

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUCIANA DA FONSECA CRUZ

DESVENDANDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI, LUCAS E GIBONACCI

CURITIBA

2023

LUCIANA DA FONSECA CRUZ

DESVENDANDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI, LUCAS E GIBONACCI

UNWRAPPING THE FIBONACCI, LUCAS AND GIBONACCI SEQUENCES

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientadora: Profa. Dra. Mari Sano

Coorientadora: Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani

CURITIBA

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba



LUCIANA DA FONSECA CRUZ

DESVENDANDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI, LUCAS E GIBONACCI

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 18 de Outubro de 2023

Dra. Mari Sano, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Adriano Verderio, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Diego Mano Otero, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 22/10/2023.

Dedico este trabalho a Deus que me deu forças para concluir este objetivo e à minha filha Mariana.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter colocado em meu caminho as oportunidades, sabedoria e discernimento para que pudesse concretizar esta etapa.

Agradeço à toda minha família. Sobretudo aos meus pais, Célia e Tadeu pela vida e pelos ensinamentos.

Agradeço ao meu marido Renan pelo suporte, compreensão e amor durante todo o curso.

Agradeço ao meu irmão Lucas, minha cunhada Adriane e ao meu sobrinho Arthur pelo incentivo.

Agradeço às professoras Dra. Mari Sano e Dra. Patrícia Massae Kitani pelas contribuições com seu conhecimento na elaboração do trabalho.

Agradeço aos meus professores e colegas de curso pelo compartilhamento de conhecimento, os quais contribuíram e contribuem para nosso crescimento profissional.

Agradeço a todos os meus amigos que sempre me ajudaram com sua experiência. Em especial à minha amiga Lia as incontáveis horas de troca de ideias e mensagens de apoio.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Curitiba da UTFPR, pela concessão de uma bolsa de estudos durante seis meses.

A Matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o universo. Galileu Galilei (1564 - 1642): filósofo, físico, matemático, astrônomo italiano.

RESUMO

FONSECA, Luciana da Cruz. **Desvendando as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci.** 90 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2023.

A sequência de Fibonacci é uma das mais belas e perfeitas sequências existentes na Matemática. Considerando este fato apresentamos um estudo referente à sequência de Fibonacci e suas ocorrências. Inicialmente, elucidamos um breve histórico sobre Fibonacci e a sua sequência. Em seguida, abordamos a definição das sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci e, algumas das identidades que relacionam estas sequências. Exibimos ainda várias ocorrências associadas a estas sequências, onde algumas delas foram apresentadas usando o *software* Geogebra. Para finalizar propomos algumas atividades que podem ser aplicadas na Educação Básica onde procuramos enfatizar uma abordagem diferenciada utilizando jogos matemáticos, resolução de problemas e tecnologia da informação.

Palavras-chave: Fibonacci; Lucas; Gibonacci; Sequência; Ocorrências.

ABSTRACT

FONSECA, Luciana da Cruz. **Unwrapping the Fibonacci, Lucas and Gibonacci sequences.** 90 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2023.

The Fibonacci sequence is considered one of the most beautiful and perfect sequences in mathematics. Considering this fact, we present a study regarding the Fibonacci sequence and its occurrences. Initially, we elucidate a brief history of Fibonacci and its sequence. Right away we approach the definition of the Fibonacci, Lucas and Gibonacci sequences and, some of the identities that relate these sequences. We also exhibit several occurrences associated with these sequences, where some of them were developed using Geogebra software. Finally, we propose some activities that can be applied in elementary school where we seek to emphasize a distinguished approach using math games, problem solving, and information technology.

Keywords: Fibonacci; Lucas; Gibonacci; Sequence; Occurrences.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Espiral: (a) Partenon; (b) Monalisa	13
Figura 1.2 – Fibonacci: Caracol e Girassol	13
Figura 1.3 – Espiral logarítmica	13
Figura 3.1 – Quadrado de lado F_{n+1}	33
Figura 3.2 – Representação geométrica da identidade da equação (3.1)	34
Figura 3.3 – Representação geométrica da identidade da equação (3.2)	35
Figura 3.4 – Representação geométrica da identidade da equação (3.3)	36
Figura 3.5 – Quadrado de lado L_n	37
Figura 3.6 – Representação geométrica da identidade dada pela equação (3.4)	38
Figura 3.7 – Representação geométrica da identidade da equação (3.5)	39
Figura 3.8 – Representação geométrica da identidade da equação (3.6)	41
Figura 3.9 – Representação geométrica do Teorema 3.1	44
Figura 3.10–Representação geométrica do Paradoxo de Cassini para $n = 2k$	49
Figura 3.11–Retângulo ampliado	49
Figura 3.12–Representação geométrica do Paradoxo de Cassini para $n = 2k + 1$	50
Figura 3.13–Representação dos ângulos no Paradoxo de Cassini com n par	51
Figura 3.14–Representação dos ângulos no Paradoxo de Cassini com n ímpar	52
Figura 4.1 – Peças em ordem decrescente	54
Figura 4.2 – Montagem inicial	55
Figura 4.3 – Quebra-cabeça: (a) Processo de montagem; (b) Processo de montagem final	56
Figura 4.4 – Quebra-cabeça completo	56
Figura 4.5 – Atividade: Paradoxo de Cassini	61
Figura 4.6 – Atividade: Paradoxo de Cassini onde $n = 6$	61
Figura 4.7 – Atividade: Paradoxo de Cassini em que $n = 7$	62
Figura 4.8 – Tabuleiro 2×1	64
Figura 4.9 – Dominó: (a) Peça na posição vertical; (b) Peça na posição horizontal	65
Figura 4.10–Tabuleiro 2×2	65
Figura 4.11–Dominó: (a) Duas peças na posição vertical; (b) Duas peças na posição horizontal	66
Figura 4.12–Tabuleiro 2×3	66
Figura 4.13–Dominó: três peças na posição vertical	67
Figura 4.14–Dominó: (a) Primeira peça na vertical e as duas últimas na posição horizontal; (b) Duas primeiras peças na horizontal e terceira peça na posição vertical	67
Figura 4.15–Tabuleiro 2×4	68
Figura 4.16–Quatro peças na posição vertical	68

Figura 4.17–Duas primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal	69
Figura 4.18–Dominó: (a) A primeira e quarta peças na vertical, segunda e terceira na posição horizontal; (b) As quatro peças na horizontal	69
Figura 4.19–Dominó: duas primeiras peças na horizontal e duas últimas na vertical	70
Figura 4.20–Tabuleiro 2×5	70
Figura 4.21–Cinco peças na posição vertical	71
Figura 4.22–A primeira peça na vertical e as quatro últimas na horizontal	71
Figura 4.23–As três primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal	72
Figura 4.24–A primeira peça na vertical, duas peças na horizontal e as duas últimas na vertical	72
Figura 4.25–As duas primeiras peças na vertical, terceira e quarta peças na horizontal e quinta peça na vertical	72
Figura 4.26–Quatro primeiras peças na posição horizontal e quinta peça na vertical	73
Figura 4.27–Dominó: (a) As duas primeiras peças na horizontal e as três últimas peças na vertical; (b) As duas primeiras peças na horizontal, terceira na vertical e as duas últimas na horizontal	73
Figura 4.28–Sudoku e Fibonacci: Exemplo 1	79
Figura 4.29–Sudoku e Fibonacci: Exemplo 2	79
Figura 4.30–Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 1	80
Figura 4.31–Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 2	80
Figura .1 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 1	88
Figura .2 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 2	89
Figura .3 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 3	89
Figura .4 – Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 3	90

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Algumas identidades com os números de Fibonacci	20
2.2	Sequência de Lucas	22
2.3	Sequência de Gibonacci	26
3	OCORRÊNCIAS	32
3.1	Ilustrações Geométricas	32
3.2	Fibonacci e Probabilidade	42
3.3	Gibonacci e geometria analítica	43
3.4	Números de Fibonacci e o Algoritmo de Euclides	46
3.5	Paradoxo de Cassini	48
4	ATIVIDADES PROPOSTAS	54
4.1	Atividade 1 - Quebra-cabeça	54
4.2	Atividade 2 - Desvendando sequências	57
4.3	Atividade 3 - Paradoxo de Cassini	60
4.4	Atividade 4 - Dominós	63
4.5	Atividade 5 - Probabilidade	75
4.6	Atividade 6 - Sudoku de Fibonacci	77
5	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	82
	APÊNDICE A - ATIVIDADE: DESVENDANDO SEQUÊNCIAS	84
	APÊNDICE B - ATIVIDADE: DOMINÓS	86
	APÊNDICE C - ATIVIDADE: PROBABILIDADE	87
	APÊNDICE D - ATIVIDADE: SUDOKU	88

1 INTRODUÇÃO

A matemática apresenta-se como uma ciência que nos permite analisar, sintetizar e propor soluções perante situações abstratas e/ou de nosso cotidiano. Para Ramos (2017) a Matemática é uma ciência que estabelece uma relação entre o entendimento coerente e pensativo com situações práticas habituais, promovendo uma constante compreensão na busca pela veracidade dos fatos através de técnicas precisas e exatas.

Neste aspecto, percebemos como se torna relevante promover um estudo no qual possamos apresentar uma contribuição com relação ao ensino de matemática.

Considerando o exposto, buscamos estabelecer uma conexão entre as experiências advindas do mundo real e, por meio destas, incorporar a utilização de conceitos matemáticos. Neste sentido, vemos como pertinente apresentar como tema às sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci, as quais são sequências recursivas que também são evidenciadas pela BNCC (2018). Onde uma das habilidades elencadas é a utilização da simbologia algébrica para expressar regularidades em sequências numéricas.

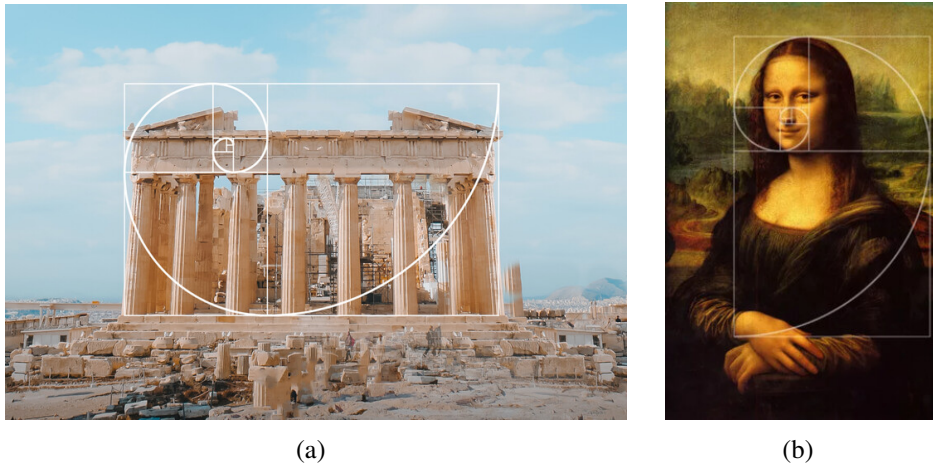
Ao analisar a definição de sequência, segundo Morgado e Carvalho (2015), percebemos que muitas sequências são definidas recursivamente, ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

A sequência de Fibonacci emerge neste contexto e ressaltamos a importância da mesma. Com relação a sua relevância Koshy (2017) aponta que a sequência de Fibonacci é uma das sequências numéricas mais intrigantes. Ela continua a oferecer amplas oportunidades para matemáticos profissionais e amadores fazer conjecturas e expandir seus horizontes matemáticos.

Sendo assim, pretendemos proporcionar ao leitor não somente um estudo da sequência de Fibonacci, mas também fazer com que educandos, professores e pesquisadores possam analisar a sequência de Fibonacci tanto no aspecto algébrico quanto no geométrico.

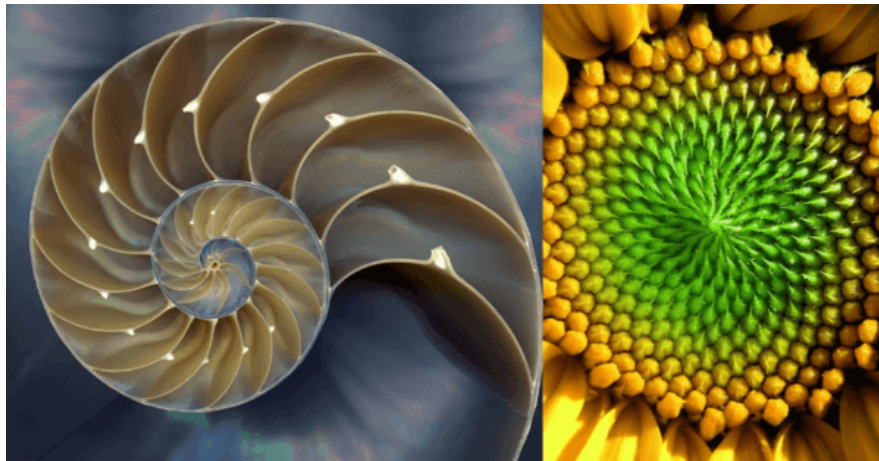
Os padrões e/ou sequências estão presentes no mundo a nossa volta. Ao observar a sequência de Fibonacci, percebemos que esta é uma das mais belas sequências conhecidas, emerge em diversas áreas. Como, por exemplo, na arquitetura, arte, natureza, biologia, música, fotografia, economia e, evidentemente, matemática. As Figuras 1.1, 1.2 e 1.3 ilustram esta relação entre as áreas de conhecimento citadas e a sequência de Fibonacci. Por meio das Figuras podemos observar a existência da espiral de Fibonacci a qual é obtida traçando um arco no retângulo de ouro (retângulo obtido a partir dos números presentes na sequência de Fibonacci).

Figura 1.1 – Espiral: (a) Partenon; (b) Monalisa



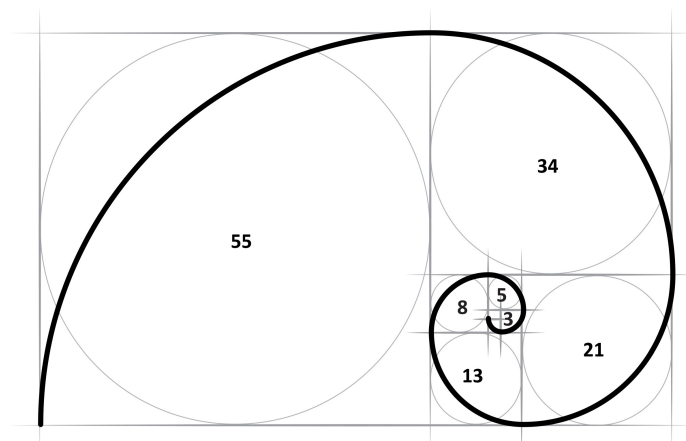
Fonte: (a) Delaqua (2022); (b) Cortes (2022).

Figura 1.2 – Fibonacci: Caracol e Girassol



Fonte: Cortes (2022).

Figura 1.3 – Espiral logarítmica



Fonte: Lessa (2022).

A sequência de Fibonacci foi definida por Leonardo Fibonacci, também chamado Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa, matemático que teve maior destaque na Idade Média européia.

Segundo Koshy (2017), pouco se sabe sobre sua vida, exceto pelos poucos fatos que ele fornece em seus escritos matemáticos. Fibonacci nasceu por volta do ano de 1170 na família Bonacci de Pisa, um próspero centro mercantil e morreu no ano de 1240. Dentre suas principais contribuições, temos *Liber Abaci* (1202), onde o mesmo realiza um estudo sobre a aritmética e álgebra elementar, cuja segunda edição (em 1208) foi dedicada a Michael Scott, o mais famoso filósofo e astrólogo da corte de Frederico II. Além de *Liber Abaci*, Fibonacci publicou outros três livros: *Practica Geometriae*, publicada em 1220, dedicada ao Mestre Domonique, onde Fibonacci emprega álgebra para resolver problemas geométricos e geometria para resolver problemas algébricos, uma abordagem radical para a Europa de sua época; já em *Flos* e o *Liber Quadratorum* (O Livro dos Números Quadrados), obras publicadas em 1225, apresentam-se estudos direcionados a Teoria de números.

Em *Liber Abaci*, Fibonacci traz um problema sobre coelhos:

Problema Suponha que haja dois coelhos recém-nascidos, um macho e outro fêmea. Encontre o número de coelhos produzidos em um ano se: cada par leva um mês para amadurecer, cada par produz um par misto a cada mês, a partir do segundo mês; e, coelhos são imortais.

Fibonacci observou que, com o passar dos meses, os coelhos se reproduziam da seguinte maneira:

- 1) No primeiro mês temos um casal de coelhos.
- 2) No segundo mês continuamos com um casal de coelhos, pois os mesmos ainda não desenvolveram o suficiente para reproduzirem.
- 3) No terceiro mês os coelhos se reproduzem dando origem a dois casais de coelhos.
- 4) No quarto mês o primeiro casal se reproduz novamente e, o segundo casal ainda não está em idade fértil. Dessa forma, tem-se 3 casais de coelhos.
- 5) No quinto mês o primeiro casal se reproduz, o segundo casal se reproduz e o terceiro casal ainda não se reproduz. Totalizando 5 casais.

A referida situação problema envolvendo os coelhos deu origem à sequência de Fibonacci. No entanto, um fato curioso é que a mesma não era conhecida por este nome, recebendo esta denominação somente no ano de 1876, quando foi estudada pelo matemático francês *François Édouard Anatole Lucas* (1842-1891).

Tendo em vista a sua definição, procuramos analisar alguns trabalhos em nível nacional e estadual nos quais Fibonacci emerge como tema. Dentre os trabalhos analisados destacamos os

estudos efetuados por Pacheco (2021), Santos (2021), Barreto (2019), Silva (2017a), da Silva (2017b), Macena (2018) e Sentone (2017).

Pacheco (2021) e Santos (2021) apresentam uma proposta de atividades direcionadas ao ensino envolvendo a sequência de Fibonacci correlacionando com as habilidades a serem desenvolvidas na BNCC. No entanto, cada um dos autores direciona o seu trabalho para um enfoque diferente: Pacheco (2021) para as propriedades e aplicações e Santos (2021) trabalha com o número de ouro e sua interpretação geométrica.

Barreto (2019) e da Silva (2017b) também trabalham com propostas de atividades. Barreto (2019) destaca a resolução de problemas recaindo no estudo das sequências enquanto da Silva (2017b) evidencia a sequência de Fibonacci e sua importância para o ensino (mais especificamente no Ensino Médio) incluindo a sua relevância histórica.

Atividades incluindo uma proposta de sequência didática também se fizeram presentes. Neste aspecto, Macena (2018) propõe uma abordagem com relação à sete identidades envolvendo os números de Fibonacci apresentando sua demonstração. Este trabalho direciona-se a alunos de turmas olímpicas de nível 2.

Fibonacci também aparece em Sentone (2017), onde a autora desenvolve um trabalho incluindo os Paradoxos Geométricos em sala de aula. Nesta pesquisa, observamos a presença do Paradoxo de Cassini que é um dos objetos de nosso estudo, porém em nosso trabalho optamos por criar um objeto manipulável no *software* Geogebra.

Silva (2017a), apresenta um trabalho de cunho teórico sobre as identidades de Fibonacci e Lucas, expandindo este conceito aos números inteiros.

Nossa intenção neste trabalho encaminha-se no sentido de possibilitar outra perspectiva com relação às aplicabilidades da sequência de Fibonacci. Associando a mesma, com a resolução de problemas, jogos e estabelecendo um paralelo entre as identidades envolvendo a sequência de Fibonacci e, sua interpretação geométrica e algébrica.

O objetivo geral deste trabalho é compreender a sequência de Fibonacci utilizando as suas identidades e ocorrências. E, seus objetivos específicos são

- 1) Caracterizar a sequência de Fibonacci, bem como algumas de suas identidades, os números de Lucas e Gibonacci.
- 2) Interpretar geometricamente as identidades envolvendo o estudo da sequência de Fibonacci.
- 3) Elaborar atividades relacionadas à sequência de Fibonacci utilizando a resolução de problemas e jogos matemáticos.
- 4) Empregar o uso do *software* Geogebra em atividades com as identidades da sequência de Fibonacci e do Paradoxo de Cassini.

A metodologia empregada é a quantitativa, bibliográfica e descritiva. Em um primeiro momento efetuamos uma pesquisa bibliográfica e nos dedicamos a analisar a definição da sequência de Fibonacci, suas propriedades e ocorrências. Prosseguindo com a elaboração de atividades que demonstram a aplicabilidade dos números de Fibonacci por meio da resolução de problemas, jogos matemáticos e a utilização do *software* GeoGebra em atividades para alunos da Educação Básica.

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, encontra-se a introdução onde situamos o leitor com relação ao tema proposto, bem como sua justificativa, revisão bibliográfica, objetivos (geral e específicos), procedimentos metodológicos a serem utilizados e estrutura do trabalho.

No segundo capítulo, realizamos a fundamentação teórica onde apresentamos a definição da sequência de Fibonacci, algumas identidades que relacionam a sequência de Fibonacci com os números de Lucas. E, ainda, apresentamos a definição da sequência de Fibonacci incluindo as demonstrações referentes a cada uma das relações citadas.

No terceiro capítulo são apresentadas ocorrências envolvendo os números de Fibonacci e as identidades citadas no segundo capítulo. Neste capítulo são apresentadas as demonstrações das identidades, para cada identidade é indicado um link contendo a sua representação geométrica. Essa representação geométrica foi elaborada no Geogebra, o que facilita o entendimento da demonstração e da própria identidade. Além disso, foram apresentadas relações entre a sequência de Fibonacci e a Geometria Analítica.

No quarto capítulo propomos atividades utilizando as sequências de Fibonacci, Lucas e Fibonacci. As atividades são voltadas para alunos do sétimo ano do ensino fundamental e do segundo ano do ensino médio.

No quinto capítulo elucidamos as conclusões a cerca do trabalho desenvolvido onde salientamos a importância das metodologias utilizando a tecnologia de informação (por meio da utilização do *software* Geogebra), jogos matemáticos e resolução de problemas para o ensino de matemática e, finalizamos com os anexos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos a definição da sequência de Fibonacci, da sequência de Lucas e Gibonacci, bem como identidades que relacionam estas sequências.

A sequência de Fibonacci é frequentemente utilizada e conhecida na matemática. A sua definição é dada por:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \quad (2.1)$$

onde $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Conforme Morgado e Carvalho (2015), a equação (2.1) representa a definição da sequência de Fibonacci e também é uma recorrência linear de segunda ordem a qual pode ser reescrita como:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0. \quad (2.2)$$

No decorrer, resolvemos a recorrência descrita pela equação (2.2). Esta recorrência tem como equação característica: $r^2 - r - 1 = 0$, a qual possui como raízes $r' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

E, a solução geral é dada por:

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Tomando $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ temos que, a solução particular desta equação de recorrência é dada pela solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) C_2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, segue que: $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Portanto, a solução da recorrência dada pela equação (2.2) é

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}. \quad (2.3)$$

De acordo com Burton (2010) a igualdade (2.3) é conhecida como a Fórmula de Binet.

No decorrer, apresentamos outra forma de realizar a demonstração desta utilizando a Indução em n .

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0}{\sqrt{5}} &= \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} \\ &= 0 = F_0. \end{aligned}$$

Para $n = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} &= \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\cdot(\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= 1 = F_1. \end{aligned}$$

Segue que a igualdade é verdadeira para $n = 0$ e $n = 1$.

Suponhamos que a igualdade (2.3) seja válida para $k \leq n$, onde n é um número inteiro arbitrário e maior do que ou igual a 1. Ou seja,

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}.$$

Mostremos que a igualdade (2.3) é válida para $n+1$. Empregando, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1+\alpha = \alpha^2$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $1+\beta = \beta^2$ obtemos que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &\stackrel{h.i.}{=} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^n + \alpha^{n-1} - \beta^n - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha + 1) - \beta^{n-1}(\beta + 1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}\alpha^2 - \beta^{n-1}\beta^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}. \quad (2.4)$$

Da igualdade (2.4), temos que a propriedade é válida para $n + 1$.

Portanto, pelo princípio de Indução Finita a igualdade é válida para $n \in \mathbb{N}$.

Considerando $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, a fórmula de Binet pode, ainda, ser reescrita da seguinte maneira:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Com base nessas informações, vamos estudar uma proposição relevante à cerca dos números de Fibonacci.

Proposição 2.1. *Para qualquer solução x da equação $r^2 - r - 1 = 0$, temos que $x^n = xF_n + F_{n-1}$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Vamos apresentar a demonstração por Indução em n .

i) Para $n = 1$, temos que,

$$xF_1 + F_0 = x \cdot 1 + 0 = x.$$

Logo, a igualdade é verdadeira para $n = 1$. Dado que $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

ii) Suponhamos que a igualdade $x^n = xF_n + F_{n-1}$ é válida para $n = k$. Mostremos que $x^{k+1} = xF_{k+1} + F_k$.

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k x \stackrel{h.i.}{=} (xF_k + F_{k-1})x \\ &= x^2 F_k + xF_{k-1} \\ &= (x+1)F_k + xF_{k-1} \\ &= xF_k + F_k + xF_{k-1} \\ &= x(F_k + F_{k-1}) + F_k \\ &= xF_{k+1} + F_k. \end{aligned}$$

Pelo princípio de Indução, segue que $x^n = xF_n + F_{n-1}$ é válida para qualquer número natural n .

□

Como α e β satisfazem a equação $r^2 - r - 1 = 0$, segue pela Proposição (2.1) que $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ e $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$, para qualquer número natural n .

Vale salientar, embora pouco difundido, que o conceito envolvendo a sequência dos números de Fibonacci pode ser estendido também para os números inteiros negativos. Usando que $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$, temos que $F_{-1} = 1$, $F_{-2} = -1$, $F_{-3} = 2$, $F_{-4} = -3$, $F_{-5} = 5$ e, assim por diante. Em outras palavras, $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$, onde $n \geq 1$.

2.1 ALGUMAS IDENTIDADES COM OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Nesta seção, trataremos algumas identidades envolvendo os números de Fibonacci, as quais serão utilizadas no decorrer do trabalho e podem ser encontradas em Burton (2010) e Koshy (2017).

A primeira identidade que demonstraremos fornece a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Lema 2.2. *Para todo número natural $n \geq 1$, temos que $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$.*

Demonstração. A demonstração desta identidade segue por Indução em n .

i) Para $n = 1$, temos que: $F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1 = F_1$. Logo, a identidade é válida para $n = 1$.

ii) Suponhamos que a identidade seja válida para $n = k$, ou seja,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{k-1} + F_k = F_{k+2} - 1. \quad (2.5)$$

Mostremos que a identidade é válida para $n = k + 1$. Adicionando o próximo termo da sequência de Fibonacci à equação (2.5), temos que:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k + F_{k+1} = F_{k+2} + F_{k+1} - 1. \quad (2.6)$$

Ao analisar o lado direito da igualdade na equação (2.6) podemos substituir $F_{k+2} + F_{k+1}$ por F_{k+3} . E, a equação pode ser reescrita como:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k + F_{k+1} = F_{k+3} - 1.$$

Sendo assim, a identidade é válida para $n = k + 1$. Pelo princípio de Indução a identidade é válida para todo n natural, tal que $n \geq 1$.

□

Koshy (2017), traz ainda outra identidade, também conhecida como identidade de Cassini. A mesma será empregada no próximo capítulo para o desenvolvimento deste paradoxo.

Proposição 2.3 (Identidade de Cassini). *Para $n \geq 1$, temos que $F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n-1}$.*

A identidade descrita pela Proposição (2.3), pode ser reescrita como:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Demonstração. Faremos a demonstração desta identidade por Indução em n .

i) Para $n = 1$ é válida, pois

$$F_{1+1}F_{1-1} - F_1^2 = F_2F_0 - F_1^2 = -1 = (-1)^1.$$

Logo, a identidade é verdadeira para $n = 1$.

ii) Suponhamos que a identidade seja válida para $n = k$, isto é, $F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$. Mostremos a validade da identidade para $n = k + 1$, ou seja, $F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$.

De fato, temos que:

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 &= F_k(F_{k+1} + F_k) - (F_k + F_{k-1})^2 \\ &= F_kF_{k+1} + F_k^2 - F_k^2 - 2F_kF_{k-1} - F_{k-1}^2 \\ &= F_kF_{k+1} - F_kF_{k-1} - F_kF_{k-1} - F_{k-1}^2 \\ &= F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) - F_{k-1}(F_k + F_{k-1}) \\ &= F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} \\ &= (-1)(F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2). \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução, segue que:

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 &= (-1)(-1)^k \\ &= (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, a identidade é válida para $n = k + 1$. Portanto, pelo princípio da Indução a identidade de Cassini é válida para todo $n \geq 1$.

□

Finalizaremos esta seção com outras duas identidades, as quais serão usadas no próximo capítulo para o desenvolvimento do estudo relacionado ao paradoxo.

Proposição 2.4. Para todo par de números naturais n e m , temos que

$$F_{n+m} = F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m.$$

Demonstração. Para efetuarmos esta demonstração fixaremos o n e iremos demonstrar por Indução Forte sobre m .

i) Para $m = 1$ a igualdade é verdadeira, pois

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = F_n F_2 + F_{n-1} F_1.$$

Para $m = 2$ a igualdade é válida, pois

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_n F_3 + F_{n-1} F_2.$$

ii) Suponhamos agora que o resultado seja válido para todos os inteiros k menores do que ou iguais a um certo valor m . Isto é,

$$F_{n+k} = F_n F_{k+1} + F_{k-1} F_m.$$

Considerando a definição da sequência de Fibonacci e a hipótese indutiva,

$$\begin{aligned} F_{n+m+1} &= F_{n+m} + F_{n+m-1} \\ &\stackrel{h.i.}{=} F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m + F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1} \\ &= F_n (F_{m+1} + F_m) + F_{n-1} (F_m + F_{m-1}) \\ &= F_n F_{m+2} + F_{n-1} F_{m+1}. \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo Princípio de Indução Forte a Proposição (2.4) é válida para todo par de números naturais n e m .

□

Proposição 2.5. Para todo número natural $n \geq 1$, $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

Demonstração. Consideraremos a Proposição (2.4), tomando $n = m + 1$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} F_{2m+1} &= F_{m+1} F_{m+1} + F_m F_m \\ &= F_{m+1}^2 + F_m^2. \end{aligned}$$

Logo, $F_{2m+1} = F_{m+1}^2 + F_m^2$.

□

2.2 SEQUÊNCIA DE LUCAS

Podemos utilizar a recorrência de Fibonacci e diferentes condições iniciais para determinar outras sequências. Os números de Lucas são definidos desta forma, tomando $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$ e seguindo a recorrência: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Por consequência, os números pertencentes a sequência de Lucas são dados por 1, 3, 4, 7, 11, 18 e assim por diante.

No decorrer, apresentamos algumas identidades que evidenciam relações existentes entre a sequência de Fibonacci e os números de Lucas.

Proposição 2.6. Sendo $n \geq 1$, temos que $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

Demonstração. A seguir, apresentamos a demonstração por Indução em n .

i) Para $n = 1$, segue que:

$$F_{1+1} + F_{1-1} = F_2 + F_0 = 1 + 0 = 1 = L_1.$$

Para $n = 2$, temos:

$$F_{2+1} + F_{2-1} = F_3 + F_1 = 2 + 1 = 3 = L_2.$$

Observa-se, que a identidade é válida para $n = 1$ e $n = 2$.

ii) Suponhamos que a identidade seja verdadeira para $n = k$ e $n = k - 1$. Dessa maneira, $L_k = F_{k+1} + F_{k-1}$ e $L_{k-1} = F_k + F_{k-2}$.

Mostremos que a identidade é válida para $n = k + 1$, isto é, $L_{k+1} = F_{(k+1)+1} + F_{(k+1)-1}$.

Aplicando a hipótese de indução em L_k e L_{k-1} . Temos que:

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} \\ &\stackrel{h.i.}{=} F_{k+1} + F_{k-1} + F_k + F_{k-2} \\ &= F_{k+1} + F_k + F_{k-1} + F_{k-2} \\ &= F_{k+2} + F_k \\ &= F_{(k+1)+1} + F_{(k+1)-1}. \end{aligned}$$

Logo, a identidade é válida para $n = k + 1$. Portanto, pelo princípio de Indução a identidade é válida para todo $n \geq 1$. \square

Como na sequência de Fibonacci, observamos a existência de uma fórmula que é similar à fórmula de Binet e, esta apresenta um método prático para determinar os valores presentes na sequência de Lucas. Este método é descrito na Proposição 2.7.

Proposição 2.7. Sendo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ temos que $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

Demonstração. Pela Proposição 2.1, segue que

$$\begin{aligned} \alpha^n + \beta^n &= \alpha F_n + F_{n-1} + \beta F_n + F_{n-1} \\ &= (\alpha + \beta)F_n + F_{n-1} + F_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= F_n + F_{n-1} + F_{n-1} \\ &= F_{n+1} + F_{n-1}.\end{aligned}$$

E, pela Proposição 2.6 isto implica que $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

□

Dando prosseguimento, apresentamos a Proposição 2.8 a qual demonstra mais uma relação entre a sequência de Fibonacci e os números de Lucas. A referida proposição será utilizada no decorrer do trabalho.

Proposição 2.8. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $L_n = 5F_n^2 + 4(-1)^n = L_{2n} + 2(-1)^n$.

Demonstração. Consideraremos $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha\beta = -1$.

i) Para $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$. Pela Proposição 2.7 e considerando a fórmula de Binet, notamos que:

$$\begin{aligned}L_n^2 - 5F_n^2 &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - (\alpha^n - \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} - \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n} \\ &= 4\alpha^n\beta^n \\ &= 4(\alpha\beta)^n \\ &= 4(-1)^n.\end{aligned}$$

De onde,

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n.$$

ii) Em outro aspecto, considerando a Proposição 2.7 podemos reescrever L_n^2 , como:

$$\begin{aligned}L_n^2 &= (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n \\ &= L_{2n} + 2(-1)^n.\end{aligned}$$

E, assim mostramos que $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n = L_{2n} + 2(-1)^n$.

□

Corolário 2.9. *Se* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n$.

Demonstração. Da Proposição 2.8, segue que

$$L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n, \quad (2.7)$$

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n. \quad (2.8)$$

Das equações (2.7) e (2.8), podemos inferir que:

$$L_{2n} + 2(-1)^n = 5F_n^2 + 4(-1)^n. \quad (2.9)$$

Isolando L_{2n} na equação (2.9), obtemos:

$$L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n.$$

□

Prosseguindo, apresentamos o Teorema 2.10, o qual é uma generalização da identidade de Cassini e foi demonstrada por Eugène Charles Catalan (1814-1894).

Teorema 2.10. *Se* k e n *são inteiros positivos, tais que* $n \geq k$, *então*

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2.$$

Demonstração. Inicialmente, para efetuarmos a demonstração vamos considerar a fórmula de Binet (tomando $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$), $\alpha\beta = -1$, a Proposição 2.7, onde podemos verificar que $L_{2k} = \alpha^{2k} + \beta^{2k}$ e o Corolário 2.9.

Analisando o lado esquerdo da igualdade, temos que:

$$\begin{aligned}
5 \cdot (F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2) &= (\alpha^{n+k} - \beta^{n+k})(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) - (\alpha^n - \beta^n)^2 \\
&= \alpha^{n+k+n-k} - \alpha^{n+k}\beta^{n-k} - \alpha^{n-k}\beta^{n+k} + \beta^{n+k+n-k} - \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n} \\
&= \alpha^{2n} - \alpha^{n+k}\beta^{n-k} - \alpha^{n-k}\beta^{n+k} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n} \\
&= 2\alpha^n\beta^n - \alpha^{n+k}\beta^{n-k} - \alpha^{n-k}\beta^{n+k} \\
&= 2(\alpha\beta)^n + (-1)(\alpha\beta)^n(\alpha^k\beta^{-k} + \alpha^{-k}\beta^k) \\
&= 2(-1)^n + (-1)(-1)^n(\alpha^k\beta^{-k} + \alpha^{-k}\beta^k) \\
&= 2(-1)^n + (-1)^{n+1}(\alpha\beta)^{2k}(\alpha^k\beta^{-k} + \alpha^{-k}\beta^k) \\
&= 2(-1)^n + (-1)^{n+1}(\alpha\beta)^k(\alpha\beta)^k(\alpha^k\beta^{-k} + \alpha^{-k}\beta^k) \\
&= 2(-1)^n + (-1)^{n+k+1}(\alpha^{2k} + \beta^{2k}) \\
&= 2(-1)^n + (-1)^{n+k+1}(L_{2k}) \\
&= 2(-1)^n + (-1)^{n+k+1}(5F_k^2 + 2(-1)^k) \\
&= 2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1} + (-1)^{n+k+1}(5F_k^2) \\
&= (-1)^{n+k+1}5F_k^2.
\end{aligned}$$

Desse modo demonstramos que dado k um número inteiro positivo e $n \geq k$, então $F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2$.

□

2.3 SEQUÊNCIA DE GIBONACCI

Conforme ocorre na sequência de Lucas, a sequência de Fibonacci suscita à outras sequências. Dentre elas, temos a sequência de Gibonacci, a qual se apresenta como uma generalização dos números presentes na sequência de Fibonacci. Abaixo, apresentamos a definição da sequência de Gibonacci.

Fixados $a, b \in \mathbb{N}$ definimos a sequência de Gibonacci pela seguinte recorrência

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2},$$

com $n \geq 3$, tomando $G_1 = a$ e $G_2 = b$.

Consequentemente, os números pertencentes a sequência de Gibonacci são dados por $a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, \dots$ onde os coeficientes de a e b são os números da sequência de Fibonacci. Podemos notar que se $a = b = 1$ a sequência de Gibonacci se iguala a sequência de Fibonacci e quando $a = 1$ e $b = 3$ temos que a sequência de Gibonacci coincide com a sequência de Lucas. O Teorema 2.11 caracteriza estes coeficientes.

Teorema 2.11. *Seja G_n um termo da sequência de Gibonacci. Então, $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$, onde $n \geq 1$.*

Demonstração. A seguir, apresentamos a demonstração por meio de Indução Forte.

i) Como $F_1 = 1$, $F_0 = 0$ e $F_{-1} = 1$, para $n = 1$ temos que

$$aF_{-1} + bF_0 = a = G_1.$$

E, para $n = 2$, segue que

$$aF_0 + bF_1 = b = G_2.$$

E, o resultado é válido para $n = 1$ e $n = 2$.

ii) Seja k um número natural, vamos supor que o resultado seja válido para todos os inteiros n , tais que $n \leq k$. Sendo assim, $G_k = aF_{k-2} + bF_{k-1}$ e $G_{k-1} = aF_{k-3} + bF_{k-2}$.

Mostremos a validade do resultado para $k + 1$, ou seja, $G_{k+1} = aF_{k-1} + bF_k$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &= aF_{k-2} + bF_{k-1} + aF_{k-3} + bF_{k-2} \\ &= a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2}) \\ &= aF_{k-1} + bF_k. \end{aligned}$$

E, o resultado é válido para $k + 1$.

Portanto, pelo princípio de Indução Forte segue que o resultado é verdadeiro para todo $n \geq 1$.

□

Apresentamos, a seguir, um lema que destaca outra relação advinda dos números de Fibonacci e Lucas. Tal lema será empregado no decorrer de nosso trabalho e também pode ser encontrado em Long (1985).

Lema 2.12. *Para inteiros positivos r e s , temos que*

$$F_{r+2s} - F_r = \begin{cases} F_s L_{r+s}, & \text{se } s \text{ é par;} \\ L_s F_{r+s}, & \text{se } s \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Consideraremos $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$, $L_n = \alpha^n + \beta^n$ e, $\alpha\beta = -1$. Verificamos a existência de dois casos:

i) Se s é par, então segue que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{5}(F_{r+2s} - F_r) &= (\alpha^{r+2s} - \beta^{r+2s}) - (\alpha^r - \beta^r) \\
 &= (\alpha^{r+2s} - \beta^{r+2s}) - (\alpha\beta)^s(\alpha^r - \beta^r) \\
 &= \alpha^{r+2s} - \beta^{r+2s} - \alpha^{r+s}\beta^s + \alpha^s\beta^{s+r} \\
 &= \alpha^{r+s}(\alpha^s - \beta^s) + \beta^{r+s}(\alpha^s - \beta^s) \\
 &= (\alpha^s - \beta^s)(\alpha^{r+s} + \beta^{r+s}).
 \end{aligned}$$

O que nos mostra que:

$$\sqrt{5}(F_{r+2s} - F_r) = (\alpha^s - \beta^s)(\alpha^{r+s} + \beta^{r+s}). \quad (2.10)$$

Novamente, dividindo em ambos os lados da igualdade na equação (2.10) por $\sqrt{5}$:

$$F_{r+2s} - F_r = \left(\frac{\alpha^s - \beta^s}{\sqrt{5}} \right) (\alpha^{r+s} + \beta^{r+s}) = F_s L_{r+s}.$$

Por consequência, se s é par podemos concluir que vale a igualdade: $F_{r+2s} - F_r = F_s L_{r+s}$.

ii) Se s é ímpar, então:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{5}(F_{r+2s} - F_r) &= (\alpha^{r+2s} - \beta^{r+2s}) - (\alpha^r - \beta^r) \\
 &= (\alpha^{r+2s} - \beta^{r+2s}) + (\alpha\beta)^s(\alpha^r - \beta^r) \\
 &= \alpha^{r+2s} - \beta^{r+2s} + \alpha^{r+s}\beta^s - \alpha^s\beta^{r+s} \\
 &= \alpha^{r+s}(\alpha^s + \beta^s) - \beta^{r+s}(\alpha^s + \beta^s) \\
 &= (\alpha^s + \beta^s)(\alpha^{r+s} - \beta^{r+s}).
 \end{aligned}$$

De onde, segue que:

$$\sqrt{5}(F_{r+2s} - F_r) = (\alpha^s + \beta^s)(\alpha^{r+s} - \beta^{r+s}). \quad (2.11)$$

E, dividindo em ambos os lados da igualdade (2.11) por $\sqrt{5}$, obtemos

$$F_{r+2s} - F_r = (\alpha^s + \beta^s) \cdot \left(\frac{\alpha^{r+s} - \beta^{r+s}}{\sqrt{5}} \right) = L_s F_{r+s}.$$

Assim, $F_{r+2s} - F_r = L_s F_{r+s}$ se s é ímpar.

□

Conforme exploramos uma fórmula análoga à fórmula de Binet, a qual enuncia um método prático para determinar os valores presentes na sequência de Lucas em paralelo, podemos encontrar um método prático para designar os números demonstrados na sequência de Gibonacci. Tal método é ilustrado pela Proposição 2.13.

Proposição 2.13. *Sejam $c = a + (a - b)\beta$ e $d = a + (a - b)\alpha$. Então, $G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}$.*

Demonstração. Para realizarmos a demonstração vamos levar em consideração o Teorema 2.11, a fórmula de Binet e as seguintes relações: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{\alpha^2} = \beta^2$, $\frac{1}{\alpha} = -\beta$, $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Isto posto,

$$\begin{aligned}
 G_n &= aF_{n-2} + bF_{n-1} \\
 &= a \left(\frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} \right) + b \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} [a(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + b(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})] \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^n \left(\frac{a}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha} \right) - \beta^n \left(\frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n(a\beta^2 - b\beta) - \beta^n(a\alpha^2 - b\alpha)] \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n(a(\beta + 1) - b\beta) - \beta^n(a(\alpha + 1) - b\alpha)] \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n(a\beta + a - b\beta) - \beta^n(a\alpha + a - b\alpha)] \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n(a + (a - b)\beta) - \beta^n(a + (a - b)\alpha)] \\
 &= \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}.
 \end{aligned}$$

□

Note que, $cd = a^2 + ab - b^2$.

No decorrer, apresentamos um teorema que correlaciona as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci. Este teorema foi igualmente exposto em Long (1985).

Teorema 2.14. *Para $n \geq 1$ temos que $\sum_{i=1}^{4n-2} G_i = L_{2n-1}G_{2n+1}$.*

Demonstração. Primeiramente, aplicando o Teorema 2.11, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{4n-2} G_i &= \sum_{i=1}^{4n-2} (aF_{i-2} + bF_{i-1}) \\
 &= a \sum_{i=1}^{4n-2} F_{i-2} + b \sum_{i=1}^{4n-2} F_{i-1} \\
 &= aF_{-1} + aF_0 + a \sum_{i=3}^{4n-2} F_{i-2} + bF_0 + b \sum_{i=2}^{4n-2} F_{i-1}.
 \end{aligned}$$

Substituindo na última equação $j = i - 2$ e $r = i - 1$, segue que:

$$\sum_{i=1}^{4n-2} G_i = a + a \sum_{j=1}^{4n-4} F_j + b \sum_{r=1}^{4n-3} F_r.$$

Usando a identidade correspondente ao Lema 2.2, fica que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{4n-2} G_i &= a + a(F_{4n-2} - 1) + b(F_{4n-1} - 1) \\
 &= a + aF_{4n-2} - a + b(F_{4n-1} - F_{-1}) \\
 &= aF_{4n-2} + b(F_{4n-1} - F_{-1}) \\
 &= a(F_{2(2n-1)} - F_0) + b(F_{2(2n)-1} - F_{-1}).
 \end{aligned}$$

O que nos traz que:

$$\sum_{i=1}^{4n-2} G_i = a(F_{2(2n-1)} - F_0) + b(F_{2(2n)-1} - F_{-1}). \quad (2.12)$$

Agora, empregando o resultado do Lema 2.12 à equação (2.12):

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{4n-2} G_i &= aL_{2n-1}F_{2n-1} + bF_{2n}L_{2n-1} \\
 &= L_{2n-1}(aF_{2n-1} + bF_{2n}).
 \end{aligned}$$

O que nos confere a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{4n-2} G_i = L_{2n-1}(aF_{2n-1} + bF_{2n}). \quad (2.13)$$

Finalmente, aplicando o resultado do Teorema 2.11 à equação (2.13) segue que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{4n-2} G_i &= L_{2n-1}(aF_{2n-1} + bF_{2n}) \\
 &= L_{2n-1}G_{2n+1}.
 \end{aligned}$$

□

A Proposição 2.4 também é válida para os números de Gibonacci como mostra o seguinte resultado.

Proposição 2.15. *Seja $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $G_{m+n} = G_m F_{n+1} + G_{m-1} F_n$.*

Demonstração. Na demonstração, iremos empregar o resultado da Proposição 2.13, a fórmula de Binet e as seguintes relações $\sqrt{5} = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, $-\sqrt{5} = \beta + \frac{1}{\beta}$ e $\alpha\beta + 1 = 0$. Deste modo,

prossegue

$$\begin{aligned}
G_m F_{n+1} + G_{m-1} F_n &= \left(\frac{c\alpha^m - d\beta^m}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{c\alpha^{m-1} - d\beta^{m-1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{c\alpha^{m+n+1} - c\alpha^m \beta^{n+1} - d\beta^m \alpha^{n+1} + d\beta^{m+n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad + \frac{c\alpha^{m+n-1} - c\alpha^{m-1} \beta^n - d\beta^{m-1} \alpha^n + d\beta^{m+n-1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{c\alpha^{m+n}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) - c\alpha^{m-1} \beta^n(\alpha\beta + 1)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad - \frac{d\beta^{m-1} \alpha^n(\beta\alpha + 1) + d\beta^{m+n}(\beta + \frac{1}{\beta})}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{c\alpha^{m+n} \sqrt{5} + d\beta^{m+n}(-\sqrt{5})}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{c\alpha^{m+n} - d\beta^{m+n}}{\alpha - \beta} \\
&= G_{m+n}.
\end{aligned}$$

□

Encerramos esta seção mostrando uma identidade satisfeita pelos números de Gibonacci, a qual será usada posteriormente.

Proposição 2.16. *Se* $m, n \in \mathbb{N}$, $cd = a^2 + ab - b^2$ *segue o seguinte resultado*

$$G_n G_{m+k} - G_{n+k} G_m = (-1)^{n+1} F_k F_{m-n} cd.$$

Demonstração. Para efetuarmos a demonstração utilizaremos o resultado da Proposição 2.13, a fórmula de Binet e a relação $\alpha\beta = -1$. Por conseguinte, segue que

$$\begin{aligned}
G_n G_{m+k} - G_{n+k} G_m &= \left(\frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{c\alpha^{m+k} - d\beta^{m+k}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{c\alpha^{n+k} - d\beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{c\alpha^m - d\beta^m}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{c^2 \alpha^{n+m+k} - cd\alpha^n \beta^{m+k} - cd\beta^n \alpha^{m+k} + d^2 \beta^{n+m+k}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad - \left(\frac{c^2 \alpha^{n+m+k} - cd\alpha^{n+k} \beta^m - cd\beta^{n+k} \alpha^m + d^2 \beta^{n+m+k}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\
&= \frac{-cd\alpha^n \beta^{m+k} - cd\beta^n \alpha^{m+k} + cd\alpha^{n+k} \beta^m + cd\beta^{n+k} \alpha^m}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{-cd\alpha^n \beta^n (\beta^{m-n+k} + \alpha^{m-n+k}) + cd\alpha^n \beta^n (\alpha^k \beta^{m-n} + \beta^k \alpha^{m-n})}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= (-1)^{n+1} cd \left[\frac{\beta^{m-n+k} + \alpha^{m-n+k} - \alpha^k \beta^{m-n} - \beta^k \alpha^{m-n}}{(\alpha - \beta)^2} \right] \\
&= (-1)^{n+1} cd \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= (-1)^{n+1} F_k F_{m-n} cd.
\end{aligned}$$

□

3 OCORRÊNCIAS

No capítulo anterior, procuramos dar enfoque às identidades relacionadas aos números de Fibonacci, Lucas e Gibonacci. Neste capítulo, agregamos algumas ocorrências em relação a essas identidades conforme evidenciado por Koshy (2017). Tais constatações foram divididas em seções: ilustrações geométricas, probabilidade, sequência de Gibonacci aplicada à Geometria Analítica, sequência de Fibonacci e o algoritmo de Euclides e, o estudo do ângulo no Paradoxo de Cassini.

3.1 ILUSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesta seção, buscamos trazer uma abordagem geométrica de algumas identidades envolvendo as sequências de Fibonacci e Lucas. Como diferencial, em nosso trabalho, as representações geométricas das identidades foram elaboradas no *software* Geogebra. Cada qual possuindo um controle deslizante e link específico, onde o leitor pode identificar as alterações, semelhanças e diferenças, de acordo com a variação do valor de n . Observando que, no controle deslizante o valor de n varia entre 3 e 12. Ainda, fornecemos demonstrações algébricas dessas identidades.

Abaixo, listamos as identidades a serem analisadas geometricamente:

$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \quad (3.1)$$

$$F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2 \quad (3.2)$$

$$F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2 \quad (3.3)$$

$$L_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2 \quad (3.4)$$

$$L_n^2 = 8F_nF_{n-1} + F_{n-3}^2 \quad (3.5)$$

$$L_n^2 = 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 \quad (3.6)$$

Em cada uma das identidades, primeiro apresentamos a demonstração algébrica e logo a descrição geométrica.

Identidade 3.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$.

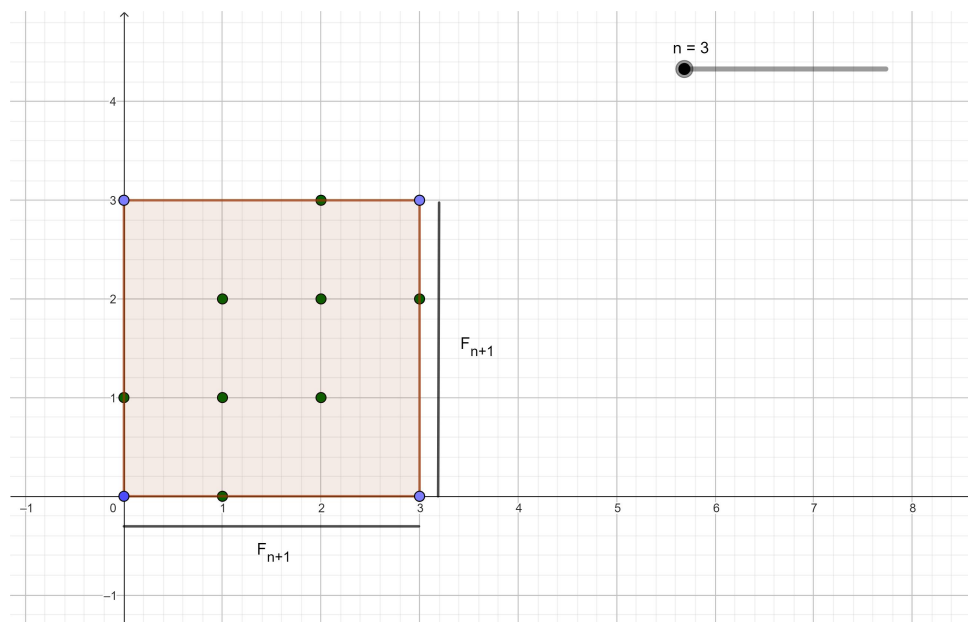
Demonstração. Usando a recorrência dos números de Fibonacci segue que

$$\begin{aligned} 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 &= 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - (F_n - F_{n-1})^2 \\ &= F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 \\ &= (F_n + F_{n-1})^2 \\ &= F_{n+1}^2. \end{aligned}$$

□

Para descrevermos a identidade $F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$, inicialmente, vamos representar um quadrado de lado F_{n+1} , conforme ilustra a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Quadrado de lado F_{n+1}



Fonte: Autora.

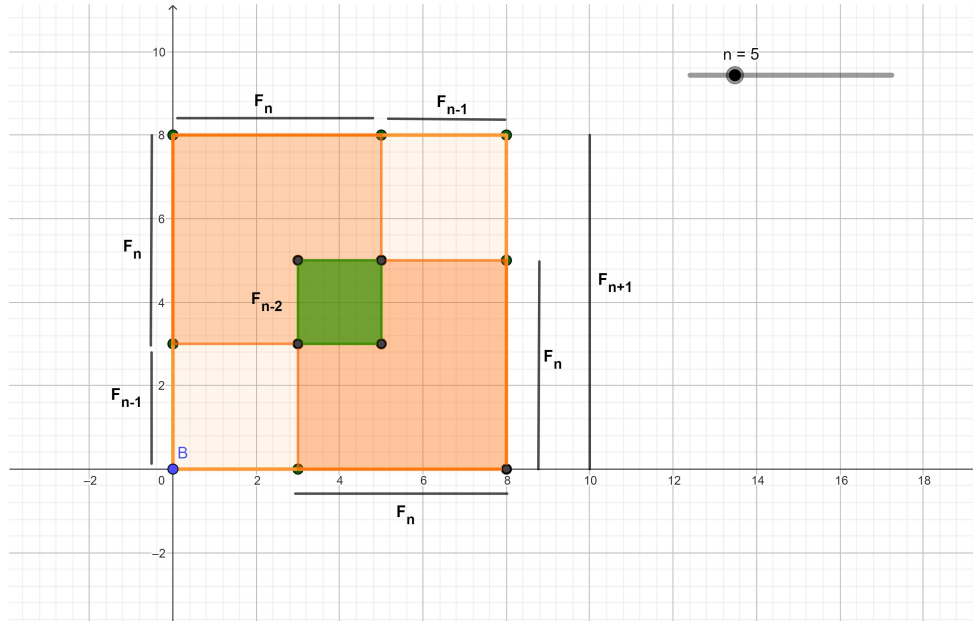
Em seguida, marcamos dois quadrados de lado F_n nos vértices em diagonal. O que faz com que tenhamos nos vértices restantes dois quadrados de lado F_{n-1} e, na parte central um quadrado de lado F_{n-2} , conforme a Figura 3.2.

Ainda na Figura 3.2, podemos observar que o quadrado de lado F_{n-2} apresenta uma sobreposição dada pela interseção dos quadrados de lado F_n . Ao efetuarmos a soma das áreas dos quadrados e a subtração da área sobreposta, obtemos $F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$.

Disponibilizamos esta construção geométrica pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/jyyhgfp>.

Figura 3.2 – Representação geométrica da identidade da equação (3.1)



Fonte: Autora.

Identidade 3.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$.

Demonstração. Utilizando, novamente, a recorrência dos números de Fibonacci, obtemos

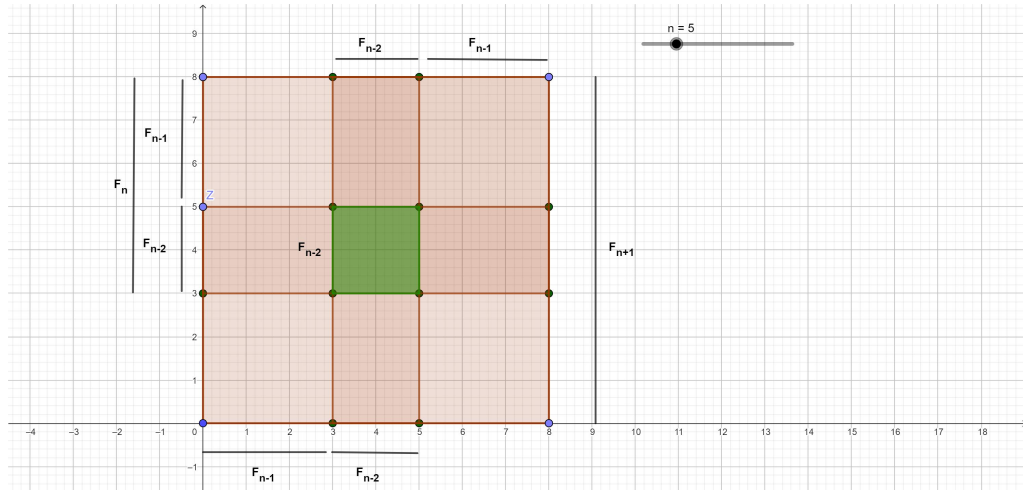
$$\begin{aligned}
 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2 &= 4F_n^2 - 4F_{n-1}(F_n - F_{n-1}) - 3(F_n - F_{n-1})^2 \\
 &= 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_n + 4F_{n-1}^2 - 3F_n^2 + 6F_nF_{n-1} - 3F_{n-1}^2 \\
 &= F_n^2 + 2F_{n-1}F_n + F_{n-1}^2 \\
 &= (F_n + F_{n-1})^2 \\
 &= F_{n+1}^2.
 \end{aligned}$$

□

A representação da identidade $F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$, é efetuada desenhando, primeiramente, um quadrado de lado F_{n+1} , conforme demonstra a Figura 3.1.

No decorrer, marcamos quatro quadrados de lado F_n em cada um dos vértices do quadrado maior. Constata-se, então a existência de quatro retângulos de área $F_{n-2} \times F_{n-1}$ os quais apresentam-se em sobreposição pelos quadrados de lado F_n . Temos também, na parte central um quadrado de lado F_{n-2} , o qual é sobreposto três vezes pelos quadrados de lado F_n , conforme ilustra a Figura 3.3.

Figura 3.3 – Representação geométrica da identidade da equação (3.2)



Fonte: Autora.

Dessa forma, na análise geométrica temos que a área do quadrado de lado F_{n+1} é igual a soma das áreas dos quatro quadrados de lado F_n subtraído, respectivamente, das áreas referentes aos quatro retângulos e aos 3 quadrados que estão localizados centralmente. Ou seja, $F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$.

Esta construção geométrica está disponível pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/dkhyhvu>.

Utilizando o controle deslizante na construção, observamos que para $n = 3$ o quadrado inicial é subdividido em nove outros quadrados congruentes entre si.

Identidade 3.3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2$.

Demonstração. Lembrando que, $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ e reescrevendo $8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2$, temos

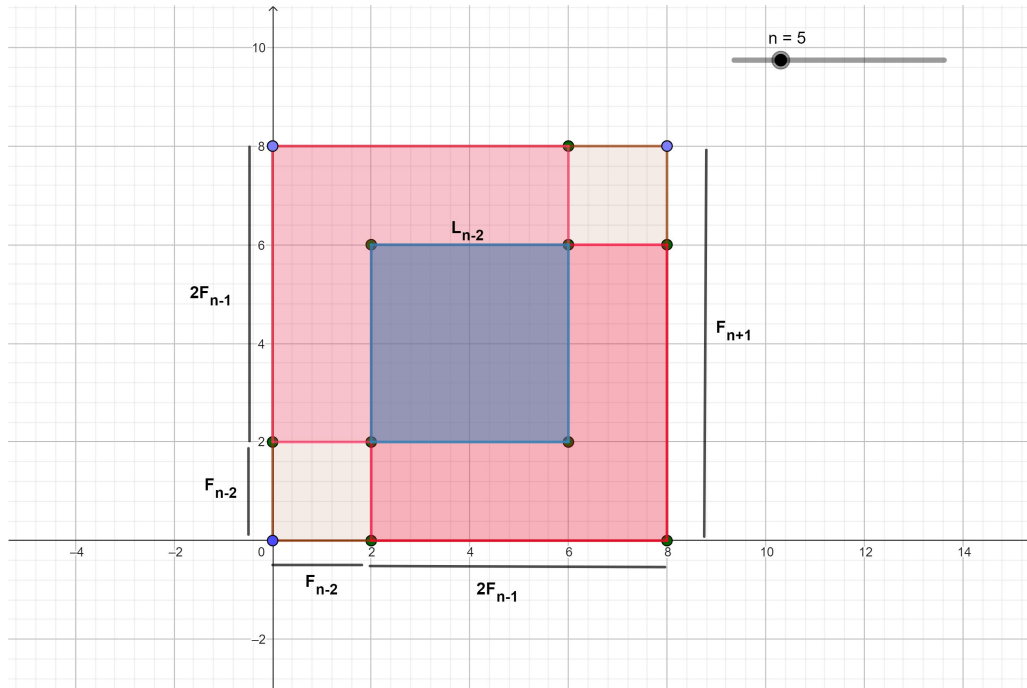
$$\begin{aligned}
 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2 &= 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - (2F_{n-1} - F_{n-2})^2 \\
 &= 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} - F_{n-2}^2 \\
 &= 4F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} \\
 &= 4F_{n-1}^2 + (F_n - F_{n-1})^2 + 4F_{n-1}(F_n - F_{n-1}) \\
 &= F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 \\
 &= (F_n + F_{n-1})^2 \\
 &= F_{n+1}^2.
 \end{aligned}$$

□

Para representarmos geometricamente a identidade $F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2$, desenhamos, em um primeiro momento, um quadrado de lado F_{n+1} , de acordo com a Figura 3.1.

Como, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-1} = 2F_{n-1} + F_{n-2}$, iniciamos colocando dois quadrados de lado $2F_{n-1}$, nos vértices opostos. Nos vértices restantes, temos dois quadrados de lado F_{n-2} e, centralmente um quadrado. Na Figura 3.4, temos a representação geométrica da identidade desejada.

Figura 3.4 – Representação geométrica da identidade da equação (3.3)



Fonte: Autora.

A área do quadrado localizado centralmente será denominada por A_1 . Sendo assim, a representação geométrica da área do quadrado de lado F_{n+1} é dada por:

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 &= 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + F_{n-2}^2 - A_1 \\ &= 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - A_1. \end{aligned}$$

Isto é,

$$F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - A_1.$$

O lado do quadrado localizado centralmente é dado por:

$$\begin{aligned} 2F_{n-1} - F_{n-2} &= F_{n-1} + F_{n-1} - F_{n-2} \\ &= F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} - F_{n-2} \\ &= F_{n-1} + F_{n-3} = L_{n-2}. \end{aligned}$$

Portanto, $A_1 = L_{n-2}^2$.

Substituindo A_1 por L_{n-2}^2 na equação (3.1), segue que: $F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2$.

A representação geométrica correspondente a esta identidade está disponível pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/btcjwrgt>.

Identidade 3.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $L_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2$.

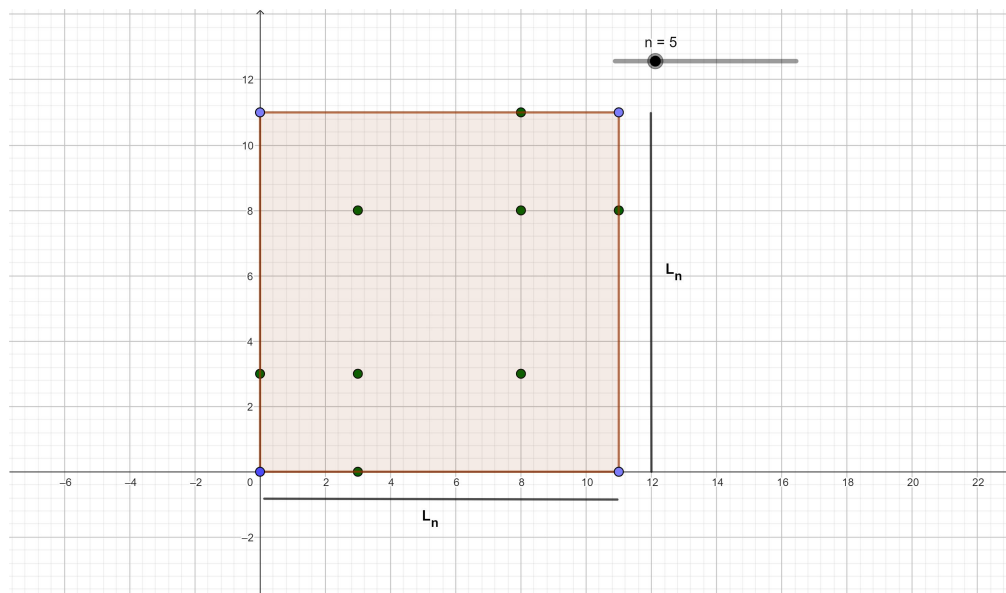
Demonstração. Usando a identidade $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ e a recorrência dos números de Fibonacci, segue-se que

$$\begin{aligned} 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2 &= 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - (F_{n+1} - F_{n-1})^2 \\ &= 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} - F_{n-1}^2 \\ &= F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} \\ &= (F_{n+1} + F_{n-1})^2 \\ &= L_n^2. \end{aligned}$$

□

Agora, vamos representar geometricamente a identidade $L_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2$. Para tanto desenhamos, inicialmente, um quadrado de lado L_n , conforme mostra a Figura 3.5.

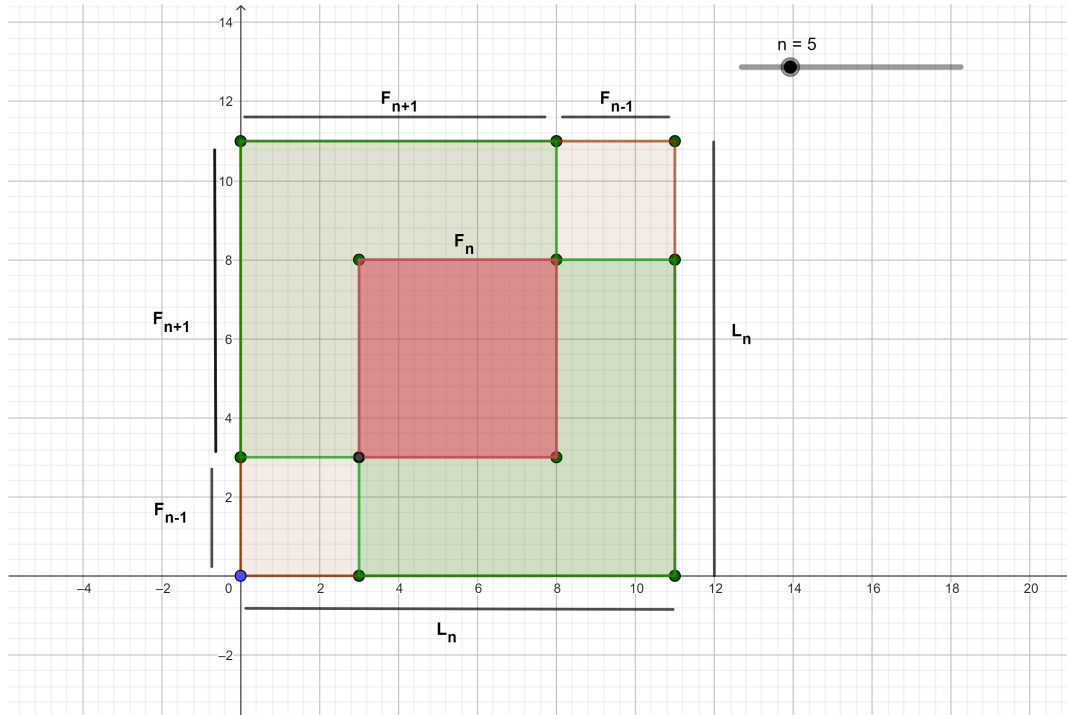
Figura 3.5 – Quadrado de lado L_n



Fonte: Autora.

Como $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, representamos dois quadrados de lado F_{n+1} , em vértices opostos. Nos vértices restantes, temos dois quadrados de lado F_{n-1} e, centralmente um quadrado. Na Figura 3.6, podemos visualizar a representação geométrica da identidade referida.

Figura 3.6 – Representação geométrica da identidade dada pela equação (3.4)



Fonte: Autora.

A área do quadrado localizado centralmente será denominada por A_2 . Por conseguinte, a área do quadrado de lado L_n pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} L_n^2 &= F_{n+1}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 + F_{n-1}^2 - A_2 \\ &= 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - A_2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$L_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - A_2.$$

O lado do quadrado localizado centralmente é dado por $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$.

Consequentemente, $A_2 = F_n^2$. Substituindo A_2 por F_n^2 na equação (3.1), observamos a seguinte igualdade $L_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2$, a qual exprime a identidade em questão.

No link a seguir, disponibilizamos a construção geométrica da identidade:

<https://www.geogebra.org/m/wgndftkf>.

Identidade 3.5. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $L_n^2 = 8F_n F_{n-1} + F_{n-3}^2$.

Demonstração. Para realizar a demonstração empregaremos o resultado da Proposição 2.3 e da

Proposição 2.8. Ao reescrever $8F_n F_{n-1} + F_{n-3}^2$, tem-se que

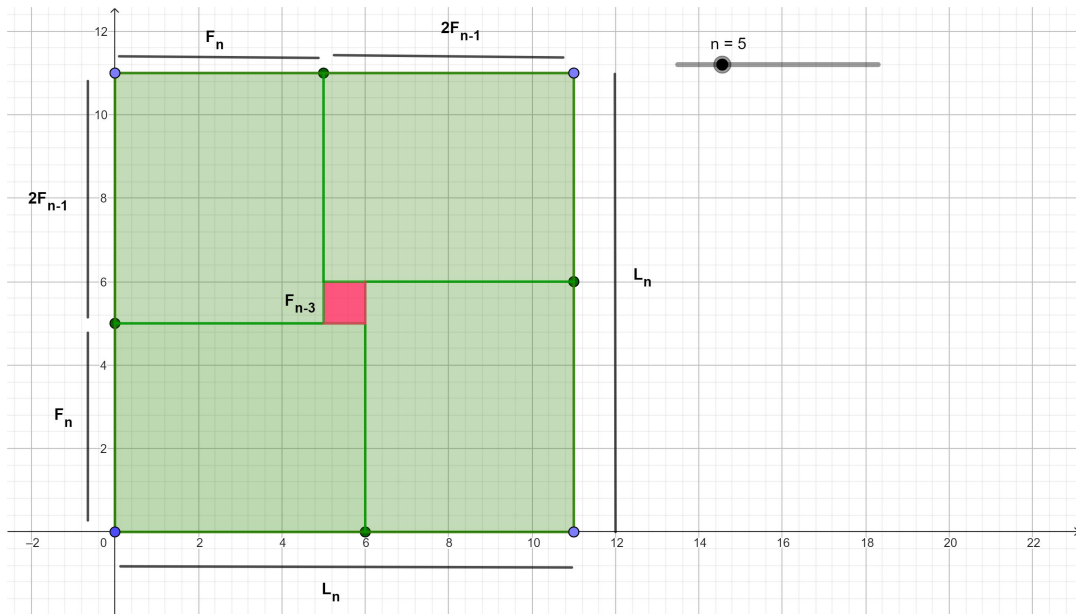
$$\begin{aligned}
 8F_n F_{n-1} + F_{n-3}^2 &= 8F_n F_{n-1} + (2F_{n-1} - F_n)^2 \\
 &= 8F_n F_{n-1} + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-1}F_n + F_n^2 \\
 &= 4F_n F_{n-1} + 4F_{n-1}^2 + F_n^2 \\
 &= 4F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) + F_n^2 \\
 &= 4F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2 \\
 &= 4[F_n^2 + (-1)^n] + F_n^2 \\
 &= 4F_n^2 + 4(-1)^n + F_n^2 \\
 &= 5F_n^2 + 4(-1)^n \\
 &= L_n^2.
 \end{aligned}$$

□

Para a representação geométrica da identidade $L_n^2 = 8F_n F_{n-1} + F_{n-3}^2$, desenhamos um quadrado de lado L_n de acordo com a Figura 3.5.

Notamos que $L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}$. Representamos então, quatro retângulos congruentes de lados iguais a $2F_{n-1}$ e F_n , em cada um dos vértices do quadrado. Na Figura 3.7, evidenciamos a representação geométrica da identidade referida.

Figura 3.7 – Representação geométrica da identidade da equação (3.5)



Fonte: Autora.

Este processo gera um quadrado na parte central. O lado deste quadrado é dado por:

$$\begin{aligned}
 L_n - 2F_n &= F_{n+1} + F_{n-1} - 2F_n \\
 &= F_n + F_{n-1} + F_{n-1} - 2F_n \\
 &= F_n + 2F_{n-1} - 2(F_{n-1} + F_{n-2}) \\
 &= F_{n-1} + F_{n-2} + 2F_{n-1} - 2F_{n-1} - 2F_{n-2} \\
 &= F_{n-1} - F_{n-2} \\
 &= F_{n-3}.
 \end{aligned}$$

Assim a área do quadrado localizado centralmente é dada por F_{n-3}^2 . Logo, a área do quadrado de lado L_n é

$$\begin{aligned}
 L_n^2 &= 4(2F_{n-1}F_n) + F_{n-3}^2 \\
 &= 8F_{n-1}F_n + F_{n-3}^2.
 \end{aligned}$$

A representação geométrica da Identidade (3.5) é dada pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/facyexce>.

Identidade 3.6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $L_n^2 = 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2$.

Demonstração. Reescrevendo $4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2$, tem-se que

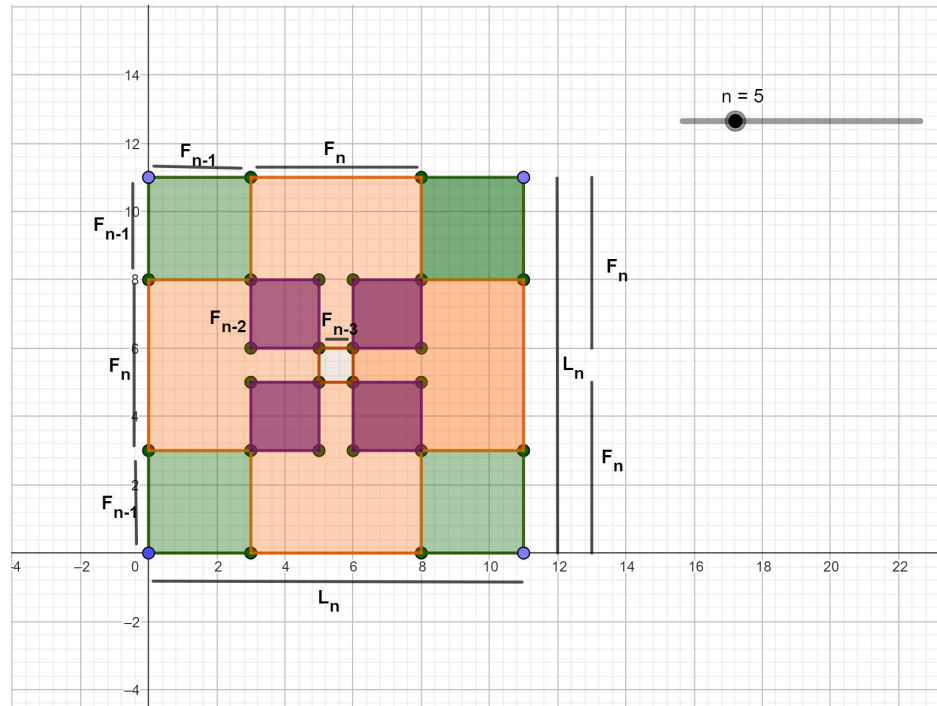
$$\begin{aligned}
 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 &= 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + (F_{n-1} - F_{n-2})^2 \\
 &= 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2 - 2F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2 \\
 &= 4F_n^2 + 5F_{n-1}^2 - 3F_{n-2}^2 - 2F_{n-1}F_{n-2} \\
 &= 4F_n^2 + 5F_{n-1}^2 - 3(F_n - F_{n-1})^2 - 2F_{n-1}(F_n - F_{n-1}) \\
 &= 4F_n^2 + 5F_{n-1}^2 - 3(F_n^2 - 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2) - 2F_{n-1}F_n + 2F_{n-1}^2 \\
 &= 4F_n^2 + 5F_{n-1}^2 - 3F_n^2 + 6F_nF_{n-1} - 3F_{n-1}^2 - 2F_{n-1}F_n + 2F_{n-1}^2 \\
 &= F_n^2 + 4F_nF_{n-1} + 4F_{n-1}^2 \\
 &= (F_n + 2F_{n-1})^2 \\
 &= L_n^2.
 \end{aligned}$$

□

Na representação geométrica da identidade $L_n^2 = 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2$, começamos com um quadrado de lado L_n , de acordo com a Figura 3.5.

Considerando que $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, dividimos cada lado em segmentos de comprimento F_{n-1} , F_n e F_{n-1} , nesta ordem. Usando os segmentos de comprimento F_n , formamos os quatro quadrados de lado F_n , conforme indicamos pela Figura 3.8.

Figura 3.8 – Representação geométrica da identidade da equação (3.6)



Fonte: Autora.

Os quadrados de lado F_n se sobrepõem em quatro quadrados congruentes de lado F_{n-2} . O lado do quadrado central tem o seguinte comprimento:

$$\begin{aligned}
 L_n - 2F_n &= F_{n+1} + F_{n-1} - 2F_n \\
 &= F_n + F_{n-1} + F_{n-1} - 2F_n \\
 &= 2F_{n-1} - (F_{n-1} + F_{n-2}) \\
 &= 2F_{n-1} - F_{n-1} - F_{n-2} \\
 &= F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3}.
 \end{aligned}$$

Logo, a área do quadrado localizado centralmente é dada por F_{n-3}^2 . Somando as áreas F_n^2 , F_{n-1}^2 , F_{n-3}^2 e, subtraindo as áreas que aparecem em sobreposição dos quadrados de lado F_{n-2} , constatamos que a representação geométrica da identidade é determinada da seguinte forma:

$$L_n^2 = 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2.$$

A representação geométrica da identidade no software Geogebra é dada pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/fm45qmtm>.

3.2 FIBONACCI E PROBABILIDADE

Ao pensarmos no conceito de probabilidade, em um primeiro instante, não conseguimos estabelecer uma conexão direta com a sequência de Fibonacci. No entanto, como o cálculo da probabilidade normalmente envolve a redução de um cenário em "casos", constatamos que a sequência de Fibonacci se enquadra no cálculo de probabilidades uma vez que o valor de F_n depende do valor dos "casos" que o antecedem, F_{n-1} e F_{n-2} , (BOODEY, 2020).

A existência desta conexão entre a probabilidade e a sequência de Fibonacci, pode ser verificada por meio do uso de números binários.

Antes de descrevermos tal utilização necessitamos considerar que, uma palavra é um arranjo ordenado de símbolos, os quais não precisam ter um significado. Por exemplo, fgh é uma palavra que usa as letras do alfabeto.

Neste sentido, temos que 001101 é uma palavra binária. Sabemos que um *bit* corresponde a 0 (zero) ou 1 (um). Onde, a palavra *bit* é a contração da expressão *binary digit*. O comprimento de uma palavra representada na palavra binária é dada pela quantidade de símbolos nela contidos. Logo, a palavra 001101 tem comprimento 6, pois em sua composição são apresentados 6 símbolos.

Agora, vamos analisar o número de palavras com n *bits* que não contêm dois 1's consecutivos, o qual será denotado por b_n . Para iniciarmos, iremos listar as palavras de n *bits* correspondentes a $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. Sendo assim, segue que:

- 1) Tomando $n = 1$, temos $b_1 = 2$, já que 0 e 1 são as únicas palavras de 1 *bit*.
- 2) Para $n = 2$, constata-se $b_2 = 3$. As palavras com dois *bits* são 00, 01 e 10.
- 3) Considerando $n = 3$, observamos que $b_3 = 5$. São as seguintes palavras 000, 001, 100, 010 e 101.
- 4) E, com $n = 4$, encontramos $b_4 = 8$. As palavras são 0000, 0001, 0100, 0010, 0101, 1010, 1001 e 1000.

Levando em consideração os casos anteriores, b_1 , b_2 , b_3 e b_4 , vamos tomar uma palavra arbitrária de n *bits*, a qual denominaremos de z , onde $n \geq 2$. Observamos dois casos a serem analisados:

- i) A palavra em questão z , termina em 0 o que equivale a $z = a_1a_2\dots a_{n-1}0$ (com n bits). O penúltimo dígito da palavra pode ser 0 ou 1. Temos as seguintes situações: $a_1a_2\dots a_{n-2}00$ ou $a_1a_2\dots a_{n-2}10$ ambas com n bits. Portanto, não há restrições com relação ao penúltimo dígito da palavra. Dessa maneira, verificamos a existência de b_{n-1} palavras de n bits terminando em 0, não contendo 1's consecutivos.
- ii) Supondo, agora que z termine em 1, o que implica em $z = a_1a_2\dots a_{n-1}1$ (com n bits). Neste caso, o penúltimo termo deve ser 0, ou seja, $a_1a_2\dots a_{n-2}01$ (n bits). Contudo, não há restrições para o antepenúltimo termo da palavra, o qual pode ser 0 ou 1. Dessa forma, temos $a_1a_2\dots a_{n-3}001$ ou $a_1a_2\dots a_{n-3}101$. O que nos mostra que existem b_{n-2} palavras de n bits terminando em 1, não contendo 1's consecutivos.

Como os dois casos são mutuamente exclusivos, utilizando o princípio da adição, segue que:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2},$$

para $n \geq 3$, onde $b_1 = 2$ e $b_2 = 3$. Assim, $b_n = F_{n+2}$ e $n \geq 1$.

Agora, vamos transpor esta ocorrência utilizando as sequências binárias, para um acontecimento com moedas.

Suponha que moedas honestas sejam lançadas sequencialmente ao acaso. A probabilidade de que duas moedas adjacentes não dêem cara é dada por $\frac{F_{n+2}}{2^n}$. Onde o número total de resultados de forma que duas moedas consecutivas não dêem cara em n lançamentos é dado por F_{n+2} e 2^n é representa o total de lançamentos.

3.3 GIBONACCI E GEOMETRIA ANALÍTICA

Outra ocorrência esboça uma relação entre a sequência de Gibonacci e a Geometria Analítica.

Teorema 3.1. *A área do triângulo com vértices (G_n, G_{n+r}) , (G_{n+p}, G_{n+p+r}) e (G_{n+q}, G_{n+q+r}) é independente de n , onde G_k representa o k -ésimo número de Gibonacci.*

Demonstração. Daremos início a esta demonstração trazendo o fato de que a área do triângulo equivale a metade do valor absoluto do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} G_n & G_{n+r} & 1 \\ G_{n+p} & G_{n+p+r} & 1 \\ G_{n+q} & G_{n+q+r} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= G_{n+p}G_{n+q+r} - G_{n+q}G_{n+p+r} - (G_nG_{n+q+r} - G_{n+q}G_{n+r}) + G_nG_{n+p+r} - G_{n+p}G_{n+r}.$$

Agrupando as parcelas deste determinante e, aplicando a Proposição 2.16 à este, constatamos que:

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{n+p+1} F_r F_{n+q-(n+p)} \cdot \mu - ((-1)^{n+1} F_r F_{n+q-n} \cdot \mu) + (-1)^{n+1} F_r F_{n+p-n} \cdot \mu \\ &= (-1)^{n+p+1} F_r F_{q-p} \cdot \mu + (-1)^n F_r F_q \cdot \mu + (-1)^{n+1} F_r F_p \cdot \mu \\ &= (-1)^n F_r \cdot \mu ((-1)^{p+1} F_{q-p} + F_q - F_p). \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo em questão é dada por:

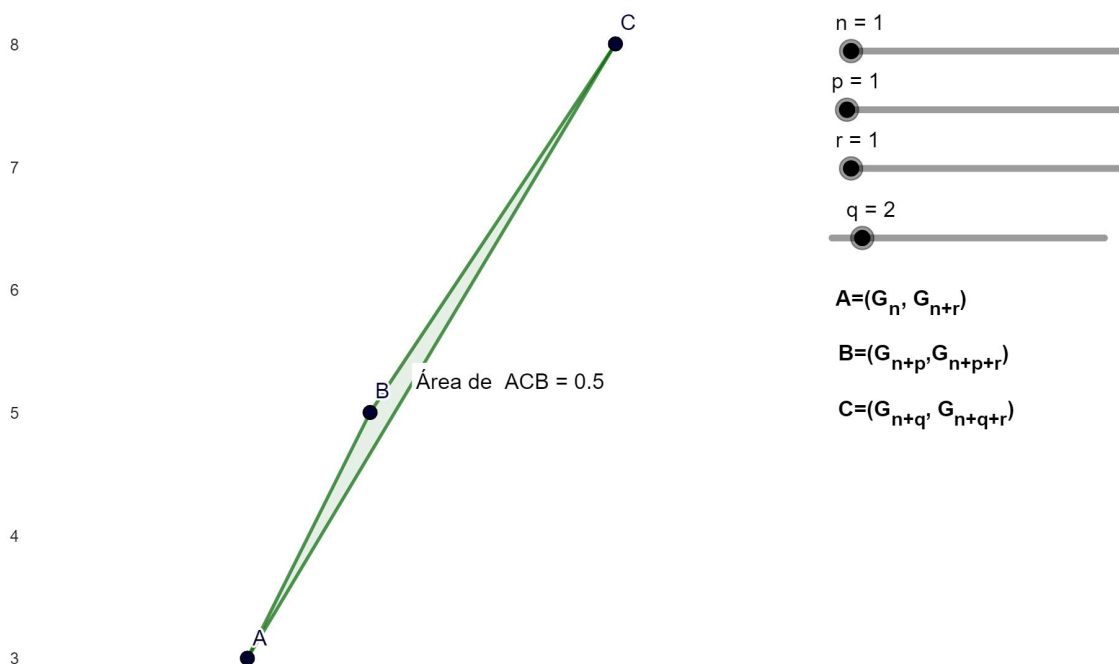
$$\begin{aligned} A &= \frac{|D|}{2} \\ &= \frac{F_r \cdot \mu}{2} \left| ((-1)^{p+1} F_{q-p} + F_q - F_p) \right|. \end{aligned}$$

Por consequência, temos que a área do triângulo com vértices (G_n, G_{n+r}) , (G_{n+p}, G_{n+p+r}) e (G_{n+q}, G_{n+q+r}) é independente de n .

□

Por meio da Figura 3.9 podemos visualizar a representação geométrica do Teorema 3.1. Na representação incluímos um controle deslizante para n , p , r e q , onde é possível constatar que ao variar o valor de n não há alteração no valor da área correspondente.

Figura 3.9 – Representação geométrica do Teorema 3.1



Fonte: Autora.

Esta construção geométrica está disponível pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/kykepxgz>.

Corolário 3.2. A área de um triângulo de vértices (F_n, F_{n+h}) , (F_{n+2h}, F_{n+3h}) e (F_{n+4h}, F_{n+5h}) é dada por:

$$F_h \cdot \frac{(F_{4h} - 2F_{2h})}{2}.$$

Demonstração. A demonstração deste corolário segue, tomando $r = h$, $p = 2h$, $q = 4h$, e $a = b = 1$ no Teorema 3.1. \square

A representação geométrica do corolário acima é disponibilizada pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/fddgt8kf>.

Ao analisarmos a representação geométrica referente a área do triângulo, podemos observar que variando o controle deslizante o triângulo se torna cada vez mais "estrito" nos dando a impressão de que o triângulo se assemelha a um segmento de reta.

Teorema 3.3. As retas que passam pela origem na direção do vetor (G_n, G_{n+p}, G_{n+q}) são coplanares para todo n , onde p e q são constantes.

Demonstração. Tome três retas que passam pela origem, com seus respectivos vetores diretores, (G_i, G_{i+p}, G_{i+q}) , (G_j, G_{j+p}, G_{j+q}) e (G_k, G_{k+p}, G_{k+q}) .

Para que estas retas sejam coplanares, precisamos mostrar que o valor do seguinte determinante é zero.

$$D = \begin{vmatrix} G_i & G_{i+p} & G_{i+q} \\ G_j & G_{j+p} & G_{j+q} \\ G_k & G_{k+p} & G_{k+q} \end{vmatrix}.$$

Empregando a Proposição 2.15, segue que

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} G_i & G_i F_{p+1} + G_{i-1} F_p & G_i F_{q+1} + G_{i-1} F_q \\ G_j & G_j F_{p+1} + G_{j-1} F_p & G_j F_{q+1} + G_{j-1} F_q \\ G_k & G_k F_{p+1} + G_{k-1} F_p & G_k F_{q+1} + G_{k-1} F_q \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} G_i & G_{i-1} F_p & G_i F_{q+1} + G_{i-1} F_q \\ G_j & G_{j-1} F_p & G_j F_{q+1} + G_{j-1} F_q \\ G_k & G_{k-1} F_p & G_k F_{q+1} + G_{k-1} F_q \end{vmatrix} \\
&= F_p \begin{vmatrix} G_i & G_{i-1} & G_i F_{q+1} + G_{i-1} F_q \\ G_j & G_{j-1} & G_j F_{q+1} + G_{j-1} F_q \\ G_k & G_{k-1} & G_k F_{q+1} + G_{k-1} F_q \end{vmatrix} \\
&= F_p \begin{vmatrix} G_i & G_{i-1} & G_{i-1} F_q \\ G_j & G_{j-1} & G_{j-1} F_q \\ G_k & G_{k-1} & G_{k-1} F_q \end{vmatrix} \\
&= F_p F_q \begin{vmatrix} G_i & G_{i-1} & G_{i-1} \\ G_j & G_{j-1} & G_{j-1} \\ G_k & G_{k-1} & G_{k-1} \end{vmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

3.4 NÚMEROS DE FIBONACCI E O ALGORITMO DE EUCLIDES

A sequência de Fibonacci emerge ainda, em outro contexto, o algoritmo de Euclides. O algoritmo de Euclides pode ser usado para obter o máximo divisor comum de dois números. Neste aspecto, considerando o algoritmo euclidiano e a sequência de Fibonacci nos deparamos com o Teorema de Lamé o qual afirma que o número de divisões necessárias para calcular o máximo divisor comum de (a, b) pelo algoritmo euclidiano não é mais do que cinco vezes o número de dígitos decimais em b , onde $a \geq b \geq 2$. Antes de enunciarmos tal teorema iremos apresentar um resultado que será usado na demonstração do Teorema de Lamé.

Lema 3.4. *Seja $n \geq 3$. Então, $\alpha^{n-2} < F_n < \alpha^{n-1}$, onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Demonstração. A demonstração será efetuada por meio da Indução Forte em n . Em um primeiro momento, vamos mostrar que, $\alpha^{n-2} < F_n$, com $n \geq 3$.

i) Sabe-se que, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{1+3}{2} = 2 = F_3$ e $\alpha^{4-2} = \alpha^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < \frac{3+3}{2} = 3 = F_4$. Assim sendo, a afirmação é verdadeira para $n = 3$ e $n = 4$, respectivamente.

ii) Suponhamos que a desigualdade seja válida para todos os inteiros i tais que $3 \leq i \leq k$, onde k é um número inteiro arbitrário e maior do que ou igual a 3. Mostremos que a desigualdade é

válida para $k + 1$. Como $\alpha^2 = \alpha + 1$, temos

$$\begin{aligned}\alpha^{k-1} &= \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} \\ &\stackrel{h.i.}{<} F_k + F_{k-1} \\ &= F_{k+1}.\end{aligned}$$

O que implica que a desigualdade é válida para $k + 1$. E, por meio da Indução Forte a afirmação é verdade para todo inteiro n tal que $n \geq 3$.

Da mesma maneira, iremos mostrar que $F_n < \alpha^{n-1}$, com $n \geq 3$.

iii) Temos que, $\alpha^{3-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{3+1}{2} = 2 = F_3$ e $\alpha^{4-1} = \alpha^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2 + \sqrt{5} > 3 = F_4$. Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 3$ e $n = 4$.

iv) Vamos supor que a desigualdade seja válida para todos os inteiros i tais que $3 \leq i \leq k$, onde k é um número inteiro arbitrário e maior do que ou igual a 3. Mostremos que a desigualdade é válida para $k + 1$. Novamente, empregando $\alpha^2 = \alpha + 1$ observamos que

$$\begin{aligned}F_k &= F_{k-1} + F_{k-2} \\ &\stackrel{h.i.}{<} \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} \\ &= \alpha^{k-3}(\alpha + 1) \\ &= \alpha^{k-3}\alpha^2 \\ &= \alpha^{k-1}.\end{aligned}$$

Assim, a desigualdade é verdadeira para $k + 1$. Portanto, por meio da Indução Forte a afirmação é verdade para todo inteiro n tal que $n \geq 3$. \square

Teorema 3.5 (Teorema de Lame). *O número de divisões necessárias para calcular o máximo divisor comum (a,b) pelo algoritmo euclidiano não é mais que cinco vezes o número de dígitos decimais em b , onde $a \geq b \geq 2$.*

Demonstração. Sejam $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a = r_0$ e $b = r_1$, tais que $a \geq b \geq 2$. Aplicando o algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned}r_0 &= q_1 r_1 + r_2, & \text{onde } 0 \leq r_2 < r_1; \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3, & \text{onde } 0 \leq r_3 < r_2; \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & \text{onde } 0 \leq r_n < r_{n-1}; \\ r_{n-1} &= r_n q_n.\end{aligned}$$

Observando que, são necessárias n divisões para calcular $(a, b) = r_n$. E que, $r_i < r_{i-1}$, $q_i \geq 1$, para $1 \leq i \leq n$. Como $r_{n-1} = r_n q_n$ e $r_n < r_{n-1}$, segue que q_n não pode ser igual a 1. Assim, $q_n \geq 2$. Portanto, $r_n \geq 1$ e $r_{n-1} \geq 2 = F_3$.

Consequentemente,

$$r_{n-2} = q_{n-1}r_{n-1} + r_n \geq r_{n-1} + r_n \geq F_3 + 1 = F_4,$$

e,

$$r_{n-3} = q_{n-2}r_{n-2} + r_{n-1} \geq r_{n-2} + r_{n-1} \geq F_4 + F_3 = F_5.$$

Prosseguindo com o mesmo processo,

$$r_1 = q_2r_2 + r_3 \geq r_2 + r_3 \geq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}.$$

Ou seja, $b \geq F_{n+1}$.

Empregando o resultado referente ao Lema 3.4, segue que $F_{n+1} > \alpha^{n-1}$, onde $n \geq 3$. O que infere que, $b > \alpha^{n-1}$. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade, $\log b > (n-1) \log \alpha$. Tomando $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$ tem-se que

$$\log \alpha \approx 0,2089876403 > \frac{1}{5}.$$

Supondo que b tenha k dígitos decimais, isto implica que, $b < 10^k$. Daí, $\log b < k$ e portanto, $k > \frac{(n-1)}{5}$. Assim sendo, $n < 5k + 1$ ou $n \leq 5k$. Portanto, o número de divisões não é mais do que cinco vezes o número de dígitos decimais em b .

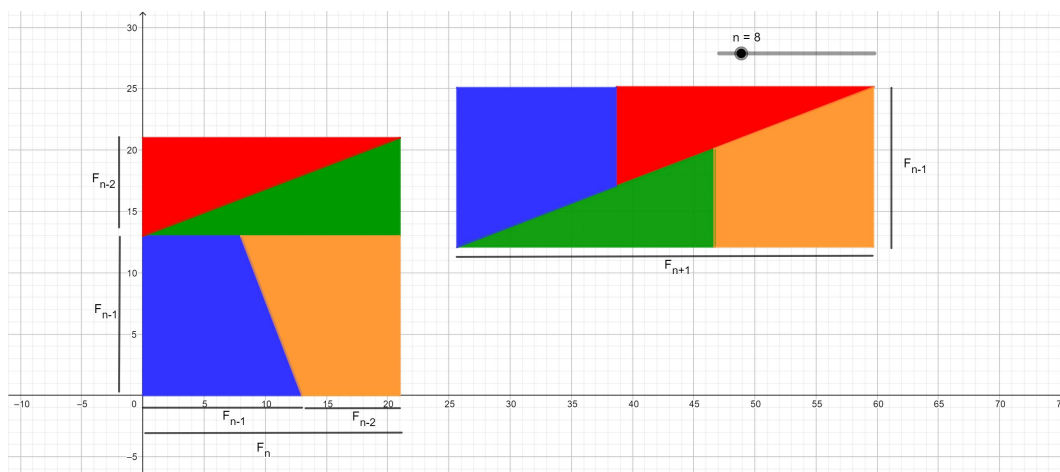
□

3.5 PARADOXO DE CASSINI

A identidade de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, com $n \geq 4$ nos remete a um dos paradoxos geométricos mais fascinantes, o Paradoxo de Cassini. Quando n é par a identidade gera $F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2 = 1$, onde observamos a existência do primeiro caso. Quando n é ímpar temos que $F_{2k+2}F_{2k} - F_{2k+1}^2 = -1$, o que gera o segundo caso do paradoxo. Nesta seção, procuramos efetuar uma análise do mesmo em paralelo com sua representação geométrica.

Em um primeiro instante, analisamos um quadrado de lado F_n o qual foi dividido em dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes, conforme a Figura 3.10. Ao reorganizarmos estes triângulos e trapézios teremos um retângulo de dimensões F_{n+1} por F_{n-1} . Efetuando o cálculo da área, notamos que a área do retângulo foi acrescida de uma unidade em relação a área do quadrado.

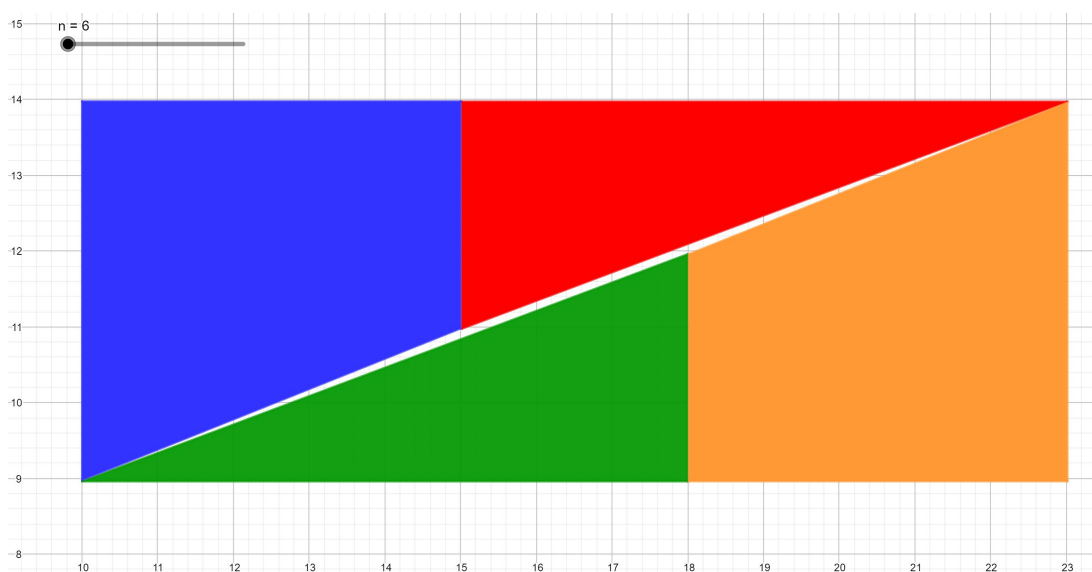
Figura 3.10 – Representação geométrica do Paradoxo de Cassini para $n = 2k$



Fonte: Autora.

Se observarmos atentamente a representação, verificamos a existência de um paralelogramo com os vértices sobre a diagonal do retângulo. Por meio da ampliação do retângulo no Geogebra, de acordo com a Figura 3.11 constatamos a existência de tal paralelogramo.

Figura 3.11 – Retângulo ampliado



Fonte: Autora.

O paralelogramo possui área de uma unidade quadrada. A altura h deste paralelogramo pode ser obtida por meio da utilização da fórmula da área do paralelogramo. Assim,

$$A_{\text{paralelogramo}} = h \cdot \text{base};$$

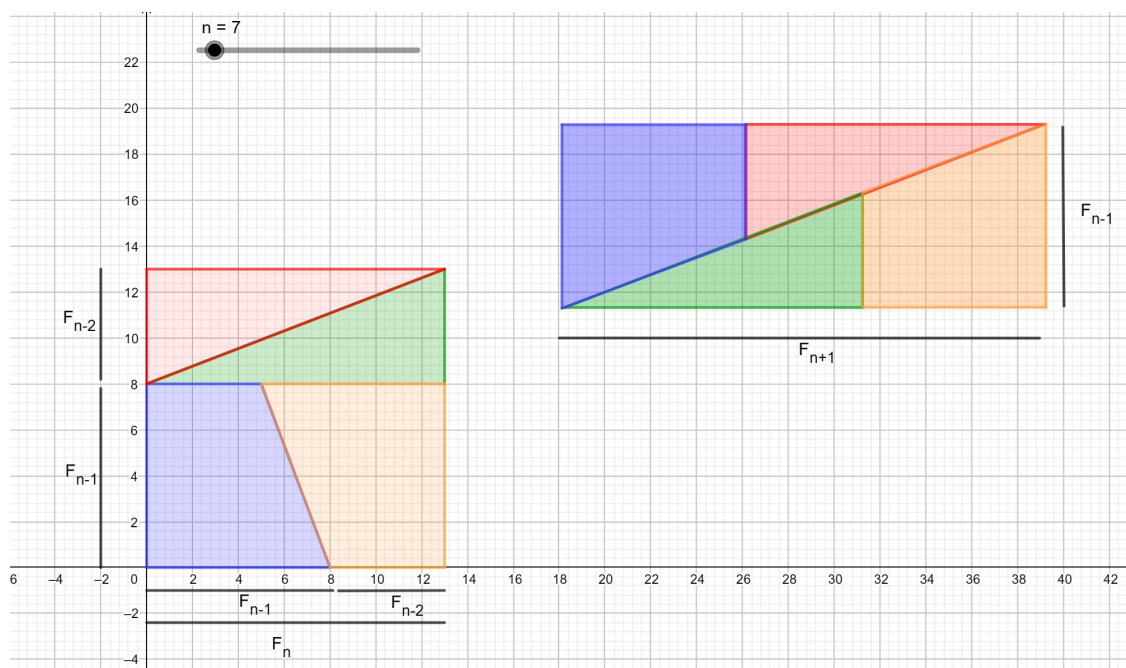
$$1 = h \cdot \sqrt{F_n^2 + F_{n-2}^2};$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{F_n^2 + F_{n-2}^2}}.$$

Com isto, observa-se que a medida que o tamanho do quadrado original aumenta a altura do paralelogramo se torna cada vez menor, o que torna o paralelogramo quase que imperceptível.

No caso em que n é ímpar, temos uma sobreposição na diagonal do retângulo e perdemos uma unidade de área no retângulo, conforme podemos verificar por meio da Figura 3.12.

Figura 3.12 – Representação geométrica do Paradoxo de Cassini para $n = 2k + 1$



Fonte: Autora.

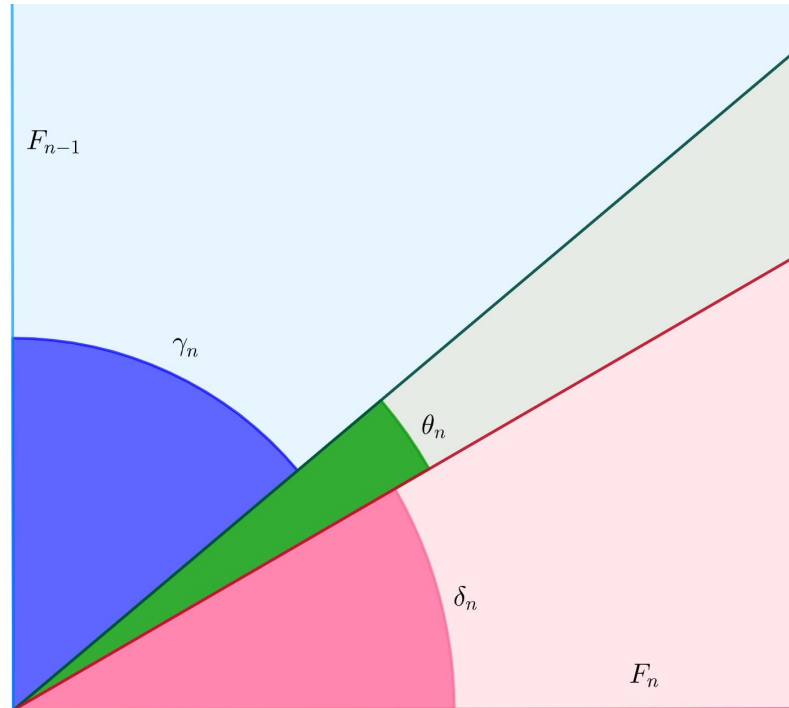
O matemático australiano *Alwyn Francis Horadam* (1923-2016), demonstrou uma fórmula para $\text{tg}\theta_n$, em que θ_n denota o ângulo agudo entre os lados adjacentes do paralelogramo. Podemos visualizar a representação geométrica pelo link a seguir

<https://www.geogebra.org/m/zeyacx9k>.

Na demonstração serão empregados os resultados da Proposição (2.5), do Teorema (2.10) e da identidade trigonométrica $\text{tg}^{-1}x + \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

i) Inicialmente, tomando n par, onde $n \geq 4$.

Por meio da Figura 3.13 observamos a representação geométrica do caso em que n é par, esta representação apresenta-se de maneira exagerada. Notamos que,

Figura 3.13 – Representação dos ângulos no Paradoxo de Cassini com n par

Fonte: Autora.

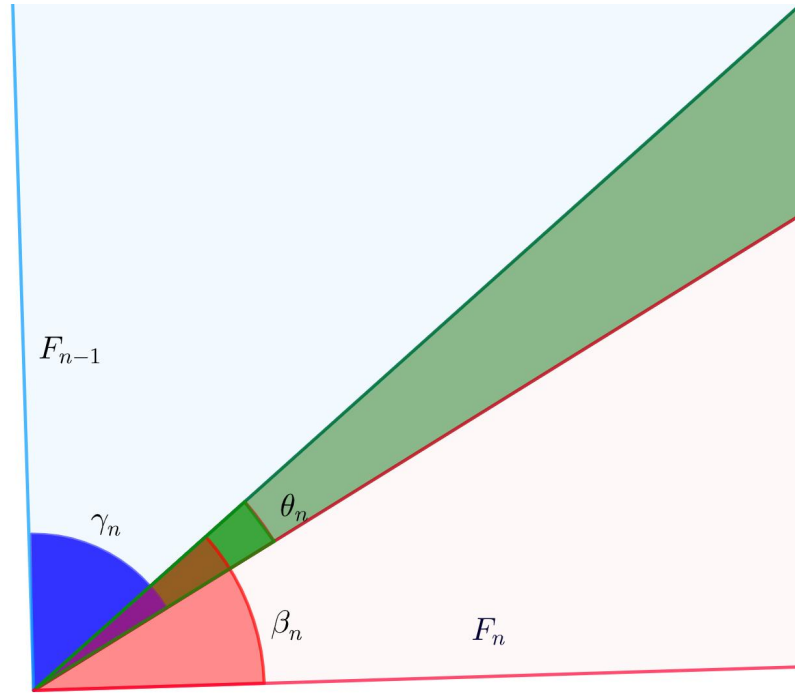
$$\begin{aligned}
 \theta_n &= \frac{\pi}{2} - (\gamma_n + \delta_n) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{F_{n-2}}{F_n} \right) \\
 &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{F_{n-2}}{F_n} \right).
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \theta_n &= \frac{\left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} \right) - \left(\frac{F_{n-2}}{F_n} \right)}{1 + \left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} \right) \left(\frac{F_{n-2}}{F_n} \right)} \\
 &= \frac{F_{n-3}F_n - F_{n-1}F_{n-2}}{F_{n-1}F_n + F_{n-3}F_{n-2}} \\
 &= \frac{F_{n-3}(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-2}(F_{n-2} + F_{n-3})}{F_{n-1}(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-3}F_{n-2}} \\
 &= \frac{F_{n-3}F_{n-1} - F_{n-2}^2}{F_{n-1}^2 + F_{n-2}(F_{n-2} + F_{n-3}) + F_{n-3}F_{n-2}} \\
 &= \frac{(-1)^n}{F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-3}F_{n-2}} \\
 &= \frac{(-1)^n}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} \\
 &= \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}}.
 \end{aligned}$$

ii) Por outro lado, tomando n sendo um número ímpar.

Figura 3.14 – Representação dos ângulos no Paradoxo de Cassini com n ímpar



Fonte: Autora.

Pela Figura 3.14 a qual representa de forma exorbitante o caso em que é ímpar, constatamos que:

$$\begin{aligned}\theta_n &= (\gamma_n + \delta_n) - \frac{\pi}{2} \\ &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}\right).\end{aligned}$$

Conforme disposto anteriormente, isto nos leva a

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} \\ &= \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}}.\end{aligned}$$

Por consequência, ambos os dois casos produzem o mesmo valor para $\operatorname{tg} \theta_n$. Assim, é possível inferir que

$$\operatorname{tg} \theta_n = \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}},$$

onde $n \geq 4$.

Em vista disso, decorre que quando n tende a infinito temos que θ_n tende a zero o qual é uma outra demonstração do fato de que o paralelogramo se torna quase imperceptível para n arbitrariamente grande. No Quadro (3.1) listamos alguns valores de θ_n para os trigêmeos de Fibonacci (F_{n-1}, F_n, F_{n+1}) .

Quadro 3.1 – Valores do ângulo θ_n

n	Trigêmeos de Fibonacci			θ_n
	F_{n-1}	F_n	F_{n+1}	
4	2	3	5	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{7} \approx 8^\circ 7' 48''$
5	3	5	8	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{17} \approx 3^\circ 21' 59''$
6	5	8	13	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{46} \approx 1^\circ 14' 43''$
7	8	13	21	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{119} \approx 28' 53''$
8	13	21	34	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{313} \approx 10' 59''$
9	21	34	55	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{818} \approx 4' 12''$
10	34	55	89	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{2143} \approx 1' 36''$
11	55	89	144	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{5609} \approx 37''$
12	89	144	233	$\text{tg}^{-1} \frac{1}{14686} \approx 14''$

Fonte: Autora.

Com esta abordagem relacionada à análise do ângulo no Paradoxo de Cassini, finalizamos este capítulo referente à algumas ocorrências de Fibonacci. No próximo capítulo, trazemos algumas propostas de atividades as quais podem ser desenvolvidas em sala de aula.

4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo, apresentamos atividades nas quais podemos visualizar as aplicações envolvendo as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci.

4.1 ATIVIDADE 1 - QUEBRA-CABEÇA

Este quebra- cabeça foi proposto por Edmark (2014), é gratuito e o link para acesso está disposto nas referências do referido trabalho. Em um quebra-cabeça usual as peças possuem aproximadamente o mesmo tamanho e formatos diferentes, neste quebra-cabeça no entanto, as peças tem o mesmo formato e tamanhos diferentes, conforme podemos visualizar pela Figura 4.1.

Figura 4.1 – Peças em ordem decrescente



Fonte: Autora.

A colocação das peças é baseada no ângulo dourado ($\approx 137,5^\circ$). O quebra-cabeça tem 8 espirais em uma direção e 13 na outra, sabemos que estes números são, respectivamente, F_6 e F_7 na sequência de Fibonacci.

Conteúdo: Sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Abstrair o conceito da sequência de Fibonacci.

Objetivos Específicos:

- 1) Possibilitar aos educandos a compreensão da sequência de Fibonacci de forma lúdica;
- 2) Desenvolver o raciocínio lógico;

3) Estimular concentração e cooperação.

Contexto didático: Essa aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, onde já foi trabalhado o conceito de sequências.

Material didático: Quebra-cabeça.

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará de forma expositiva e dialogada. Onde será apresentado o quebra-cabeça confeccionado em MDF e será aguardada a interação dos alunos com o jogo. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci, tendo como base o conceito de sequências numéricas.

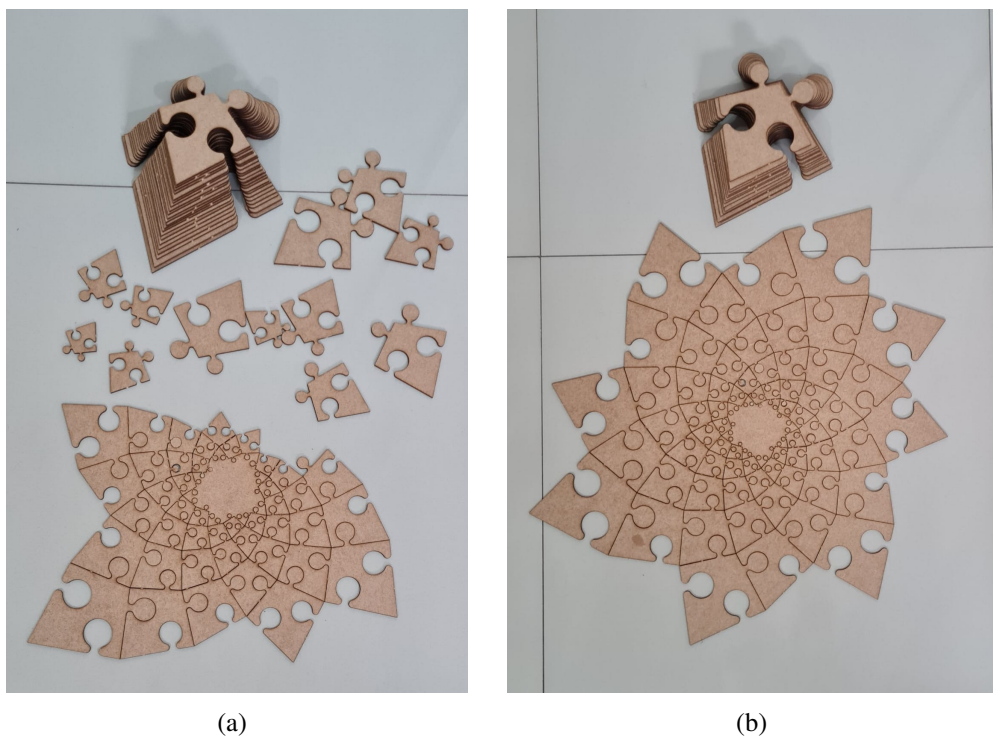
No desenvolvimento desta aula, o professor poderá dividir a sala de aula em grupo de dois ou três alunos e cada grupo receberá um quebra-cabeça. Por meio das Figuras 4.2 e 4.3 visualizamos o processo de resolução e na Figura 4.4 temos o quebra-cabeça completo.

Figura 4.2 – Montagem inicial



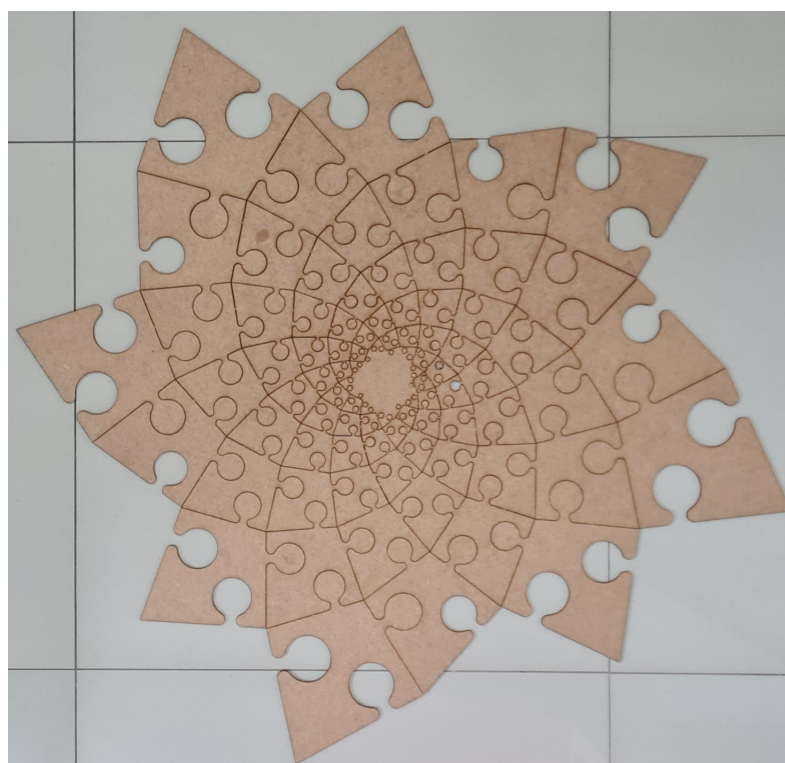
Fonte: Autora.

Figura 4.3 – Quebra-cabeça: (a) Processo de montagem; (b) Processo de montagem final



Fonte: Autora.

Figura 4.4 – Quebra-cabeça completo



Fonte: Autora.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá

durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em conta a interação dos alunos com o jogo.

4.2 ATIVIDADE 2 - DESVENDANDO SEQUÊNCIAS

Para a elaboração desta atividade nos baseamos em uma situação abordada por Benjamin e Quinn (2004).

Conteúdos: Sequência de Fibonacci e Gibonacci.

Objetivo Geral: Reconhecer a sequência de Fibonacci e sua relação com a sequência de Gibonacci.

Objetivos Específicos:

- 1) Possibilitar que os alunos tenham contato com atividades envolvendo a investigação matemática e a resolução de problemas;
- 2) Desenvolver a capacidade de compreensão a cerca das sequências de Fibonacci e Gibonacci;
- 3) Fazer com que os alunos aprimorem a sua concentração.

Contexto didático: Essa aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, nas quais já foram trabalhados os conceitos de números primos, sequência de Fibonacci e os números de Gibonacci. Salientamos que a aula não contempla toda a sequência de aulas envolvendo os conteúdos de sequências numéricas.

Material didático: Para o desenvolvimento desta aula, serão necessários quadro, lápis e/ou caneta e uma folha contendo alguns direcionamentos e questionamentos pertinentes à atividade (Apêndice A).

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da investigação matemática e resolução de problemas. Espera-se contar com a participação dos alunos para a explanação dos conteúdos. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci e Gibonacci, tendo como base o conceito de sequências.

A seguir, apresentamos uma possibilidade de condução da aula por parte do professor.

Em um primeiro momento, peça para que os alunos pensem em dois números naturais e coloque-os nas duas primeiras linhas do Quadro 4.1. Por exemplo, os números 7 e 8. Oriente os alunos para que preencham o Quadro 4.1 da seguinte forma: a terceira linha é composta pela soma dos números colocados na primeira e segunda linha; a quarta linha é composta pela soma dos números colocados na segunda e na terceira linhas, a quinta linha é composta pela soma dos números da terceira e quarta linhas. E, assim por diante, até a décima linha.

Quadro 4.1 – Desvendando sequências - I

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	7
2	8
3	15
4	23
5	38
6	61
7	99
8	160
9	259
10	419

Fonte: Autora.

Em seguida, peça para responder as seguintes questões:

- a) Registre a soma dos 10 primeiros números.

A resposta esperada para o item a) é:

$$7 + 8 + 15 + 23 + 38 + 61 + 99 + 160 + 259 + 419 = 1089$$

- b) Decomponha o resultado desta soma em fatores primos.

A resposta desejada para o item b) é:

$$1089 = 3^2 \cdot 11^2$$

- c) Em seguida, repita todo o processo descrito anteriormente. Ou seja, escolha outros dois números naturais e, preencha o Quadro 4.2. Efetue a soma dos 10 primeiros números e, decomponha o resultado desta soma em fatores primos.

Neste caso escolhemos, por exemplo, os números 4 e 9 para repetirmos este processo.

Quadro 4.2 – Desvendando sequências II

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	4
2	9
3	13
4	22
5	35
6	57
7	92
8	149
9	241
10	390

Fonte: Autora.

A soma dos números fica determinada por:

$$4 + 9 + 13 + 22 + 35 + 57 + 92 + 149 + 241 + 390 = 1012.$$

Decompondo o número 1012 em fatores primos, temos: $1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$.

- d) Qual o número que aparece em ambas as decomposições em fatores primos dos números obtidos nos itens b) e c)?

Considerando os itens b) e c) podemos notar que este número é 11.

- e) O número que é comum na decomposição em fatores primos dos itens b) e c), pode ser multiplicado por um dos elementos presentes na sequência. De modo que, o resultado obtido por meio desta multiplicação é o mesmo da soma. Qual a posição deste número, em cada um dos casos?

Logo após algumas tentativas, conseguimos identificar que a posição correspondente é a sétima. No primeiro caso, se multiplicarmos o número 11 por 99 obtemos 1089. E, no segundo caso, se multiplicarmos 92 por 11 temos 1012, que é o resultado da segunda soma indicada.

- f) Agora, vamos fazer o mesmo processo substituindo por letras os valores iniciais (por exemplo, as letras x e y). Dessa forma, vamos preencher o Quadro 4.3.

Quadro 4.3 – Desvendando sequências III

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	x
2	y
3	$x + y$
4	$2x + y$
5	$3x + 2y$
6	$5x + 3y$
7	$8x + 5y$
8	$13x + 8y$
9	$21x + 13y$
10	$34x + 21y$

Fonte: Autora.

- g) Efetue a soma dos 10 elementos obtidos em cada uma das etapas do item f). Logo após, reescreva o resultado colocando em evidência o termo comum aos dois coeficientes (x e y). O que podemos inferir?

Resposta: A soma é dada por $88x + 55y$, colocando em evidência segue que: $11(5x + 8y)$. Conforme podemos observar o termo em evidência é 11, o qual multiplicado por $5x + 8y$, que é o sétimo termo da sequência que resulta na soma indicada.

Este resultado é um caso particular (para $n = 3$) do Teorema 2.14 demonstrado no Capítulo 2 onde abordamos os números de Gibonacci.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em conta a interação dos alunos. Dessa forma, o professor verificará se há necessidade de complementar mais o assunto.

4.3 ATIVIDADE 3 - PARADOXO DE CASSINI

Nesta atividade fazemos uma abordagem com relação ao Paradoxo de Cassini, o qual foi abordado por Koshy (2017). Neste contexto, nos propomos a realizar um encaminhamento que busque trabalhar com o *software* Geogebra estabelecendo um paralelo com a resolução de problemas como metodologia em sala de aula.

Conteúdo: Paradoxo de Cassini

Objetivo Geral: Reconhecer a diferença entre as áreas presentes no paradoxo de Cassini.

Objetivos Específicos:

- 1) Possibilitar aos alunos o trabalho com o *software* Geogebra;
- 2) Compreender a relação entre as áreas presentes no paradoxo de Cassini.

Contexto didático: Essa atividade foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, nas quais já foi trabalhado o conceito da sequência de Fibonacci.

Material didático: Para o desenvolvimento desta aula, serão necessários um computador contendo a atividade no *software* Geogebra e o caderno para que sejam registradas as informações, cálculos e conclusões.

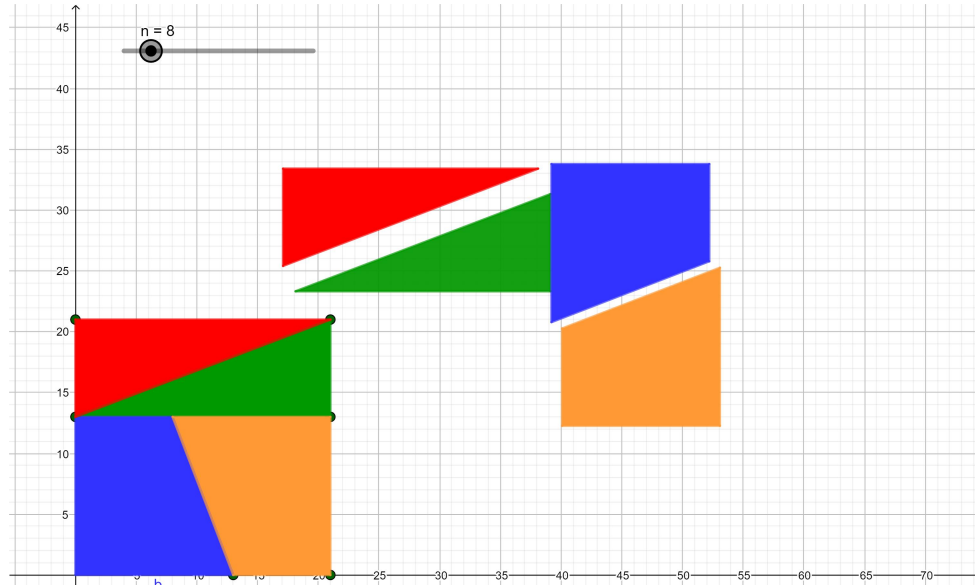
Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da utilização do *software* Geogebra. Espera-se contar com a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula. Nesta atividade, será explorado o conceito do Paradoxo de Cassini, tendo como base o conceito de sequências.

No decorrer, propomos uma direção para desenvolver a aula. Primeiramente, os alunos deverão clicar no link em que a atividade é disponibilizada. O link da referida atividade é dado por

<https://www.geogebra.org/m/zeyacx9k>.

Por meio da Figura 4.5, constatamos a existência de um quadrado que tem como medida do lado um número da sequência de Fibonacci (F_n). Este quadrado foi decomposto em quatro peças: dois triângulos retângulos congruentes e dois trapézios retângulos congruentes. A tarefa é:

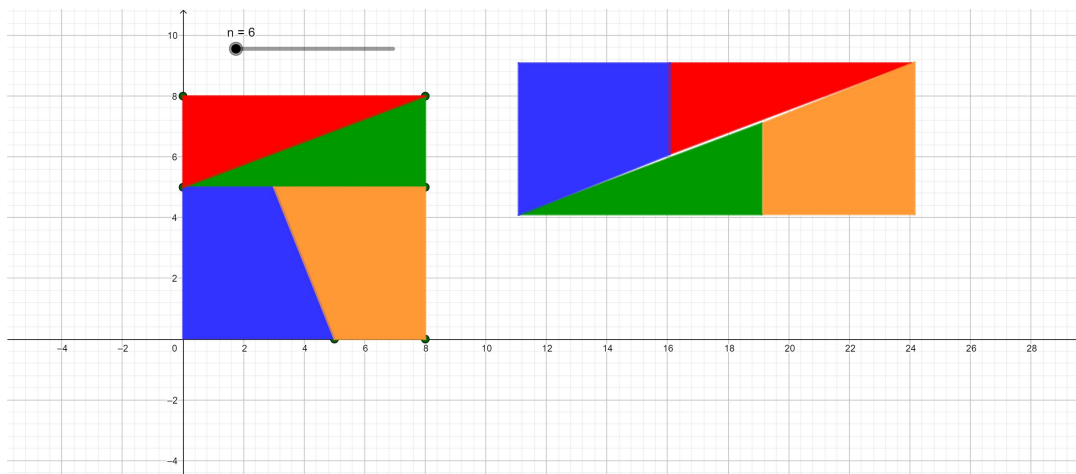
Figura 4.5 – Atividade: Paradoxo de Cassini



Fonte: Autora.

- a) Primeiramente, selecione no controle deslizante um número par. Logo após, movimente os triângulos e trapézios, de modo a formar um retângulo.

A Figura 4.6 ilustra um caso possível com $n = 6$.

Figura 4.6 – Atividade: Paradoxo de Cassini onde $n = 6$ 

Fonte: Autora.

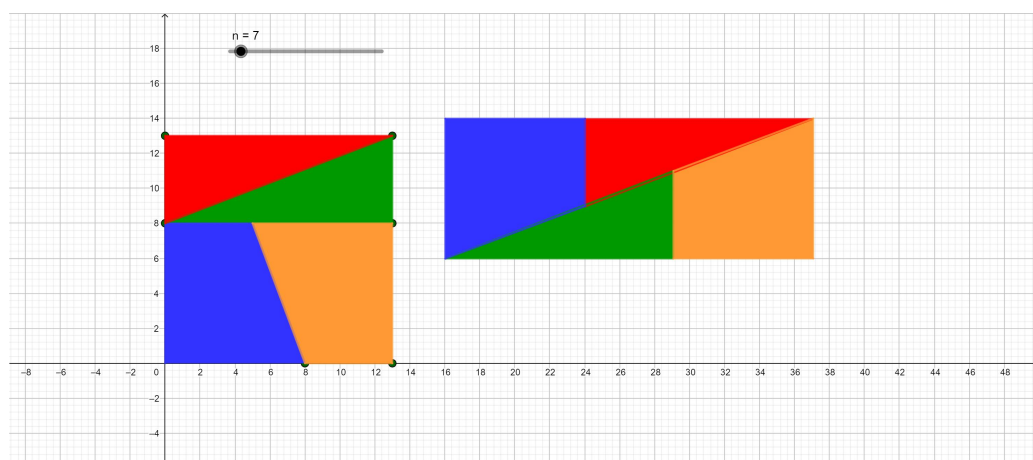
- b) Calcule o valor da área do quadrado e do retângulo obtido obedecendo a restrição de que n é um número par.

Se $n = 6$, temos que o lado do quadrado é dado por $F_6 = 8$, a largura do retângulo é $F_5 = 5$ e o comprimento é $F_7 = 13$. Dessa forma, a área do quadrado será igual a 64 e a área do retângulo 65.

- c) Agora, selecione no controle deslizante um número ímpar. Novamente, movimente os triângulos e trapézios, de modo a formar um retângulo.

Na Figura 4.7 temos a representação para o caso em que $n = 7$

Figura 4.7 – Atividade: Paradoxo de Cassini em que $n = 7$



Fonte: Autora.

d) Calcule o valor da área do quadrado e do retângulo obtido na condição em que n é ímpar.

Considerando $n = 7$, por exemplo, o lado do quadrado é dado por $F_7 = 13$, a largura do retângulo é $F_6 = 8$ e o comprimento é $F_8 = 21$. A área do quadrado será igual a 169 e a área do retângulo 168.

Neste momento, os alunos serão convidados a perceber que nos dois casos as áreas do quadrado e do retângulo não são iguais. Constatando ainda, que quando o valor de n é par temos o acréscimo de uma unidade na área do retângulo em relação à área do quadrado. E, quando o valor de n é ímpar a área do retângulo tem uma unidade a menos comparado-se com a área do quadrado.

Ao solicitar para que os alunos ampliem os retângulos em cada um dos casos de modo a investigar o que está ocorrendo, os mesmos podem chegar as seguintes conclusões:

- i) Quando n é um número par observa-se a existência de um paralelogramo no retângulo.
- ii) Quando n é um número ímpar ocorre uma sobreposição de áreas no retângulo.

Este fato é conhecido como o Paradoxo de Cassini. Para entendê-lo, o Quadro 4.4 deve ser preenchida. Nela são apresentados os valores de n e as áreas correspondentes dos quadrados e retângulos.

Quadro 4.4 – Trigêmeos de Fibonacci e relação entre as áreas

n	Trigêmeos de Fibonacci			Área do quadrado	Área do retângulo
	F_{n-1}	F_n	F_{n+1}		
4	2	3	5	9	10
5	3	5	8	25	24
6	5	8	13	64	65
7	8	13	21	169	168
8	13	21	34	441	442
9	21	34	55	1156	1155
10	34	55	89	3025	3026
11	55	89	144	7921	7920
12	89	144	233	20736	20737

Fonte: Autora.

Em seguida, os alunos serão indagados sobre qual seria a generalização relacionando F_{n+1} , F_n e F_{n-1} e o valor obtido para a área de cada uma das situações. Neste instante, os educandos serão levados a concluir que com $n \geq 1$, temos que $F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n-1}$. A qual é a relação do Paradoxo de Cassini.

A Proposição (2.3) demonstra a Identidade de Cassini. No Capítulo 3, aprofundamos o estudo do paralelogramo, onde analisamos o ângulo do mesmo nos casos em que n é par e ímpar.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em conta a interação dos alunos. Dessa forma, o professor verificará se há necessidade de complementar mais o assunto.

4.4 ATIVIDADE 4 - DOMINÓS

Nesta atividade utilizamos uma situação problema envolvendo dominós baseado no exercício de Morgado e Carvalho (2015).

Conteúdo: Sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Identificar e formular a ocorrência da sequência de Fibonacci.

Objetivos Específicos:

- 1) Proporcionar aos educandos a compreensão da sequência de Fibonacci com a abstração do conceito por meio da resolução de um problema;
- 2) Desenvolver o raciocínio lógico.

Contexto didático: Essa aula foi planejada e pode ser utilizada na introdução do conceito de sequências numéricas (especificamente, no estudo da sequência de Fibonacci) nas aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Material didático: No desenvolvimento desta aula serão necessárias cinco peças de dominó para cada dupla, quadro, lápis e/ou caneta, uma folha (Apêndice B).

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da resolução de problemas. Aguardamos a interação dos alunos na explanação dos conteúdos. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci, tendo como base o conceito de sequências.

Em seguida, apresentamos uma forma de direcionamento da aula por parte do professor.

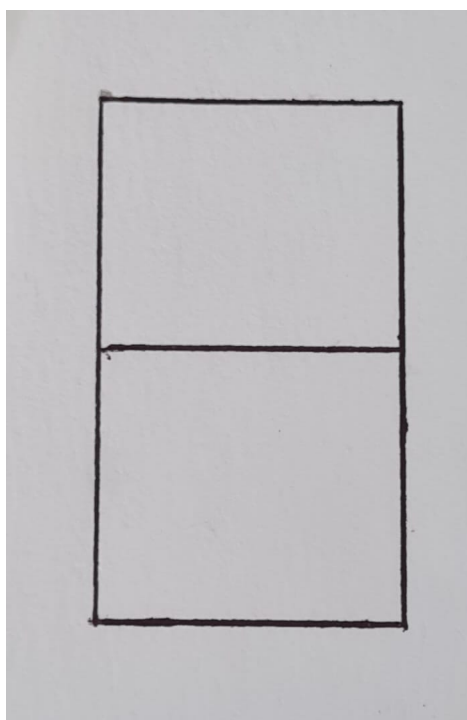
Em um primeiro instante, o professor inicia sua aula propondo o Problema 4.1 à turma:

Problema 4.1. *De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro $2 \times n$ com n com dominós 2×1 iguais?"*

Como a resposta para esta pergunta não se mostra de maneira clara, vemos que se torna necessário um estudo de casos. Ou seja, vamos analisar algumas etapas para então verificarmos se há uma possível generalização e, conseqüentemente, a resposta para esta pergunta.

a) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×1 com um dominó 2×1 ?

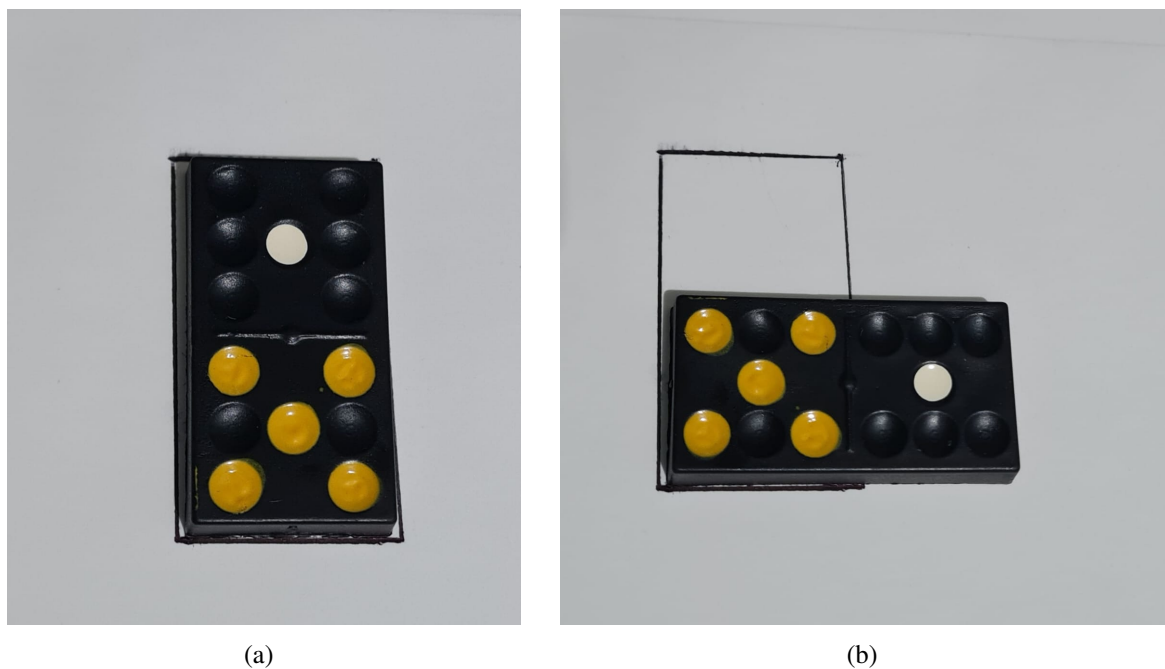
Figura 4.8 – Tabuleiro 2×1



Fonte: Autora.

A Figura 4.8 mostra o tabuleiro 2×1 a ser preenchido. Conforme podemos perceber só há uma forma de cobrir o tabuleiro e esta é obtida colocando o dominó na posição vertical. Pois, se colocarmos a peça na posição horizontal ficará um espaço que não será preenchido o que não pode ocorrer, já que a malha deve ser preenchida inteiramente. A Figura 4.9 expressa as duas situações descritas.

Figura 4.9 – Dominó: (a) Peça na posição vertical; (b) Peça na posição horizontal



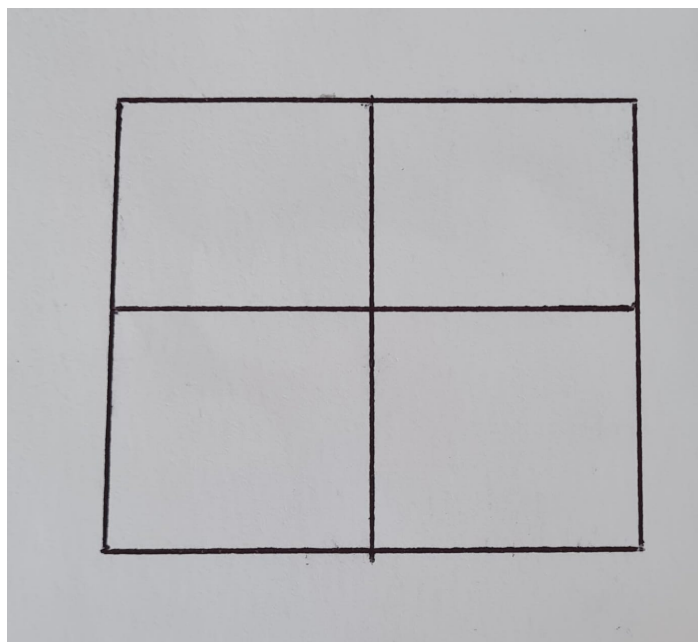
(a)

(b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

b) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×2 com dois dominós 2×1 ?

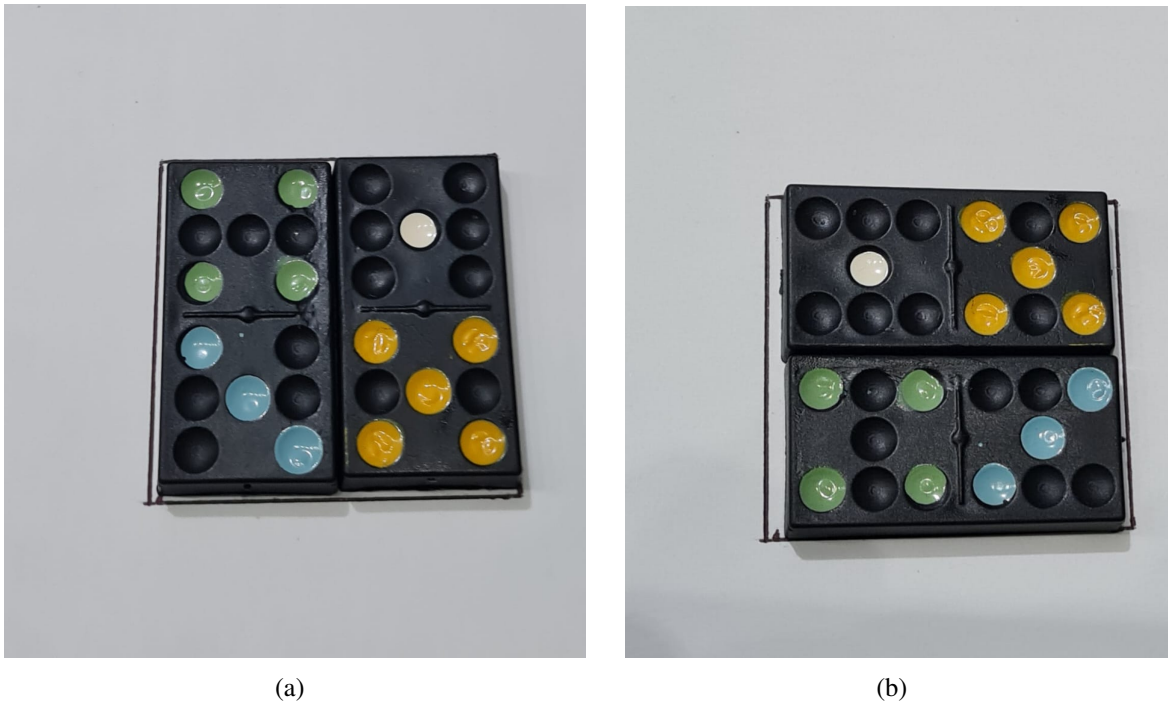
Figura 4.10 – Tabuleiro 2×2



Fonte: Autora.

Por meio da Figura 4.10 visualizamos o tabuleiro 2×2 . E na Figura 4.11 observamos as duas maneiras de preencher o tabuleiro: a primeira é obtida com as duas peças na vertical e a segunda com as duas peças na horizontal.

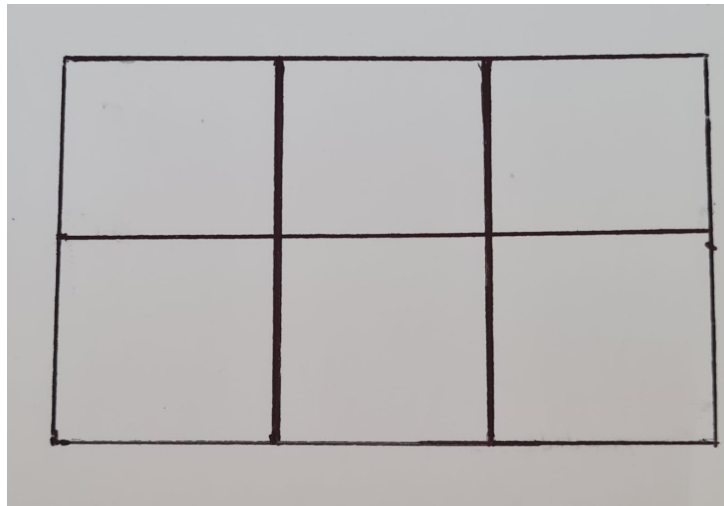
Figura 4.11 – Dominó: (a) Duas peças na posição vertical; (b) Duas peças na posição horizontal



Fonte: (a) e (b) Autora.

c) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×3 com três dominós 2×1 ?

Figura 4.12 – Tabuleiro 2×3



Fonte: Autora.

Pela Figura 4.12 observamos o tabuleiro 2×3 a ser preenchido. A primeira forma é obtida com as três peças na posição vertical. A segunda forma ocorre quando a primeira peça se encontra na vertical e as duas últimas estão na horizontal. E, a terceira duas primeiras peças na horizontal e a terceira peça na vertical. Logo, a resposta é três. Nas Figuras 4.13 e 4.14 podemos visualizar cada uma das situações indicadas anteriormente.

Figura 4.13 – Dominó: três peças na posição vertical



Fonte: Autora.

Figura 4.14 – Dominó: (a) Primeira peça na vertical e as duas últimas na posição horizontal; (b) Duas primeiras peças na horizontal e terceira peça na posição vertical



(a)

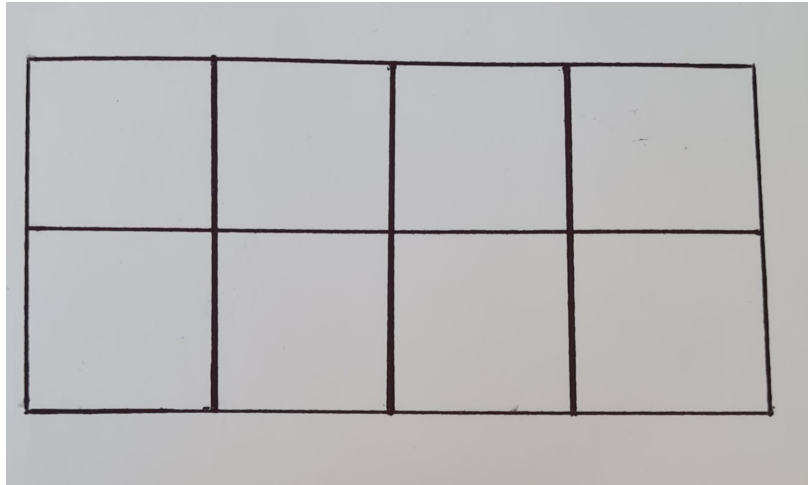


(b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

d) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×4 com quatro dominós 2×1 ?

Figura 4.15 – Tabuleiro 2×4



Fonte: Autora.

A Figura 4.15 mostra o tabuleiro 2×4 . Para este caso observamos as seguintes maneiras:

- i) As quatro peças na vertical;
- ii) As duas primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal;
- iii) A primeira e quarta peças na vertical, segunda e terceira na posição horizontal;
- iv) As quatro peças na horizontal;
- v) As duas primeiras peças na horizontal e as duas últimas na vertical.

Portanto, são 5 formas de colocar os dominós. As Figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19 ilustram cada uma das possibilidades propostas acima.

Figura 4.16 – Quatro peças na posição vertical



Fonte: Autora.

Figura 4.17 – Duas primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal



Fonte: Autora.

Figura 4.18 – Dominó: (a) A primeira e quarta peças na vertical, segunda e terceira na posição horizontal; (b) As quatro peças na horizontal



(a)



(b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

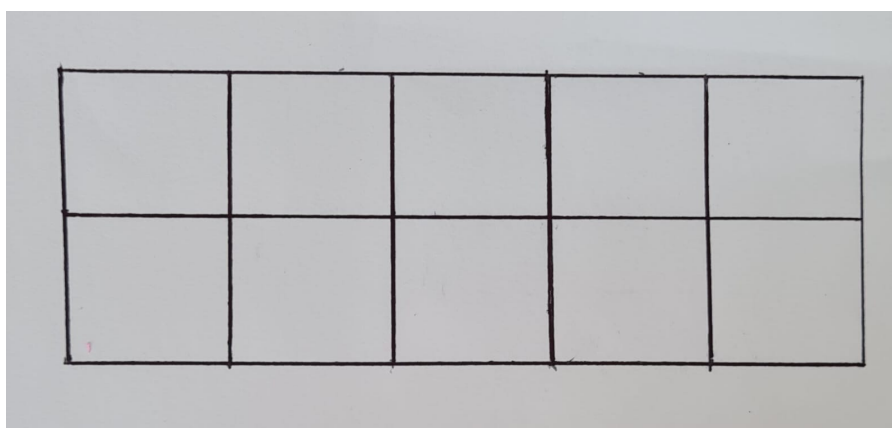
Figura 4.19 – Dominó: duas primeiras peças na horizontal e duas últimas na vertical



Fonte: Autora.

e) De quantas formas podemos cobrir um tabuleiro 2×5 com cinco dominós 2×1 ?

Figura 4.20 – Tabuleiro 2×5



Fonte: Autora.

Pela Figura 4.20 notamos o tabuleiro 2×5 . Depois de algumas tentativas podemos verificar que existem oito formas. Abaixo, descrevemos as possibilidades:

- i) As cinco peças na vertical;
- ii) A primeira peça na vertical e as quatro últimas na horizontal;
- iii) As três primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal;
- iv) A primeira peça na vertical, duas peças na horizontal e as duas últimas na vertical;
- v) As duas primeiras peças na vertical, terceira e quarta peças na horizontal e a última peça na vertical;
- vi) As quatro primeiras peças na horizontal e a quinta peça na vertical;
- vii) As duas primeiras peças na horizontal e as três últimas na vertical;

viii) As duas primeiras peças na horizontal, a terceira peça na vertical e as duas últimas peças na horizontal.

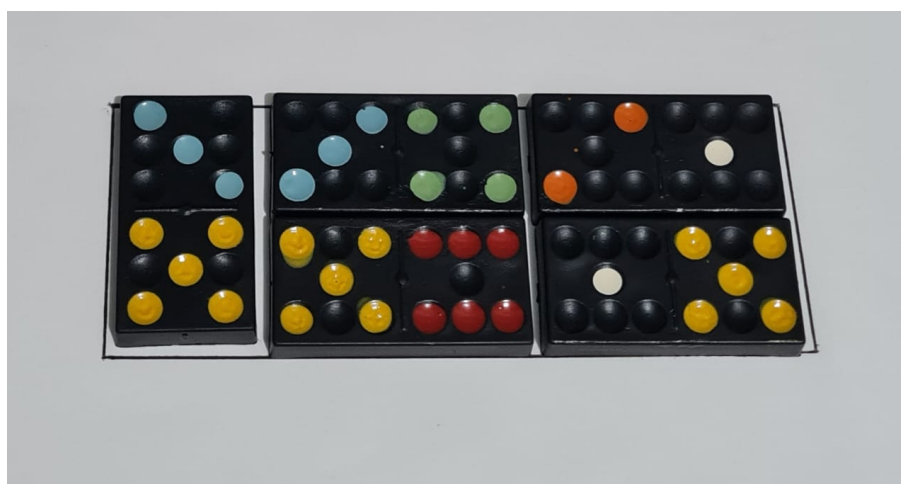
Por meio das Figuras 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27 dispomos a ilustração para cada uma das possibilidades elencadas anteriormente.

Figura 4.21 – Cinco peças na posição vertical



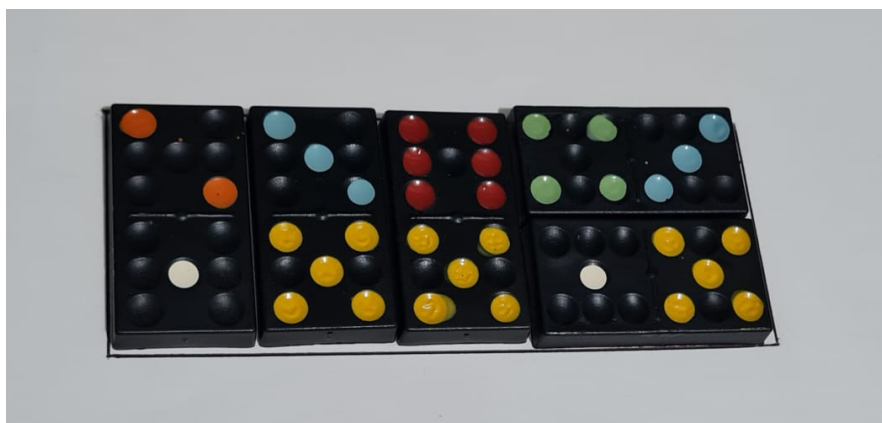
Fonte: Autora.

Figura 4.22 – A primeira peça na vertical e as quatro últimas na horizontal



Fonte: Autora.

Figura 4.23 – As três primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal



Fonte: Autora.

Figura 4.24 – A primeira peça na vertical, duas peças na horizontal e as duas últimas na vertical



Fonte: Autora.

Figura 4.25 – As duas primeiras peças na vertical, terceira e quarta peças na horizontal e quinta peça na vertical



Fonte: Autora.

Figura 4.26 – Quatro primeiras peças na posição horizontal e quinta peça na vertical



Fonte: Autora.

Figura 4.27 – Dominó: (a) As duas primeiras peças na horizontal e as três últimas peças na vertical; (b) As duas primeiras peças na horizontal, terceira na vertical e as duas últimas na horizontal



(a)



(b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

Em seguida, o professor irá solicitar para que os alunos preencham o Quadro 4.5 onde consta a quantidade de peças na primeira coluna e na segunda coluna a quantidade de formas de preencher o tabuleiro de altura 2 e largura n .

Quadro 4.5 – Dominós

QUANTIDADE DE PEÇAS	FORMAS DE COLOCAR OS DOMINÓS
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8

Fonte: Autora.

- f) Qual é a relação entre a quantidade de peças e o número de formas de preenchimento do tabuleiro?

A resposta deve ser encaminhada ao fato de que a quantidade de formas de preenchimento da malha quando acrescentada uma peça é obtida por meio da soma das maneiras dadas nas duas etapas anteriores.

- g) Como poderíamos responder à questão inicial? Ou seja, "De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro $2 \times n$ com n dominós de altura 2×1 iguais?"

Considere um tabuleiro de tamanho $2 \times n + 2$ colunas. Em seu preenchimento devemos tomar os seguintes casos:

- i) Colocar um dominó no canto esquerdo na posição vertical, restando um tabuleiro $2 \times n + 1$ a ser preenchido.
- ii) Ainda no lado canto esquerdo, a outra forma é obtida colocando dois dominós na horizontal restando um tabuleiro $2 \times n$.

Dessa forma, indicando F_n , F_{n+1} e F_{n+2} como o número de formas de colocar os dominós no tabuleiro segue que a generalização desta situação é dada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Esta é uma sequência recursiva onde os primeiros termos são $F_1 = 1$ e $F_2 = 2$. A qual é exatamente a sequência de Fibonacci.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta, levando-se em consideração a interação dos alunos.

4.5 ATIVIDADE 5 - PROBABILIDADE

Para a elaboração desta atividade buscamos uma situação problema relacionada as sequências binárias a qual foi sugerida por Boodey (2020). Na descrição da atividade optamos pela resolução de problemas como encaminhamento metodológico.

Conteúdo: Probabilidade e a sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Estabelecer uma conexão entre a sequência de Fibonacci e Probabilidade.

Objetivos Específicos:

- 1) Proporcionar o trabalho com a resolução de problemas;
- 2) Resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.

Contexto didático: Essa aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do segundo ano do Ensino Médio, nas quais já foram trabalhados os conceitos da sequência de Fibonacci e Probabilidade. Salientamos que a atividade não contempla toda a sequência de aulas envolvendo os conteúdos de sequências e probabilidade.

Material didático: Para o desenvolvimento desta aula, serão necessários uma folha (Apêndice C), lápis, caneta e borracha.

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da resolução de problemas. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci e Probabilidade.

Abaixo, apresentamos uma forma de encaminhamento da aula por parte do professor. Inicialmente será feita uma breve explicação sobre o uso de números binários.

Uma palavra é um arranjo ordenado de símbolos, os quais não precisam ter um significado. Por exemplo, *fgh* é uma palavra que usa as letras do alfabeto. Nesse contexto, a sequência 001101 é uma palavra binária. Um *bit* corresponde a 0 ou 1. Onde, a palavra *bit* é a contração da expressão *binary digity* (da Língua Inglesa). O comprimento de uma palavra representada na sequência binária é dada pela quantidade de símbolos nela contidos.

Dessa forma, podemos considerar que a palavra 001101 tem comprimento 6, pois em sua composição são apresentados 6 símbolos. Tendo em vista o exposto, vamos analisar o número de palavras com n bits que não contêm dois 1's consecutivos, o qual será denotado por b_n . Para tanto, vamos responder aos itens a seguir:

- a) Quando $n = 1$ qual é a quantidade de palavras em que não temos dois 1's consecutivos?

A resposta é 2. Logo, $b_1 = 2$. Pois, as palavras são 0 e 1.

b) Para $n = 2$?

A resposta é 3 o que implica em $b_2 = 3$. São elas: 00, 01 e 10.

c) Para $n = 3$?

Observamos que, $b_3 = 5$. Tem-se que: 000, 001, 100, 010 e 101.

d) E com $n = 4$?

Encontramos $b_4 = 8$. São elas: 0000, 0001, 0100, 0010, 0101, 1010, 1001 e 1000.

Em seguida, os alunos serão indagados sobre qual seria o padrão a ser observado na quantidade de palavras e, se existe uma conexão entre a quantidade de palavras em cada etapa e qual seria esta conexão. Neste momento, os educandos serão direcionados ao fato de que estes são os números presentes na sequência de Fibonacci.

Posteriormente, vamos tomar uma palavra arbitrária de n bits, a qual denominaremos de z , onde $n \geq 2$. Observamos dois casos a serem analisados:

- i) A palavra em questão z , termina em 0 o que equivale a $z = a_1a_2\dots a_{n-1}0$ (com n bits). O penúltimo dígito da palavra pode ser 0 ou 1. Temos as seguintes situações: $a_1a_2\dots a_{n-2}00$ ou $a_1a_2\dots a_{n-2}10$ ambas com n bits. Portanto, não há restrições com relação ao penúltimo dígito da palavra. Logo, verificamos a existência de b_{n-1} palavras de n bits terminando em 0, não contendo 1's consecutivos.
- ii) Supondo, agora que z termine em 1, o que implica em $z = a_1a_2\dots a_{n-1}1$ (com n bits). Neste caso, o penúltimo termo deve ser 0, ou seja, $a_1a_2\dots a_{n-2}01$ (n bits). Contudo, não há restrições para o antepenúltimo termo da palavra, o qual pode ser 0 ou 1. De onde temos $a_1a_2\dots a_{n-3}001$ ou $a_1a_2\dots a_{n-3}101$. O que nos mostra que existem b_{n-2} palavras de n bits terminando em 1, não contendo 1's consecutivos.

Como os dois casos são mutuamente exclusivos, utilizando o princípio da adição, segue que:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2},$$

para $n \geq 3$, onde $b_1 = 2$ e $b_2 = 3$. Assim, $b_n = F_{n+2}$ e $n \geq 1$.

Agora, transpondo esta situação utilizando as sequências binárias, para um acontecimento com moedas.

Suponhamos que n moedas honestas sejam lançadas sequencialmente ao acaso. Com base neste fato, a probabilidade de que duas moedas adjacentes não dêem cara é $\frac{F_{n+2}}{2^n}$. Onde o número total de resultados de forma que duas moedas consecutivas não dêem cara é F_{n+2} e 2^n é o número total de lançamentos.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em consideração a interação dos alunos.

4.6 ATIVIDADE 6 - SUDOKU DE FIBONACCI

O Sudoku é um jogo matemático. De acordo com Neves (2005) a criação do jogo é dada ao matemático suíço *Leonhard Euler* (1707-1783). No século *XVII Euler* elaborou um jogo denominado "Quadrados latinos", neste jogo cada algarismo deveria aparecer uma vez em cada linha e em cada coluna. O formato padrão com 9 linhas e 9 colunas, aparentemente elaborado pelo arquiteto Howard Garns, começou a ser publicado nos Estados Unidos na década de 1970. Atualmente, o mesmo pode ser encontrado em revistas próprias e até disponível como aplicativo de celular.

O jogo é constituído por um quadrado com 9 linhas e 9 colunas o qual pode ser subdividido em quadrados menores 3×3 . Sendo que, certas células já contêm números, chamados de dados. Segundo Percília (2023) a finalidade do jogo é preencher as células vazias, com um número em cada célula, de forma que cada coluna, linha e região contenham os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 apenas uma vez.

Como estamos trabalhando com a sequência de Fibonacci não devem ser repetidos na mesma linha, coluna e retângulo 2×3 marcado, um mesmo número pertencente à sequência de Fibonacci, com exceção do número 1, o qual irá figurar duas vezes. Ou seja, cada célula vazia na grade deve ser preenchida com os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8.

Nas duas opções de Sudoku Fibonacci sugeridos por Kumar (2018) temos duas tabelas com 6 linhas e 6 colunas, onde são empregados em seu preenchimento os seis primeiros números da sequência de Fibonacci. Logo, podemos concluir que no preenchimento de uma tabela com n linhas e n colunas devem ser utilizados os n primeiros números da sequência de Fibonacci, obedecendo as mesmas regras iniciais.

Conteúdo: Raciocínio Lógico e a sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Desenvolver o raciocínio lógico em paralelo com a sequência de Fibonacci.

Objetivos Específicos:

- 1) Aprimorar a concentração e o raciocínio lógico;
- 2) Formalizar com os alunos o conceito envolvido na sequência de Fibonacci.

Contexto didático: Essa atividade foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, onde já foi trabalhado o conceito da sequência de Fibonacci.

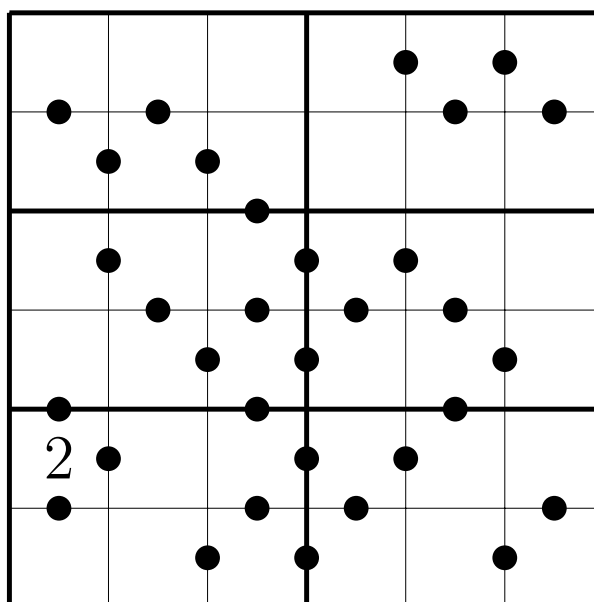
Material didático: Para o desenvolvimento desta aula serão necessárias uma folha contendo o jogo (Apêndice D), lápis e borracha.

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará de maneira expositiva onde será realizada a explicação do jogo. Contamos com a participação dos alunos durante a realização desta atividade.

No decorrer, trazemos duas possibilidades de direcionamento e no Apêndice D apresentamos outro exemplo de jogo (criado pela autora) considerando os critérios para a resolução da atividade.

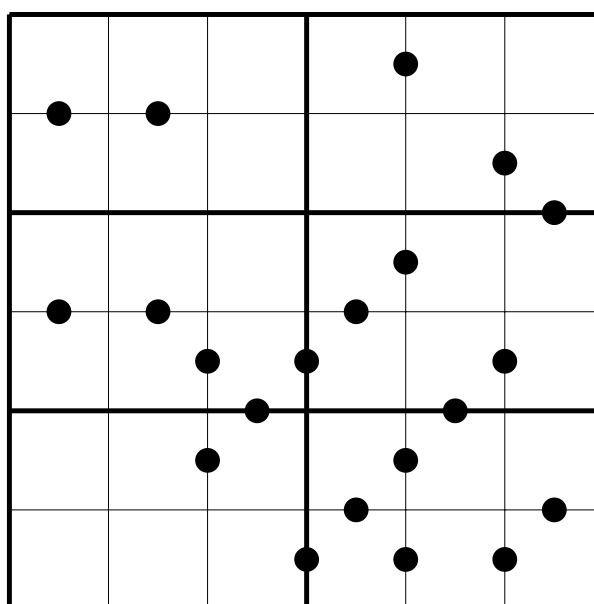
As Figuras 4.28 e 4.29 mostram duas possibilidades para o jogo, em cada uma delas podemos notar um círculo entre duas células vizinhas o que indica que estas possuem dois números consecutivos de Fibonacci.

Figura 4.28 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 1



Fonte: Autora.

Figura 4.29 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 2



Fonte: Autora.

As Figuras 4.30 e 4.31 apresentam as soluções em cada caso.

Figura 4.30 – Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 1

5	1	8	1	2	3
3	2	1	8	1	5
8	5	1	2	3	1
1	3	2	1	5	8
2	1	3	5	8	1
1	8	5	3	1	2

Fonte: Autora.

Figura 4.31 – Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 2

2	8	3	1	1	5
1	5	1	8	3	2
5	2	8	1	1	3
3	1	1	2	5	8
1	3	2	5	8	1
8	1	5	3	2	1

Fonte: Autora.

De acordo com Kumar (2018) o primeiro quebra-cabeça Sudoku Fibonacci é mais fácil, pois temos o número 2 presente e ele irá auxiliar o aluno a compreender as regras do jogo. No entanto, o segundo quebra-cabeça Sudoku Fibonacci não contém nenhum dígito dado e fará com que os alunos se sintam desafiados.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação da participação e da interação dos alunos.

5 CONCLUSÃO

Neste estudo tivemos a oportunidade de aprofundar nosso conhecimento com relação a sequência de Fibonacci, algumas identidades que relacionam a sequência de Fibonacci com os números de Lucas e a sequência de Gibonacci. Apresentamos, ainda, ocorrências envolvendo os números de Fibonacci dentre as quais podemos citar o estudo de algumas identidades estabelecendo um paralelo entre a representação algébrica e geométrica, probabilidade e o algoritmo de Euclides.

Tais ocorrências não costumam ser enfatizadas ou evidenciadas com frequência na Educação Básica. Fato que pode ser verificado durante o levantamento bibliográfico, onde percebemos que grande parte dos trabalhos envolvendo o tema de Fibonacci recaia em aplicações como, por exemplo, o problema dos coelhos o que se mostrou de maneira desafiadora e motivadora. Considerando a relevância da sequência de Fibonacci não devemos nos limitar às suas aplicabilidades usuais.

Neste sentido, vemos como pertinente o aprofundamento de nosso estudo, pesquisa e desenvolvimento de outros trabalhos os quais possibilitem aos professores e alunos diferentes interpretações do tema.

Na elaboração das atividades buscamos contribuir com experiências que incluam metodologias utilizando a tecnologia de informação (por meio da utilização do *software* Geogebra), jogos matemáticos e a resolução de problemas.

Por fim, nosso anseio é de que este trabalho possa agregar momentos onde os professores possam aprimorar a sua prática docente e os alunos consigam vivenciar uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

- BARRETO, P. H. J. de S. **Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell**. 60 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, Ceará, 2019. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4688&id2=170172257>. Acesso em: 11 nov. 2022. 15
- BENJAMIN A. T.; QUINN, J. J. **Proofs that really count: the magic of Fibonacci numbers and more**. The University of Utah: Department of Mathematics, 2004. Disponível em: <<http://www.math.utah.edu/~ptrapa/math-library/benjamin/benjamin-quinn-fibonacci.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2023. 57
- BOODEY, M. **An exploration of the use of the Fibonacci sequence in unrelated mathematics disciplines**. 50 f. Tese (Doutorado) — University of New Hampshire, Durham, Carolina do Norte, 2020. Disponível em: <<https://scholars.unh.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1522&context=honors>>. Acesso em: 11 fev. 2023. 42, 75
- BRASIL. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 set. 2022. 12
- BURTON, D. M. **Elementary number theory**. New York: Mc Graw-hill, 2010. 450 p. 17, 20
- CORTES, R. **Sequência de Fibonacci - o que é? Para que serve? Exemplos e aplicação**. Gestão Educacional, 2022. Disponível em: <<https://www.gestaoeducacional.com.br/sequencia-de-fibonacci/>>. Acesso em: 15 nov. 2022. 13
- DELAQUA, V. **O que é a sequência de Fibonacci e como ela se relaciona com a arquitetura?** Archdaily, 2022. Disponível em: <https://www.archdaily.com.br/br/974550/o-que-e-a-sequencia-de-fibonacci-e-como-ela-se-relaciona-com-a-arquitetura?ad_medium=gallery>. Acesso em: 11 nov. 2023. 13
- EDMARK, J. **Fibonacci spiral jigsaw puzzle**. S.l.: Autodesk Instructables, 2014. Disponível em: <<https://www.instructables.com/Fibonacci-Spiral-Jigsaw-puzzle/>>. Acesso em: 25 jul. 2023. 54
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2017. v. 1. 689 p. 12, 14, 20, 32, 60
- KUMAR, R. **Consecutive Fibonacci sudoku puzzles**. S.l.: Fun with puzzles, 2018. Disponível em: <<https://www.funwithpuzzles.com/2018/05/consecutive-fibonacci-sudoku-puzzles.html>>. Acesso em: 05 ago. 2023. 77, 80
- LESSA, J. R. **O número de ouro**. InfoEscola, 2022. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/matematica/numero-de-ouro/>>. Acesso em: 02 set. 2022. 13
- LONG, C. On a fibonacci arithmetical trick. **The Fibonacci quarterly**, v. 23, n. 3, p. 221–231, 1985. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/23-3/long.pdf>>. Acesso em: 06 set. 2022. 27, 29

- MACENA, E. da S. **Identidades dos números de Fibonacci: uma proposta de sequência didática para turmas olímpicas de nível 2**. 82 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, 2018. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4023&id2=160090096>. Acesso em: 11 nov. 2022. 15
- MORGADO A. C. E CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. único. 294 p. 12, 17, 63
- NEVES, L. **O que é sudoku?** Super Interessante, 2005. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/historia/o-que-e-sudoku>>. Acesso em: 6 set. 2023. 77
- PACHECO, G. F. **Sequência de Fibonacci: história, propriedades e aplicações**. 92 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, 2021. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6204&id2=171053323>. Acesso em: 11 nov. 2022. 15
- PERCÍLIA, E. **Sudoku**. Brasil Escola, 2023. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/curiosidades/sudoku.htm>>. Acesso em: 6 set. 2023. 77
- RAMOS, T. C. A importância da matemática na vida cotidiana dos alunos do ensino fundamental 2. **Cairu em revista**, v. 17, n. 9, p. 201–218, 2017. Disponível em: <https://www.cairu.br/revista/arquivos/artigos/20171/11_IMPORTANCIA_MATEMATICA.pdf>. Acesso em: 28 out. 2022. 12
- SANTOS, F. L. **Um breve estudo da sequência de Fibonacci usando recorrências e geometria: uma aplicação no ensino básico**. 80 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Sergipe, Itabaiana, Sergipe, 2021. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6259&id2=171055482>. Acesso em: 11 nov. 2022. 15
- SENTONE, F. G. **Paradoxos geométricos em sala de aula**. 106 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2017. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2701/1/CT_PROFMAT_M_Sentone.Francielle%20Gon%c3%a7alves_2017.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2022. 15
- SILVA, B. A. e. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. 99 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3053&id2=73922>. Acesso em: 11 nov. 2022. 15
- SILVA, P. E. A. da. **A sequência de Fibonacci e ensino médio**. 58 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, Rio Grande do Norte, 2017. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3528&id2=150251331>. Acesso em: 11 nov. 2022. 15

APÊNDICE A - ATIVIDADE: DESVENDANDO SEQUÊNCIAS

Inicialmente, pense em dois números naturais e coloque-os nas duas primeiras linhas do Quadro .1.

Quadro .1 – Desvendando sequências IV

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: Autora

Posteriormente, o Quadro acima deve ser preenchido da seguinte forma: a terceira linha deve ser composta pela soma dos números colocados na primeira e segunda linha; a quarta linha deve ser composta pela soma dos números colocados na segunda e na terceira linhas, a quinta linha deve ser composta pela soma dos números da terceira e quarta linhas. E, assim por diante, até a décima linha.

Em seguida, responda às questões abaixo:

- Registre a soma dos 10 primeiros números.
- Decomponha o resultado desta soma em fatores primos.
- Em seguida, repita todo o processo descrito anteriormente. Ou seja, escolha outros dois números naturais e, preencha o Quadro .2. Efetue a soma dos 10 primeiros números e, decomponha o resultado desta soma em fatores primos.

Quadro .2 – Desvendando sequências

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: Autora

- d) Qual o número que aparece em ambas as decomposições em fatores primos dos números obtidos nos itens b) e c)?
- e) O número que é comum na decomposição em fatores primos dos itens b) e c), pode ser multiplicado por um dos elementos presentes na sequência. Assim, o resultado obtido por meio desta multiplicação é o mesmo da soma. Qual a posição deste número, em cada um dos casos?
- f) Agora, vamos fazer o mesmo processo substituindo por letras os valores iniciais (por exemplo, as letras a e b). Dessa forma, vamos preencher o Quadro .3.

Quadro .3 – Desvendando sequências

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	a
2	b
3	$a + b$
4	$2a + b$
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: Autora

- g) Efetue a soma dos 10 elementos obtidos em cada uma das etapas do item f). Logo após, reescreva o resultado colocando em evidência o termo comum aos dois coeficientes (a e b). O que podemos inferir?

APÊNDICE B - ATIVIDADE: DOMINÓS

Problema .1. *De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 1 com dominós altura 2 e largura 1?"*

Análise dos casos:

- a) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 1 com uma peça de dominó de altura 2 e largura 1?
- b) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 2 com duas peças de dominó de altura 2 e largura 1?
- c) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 3 com três peças de dominó de altura 2 e largura 1?
- d) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 4 com quatro peças de dominó de altura 2 e largura 1?
- e) E com cinco peças de dominó, de quantas formas podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 5?

Preencha o Quadro .4 onde consta a quantidade de peças na primeira coluna e na segunda coluna a quantidade de formas de preencher a malha de altura 2 e largura n , onde n é a quantidade de peças.

Quadro .4 – Dominós

QUANTIDADE DE PEÇAS	FORMAS DE COLOCAR O DOMINÓ
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: Autora

- f) Qual é a relação entre a quantidade de peças e o número de formas de preenchimento da malha?
- g) Como poderíamos responder à questão inicial? Ou seja, "De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura n com dominós altura 2 e largura 1?"

APÊNDICE C - ATIVIDADE: PROBABILIDADE

Uma palavra é um arranjo ordenado de símbolos, os quais não precisam ter um significado. Por exemplo, fgh é uma palavra que usa as letras do alfabeto. Nesse contexto, a sequência 001101 é uma palavra binária. Um *bit* corresponde a 0 ou 1. Onde, a palavra *bit* é a contração da expressão *binary digity* (da Língua Inglesa). O comprimento de uma palavra representada na sequência binária é dada pela quantidade de símbolos nela contidos.

Dessa forma, podemos considerar que a palavra 001101 tem comprimento 6, pois em sua composição são apresentados 6 símbolos.

Analise o número de palavras com n *bits* que não contêm dois 1's consecutivos, a qual será denotada por b_n .

- a) Quando $n = 1$ qual é a quantidade de palavras em que não temos dois 1's?
- b) Para $n = 2$?
- c) Para $n = 3$?
- d) E com $n = 4$?

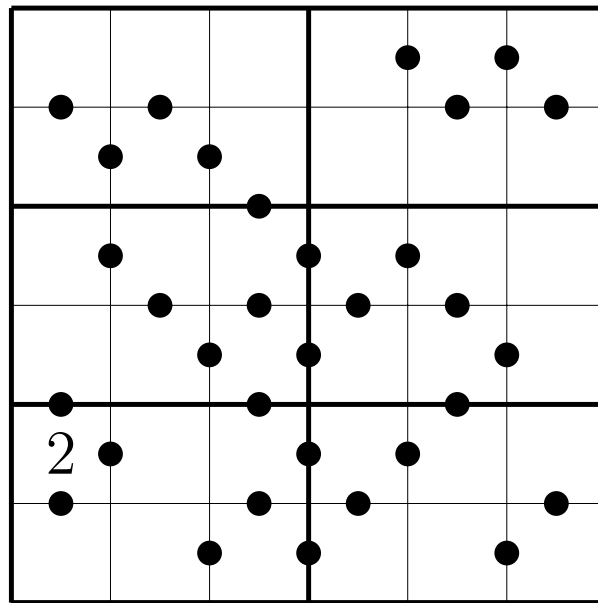
Vamos tomar uma palavra arbitrária de n *bits*, a qual denominaremos de z , onde $n \geq 2$.

O que podemos concluir?

APÊNDICE D - ATIVIDADE: SUDOKU

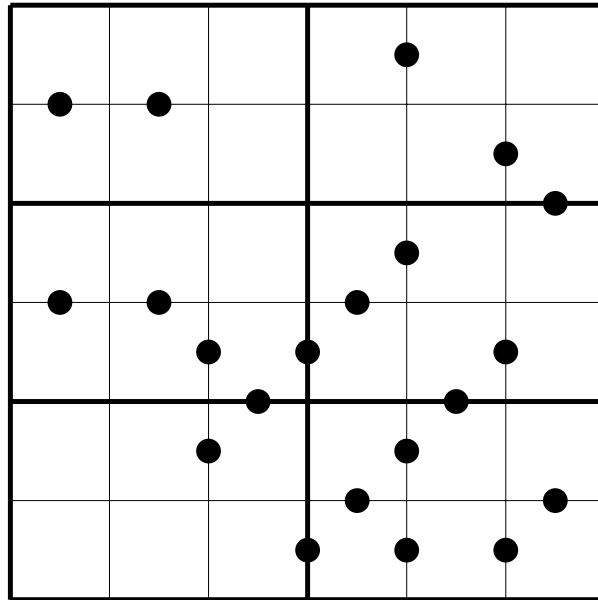
Vamos trabalhar com o Sudoku envolvendo os números da sequência de Fibonacci. Conforme sabemos, não devem ser repetidos na mesma linha, coluna e retângulo 2×3 marcado, um mesmo número pertencente à sequência de Fibonacci, com exceção do número 1, o qual irá figurar duas vezes. Ou seja, cada célula vazia na grade deve ser preenchida com os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8.

Figura .1 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 1



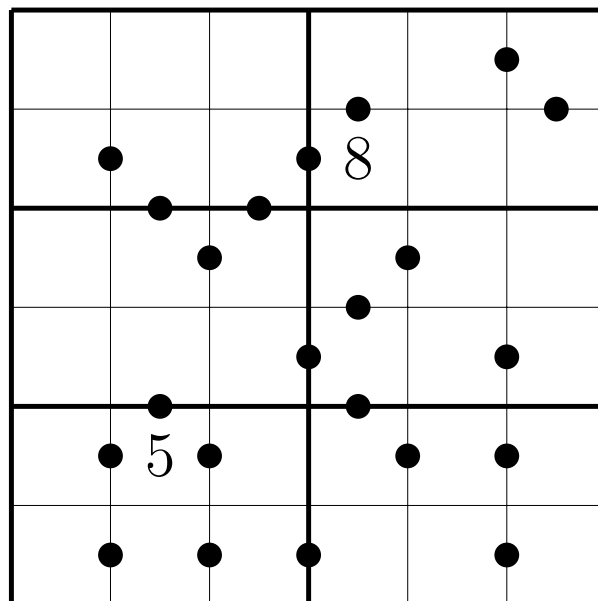
Fonte: Autora

Figura .2 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 2



Fonte: Autora

Figura .3 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 3



Fonte: Autora

Figura .4 – Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 3

8	3	1	5	1	2
2	1	5	8	3	1
5	2	3	1	1	8
1	8	1	2	5	3
3	5	8	1	2	1
1	1	2	3	8	5

Fonte: Autora