionar cada problema que vimos anteriormente e depois que os estudantes conseguiram equacionar, montamos um plano cartesiano um pouco diferente pois renomeamos os eixos das abscissas e das ordenadas que geralmente nomeamos como “x” e “y” por “quantidades de carros” e “quantidades de motos”. Explicamos então como representar geometricamente os enunciados.

Após as discussões e as questões levantadas os estudantes receberam uma folha impressa com 5 situações problemas. Nesse momento a atividade foi desenvolvida completamente pelas duplas e atuamos apenas como mediadores, ficou claro aos estudantes que sempre que precisassem ou estivessem com dúvidas, receberia a orientação da professora.

A atividade realizada foi a seguinte:

Primeiro problema:

1) Em um sítio há vacas e galinhas, num total de 16 pés e 5 cabeças. Determinar a quantidade de galinhas e de vacas que há nesse sítio.

Os estudantes preencheram a tabela 3.1 com a equação que representa o total de cabeças no lado esquerdo, em seguida correlacionaram a quantidade de galinhas e vacas formando pares ordenados com os valores correlacionados. Da mesma forma, fizeram do lado direito da tabela com a equação que representava o total de pés dos animais.

A tabela 3.1 e o plano cartesiano representado na figura 3.8 a seguir, são as representações das atividades que foram entregues impressa e em branco para os estudantes preencher. Eles realizaram a atividade preenchendo a tabela, usaram cores diferentes para em seguida diferenciar as retas representadas pelas equações no plano cartesiano da figura 3.8.

Por exemplo:

Do lado esquerdo da tabela 3.1, em relação ao número de “cabeças”, a equação é dada por “G + V = 5”, logo se há 2 cabeças de vacas, então há 3 cabeças de galinhas e o ponto P(V,G), é o ponto P(2,3), que foi anotado na cor azul pelos estudantes. Do lado direito da tabela 3.1, em relação a quantidade de “pés” dos animais, a equação é dada por, “2G + 4V = 16”, logo, se há 2 galinhas, são 4 pés de galinhas, então há 3 vacas, ou seja 12 pés de vacas, assim o ponto P(V,G) referente a quantidade de 3 vacas e 2 galinhas é P(3,2), que foi anotado pelos estudantes durante a atividade na cor vermelha. Os respectivos pontos anotados na tabela 3.1, que foram feitos pelos estudantes, também foram localizados no plano cartesiano da figura 3.7.

Formando assim, pontos que podem ser ligados por duas retas que se interceptam no ponto P(3,2).

Nesse momento oferecemos brinquedos de réplicas de animais para os estudantes manusearem caso houvesse dificuldades na compreensão.

Tabela 3.1 – Correlação entre o número de galinhas e vacas.

Quantidade de animais conforme o número de cabeças (G + V = 5)			Quantidade de animais conforme o número de pés (2G + 4V = 16)		
V	G	P (V, G)	V	G	P (V, G)
0					
1					
2					
3					
4					
5					

Fonte: A própria autora.

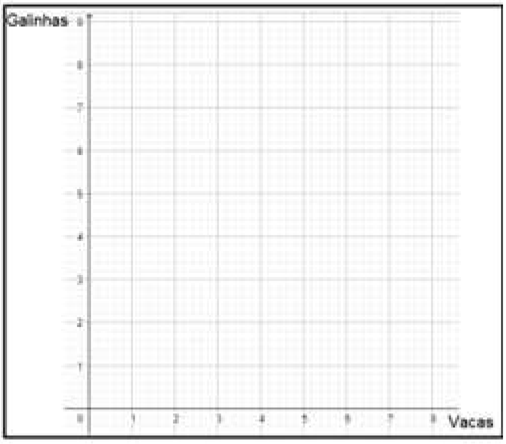
Após o preenchimento da tabela os estudantes faziam a representação geométrica no plano cartesiano da figura 3.7. Nesse plano cartesiano, os eixos x e y foram substituídos por vacas e galinhas, respectivamente.

O enunciado foi o seguinte:

Representar com cores diferentes os pares ordenados referentes a cada equação no plano cartesiano abaixo. **Azul para a equação referente a quantidade de cabeças** e **vermelho para a quantidade de pés.**

O plano cartesiano da figura 3.7 a seguir, foi parte da atividade, os estudantes receberam impresso para que pudessem preencher, por isso a figura a seguir não está preenchida.

Figura 3.7 – Representação geométrica de correlação entre o número de galinhas e o número de vacas.



Fonte: A própria autora.

Os estudantes puderam perceber que, o ponto referente a solução do problema é comum as duas retas, compreendendo assim a ideia da solução do problema relacionado a representação geometrica no plano cartesiano.

Analogamente, os demais enunciados seguiam as mesmas ideias, e as figuras e tabelas representadas a seguir foram parte da atividade entregues em branco para serem preenchidas pelos estudantes.

Segundo problema:

2) Zaira tem R$ 30,00 em notas de R$ 5,00 e R$ 10,00, sabemos que ela tem 5 notas. Determinar o número de notas de R$ 5,00 que Zaíra possui. (Sejam, x notas de R$ 10,00 e y notas de R$ 5,00).

Analogamente ao problema 1, os estudantes preencheram a tabela 3.2 com a equação que representa o total de notas no lado esquerdo; em seguida correlacionaram a quantidade de notas de R$ 5,00 e R$ 10,00 formando pares ordenados com os valores correlacionados. Da mesma forma, fizeram do lado direito da tabela com a equação que representava o total em dinheiro.

Nesse momento, oferecemos réplicas de cédulas de dinheiro para os estudantes manusearem caso houvesse dificuldades na compreensão.

Tabela 3.2 – Correlação entre o número de notas de R$ 5,00 notas de R$ 10,00.

Quantidade de Notas ($x + y = 5$)			Quantidade em dinheiro ($5x + 10y = 30$) ou ($x + 2y = 6$)		
X (10,00)	Y (5,00)	P (X,Y)	X (10,00)	Y (5,00)	P (X,Y)
0			0		
1			1		
2			2		
3			3		
4			4		
5			5		

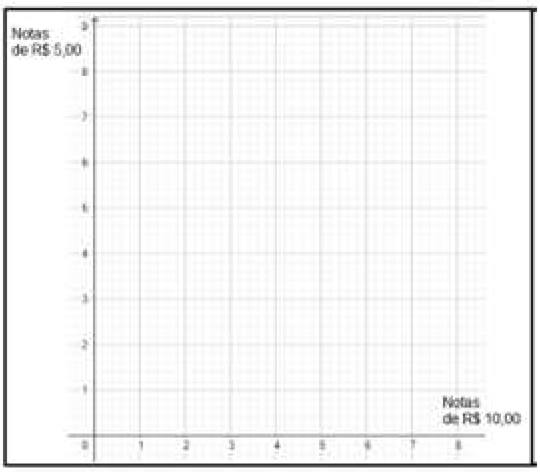
Fonte: A própria autora.

Após o preenchimento da tabela, os estudantes fizeram a representação geométrica no plano cartesiano da figura 3.8. Nesse plano cartesiano, os eixos x e y foram substituídos por “notas de R$ 10,00” e “notas de R$ 5,00”, respectivamente.

O enunciado foi o seguinte:

Representar com cores diferentes os pares ordenados referentes a cada equação no plano cartesiano a seguir. Azul para a equação referente a quantidade de notas e vermelho para a quantidade de dinheiro.

Figura 3.8 – Representação geométrica de correlação entre o número de notas



Fonte: A própria autora.

Problema 3:

3) Maria e João foram a um bar, Maria comeu dois salgados e tomou um refrigerante, João comeu um salgado e tomou um refrigerante. A conta de Maria deu R$ 8,00 e de João deu R$ 5,00. Determinar o preço do salgado e do refrigerante.

Da mesma forma, os estudantes preencheram a tabela 3.3 com a equação que representa o total gasto por Maria, formando pares ordenados com os valores correlacionados entre os valores do salgado e do refrigerante. Da mesma forma, fizeram do lado direito da tabela com a equação que representava o total gasto por João.

Nesse momento oferecemos réplicas de cédulas de dinheiro para os estudantes manusearem caso houvesse dificuldades na compreensão.

Tabela 3.3 – Correlação entre preço do salgado e o preço do refrigerante.

Representar uma equação com o total gasto por João:			Representar uma equação com o total gasto por Maria:		
Preço Salgado	Preço Refrigerante	P(S,R)	Preço Salgado	Preço Refrigerante	P (S,R)

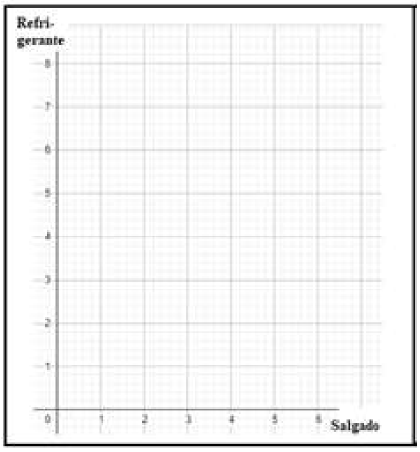
Fonte: A própria autora.

Após o preenchimento da tabela os estudantes fizeram a representação geométrica no plano cartesiano da figura 3.9. Nesse plano cartesiano, os eixos x e y foram substituídos por salgado e refrigerante respectivamente.

O enunciado foi o seguinte:

Representar com cores diferentes os pares ordenados referentes a cada equação no plano cartesiano a seguir. Azul para a equação referente ao gasto da Maria e vermelho para a equação referente ao gasto de João.

Figura 3.9 – Representação geométrica de correlação entre valor do refrigerante e o valor do salgado.



Fonte: A própria autora.

Nos três primeiros problemas os estudantes puderam perceber que havia somente um par ordenado que satisfizesse cada problema, determinamos esse tipo de sistema como sistema possível e determinado. Os estudantes perceberam também que ao localizarem os pontos no plano cartesiano e depois traçarem as retas, essas se cruzavam num único ponto que era a solução do problema. As retas foram traçadas de cores diferentes tornando mais didático e compreensível.

Os estudantes preencheram do lado esquerdo da tabela 3.4 com a equação que representa o total gasto por um lápis e uma borracha, formando pares ordenados com os valores correlacionados entre os valores do lápis e da borracha. Da mesma forma, fizeram do lado direito da tabela com a equação que representava o total gasto por dois lápis e duas borrachas.

Tabela 3.4 – Correlação entre o preço da borracha e o preço do lápis.

Representar uma equação com o total pago por um lápis e uma borracha			Representar uma equação com o total pago por dois lápis e duas borrachas		
Lápis	Borracha	P (L,B)	Lápis	Borracha	P (L,B)

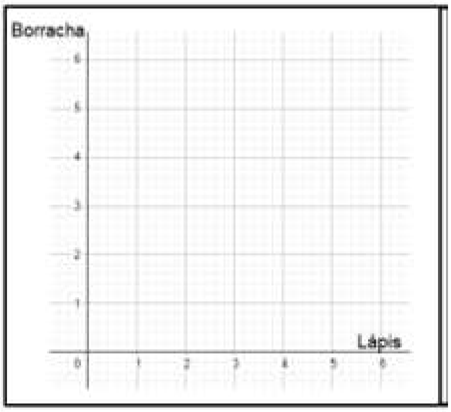
Fonte: A própria autora.

Nesse momento os estudantes questionaram que havia algo diferente, pois diferente dos outros problemas, esse apresentava inúmeras soluções. Aos representar geometricamente no plano cartesiano da figura 3.10, também perceberam diferença; pois os pontos de ambas as retas coincidiam, determinamos esse tipo de sistema de sistema possível e indeterminado.

O enunciado para a representação geométrica foi o seguinte:

Representar com cores diferentes os pares ordenados referentes a cada equação no plano cartesiano a seguir. Azul para a equação de um lápis e uma borracha e vermelho para a equação de dois lápis e duas borrachas.

Figura 3.10 – Representação geométrica de correlação entre valor da borracha e o valor do lápis.



Fonte: A própria autora.

Problema 5:

5) Pedro comprou um bombom, um salgado, e gastou R$ 7,00. Jéssica comprou um bombom e um salgado e gastou R$ 5,00.

Análogo aos anteriores, os estudantes preencheram a tabela 3.5 com a equação que representa o total gasto por um um bombom e um salgado, formando pares ordenados com os valores correlacionados entre o valor gasto por Pedro. Da mesma forma, fizeram do lado direito da tabela com a equação que representava o total gasto por Jéssica. Nesse momento, novamente os estudantes questionaram, pois, diferente dos demais esse problema não tinha solução. Alguns estudantes comentaram que realmente ambos se tratavam de “um salgado mais um bombom”, não poderia ter valores diferente, a menos que os produtos fossem diferentes.

Tabela 3.5 – Correlação entre o preço do salgado e o preço do bombom.

Representar uma equação com o total pago por Jéssica			Representar uma equação com o total pago por Pedro		
Salgado	Bombom	P (S,B)	Salgado	Bombom	P (S,B)

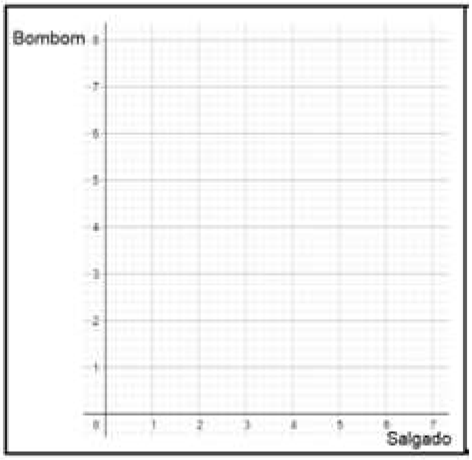
Fonte: A própria autora.

O enunciado para a representação geométrica foi o seguinte:

Representar com cores diferentes os pares ordenados referentes a cada equação no plano cartesiano a seguir. Azul para a equação referente ao gasto de Pedro e vermelho para a equação referente ao gasto de Jéssica.

Na representação geométrica os estudantes puderam perceber que se tratava de retas paralelas, que não havia intersecção no ponto referente a solução, portanto não havia solução. Determinamos esse enunciado como sistema impossível.

Figura 3.11 – Representação geométrica de correlação entre valor do bombom e o valor do salgado.



Fonte: A própria autora.

Avaliação da atividade: Como houve um surto de covid na época da aplicaçao dos testes, alguns estudantes não haviam realizado a atividade anterior, comprometendo os resultados. Dos 17 estudantes que avaliamos, pudemos perceber que no começo da atividade, alguns apresentaram um pouco de dificuldade na compreensão dos enunciados e na representação geométrica das retas, foram necessárias algumas explicações. Conforme foram desenvolvendo a atividade, começaram a compreender melhor, então começaram a fazer questionamentos e tirar conclusões nos últimos problemas, como por exemplo, no último problema foi que os estudantes puderam perceber que não haveria solução e no quarto problema que haveria infinitas soluções.

3.1.4 Aula: Resolução de Sistemas Lineares 2 x 2 com uso do geoplano e Geogebra para a representação geométrica

Objetivos: Compreender os métodos de resolução de Sistemas Lineares 2 x 2**,** desenvolver o raciocínio lógico compreender o processo de representação geométrica utilizando o geoplano com coordenadas cartesianas, compreender o processo de representação geométrica utilizando o Geogebra, resolver todos os Sistemas Lineares que serão usados no jogo Trinca dos Sistemas Lineares.

Habilidades da BNCC: (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Competências socioemocionais: Persistência e curiosidade para aprender.

Objeto de conhecimento: Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.

Duração: 6 aulas de 45 minutos cada.

Local: Sala de aula e sala de leitura.

Organização dos estudantes: Grupos.

Recursos e materiais: Lousa, projetor, mesa digitalizadora, computador, geoplano, software Geogebra, régua, caneta, papel quadriculado e caderno.

Metodologias Ativas: Monitoria e manuseio de ferramenta tecnológica.

O software Geogebra é uma ferramenta muito útil no ensino e aprendizagem de representações geométricas de Sistemas Lineares, podendo qualquer aluno e professor baixá-lo nos celulares, de modo a qualquer momento ter acesso ao ambiente ou ainda usar de forma online através do site: https://www.geogebra.org/. Quando utilizado em sala de aula pelos próprios estudantes se torna uma Metodologia Ativa muito eficiente, estimulando a curiosidade em aprender.

O geoplano com coordenadas cartesianas por sua vez, é uma ferramenta simples e de fácil manuseio, que auxilia na compreensão de localização de pontos, principalmente aos estudantes que apresentam maior déficit de aprendizagem nessa habilidade.

Desenvolvimento: Os grupos foram formados estrategicamente envolvendo estudantes com níveis diferentes de compreensão nas habilidades, isso favoreceu o desenvolvimento das atividades, pois pelo menos um integrante do grupo atuou como monitor, assim os estudantes puderam aprender uns com os outros.

Nas primeiras duas aulas, colocamos os Sistemas Lineares na lousa e questionamos qual seria o melhor método de resolução. Primeiramente deixamos os estudantes pensarem se o sistema era possível, se a solução poderia ser obtida através de raciocínio lógico ou seria necessário algum método específico. Após a interação dos estudantes, mostramos a resolução através de transformações lineares que nessa etapa do ensino é conhecido como “método da adição”.

Os estudantes discutiam com seus pares sobre o melhor método de resolução e após a resolução algébrica, determinaram a solução do sistema e de que tipo era o sistema. (SPD, SPI ou SI).

Em seguida usamos o Geogebra para representar geometricamente cada sistema, primeiro mostramos a ferramenta na lousa com o uso do projetor explicando como a ferramenta funciona, comparando as soluções, os pontos de intersecção das retas com os eixos das ordenadas e abscissas, fizemos tabelas com os pontos (0,y) e (x,0) para que as retas fossem traçadas e os estudantes usaram papel quadriculado para registrar a representação geométrica em seus cadernos.

Nas aulas seguintes, os estudantes puderam usar a ferramenta em seus celulares ou nos computadores da escola.

Nesse momento os estudantes foram levados a sala de leitura que possui várias mesas redondas, isso facilitou a circulação de informação entre os integrantes dos grupos, essa sala também possui dois computadores. A atividade foi desenvolvida de forma prática, pois enquanto alguns estudantes discutiam as soluções, outros usavam seus celulares ou o computador para representar geometricamente os Sistemas Lineares.

Usamos também o geoplano para representar geometricamente os Sistemas Lineares, em seguida os estudantes puderam fazer suas representações usando a ferramentas com pinos e elásticos coloridos. Essa ferramenta contribuiu principalmente para os estudantes que possuem deficiência intelectual por se tratar de um material concreto e de fácil manuseio. Depois de representarem geometricamente cada sistema usando essas ferramentas, os estudantes usaram o papel quadriculado para deixar registrado em seus cadernos.

Ao todo foram 14 Sistemas Lineares com duas equações e duas incógnitas. A seguir, estão relacionados os sistemas, as soluções e as figuras 3.13 até 3.26 que são as representações geométricas referente a cada sistema. Embora tenha ficado repetitivo, foi importante a apresentação de todos os sistemas, pois esses faziam parte da atividade posterior, o jogo de trinca dos Sistemas Lineares. Todas as figuras representadas nessa atividade foram feitas com o auxílio do Geogebra.

A atividade foi a seguinte:

Resolver os Sistemas Lineares, apresentar o tipo de solução que o sistema representa e representar geometricamente cada sistema no plano cartesiano usando o software Geogebra, o geoplano e o papel quadriculado.

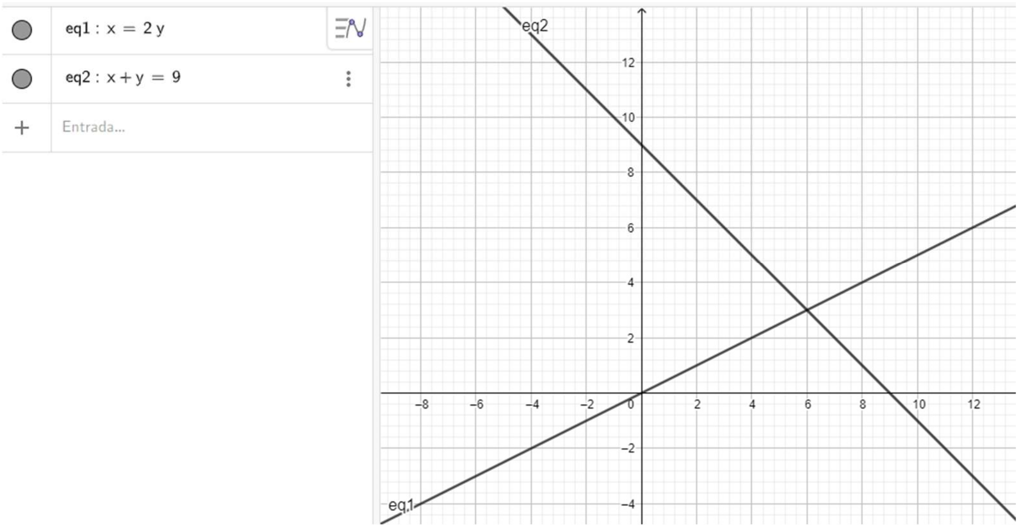
1º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (6,3).

Figura 3.12 – Representação geométrica do 1º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

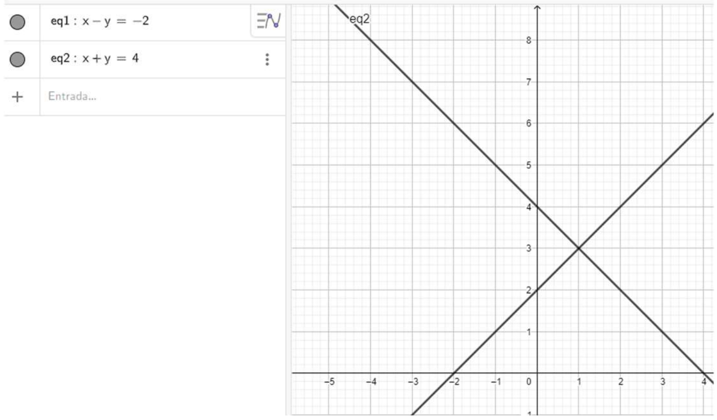
2º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (1,3).

Figura 3.13 – Representação geométrica do 2º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

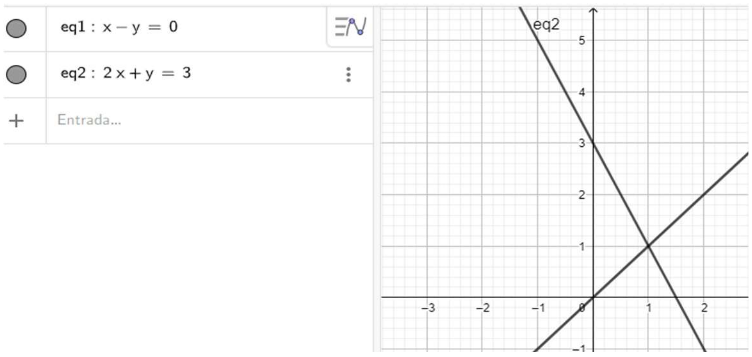
3º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (1,1).

Figura 3.14 – Representação geométrica do 3º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

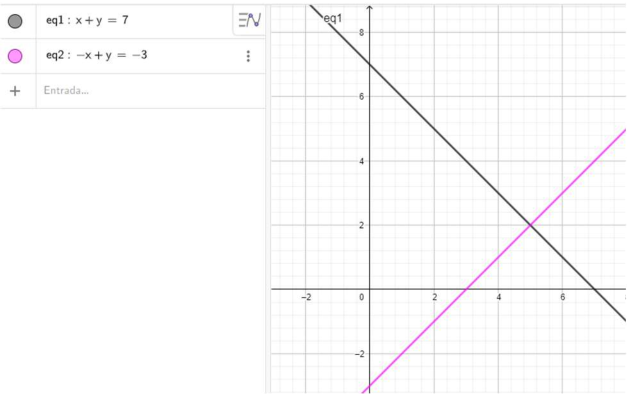
4º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (5,2).

Figura 3.15 – Representação geométrica do 4º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022),

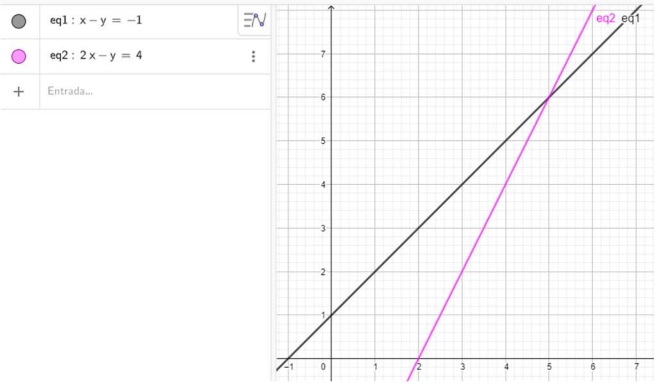
5º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (5,6).

Figura 3.16 – Representação geométrica do 5º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

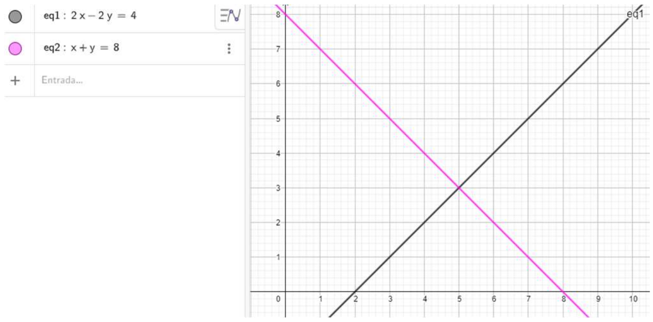
6º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (5,3).

Figura 3.17 – Representação geométrica do 6º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

7º Sistema Linear

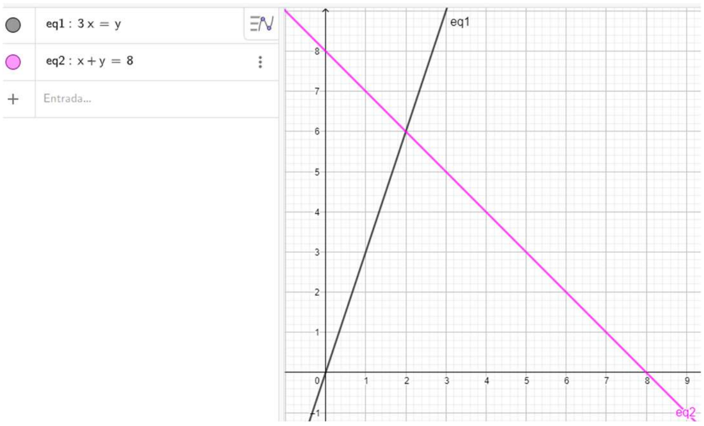
Representação algébrica:

$$\begin{cases} 3x = y \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Solução:

Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (2,6).

Figura 3.18 – Representação geométrica do 7º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

8º Sistema Linear

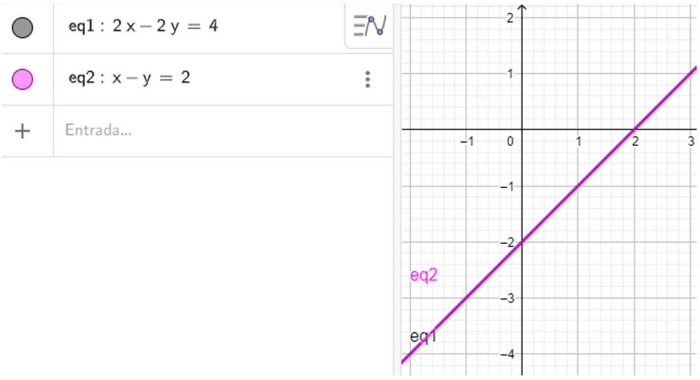
Representação algébrica:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Solução:

Sistema possível e indeterminado – SPI. As retas coincidem e apresentam infinitas soluções.

Figura 3.19– Representação geométrica do 8º Sistema Linear com o software Geogebra



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

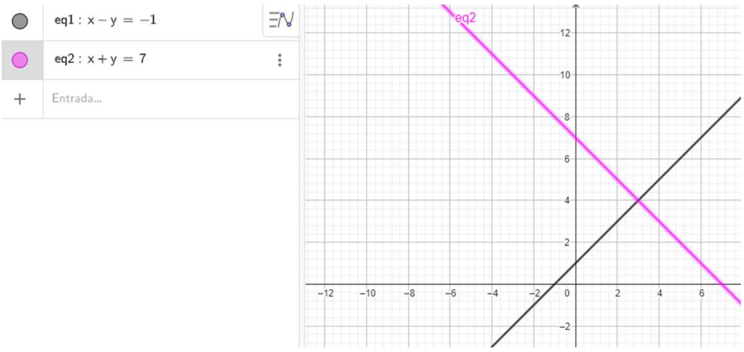
9º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado – SPD. As retas se encontram no par ordenado (3,4).

Figura 3.20 – Representação geométrica do 9º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

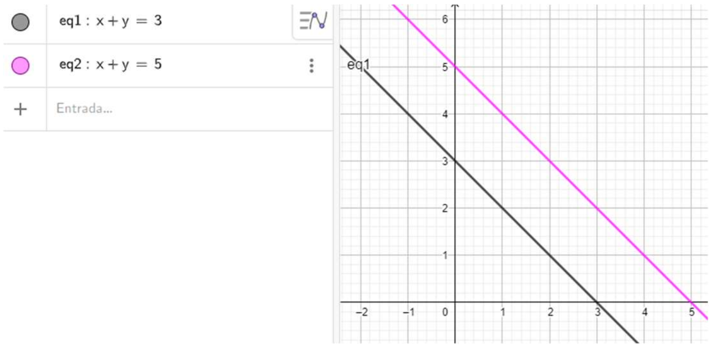
10º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Solução: Sistema impossível – SI. As retas são paralelas e, portanto, não apresentam um ponto de intersecção.

Figura 3.21 – Representação geométrica do 10º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

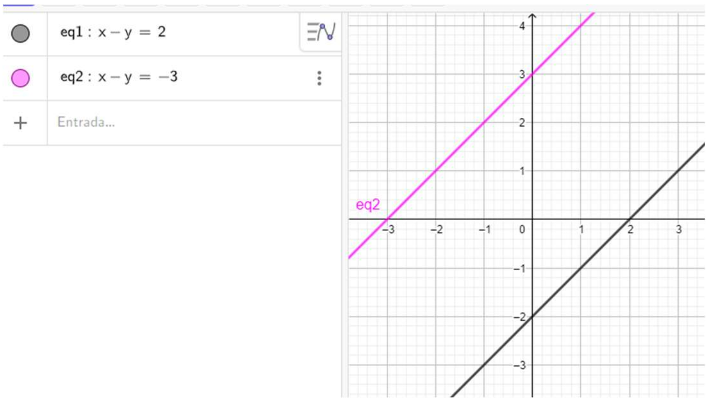
11º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

Solução: Sistema impossível – SI. As retas são paralelas e, portanto, não apresentam um ponto de intersecção.

Figura 3.22 – Representação geométrica do 11º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

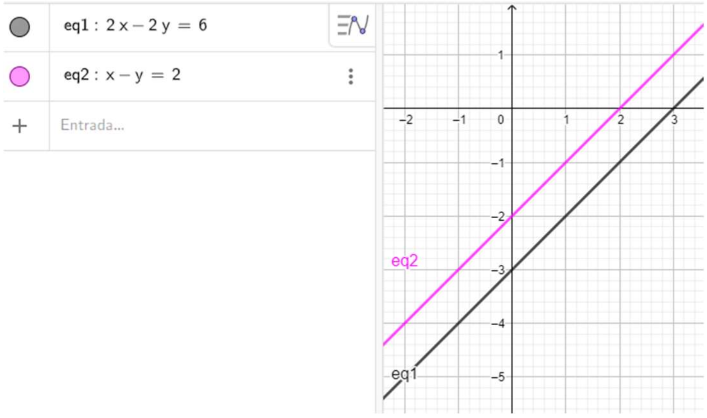
12º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Solução: Sistema impossível – SI. As retas são paralelas e, portanto, não apresentam um ponto de intersecção.

Figura 3.23 – Representação geométrica do 12º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

13º Sistema Linear

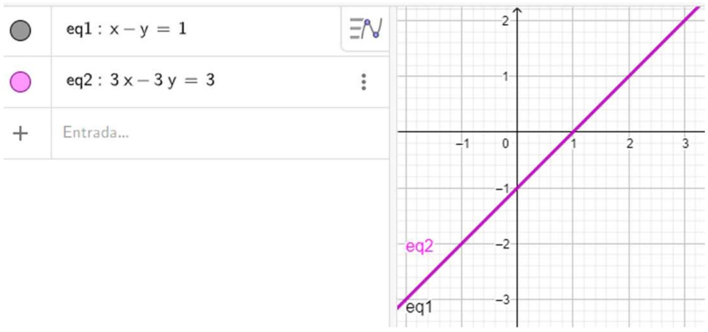
Representação algébrica:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$$

Solução:

Sistema possível e indeterminado – SPI. As retas coincidem e apresentam infinitas soluções.

Figura 3.24 – Representação geométrica do 13º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

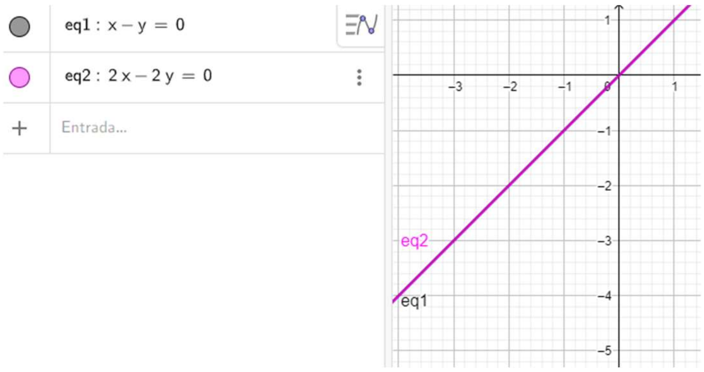
14º Sistema Linear

Representação algébrica:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e indeterminado – SPI. As retas coincidem e apresentam infinitas soluções.

Figura 3.25 – Representação geométrica do 14º Sistema Linear com o software Geogebra.



Fonte: Produção através do software Geogebra (2022).

Avaliação da atividade: Essa atividade foi realizada em 3 dias, nesse período houve faltas e não foram todos os estudantes que conseguiram concluir. Percebemos que nos primeiros exercícios os estudantes apresentaram dificuldades nas resoluções dos sistemas, porém, como foram 14 sistemas no total, conforme iam resolvendo, uns ajudavam os outros e parte dos estudantes conseguiram compreender outros não. Quanto ao uso do software Geogebra, os estudantes mostraram muito interesse em manusear, discutiram sobre os representações geométricas e as posições das retas, assimilando com a solução do sistema.

3.1.5 Aula: Jogo – Trinca dos Sistemas Lineares

Objetivos: Despertar interesse pela Matemática de forma lúdica; promover o protagonismo juvenil; desenvolver a corresponsabilidade entre os estudantes; relacionar representação algébrica de um Sistema Linear, representação geométrica e tipo de solução.

Habilidade: (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Competência socioemocional: Entusiasmo.

Objeto de conhecimento: Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.

Duração: 4 aulas de 45 minutos cada.

Local: Sala de leitura e sala de aula.

Organização dos estudantes: Grupos produtivos de 2 a 5 estudantes.

Recursos e materiais: Jogo ‘Trinca dos Sistemas Lineares” e caderno.

Metodologias Ativas: Monitoria e jogo.

O jogo “Trinca dos Sistemas Lineares” é um jogo que foi adaptado do jogo “Cacheta” originalmente com cartas de baralho, as regras e o objetivo do jogo são as mesmas, a diferença é que as cartas de baralho foram substituídas por cartas impressas que continham representações geométricas, representações algébricas e soluções.

O baralho completo é composto por 42 cartas, 14 com representações geométricas, 14 com representações algébricas e 14 com soluções, os sistemas representados nas cartas são as mesmas da atividade anterior. O jogo consiste em formar trincas ou seja, trios com a solução, e as representações algébricas e geométricas de cada sistema.

REGRAS DO JOGO

Participantes: De 2 a 5 participantes.

• Formar grupos e definir quem começa o jogo.

• Embaralhar as cartas e distribuir seis cartas para cada participante. O restante das cartas, permanecem no monte de cartas no centro da mesa.

• O(A) primeiro(a) participante compra uma carta do monte e descarta uma carta para o “lixo”. Ele(a) pode optar por descartar a carta comprada ou ficar com ela e descartar uma das cartas que tinha em mãos. (Cada participante sempre terá 6 cartas após cada jogada).

• O(A) participante seguinte escolhe entre pegar uma carta do monte ou pegar a carta descartada pelo(a) colega. Caso ele(a) opte por pegar uma carta do “lixo”, só pode escolher a que está por cima, ou seja, não é permitido escolher uma carta entre as que estiverem no lixo.

Essa regra foi alterada para:

O participante poderá pegar quaisquer cartas do “lixo”, até três cartas, com tanto que descarte o mesmo número de cartas que pegou, permanecendo sempre com 6 cartas.

• O objetivo dos(as) participantes é organizar suas cartas de maneira a formar trincas, cada uma com a mesma representação algébrica de um Sistema Linear, representação geométrica e tipo de solução. À medida que forem formando essas trincas, os(as) participantes podem colocá-las sobre a mesa.

• Vence o jogo quem primeiro montar duas trincas.

Desenvolvimento: As duas primeiras aulas foram na sala de aula.

A primeira regra do jogo, era que os estudantes tivessem todos os Sistemas Lineares resolvidos completamente em seu caderno, pois esses eram os mesmos das cartas do jogo.

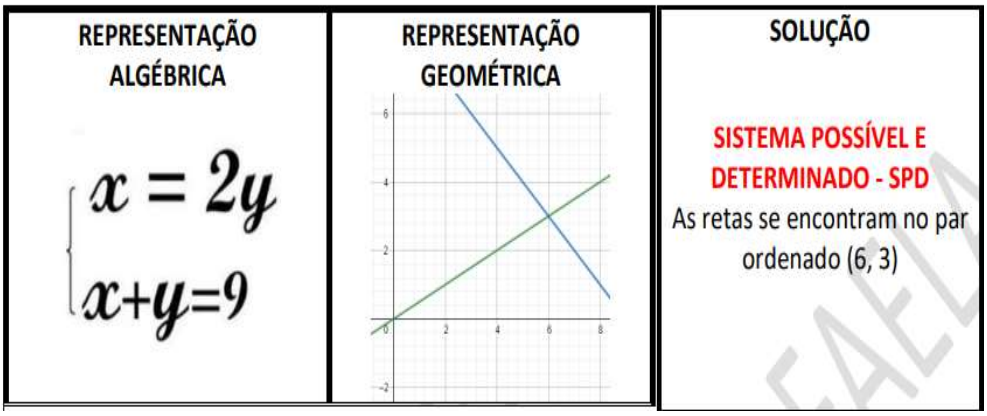
Nas duas primeiras aulas fizemos um levantamento para ver quais estudantes haviam feito toda atividade que fora desenvolvida nas últimas aulas, aqueles que já haviam terminado formaram um grupo, enquanto os demais terminaram as resoluções.

Os estudantes que já haviam terminado, formaram um grupo para jogar, primeiramente apresentamos as cartas e as regras do jogo. Jogamos com todas as cartas à mostra para que todos pudessem entender as regras, era permitido que os estudantes consultassem o caderno para auxiliar no jogo. A jogada seguinte foi feita conforme as regras, ou seja, com as cartas ocultas.

A aula seguinte fomos com a turma inteira para a sala de leitura que possui um espaço apropriado com mesas redondas e facilita a utilização de jogos. Dessa vez foram formados 3 grupos e os estudantes que haviam aprendido a jogar antes, se dividiram entre os grupos para atuarem como monitores, esses estudantes ensinaram as regras do jogo aos demais e depois de algumas partidas começaram a jogar também.

Os estudantes perceberam que o jogo poderia ficar mais interessante se alterassem uma regra, percebemos então que os estudantes estavam muito atentos as cartas e consultavam o caderno somente algumas vezes, explicavam uns aos outros o motivo de que algumas cartas servem para mais de uma trinca, por esse motivo autorizamos a alteração da regra e todos concordaram.

Figura 3.26 – Cartas do jogo – Trinca dos Sistemas Lineares.



Fonte: https://rafaelafabroinspira.lojaintegrada.com.br/jogos-em-pdf-para-imprimir. Acesso em: 22/07/2022.

Avaliação da atividade: Combinamos que a primeira etapa do jogo seria a resolução completa dos 14 Sistemas Lineares anteriores.

No entanto, não foram todos os estudantes que conseguiram resolver os Sistemas Lineares. Assim, aqueles que haviam completado a primeira etapa, formaram um grupo, leram as instruções e jogaram, enquanto os demais terminaram as resoluções.

Notamos que mesmo os estudantes que inicialmente apresentaram maiores dificuldades nas atividades anteriores, tiveram um interesse maior para a atividade. Os estudantes que já haviam jogado, se dividiram de forma que em todos os grupo houvesse pelo menos um estudante que atuou como monitor. O engajamento foi muito satisfatório e pudemos perceber que os estudantes se esforçavam para compreender e discutir as soluções e representações algébricas e geométricas.

Avaliação final: Devido a um surto de covid 19 no período de aplicação dos testes, a sequência de atividades não pôde ser avaliada integralmente. Os professores ou estudantes que apresentassem sintomas gripais, eram afastados da escola por 7 dias, houve muita falta por parte dos estudantes inclusive por parte da professora durante o desenvolvimento das atividades, alterando assim o resultado final.

No capítulo seguinte, veremos os registros dos desenvolvimento das atividades.

Capítulo 4

REGISTROS DA APLICAÇÃO DIDÁTICA

Esse capítulo consiste no registro das atividades apresentadas no capítulo 3, seguidas na mesma sequência.

Na Educação Básica, o estudo de sistemas de equações lineares normalmente é feito somente sob o ponto de vista algébrico e geométrico fazendo com que, muitas vezes, os alunos não se interessem pelo conteúdo ou não assimilem a equação com a representação geométrica.

> A sala de aula pode ser um espaço privilegiado de cocriação, *maker*, de busca de soluções empreendedoras, em todos os níveis, onde estudantes e professores aprendam a partir de situações concretas, desafios, jogos, experiências, vivências, problemas, projetos, com os recursos que têm em mãos: materiais simples ou sofisticados, tecnologias básicas ou avançadas. O importante é estimular a criatividade de cada um, a percepção de que todos podem evoluir como pesquisadores, descobridores, realizadores; que conseguem assumir riscos, aprender com os colegas, descobrir seus potenciais. Assim, o aprender se torna uma aventura permanente, uma atitude constante, um progresso crescente.
> (Metodologias Ativas para uma educação inovadora, página 3).

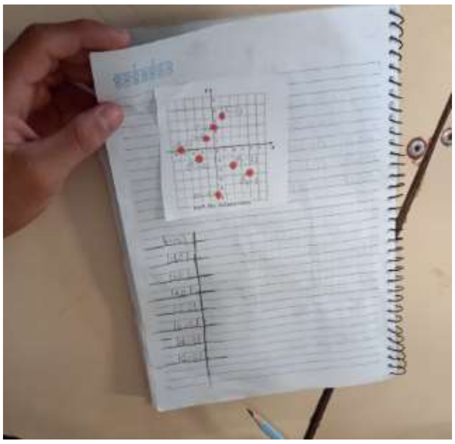
A ideia de implementar Metodologias Ativas diversificadas confere ao ensino subsídios que atraem a atenção e a motivação dos alunos. Apenas atividades de lousa e livro não são suficientes para a compreensão e o despertar pelo saber. É essencial que os materiais didáticos aplicados ao ensino sejam selecionados, adaptados e criados de acordo com cada contexto em que será inserido, e conforme os objetivos estabelecidos.

Uma das dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão de conceitos matemáticos é a transposição da linguagem pictórica para a linguagem algébrica. Outra dificuldade é de relacionar a representação geométrica da equação no plano cartesiano com uma situação contextualizada.

O enfoque do tema, se deu em aulas ministradas em uma turma de nono ano do ensino fundamental de uma escola pública, esses estudantes apresentam uma grande defasagem de aprendizado devido ao afastamento das aulas presenciais por quase dois anos por causa da pandemia de covid 19.

A primeira atividade realizada nessa sequência didática foi o bingo do plano cartesiano. Os estudantes puderam relembrar de maneira lúdica os conceitos de coordenadas cartesianas. Vemos na figura 4.1 uma cartela do bingo colada no caderno do estudante após a atividade.

Figura 4.1 – Cartela preenchida após a atividade.



Fonte: Foto tirada pela própria autora.

Após a primeira atividade, aplicamos as atividades descritas no capítulo 3, de resolução de desafios com linguagem pictórica. Os estudantes realizaram as atividades e em seguida discutimos as resoluções; a figura 4.2 mostra uma estudante resolvendo um desafio na lousa.

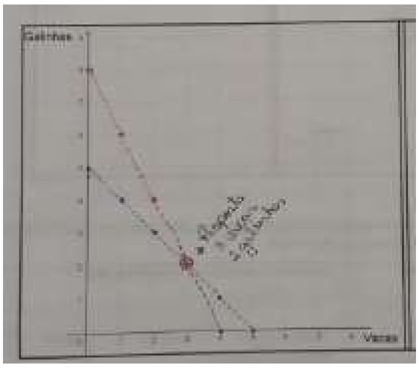
Figura 4.2 – Estudante resolvendo desafio na lousa.

Fonte: Foto tirada pela própria autora.

Nessa atividade, os estudantes foram desafiados a resolver e elaborar desafios matemáticos primeiramente com linguagem pictórica e em seguida fazer a relação e a transposição desses desafios para a linguagem algébrica.

Após a realização das atividades, foi realizada outra atividade na qual haviam situações contextualizadas de equações lineares com duas incógnitas. Para isso, os estudantes primeiro equacionavam cada parte do enunciado separadamente, em seguida atribuíam valores aleatórios para uma variável para determinar o valor da outra, atribuindo alguns valores e obtendo várias respostas em cada equação. Em seguida, sistematizavam essas respostas em uma tabela e obtinham os pares ordenados (x,y) que foram renomeados conforme cada enunciado, depois localizavam os pontos no plano, por fim pontilhavam os segmentos de retas referentes as equações. A figura 4.3 a seguir, ilustra a resolução de um problema por um estudante.

Figura 4.3 – Representação gráfica realizada por estudante – Sistema possível e determinado.

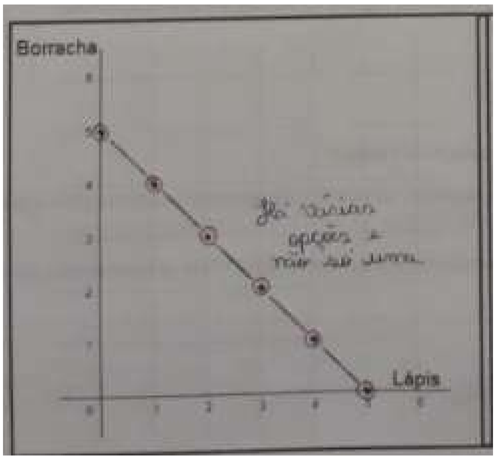


Fonte: Própria autora.

Nessa etapa foi observado que os estudantes, a princípio, tiveram dificuldades em equacionar os enunciados. Eles observaram que separadamente as equações possuíam infinitas soluções, mas ao juntar as duas equações, ou seja, o enunciado completo, só haveria uma solução. Então, o sistema era considerado possível e determinado.

Nessa atividade, havia 5 enunciados. Os 3 primeiros eram possíveis e determinados o 4º era possível e indeterminado, os estudantes ao se depararem com esse problema acharam estranho, pois diferente dos anteriores, não havia uma única solução; então questionaram. Após alguns minutos de debate com a turma, explicamos sobre esse tipo de sistema que é possível de se resolver; porém indeterminado por possuir infinitas soluções. Os estudantes perceberam também que diferente das outras representações geométricas esse problema possuía apenas uma reta, ou seja, não havia um único ponto de intersecção, mas infinitos. Na figura 4.4, a seguir, temos a resolução feita por um estudante.

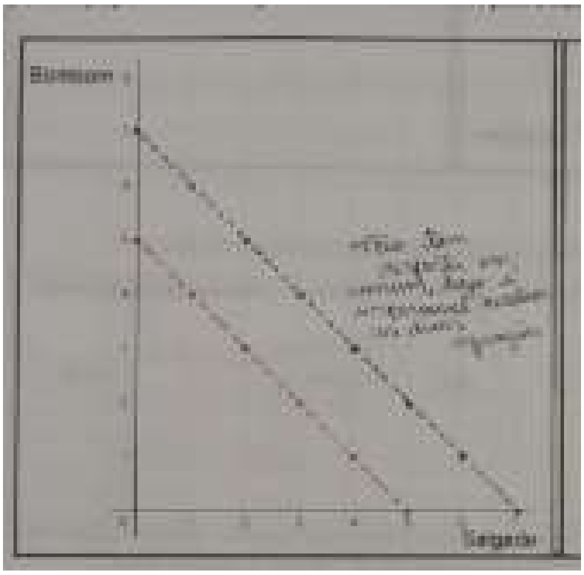
Figura 4.4 – Representação gráfica realizada por estudante – Sistema possível e indeterminado.



Fonte: Foto tirada pela própria autora.

Por fim, o 5º enunciado trouxe uma situação diferente das outras. De fato, neste problema não havia solução, novamente os estudantes debateram e levantaram a questão, alguns concluíram que realmente o sistema não tinha solução, os estudantes observaram que as retas eram paralelas conforme a figura 4.5 a seguir.

Figura 4.5 – Representação gráfica realizada por estudante – Sistema impossível.



Fonte: Foto tirada pela própria autora.

Embora o foco desse trabalho não seja estudantes com deficiência intelectual, não poderíamos ignorar esse fato. Nessa turma havia um estudante com deficiência intelectual que é acompanhado por professora auxiliar, fizemos então algumas adaptações com o uso de materiais concretos como carrinhos, motinhas, animais de duas e quatro patas e réplicas de cédulas de dinheiro, de modo a facilitar a compreensão do estudante. Este fato está registrado nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8.

Figura 4.6 – Professora auxiliar explicando para estudante com deficiência intelectual.

Fonte: Foto tirada pela própria autora.

Figura 4.7 – Professora auxiliar explicando para estudante com deficiência intelectual.

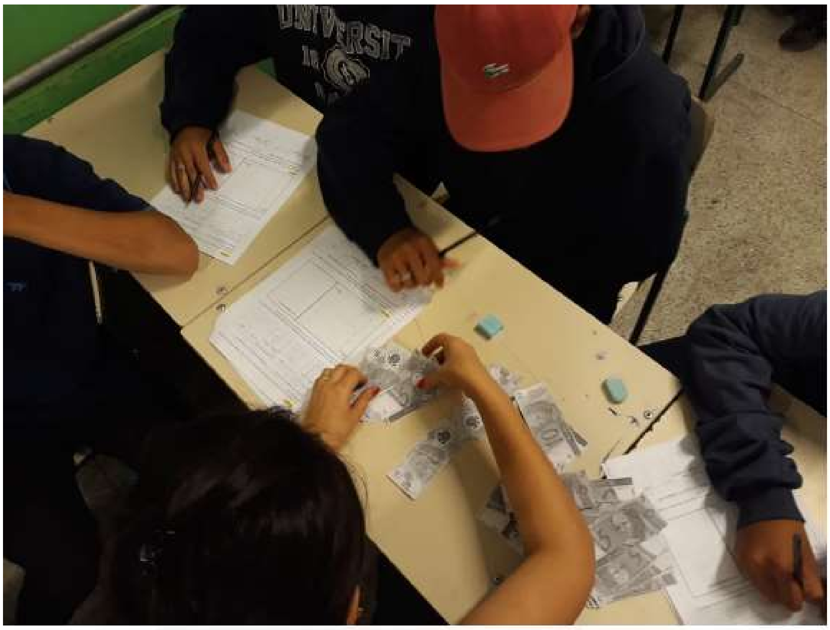
Fonte: Foto tirada pela própria autora.

Figura 4.8 – Professora auxiliar explicando para estudante com deficiência intelectual.

Fonte: Foto tirada pela própria autora.

Outros estudantes também quiseram manusear o material para melhor compreensão da atividade, então usamos o material com alguns grupos e outros grupos usaram o material entre si explicando uns para os outros, observado na figura 4.9.

Figura 4.9 –Explicação com material concreto.

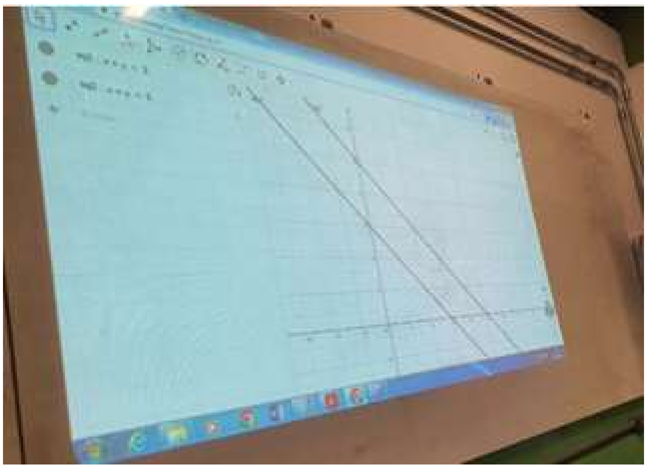


Fonte: Foto da própria autora.

Na aula seguinte, foi apresentado aos estudantes o software Geogebra.

Passamos alguns Sistemas Lineares e explicamos como funciona a representação geométrica com essa ferramenta, projetamos na lousa para que todos pudessem visualizar a figura 4.10 mostra a projeção na lousa.

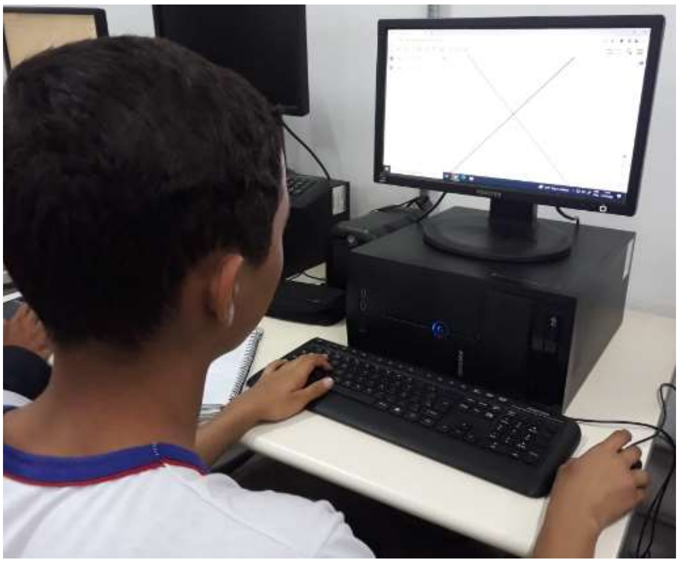
Figura 4.10 – Representação geométrica feita com o Geogebra projetado na lousa.



Fonte: Foto da própria autora.

Em seguida, os estudantes puderam manusear a ferramenta e fazer as representações geométricas de alguns sistemas. A seguir, a figura 4.11 ilustra um estudante usando o computador para fazer representações geométricas com o uso do Geogebra. A figura 4.12 ilustra outros estudantes usando tablet e celular para representar geometricamente as retas relacionadas as equações dos Sistemas Lineares com o uso do Geogebra.

Figura 4.11 – Estudante usando o Geogebra.



Fonte: Foto da própria autora.

Figura 4.12 – Estudantes usando o Geogebra com tablet e celular.

Fonte: Foto da própria autora.

Algumas representações geométricas foram feitas com o uso do geoplano com coordenadas cartesianas, os estudantes puderam comparar as duas ferramentas. A figura 4.13 ilustra um grupo de estudantes manuseando o geoplano.

Figura 4.13 – Estudantes usando o geoplano.

Fonte: Foto da própria autora.

Nas aulas subsequentes os estudantes resolveram as atividades de Sistemas Lineares registrando em seus cadernos a solução e a representação geométrica, essa atividade serviu como suporte para a atividade do jogo "Trinca dos Sistemas Lineares". A figura 4.14 ilustra o estudante atuando como monitor, explicando aos demais as regras do jogo e exemplificando, nesse momento, que todas as cartas estavam a mostra.

Figura 4.14 – Estudantes aprendendo o jogo.

Fonte: Foto da própria autora.

A figura 4.15, ilustra os estudantes jogando com as cartas ocultas, conforme a regra do jogo, e o estudante monitor ainda auxiliando os demais.

Figura 4.15 – Estudantes jogando e sendo auxiliado por estudante monitor.

Fonte: Foto da própria autora.

Nesse momento houve muita interação e aprendizagem, pois até mesmo os estudantes que menos haviam compreendido e se interessado pelo conteúdo, durante o jogo entenderam melhor os conceitos, compreenderam sobre os tipos de sistemas e suas representações geométricas.

Os estudantes perceberam que poderiam incluir uma regra no jogo. A nova regra era que se algum jogador percebesse que nas cartas descartadas houvesse um par ou uma trinca, esse poderia comprar mais de uma carta, desde que descartasse o mesmo número de cartas que comprou, para que sempre estivesse com 6 cartas. A inserção dessa nova regra no jogo mostrou que os estudantes estavam percebendo estrategicamente as falhas dos adversários e tornou o jogo ainda mais interessante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação enfocou a aplicação das Metodologias Ativas no Ensino Fundamental II, com o intuito de auxiliar os professores diante dos desafios encontrados ao ensinar conteúdos abstratos. Ao explorar conceitos dessas metodologias, buscamos promover a atuação dos estudantes como protagonistas no processo de ensino-aprendizagem.

A adoção dessas metodologias reafirma a importância do estudante como agente ativo durante as aulas, construindo conhecimento por meio de atividades que estimulem o raciocínio e a assimilação de questões simples e contextualizadas, envolvendo representações algébricas e geométricas.

Além disso, a metodologia também visa desafiar os estudantes a participar de jogos e competições, aplicando o conhecimento adquirido e tornando as aulas momentos prazerosos. A troca de aprendizado entre os estudantes, através do ensino e da aprendizagem mútuos, exercita a corresponsabilidade, contribuindo para um aprendizado mais significativo.

A manipulação de ferramentas também estimula o raciocínio, permitindo que o estudante seja o protagonista do seu próprio conhecimento.

Por sua vez, o professor desempenha um papel fundamental como mediador do conhecimento, estimulando, debatendo, incentivando e coordenando as atividades, com o objetivo de otimizar a aprendizagem. É indiscutível que cada estudante tem seu próprio tempo, ritmo e formas diferentes de aprendizagem, por isso é crucial diversificar as atividades e oferecer metodologias variadas.

Verificamos que a sequência didática desenvolvida para a elaboração desta dissertação resultou em uma maior participação dos estudantes nas aulas, em comparação com turmas de anos anteriores, nas quais o conteúdo foi apresentado apenas por meio de livros e exercícios.

No entanto, ainda há espaço para melhorias, e temos a intenção de aplicar essa sequência didática sempre que ela fizer parte do currículo.

Aprofundamos nossos estudos sobre o tema "Metodologias Ativas" e percebemos que, ao longo de quase quinze anos de experiência no magistério, muitas vezes utilizamos essas metodologias de forma empírica. Ao proporcionar atividades diversificadas, observamos que as aulas se tornam mais atrativas para os estudantes, uma vez que eles participam de forma mais ativa.

Após uma análise mais aprofundada das Metodologias Ativas, adquirimos um conhecimento mais sólido sobre os objetivos de cada atividade, o que facilitará a elaboração das nossas aulas, pois agora temos uma compreensão aprofundada do tema.

Os resultados não puderam ser avaliados como gostaríamos, devido às circunstâncias desafiadoras, como o impacto da pandemia nos últimos dois anos e a ocorrência de uma nova onda de COVID-19 e gripe durante a semana de aplicação.

Estudantes e professores com qualquer sintoma de gripe foram afastados das atividades escolares presenciais por sete dias, resultando em vários estudantes ausentes em diferentes dias, o que dificultou a sequência das atividades.

A professora responsável pela atividade também precisou se afastar da escola por sete dias, retornando posteriormente para dar continuidade às atividades.

Em conclusão, a experiência de aplicação das Metodologias Ativas no Ensino Fundamental II destaca a sua importância na transformação do processo educacional.

Essas abordagens promovem a participação ativa dos estudantes, estimulando o pensamento crítico, a resolução de problemas e a colaboração.

Embora os desafios enfrentados tenham impactado a avaliação dos resultados, fica evidente que a utilização dessas metodologias contribui para um aprendizado mais significativo e engajador.

REFERÊNCIAS

[1] BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Penso Editora, 2018. Livro.

[2] BACICH, L.; NETO, A. T.; DE MELLO, F. T. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação.** Penso Editora, 2015. Artigo. Disponível em: file:///C:/Users/Samsung/Downloads/mesclar,+(L)Ensino+H%C3%ADbrido+revisado+05-12+Marcio-Valente.pdf . Acesso em : 30/04/2022.

[3] BLOG FLEXGE – disponível em - https://blog.flexge.com/metodologias-ativas-ensino-aprendizagem - acesso em 27/07/2022

[4] CARLESSO, D. **John Dewey e a educação como reconstrução da experiência: um possível diálogo com a educação contemporânea.** 2008.Dissertação de mestrado. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/6853/DARIANECARLESSO.pdf. Acesso em 30/04/2022.

[5] CONCEIÇÃO, J. M. **Pirâmide de aprendizagem: você sabe o que é e qual a sua proposta?** Disponível em: https://www.plantareducacao.com.br/piramide-de-aprendizagem/#:~:text=A%20pir%C3%A2mide%20de%20aprendizagem%20tamb%C3%A9m,capacidade%20de%20assimila%C3%A7%C3%A3o%20e%20aprendizado. Acesso em: 27/04/2022.

[6] DOS SANTOS, S. S.; DA SILVA, A. F. S.; DOS SANTOS, E. E. F. **Estratégias didático-metodológicas com GeoGebra para o ensino e a aprendizagem de quadrantes no plano cartesiano.** Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 23, n. 1, p. 355-390, 2021. Disponível em: file:///C:/Users/Samsung/Downloads/49185-Texto%20do%20artigo-160723-2-10-20210629.pdf. . Acesso em 22/04/2022.

[7] EDUCAÇÃOIMAGINIE. **Saiba o que é a rotação por estações e como aplicar essa metodologia.** Disponível em: https://educacao.imaginie.com.br/rotacoes-por-estacoes/ . Acesso em: Acesso em: 22/04/2022.

[8] FRUTUOZO, A. G. T. **As metodologias ativas e as tics no processo de ensino-aprendzagem na EMEB Pres. Getúlio D. Vargas em tempos de ensino remoto**. Saberes em Foco, v. 5, n. 1, p. 99-115, 2022. Artigo. Disponível em: file:///C:/Users/Samsung/Downloads/ARTIGO+7%20(1).pdf. Acesso em: 30/04/2022.
[9] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à álgebra linear.** Rio de Janeiro: SBM, v. 146, 2012.
[10] IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar, volume 4**. Atual. 8ª edição. 2013.

[11] JORNADA EDU. **O que são agrupamentos produtivos e como funcionam.** Disponível em: https://jornadaedu.com.br/tendencias-em-educacao/o-que-sao-agrupamentos-produtivos-e-como-funcionam/ . Acesso em: 22/04/2022.

[12] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática**

do Ensino Médio. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção do Professor de Matemática. volume 3. 6ª edição.

[13] LUBACHEWSKI, G. C.; CERUTTI, E. **Metodologias ativas no ensino da matemática no anos iniciais: aprendizagem por meio de jogos.** RIDPHE_R Revista Iberoamericana do Patrimônio Histórico-Educativo, v. 6, p. e020018-e020018, 2020. Artigo. Disponível em: file:///C:/Users/Samsung/Downloads/71339159104,+9923-Texto+do+artigo-33876-1-6-20201206%20(1).pdf . Acesso em : 30/04/2022.

[14] NOVA ESCOLA – Disponível em https://cursos.novaescola.org.br/

[15] RANGEL, F. **Ensino-Aprendizagem de Matemática–TDAH, inclusão e metodologias ativas.** 2020. Disponível em: https://tede.ufrrj.br/jspui/bitstream/jspui/6148/2/2020%20-%20Fillipe%20Rangel.pdf. Acesso em: 23/04/2022.

[16] SÁNCHEZ, J. **Nuevas Ideas en Informática Educativa**. 2019. Congresso. Disponível em: http://www.tise.cl/2019/img/ActasTISE2019.pdf. Acesso em: 22/04/2022.

[17] SILVEIRA, C. A. **Sala de aula invertida: Por onde começar?** Artigo. Disponível em: https://ifg.edu.br/attachments/article/19169/Sala%20de%20aula%20invertida_%20por%20onde%20come%C3%A7ar%20(21-12-2020).pdf . Acesso em 01/05/2022.

[18] TEIXEIRA, R. R. P. **Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática.** Revista Linhas, v. 15, n. 28, p. 302-323, 2014. Disponível em: file:///C:/Users/Samsung/Downloads/3502-Texto%20do%20artigo-12415-1-10-20140623%20(2).pdf . Acesso em: 03/05/2022.

[19] YNNER BLOG. **World Café: A Metodologia para Gerar Conversas Relevantes.** Disponível em: https://ynner.com.br/blog/world-cafe/ Acesso em: 22/04/2022.