UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ANNE ELLEN FERNANDES ROCHA

MATEMÁGICA: A MATEMÁTICA ESCONDIDA EM TRUQUES E MACETES

TRÊS LAGOAS
2023

ANNE ELLEN FERNANDES ROCHA

MATEMÁGICA: A MATEMÁTICA ESCONDIDA EM TRUQUES E MACETES

Dissertação apresentada a Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul Campus de Três Lagoas como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de Mestre.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Sergio Brazil Júnior
UFAC

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
UFMS/CPTL

TRÊS LAGOAS

2023

Dedico este trabalho a minha mãe Matilde, que passou todo o curso de mestrado me incentivando, até nos meus momentos de maior cansaço ou sobrecarregada, e me perguntando a todo instante sobre esta dissertação.

AGRADECIMENTO

Quero agradecer primeiramente à Deus, por cada oportunidade que surgiu em minha vida, por manter as pessoas certas ao meu redor, por ter saúde suficiente para correr atrás de meus objetivos.

O apoio e incentivo dos meus pais Valdir e Matilde que, mesmo sem muitas condições financeira, sempre contribuíram para minha base escolar e me ensinaram a sempre me esforçar e valorizar os estudos, para evoluir não só em conhecimento, mas também como indivíduo.

A minha irmã Emilly, que sempre acreditou em mim e apoiou todos os meus projetos.

Ao meu esposo Handerson, que me incentivou a entrar na área da educação profissionalmente e durante todo o período do mestrado soube ser compreensível e companheiro.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi, pela ajuda imensurável, por dedicar seu tempo e ter paciência em me orientar nesta dissertação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza e Prof. Dr. Sergio Brazil Júnior, pelas contribuições que enriqueceram o trabalho.

Aos meus colegas da Turma 2021 do PROFMAT, pelo apoio, as horas de estudo online e presencial, e as trocas de experiências.

“O brincar é a mais alta forma de pesquisa”. (Albert Einstein)

RESUMO

As facilidades de comunicação e de divulgação propiciadas pela internet trazem consigo diversos materiais na forma de truques, macetes ou mágicas envolvendo cálculos matemáticos e, muitas vezes, conteúdos de Matemática relevantes podem ser destacados nestas apresentações. Neste trabalho são analisadas alguns destes materiais, com o objetivo de evidenciar o raciocínio lógico envolvido e sugerir sua utilização como complemento para aulas de Matemática no ensino básico, possibilitando uma abordagem lúdica que desperta a curiosidade dos estudantes.

Palavras-chaves: Raciocínio lógico. Internet. Ilusionismo.

ABSTRACT

The communication and dissemination facilities provided by the internet bring with them various materials in the form of tricks, tricks or magic involving mathematical calculations and, often, relevant Mathematics content can be highlighted in these presentations. In this work, some of these materials are analyzed, with the aim of highlighting the logical reasoning involved and suggesting their use as a complement to Mathematics classes in basic education, enabling a playful approach that awakens students' curiosity.

Keywords: Logical reasoning. Internet. Illusionism.

.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

DARPA – Defense Advanced Research Projects Agency, sendo sua tradução, agência de projetos de pesquisa avançada de defesa

Arpanet – Advanced Research Projects Agency Network, traduzindo, rede de agências para projetos de pesquisas avançadas

TDIC – Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

mdc – Máximo divisor comum

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ser professor é um dom que exige enfrentar muitos desafios, apesar de haver o prazer de ensinar, nos tempos atuais o educador divide a atenção com meios de comunicação, redes sociais, notícias midiáticas que são dinâmicas e atrativas ao seu público-alvo. A todo momento o professor deve estar se reinventando e buscando novas maneiras não somente de ensinar seu aluno, mas também de mostrar como este conhecimento se faz importante e interessante. Este raciocínio é válido para todas as áreas, mas na área de Matemática se pronuncia de forma mais enfática. Nas palavras de Klein (apud TAHAN, 1972, p. 10)

> Aquele que ensina Matemática e não pratica, de quando em quando, uma recreação aritmética, pode ser um gênio como Poincaré, um novo Weierstrass, um George Cantor da Álgebra Moderna, mas será sempre um péssimo, um detestável professor.

A curiosidade em cálculos e resultados matemáticos sempre despertaram a atenção do público em geral. Não raras vezes apareciam em formas de macetes, cálculos rápidos ou pequenas mágicas, promovendo descontrações em encontros de barzinhos ou com a família nas comemorações de finais de ano. Na atualidade, o avanço da Internet possibilitou a propagação maciça destes mecanismos, sejam difundidas por mensagens em aplicativos de comunicação como o WhatsApp ou publicações em redes sociais como, Facebook, Instagram e TikTok. Por outro lado, tal como ocorre com as divulgações gerais, as informações são exploradas superficialmente, deixando-se muitas vezes de se extrair a essência principal envolvida.

Neste trabalho é apresentado um repertório de situações ou curiosidades com cálculos matemáticos, que comumente são encontrados em páginas, redes sociais ou divulgadas em aplicativos de mensagens. Em geral, as curiosidades são divulgadas sob a forma de textos, imagens ou vídeos, e costumam prender a atenção do usuário não apenas pelo problema em si, como também em relação à aparente forma aleatória pela qual as soluções são alcançadas.

O material desta proposta com atividades e seus exemplos tem por objetivo incentivar os professores a utilizarem estes e outros materiais do gênero, como recurso didático para complementação de conteúdos em sala, aproveitando-se do interesse que despertam aos estudantes. À partir dos mesmos, o professor pode desenvolver sequências didáticas que utilizem recursos matemáticos com base nos conteúdos que esteja trabalhando em sala, ou até mesmo como motivação para iniciar um conteúdo novo. Com o interesse maior do aluno participante, pode fazê-lo organizar melhor o pensamento, incentivar a busca pela sua solução, trazer de forma participativa e prazerosa o uso da matemática em nosso cotidiano, contribuindo para o desenvolvimento do indivíduo, em suas habilidades e competências, como mencionado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017, p. 266)

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).

Para fins de pesquisa, foram utilizados materiais de estudos em livros e sites, atividades que demonstravam ser intrigantes em sua resolução.

O capítulo 1 trata sobre a importância do estudo da Matemática, como ela auxilia no desenvolvimento do indivíduo, e sua presença constante no cotidiano social.

O capítulo 2 traz um pouco da história da criação da internet, e como ela se faz importante a sociedade atual.

O capítulo 3 é demonstrado os conceitos básicos para a resolução das atividades apresentadas no capítulo 4, onde encontra-se a proposta, cada exercício com suas instruções de aplicação e o raciocínio utilizado para solucioná-lo.

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

Muitas pessoas, principalmente os professores de Matemática, já devem ter escutado as seguintes indagações, "por que devemos estudar Matemática?", "onde vou utilizar estas atividades em minha vida?". Para respondê-las, é necessário ter o conhecimento inicial do que significa a Matemática e como ela está presente no cotidiano.

Por sua etimologia, é possível localizar no site Dicionário Etimológico que, a palavra Matemática deriva da palavra grega "matemathike", onde "mathema" significa compreensão, explicação, ciência, conhecimento, aprendizagem; "thike" significa arte. Assim Matemática é a arte de compreensão, a arte do conhecimento.

No dicionário online Oxford Languages, tem-se que Matemática é a "ciência que estuda, por método dedutivo, objetos abstratos (números, figuras, funções) e as relações existentes entre eles"; e por conceito pedagógico é o "ensino dos processos, operações e propriedades matemáticas".

Observando estes significados e o dia a dia social, observa-se que a Matemática é uma presença constante na vida das pessoas, seja por meio de formas, quantidades, medidas, e de várias outras maneiras. Para os anos iniciais de ensino fundamental, um vídeo muito utilizado nas escolas é "Donald no País da Matemágica", de fácil visualização no canal Educação Documentários na plataforma do Youtube, do qual mostra aos educandos que a Matemática vai além dos números. Com o vídeo é possível ver a presença da Matemática na música e instrumentos musicais, em construções desde os tempos antigos, nas formas geométricas e todas as formas presentes na natureza, em jogos e brincadeiras de crianças, jovens e adultos, e diversas situações onde a Matemática é utilizada naturalmente.

Esta disciplina é tão ampla que ao ser apresentada nas escolas no ensino fundamental, é subdividida em unidades temáticas conforme a BNCC: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística; cada uma delas trabalhando um campo de conhecimento distinto mas que juntas "reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação" (BNCC, 2017, p. 268).

Com estas informações, pode-se concluir que a Matemática está além de números, mas envolve conceitos que permeiam outras disciplinas e auxiliam em sua compreensão. Oliveira (2007, p.5) explana que, "ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas". Porém, este entendimento não tem se materializado de forma tão simples quanto parece. Muitos alunos no momento de desenvolver estratégias para resolução de problemas enxergam esta disciplina como muito complexa e se sentem desmotivados a desenvolvê-la nas aulas, determinando que é algo de difícil compreensão. Esta forma de classificar a disciplina estabelece um bloqueio que, por si só, impede ou limita o alcance do processo de ensino-aprendizagem.

Neste instante, entra o papel do educador. Cabe ao professor, ressignificar o ensino da disciplina Matemática trazendo para sua aula elementos lúdicos, indagadores, desafiadores, para que torne o conhecimento prazeroso, divertido e intrigante. Segundo Oliveira (2007, p.5)

> Nós, como educadores matemáticos, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas.

O professor tem a função de mediador em sala de aula, entre seus alunos e o conhecimento ao seu redor que deve ser compreendido. Este, entende que em cada discente há um ser humano único, que no seu cotidiano traz o conhecimento de suas vivências, com sua própria leitura de mundo, e quando se junta ao grupo, o professor irá utilizá-los em busca de estratégias com intuito de motivá-lo a alcançar novos saberes. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN, 1997, p. 32), tem-se que:

> É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática.

Conhecendo seu público alvo, suas vivências e interesses, o docente tem como desenvolver metodologias onde o aluno se torna protagonista das atividades, seja participativo, e tenha motivação pela arte do conhecimento além da realidade de sua comunidade. Relatos de autores como Piaget, Vygotsky, Dewey, Freire e outros estudiosos sobre como o indivíduo aprende, reforçam a ideia de que para que haja esta ação é necessário que a aprendizagem aconteça através de metodologias ativas, onde a pessoa participe, construa o conhecimento de forma significativa, e ao ser desafiado consiga desenvolver meios com o auxílio do professor para sanar suas dificuldades. Esta interação na fase escolar, forma indivíduos que utilizam os conceitos matemáticos, o raciocínio lógico, as estratégias de resolução de problemas, inclusive em seu cotidiano.

Ao se deparar com uma situação problema é necessário entender que o maior desafio não é encontrar sua resposta, mas sim entender a pergunta. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997, p. 33 e 34), a proposta para a resolução de problemas pode ser resumida pelos seguintes princípios:

> • o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> • o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> • aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
> • o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
> • a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Em sala de aula, o dever do educador é apresentar a situação problema de maneira a instigar que seus alunos busquem sua solução, porém é necessário também lhe ensinar e criar ambientes de estudo propícios onde elaborem estratégias de solução e compreendam as diferentes formas de resolvê-los.

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar só seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (POLYA, 1995, p.1).

Indivíduos que adquirem estas habilidades em fase escolar, tem mais facilidades em trabalhar com resolução de problemas na vida adulta. E com base nestes preceitos é que está fundamentado os documentos públicos sobre educação.

CAPÍTULO 2

A IMPORTÂNCIA DA INTERNET NA SOCIEDADE MODERNA

O surgimento da internet acontece no período da Guerra Fria, que durou entre os anos de 1945 a 1991. As potências mundiais estavam concentradas entre os Estados Unidos, que defendia a ideologia capitalista; e a União Soviética, que defendia o socialismo. Os demais países decidiam entre estas duas ideologias para se aliar e defender seu território.

Pouco antes da Guerra Fria começar, Estados Unidos e União Soviética eram aliados e haviam ganho a Segunda Guerra Mundial, e por precaução de novos conflitos, as potências mundiais buscavam junto a seus novos aliados armamento e novas estratégias de combate. Com isso, investimentos em tecnologia aumentaram, como meio de proteção e prevenção em caso de uma nova guerra.

Pesquisando pelo site DocuSign, tem-se a postagem intitulada "Descubra aqui qual é a história por trás da criação da internet", da qual informa historicamente o processo da criação dos primeiros protótipos de internet, que será descrito de forma resumida a seguir.

Por receio de escutas ou divulgação de informações a seus inimigos, os Estados Unidos com o DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency traduzindo "agência de projetos de pesquisa avançada de defesa") utilizou a teoria de comunicação de pacotes de Leonard Kleinrock, apresentada em sua tese de doutorado no MIT, afirmando que dois servidores podem se comunicar por meio de uma rede para enviar e receber informações. O chefe da DARPA na época, J. C. R Licklider, descreveu o conceito como uma rede galáctica para acesso rápido a dados de qualquer lugar do mundo.

Em 1966, Lawrence G. Roberts trabalhando com Robert Kahn e Howard Frank na DARPA, criaram um sistema que possibilitava o compartilhamento de mensagens entre pessoas que estavam distantes. Este foi o primeiro protótipo da rede de internet chamada de Arpanet (*Advanced Research Projects Agency Network traduzindo* "rede de agências para projetos de pesquisas avançadas"). Antes deste período Roberts já havia conectado dois computadores por meio de linhas telefônicas comutadas de baixa velocidade.

Ray Tomlinson, no ano de 1972, criou o software básico de e-mail, e com isso difundiu a Arpanet, fazendo que ela deixasse de seu um meio de utilização exclusivo militar para ser meio de disseminação de informações no meio científico.

Nos anos 90, o britânico Tim Berners-Lee, que era cientista, físico e professor desenvolveu um navegador que é utilizado nos dias de hoje, a *World Wide Web* (www), traduzindo, a Rede Mundial de Computadores - internet. Esta é utilizada como sistema de entrega de documentos de hipertexto (HTTP – HyperText Transf Protocol, em português significa "Protocolo de transferência de Hipertexto"), sendo interconectados e tendo acesso por navegadores conectados à internet.

No Brasil, conforme Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios realizada em 2021, 90% dos lares brasileiros já tem acesso à internet, ou seja, 65,6 milhões de domicílios conectados (informações retiradas pelo site da Casa Civil). Não somente neste país, mas mundialmente, a internet se tornou uma ferramenta essencial para a sociedade moderna. Ela está presente no modo como os seres humanos vivem, trabalham, se comunicam e até mesmo se divertem.

A internet está tão presente na comunidade, que se tornou item de competência específica nº 7 de linguagens e suas tecnologias para o Ensino Médio na BNCC (2017, p. 497)

> Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.
> Essa competência específica diz respeito às práticas de linguagem em ambiente digital, que têm modificado as práticas de linguagem em diferentes campos de atuação social.
> Nesse cenário, os jovens precisam ter uma visão crítica, criativa, ética e estética, e não somente técnica das TDIC e de seus usos, para selecionar, filtrar, compreender e produzir sentidos, de maneira crítica e criativa, em quaisquer campos da vida social.
> Para tanto, é necessário não somente possibilitar aos estudantes explorar interfaces técnicas (como a das linguagens de programação ou de uso de ferramentas e *apps* variados de edição de áudio, vídeo, imagens, de realidade aumentada, de criação de *games*, *gifs*, memes, infográficos etc.), mas também interfaces críticas e éticas que lhes permitam tanto triar e curar informações como produzir o novo com base no existente.

As TDIC citadas no documento se referem a Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, que reúne todos os mecanismos e recursos tecnológicos atuais e cuja utilização no processo de ensino e aprendizagem não pode ser ignorada. Enquadram-se como TDIC os diversos softwares e aplicativos já definidos para o ensino, desde sua criação, mas também adaptações que podem ser geradas a partir de equipamentos e processos digitais. Neste ponto a utilização da internet diversifica as possiblidades de aplicações tecnológicas com repercussões positivas para o ensino, seja para a comunicação através das redes sociais, como para a divulgação de trabalhos técnicos e acadêmicos.

Com a propagação da internet, observa-se que muitas pessoas buscam conteúdos que sejam atrativos ao público geral, com o intuito de ganhar visualizações, buscar interação ou fonte de renda extra. Sabe-se também que durante séculos a magia é uma arte que impressiona o ser humano e que pode ser utilizada para impressionar e atrair atenções. Ao longo deste trabalho, será apresentado materiais divulgados na internet através de sites e redes sociais, que têm a intenção de intrigar os que a visualizam, de maneira a levá-los a pensar em primeiro momento que são solucionados por magia, assim como um mágico realiza um truque de ilusionismo; porém, ao despertar a curiosidade, propõe-se mostrar que ferramentas matemáticas podem explicar o funcionamento do truque.

CAPÍTULO 3

PRÉ-REQUISITOS DA ARITMÉTICA

Para maior compreensão da proposta apresentada e material de apoio neste trabalho, descreve-se a seguir os principais conceitos utilizadas durante as abordagens das atividades desenvolvidas.

3.1 DIVISIBILIDADE

Definição 3.1 Dado a um número inteiro, os múltiplos de a são os números $0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$, em geral ka, onde k é qualquer número $\mathbb{Z}$.

Notação: Pela definição dada, é natural denotar o conjunto dos múltiplos de a por $a \cdot \mathbb{Z}$, ou seja:

$$a \cdot \mathbb{Z} = \{ax \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 3.1

i. Múltiplos de -1: $(-1)\mathbb{Z} = \{-x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ e então $(-1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$;

ii. $2 \cdot \mathbb{Z} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto dos números pares.

Proposição 3.1 Se m e n são múltiplos de a então a soma $m + n$ e produto $m \cdot n$ são múltiplos de a. (Esta proposição afirma que $a \cdot \mathbb{Z}$ é fechado para as operações de adição e multiplicação).

Demonstração: Como m e n são múltiplos de a, tem-se da definição de múltiplos de a que existem $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $m = ka$ e $n = la$. Assim,

$$m + n = ka + la = (k + l)a,$$

pela propriedade distributiva.

Logo, $m + n = k'a$ onde $k' = k + l$. Como $k + l \in \mathbb{Z}$, é claro que $m + n \in a \cdot \mathbb{Z}$, isto é, $m + n$ é múltiplo de a.

Para o produto, tem-se

$$m \cdot n = (ka)(la) = (kl)a = (kal)a = l'a,$$

onde $l' = kal$. Assim, $m \cdot n \in a \cdot \mathbb{Z}$. Isto é, $m \cdot n$ é múltiplo de a.

Definição 3.2 (Divisibilidade) Diz-se que um inteiro *b* divide um inteiro *a* se existe um inteiro *c* tal que $a = c \cdot b$.

Diz-se também que *a* é divisível por *b* ou que *b* é um divisor de *a*.

Notação: Será utilizado $b \mid a$ para denotar que *b* divide *a* e $b \nmid a$ caso contrário, isto é, quando *b* não divide *a*.

Exemplo 3.2

i. $2 \mid 18$ pois $18 = 2 \cdot 9$.
ii. $3 \mid 15$ pois existe o inteiro 5 satisfazendo $15 = 5 \cdot 3$.
iii. $-4 \mid 12$ pois existe o inteiro $c = -3$ tal que $12 = (-4).(-3)$.
iv. $2 \nmid 15$ pois não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $15 = c \cdot 2$.

Supondo que $b \neq 0$, então o inteiro que cumpre a definição de $b \mid a$ é único. De fato, tem-se que $c = \frac{a}{b}$, onde *c* é chamado o quociente de *a* por *b*.

Abaixo encontra-se as primeiras propriedades da divisibilidade.

Proposição 3.2 Quaisquer que sejam os inteiros *a, b* e *c* valem:

i. Propriedade reflexiva: $a \mid a$;
ii. Propriedade anti-simétrica: se $a \mid b$ e $b \mid a$ então $a = \pm b$;
iii. Propriedade transitiva: se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$.

Demonstração:

i. Como $a = 1 \cdot a$ vemos pela definição que $a \mid a$.

ii. Por hipótese $a \mid b$ e $b \mid a$, assim pode-se escrever que $b = ka$ e $a = lb$ com $k, l \in \mathbb{Z}$. Substituindo a primeira igualdade na segunda, tem-se $a = l(ka)$ ou seja $a = kla$. Daí, $a(1 - kl) = 0$ e então $a = 0$ ou $1 - kl = 0$. Se $a = 0$, então como $b = ka$ tem-se $b = 0$ e neste caso $a = b$. Se $1 - kl = 0$ então $kl = 1$ e como k e l são números inteiros as únicas possibilidades são $k = l = 1$ ou $k = l = -1$. Portanto, como $a = lb$ conclui-se que $a = \pm b$.

iii. De $a \mid b$ tem-se $b = k_1 a$ e de $b \mid c$ tem-se $c = k_2 b$. Logo, substituindo a primeira igualdade na segunda obtém-se $c = k_1 k_2 a$. Assim $c = c'a$ onde $c' = k_1 k_2 \in \mathbb{Z}$, o que mostra que $a \mid c$.

Proposição 3.3 Dados inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a \mid b$ e $a \mid c$ então a divide todos os números da forma $bx + cy$ onde $x, y \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras $a \mid (bx + cy)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Da hipótese segue que existem inteiros d_1 e d_2 tais que $b = d_1 a$ e $c = d_2 a$. Assim, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ tem-se $bx + cy = d_1 ax + d_2 ay$ e pela propriedade distributiva obtém-se $bx + by = a(d_1 x + d_2 y)$ o que mostra ser $bx + by$ divisível por a.

Resulta da proposição 3.3 o seguinte corolário:

Corolário 3.1

i. Se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (b + c)$.

ii. Se $a \mid b$ então $a \mid b \cdot d$ para todo $d \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Como x e y na proposição anterior são quaisquer, tomando $x = y = 1$ resulta que $a \mid (b + c)$, o que prova (i).

Para verificar (ii) é utilizado novamente que $a \mid (ax + by)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$. Basta tomar $x = 0$ e $y = d$.

Teorema 3.1 (Algoritmo da divisão) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b > 0$ então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < b$ tais que $a = bq + r$.

Observação 3.1 Os inteiros q e r que aparecem no Teorema 3.1 chama-se respectivamente quociente e resto da divisão de a por b.

Demonstração: Primeiramente, se a é múltiplo de b, diz-se $a = mb$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, então o Teorema vale, basta tomar $q = m$ e $r = 0$.

Caso a não seja múltiplo de b então, pode-se situá-lo entre dois múltiplos consecutivos de b, diz-se qb e $qb + b$. Ou seja, $qb < a < (q + 1)b$ e então $0 < a - qb < b$.

Chamando $r = a - qb$ tem-se $a = bq + r$, onde $0 < r < b$ como desejado.

Deve-se provar agora que q e r são únicos satisfazendo esta condição. Isto é, supor que existem dois pares (q_1, r_1) e (q_2, r_2) satisfazendo a condição do Teorema e provar que eles são iguais.

Tem-se $a = bq_1 + r_1$ e $a = bq_2 + r_2$ onde $0 \leq r_1 < b$ e portanto,

$$\begin{aligned} bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \Leftrightarrow bq_1 - bq_2 \\ = r_2 - r_1 \Leftrightarrow b(q_1 - q_2) \\ = r_2 - r_1 \Leftrightarrow r_2 - r_1 \\ = b(q_1 - q_2). \end{aligned}$$

É necessário mostrar que $r_1 = r_2$ e que $q_1 = q_2$. Supondo por absurdo que $r_1 < r_2$, então $r_2 - r_1 > 0$. De $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ e $b > 0$ deve-se ter $q_1 - q_2 > 0$ e portanto, $q_1 - q_2 \geq 1$.

Assim $r_2 - r_1 = b\underbrace{(q_1 - q_2)}_{\geq 1} \geq b$, mas por outro lado $r_2 - r_1 \leq r_2 < b$.

Resumindo, encontra-se que $r_2 - r_1 \geq b$ e $r_2 - r_1 < b$, isto é, obtém-se uma contradição.

Assim r_2 não é menor que r_1. Se supor $r_2 < r_1$ encontra-se um absurdo semelhante. Logo deve-se ter necessariamente $r_1 = r_2$ e voltando na igualdade $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$ tem-se $b(q_1 - q_2) = 0$ e como $b > 0$ segue que $q_1 - q_2 = 0$ e que $q_1 = q_2$.

Portanto que o quociente e o resto são únicos.

Exemplo 3.3

Dados os inteiros a e b aplica-se o algoritmo da divisão aos seguintes casos:

i. Se $a = 19$ e $b = 5$, é fácil ver que $19 = 3(5) + 4$, isto é, $q = 3$ e $r = 4$, sendo $r < 5$.

ii. Se $a = 5$ e $b = 19$, neste caso deve-se ter $5 = 0(19) + 5$, ou seja, quociente $q = 0$ e o resto é o próprio a, logo $r = 5$.

iii. Se $a = -13$ e $b = 4$, aplica-se primeiramente o algoritmo da divisão para 13 e 4; obtendo

$$\begin{aligned} 13 &= 3(4) + 1 \Rightarrow -13 \\ &= -3(4) - 1 \Rightarrow -13 \\ &= -3(4) - 4 + \underbrace{4 - 1}_{3} \Rightarrow -13 \\ &= (-3 - 1)4 + 3 \Rightarrow -13 \\ &= -4(4) + 3. \end{aligned}$$

Assim o quociente da divisão de -13 por 4 é $q = -4$ e resto $r = 3 < 4$.

iv. Se $a = -17$ e $b = 7$, tem-se

$$\begin{aligned} 17 &= 2(7) + 3 \Rightarrow -17 \\ &= -2(7) - 3 \Rightarrow -17 \\ &= -2(7) - 7 + \underbrace{7 - 3}_{4} \Rightarrow -17 \\ &= (-2 - 1)(7) + 4 \Rightarrow -17 \\ &= -3(7) + 4 \end{aligned}$$

Logo, neste caso, $q = -3$ e $r = 4$.

3.2 CONGRUÊNCIA MÓDULO *n*

Os números inteiros podem ser classificados em “pares” ou “ímpares”. Um número inteiro *a*, sendo par, tem a forma $2k$ e que um número inteiro *b*, sendo ímpar, tem a forma $2k + 1$. Estas representações, par e ímpar, decorrem do algoritmo da divisão

$$a = 2k + 0 \quad b = 2k + 1.$$

Se observa que números pares são aqueles que deixam resto zero, quando divididos por 2, e números ímpares, os que deixam resto 1.

Definição 3.3 Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, diz-se que *a* e *b* são congruentes módulo *n,* se *a* e *b* quando divididos por *n*, possuem o mesmo resto.

Notação: Se a e b são congruentes módulo n, é indicado por $a \equiv b \pmod{n}$, do contrário $a \not\equiv b \pmod{n}$.

Exemplo 3.4

i. $27 \equiv 6 \pmod{3}$ porque ao serem divididos por 3, os números 27 e 6 possuem resto 0.

ii. $27 \equiv 6 \pmod{7}$ porque o resto da divisão de 27 por 7 é 6, e é claro que o resto da divisão de 6 por 7 é o próprio 6.

iii. $27 \not\equiv 6 \pmod{4}$ porque o resto da divisão de 27 por 4 é 3, enquanto o resto da divisão de 6 por 4 é 2.

iv. $-5 \equiv 9 \pmod{7}$. De fato, $-5 = -1(7) + 2$ e $9 = 1(7) + 2$ ou seja -5 e 9 tem o mesmo resto 2 quando divididos por 7.

v. É fácil conferir também que $-11 \equiv -3 \pmod{4}$ já que 1 é o mesmo resto em ambas as divisões por 4 de -11 e -3.

vi. Quaisquer dois inteiros *a* e *b* são congruentes módulo 1, ou seja $a \equiv b \pmod{1}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$. Isto ocorre porque todo inteiro dividido por 1 tem resto sempre 0.

Proposição 3.4 Dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$ com $n \in \mathbb{N}^*$, então

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (b - a).$$

Demonstração: Provando inicialmente que $a \equiv b \pmod{n}$ então $n \mid (b-a)$. Partindo de $a \equiv b \pmod{n}$, sabe-se que *a* e *b* tem o mesmo resto *r* quando divididos por *n*.

Isto significa que existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = q_1n + r$ e $b = q_2n + r$.

Assim, $r = a - q_1n$ e como $b = q_2n + r$ obtém-se

$$b = q_2n + (a - q_1n) \Rightarrow b - a = n(q_2 - q_1) \Rightarrow n \mid (b-a).$$

Provando agora que $n \mid (b-a)$ então $a \equiv b \pmod{n}$.

Como $n \mid (b-a)$ tem-se $b - a = qn$ onde $q \in \mathbb{Z}$. Seja *r* o resto da divisão de *a* por *n*, então $\exists\, q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q_1n + r$ onde $0 \leq r < n$.

Substituindo na igualdade $b = a + qn$ obtém-se

$$b = q_1n + r + qn \Rightarrow b = (q_1 + q)n + r.$$

Uma vez que $0 \leq r < n$ tem que $q_1 + q$ e *r* cumprem a condição de quociente e resto na divisão de *b* por *n*. E como o quociente e resto são únicos neste processo, resulta que *r* também é o resto na divisão de *b* por *n*.

Portanto, *a* e *b* tem o mesmo resto *r* na divisão por *n* como desejamos provar.

Observação 3.2 Se $n \mid (b-a)$ então $n \mid (a-b)$, logo a proposição 3.4 pode ser escrita na seguinte forma alternativa:

Proposição 3.5 Dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$ com $n \in \mathbb{N}^*$, então $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se, $n \mid (a-b)$.

Exemplo 3.5

Verificando a proposição 3.5 e voltando aos exemplos anteriores, tem-se

i. $27 \equiv 6 \pmod{3}$ porque $3 \mid (27-6)$, isto é, $3 \mid 21$.
ii. $27 \equiv 6 \pmod{7}$ porque $7 \mid (27-6)$, isto é, $7 \mid 21$.
iii. $-5 \equiv 9 \pmod{7}$ porque $7 \mid (-5-9)$, isto é, $7 \mid -14$.
iv. $-11 \equiv -3 \pmod{4}$ porque $4 \mid (-11-(-3))$, isto é, $4 \mid -8$.

Na proposição a seguir, será observado as propriedades da congruência.

Proposição 3.6 Para todos os inteiros a, b, c e n onde $n > 0$ valem:

i. Propriedade reflexiva: $a \equiv a \pmod{n}$;
ii. Propriedade simétrica: $a \equiv b \pmod{n}$ então $b \equiv a \pmod{n}$;
iii. Propriedade transitiva: $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$ então $a \equiv c \pmod{n}$.

Demonstração:

i. Pela proposição anterior, tem-se $a \equiv a (\bmod n)$ se, e somente $n \mid (a - a)$. Mas $a - a = 0$ e $n \mid 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo sempre vale:

$$a \equiv a \pmod{n}.$$

ii. Supondo que $a \equiv b (\bmod n)$, pela proposição isto significa que $n \mid (b - a)$. Daí $n \mid -(b - a)$, ou seja, $n \mid (-b + a)$ que é o mesmo que $n \mid (a - b)$ e novamente pela proposição anterior pode-se afirmar que $b \equiv a$ (mod n). Logo,

$$a \equiv b (\bmod n) \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}.$$

iii. Supondo que $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$. Isto é equivalente a $n \mid (a - b)$ e $n \mid (b - c)$. Pelo item (i) do Corolário 3.1 pode-se escrever $n \mid (a - b + b - c)$ e então que $n \mid (a - c)$ e isto significa exatamente que $a \equiv c \pmod{n}$.

A seguir, será mostrado a compatibilidade com a adição e multiplicação.

Proposição 3.7 Sejam a, b, c e m inteiros com $m > 0$, tais que $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$. Então:

i. $a + c \equiv (b + d) (\bmod m)$;
ii. $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Demonstração: Como $a \equiv b \,(\text{mod}\, m)$ e $c \equiv d \,(\text{mod}\, m)$ tem-se respectivamente $m \mid (a-b)$ e $m \mid (c-d)$. Assim, resulta do corolário que $m \mid (a-b)+(c-d)$, ou ainda $m \mid (a+c)-(b+d)$. Da proposição 3.7 significa exatamente que $a+c \equiv b+d \;(\text{mod}\, m)$.

Para provar (ii) nota-se que da condição $m \mid (a-b)$ pode-se escrever $m \mid (a-b)c$ (item (ii) Corolário 3.1), isto é $m \mid (ac-bc)$. Da mesma forma da condição $m \mid (c-d)$ pode-se concluir que $m \mid (c-d)b$, isto é, que $m \mid (bc-bd)$. Juntando as duas conclusões $m \mid (ac-bc)$ e $m \mid (bc-bd)$, tem-se $m \mid (ac-bc+bc-bd)$ ou seja, $m \mid (ac-bd)$ e isto significa precisamente que $ac \equiv bd \;(\text{mod}\, m)$.

Corolário 3.2 Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_{1,}b_2, \dots, b_n$ duas seqüências quaisquer de números inteiros satisfazendo $a_i \equiv b_i (\text{mod}\, m)\ \forall\, i = 1, \dots, n$ onde $m \geq 1$ é inteiro.

Então, tem-se que:

i. $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \equiv (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)(\text{mod}\, m)$;

ii. $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) \equiv (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)(\text{mod}\, m)$.

Demonstração: Demonstrando (i) por indução finita sobre o número natural *m*. Para $n = 1$ a afirmação (i) vale, pois neste caso, ele representa simplesmente que $a_1 \equiv b_1$ (mod *m*), que é válido por hipótese.

Supondo agora que a proposição vale para algum $k \geq 1$, isto representa $(a_1 + \cdots + a_k) \equiv (b_1 + \cdots + b_k)(\text{mod}\, m)$. Deve-se provar que (i) vale para $k+1$, ou seja, que

$$(a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}) \equiv (b_1 + \cdots + b_k + b_{k+1})(\text{mod}\, m). \tag{3.1}$$

Tem-se $(a_1 + \cdots + a_k) \equiv (b_1 + \cdots + b_k)(\text{mod}\, m)$ e $a_{k+1} \equiv b_{k+1}(\text{mod}\, m)$ e pela proposição 3.7 pode-se somar estas duas congruências.

Segue assim que $(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1} \equiv (b_1 + \cdots + b_k) + b_{k+1} \;(\text{mod}\, m)$ o que prova 3.1, isto é, que a proposição (i) vale para $k+1$.

A congruência (ii) (para o produto) demonstra-se analogamente.

Corolário 3.3 Se $a \equiv b \;(\text{mod}\, m)$ então para todo $n \geq 1$,

$$a^n \equiv b^n \;(\text{mod}\, m) \;\text{ e }\; na \equiv nb \;(\text{mod}\, m).$$

Demonstração: Ao escrever a congruência $a \equiv b \pmod{m}$, n vezes e em seguida aplicar o corolário 3.1, tem-se:

$$n \text{ vezes} \begin{cases} a \equiv b \pmod{m}, \\ a \equiv b \pmod{m}, \\ \quad\vdots \\ a \equiv b \pmod{m}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ vezes}} \equiv \underbrace{(b \cdot b \dots b)}_{n \text{ vezes}} \bmod m,$$
$$\Rightarrow \underbrace{a + a \dots + a}_{n \text{ vezes}} \equiv \underbrace{(b + b \dots + b)}_{n \text{ vezes}} \bmod m.$$

Desta forma, obtém-se

$$a^n \equiv b^n \bmod m,$$

e

$$na \equiv nb \bmod m.$$

3.2.1 APLICAÇÕES DA CONGRUÊNCIA MÓDULO *n*

Algumas aplicações imediatas de congruência módulo *n* são dadas nos seguintes exemplos:

Exemplo 3.6

i. Calculando o resto da divisão de 260 por 6.

Como $260 = (26)(10)$ e vale que $26 \equiv 2 \pmod{6}$ e $10 \equiv 4 \pmod{6}$ resulta pela proposição 3.7 que $260 \equiv 8 \pmod{6}$. Pela definição de congruência isto quer dizer que 260 e 8 tem o mesmo resto na divisão por 6. Como $8 \equiv 2 \pmod{6}$, 8 tem resto 2 quando dividido por 6 e assim ocorre com 260.

ii. Determinando o resto da divisão de 37^{13} por 17.

Tem-se $37 \equiv 3 \pmod{17}$, logo, pelo corolário 3.3, $37^{13} \equiv 3^{13} \pmod{17}$.

Logo, o problema foi transferido ao cálculo de 3^{13} um número bem menor.

Nota-se que $3^{13} = (3^4)^3 \cdot 3$ e ainda $3^4 \equiv 13 \pmod{17}$ o que possibilita:

$$(3^4)^3 \equiv 13^3 \pmod{17} \Rightarrow (3^4)^3 \cdot 3 \equiv (13)^3 \cdot 3 \pmod{17}.$$

Mas $13^3 \cdot 3 = 13^2 \cdot (13 \cdot 3) = (169)(39)$ e desde que $169 \equiv 16 \pmod{17}$ e $39 \equiv 5 \pmod{17}$ tem-se que $13^3 \cdot 3 \equiv (16)(5) \pmod{17}$, isto é $3^{13} \equiv 80 \pmod{17}$. Como $80 \equiv 12 \pmod{17}$ conclui-se que $3^{13} \equiv 12 \pmod{17}$. Esta seqüência de cálculos pode ser assim resumida, onde o símbolo ≡ indica congruência módulo 17.

$$3^{13} = (3^4)^3 \cdot 3 \equiv 13^3 \cdot 3 = (169)(39) \equiv (16)(5) = 80 \equiv 12.$$

iii. Pode-se verificar facilmente que o algarismo das unidades de um número inteiro no sistema decimal é o resto da sua divisão por 10. Assim, pode-se determinar que o algarismo das unidades de 2^{83}, basta considerar as congruências sucessivas módulo 10:

$$2^{83} = 2^{5(16)}2^3 \equiv 2^{16}2^3 = (2^5)^3 \cdot 2^4 \equiv 2^3 \cdot 2^4 = 2^5 \cdot 2^2 = 2^3 = 8,$$

onde foi utilizado que $2^5 = 32 \equiv 2 \pmod{10}$.

Dados $n, a \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$, sabe-se que existem *n* possibilidades para o resto na divisão de *a* por *n*:

- Se $r = 0$, então $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qn$.
- Se $r = 1$, então $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qn + 1$.
- Se $r = n - 1$, então $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qn + (n - 1)$.

Escritas em termos de congruência estas possibilidades representam respectivamente:

$$a \equiv 0 \pmod{n},\ \ a \equiv 1 \pmod{n}, \dots\ , a \equiv (n-1) \pmod{n}.$$

Como são em números finito, pode-se testar estas possibilidades caso a caso. Tal procedimento pode ser útil na solução de alguns problemas da teoria dos números inteiros.

Exemplo 3.7

Para qualquer $a \in \mathbb{Z}$ o número $a^3 - a$ é divisível por 3.

Tem-se $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$ para qualquer $a \in \mathbb{Z}$. As possibilidades para o inteiro a são: $a \equiv 0 \pmod 3$, $a \equiv 1 \pmod 3$ ou $a \equiv 2 \pmod 3$, já que os restos possíveis da divisão de a por 3 são 0, 1 ou 2.

Se $a \equiv 0 \pmod 3$ então $3 \mid a$ o que dá $a = 3x$ onde $x \in \mathbb{Z}$ e neste caso $a^3 - a = 3x(a-1)(a+1) = 3y$ onde $y = x(a-1)(a+1)$ mostrando que $3 \mid (a^3 - a)$. No caso em que $a \equiv 1 \pmod 3$ tem-se que $3 \mid (a-1)$ ou ainda $a - 1 = 3x$ com $x \in \mathbb{Z}$ tendo $a^3 - a = a(3x)(a+1) = 3ax(a+1) = 3y$ onde $y = ax(a+1)$, ou seja, $3 \mid (a^3 - a)$ também neste caso. Finalmente, a última possibilidade para a é que $a \equiv 2 \pmod 3$. Se isto ocorrer $3 \mid (a-2)$ e então $a + 1 - 3 = 3x, x \in \mathbb{Z}$. Neste caso também, tem-se

$$a^3 - a = a(a-1)(3x+3) = 3a(a-1)(x+1) = 3y,$$

onde $y \in \mathbb{Z}$ e $3 \mid (a^3 - a)$.

Portanto seja qual for o inteiro a vale que $a^3 - a$ é divisível por 3.

3.3 SISTEMAS NUMÉRICOS NA BASE *b*, ONDE $b \geq 2$

O sistema numérico comumente utilizado é o decimal. Isto quer dizer que, dado qualquer inteiro $a > 0$, existem $n + 1$ inteiros positivos, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n \text{ e } 0 \leq a_i < 10, \text{ para todo } i \in \{0,1,\dots,n\}.$$

Além disso, os números a_i são únicos com esta propriedade e são chamados os algarismos de a.

Ocorre que o papel desempenhado pelo 10 neste sistema numérico é meramente uma questão opcional. Propriedades semelhantes às ilustrativas acima valem se 10 for trocado por um número inteiro $b \geq 2$. Ou seja, vale a seguinte proposição:

Proposição 3.8 Seja $b \geq 2$ um número inteiro. Dados qualquer $a \in \mathbb{Z}$ existem $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que:

$$a = a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \cdots + a_n \cdot b^n \text{ e } 0 \leq a_i < b, \text{ para todo } i \in \{0,1,\dots,n\}.$$

A proposição afirma que todo número inteiro admite uma representação na base b (representação b-ádica). Para demonstrar a proposição é preciso utilizar o algoritmo da divisão (teorema 3.1). Alguns exemplos desta representação na prática:

Exemplo 3.8

1) O número 7 na base 2 (base binária) é representado por 111. Isto pode ser visto aplicando duas vezes o algoritmo da divisão por 2.

$$7 = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 7 = (2 \cdot 1 + 1)2 + 1 \Rightarrow 7 = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2.$$

2) Qual é o número cuja representação na base 5 é 123?

Sendo 123 a representação do número a na base 5, sabemos então que

$$a = 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 = 38.$$

3) Ao expressar o número 216 na base 4 tem-se $216 = 4(54)$ e $54 = 4(13) + 2$ e $13 = 4 \cdot 3 + 1$, de onde segue que:

$$216 = 4[4(13) + 2] = 4^2(13) + 8 = 4^2(4 \cdot 3 + 1) + 2 \cdot 4 = 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3.$$

Logo, 216 na base 4 é 3120.

3.4 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

A representação numérica na base 10 explica porque alguns critérios de divisibilidade funcionam:

Proposição 3.9 (Critério de divisibilidade por 2)

Um número inteiro é divisível por 2 se, e somente se, seu algarismo da unidade for um número par.

Demonstração: Provando que se o algarismo da unidade de um número inteiro a é par então a é divisível por 2. Então para algum $n > 0$, tem-se:

$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$ onde $a_0 = 2k$ para algum $k > 0$.

Desta forma obtém-se:

$$a = 2k + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n.$$
$$= 2(k + 5a_1 + \cdots + 5a_n 10^{n-1}) = 2x \text{ onde } x = k + 5a_1 + \cdots + 5a_n 10^{n-1}.$$

Portanto *a* é par.

Supondo agora que *a* seja um número par, toma-se $a = 2r$ com $r \in \mathbb{Z}$. Supondo que $a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n$ seja a representação de *a* na base 10.

Então

$$\begin{aligned} a_0 &= a - a_1 10 - a_2 10^2 - \cdots - a_n 10^n \\ &= 2r - a_1 10 - a_2 10^2 - \cdots - a_n 10^n \\ &= 2(r - 5a_1 - 5a_2 10 - \cdots - 5a_n 10^{n-1}). \end{aligned}$$

Ou seja $2 \mid a_0$. A demonstração da proposição está concluída.

Proposição 3.10 (Critério da divisibilidade por 3)

Um número inteiro é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 3.

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{Z}$ e supondo que sua representação decimal seja

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n.$$

Na primeira parte da demonstração é verificado que se $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ for divisível por 3, assim também será a.

Tem-se

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1(1 + 9) + a_2(1 + 99) + \cdots + a_n(1 + 10^n - 1) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + 9a_1 + 99a_2 + \cdots + (10^n - 1)a_n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $9a_1 + 99a_2 + \cdots + (10^n - 1)a_n$ são ambos divisíveis por 3, então também a será divisível por 3 como a soma dos números divisíveis por 3.

Supondo agora que a seja um número divisível por 3 ao provar que a soma de seus algarismos: $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ também é divisível por 3 isto resulta também na igualdade 3.2 pois segue de lá que $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a - [9a_1 + 99a_2 + \cdots + (10^n - 1)a_n]$ isto é, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é a diferença de números divisíveis por 3 e portanto $3 \mid (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

Proposição 3.11 (Critério da divisibilidade por 4)

Um número inteiro é divisível por 4 se, e somente se, o número formado pelos algarismos das ordens da unidade e dezena seja divisível por 4.

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{Z}$ com sua representação decimal:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n;$$

é possível reescrevê-la como

$$a = a_0 + a_1 10 + 100(a_2 + \cdots + a_n 10^{n-2}). \tag{3.3}$$

Sabendo que $4|100$, pois $100 = 25 \cdot 4$, também irá dividir seus múltiplos, assim $4 \mid 100(a_2 + \cdots + a_n 10^{n-2})$.

Portanto, para que um número seja divisível por 4, é necessário que o restante da soma (3.3) também seja divisível por 4, ou seja $4 \mid a_0 + a_1 10$.

Reciprocamente, admitindo que $4 \mid a_0 + a_1 10$, segue por (3.3) que $4 \mid a$.

Proposição 3.12 (Critério da divisibilidade por 5)

Um número inteiro é divisível por 5 se, e somente se, seu algarismo da ordem da unidade for 0 ou 5.

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{Z}$ com sua representação decimal:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n;$$

assim,

$$a = a_0 + 10(a_1 + a_2 10^1 + \cdots + a_n 10^{n-1}).$$

Tem-se que $5|10$, garantindo que também a divisibilidade pelos seus múltiplos, $5|10(a_1 + a_2 10^1 + \cdots + a_n 10^{n-1})$. Então resta que, para o número ser divisível por 5 se faz necessário que $5|a_0$, e como a_0 é um algarismo, segue que $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

Proposição 3.13 (Critério da divisibilidade por 7)

Sejam a_0 o algarismo das unidades de um número e n os demais algarismos, $10n + a_0$ é divisível por 7 se, e somente se, $n - 2a_0$ for divisível por 7.

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{Z}$ com sua representação decimal:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n;$$

assim,

$$\begin{aligned} a &= a_0 + 10(a_1 + a_2 10^1 + \cdots + a_n 10^{n-1}) \\ &= a_0 + 10n \text{ com } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Supondo que exista um $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$n - 2a_0 = 7k;$$

logo,

$$10n - 20a_0 = 7 \cdot 10k;$$
$$10n - 21a_0 + a_0 = 7 \cdot 10k';$$
$$10n + a_0 = 7k' + 21a_0;$$
$$10n + a_0 = 7(k' + 3a_0).$$

Portanto $10n + a_0$ é divisível por 7.

Agora supondo que $10n - a_0 = 7q$, com $q \in \mathbb{Z}$, então

$$10n - a_0 = 7q;$$

$$10n + 21a_0 - 20a_0 = 7q;$$
$$10n - 20a_0 = 7q + 21a_0;$$
$$10n - 20a_0 = 7q';$$
$$10(n - 2a_0) = 7q'.$$

Sabendo que $7 \nmid 10$ pode-se concluir que $7|(n - 2a_0)$.

Proposição 3.14 (Critério da divisibilidade por 9)

Um número inteiro é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

Demonstração: A demonstração é semelhante ao critério por 3, considerando que os números da forma $10^n - 1$ são divisíveis por 9, para todo $n \geq 0$ inteiro.

Proposição 3.15 (Critério da divisibilidade por 11)

Um número inteiro é divisível por 11 quando a diferença entre a soma dos algarismos de ordem par e a soma dos algarismos de ordem ímpar for um número divisível por 11.

Demonstração: Seja $a, b \in \mathbb{Z}$ com suas representações decimais:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n;$$
$$b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - a_0.$$

Supondo que b seja divisível por 11, ou seja,

$$(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - a_0 = 11k \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - 10a_0 = 10 \cdot 11k;$$
$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 - 10a_0 = 110k;$$
$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 110k - 11a_0;$$
$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 11(11k - a_0);$$
$$a = 11k'.$$

Portanto a é divisível por 11.

Por outro lado, supondo que a seja múltiplo de 11,

$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 11k;$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0 = 11k;$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0 - 11a_0 = 11k - 11a_0;$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 - a_0) = 11(k - a_0);$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 - a_0) = 11k'.$$

Sabendo que $11 \nmid 10$ pode-se concluir que $11|(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 - a_0)$.

Proposição 3.16 (Critério da divisibilidade por 13)

Um número inteiro é divisível por 13 se, o quádruplo do algarismo da ordem das unidades somado com o número formado sem este algarismo, resulta em um número divisível por 13.

Demonstração: Seja $a, b \in \mathbb{Z}$ com suas representações decimais:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n;$$
$$b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 4a_0.$$

Supondo que b seja divisível por 13, ou seja,

$$(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 4a_0 = 13k \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 40a_0 = 10 \cdot 13k;$$
$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + 40a_0 = 130k;$$
$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 + 39a_0 = 130k;$$
$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 + 39a_0 = 130k - 39a_0;$$
$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 13(10k - 3a_0);$$
$$a = 13k'.$$

Portanto a é divisível por 13.

Por outro lado, supondo que a seja múltiplo de 13,

$$a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 13k;$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0 = 13k;$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0 + 39a_0 = 13k + 39a_0;$$

$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 40a_0 = 13k + 39a_0;$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 + 4a_0) = 13(k + 3a_0);$$
$$10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 + 4a_0) = 13k'.$$

Sabendo que $13 \nmid 10$ pode-se concluir que $13 | (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 + 4a_0)$.

3.4.1 MÁXIMO DIVISOR COMUM

Seja $a \in \mathbb{Z}$, será definido $D(a)$ como o conjunto formado por todos os divisores de a. Nota-se que $D(a) \neq \emptyset$ e que $D(a)$ é finito se $a \neq 0$. Diz-se que c é um divisor comum de a e b se $c \in D(a) \cap D(b)$, isto é o mesmo que exigir que $c \mid a$ e $c \mid b$.

Supondo a e b não nulos então $D(a)$ e $D(b)$ são finitos e assim $D(a) \cap D(b)$ é finito. Portanto, vale a definição a seguir:

Definição 3.4 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$, o maior elemento do conjunto $D(a) \cap D(b)$ é chamado o máximo divisor comum de a e b e é representado por $\mathrm{mdc(a, b)}$.

Exemplo 3.9

Ao calcular segundo a definição, $\mathrm{mdc}(12, 15)$, tem-se

- $D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$
- $D(15) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$
- $D(12) \cap D(15) = \{\pm 1, \pm 3\}$
- $\mathrm{mdc}(12, 15) = 3$

Observação 3.3

- A definição de $\mathrm{mdc(a, b)}$ só faz sentido porque $D(a) \cap D(b) \neq \emptyset$.
- Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ vale que:

$\mathrm{mdc(a, b) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b)}$ estas igualdades ocorrem porque $D(-x) = D(x)$, isto é, todo divisor de um número inteiro x também divide $-x$ e vice-versa.

- Em virtude da observação anterior, daqui para frente ao se tratar mdc sempre será considerado números inteiros positivos.

Teorema 3.2 (Identidade de Bezout) Sejam a e b inteiros positivos e $d = \mathrm{mdc}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, então existem inteiros r e s tais que $d = ra + sb$.

Demonstração: Considerando o conjunto

$$S = \{ax + by \,|x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}.$$

S é um conjunto de números inteiros positivos. Logo é possível determinar o menor elemento de S, isto é, existe $d_1 \in S$ tal que $d_1 \leq x$ para todo $x \in S$.

Tem-se $d_1 \in S$, logo $d_1 = ar + bs$ para alguns $r, s \in \mathbb{Z}$ e o objetivo será mostrar que $d_1 = \mathrm{mdc}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$.

Mostrando que $d_1 \mid a$. Caso isto não ocorresse d_1 deixaria um resto $t > 0$ ao dividir a, isto é, $a = qd_1 + t$ com $0 < t < d_1$.

Assim,

$$t = a - qd_1 = a - q(ar + bs) = a(1 - qr) + b(-sq).$$

Portanto, $t \in S$ mas tal fato contradiz a definição de d_1 visto que $t < d_1$ (lembrando que d_1é o menor número de S). Esta contradição garante que $d_1 \mid a$.

Da mesma forma pode-se mostrar que $d_1 \mid b$.

Assim $d_1 \in D(a) \cap D(b)$. Como d é o maior divisor comum de a e b resulta $d_1 \leq d$.

Agora, observando que $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid ar$ e $d \mid bs$, e portaanto $d \mid (ar + bs)$, ou seja, $d \mid d_1$ então $d < d_1$. Mas, como foi visto $d < d_1$ resulta em $d = d_1 = ar + bs$, para alguns $r, s \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.4 Nota-se que o Teorema de Bezout nada afirma sobre a unicidade dos elementos r e s. de fato, eles não são necessariamente únicos como pode observar no seguinte exemplo:

Exemplo 3.10

Tem-se que $\mathrm{mdc}(6{,}4) = 2$. Então pelo Teorema de Bezout pode-se escrever $2 = 6r + 4s$ com $r, s \in \mathbb{Z}$. Isto pode ser feito, por exemplo, das seguintes formas:

$$2 = 6(1) + 4(-1) \text{ e } 2 = 6 \cdot 3 + 4(-4).$$

Definição 3.5 Um número inteiro p é dito primo se $D(p) = \{-p, -1, 1, p\}$, ou seja os únicos números divisores de p são os divisores triviais ± 1 e $\pm p$.

Observa-se que um número primo p tem a seguinte propriedade especial:

$$\text{Se } n \text{ não é múltiplo de } p \text{ então, } \operatorname{mdc}(p, n) = 1, \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Outros pares de números inteiros a, b podem também satisfazer a condição $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$, sem que a e b seja primo. É o que ocorre, por exemplo, com $a = 4$ e $b = 9$.

Para entender estes casos tem-se a seguinte definição:

Definição 3.6 Dois números inteiros a e b são chamados primos entre si ou relativamente primos se $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$.

Neste caso diz-se que "a é primo com b" ou ainda que "b é primo com a".

Exemplo 3.11

12 é primo com 25 pois $\operatorname{mdc}(12, 25) = 1$.

Extraindo do Teorema de Bezout a seguinte caracterização para números primos entre si:

Corolário 3.4 Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ar + bs = 1$.

Demonstração: Supondo que a e b sejam primos entre si. Por definição, isto significa que $d = \operatorname{mdc}(a, b) = 1$, e então pelo Teorema de Bezout existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ar + bs = 1.$$

Supondo agora que existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ar + bs = 1$ e se é verificado que $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$. Seja $d = \operatorname{mdc}(a, b)$ então $d \mid a$ e $d \mid b$. Pela proposição 3.7 $d \mid ax + by$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$. Em particular $d \mid ar + bs$, ou seja, $d \mid 1$ e $d > 0$ deve-se ter $d = 1$, ou seja $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$.

CAPÍTULO 4

REALIZANDO A MATEMÁGICA

Como registro histórico, tem-se que o ilusionismo é uma das mais antigas formas de entretenimento entre as pessoas. Fatos históricos descritos no artigo "História da magia" do site InfoEscola, relata que um documento denominado como Papiro de Westcar, que atualmente encontra-se exposto no Museu Egípcio de Berlim, tem origem no Antigo Egito e datado em 2000 a.C., é um dos primeiros a relatar sobre esta arte.

A palavra mágica está relacionada a habilidade de criar ilusões, dando origem ao termo ilusionista. Como na Idade Média a maioria das pessoas não entendiam como os truques eram possíveis de serem realizados, julgavam quem os realizavam como tendo envolvimento com forças espirituais, e a igreja católica sendo a religião predominante naquele tempo condenava tais atos. Por este motivo, a arte do ilusionismo demorou para ser realmente difundida pelo mundo, apesar de seu grande atrativo.

No século XVI, um fazendeiro que vivia no condado de Kent na Inglaterra, chamado Reginaldo Scot escreveu um livro chamado "The Discovery of Witchcraft" (traduzindo, A descoberta da bruxaria), onde explicava alguns fundamentos da mágica, desmistificando a associação do ilusionismo com as superstições, e mostrando que tudo havia uma explicação lógica para ser realizado. Apesar do rei James VI, monarca inglês reinante no ano de lançamento do livro, mandar acabar com esta publicação, alguns continuaram em circulação as escondidas pela população, que até hoje se impressiona e busca maneiras de solucionar os truques propostos.

> É isso que garante o encanto sobre a mágica realizada. O espectador sabe que não há nada de sobrenatural na magia realizada, mas precisa pensar muito para descobrir como ela foi realizada. Os mágicos mais famosos usam artifícios e efeitos mais elaborados, e que algumas vezes fogem ao raciocínio comum. Trata-se de uma arte alicerçada primordialmente na sua habilidade e na sua capacidade de persuadir. Seus efeitos são como um quebra-cabeça, que além de alegrar e divertir torna-se um desafio à inteligência dos espectadores, que não conseguem explicações lógicas para aquilo que vêem. (Furtado, 2008, p. 20).

A mágica desperta surpresas, trabalha com respostas inesperadas, onde é necessário fazer uso de resolução de problemas para explicar a solução do enigma que passa despercebidos aos olhos e a atenção do público. As pessoas se veem impressionadas com as respostas, e intrigadas a ponto de buscarem explicações para os truques.

Por estimular o raciocínio lógico e manter a atenção e concentração, muitos estudos têm sido realizados na área da neurociência sobre como a mágica pode servir de suporte, terapia e aprendizado à pessoas de todas as idades. Guedes (2016, p.88) afirma que “neurocientistas estão se familiarizando com os métodos da mágica ao submeter à própria mágica ao estudo científico, demonstrando, em alguns casos, pela primeira vez, como alguns de seus métodos atuam no cérebro”.

Neste capítulo, serão descritas algumas atividades encontradas em pesquisas na internet, em sites e redes sociais, meios estes que são amplamente explorados pela maior parte da população, principalmente os jovens. Muitas delas são apresentadas somente como forma de enigma e deixa para o espectador ir em busca de sua solução, porém nem sempre é claro quais conceitos devem-se aplicar para a resolução do problema.

Estas atividades são apresentadas neste trabalho com a proposta de desmistificar a crença de que elas são realizadas por pura magia, mas sim, sua execução é possível devido a manipulação de recursos matemáticos, explicados logo abaixo de seu respectivo truque e possibilitando que as pessoas as compreendam e as divulguem.

Para quem deseja fazer uso destas, podem ser aplicadas em situações descontraídas do cotidiano, em grupos como meio de dinâmica, ou demais trabalhos, lembrando que público alvo irá interagir com raciocínio matemático e precisa saber alguns conceitos básicos para realizá-las. Podem também, serem trabalhadas na escola como forma de entretenimento ou em colaboração com os conteúdos a serem estudados em sala de aula conforme o currículo, com o professor mediando o uso da tecnologia e a explicação das ações divulgadas na internet.

Durante a aplicação, é sugerido chamar a atenção das pessoas que estão assistindo, buscar a participação não só de quem está sendo questionado, mas também dos observadores, para que se atentem do porquê se alcança tais resultados, quais recursos matemáticos são utilizados e como a Matemágica acontece.

4.1 ATIVIDADES ENVOLVENDO EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

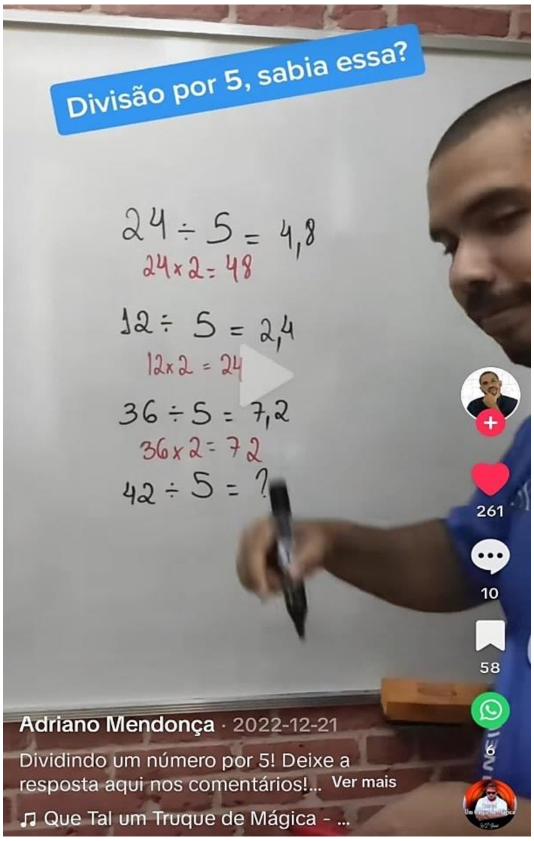
As expressões algébricas são expressões que envolvem operações matemáticas realizadas com números e letras. Estas últimas são chamadas de variáveis, pois representam um valor desconhecido, e em alguns casos podem representar qualquer valor, como será visto nas atividades apresentadas, onde o valor será qualquer escolhido pelo participante. Conforme os PCN (1997, p. 39),

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.

4.1.1 Atividade - DIVIDINDO UM NÚMERO POR CINCO

Esta atividade foi retirada do aplicativo TikTok, sendo este uma rede social que a cada dia tem ganhado mais adeptos, principalmente os jovens buscando informações rápidas e dinâmicas. Será que realmente é tão fácil realizar uma divisão por 5?

Figura 4.1 – Divisão por 5



Fonte: rede social TikTok.

Com o usuário @matemática.zero, Adriano Mendonça no vídeo “Dividindo um número por 5!” demonstra como pode realizar uma divisão por 5 com cálculos aparentemente mais simples.

Ele escreve o número que deseja dividir por 5, multiplica-o por 2 e o resultado divide por 10.

Exemplo 4.1

Ao dividir o número 137 por 5 tem-se

$$
\begin{aligned}
137 : 5 &= (137.2) : 10 \\
&= 274 : 10 \\
&= 27{,}4.
\end{aligned}
$$

Explicando como a “mágica” acontece:

Para entender esta atividade, é preciso lembrar que

$$5 = \frac{10}{2};$$

assim, tem-se que

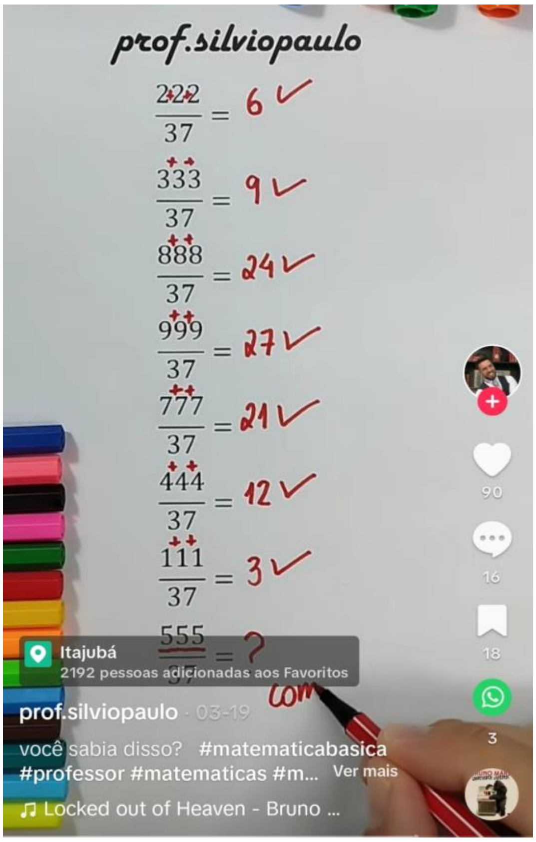
$$\frac{x}{5} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{10}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{x}{1}.\frac{2}{10} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{2x}{10}.$$

Portanto, ao dividir um número por 5 é equivalente a multiplicá-lo por 2 e dividir o resultado por 10. Lembrando este recurso matemático, este truque apresentado na internet como mágica ou macete é somente um conceito de divisibilidade por 5.

4.1.2 Atividade – O INCRÍVEL NÚMERO 37

Esta atividade também retirada do aplicativo TikTok, tem o usuário @prof.silviopaulo em seu vídeo intitulado “ Você sabia disso?” propondo que ao multiplicar o número 37 por um número que seja a soma de três algarismos iguais, sendo este escolhido entre 1 a 9, o resultado final será um número de três algarismos, onde a centena, a dezena e a unidade são iguais ao algarismo escolhido.

Figura 4.2 – O número 37



Fonte: rede social TikTok.

Exemplo 4.2

$$37.(1+1+1) = 37.3 = 111;$$
$$37.(2+2+2) = 37.6 = 222;$$
$$37.(3+3+3) = 37.9 = 333;$$
$$\vdots$$
$$37.(9+9+9) = 37.27 = 999.$$

Explicando como a "mágica" acontece:

Para resolver o "mistério" desta atividade deve-se pensar o que acontece quando é somado três algarismos iguais, e multiplicado pelo número 37:

$$37.(x + x + x) = 37.3x = 111x.$$

Assim, o algarismo escolhido será multiplicado pelo número 111. Sabendo que todo número multiplicado por 1 resulta em seu igual valor e para a atividade foram escolhidos números unitários para não haver troca de base no sistema decimal, o resultado será a sequência de três algarismo do número escolhido.

Portanto, observa-se que o enigma deixado pelo usuário do TikTok tem como resposta

$$37.(5 + 5 + 5) = 37.15 = 555.$$

4.1.3 Atividade – TRUQUE DO CALENDÁRIO

Atividade retirada da publicação acadêmica “Aritmágicas” de João Carlos Vieira Sampaio, autor conhecido por seus trabalhos voltados em mágicas realizadas com base em recurso matemáticos.

Figura 4.3 – Calendário

Adivinhando três dias consecutivos escolhidos em segredo

O mágico dá ao espectador a página de um calendário. Pede-lhe que escolha mentalmente três dias consecutivos mas não os revele. Pede-lhe então que

3

calcule a soma desses três dias. Pede-lhe para informar o valor da soma. No exemplo da figura, ele dirá 72. O mágico então revela quais dias foram escolhidos.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Fonte: https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/aritmagicas.pdf.

Explicando como a "mágica" acontece:

Ao somar os três dias escolhidos (lembrando que eles devem ser consecutivos), e denominando x como o segundo dia da sequência, tem-se a seguinte expressão:

$$(x-1)+x+(x+1)=3x.$$

Assim, o resultado é o triplo do segundo número da sequência. O aplicador sabendo disto, ao ouvir o resultado, divide-o por três, obtendo um dos números, seu antecessor e sucessor.

4.1.4 Atividade – DESCOBRINDO A SUA IDADE E O NÚMERO DO SEU CALÇADO?

No site Wikihow, o conteúdo nomeado "Como Fazer um Truque de Mágica Matemático", tem uma atividade que fará que seja descoberto a idade de qualquer pessoa e o quanto ela calça somente sabendo do participante o resultado final das operações propostas a ele como descrito a seguir.

Figura 4.4 – Descobrindo sua idade e número do calçado

Fonte: https://pt.wikihow.com/Fazer-um-Truque-de-M%C3%A1gica-Matem%C3%A1tico.

Para isto o participante deve realizar as instruções abaixo:

a) Peça que escreva sua idade em um papel e não mostre o que escrever para ninguém. Multiplique sua idade por 5;
b) Acrescente um algarismo 0 ao lado direto do resultado;
c) Some o dia do mês da data que estará sendo realizada a atividade;
d) Multiplique o novo resultado por 2;
e) Acrescente o número do seu calçado;
f) O aplicador vai calcular o produto do dia atual por dois e pede para o participante subtrai-lo.

Agora, o participante lê em voz alta o resultado que obteve, e o aplicador avisa a todos que os primeiros dois dígitos do resultado é a idade do participante e os dois últimos algarismos formam o número do seu calçado.

Exemplo 4.3

Uma pessoa de 17 anos, que calça sapato número 38 e realizou a atividade no dia 9, seguirá os seguintes passos:

a) $17.5 = 85$;
b) Acrescentando o algarismo zero temos 850;
c) $850 + 9 = 859$;
d) $859.2 = 1718$;
e) $1\,718 + 38 = 1\,756$;
f) $1\,756 - 18 = 1\,738$.

Temos que a idade da pessoa escolhida é 17 e seu calçado é número 38.

Explicando como a "mágica" acontece:

Nomeando os números que serão variáveis na atividade, temos

$$Idade = x$$

$$Dia\ do\ mês = y$$

$$Número\ do\ calçado = z$$

Assim, ao realizar as instruções pedidas, tem-se:

$$\begin{aligned}\{[(5x.10) + y].2\} + z - 2y &= \{[50x + y].2\} + z - 2y \\ &= \{100x + 2y\} + z - 2y \\ &= 100x + 2y + z - 2y \\ &= 100x + z.\end{aligned}$$

Note que, ao realizar todas as operações que foram pedidas, o resultado será a multiplicação da idade por 100, número este que se localizará entre as ordens da centena e unidade de milhar (dependendo da idade, até a dezena de milhar) pois todo número multiplicado por 1 resulta na mesma quantidade; e soma-se o número do calçado nas posições onde o algarismo é nulo, ocupando as ordens da unidade e dezena.

Portanto, ao final, quem estiver aplicando a atividade sabe que o participante ao falar o resultado estará falando respectivamente sua idade e o número que utiliza de sapato.

4.1.5 Atividade – DESCOBRINDO OS NÚMEROS DA PEÇA DE DOMINÓ

A atividade foi retirada de uma dissertação escrita por Vagner Lopes de Almeida (ALMEIDA, 2017) intitulada “Matemágica em sala de aula: uma proposta lúdica usando a resolução de problemas”, que facilmente é indicada ao realizar as pesquisas pelo servidor Google em busca de mágicas matemáticas.

Figura 4.5 – Peça de dominó

Mágica - Descobrindo dois números - Peça de Dominó

Peça a um amigo que escolha uma peça qualquer de um dominó em segredo. Agora peça-lhe que multiplique um dos números dessa peça por 5, some 7 ao resultado, em seguida multiplique o resultado por 2, adicione a esse resultado o outro número da peça de dominó e que finalmente tire 12 do resultado. Agora revelando o resultado final, saberemos qual foi a peça de dominó escolhida.

Fonte: ALMEIDA, 2017.

Exemplo 4.4

Um participante ao escolher uma peça de dominó tem, por exemplo, uma que de um lado o valor é 6 e do outro 2.

Estão realiza as operações:

$$(5.2 + 7).2 + 6 - 12 = 20 + 14 + 6 - 12 = 28.$$

Quem está aplicando a "Matemágica", ao ouvir o resultado, anuncia que a peça escolhida tem os respectivos valores 2 e 6.

Explicando como a "mágica" acontece:

Toda peça de dominó tem duas quantias representadas nela. Representando estes valores como a e b, ao seguir as comandas tem-se a expressão

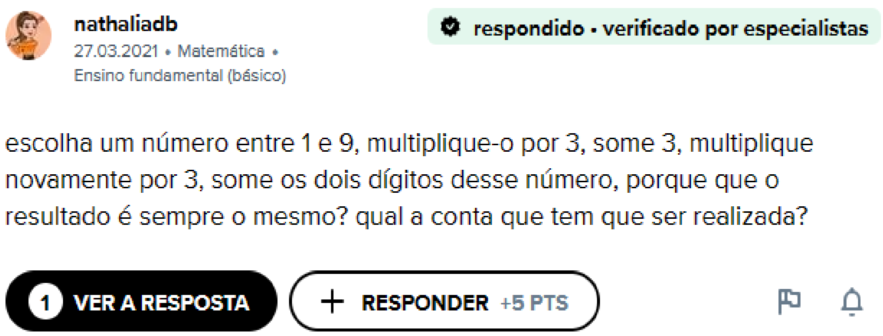
$$(5a + 7).2 + b - 12 = 10a + 14 + b - 12 = 10a + b + 2.$$

Sabendo disto, quando o participante revela o resultado final, o aplicador deve retirar do resultado a quantia 2 e restando assim a parte da expressão $10a + b$, onde o número de dezenas do resultado é o número localizado de um dos lados da peça de dominó, e o que está na unidade é o outro valor.

4.1.6 Atividade - QUAL SUA DISCIPLINA FAVORITA?

No site BRAINLY, há uma dúvida bem interessante para ser trabalhada em forma de "Matemágica".

Figura 4.3 – Dúvida BRAINLY



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/40155934.

Esta dúvida pode ser utilizada em forma de truque, como será descrita aqui. Sua adaptação foi colocada neste trabalho como exemplo para aplicação na escola de ensino básico regular, porém pode-se trocar as opções na tabela final e utilizada em diversas outras situações. Para desenvolver, peça que os participantes sigam os seguintes passos:

- escolha um número de 1 a 9 e multiplique-o por 3;
- some 3 ao resultado;
- multiplique o resultado por 3;
- por último, some os dígitos do resultado.

Após todos realizarem seus cálculos, é mostrado a tabela abaixo, onde localizarão o resultado de seus cálculos e do lado direito ao resultado estará sua disciplina favorita:

Tabela 4.1 – Disciplina favorita

Resultado	Disciplina favorita
1	História
2	Geografia
3	Inglês
4	Ciências
5	Educação Física
6	Artes
7	Projeto de Vida
8	Língua Portuguesa
9	Matemática

Fonte: elaborado pela autora.

E, para a felicidade do professor, a disciplina favorita de todos os alunos resultará em Matemática.

Exemplo 4.5

O aluno escolhe o número 7, multiplicando o número por 3 obtém-se 21; somando 3 tem-se 24; multiplicando novamente por 3 chega ao resultado 72; somando os dígitos resulta em 9, sendo sua disciplina favorita a Matemática, conforme a tabela.

Explicando como a "mágica" acontece:

Ao realizar os 4 primeiros passos, obtém-se um resultado formado por dois algarismos e múltiplo de nove

$$[(x.3)+3].3=[3x+3].3=9x+9=9.(x+1).$$

Em todo número múltiplo de 9 formado por dois algarismos, a soma deste resultam em 9, como visto pelo critério de divisibilidade no capítulo 3. Assim, ao realizar esta atividade, o truque é colocar na linha nove da tabela a opção que deseja que resulte ao final.

4.1.7 Atividade – PENSAMENTO EM SINCRONIA

Truque também retirado da publicação acadêmica de Sampaio, vem fazer com que dois participantes pensem em dois números diferentes e estes aparecerão em um só resultado. Para esta mágica é importante os participantes ficarem muito atentos, aos cálculos e as artimanhas do "mágico".

Figura 4.7 – Pensamento em sincronia

Sintonia de pensamentos

O mágico pede a duas pessoas amigas da audiência que pensem, cada uma delas, um número. Chamaremos essas pessoas de A e B.

O mágico pede a B que pense em um número inteiro de 1 a 9. Aproxima-se de B e diz que vai adivinhar o número de A usando forças telepáticas através de B e, nesse procedimento, vai também adivinhar se A e B tem sintonia de pensamentos. O mágico pede a B que lhe revele em segredo seu número pensado.

Voltando-se para A, pede que pense em um número de 1 a 100.

Pede então que A multiplique o número pensado por 5, acrescente 5 ao resultado e multiplique o resultado final por 2.

Então, o mágico pede que A subtraia do último resultado um "número estratégico". Pergunta a A qual foi o resultado. Digamos que A responda: 346. O mágico então diz: Ah, vocês tem boa sintonia de pensamentos, porque seu amigo B pensou no 6, enquanto que você pensou no 34.

Fonte: https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/aritmagicas.pdf.

Exemplo 4.6

Supondo para o exemplo que a pessoa B pensou no número 7 e a pessoa A no número 49. Agora, o mágico pedirá que A faça as seguintes operações em segredo:

i. Multiplique o número pensado por 5:

$$49\,.\,5 = 245;$$

ii. some o resultado por 5:

$$245 + 5 = 250;$$

iii. multiplique novamente por 2:

$$250\,.\,2 = 500;$$

iv. subtraia um “número estratégico” dito pelo instrutor, que neste caso será o número 3:

$$500 - 3 = 497.$$

Ao final, a pessoa A falará o resultado e o “mágico” falará qual é o número pensado por A e por B.

Explicando como a “mágica” acontece:

O “número estratégico” no item (iv) é o número 10 subtraído do número pensado pela pessoa B. Para demonstrar, será denominado z o número pensado por B que é formado somente por um algarismo, e $10x - y$ o número pensado por A que é formado por 2 ordens.

Portanto, conforme o passo a passo descrito acima, tem-se:

i. $(10x - y).5;$
ii. $50x - 5y + 5;$
iii. $(50x - 5y + 5).2;$
iv. $100x - 10y + 10 - (10 - z).$

Simplificando a última expressão tem-se

$$100x - 10y + 10 - (10 - z) = 100x - 10y + 10 - 10 + z = 100x - 10y + z.$$

Ao final, o participante A ao falar seu resultado, mostra ao mágico que o número pensado por ele ocupa a 2ª e 3ª ordens e o número pensado por B ocupa a 1ª ordem.

4.1.8 Atividade – NÚMERO ESPERTO

Outra atividade retirada da publicação acadêmica de Sampaio, se mostra ter uma resolução bem intrigante a quem participa no primeiro momento. Será que o espectador consegue imaginar como o truque é realizado?

Figura 4.8 – Número esperto

Um número esperto

O mágico solicita um voluntário para participar da brincadeira, dizendo que vai adivinhar um número pensado por ele, de 10 a 99 (que pode ser sua idade). Pede a essa pessoa que anote seu número pensado em uma folha de papel. Pede-lhe ainda para escrever, abaixo de seu número, o número 85 (este número pode ser mudado cada vez que a brincadeira é repetida, ele é o "número esperto").

O mágico pede então, ao voluntário, para somar os dois números e manter a soma em segredo. O número esperto deve ser tal que possibilite uma soma maior que 100. Suponhamos por exemplo, que o espectador voluntário tenha 35 anos. Ele fará os cálculos descritos ao lado.

$$\begin{array}{rl} 35 & \text{(idade do voluntário)} \\ 85 & \text{(número esperto)} \\ \hline 120 & \text{(soma obtida)} \end{array}$$

Em seguida, pede que o voluntário risque, na soma obtida, o algarismo das centenas, ficando com um número de dois algarismos apenas.

Pede-lhe, em seguida, que escreva o algarismo das centenas, que foi suprimido, abaixo do número de dois algarismos resultante, e faça a soma desses dois últimos números.

$$\begin{array}{r} 35 \\ 85 \\ \hline \cancel{1}20 \\ 1 \\ \hline 21 \end{array}$$

No nosso exemplo, o resultado final seria 21.

O mágico pede ao voluntário que diga o resultado final. Ouvida a resposta, o mágico revela ao voluntário o número pensado por ele.

Fonte: https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/aritmagicas.pdf.

Exemplo 4.7

Se o voluntário pensa no número 28, ao somar com 85 tem-se 113:

$$28 + 85 = 113.$$

Ao retirar o algarismo da centena e somá-lo a unidade, tem-se

$$13 + 1 = 14.$$

Com esta resposta, o aplicador consegue saber qual o número escolhido inicialmente.

Explicando como a "mágica" acontece:

Ao inicial, o voluntário escolhe um número formado por duas ordens, podendo representa-lo como $10x + y$. Quando realiza as operações, é observado que

$$10x + y + 85 - 100 + 1 = 10x + y - 14.$$

Assim, o resultado será o número pensado menos 14 unidades. Sabendo disto, o aplicador ao ouvir a resposta soma 14 e realiza a "mágica".

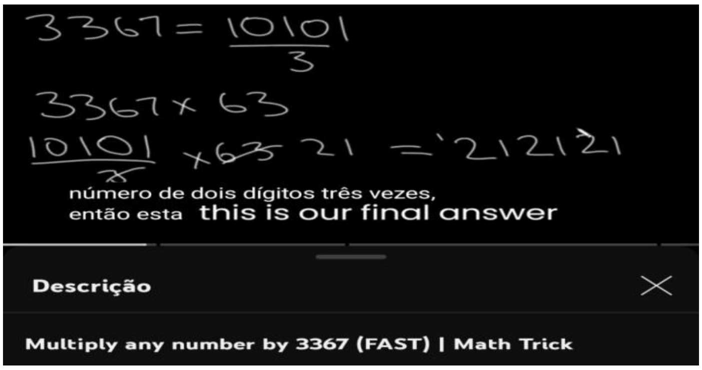
4.2 ATIVIDADES ENVOLVENDO ARITMÉTICA

A aritmética é a área da matemática que estuda os números e suas operações básicas possíveis. O site Dicionário Etimológico informa que "o substantivo grego que designava número, arithmós, surgiu do verbo árthmo, "unir-se, conjuntar-se". Da arte de juntar os números, que os gregos sabiam fazer tão bem, surgiu a palavra arithmetiké".

4.2.1 Atividade – E OS NÚMEROS SE REPETEM...

Truque com número mágico é o apresentado pelo Youtube, vídeo "Multiply any number by 3367 (FAST)", da playlist Math Tricks do canal Crunch Math.

Figura 4.9 – Números se repetem



Fonte: plataforma de vídeos Youtube.

O participante irá escolher um número formado por 2 ordens. Depois, irá multiplicar este por 3 e então multiplicar por 3 367. Ao final, espera-se que o resultado seja todo composto por algarismos iguais ao número escolhido inicialmente.

Exemplo 4.8

Se o número escolhido foi 98:

$$98\,.\,3 = 294;$$
$$3\,367\,.\,294 = \;\; 989\,898.$$

Pode-se observar que o número 98 aparece repetido em sequência três vezes, assim como era o esperado.

Explicando como a "mágica" acontece:

Tem-se um número representado por AB sendo A um número da ordem das dezenas e B um número da ordem das unidades.

Pela propriedade associativa da multiplicação, tem-se seguinte expressão da atividade,

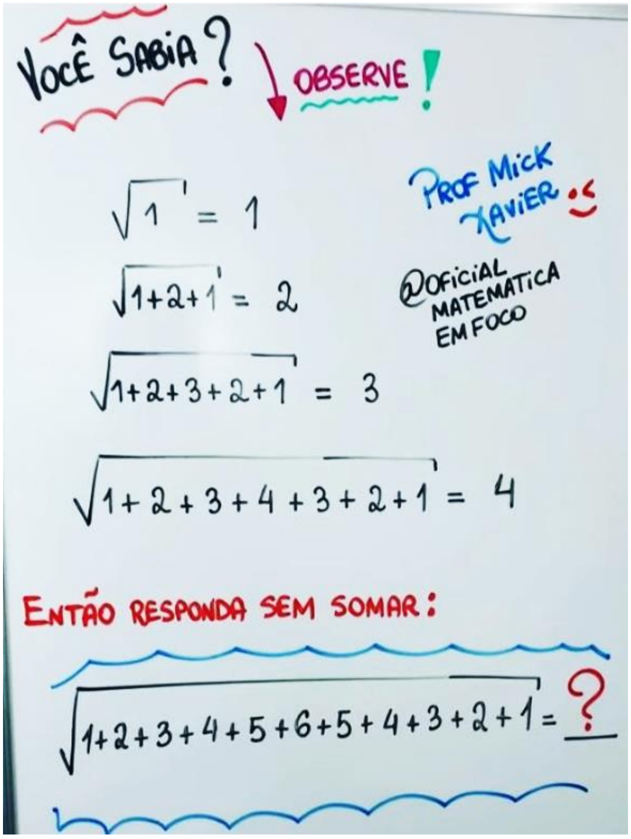
$$(AB.\,3).\,3\,367 = AB.\,(3\,.\,3\,367) = AB\,.\,10\,101.$$

Portanto é possível verificar que ao final é equivalente multiplicar o número escolhido por um número composto por algarismo 1 intercalado por 0, o número 10101. Desta maneira, no valor final obtido, a unidade B do número original ocupa as ordens ímpares e a dezena A ocupa as ordens pares, de acordo com o efeito anunciado.

4.2.2 Atividade – RAIZ QUADRADA MÁGICA

A figura seguinte retirada da rede social Facebook, página "Matemática, SIM OU NÃO.", mostra uma sequência de raízes quadradas que desperta a atenção pela simetria dos radicandos e dos resultados coincidentes com os valores centrais das somas.

Figura 4.10 – Raiz quadrada mágica



Fonte: rede social Facebook.

Ao final, o usuário detentor da página deixa um questionamento a ser respondido. Com os exemplos colocados anteriormente, pode-se observar que os resultados da soma das raízes apresentadas coincidem com o valor central da soma. Assim, conclui-se que

$$\sqrt{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} = 6.$$

Explicando como a “mágica” acontece:

Pode-se usar a soma de Gauss para justificar esta curiosidade muito comum envolvendo a raiz quadrada de certas somas.

A soma localizada dentro da raiz estudada pode ser analisada como dois números triangulares, um quando está aumentando a razão de um em um, e outro quando está diminuindo. Os números triangulares caracterizam uma progressão aritmética de razão igual a um.

O matemático Karl Friedrich Gauss criou uma fórmula para calcular esta progressão aritmética

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Na atividade ilustrada na rede social, observa-se que as operações sob a raiz são as somas de dois números triangulares. São chamados números triangulares todos os números que podem ser escritos como a soma de uma sequência de naturais consecutivos começando pelo 1.

Exemplo 4.9

- o número 3 é triangular, porque 3=1+2;
- o 6 também é triangular, porque 6=1+2+3.

O radicando que generaliza a sequência acima é a soma de dois números triangulares subsequentes, ou seja, $S_n + S_{n-1}$. Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} S_n + S_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \\ &= \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} \\ &= n^2. \end{aligned}$$

O que explica os resultados apresentados para as raízes.

4.3 ATIVIDADES ENVOLVENDO O CONCEITO DE SISTEMA NUMÉRICO DE BASE 10

Como já visto no capítulo 3, no sistema de numeração decimal para qualquer inteiro $a > 0$, existem $n + 1$ inteiros positivos, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n \text{ e } 0 \leq a_i < 10, \text{ para todo } i \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Assim, ao escrever o número 5 478, por exemplo, também pode descrevê-lo na forma

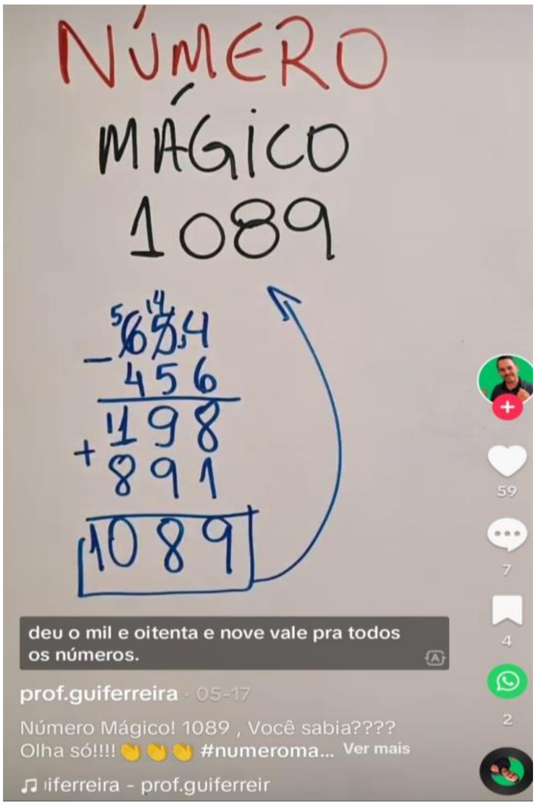
$$5\,478 = 8 + 7.10 + 4.10^2 + 5.10^3.$$

E utilizando este conceito, será visto a explicação de como é possível alcançar os resultados das atividades descritas abaixo.

4.3.1 Atividade – O MÁGICO NÚMERO 1 089

Nesta atividade retirada do TikTok, mas que também é muito divulgada por outros meios virtuais, o usuário @prof.guiferreira em seu vídeo intitulado "Número Mágico! 1089" vem mostrar uma curiosidade sobre este número.

Figura 4.11 – O número 1089



Fonte: rede social TikTok.

Para a realização da atividade, o instrutor irá adivinhar o resultado que os participantes obterão ao seguirem os seguintes passos:

I. escolha um número de três algarismos diferentes, onde o último algarismo não pode ser zero;
II. escreva de trás para frente os algarismos deste número;
III. subtraia entre si o número escolhido e o número invertido (o maior deve estar primeiro na operação);
IV. escreva os algarismos do resultado da instrução anterior de trás para frente;
V. adicione entre si o resultado do passo (III) e o número obtido no passo (IV).

Realizado as operações a resposta será 1 089.

Exemplo 4.10

Por exemplo, o participante pensa no número 579 e realiza as operações:

$$975 - 579 = 396;$$
$$396 + 693 = 1089.$$

Assim, o instrutor avisa sem o participante falar em voz alta que o resultado final foi 1089.

Explicando como a "mágica" acontece:

Para explicar o porquê do resultado 1089 ao final, é necessário lembrar que os números fazem parte de um sistema de base 10.

$$abc = a.10^2 + b.10^1 + c.10^0.$$

Então, ao realizar os passos de (I) a (III), tem-se

$$abc - cba = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100(a - c) + 0 + (c - a).$$

Ao realizar esta operação, se faz necessário uma subtração com reagrupamento, retirando uma centena e distribuindo para as demais ordens, sendo 9 dezenas e 10 unidades. Desta maneira o número em questão continua a representar a mesma quantidade.

$$abc - cba = [\underbrace{(a - c - 1).10^2}_{x} + \underbrace{9.10^1}_{y} + \underbrace{(c - a + 10).10^0}_{z}].$$

Agora, ao somar o resultado com os algarismos invertidos tem-se nas seguintes ordens:

$$xyz + zyx = [(a - c - 1).10^2 + 9.10^1 + (c - a + 10).10^0] + [(c - a + 10).10^2 + 9.10^1 + (a - c - 1).10^0]$$
$$= [(a - c - 1).100 + 9.10 + (c - a + 10)] + [(c - a + 10).100 + 9.10 + (a - c - 1)$$
$$= 100a - 100c - 100 + 90 + c - a + 10 + 100c - 100a + 1000 + 90 + a - c - 1$$
$$= -100 + 90 + 10 + 1000 + 90 - 1$$
$$= 1\ 089.$$

Assim, sempre resultará em 1 089.

4.3.2 Atividade – DESCOBRINDO O NÚMERO DE CELULAR

Este truque foi publicado no site Só Matemática, como sugestão de um internauta.

Figura 4.12 – Número de telefone

Descobrindo o telefone de alguém

Peça para a pessoa, com uma calculadora:

1º) Digitar os 4 primeiros números de telefone dela;

2º) Multiplicar por 80;

3º) Somar 1;

4º) Multiplicar por 250;

5º) Somar os 4 últimos números do telefone dela;

6º) Somar mais uma vez os 4 últimos números do telefone dela;

7º) Subtrair 250;

8º) Dividir 2.

Fonte: https://www.somatematica.com.br/curiosidades/c42.php.

Exemplo 4.11

Adaptando a atividade para aparelhos móveis, que é o mais comum a população hoje, tem-se:

Todo número de celular se inicia com o algarismo nove, será pedido para desconsiderar este, e utilizar os oito restante, dentro de sua sequência.

Supondo que o número seja 9 9650 9567, é necessário que se realize as seguintes operações:

I. Multiplique os 4 primeiros dígitos por 80:

$$9\,650\,.\,80 = 772\,000;$$

II. some 1 ao resultado:

$$772\,000 + 1 = 772\,001;$$

III. multiplique por 250:

$$772\,001\,.\,250 = 193\,000\,250;$$

IV. some os 4 últimos dígitos do número telefônico ao resultado:

$$193\,000\,250 + 9\,567 = 193\,009\,817;$$

V. subtraia o número 250:

$$193\,009\,817 - 250 = 193\,009\,567;$$

VI. some novamente os últimos 4 dígitos do número telefônico:

$$193\,009\,567 + 9\,567 = 193\,019\,134.$$

Neste momento o participante entrega ao aplicador o resultado obtido ao final, que em segredo dividirá este número por 2 e revelará qual o número de celular utilizado.

$$193\ 019\ 134 : 2 = 96\ 509\ 567.$$

Explicando como a "mágica" acontece:

O número de celular é composto por 9 dígitos. Como foi pedido para não considerar o 9 inicial, que todos os números tem, os demais serão representados por variáveis $a, b, c, d, e, f, g, h,$ respectivamente na ordem que os algarismos se apresentam para sua resolução.

Lembrando que o sistema de numeração é decimal, ao operar com os 4 primeiros dígitos, temos a seguinte representação

$$abcd = a.10^3 + b.10^2 + c.10^1 + d.10^0.$$

Portanto, pelas instruções (I) a (III) tem-se

$$\begin{aligned} &[(a.10^3 + b.10^2 + c.10^1 + d.10^0).80 + 1].25 \\ &= [(1\ 000a + 100b + 10c + d).80 + 1].250 \\ &= [80\ 000a + 8\ 000b + 800c + 80d + 1].250 \\ &= 20\ 000\ 000a + 2\ 000\ 000b + 200\ 000c + 20\ 000d + 250. \end{aligned}$$

Nesta fase, já é possível observar que os algarismos representados pelas variáveis a, b, c, d ao serem multiplicados por 2, seu resultado ocupa a posição correta da ordem que elas representam no número de celular. Ao realizar as demais operações, é necessário utilizar os 4 últimos dígitos do número como

$$efgh = e.10^3 + f.10^2 + g.10^1 + h.10^0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} = (20\ 000\ 000a + 20\ 00\ 000b + 200\ 000c + 20\ 000d + 250) + \ e.10^3 + f.10^2 \\ + g.10^1 + h.10^0 - 250 + e.10^3 + f.10^2 + g.10^1 + h.10^0 \end{aligned}$$

$$= 2.(10\,000\,000a + 1\,000\,000b + 100\,000c + 10\,000d)$$
$$+ 2(1\,000e + 100f + 10g + h).$$

Quando o aplicador divide o resultado por 2 (que afinal é o maior segredo do truque), mantém os dígitos originários utilizados multiplicando por 1 na posição de sua ordem, resultando nos mesmos, e anulando as demais ordens. Assim é possível saber os algarismos do número celular sem vê-los inicialmente.

4.3.3 Atividade – ADIVINHAR A FIGURA ESCOLHIDA

Esta primeira atividade foi retirada de um artigo encontrado na internet chamado "O que a Matemática tem a ver com Magia?". Nas imagens abaixo é possível ler as instruções para sua realização, onde parece que está sendo realizado uma Telepatia com o participante:

Figura 4.13 – Figura Escolhida

Missão 1. Adivinhar a figura escolhida

Este truque necessita que tu imprimas a tabela que podes encontrar no anexo I. Pode ser feito com muitos participantes em simultâneo. Neste caso, o mágico mostra a tabela e a figura para que todos a possam ver.

Procedimento:

O mágico, neste caso tu, escolhes um voluntário e diz-lhe que, consegues adivinhar a figura que ele vai escolher.

Segue as instruções seguintes, em vais pedindo ao teu voluntário:

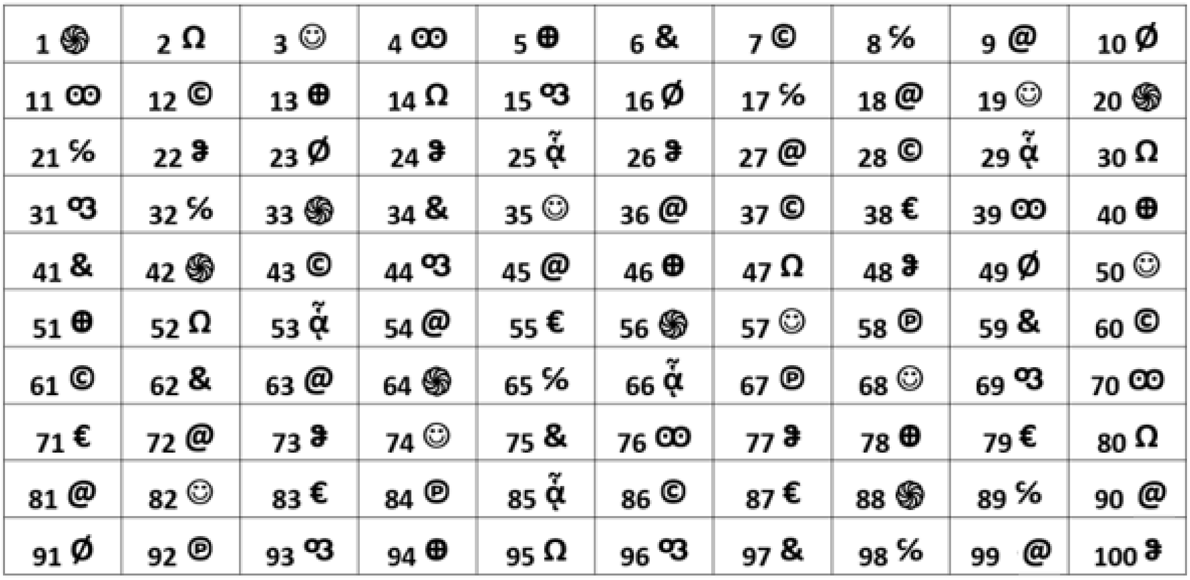
- Pensa num número de dois algarismos. *exemplo: 54*
- Adiciona os seus algarismos. *exemplo: 5+4 = 9*
- Subtrai esse número, ao número que pensaste. *exemplo: 54 - 9 = 45*
- Olha agora para a tabela – *e mostras a tabela* – e sem me dizeres, fixa o símbolo correspondente ao teu resultado. Eu vou adivinhar!

Agora, impressiona os teus familiares, e faz um esforço de telepatia, e diz ou desenha numa folha branca:

A figura é esta: @

Fonte: https://universidadejunior.up.pt/ficheiros/programas_ficaemcasa/O_magico_da_Matematica.pdf.

Figura 4.14 – Quadro de números e figuras



Fonte: https://universidadejunior.up.pt/ficheiros/programas_ficaemcasa/O_magico_da_Matematica.pdf.

Exemplo 4.12

No primeiro momento pede-se para que a pessoa pense em um número formado por dois algarismos, podendo ser este como exemplo o número 83. Depois, pedirá a esta que subtraia deste número que escolheu a quantidade equivalente de cada algarismo que o forma.

$$83 - 8 - 3 = 72.$$

Assim que avisar que já realizou a operação, a pessoa irá localizar na tabela que lhe será mostrada, o símbolo ao lado direito do resultado que obteve. Porém, ela somente irá olhar, não vai falar qual símbolo corresponde.

Feito isso, o instrutor do truque irá dizer que o símbolo do resultado é @.

Se as operações forem feitas corretamente, este será o símbolo do resultado da operação matemática realizada.

Explicando como a "mágica" acontece:

Para compreender está atividade, é preciso ter o conceito de que os números utilizados são formados por base 10, ou seja, todo número formado por dois algarismos, pode ser reescrito como:

$$ab = b.10^0 + a.10^1.$$

Reescrevendo o número 83, tem-se:

$$\begin{aligned} 83 &= 3.10^0 + 8.10^1 \\ &= 3.1 + 8.10 \\ &= 3 + 80. \end{aligned}$$

Assim, ao realizar as subtrações pedidas, se obtém:

$$ab = b.10^0 + a.10^1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} ab - a - b &= b.1 + a.10 - a - b \\ &= b + a.10 - a - b \\ &= a.10 - a \\ &= a(10 - 1) \\ &= 9a. \end{aligned}$$

Note que a resposta será um múltiplo de 9, e o símbolo mostrado como sinal de telepatia, está localizado na verdade, em todos os múltiplos de 9 e assim acontece a Matemágica.

4.4 OUTRAS ATIVIDADES ENVOLVENDO DIFERENTES ÁREAS

4.4.1 Atividade – O PROBLEMA DOS 35 CAMELOS DE MALBA TAHAN EM SEU LIVRO "O HOMEM QUE CALCULAVA"

Aqui está um dos enigmas que confunde muitas pessoas. Foi retirado a leitura de um trecho do livro, porém é um questionamento também muito divulgado pelos sites, em busca de explicações de sua solução. Leia atentamente:

"Nesta passagem, Beremiz – o homem que calculava – e seu colega de jornada encontraram três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Por entre pragas e impropérios gritavam, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmão – esclareceu o mais velho – e recebemos como heranças esses 35 camelos. Segundo vontade de nosso pai devo receber a metade, o meu irmão Hamed uma terça parte e o mais moço, Harin, deve receber apenas a nona parte do lote de camelos. Contudo, não sabemos como realizar a partilha, visto que a mesma não é exata.

- É muito simples – falou o Homem que Calculava. Encarrego-me de realizar, com justiça, a divisão se me permitirem que junte aos 35 camelos da herança este belo animal, pertencente a meu amigo de jornada, que nos trouxe até aqui.
E, assim foi feito.

- Agora – disse Beremiz – de posse dos 36 camelos, farei a divisão justa e exata. Voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber a metade de 35, ou seja, 17, 5. Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.
E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, ou seja, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação. Por fim, disse ao mais novo:

- Tu, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, ou seja, 4. Teu lucro foi igualmente notável.
E, concluiu com segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão realizada, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo, e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence a meu amigo de jornada. O outro, cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!"

A questão a se propor é: como explicar a partilha realizada por Beremiz, de tal forma que além de conceder vantagens aos irmãos, ainda fez sobrar um camelo para si?

Explicando como a "mágica" acontece:

Deve-se observar que a partilha foi feita dentro das partes:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}.$$

Ou seja, não resulta em um número inteiro. Assim, ao realizar a divisão entre os camelos sobrará $\frac{1}{18}$.

Note também que, 35 não é um múltiplo de 18, portanto sua divisão não resultará em número exato.

$$\frac{17}{18}\ de\ 35 = 33{,}05.$$

Onde cada irmão fica respectivamente com,

$$\frac{1}{2}\ de\ 35 = 17{,}5;$$
$$\frac{1}{3}\ de\ 35 = 11{,}6666\ldots\ ;$$
$$\frac{1}{9}\ de\ 35 = 3{,}8888\ldots\ .$$

Observe nos resultados que as partes inteiras juntas somam 31, enquanto as partes decimais somam 2,05 aproximadamente. Apesar desta parte decimal estar inclusa nas divisões, não foi levada em consideração pelos irmãos pois, não lhes valiam ficar com parte de um camelo, porém juntas já rendiam mais que 2 animais.

Para que pudesse haver outra divisão entre os três irmãos, era necessário obter a quantidade de aproximadamente 0,95 para aumentar mais um camelo a cada um. Mas, para melhor entendimento, Beremiz decidiu acrescentar mais um camelo a contagem, já que conseguiria trabalhar com números inteiros, e por 36 ser múltiplo de 18 e a fração correspondente ao resto seria de $\frac{1}{18}$, Beremiz sabia que sobraria 2 camelos e poderia devolver o que pertence ao seu amigo

$$\frac{1}{18}\ de\ 36 = 2.$$

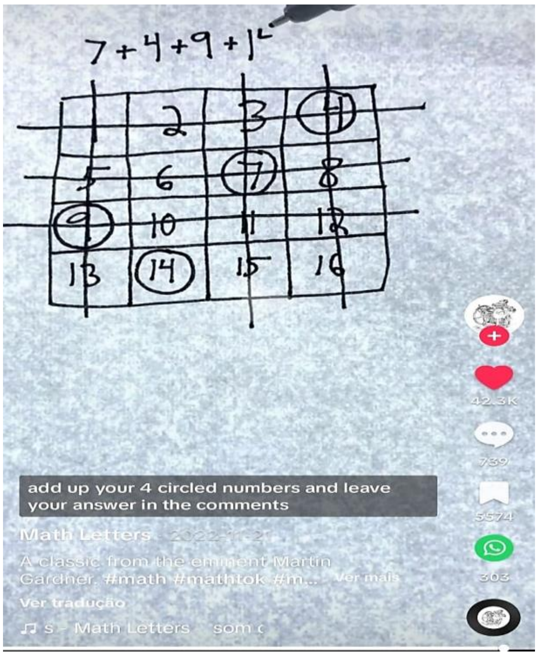
Assim, o primeiro irmão recebe 18 camelos, o segundo 12 e o terceiro 4, sobrando 1 camelo para quem solucionou a questão.

4.4.2 Atividade – A MATRIZ MÁGICA DE MARTIN GARDNER

Mágica muito interessante, publicada no TikTok pelo usuário @mathletters, de vídeo intitulado “Math Letters a classic from the eminet Martin Gardner”, mostra uma das atividades propostas pelo matemático de Martin Gardner.

Nascido em 2014, Gardner foi um escritor matemático especializado em matemática recreativa, apesar de ter como interesse outras áreas do conhecimento como filosofia, literatura, ilusionismo, pseudociência e ceticismo científico. Durante sua vida, escreveu em torno de 70 obras, sendo reconhecidas pelos enigmas matemáticos propostos.

Figura 4.15 – Matriz mágica



Fonte: rede social Tiktok.

Exemplo 4.13

O aplicador escreve no papel o número 34, que será o resultado, mas deixa para revelar somente no final. Em seguida, mostre ao participante a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Este irá escolher um número de cada linha e coluna diferente.

Para auxiliar, quem está aplicando a atividade, assim que ouvir o número escolhido, pode riscar o restante da linha e coluna.

No exemplo, supondo que o participante escolha o número 9

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{5} & 6 & 7 & 8 \\ 9 & \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \\ \cancel{13} & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Depois o número 16

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 & \cancel{4} \\ \cancel{5} & 6 & 7 & \cancel{8} \\ 9 & \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \\ \cancel{13} & \cancel{14} & \cancel{15} & 16 \end{bmatrix}$$

E por último os números 7 e 2

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & 7 & \cancel{8} \\ 9 & \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \\ \cancel{13} & \cancel{14} & \cancel{15} & 16 \end{bmatrix}$$

Somando, tem-se $2 + 7 + 9 + 16 = 34$, mesmo número que foi escrito inicialmente.

Explicando como a "mágica" acontece:

Para compreender esta atividade, é necessário construir um quadro com uma operação de adição de modo que a matriz original dada seja exatamente o resultado da operação, ou seja, é preciso identificar quais os números nestas laterais, para resultar cada célula do quadro como a soma da linha com a coluna correspondente.

Escolhendo a linha da forma natural como 1, 2, 3, 4, observa-se que a coluna deve ser composta dos números 0, 4, 8, 12 para que se concretize uma tábua da operação de adição de números naturais em que a matriz soma seja a matriz original.

Quadro 4.1 – Quadro de somas

+	1	2	3	4
0	0+1	0+2	0+3	0+4
4	4+1	4+2	4+3	4+4
8	8+1	8+2	8+3	8+4
12	12+1	12+2	12+3	12+4

Fonte: Elaborado pela autora

E assim obtém-se

Quadro 4.2 – Jogo Martin Gardner

+	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pela autora

De acordo com os procedimentos da mágica, deve-se somar necessariamente um número de cada linha e de cada coluna. Mas como cada célula é formada da soma vinda de um representante da linha $[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$ com um representante da coluna $[0 \quad 4 \quad 8 \quad 12]$, a soma final sempre vai equivaler a somar os números desta linha e coluna, ou seja,

$$0+1+2+3+4+4+8+12=34$$

Exemplo 4.14

Supondo que as células restantes fossem a diagonal principal da matriz, a soma final seria:

$$(0+1)+(4+2)+(8+3)+(12+4).$$

Mas aplicando a propriedade associativa e comutativa tem-se,

$$(0+\ 4+8+12)+(1+2+3+4)=\ 34.$$

E sempre será obtido o mesmo resultado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho traz a proposta de desmistificar algumas atividades encontradas em sites e redes sociais, utilizando a Matemática de modo a entreter, envolvendo com um mistério que pode ser solucionado através de cálculos mentais rápidos. Contudo, em quase a totalidade dos casos, não é dado ênfase ao raciocínio lógico envolvido, quanto menos às questões que podem ser levantadas a partir da análise do assunto objeto do cálculo. Essencialmente não é explicado porque o cálculo funciona e se os procedimentos podem ser estendidos para situações mais gerais.

Por outro lado, recursos como mágicas, enigmas, desafios, atraem a atenção das pessoas, sendo válido como metodologia ativa em sala, principalmente nas aulas de Matemática, que envolvem o raciocínio lógico e estratégia de resolução de problemas.

Estudar Matemática é praticar a arte do conhecimento, então mais do que ter respostas imediatistas, deve-se promover a interpretação e a busca de estratégias de solução. Acreditamos que os exemplos sugeridos podem contribuir para uma Matemática motivadora; que ao entender o problema, conhecer suas incógnitas, compreender seu desenvolvimento, ser capaz de produzir generalizações, estimula o indivíduo a ter raciocínio semelhante em outras situações do cotidiano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A MATEMÁTICA PURA. **Brincando de pensar em um número**. Disponível em: <http://amatematicapura.blogspot.com/2011/02/brincando-de-pensar-em-um-numero.html>. Acesso em: 09 de abr. de 2023.

ALMEIDA, V. L. de. **Matemágica em sala de aula: uma proposta lúdica usando a resolução de problemas**. Maceió, Alagoas, 2017.

BORGES, M. **História da Mágica**. Disponível em:< https://www.infoescola.com/artes/historia-da-magica/>. Acesso em: 29 de mai. de 2023.

BRAINLY. **BRAINLY**. Disponível em: <https://brainly.com.br/tarefa/40155934>. Acesso em: 15 de abr. de 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 28 de mar. de 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: Ministério da Educação, vol 3, 1997. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 05 de mai. de 2023.

CASA CIVIL. **90% dos lares brasileiros já tem acesso à internet no Brasil, aponta pesquisa**. Disponível em:< https://www.gov.br/casacivil/pt-br/assuntos/noticias/2022/setembro/90-dos-lares-brasileiros-ja-tem-acesso-a-internet-no-brasil-aponta-pesquisa>. Acesso em: 27 de abr. de 2023.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **Números Triangulares**. Disponível em:< http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-leitura-numeros-triangulares/>. Acesso em: 30 de ago. de 2023.

DICIONÁRIO ETIMOLÓGICO. **Aritmética.** Disponível em:< https://www.dicionarioetimologico.com.br/aritmetica/>. Acesso em: 19 de jul. de 2023.

DICIONÁRIO ETIMOLÓGICO. **Matemática.** Disponível em:<https://www.dicionarioetimologico.com.br/matematica/>. Acesso em: 15 de abr. de 2023.

DOCUSIGN. **Qual história por trás da criação da internet?.** Disponível em:< https://www.docusign.com.br/blog/criacao-da-internet>. Acesso em: 15 de abr. de 2023.

FACEBOOK. **Ensina Mais Ubiratã**. Disponível em:< https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=172799074669847&substory_index=482105267072558&id=107781517838270&mibextid=Nif5oz>. Acesso em: 27 de abr. de 2023.

FACEBOOK. **Matemática... SIM OU NÃO**. Disponível em:< https://www.facebook.com/PROFCADOSORIO>. Acesso em: 29 de jul. de 2023.

FURTADO, P. C. **Brincadeiras envolvendo jogos de mágica e a matemática**. 2008. 53 f. Relatório de Pesquisa (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Comunitária da Região de Chapecó, Chapecó, 2008.

GUEDES, J.D.; GONÇALVES, F.R.B. **Magicoterapia: o uso de mágicas contextualizadas como instrumento para auxiliar na ludoterapia.** Id on Line Revista Multidisciplinar e de Psicologia, Julho de 2016, vol.10, n.30, Supl.3,p. 84-98. ISSN 1981-1179.

HORTA, N. G. **Curiosidade Matemática #9 – 1089: O Número (dito) Mágico**. Disponível em:< https://www.blogviche.com.br/2007/08/11/curiosidade-matematica-9-1089-o-numero-dito-magico/> Acesso em: 09 de abr. de 2023.

KRONNUS. **Os primeiros registros de truques de mágica e números de ilusionismo**. Disponível em: < https://omago.com.br/os-primeiros-registros-de-truques-de-magica-e-numeros-de-ilusionismo/> . Acesso em: 29 de mai. de 2023.

OLIVEIRA, S.A. **O lúdico como motivação nas aulas de Matemática**. 377°. ed. p.5. Jornal Mundo Jovem. jun. 2007.

OLIVEIRA, T. J. de; MASCARELLO, T. H.; GRANDO, C. M.; ANDREIS, R. F. **Matemática: (re) significando saberes, construindo cidadania.** Revista Pedagógica, Chapecó, n. 30, v. 1, p. 649-666., jan./jun. 2013. Acessado XX EREMAT – Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014. 587 em mar. 2015. Online. Disponível em: <http://bell.unochapeco.edu.br/revistas/index.php /pedagogica/article/viewFile/1586/905>. Acesso em: 19 de outubro de 2017.

OXFORD LANGUAGES. **O que significa a palavra matemática?**. Disponível em:< https://www.google.com/search?q=o+que+significa+a+palavra+matem%C3%A1tica&oq=o+que+significa+a+palavra+matem%C3%A1tica&aqs=edge..69i57j0i15i22i30j0i22i30l4j0i15i22i30j0i22i30.16381j0j1&sourceid=chrome&ie=UTF-8>. Acesso em: 15 de abr. de 2023.

PLAY STORE. **Aplicativo Tiktok**. Disponível em: < https://play.google.com/store/apps/details?id=com.zhiliaoapp.musically>. Acesso em: 15 de abr. de 2023.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

SAMPAIO, J. C; MALAGUTTI, P. L. **Mágicas, matemática e outros mistérios**. São Carlos: EdUFSCar, 2008.

SAMPAIO, J. C. **Aritmágicas**. Disponível em: < https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/aritmagicas.pdf>. Acesso em: 24 de mai. de 2023.

SÓ MATEMÁTICA. **Descobrindo o telefone de alguém**. Disponível em: < https://www.somatematica.com.br/curiosidades/c42.php>. Acesso em: 18 de mai. de 2023.

TAHAN, Malba. **As Maravilhas da Matemática**. 2.ed. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1972.

TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2007.

TODA MATÉRIA. **História da internet: quem criou e quando surgiu**. Disponível em: < https://www.todamateria.com.br/historia-da-internet/>. Acesso em: 28 de jul. de 2023.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA. **Martin Gardner**. Dísponível em: < https: //www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Gardner-M>. Acesso em: 28 de jul. de 2023.

UNIVERSIDADE JUNIOR. **O que tem a Matemática a ver com a Magia?**. Dísponível em: < https://universidadejunior.up.pt/ficheiros/programas_ficaemcasa/O_magico_da_Matematica .pdf>. Acesso em: 15 de mar. de 2023.

WIKIHOW. **Como Fazer um Truque de Mágica Matemático**. Disponível em: < https://pt.wikihow.com/Fazer-um-Truque-de-M%C3%A1gica-Matem%C3%A1tico>. Acesso em: 27 de abr. de 2023.

YOUTUBE. **Agora é só praticar**. Disponível em: < https://youtube.com/shorts/2m6VvRAoz 2Y?feature=share>. Acesso em: 27 de abr. de 2023.

YOUTUBE. **Donald no País da Matemágica**. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>. Acesso em: 15 de abr. de 2023.

YOUTUBE. **Multiply any number by 3367 (FAST)**. Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=QOKw_fLc8IQ&t=38s>. Acesso em: 27 de abr. de 2023.

YOUTUBE. **Pense um número, Multiplique por 2, Some + 10... Desvendando o mistério**. Disponível em:< https://youtu.be/gXvxXDMpuwM>. Acesso em: 27 de abr. de 2023.