Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

RESOLVENDO EQUAÇÕES CÚBICAS ATRAVÉS DA ÁLGEBRA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Cícero Henrique Viana Correia

Juazeiro do Norte - CE

2023

RESOLVENDO EQUAÇÕES CÚBICAS ATRAVÉS DA ÁLGEBRA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Cícero Henrique Viana Correia

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador Prof. Dr. Flávio França Cruz

Aprovada em: 14/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Orientador)

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Me. Mário de Assis Oliveira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Francisco Calvi da Cruz Júnior

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico este trabalho à minha esposa Priscila, a qual sempre me incentivou nos estudos, e aos meus filhos Murilo e Dante, frutos do nosso amor.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir estudar, sendo propício a escrita deste texto. Sem Sua maravilhosa graça, certamente este trabalho não seria finalizado. Ao Senhor Jesus Cristo, toda honra e glória!

Agradeço à minha família, especialmente à minha esposa Priscila Rodrigues de Alcantara Viana, por sempre me incentivar a cursar, a estudar, a permanecer e a concluir o mestrado profissional (Profmat-Seduc), me instigando a escrever o quanto antes esta dissertação. A ela, meu amor e minha gratidão.

Aos meus avós José Correia Viana e Maria Ester Viana (*in memoriam*) pelo cuidado, amor e carinho ofertados a mim por todo o tempo em que estivemos juntos - sou parte do legado deste casal; à minha tia Maria Vilanir Viana (*in memoriam*) pelo imenso amor altruísta dado aos seus sobrinhos, especialmente a mim, seu filho por adoção; à minha mãe Marta Viana pelo dom da vida sem o qual nada do que fiz até hoje poderia ser feito; aos meus tios Maria Clemência (Mencinha) e José Wilson que sempre me apoiaram nos estudos, além de me acolher sem hesitar como verdadeiro filho. Nada do que eu vier a fazer será capaz de pagar tudo o que vocês já fizeram por mim. A vocês, minha eterna gratidão!

Aos amigos que fiz no decorrer deste mestrado: Nathália, João Lourenço, Thiago, Edvânia, Paulina, Inácio e Emanuellen, sem esquecer de Ernando e Agaús que mesmo não chegando ao final desta etapa, fizeram parte da jornada. Obrigado pelo companherismo e a ajuda que precisei para chegar até aqui. A vocês, meu carinho e respeito.

Ao professor Dr. Flávio França por ter aceitado prontamente o tópico das equações cúbicas como tema desta dissertação e também pela indicação de vídeos e outros

materiais que tratavam profundamente sobre estas equações. Meu muito obrigado.

Aos grandes professores que tive nas mais diversas áreas do conhecimento no ensino fundamental, médio e superior, os quais contribuíram decisivamente na minha formação estudantil. São eles: Antônio de Souza Bezerra (Matemática e Ciência), José Laurindo de Matos Filho (Geografia e História), Francisca Maria (Língua Portuguesa), Edson Ramalho (Matemática), José Nunes Aquino (Matemática), Anastácio Ferreira (Filosofia e Sociolgia), Fernando Eugênio Lopes de Melo (Educação Física), Carlos Henrique (Física), Mário de Assis Oliveira (Matemática) e Zelálber Gondim Guimarães (Matemática). A todos vocês, meu muitíssimo obrigado!

“O temor do Senhor é o princípio da ciência; os loucos desprezam a sabedoria e a instrução.” (Rei Salomão, Provérbios 1:7)

Resumo

Neste trabalho, tentaremos mostrar que é possível resolver equações cúbicas usando apenas a álgebra estudada nos $8^{\underline{o}}$ e $9^{\underline{o}}$ anos do Ensino Fundamental, a qual é revisada no $1^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio, sendo assim uma ótima oportunidade de aprofundamento e de extensão de conteúdos já vistos anteriormente.

Na seção 2, mostraremos um pouco da história sobre a busca por uma fórmula geral que resolvesse as equações cúbicas, desde os povos antigos (babilônios e gregos) até o início do século XVI, quando a fórmula resolutiva das equações cúbicas foi descoberta por Del Ferro e Tartaglia (depois publicada por Cardano).

Na seção 3, estudaremos a álgebra lecionada nos $8^{\underline{o}}$ e $9^{\underline{o}}$ anos do Ensino Fundamental, passando por operações algébricas com polinômios, equações quadráticas e a "operação"completar quadrados e cubos. Veremos ainda a interpretação geométrica destas expressões (quadrados e cubos).

Na seção 4, desenvolveremos, a partir do que foi estudado na seção anterior, uma fórmula resolutiva das equações cúbicas análoga à fórmula resolutiva das equações quadráticas. Mostraremos o argumento desenvolvido por Tartaglia-Cardano que resultou numa fórmula geral para estas equações.

Na última seção, estudaremos alguns problemas matemáticos que se resumem a resolver uma equação cúbica (propostos por Del Fiore e Tartaglia), ou seja, aplicar a fórmula de Tartaglia-Cardano.

Palavras-chave: Equações Cúbicas, Álgebra, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Abstract

In this work, we will try to show that it is possible to solve cubic equations using only the algebra studied in the 8th and 9th grades of Elementary School, which is reviewed in the 1st year of High School, thus providing an excellent opportunity for deepening and extending previously covered content.

In Section 2, we will present a brief history of the search for a general formula that solves cubic equations, from ancient civilizations (the Babylonians and Greeks) to the beginning of the 16th century, when the solution formula for cubic equations was discovered by Del Ferro and Tartaglia (later published by Cardano).

In Section 3, we will study the algebra taught in the 8th and 9th grades of elementary school, covering algebraic operations with polynomials, quadratic equations, and the "completing squares and cubes"technique. We will also explore the geometric interpretation of these expressions (squares and cubes).

In Section 4, building upon what was studied in the previous section, we will develop a solution formula for cubic equations analogous to the solution formula for quadratic equations. We will present the argument developed by Tartaglia-Cardano, which resulted in a general formula for these equations.

In the final section, we will study some mathematical problems that can be reduced to solving a cubic equation (proposed by Del Fiore and Tartaglia), that is, applying the Tartaglia-Cardano formula.

Keywords: Cubic Equations, Algebra, Elementary School, and High School.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, mostraremos a possibilidade de se resolver uma equação cúbica a partir de uma fórmula algébrica, a qual, diferentemente da equação quadrática, demorou muito tempo para ser descoberta.

Para isto, nos bastará apenas o conhecimento prévio da álgebra elementar, isto é, de tópicos que qualquer estudante dos anos finais do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio tem acesso. Pensando nisto, não nos deteremos muito no caso das raízes irredutíveis (embora façamos alguns exemplos cuja solução seja uma raiz irredutível), as quais necessitam de conhecimentos um pouco mais avançados de trigonometria para transformá-las num número real puro, tópico estudado no 3º ano do Ensino Médio.

Abordaremos ainda a interpretação geométrica das equações cúbicas (das equações quadráticas também), que era a forma original como estas equações foram estudadas. Aliás, no caso do cubo primeiro veio a forma geométrica e depois a expressão algébrica (ambas são intrinsecamente ligadas).

A abordagem geométrica dá subsídios que permitem compreender o raciocínio empregado por Tartaglia-Cardano no desenvolvimento da fórmula algébrica, consistindo basicamente em reescrever um cubo subdividido em 8 blocos, mas agora subdividindo-o em 5 blocos, eliminando deste modo o fator quadrático da expressão algébrica do desenvolvimento do cubo da soma (diferença).

Embora trabalhemos o conceito geométrico por trás da equação cúbica, nosso foco principal será mesmo o desenvolvimento da fórmula resolutiva (Tartaglia-Cardano) e sua aplicação. Esta aplicação será de modo análogo à aplicação da fórmula resolutiva das equações quadráticas, assunto bastante abordado nesta etapa de ensino.

2 A Descoberta da Fórmula Resolutiva da Equação Cúbica: Uma Breve História

As equações quadráticas são estudadas desde a antiguidade, assim como as equações cúbicas. Porém, diferentemente das cúbicas, a solução geral das equações quadráticas é conhecida há muito tempo, seja através de passos que se seguiam para encontrar as suas raízes, seja através da própria fórmula resolutiva.

A busca por uma solução geral das equações cúbicas demorou muitos séculos, mas esta busca ajudou a desenvolver a matemática em vários campos, principalmente a Álgebra, a qual permite expressar uma fórmula que resolva todas as equações cúbicas.

Até o momento, não há evidências arqueológicas de que sumérios e egípcios tenham estudado as equações cúbicas. Embora os sumérios sejam até hoje considerados o primeiro povo a empregar a matemática em seu codidiano (comércio, construção etc.), aparentemente eles se dedicavam, assim como os egípcios, ao estudo das equações quadráticas, tendo eles conseguido resolver tipos particulares destas equações.

2.1 Os Babilônios

Figura 2.1: Ilustração da Cidade de Babilônia

Fonte: https://aulazen.com/historia/a-cidade-babilonia-cultura-religiao-economia-codigo-de-hamurabi-e-queda/

Acredita-se que os babilônios foram os primeiros a estudar as equações cúbicas por volta do ano de 1700 a.C. Eles não dispunham de uma fórmula algébrica, pois nesta época a matemática se resumia basicamente à problemas aritméticos e geométricos ligados intrinsecamente ao cotidiano (comércio, comprimento, área e volume). O método babilônico utilizava uma tabela com valores conhecidos (números naturais) e fornecia soluções aproximadas das equações. Na Figura 2.2, temos um exemplar dos tabletes babilônicos destas tabelas em escrita cuneiforme.

Figura 2.2: Tablete Cuneiforme

Fonte: https://www.schoyencollection.com/mathematics-collection/9-3-algebra/cubic-equations-table-ms-3048

Em linguagem atual, temos a Tabela 2.1:

n	n^3	n^2	n^3+n^2
1	1	1	2
2	8	4	12
3	27	9	36
4	64	16	80
5	125	25	150
6	216	36	252
7	343	49	392
8	512	64	576
9	729	81	810
10	1000	100	1100

Tabela 2.1: Criada pelo Autor

Usando estas tabelas, o método babilônico resolvia equações cúbicas bem específicas chamadas de "normalizadas"; em linguagem moderna, eram equações da forma $x^3 + px^2 = qx$ com os coeficientes p e q conhecidos.

Para ver como os babilônios faziam, consideremos a equação normalizada $x^3+5x^2 = 84x$, com $p = 5$ e $q = 84$ (perceba que o zero é uma raiz desta equação, porém ela não era considerada porque o conceito do zero ainda não era conhecido pelos povos antigos).

Consultando a tabela anterior, podemos facilmente construir a Tabela 2.2:

n	n^3	$5n^2$	n^3+5n^2	$84n$
1	1	5	6	84
2	8	20	28	168
3	27	45	72	246
4	64	80	144	336
5	125	125	250	420
6	216	180	396	504
7	343	245	588	588

Tabela 2.2: Criada pelo Autor

Portanto, a solução, para a equação $x^3 + 5x^2 = 84x$ é $x = 7$.

Quando a solução não é exata, eles aproximavam cada vez mais os valores obtidos da solução repetindo este processo. Este método foi amplamente utilizado na antiguidade, porém ele permitia resolver apenas tipos específicos de equações cúbicas.

2.2 Os Gregos

Figura 2.3: Grécia Antiga

Fonte: https://www.significados.com.br/grecia-antiga/

Os matemáticos gregos também se interessaram pelo estudo das equações cúbicas. Com os métodos disponíveis na época, eles conseguiram resolver apenas alguns tipos de equações. Aqui, podemos destacar o matemático grego Diofanto de Alexandria (aproximadamente século III d.C.) que desenvolveu em seus trabalhos um método que podia ser aplicado na solução de equações cúbicas.

Diofanto descobriu que se x pode ser escrito como a soma de dois números, então estes dois números podem ser calculados através de um processo específico, decompondo a equação cúbica em outras duas equações, sendo uma delas quadrática (composição e resolução). As raízes da equação quadrática solucionavam a equação cúbica original.

Por exemplo, em sua obra aparece, em linguagem atual, o problema: Encontre dois números cuja soma é 10 e cuja soma de seus cubos é 370.

Sejam x e y estes dois números. Então podemos escrever algebricamente $x+y=10$ e $x^3+y^3=370$. Pelo método de Diofanto, podemos tomar $a \in \mathbb{R}$ tal que $x=5-a$ e $y=5+a$ (observe que temos $x+y=5-a+5+a=10$).

Substituindo $x=5-a$ e $y=5+a$ na expressão $x^3+y^3=370$, teremos:

$$
\begin{aligned}
&x^3 + y^3 = 370\\
&\Longleftrightarrow (5-a)^3 + (5+a)^3 = 370\\
&\Longleftrightarrow 125 - 75a + 15a^2 - a^3 + 125 + 75a + 15a^2 + a^3 = 370\\
&\Longleftrightarrow 250 + 30a^2 = 370\\
&\Longleftrightarrow 30a^2 = 370 - 250\\
&\Longleftrightarrow a^2 = \frac{120}{30}\\
&\Longleftrightarrow a = \sqrt{4}\\
&\Longleftrightarrow a = \pm 2.
\end{aligned}
$$

Para Diofanto havia apenas a solução positiva; logo, ele escolheria $a = 2$. Disto, encontraremos de $x = 5 - a$ e $y = 5 + a$, os números:

$$x = 5 - a = 5 - 2 = 3 \quad e \quad y = 5 + a = 5 + 2 = 7.$$

Embora este método não tenha sido desenvolvido apenas para a solução de equações cúbicas (podendo ser aplicado às equações quadráticas por exemplo), ele resolve algumas equações cúbicas específicas sem no entanto generalizá-las. Os gregos não conseguiram obter um método que resolvesse todas as cúbicas.

2.3 Os Italianos e o Renascimento

Florença, na península itálica, reuniu por volta de 1500 as condições propícias para um renascimento das artes, cultura e ciência (esta principalmente ficou estagnada na Europa por um longo período por diversos motivos, embora no mundo árabe tenha continuado a se desenvolver, particularmente a matemática e a astronomia).

No final do século XV, os intelectuais, professores, artistas e cientistas, por exemplo, voltaram novamente sua atenção à cultura clássica grega e romana, na busca de resgatar algo que estava esquecido. Passou-se a estudar a natureza e a sociedade mais livremente, tentando-se explicar a causa e efeito das coisas e dos eventos mais racionalmente, sem apelar à intervenção divina.

Somente em meados do século XVI foi que os italianos Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), conhecido como Tartaglia, descobriram a solução geral da equação cúbica de forma independente. Esta é uma história com reviravoltas e curiosidades.

Scipione del Ferro nasceu na cidade de Bolonha em 6 de fevereiro de 1465. Ele foi professor de matemática na Universidade de Bolonha, onde lecionou por mais de três décadas, sendo o primeiro a descobrir uma solução geral para a equação cúbica (possivelmente, ele não sabia que o seu método podia ser estendido a todas as equações cúbicas). Ele morreu na cidade de Bolonha em 5 de novembro de 1526.

Del Ferro manteve sua descoberta em segredo por muito tempo (ele tinha a intenção de usar este conhecimento em duelos matemáticos, o que lhe traria muita vantagem) até quando revelou o método de se resolver equações cúbicas ao seu aluno Antonio Maria del Fiore. Del Fiore tem sua importância na história das equações cúbicas como um grande divulgador destas equações, ajudando a popularizá-las nos círculos matemáticos. Provavelmente foi nestes círculos matemáticos que Antonio Fiore conheceu (ou ouviu falar sobre) Niccolò Fontana Tartaglia.

Figura 2.4: Niccolò Fontana Tartaglia

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccolò_Fontana_Tartaglia

Niccolò Fontana (Tartaglia) nasceu em Bréscia no norte da Itália. Ele era um autodidata em matemática e começou a trabalhar como professor de ciências em Verona, Veneza, Vicenza e Bréscia após passar por uma infância muito difícil, chegando inclusive a correr risco de morte.

Em contato com problemas propostos por seu amigo Zuanne da Coi, Tartaglia trabalhou e descobriu uma solução geral para equações cúbicas do tipo $x^3 + bx^2 = d$, que é diferente do que descobriu Del Ferro e era conhecido por Del Fiore.

Del Fiore, após saber que Tartaglia havia descoberto um método de se resolver equações cúbicas, o desafiou para um duelo matemático pois se sentia seguro com o método que aprendera de seu antigo professor Del Ferro. Foram propostos 30 problemas que envolviam equações cúbicas a Tartaglia, o qual resolveu todos sem grandes dificuldades.

Após este duelo, Tartaglia guardou o segredo de solução das equações cúbicas por muito tempo, até que revelou o seu método a Girolano Cardano (1501-1576) depois de muita insistência.

Figura 2.5: Girolamo Cardano

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_girolamo-cardano/

Girolamo Cardano foi um matemático, médico, astrônomo e filósofo italiano do século XVI. Ele é conhecido por suas contribuições à matemática, especialmente no campo da álgebra, e por suas obras sobre filosofia, medicina e astrologia. Nasceu em Pavia na Itália numa família pobre, porém com grande interesse pelos estudos.

Em 1545, Cardano publica sua obra "Ars Magna"onde trata sobre a resolução das equações cúbicas, trazendo o método que aprendera de Tartaglia. Embora Cardano cite no livro que Tartaglia o tenha ajudado com as equações cúbicas, a fama e a glória ficaram com Cardano, pois até hoje muitos autores quando citam a fórmula resolutiva das equações cúbicas falam em "Fórmula de Cardano". Somente mais recentemente que se passou a denominá-la "Fórmula de Tartaglia-Cardano".

Em linguagem atual, a maioria dos livros a retratam da seguinte maneira: Dada a equação cúbica

$$x^3 + px + q = 0,$$

então temos que:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Neste texto, escrevemos esta fórmula diferente, tentando deixar o modo de usá-la mais parecido com a fórmula resolutiva das equações quadráticas.

3 Algumas Ferramentas Algébricas Para a Resolução das Equações Cúbicas

Nesta seção, veremos alguns tópicos de álgebra elementar que nos permitirão resolver qualquer equação cúbica. Estes tópicos elementares são estudados no 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, sendo muito explorados nestes dois anos escolares.

3.1 Equações Quadráticas

Definição 1. *Uma equação do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada de **equação quadrática**, onde a,b e c são chamados os **coeficientes** da equação.*

De acordo com a Definição 1, as equações

(I) $3x^2 = 0$;

(II) $2x^2 + 3x = 0$;

(III) $x^2 - 16 = 0$ e

(IV) $-3x^2 + 3x + 5 = 0$

são equações quadráticas.

Em (I), temos $a = 3$ e $b = c = 0$; em (II), temos $a = 2, b = 3$ e $c = 0$; em (III), temos $a = 1, b = 0$ e $c = -16$ e em (IV), temos $a = -3, b = 3$ e $c = 5$. As equações $(I), (II)$ e (III) são ditas equações quadráticas incompletas, enquanto a equação (IV) é uma equação quadrática completa, pois temos os três coefiecientes a, b e c diferentes de zero.

Para deduzirmos uma fórmula de resolução da equação quadrática, vamos utilizar os produtos notáveis quadrado da soma e quadrado da diferença e suas respectivas fatorações, bem como a "operação completar quadrados".

3.2 Quadrado da Soma e Quadrado da Diferença

Definição 2. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, as expressões algébricas $(x+y)^2$ e $(x-y)^2$ são chamadas, respectivamente, de **quadrado da soma** e de **quadrado da diferença**.*

Aplicando a propriedade distributiva para desenvolver ambas as expressões acima, teremos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(x+y)^2 = (x \arrow[rrr, bend left, "x\cdot x"] \arrow[rrrrr, bend left, "x\cdot y"] & + & y) \arrow[r, bend right, "y\cdot x"'] \arrow[rrr, bend right, "y\cdot y"'] & (x & + & y)
\end{tikzcd}$$

$$= x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

e

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(x-y)^2 = (x \arrow[rrr, bend left, "x\cdot x"] \arrow[rrrrr, bend left, "x\cdot y"] & - & y) \arrow[r, bend right, "y\cdot x"'] \arrow[rrr, bend right, "y\cdot y"'] & (x & - & y)
\end{tikzcd}$$

$$= x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Isto nos mostra que desenvolver o quadrado da soma ou o quadrado da diferença, os quais diferem apenas em um sinal no termo $2xy$, é uma tarefa bem simples. Além disto, o desenvolvimento acima nos permite extrair a seguinte regra mnemônica: o quadrado da soma (diferença) é igual ao quadrado do 1º termo mais (menos) duas vezes o 1º termo vezes o 2º termo mais o quadrado do 2º termo.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. *Desenvolva o seguinte quadrado da soma* $(x+3)^2$.

Solução: Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(x+3)^2 = (x \arrow[rrr, bend left, "x\cdot x"] \arrow[rrrrr, bend left, "x\cdot 3"] & + & 3) \arrow[r, bend right, "3\cdot x"'] \arrow[rrr, bend right, "3\cdot 3"'] & (x & + & 3)
\end{tikzcd}$$

$$= x^2 + 3x + 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Portanto, $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

$\square$

Exemplo 2. *Desenvolva o quadrado da diferença* $(x-5)^2$.

Solução: Pela regra mnemônica, segue-se:

$$(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25.$$

Portanto, $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$.

$\square$

Observação 1. *As expressões $x^2 + 2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ obtidas, respectivamente, a partir do desenvolvimento do quadrado da soma e do quadrado da diferença são chamados de* ***trinômio quadrado perfeito****.*

Agora que já sabemos como desenvolver os produtos notáveis da Definição 2, veremos a seguir como podemos interpretá-los geometricamente.

3.3 Interpretação Geométrica do Quadrado da Soma e do Quadrado da Diferença

Considere o quadrado de lado $x + y$ da Figura 3.1:

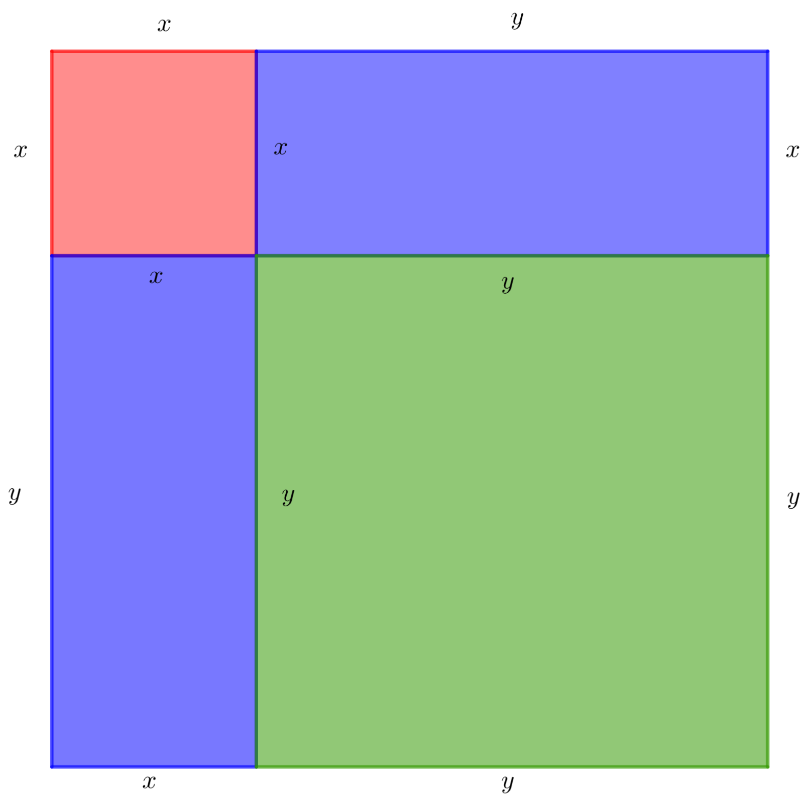

Figura 3.1: Quadrado da Soma (Criado pelo Autor)

Perceba que este quadrado, cuja área é igual a $(x+y)^2$, está subdividido em quatro sub-regiões. Nestas sub-regiões, temos o quadrado de área x^2 (cor vermelha), o quadrado de área y^2 (cor verde) e dois retângulos de mesma área xy (cor azul).

Obviamente, somando-se as áreas destas quatro sub-regiões, obteremos a área do quadrado maior que é $(x+y)^2$. Ou seja:

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Em outros termos, encontramos o desenvolvimento do quadrado da soma.

Agora, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $0 < y < x$, consideremos um quadrado de lado x conforme a Figura 3.2 (note que $x - y + y = x$):

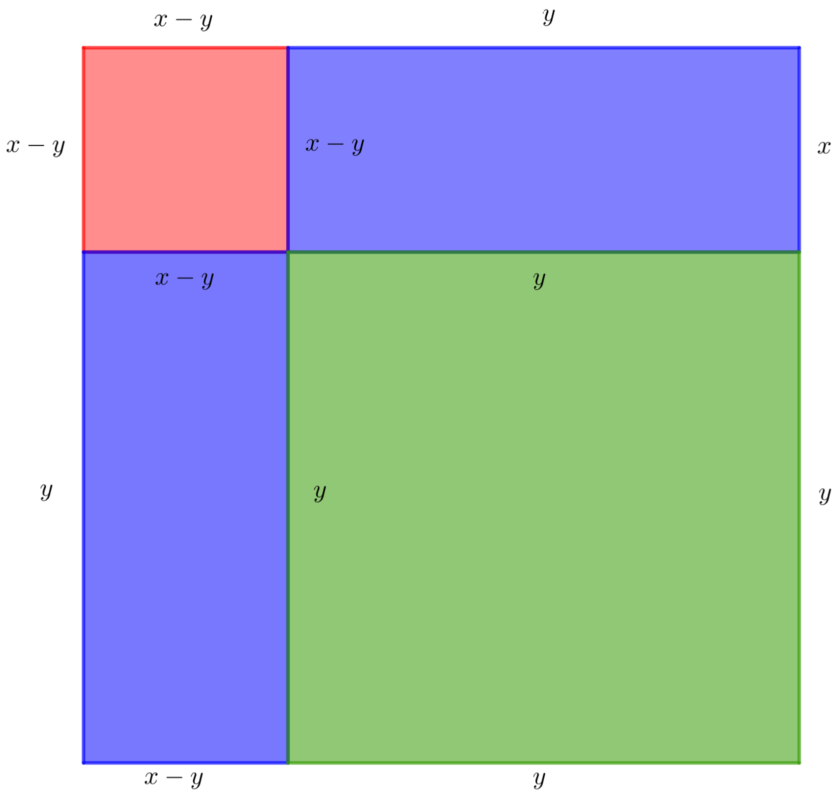

Figura 3.2: Quadrado da Diferença (Criado pelo Autor)

Observe que o quadrado de lado x e área x^2 está subdividido em quatro sub-regiões: um quadrado de área $(x-y)^2$ (cor vermelha), um quadrado de área y^2 (cor verde) e dois retângulos de mesma área $(x-y)y$ (cor azul).

Obviamente, somando-se as áreas destas quatro sub-regiões, encontraremos a área do quadrado maior que é x^2. Ou seja:

$$
\begin{aligned}
& x^2 = (x-y)^2 + (x-y)y + (x-y)y + y^2 \\
\iff & x^2 = (x-y)^2 + xy - y^2 + xy - y^2 + y^2 \\
\iff & x^2 = (x-y)^2 + 2xy - y^2 \\
\iff & (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.
\end{aligned}
$$

Isto é, encontramos o desenvolvimento do quadrado da diferença.

No próximo tópico, veremos como fatorar o trinômio quadrado perfeito.

3.4 Fatorando o Trinômio Quadrado Perfeito

Queremos fatorar expressões do tipo $x^2 \pm 2xy + y^2$ (trinômio quadrado perfeito). Perceba que o termo central $\pm 2xy = \pm 2 \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$, com $x, y \in \mathbb{R}^+$, e esta igualdade caracteriza o trinômio quadrado perfeito, de modo que a expressão é um trinômio quadrado perfeito se, e somente se, esta igualdade é satisfeita; caso contrário, não é.

Identificado que a expressão é um trinômio quadrado perfeito, a sua fatoração é facilmente feita, pois sabemos pela Definição 2 que $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$.

Vejamos isto com alguns exemplos a seguir:

Exemplo 3. *Verifique se a expressão $x^2 + 8x + 16$ é um trinômio quadrado perfeito. Caso seja, reescreva-a como um produto notável.*

Solução: O termo central do trinômio é $8x$. Veja que temos:

$$2 \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot x \cdot 4 = 8x$$

Como a igualdade é verificada, então $x^2 + 8x + 16$ é um trinômio quadrado perfeito. Logo, podemos escrevê-lo como $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$, isto é, como um quadrado da soma.

$\square$

Exemplo 4. *O trinômio $x^2 - 20x + 100$ é quadrado perfeito? Se sim, escreva-o na sua forma fatorada.*

Solução: O termo central do trinômio é $-20x$. Disto, segue-se:

$$-2 \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{100} = -2 \cdot x \cdot 10 = -20x$$

A expressão $x^2 - 20x + 100$ é um trinômio quadrado perfeito, pois a igualdade é verificada. Então, temos que $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$, ou seja, temos um quadrado da diferença.

$\square$

Exemplo 5. *Analise se a expressão $x^2 + 10x + 36$ é um trinômio quadrado perfeito.*

Solução: Temos como termo central $10x$. Logo, obtemos:

$$2 \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot x \cdot 6 = 12x$$

Obviamente, $12x \neq 10x$, logo a expressão $x^2+10x+36$ não é um trinômio quadrado perfeito.

$\square$

Entendida a caracterização do trinômio quadrado perfeito e como fatorá-lo, vamos a seguir aprender como completá-los quando não tivermos o 3º termo do trinômio.

3.5 Completando Quadrados

Como ilustração inicial, tomaremos o trinômio quadrado perfeito $x^2 + 8x + 16$ do Exemplo 3. Supondo que não tenhamos o 3º termo que é 16 (ficamos apenas com o binômio $x^2 + 8x$), como podemos obter o número 16 e termos novamente o trinômio quadrado perfeito? A resposta a esta pergunta será vista no próximo exemplo:

Exemplo 6. *Complete a expressão $x^2 + 8x$ de modo que tenhamos um trinômio quadrado perfeito.*

Solução: Sabemos que o trinômio quadrado perfeito é uma expressão do tipo $x^2 \pm 2xy + y^2$.

Comparando o binômio $x^2 + 8x$ com o trinômio $x^2 + 2xy + y^2$, vemos claramente que falta o termo equivalente a y^2. Além disto, observando os seus respectivos termos centrais, devemos ter $2xy = 8x$, de onde temos:

$$2xy = 8x \Longleftrightarrow 2y = 8 \Longleftrightarrow y = \frac{8}{2} = 4.$$

Como $y = 4$, segue-se que $y^2 = 16$. Logo, completando o quadrado, obtemos o trinômio quadrado perfeito $x^2 + 8x + 16$.

$\square$

Para a próxima ilustração, consideraremos o trinômio quadrado perfeito $x^2 - 20x + 100$ do Exemplo 4. Supondo também que não tenhamos o seu $3^{\underline{o}}$ termo que é 100, o que nos dá o binômio $x^2 - 20x$, transformamos este binômio num trinômio quadrado perfeito.

Exemplo 7. *Transforme o binômio $x^2 - 20x$ num trinômio quadrado perfeito.*

Solução: Comparando $x^2 - 20x$ com o trinômio $x^2 - 2xy + y^2$, vemos que falta o termo equivalente a y^2. De seus respectivos termos centrais, devemos ter $-2xy = -20x$. Disto, segue-se:

$$-2xy = -20x \Longleftrightarrow -2y = -20 \Longleftrightarrow y = \frac{-20}{-2} = 10.$$

Como $y = 10$, temos que $y^2 = 100$. Logo, para que o binômio $x^2 - 20x$ se torne um trinômio quadrado perfeito, basta somar a ele o número 100; e com isto obtemos $x^2 - 20x + 100$.

$\square$

Para finalizarmos este tópico, vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 8. *Transforme o binômio $x^2 + 10x$ num trinômio quadrado perfeito.*

Solução: Da mesma maneira, comparando o termo central do trinômio $x^2 + 2xy + y^2$ com $10x$, devemos ter $2xy = 10x$. Segue-se:

$$2xy = 10x \Longleftrightarrow 2y = 10 \Longleftrightarrow y = \frac{10}{2} = 5.$$

Como $y = 5$, temos $y^2 = 25$. Para que o binômio $x^2 + 10x$ se torne um trinômio quadrado perfeito, basta somar a ele o número 25, obtendo $x^2 + 10x + 25$.

$\square$

Pelo que já estudamos até aqui, estamos prontos para deduzir uma fórmula resolutiva para as equações quadráticas, pois já sabemos desenvolver o quadrado da soma (diferença) e encontrar sua respectiva fatoração, como também completar quadrados. Mas antes, vejamos como as equações quadráticas eram resolvidas na antiguidade.

3.6 Resolvendo Uma Equação Quadrática Como na Antiguidade

Para os povos antigos, sumérios e mesopotâmicos por exemplo, resolver uma equação quadrática tinha um fortíssimo apelo geométrico. Aliás, nesta época, não existia a álgebra e todos os problemas do cotidiano se resumiam apenas a aritmética, problemas envolvendo contagem, e a geometria, problemas envolvendo áreas. Logo, as grandezas envolvidas eram sempre positivas. Vejamos isto com o exemplo abaixo.

Exemplo 9. *Resolva a equação quadrática* $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Solução: Obviamente, não era esta a notação usada na antiguidade, nem tampouco eles conheciam os números negativos.

Eles interpretariam a equação acima como $x^2 + 6x = 7$ dentro de um problema concreto, como por exemplo: "À área de um terreno quadrado foi adicionada a área de outro terreno retangular, cuja medida de uma de suas dimensões é 6 unidades de comprimento e a outra é igual à dimensão do quadrado, dando num terreno maior de 7 unidades de área. Qual a medida do lado do primeiro terreno?"

Geometricamente, procederemos do seguinte modo:

1. Façamos um quadrado de lado desconhecido x, conforme a Figura 3.3:

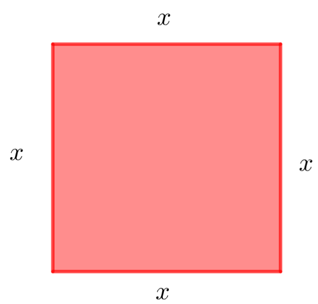

Figura 3.3: Quadrado de lado x

2. A seguir, pegamos o retângulo cuja área vale $6x$ e o dividimos pela metade, obtendo assim dois outros retângulos cujas áreas são $3x$. Estes dois novos retângulos são construídos compartilhando o mesmo lado desconhecido x do quadrado como Figura 3.4:

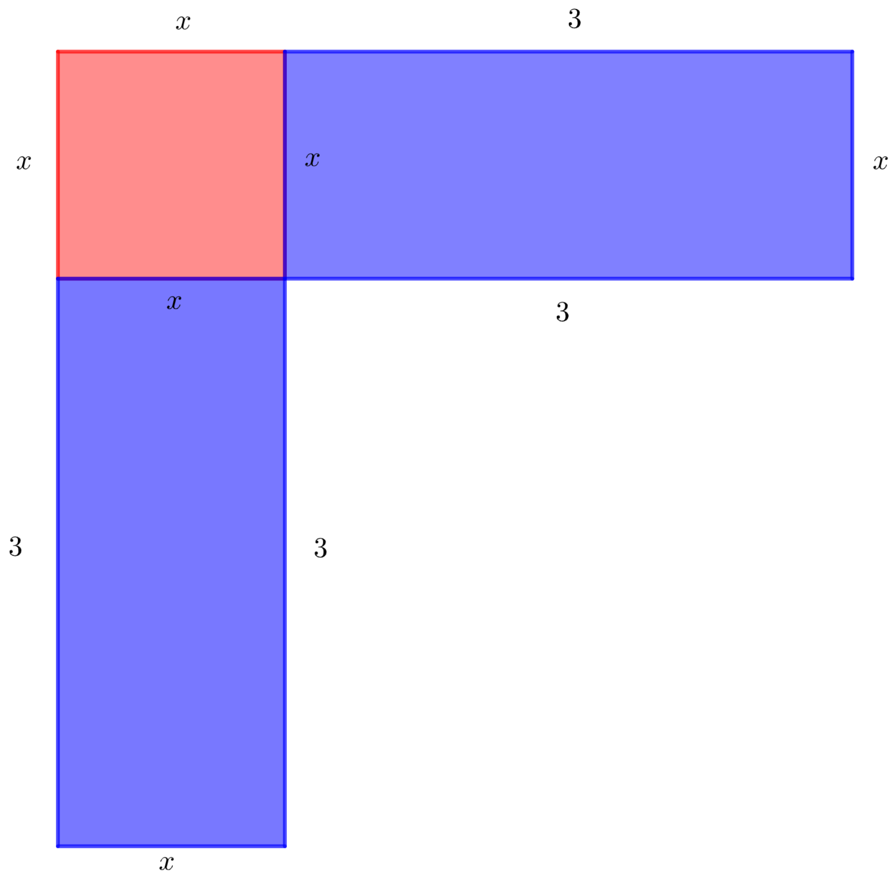

Figura 3.4: Um Quadrado e Dois Retângulos Iguais

Note que nesta figura, sua área é igual a 135. Ela representa geometricamente a equação $x^2 + 6x = 7$.

3. Agora, completamos o quadrado simplesmente fechando a figura acima. Logo, obteremos um quadrado como vemos na Figura 3.5:

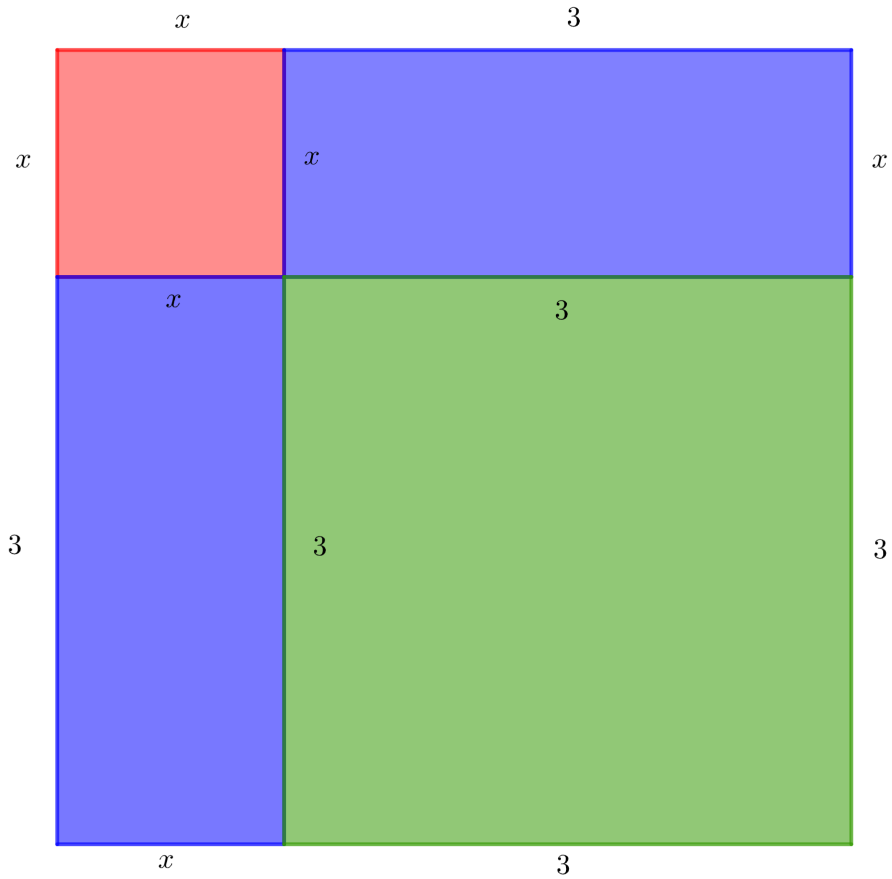

Figura 3.5: Quadrado Completo

Em outras palavras, somamos à figura que representa a equação um quadrado de área 9. Como já tínhamos 7 de área, com o acréscimo, temos $7 + 9 = 16$, de onde obtemos $\sqrt{16} = 4$.

Como o lado do quadrado é 4 e por construção temos que também o lado vale $x + 3$, concluímos que $x + 3 = 4$, isto é, $x = 4 - 3 = 1$.

Portanto, o lado do primeiro quadrado mede 1 unidade de comprimento.

$\square$

Perceba que o problema proposto acima não admite resposta negativa, pois estamos trabalhando com comprimento e área e era desta forma que os antigos procediam.

3.7 Deduzindo Uma Fórmula Para Resolver Equações Quadráticas

Consideremos a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Como temos $a \neq 0$, podemos dividir (1) por a. Assim, a expressão a ser obtida ficará mais fácil de se completar o trinômio quadrado perfeito, nos moldes do que vimos acima. Temos:

$$\begin{aligned}
&(ax^2 + bx + c = 0) \quad \div \quad a \\
&\Longleftrightarrow \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \\
&\Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Comparando o lado esquerdo da equação

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \tag{2}$$

com o trinômio quadrado perfeito $x^2 + 2xy + y^2$, concluímos que o lado esquerdo de (2) falta o termo equivalente a y^2. Para encontrá-lo, basta igualarmos $2xy = \frac{b}{a}x$. Supondo $x \neq 0$, segue-se:

$$2xy = \frac{b}{a}x \Longleftrightarrow 2y = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow y = \frac{b}{2a}.$$

Como temos $y = \frac{b}{2a}$, obtemos $y^2 = \frac{b^2}{4a^2}$. Logo, somando em ambos os membros da equação (2) a parcela $\frac{b^2}{4a^2}$, obteremos particularmente no lado esquerdo de (2) um trinômio quadrado perfeito, o qual já sabemos fatorar. Então, segue-se:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\
\iff & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \\
\iff & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\iff & x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
\iff & x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\
\iff & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Por simplicidade, na última igualdade acima, podemos fazer $\Delta = b^2 - 4ac$, obtendo assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{3}$$

A igualdade (3) é a fórmula resolutiva das equações quadráticas, comumente no Brasil chamada de Fórmula de Báskara; o número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de **discriminante** da equação quadrática. Nos deteremos um pouco em sua análise.

3.8 O Discriminante Δ

Analisaremos três possibilidades para o valor de Δ, a saber:

(a) Se $\Delta > 0$, então $\sqrt{\Delta}$ na equação (3) existe em $\mathbb{R}$. Logo, segue-se:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Obviamente, teremos $x_1 \neq x_2$, isto é, a equação quadrática terá duas raízes reais.

(b) Se $\Delta = 0$, então teremos $\sqrt{\Delta} = 0$ na equação (3). Veja que assim:

$$x_1 = \frac{-b - 0}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + 0}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$

Ou seja, a equação quadrática terá apenas uma raiz real e repetida.

(c) Se $\Delta < 0$, então não existe $\sqrt{\Delta}$ em $\mathbb{R}$. Em outras palavras, a equação quadrática não possui soluções reais.

Definição 3. *Chamamos de **raízes** ou **zeros** da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ aos valores de x que tornam esta igualdade verdadeira.*

Os próximos exemplos nos ajudarão a entender melhor como aplicar a fórmula resolutiva da equação quadrática.

Exemplo 10. *Resolva a seguinte equação quadrática: $5x^2 + 3x - 2 = 0$.*

Solução: Comparando a equação quadrática $5x^2 + 3x - 2 = 0$ com a sua forma genérica $ax^2 + bx + c = 0$, concluímos que $a = 5, b = 3$ e $c = -2$. Calculando o valor de Δ, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49.$$

Como temos $\Delta = 49 > 0$, pelo que vimos anteriormente, a equação possui duas raízes reais. De fato, temos $\sqrt{\Delta} = 7$. Então, segue-se:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 7}{2 \cdot 5} = \frac{-10}{10} = -1 \quad e$$

$$x_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 7}{2 \cdot 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Portanto, as raízes da equação quadrática $5x^2 + 3x - 2 = 0$ são -1 e $\frac{2}{5}$.

Perceba que tomando $x = -1$ ou $x = \frac{2}{5}$ e substituindo-os, respectivamente, na equação, obteremos:

$$5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = 5 \cdot 1 - 3 - 2 = 5 - 5 = 0 \quad e$$
$$5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3 \cdot \frac{2}{5} - 2 = 5 \cdot \frac{4}{25} + \frac{6}{5} - 2 = \frac{20}{25} + \frac{6 - 10}{5} = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0.$$

□

Exemplo 11. *Calcule as raízes da equação quadrática $4x^2 - 4x + 1 = 0$.*

Solução: Da equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$, obtemos $a = 4, b = -4$ e $c = 1$. Calculando o valor de Δ, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0.$$

Logo, a equação possui apenas uma raiz real. Note que $\sqrt{\Delta} = 0$, então segue-se:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a raiz da equação é $\frac{1}{2}$.

Substituindo $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ na equação, teremos:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{4}{2} + 1 = \frac{4}{4} - 2 + 1 = 1 - 1 = 0.$$

□

Exemplo 12. *Encontre as raízes da equação quadrática* $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Solução: Veja que temos $a = 1, b = -6$ e $c = 13$. Calculando o valor de Δ, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16.$$

Como $\Delta = -16 < 0$, a equação não possui raízes reais, pois $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$.

Mesmo com $\Delta < 0$, podemos continuar a resolução da equação quadrática, manipulando alguma expressão "estranha"que apareça com as técnicas algébricas aprendidas no 9º ano do Ensino Fundamental. Façamos isto, como ilustração, com a equação quadrática do Exemplo 12.

Perceba que podemos escrever, usando as operações básicas de radiciação estudadas nas séries finais do Ensino Fundamental, o seguinte:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}.$$

Como $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{-1}$ (e esta é uma expressão estranha), calculando as raízes da equação do modo usual, teremos:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - 4\sqrt{-1}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 4\sqrt{-1}}{2} = 3 - 2\sqrt{-1} \quad e$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + 4\sqrt{-1}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 4\sqrt{-1}}{2} = 3 + 2\sqrt{-1}.$$

Substituindo $x_1 = 3 - 2\sqrt{-1}$ ou $x_2 = 3 + 2\sqrt{-1}$, respectivamente, na equação quadrática $x^2 - 6x + 13 = 0$, teremos:

$$\begin{aligned}
\left(3-2\sqrt{-1}\right)^2 - 6\cdot(3-2\sqrt{-1}) + 13 &= 9 - 12\sqrt{-1} + 4\cdot(-1) - 18 + 12\sqrt{-1} + 13 \\
&= 22 - 22 = 0 \\
\left(3+2\sqrt{-1}\right)^2 - 6\cdot(3+2\sqrt{-1}) + 13 &= 9 + 12\sqrt{-1} + 4\cdot(-1) - 18 - 12\sqrt{-1} + 13 \\
&= 22 - 22 = 0.
\end{aligned}$$

De fato, os números estranhos $3 - 2\sqrt{-1}$ e $3 + 2\sqrt{-1}$ são raízes da equação.

□

Por simplicidade, fazendo $i = \sqrt{-1}$, estes números tomam a forma $3 - 2i$ e $3 + 2i$. Nesta forma, estes números lembram bastante expressões algébricas, cujas regras operatórias são estudados nos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Definição 4. *Os números na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, onde $i = \sqrt{-1}$, são chamados de* ***números complexos*** *ou* ***imaginários****; $i = \sqrt{-1}$ é chamada de* ***unidade imaginária****.*

De maneira geral, dada a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $\Delta < 0$, temos que suas raízes (imaginárias) são da forma:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Note que as raízes x_1 e x_2 têm mesma parte real $-\frac{b}{a}$, diferindo apenas em sua parte imaginária $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde numa a raiz é negativa e na outra raiz é positiva. Quando isto acontece, dizemos que os números complexos são conjugados. Portanto, se uma equação quadrática, com coeficientes reais, tem raízes complexas, então elas são conjugadas.

Como já sabemos calcular as raízes de uma equação quadrática, sejam elas reais ou complexas, podemos fatorá-la. Sobre isto falaremos no próximo tópico.

3.9 Fatorando Uma Equação Quadrática

Consideremos $x = m$ ou $x = n$, com $m, n \in \mathbb{R}$ (isto também é aplicado às raízes complexas). Veja que disto, obtemos $x - m = 0$ ou $x - n = 0$. Multiplicando estas duas últimas igualdades membro a membro, teremos:

$$(x-m)\cdot(x-n)=0 \Longleftrightarrow x^2-nx-mx+mn=0 \Longleftrightarrow x^2-(m+n)x+mn=0.$$

Isto nos mostra que podemos escrever qualquer equação quadrática sob a forma $x^2-Sx+P=0$, onde S e P são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação. Mas além disto, nos mostra também que qualquer equação quadrática pode ser escrita como o produto de dois monômios, pois $(x-m)\cdot(x-n)=x^2-(m+n)x+mn=0$, onde m e n são as suas raízes.

Observação 2. *O fato citado no parágrafo acima associa o número de fatores no qual uma equação quadrática pode ser decomposta ao número de suas raízes, ou seja, como uma equação quadrática pode ser decomposta sempre em dois fatores, então ela sempre terá duas raízes, sejam elas reais ou imaginárias.*

Vejamos como ilustrações as equações quadráticas estudadas nos Exemplos 10, 11 e 12.

Exemplo 13. *Fatore a equação* $5x^2+3x-2=0$.

Solução: Como visto no Exemplo 10, as raízes desta equação são $x=-1$ e $x=\dfrac{2}{5}$. Logo, a equação quadrática na sua forma fatorada fica:

$$(x+1)\cdot\left(x-\frac{2}{5}\right)=0$$

□

Exemplo 14. *Encontre a forma fatorada da equação quadrática* $4x^2-4x+1=0$.

Solução: Pelo Exemplo 11, sabemos que as raízes da equação são $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$. Então, sua forma fatorada é:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Note que também poderíamos escrever $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$.

□

Exemplo 15. *Fatore a seguinte equação* $x^2-6x+13=0$.

Solução: Sabemos que a equação não possui raízes reais, pois temos $\Delta = -16$ e $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$ (veja Exemplo 12). Porém, como vimos em seguida, continuando a resolução da equação usando as propriedades usuais da radiciação, chegamos aos números complexos $x = 3 - 2i$ e $x = 3 + 2i$, raízes da equação. Logo, sua forma fatorada é:

$$(x - 3 + 2i) \cdot (x - 3 - 2i) = 0.$$

$\square$

No tópico abaixo, veremos como dividir um polinômio por um binômio, algo que será muito usado para encontrarmos todas as raízes de uma equação cúbica. Em nosso estudo, o polinômio de maior grau que dividiremos por um binômio será 3.

3.10 Divisão de Dois Polinômios - Método de Descartes

Sejam $p(x)$ e $h(x)$ dois polinômios quaisquer na variável x de graus $m, n \in \mathbb{N}$ respectivamente, com $m \geq n$, e $h(x)$ não sendo o polinômio identicamente nulo. Efetuando a divisão de $p(x)$ por $h(x)$, teremos:

$$\begin{array}{r|l} p(x) & h(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

onde $p(x)$ é o dividendo, $h(x)$ é o divisor, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto da divisão.

Perceba então que $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$ e que o grau de $r(x)$ é sempre menor do que n; quando tivermos $r(x) = 0$, então a divisão de $p(x)$ por $h(x)$ será exata.

Ou seja, o **algoritmo da divisão de polinômios** nos garante que dados $p(x)$ e $h(x)$ dois polinômios quaisquer, com $h(x) \not\equiv 0$, existem os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ (únicos) tais que $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$, onde o grau de $q(x)$ é $m - n$.

Definição 5. *Chamamos de* ***grau*** *do polinômio* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *onde* $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, *ao seu maior expoente.*

O Método de Descartes consiste em, a partir dos polinômios $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $h(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, construirmos os polinômios $q(x) = c_{m-n}x^{m-n} + c_{m-n-1}x^{m-n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ e $r(x) = d_t x^t + d_{t-1}x^{t-1} + \cdots + d_1 x + d_0$, com $t < m - n$ tais que $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$.

Vejamos como aplicar este método nos exemplos a seguir:

Exemplo 16. *Divida o* $2x^2 + 7x + 3$ *por* $x + 3$.

Solução: Veja que temos:

$$\begin{array}{c|c} 2x^2+7x+3 & x+3 \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Pelo método de Descartes, existem os polinômios $q(x) = ax + b$ e $r(x) = c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $2x^2 + 7x + 3 = (x + 3) \cdot q(x) + r(x)$, isto é:

$$2x^2 + 7x + 3 = (x + 3) \cdot (ax + b) + c. \tag{4}$$

Desenvolvendo o lado direito da equação (4) através da propriedade distributiva, teremos:

$$\begin{aligned} (x + 3)(ax + b) + c &= ax^2 + bx + 3ax + 3b + c \\ &= ax^2 + (3a + b)x + (3b + c). \end{aligned}$$

Obviamente, teremos

$$2x^2 + 7x + 3 = ax^2 + (3a + b)x + (3b + c). \tag{5}$$

Da igualdade (5), concluímos que $\begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 7 \\ 3b + c = 3 \end{cases}$.

Deste sistema de equações, como $a = 2$ e $3a + b = 7$, teremos:

$$3 \cdot 2 + b = 7 \iff 6 + b = 7 \iff b = 7 - 6 = 1.$$

Como $b = 1$ e $3b + c = 3$, segue-se:

$$3 \cdot 1 + c = 3 \iff 3 + c = 3 \iff c = 3 - 3 = 0.$$

Veja que obtemos $a = 2, b = 1$ e $c = 0$, ou seja, temos os polinômios $q(x) = 2x + 1$ e $r(x) = 0$. Isto nos mostra que o quociente da divisão é $2x + 1$ e o resto é 0 (a divisão é exata).

$\square$

Exemplo 17. *Efetue a divisão* $\begin{array}{l|l} -3x^2 - x + 7 & -3x + 2 \\ \cline{2-2} \end{array}$.

Solução: Pelo método de Descartes, existem os polinômios $q(x) = ax + b$ e $r(x) = c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $-3x^2 - x + 7 = (-3x + 2) \cdot q(x) + r(x)$. Então, segue-se:

$$-3x^2 - x + 7 = (-3x + 2) \cdot (ax + b) + c. \tag{6}$$

Aplicando a propriedade distributiva no lado direito da igualdade (6), obteremos:

$$\begin{aligned}(\overset{-3x\cdot ax,\ -3x\cdot b}{-3x} + \underset{2\cdot ax,\ 2\cdot b}{2})(ax + b) + c &= -3ax^2 - 3bx + 2ax + 2b + c \\ &= -3ax^2 + (2a - 3b)x + (2b + c).\end{aligned}$$

Claramente, temos que $-3x^2 - x + 7 = -3ax^2 + (2a - 3b)x + (2b + c)$. Desta última igualdade, obtemos $\begin{cases} -3a = -3 \\ 2a - 3b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$.

Obviamente, de $-3a = -3$, obtemos:

$$-3a = -3 \Longleftrightarrow a = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Como $a = 1$ e temos $2a - 3b = -1$, segue-se:

$$\begin{aligned}&2a - 3b = -1 \Longleftrightarrow 2 \cdot 1 - 3b = -1 \Longleftrightarrow 2 - 3b = -1 \\ &\Longleftrightarrow -3b = -1 - 2 \Longleftrightarrow b = \frac{-3}{-3} = 1.\end{aligned}$$

Veja que $b = 1$ e $2b + c = 7$, logo temos:

$$\begin{aligned}&2b + c = 7 \Longleftrightarrow 2 \cdot 1 + c = 7 \Longleftrightarrow 2 + c = 7 \\ &\Longleftrightarrow c = 7 - 2 = 5.\end{aligned}$$

Como $a = 1, b = 1$ e $c = 5$, então obtemos os polinômios $q(x) = x + 1$ e $r(x) = 5$ (a divisão não é exata).

$\square$

Para finalizar os nossos exemplos de divisão de polinômios através do Método de Descartes, vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 18. *Efetue a divisão de* $6x^3 - 13x^2 + 2x + 5$ *por* $3x - 5$.

Solução: Perceba que temos:

$$\begin{array}{c|l} 6x^3 - 13x^2 + 2x + 5 & 3x - 5 \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Pelo método de Descartes, existem os polinômios $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tais que $6x^3 - 13x^2 + 2x + 5 = (3x - 5) \cdot q(x) + r(x)$. Disto, segue-se:

$$6x^3 - 13x^2 + 2x + 5 = (3x - 5) \cdot (ax^2 + bx + c) + d. \tag{7}$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação ao lado direito de (7), teremos:

$$6x^3 - 13x^2 + 2x + 5 = (3x \quad - \quad 5) \quad \overset{3x\cdot ax^2}{\underset{-5\cdot ax^2}{(ax^2}} \quad + \quad \overset{3x\cdot bx}{\underset{-5\cdot bx}{bx}} \quad + \quad \overset{3x\cdot c}{\underset{-5\cdot c}{c)}} + d$$

$$6x^3 - 13x^2 + 2x + 5 = 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx - 5ax^2 - 5bx - 5c + d$$
$$6x^3 - 13x^2 + 2x + 5 = 3ax^3 + (3b - 5a)x^2 + (3c - 5b)x + (-5c + d).$$

Da última igualdade, concluímos que $\begin{cases} 3a = 6 \\ 3b - 5a = -13 \\ 3c - 5b = 2 \\ -5c + d = 5 \end{cases}$.

Deste sistema de equações, obtemos:

$$3a = 6 \Longleftrightarrow a = \frac{6}{3} = 2.$$

Note que $a = 2$ e $3b - 5a = -13$; logo, temos:

$$3b - 5a = -13 \Longleftrightarrow 3b - 5 \cdot 2 = -13 \Longleftrightarrow 3b - 10 = -13$$
$$\Longleftrightarrow 3b = -13 + 10 \Longleftrightarrow b = \frac{-3}{3} = -1.$$

Como temos $b = -1$ e $3c - 5b = 2$, então segue-se:

$$3c - 5b = 2 \Longleftrightarrow 3c - 5 \cdot (-1) = 2 \Longleftrightarrow 3c + 5 = 2$$
$$\Longleftrightarrow 3c = 2 - 5 \Longleftrightarrow c = \frac{-3}{3} = -1.$$

Finalmente, como obtemos $c = -1$ e $-5c + d = 5$, então:

$$-5c + d = 5 \Longleftrightarrow -5 \cdot (-1) + d = 5$$
$$\Longleftrightarrow 5 + d = 5 \Longleftrightarrow d = 5 - 5 = 0.$$

De $a = 2, b = -1, c-1$ e $d = 0$, obtemos os polinômios $q(x) = 2x^2 - x - 1$ e $r(x) = 0$ (a divisão é exata).

$\square$

Com esta breve exposição do método de Descartes, esperamos que o aluno consiga efetuar divisões simples com polinômios.

3.11 Cubo da Soma e Cubo da Diferença

Definição 6. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, as expressões algébricas $(x+y)^3$ e $(x-y)^3$ são chamadas, respectivamente, de* ***cubo da soma*** *e de* ***cubo da diferença****.*

Perceba que $(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y)^2$ e $(x - y)^3 = (x - y) \cdot (x - y)^2$. Nós já sabemos calcular o quadrado da soma e o quadrado da diferença; então, temos:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2x + y^2 \quad e \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Disto, obtemos que:

$$(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) \quad e \quad (x - y)^3 = (x - y) \cdot (x^2 - 2xy + y^2) \qquad (8)$$

Podemos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação a ambas as expressões de (8). Então, segue-se:

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(\overset{x\cdot x^2}{\underset{y\cdot x^2}{x^2}} + \overset{x\cdot 2xy}{\underset{y\cdot 2xy}{2xy}} + \overset{x\cdot y^2}{\underset{y\cdot y^2}{y^2}})$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad e$$

$$(x - y)^3 = (x - y)\,(\overset{x\cdot x^2}{\underset{-y\cdot x^2}{x^2}} - \overset{x\cdot(-2xy)}{\underset{-y\cdot(-2xy)}{2xy}} + \overset{x\cdot y^2}{\underset{-y\cdot y^2}{y^2}})$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Com estes desenvolvimentos, podemos estabelecer uma regra mnemônica para calcularmos o cubo da soma (diferença): o cubo do 1º termo mais (menos) três vezes o quadrado do 1º termo vezes o 2º termo mais três vezes o 1º termo vezes o quadrado do 2º termo mais (menos) o cubo do 2º termo.

Observação 3. *Os sinais de todos os termos do desenvolvimento do cubo da soma são positivos, enquanto os sinais dos termos do desenvolvimento do cubo da diferença alternam entre positivo e negativo, começando pelo sinal positivo.*

A seguir, veremos como desenvolver o cubo da soma (diferença).

Exemplo 19. *Desenvolva o seguinte cubo da soma:* $(x+2)^3$.

Solução: Pela regra mnemônica, teremos:

$$(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

□

Exemplo 20. *Desenvolva o cubo da diferença* $(x-4)^3$.

Solução: Também pela regra mnemônica, teremos:

$$(x-4)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 - 4^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64.$$

□

Observação 4. *As expressões* $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ *e* $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ *obtidas, respectivamente, a partir do desenvolvimento da soma e do cubo da diferença são chamadas de cubos perfeitos.*

Agora que sabemos desenvolver o cubo da soma e o cubo da diferença, veremos a seguir como interpretá-los geometricamente.

3.12 Interpretação Geométrica do Cubo da Soma e do Cubo da Diferença

Considere um cubo de aresta $x+y$, conforme o desenho a seguir:

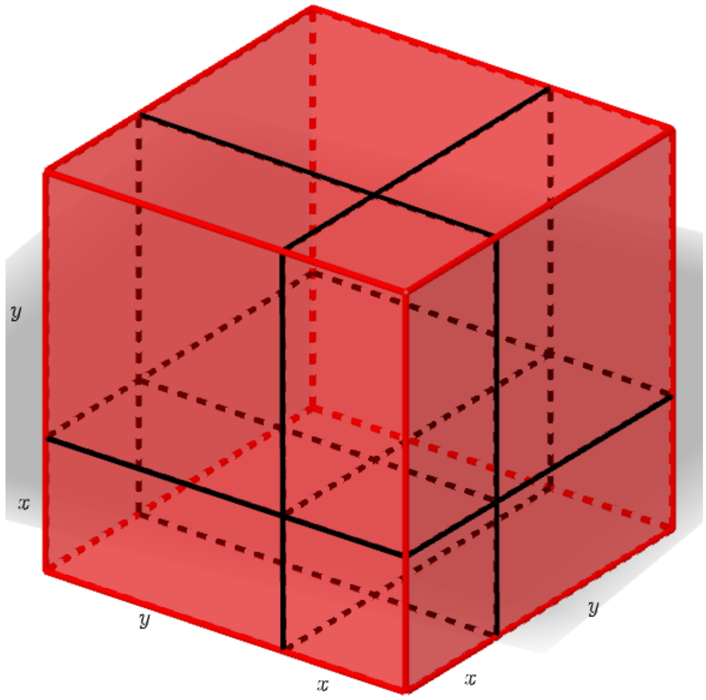

Figura 3.6: Cubo da Soma (Criado pelo Autor)

Obviamente, o volume do cubo acima é dado por $(x + y)^3$.

Analisando-o, vemos que ele está subdividido em outros oitos sólidos: um cubo menor de aresta x e volume x^3; um outro cubo menor de aresta y e volume y^3; três paralelepípedos de arestas x, x e y e volume x^2y cada; e três paralelepípedos de arestas x, y e y e volume xy^2 cada.

É fácil notar que somando-se os volumes destes sólidos menores, obteremos o volume do cubo maior. Isto é:

$$(x + y)^3 = x^3 + x^2y + x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + xy^2 + y^3$$
$$\iff (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Em outras palavras, encontramos o desenvolvimento do cubo da soma.

Agora, sejam x e y números positivos com $y < x$; consideremos um cubo de aresta x, de acordo com o esquema da Figura 3.7 (note que $x = x - y + y$):

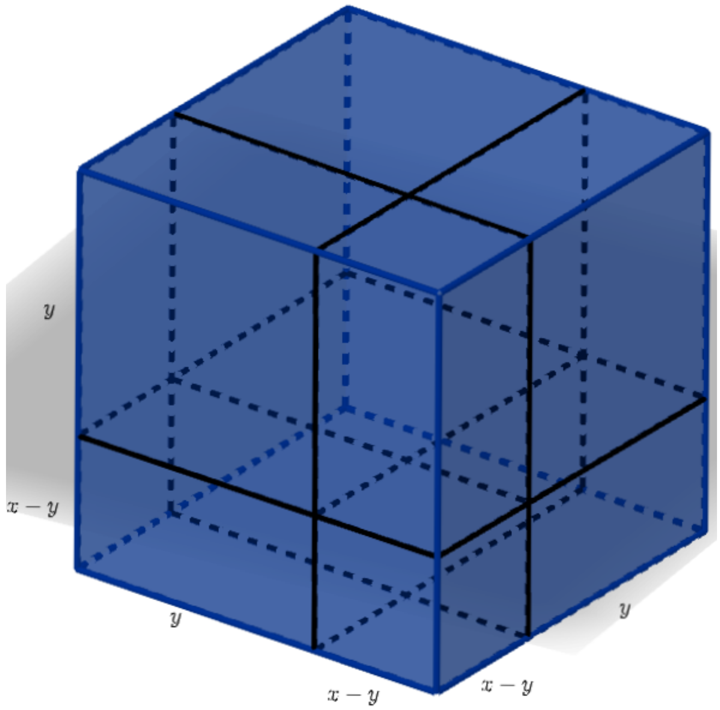

Figura 3.7: Cubo da Diferença (Criado pelo Autor)

O volume do cubo acima é x^3.

Perceba que ele está dividido em outros oito sólidos: um cubo menor de aresta $x-y$ e volume $(x-y)^3$; um outro cubo menor de aresta y e volume y^3; três paralelepípedos de arestas $x-y$, $x-y$ e y e volume $(x-y)^2 \cdot y = (x^2-2xy+y^2)\cdot y = x^2y - 2xy^2 + y^3$ cada; e três paralelepípedos de arestas $x-y$, y e y e volume $(x-y)\cdot y^2 = xy^2 - y^3$ cada.

Obviamente, somando-se os volumes destes sólidos menores, teremos o volume do cubo maior. Ou seja:

$$
\begin{aligned}
& x^3 = (x-y)^3 + 3\cdot(x^2y - 2xy^2 + y^3) + 3\cdot(xy^2 - y^3) + y^3 \\
& \iff x^3 = (x-y)^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 + 3xy^2 - 3y^3 + y^3 \\
& \iff x^3 = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 \\
& \iff (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.
\end{aligned}
$$

Isto mostra o desenvolvimento do cubo da diferença.

Estas deduções algébricas e geométricas nos ajudam a entender todo o argumento por trás do raciocínio empregado na obtenção da fórmula resolutiva das equações cúbicas.

3.13 Fatorando o Cubo Perfeito

Vamos fatorar expressões do tipo $x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ (cubos perfeitos). Perceba que podemos estabelecer as seguintes relações entre os termos centrais e os extremos da expressão, isto é: $\pm 3 \cdot (\sqrt[3]{x^3})^2 \cdot y = \pm 3x^2y$ e $3 \cdot x \cdot (\sqrt[3]{y^3})^2 = 3xy^2$. Estas duas igualdades caracterizam o cubo perfeito, de maneira que se elas forem satisfeitas, a expressão dada é sim um cubo perfeito; caso contrário, não.

Analisemos isto nos próximos exemplos.

Exemplo 21. *A expressão $x^3+18x^2+108x+216$ é um cubo perfeito? Se sim, fatore-o.*

Solução: Comparando $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$ com o desenvolvimento do cubo da soma, que é $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, vemos claramente que $3x^2y = 18x^2$ e $108x = 3xy^2$. Logo, temos:

$$\begin{aligned} 3x^2y = 18x^2 &\iff 3y = 18 \iff y = \frac{18}{3} = 6 \;\; e \\ 108x = 3xy^2 &\iff 108 = 3y^2 \iff y^2 = \frac{108}{3} = \sqrt{36}. \end{aligned}$$

Note que $y = 6$ implica em $y^2 = 36$. Logo, a expressão $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$ é um cubo perfeito e podemos escrever $x^3 + 18x^2 + 108x + 216 = (x + 6)^3$, ou seja, o cubo da soma.

□

Exemplo 22. *Verifique se a expressão $x^3 - 21x^2 + 147x - 343$ é um cubo perfeito. Se for, fatore-o.*

Solução: Comparando a expressão $x^3 - 21x^2 + 147x - 343$ com o desenvolvimento do cubo da diferença, que é $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, é fácil que temos $-3x^2y = -21x^2$ e $3xy^2 = 147x$. Destas duas igualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} -3x^2y = -21x^2 &\iff -3y = -21 \iff y = \frac{-21}{-3} = 7 \;\; e \\ 3xy^2 = 147x &\iff 3y^2 = 147 \iff y^2 = \frac{147}{3} = 49. \end{aligned}$$

Como $y = 7$ implica em $y^2 = 49$, a expressão $x^3 - 21x^2 + 147x - 343$ é um cubo perfeito e por isto podemos escrevê-lo como $x^3 - 21x^2 + 147x - 343 = (x - 7)^3$ (cubo da diferença).

□

Exemplo 23. *Analise se a expressão $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ é um cubo perfeito.*

Solução: Comparando a expressão $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ com o desenvolvimento do cubo da diferença, que é $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, teremos $-2x^2 = -3x^2y$ e $-13x = 3xy^2$. Destas últimas igualdades, obteremos:

$$\Rightarrow -2x^2 = -3x^2y \iff -2 = -3y \iff y = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad e$$

$$\Rightarrow -13x = 3xy^2 \iff -13 = 3y^2 \iff y^2 = \frac{-13}{3}$$

Obviamente, $y = \dfrac{3}{2}$ não implica em $y^2 = -\dfrac{13}{3}$; logo, a expressão não é um cubo perfeito.

□

Neste tópico, aprendemos a identificar um cubo perfeito, bem como escrevê-lo novamente em sua forma fatorada. De posse deste conhecimento, veremos a seguir como completar binômios do tipo $x^3 + rx^2$, com $r \in \mathbb{R}$, de modo a obtermos um cubo perfeito.

3.14 Completando Cubos

Como ilustração inicial, tomaremos o desenvolvimento do cubo da soma do Exemplo 19, que é $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Suponha que não tenhamos seus dois últimos termos; a expressão se resumiria ao binômio $x^3 + 6x^2$. Então cabe a seguinte indagação: que expressões devem ser somadas ao binômio dado de modo a torná-lo um cubo?

A resposta a esta pergunta será dada no próximo exemplo.

Exemplo 24. *Complete o binômio $x^3 + 6x^2$ de modo a termos um cubo perfeito.*

Solução: Como o segundo termo do binômio é positivo, vamos compará-lo com o desenvolvimento do cubo da soma, que é $x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Desta comparação, obtemos $3x^2y = 6x^2$. Segue-se:

$$3x^2y = 6x^2 \iff 3y = 6 \iff y = \frac{6}{3} = 2.$$

Veja que temos $y = 2$, então podemos calcular, respectivamente, o 3º e o 4º termo do desenvolvimento do cubo, a saber $3xy^2$ e y^3. Logo, teremos:

$$3xy^2 = 3x \cdot 2^2 = 3x \cdot 4 = 12x \;\; e \;\; y^3 = 2^3 = 8.$$

Por isto, devemos acrescentar ao binômio $x^3 + 6x^2$ as parcelas $12x$ e 8, obtendo assim o desenvolvimento do cubo da soma: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Obviamente, sua forma fatorada é $(x+2)^3$.

□

Tomemos agora o desenvolvimento do cubo da diferença do Exemplo 20, que é $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$. Supondo que não tenhamos os dois últimos termos desta expressão, ficamos apenas o binômio $x^3 - 12x^2$. Vamos completá-lo e obter novamente um cubo perfeito.

Exemplo 25. *Dado o binômio $x^3 - 12x^2$, complete-o de modo a termos um cubo perfeito.*

Solução: Como o segundo termo do binômio é negativo, vamos comparar a expressão $x^3 - 12x^2$ com o desenvolvimento do cubo da diferença, que é $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$. Então, temos que $-12x^2 = -3x^2y$. Segue-se:

$$-12x^2 = -3x^2y \Longleftrightarrow -12 = -3y \Longleftrightarrow y = \frac{-12}{-3} = 4.$$

Como $y = 4$, podemos calcular o 3º e 4º termos do desenvolvimento do cubo da diferença, que são $3xy^2$ e $-y^3$, respectivamente. Então, temos:

$$3xy^2 = 3x \cdot 4^2 = 3x \cdot 16 = 48x \;\; e \;\; -y^3 = -4^3 = -64.$$

Portanto, devemos acrescentar ao binômio $x^3 - 12x^2$ as parcelas $48x$ e -64, obtendo desta forma o cubo perfeito $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$. Sua forma fatorada é $(x-4)^3$.

□

Exemplo 26. *Complete o binômio $x^3 + 7x^2$ de modo que tenhamos um cubo perfeito.*

Solução: Comparando o binômio $x^3 + 7x^2$ com o desenvolvimento do cubo da soma, que é $x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, obteremos as igualdade $7x^2 = 3x^2y$. Então, temos:

$$7x^2 = 3x^2y \Longleftrightarrow 7 = 3y \Longleftrightarrow y = \frac{7}{3}.$$

Calculando o $3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ termos do desenvolvimento do cubo da soma, que são, respectivamente, $3xy^2$ e y^3, pois $y = \dfrac{7}{3}$, teremos:

$$3xy^2 = 3x \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 3x \cdot \frac{49}{9} = \frac{49}{3}x \quad e \quad y^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{343}{27}.$$

Portanto, somando as parcelas $\dfrac{49}{3}x$ e $\dfrac{343}{27}$ ao binômio $x^3 + 7x^2$, obtemos o cubo perfeito $x^3 + 7x^2 + \dfrac{49}{3}x + \dfrac{343}{27}$, cuja forma fatorada é $\left(x - \dfrac{7}{3}\right)^3$.

$\square$

Nesta seção, estudamos a álgebra elementar necessária para a resolução, sem o emprego de fórmula, das equações cúbicas. Até aqui, foram vistos conteúdos dos $8^{\underline{o}}$ e $9^{\underline{o}}$ anos do Ensino Fundamental e do $1^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio.

Tópicos como os números complexos, que são estudados apenas no $3^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio, podem ser reduzidos a álgebra do $9^{\underline{o}}$ ano, bastando fazer apenas uma simples substituição: $i = \sqrt{-1}$.

4 A Equação Cúbica

Definição 7. *Uma equação do tipo* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$*, com* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*, é chamada de equação cúbica, onde* a, b, c *e* d *são os coeficientes da equação.*

De acordo com a Definição 4, as equações

(I) $2x^3 = 0$;

(II) $x^3 - 27 = 0$;

(III) $-5x^3 + 7x^2 = 0$;

(IV) $-9x^3 + 2x = 0$;

(V) $x^3 - 9x^2 + x = 0$;

(VI) $7x^3 + x^2 + 1 = 0$;

(VII) $x^3 - 12x - 16 = 0$ e

(VIII) $6x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$

são exemplos de equações cúbicas.

Em (I), temos $a = 2$ e $b = c = d = 0$; em (II), temos $a = 1$, $b = c = 0$ e $d = -27$; em (III), temos $a = -5$, $c = d = 0$ e $b = 7$; em (IV), temos $a = -9$, $b = d = 0$ e $c = 2$; em (V), temos $a = 1$, $b = -9$, $c = 1$ e $d = 0$; em (VI), temos $a = 7$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 1$; em (VII), temos $a = 1$, $b = 0$, $c = -12$ e $d = -16$; e finalmente em $(VIII)$, temos $a = 6$, $b = -2$, $c = 7$ e $d = 3$. As equações dos tipos (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) e (VII) são equações cúbicas incompletas, enquanto a equação do tipo $(VIII)$ é uma equação cúbica completa, pois todos os seus coeficientes a, b, c e d são diferentes de zero.

As equações cúbicas dos tipos (I), (II), (III), (IV) e (V) não necessitam de uma fórmula para a sua resolução. Basta empregarmos o que já sabemos sobre equações. Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 27. *Resolva a equação cúbica* $2x^3 = 0$*.*

Solução: Veja que temos:

$$2x^3 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = \frac{0}{2} \Longleftrightarrow x^3 = 0.$$

Como $x^3 = 0$, então obtemos $x = \sqrt[3]{0} = 0$.

Portanto, concluímos que $x = 0$ é uma raiz desta equação cúbica.

$\square$

De modo geral, se tivermos $ax^3 = 0$, com $a \neq 0$ obviamente, teremos:

$$ax^3 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = \frac{0}{a} \Longleftrightarrow x^3 = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{0} = 0.$$

Ou seja, $x = 0$ é sempre raiz de uma equação cúbica do tipo $ax^3 = 0$.

Exemplo 28. *Resolva a equação cúbica* $x^3 - 27 = 0$.

Solução: Segue-se que:

$$x^3 - 27 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = 27 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Logo, 3 é raiz da equação cúbica $x^3 - 27 = 0$.

$\square$

Generalizando, temos uma equação do tipo $ax^3 + d = 0$, com $a \neq 0$. Logo, segue-se:

$$\begin{aligned} ax^3 + d = 0 &\Longleftrightarrow ax^3 = -d \\ &\Longleftrightarrow x^3 = \frac{-d}{a} \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-d}{a}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Isto nos mostra que equações cúbicas do tipo $ax^3 + d = 0$ têm raiz real dada por $x = \sqrt[3]{\frac{-d}{a}}$.

Observação 5. *Perceba que* $\sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{-n} \in \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{R}$.

Exemplo 29. *Resolva a equação cúbica* $-5x^3 + 7x^2 = 0$.

Solução: Desta equação, pondo x^2 em evidência, teremos:

$$x^2 \cdot (-5x + 7) = 0. \tag{9}$$

Note que temos o produto de dois números cujo resultado é zero; isto somente ocorre quando um deles é o próprio zero ou os dois são zero. Logo, por (9), concluímos que $x^2 = 0$ ou $-5x + 7 = 0$.

De $x^2 = 0$, obtemos $x = 0$ (equação cúbica do tipo (I)); de $-5x + 7 = 0$ (equação do 1º grau), temos:

$$-5x + 7 = 0 \Longleftrightarrow -5x = -7 \Longleftrightarrow x = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}.$$

Portanto, 0 e $\frac{7}{5}$ são raízes da equação cúbica $-5x^3 + 7x^2 = 0$.

□

Mais geralmente, temos uma equação do tipo $ax^3 + bx^2 = 0$, com $a \neq 0$. Veja que:

$$ax^3 + bx^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 \cdot (ax + b) = 0.$$

Da última igualdade acima, obtemos $x^2 = 0$, de onde sabemos que $x = 0$ e $ax+b = 0$, encontramos $x = \frac{-b}{a}$.

Portanto, equações cúbicas do tipo $ax^3 + bx^2 = 0$ têm raízes $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$.

Exemplo 30. *Resolva a equação cúbica* $-9x^3 + 2x = 0$.

Solução: Da equação dada, pondo x em evidência, obtemos $x \cdot (-9x^2 + 2) = 0$. Com o mesmo raciocínio empregado no Exemplo 29, concluímos que $x = 0$ ou $-9x^2 + 2 = 0$. Resolvendo esta equação quadrática, teremos:

$$-9x^2 + 2 = 0 \Longleftrightarrow 9x^2 = 2 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{2}{9}$$
$$\Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{9}} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Por isto, $0, -\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{\sqrt{2}}{3}$ são raízes da equação cúbica dada.

□

De maneira geral, temos a equação cúbica do tipo $ax^3 + cx = 0$, com $a \neq 0$. De fato, temos:

$$ax^3 + cx = 0 \Longleftrightarrow x \cdot (ax^2 + c) = 0.$$

Da última igualdade acima, obtemos $x = 0$ e a equação quadrática $ax^2 + c = 0$. Resolvendo-a, teremos:

$$ax^2 + c = 0 \Longleftrightarrow ax^2 = -c \Longleftrightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

As raízes da equação cúbica do tipo $ax^2 + c = 0$ são dadas por $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$.

Observação 6. *Note que a equação cúbica do tipo $ax^3 + cx = 0$ terá três raízes reais apenas se tivermos $\dfrac{-c}{a} \geq 0$; se for $\dfrac{-c}{a} < 0$, a equação terá uma raiz real e duas raízes imaginárias.*

Exemplo 31. *Resolva a equação cúbica $x^3 - 9x^2 + x = 0$.*

Solução: A maneira de resolvê-la é semelhante à forma dos dois últimos exemplos: poremos o x em evidência. Então, teremos $x \cdot (x^2 - 9x + 1) = 0$. Desta última igualdade, obtemos $x = 0$ ou $x^2 - 9x + 1 = 0$.

Resolvendo a equação quadrática $x^2 - 9x + 1 = 0$, obtemos $a = 1$, $b = -9$ e $c = 1$. Calculando o valor de Δ, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 81 - 4 = 77.$$

Como $\Delta = 77 > 0$, então a equação quadrática tem duas raízes reais. De $\sqrt{\Delta} = \sqrt{77}$, segue-se:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{77}}{2 \cdot 1} = \frac{9 - \sqrt{77}}{2} \quad e$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{77}}{2 \cdot 1} = \frac{9 + \sqrt{77}}{2}.$$

Por isto, as raízes da equação cúbica $x^3 - 9x^2 + x = 0$ são 0, $\dfrac{9 - \sqrt{77}}{2}$ e $\dfrac{9 + \sqrt{77}}{2}$.

□

De maneira geral, temos a equação cúbica do tipo $ax^3 + bx^2 + cx = 0$, com $a \neq 0$. Disto, segue-se:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Longleftrightarrow x \cdot (ax^2 + bx + c) = 0.$$

Da última igualdade acima, obtemos $x = 0$ ou $ax^2 + bx + c = 0$. Como já sabemos resolver equações quadráticas, temos que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

Portanto, concluímos que as raízes da equação cúbica do tipo $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ são dadas por $x = 0$ e $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Observação 7. *Perceba que a equação cúbica do tipo* $ax^3+bx^2+cx=0$ *terá três raízes reais (o zero e outras duas raízes distintas ou o zero e outras duas raízes repetidas) se tivermos* $\Delta \geq 0$*; se for* $\Delta < 0$*, a equação terá uma raiz real, a saber zero, e duas raízes imaginárias.*

Pelo que já estudamos até aqui, as equações cúbicas apresentam pelo menos uma raiz real. Nos Exemplos 27 e 28 não há indícios de que possa haver alguma raiz imaginária.

As equações cúbicas do tipo (I) ao (V) podem ser, como vimos anteriormente, facilmente resolvidas utilizando-se ferramentas elementares de álgebra, as quais são fartamente estudadas nos $8^{\underline{o}}$ e $9^{\underline{o}}$ anos do Ensino Fundamental. O problema surge para as equações do tipo (VI) ao $(VIII)$, para os quais os métodos estudados acima não servem. Para eles, devemos desenvolver um novo método, o qual será mostrado no tópico a seguir.

4.1 A Equação Cúbica Incompleta $x^3 + cx + d = 0$

Antes de prosseguirmos, devemos observar o seguinte fato: para todo número $p \in \mathbb{R}$, existem $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $p = m + n$. Basta fixar arbitrariamente p e escolher um m qualquer, de onde obteremos $n = p - m$. É fácil ver que $m + n = m + p - m = p$.

Agora seja $x = m + n$, com $m, n \in \mathbb{R}$. Elevando esta igualdade ao cubo e depois desenvolvendo o seu lado direito, teremos:

$$x^3 = (m+n)^3 = m^3 + 3m^2 \cdot n + 3m \cdot n^2 + n^2.$$

Pondo $3mn$ em evidência no lado direito da igualdade, obteremos:

$$x^3 = m^3 + 3mn \cdot (m+n) + n^3.$$

Note que tomamos $x = m + n$; logo, fazendo esta substituição na igualdade acima, teremos:

$$x^3 = m^3 + 3mn \cdot x + n^3 \Longleftrightarrow x^3 - 3mnx - (m^3 + n^3) = 0.$$

A equação cúbica

$$x^3 - 3mnx - (m^3 + n^3) = 0 \tag{10}$$

é do tipo $ax^3 + cx + d = 0$, onde temos $a = 1$, $c = -3mn$ e $d = -(m^3 + n^3)$.

Comparando a equação (10), por exemplo, com a equação cúbica $x^3 - 12x - 16 = 0$, com $a = 1$, $c = -12$ e $d = -16$, teremos $\begin{cases} -3mn = -12 \\ -(m^3 + n^3) = -16 \end{cases}$.

Do sistema acima, segue-se que $m^3 + n^3 = 16$ e $mn = 4$. Elevando-se esta última igualdade ao cubo, obteremos $m^3n^3 = 64$. Note que agora temos dois números, m^3 e n^3, cuja soma é igual a 16 e cujo produto é igual a 64.

Ora, pelo que já vimos na subseção 3.9, toda equação quadrática pode ser escrita na forma $y^2 - Sy + P = 0$ (escrevemos a equação quadrática com incógnita y para não confundir com a incógnita x na equação cúbica), onde S e P são, respectivamente, a soma e o produto de suas raízes. Então, podemos escrever a equação quadrática $y^2 - 16y + 64 = 0$, pois temos $S = 16$ e $P = 64$, cujas raízes são os números m^3 e n^3, isto é, $y_1 = m^3$ e $y_2 = n^3$.

Resolvendo a equação $y^2 - 16y + 64 = 0$, temos os coeficientes $a = 1$, $b = -16$ e $c = 64$. Logo, calculando Δ, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 256 - 256 = 0.$$

Obviamente, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$.

Pela fórmula resolutiva da equação quadrática, obtemos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-16) \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8.$$

Disto, concluímos que $y_1 = m^3 = 8$ e $y_2 = n^3 = 8$. Obviamente, segue-se que $m = \sqrt[3]{8} = 2$ e $n = \sqrt[3]{8} = 2$.

Como tomamos $x = m + n$, então obtemos $x = m + n = 2 + 2 = 4$. Observe que substituindo $x = 4$ na equação cúbica $x^3 - 12x - 16 = 0$, teremos:

$$4^3 - 12 \cdot 4 - 16 = 64 - 48 - 16 = 64 - 64 = 0.$$

Portanto, $x = 4$ é raiz da equação cúbica $x^3 - 12x - 16 = 0$.

Empregando este mesmo raciocínio, desenvolveremos uma fórmula resolutiva para as equações cúbicas do tipo $ax^3 + cx + d = 0$. Faremos isto na seção 4.3.

4.2 Interpretação Geométrica da Equação $x^3 + cx + d = 0$

Do raciocínio empregado na seção anterior, temos a igualdade $x^3 = m^3 + 3mn \cdot x + n^3$, com $x = m + n$. Podemos interpretar esta igualdade como um cubo de aresta $x = m + n$

subdivido em cinco sólidos menores: um cubo de aresta m e volume m^3; um outro cubo de aresta n e volume n^3; e três paralelepípedos de arestas m, n e $m+n$ e volume $mn \cdot (m+n)$ cada. Então, temos o cubo a seguir:

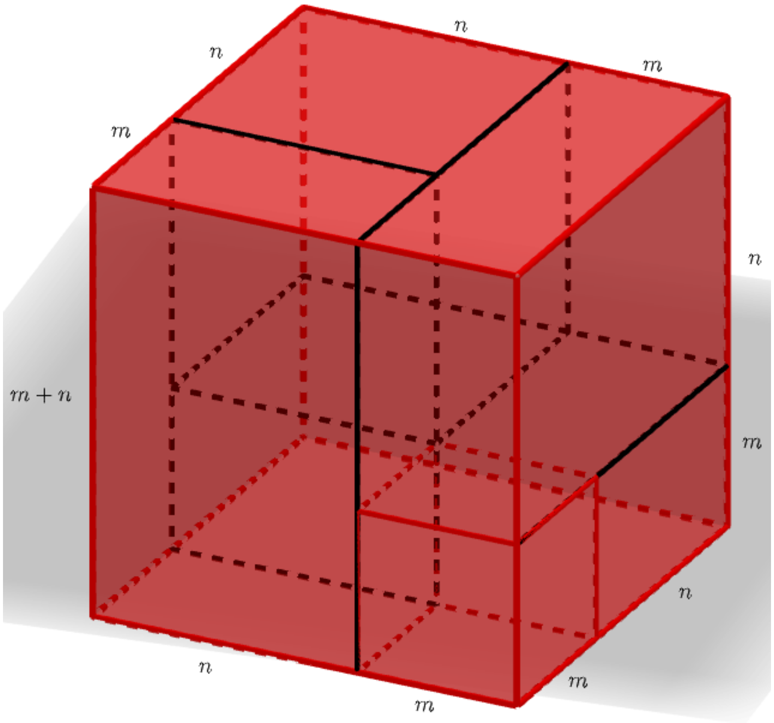

Figura 4.1: Cubo Cardano-Tartaglia (Criado pelo Autor)

É claro que somando-se os volumes do cinco sólidos teremos o volume total do cubo de aresta $x = m + n$, isto é:

$$x^3 = m^3 + mn \cdot (m+n) + mn \cdot (m+n) + mn \cdot (m+n) + n^3$$
$$\Longleftrightarrow x^3 = m^3 + 3mn \cdot (m+n) + n^3$$
$$\Longleftrightarrow x^3 = m^3 + 3mnx + n^3.$$

Geometricamente falando, Cardano e Tartaglia reinterpretaram o cubo da soma, reescrevendo-o de uma maneira que fosse subdividido em menos sólidos, resumindo assim a sua forma algébrica $x^3 + bx^2 + cx + d$ a uma forma $x^3 + cx + d$, ou seja, sem o termo quadrático.

4.3 Generalizando O Método

Dada a equação cúbica

$$ax^3 + cx + d = 0, \tag{11}$$

com $a \neq 0$, podemos dividi-la por a. Então, temos:

$$\begin{aligned} (ax^3 + cx + d = 0) \quad &\div \quad a \\ \Longleftrightarrow \frac{a}{a}x^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= \frac{0}{a} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \tag{12}$$

Comparando as equações (10) e (12), vemos que $\begin{cases} -3mn = \dfrac{c}{a} \\ -(m^3 + n^3) = \dfrac{d}{a}. \end{cases}$

Deste sistema, obtemos $m^3 + n^3 = -\dfrac{d}{a}$ e $mn = -\dfrac{d}{3a}$; elevando-se esta última igualdade ao cubo, teremos $m^3n^3 = -\dfrac{c^3}{27a^3}$. Mais uma vez, observe que dados os números m^3 e n^3, sua soma e o seu produto são, respectivamente, $-\dfrac{d}{a}$ e $-\dfrac{c^3}{27a^3}$. Logo, fazendo $S = m^3 + n^3 = -\dfrac{d}{a}$ e $P = m^3n^3 = -\dfrac{c^3}{27a^3}$, montamos a equação quadrática

$$y^2 + \frac{d}{a}y - \frac{c^3}{27a^3} = 0 \tag{13}$$

cujas raízes são os números m^3 e n^3.

Resolvendo a equação quadrática (13), identificamos os coeficientes $a = 1$, $b = \dfrac{d}{a}$ e $c = -\dfrac{c^3}{27a^3}$ (não confunda aqui o coeficiente c da equação quadrática no lado esquerdo da igualdade com o coeficiente c da equação cúbica na forma c^3 no lado direito da mesma igualdade). Calculando o valor de Δ, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{d}{a}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{c^3}{27a^3}\right) = \frac{d^2}{a^2} + \frac{4c^3}{27a^3} = \frac{27ad^2 + 4c^3}{27a^3}.$$

Calculando $\sqrt{\Delta}$, temos:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{27a^3}} = \sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3 \cdot 9 \cdot a \cdot a^2}} = \frac{1}{3a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}.$$

Pela fórmula resolutiva das equações quadráticas, temos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{d}{a} \pm \frac{1}{3a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}}{2 \cdot 1}$$

$$\iff y = \left(-\frac{d}{a} \pm \frac{1}{3a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\iff y = -\frac{d}{2a} \pm \frac{1}{6a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}.$$

Por isto, segue-se que:

$$y_1 = m^3 = -\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}} \quad e$$

$$y_2 = n^3 = -\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}.$$

Disto, teremos que:

$$m = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}} \quad e$$

$$n = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}}.$$

Como fizemos $x = m + n$, então finalmente obtemos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\frac{27ad^2 + 4c^3}{3a}}} \tag{14}$$

Por simplicidade, podemos tomar $\Psi = \dfrac{27ad^2 + 4c^3}{3a}$ e fazer esta substituição na igualdade (14), obtendo deste modo:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}. \tag{15}$$

A igualdade (15) é a fórmula resolutiva das equações cúbicas do tipo $ax^3 + cx + d = 0$, hoje chamada de "Fórmula de Tartaglia-Cardano"; analogamente às equações quadráticas, chamaremos $\Psi = \dfrac{27ad^2 + 4c^3}{3a}$ de discriminante da equação cúbica.

4.4 O Discriminante Ψ

De modo análogo ao discriminante Δ das equações quadráticas, analisaremos três possibilidades para o discriminante Ψ das equações cúbicas, a saber:

(a) Se $\Psi > 0$, então a $\sqrt{\Psi}$ da equação (15) existe em $\mathbb{R}$. Logo, a raiz da equação cúbica será dada pela própria fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}.$$

(b) Se for $\Psi = 0$, então teremos $\sqrt{\Psi} = 0$ na equação (15), o que deixa a fórmula resolutiva simplificada na forma:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a}} = 2\sqrt[3]{-\frac{d}{2a}}.$$

Ou seja, a raiz da equação cúbica é dada apenas por $x = 2\sqrt[3]{-\frac{d}{2a}}$.

(c) Se tivermos $\Psi < 0$, então não existe $\sqrt{\Psi}$ em $\mathbb{R}$. Isto implica dizer que teremos as raízes cúbicas dos números imaginários conjugados $-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}$ e $-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}$.

Nos exemplos a seguir, veremos como aplicar melhor a fórmula resolutiva das equações cúbicas do tipo $ax^3 + cx + d = 0$.

Exemplo 32. *Resolva a equação cúbica* $\frac{1}{6}x^3 - x + 1 = 0$.

Solução: Para que os coeficientes da equação não sejam fracionários, podemos multiplicá-la por 6. Então, teremos:

$$\left(\frac{1}{6}x^3 - x + 1 = 0\right) \cdot 6 \Longleftrightarrow x^3 - 6x + 6 = 0.$$

Da equação $x^3 - 6x + 6 = 0$, veja que temos os coeficientes $a = 1$, $c = -6$ e $d = 6$. Calculando Ψ, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 1 \cdot 6^2 + 4 \cdot (-6)^3}{3 \cdot 1}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{27 \cdot 36 + 4 \cdot (-216)}{3} = \frac{972 - 864}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{108}{3} = 36.$$

Como $\Psi = 36$, então temos que $\sqrt{\Psi} = \sqrt{36} = 6$. Aplicando a fórmula (15), teremos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{6}{2 \cdot 1} - \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot 6} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot 6}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \frac{6}{6}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \frac{6}{6}}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{-3 - 1} + \sqrt[3]{-3 + 1}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{-4} + \sqrt[3]{-2}.$$

Substituindo $x = \sqrt[3]{-4} + \sqrt[3]{-2}$ na equação cúbica $\frac{1}{6}x^3 - x + 1 = 0$, teremos:

$$\frac{1}{6} \cdot (\sqrt[3]{-4} + \sqrt[3]{-2})^3 - (\sqrt[3]{-4} + \sqrt[3]{-2}) + 1$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (-4 + 3 \cdot (\sqrt[3]{-4})^2 \cdot \sqrt[3]{-2} + 3 \cdot \sqrt[3]{-4} \cdot (\sqrt[3]{-2})^2 - 2) - \sqrt[3]{-4} - \sqrt[3]{-2} + 1$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (-6 + 3 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{-2} + 3 \cdot \sqrt[3]{-4} \cdot \sqrt[3]{4}) - \sqrt[3]{-4} - \sqrt[3]{-2} + 1$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (-6 + 3 \cdot \sqrt[3]{-32} + 3 \cdot \sqrt[3]{-16}) - \sqrt[3]{-4} - \sqrt[3]{-2} + 1$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (-6 + 3 \cdot 2\sqrt[3]{-4} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{-2}) - \sqrt[3]{-4} - \sqrt[3]{-2} + 1$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (-6 + 6 \cdot \sqrt[3]{-4} + 6 \cdot \sqrt[3]{-2}) - \sqrt[3]{-4} - \sqrt[3]{-2} + 1$$
$$= -1 + \sqrt[3]{-4} + \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{-4} - \sqrt[3]{-2} + 1 = 0.$$

Portanto, $x = \sqrt[3]{-4} + \sqrt[3]{-2}$ é raiz da equação $\frac{1}{6}x^3 - x + 1 = 0$ (Note ainda que podemos escrever também $x = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$).

$\square$

Observação 8. *Para todo $k \in \mathbb{R}$, temos que $\sqrt[3]{k} = -\sqrt[3]{-k}$.*

Exemplo 33. *Resolva a equação cúbica $9x^3 - 21x + 14 = 0$.*

Solução: Desta equação, temos os coeficientes $a = 9$, $c = -21$ e $d = 14$. Calculando o valor do discriminante Ψ, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 9 \cdot 14^2 + 4 \cdot (-21)^3}{3 \cdot 9}$$

$$\iff \Psi = \frac{243 \cdot 196 + 4 \cdot (-9261)}{27} = \frac{47628 - 37044}{27}$$

$$\iff \Psi = \frac{10584}{27} = 392.$$

Agora, calculando $\sqrt{\Psi}$, segue-se:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{392} = \sqrt{14^2 \cdot 2} = 14\sqrt{2}.$$

Pela fórmula (15), teremos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{-\frac{14}{2 \cdot 9} - \frac{1}{6 \cdot 9} \cdot 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-\frac{14}{2 \cdot 9} + \frac{1}{6 \cdot 9} \cdot 14\sqrt{2}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{-\frac{7}{9} - \frac{7\sqrt{2}}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{7}{9} + \frac{7\sqrt{2}}{27}} = \sqrt[3]{\frac{-21 - 7\sqrt{2}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{-21 + 7\sqrt{2}}{27}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{\frac{-7 \cdot (3 + \sqrt{2})}{27}} + \sqrt[3]{\frac{-7 \cdot (3 - \sqrt{2})}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-7 \cdot (3 + \sqrt{2})}}{3} + \frac{\sqrt[3]{-7 \cdot (3 - \sqrt{2})}}{3}.$$

O número $\frac{\sqrt[3]{-7 \cdot (3 + \sqrt{2})}}{3} + \frac{\sqrt[3]{-7 \cdot (3 - \sqrt{2})}}{3}$ é raiz da equação $9x^3 - 21x + 14 = 0$ (manualmente, é bem difícil verificar este fato!).

$\square$

Exemplo 34. *Resolva a seguinte equação cúbica* $108x^3 - 9x - 1 = 0$.

Solução: Da equação acima, obtemos os coeficientes $a = 108$, $c = -9$ e $d = -1$. Calculando o valor de Ψ, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 108 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-9)^3}{3 \cdot 108}$$

$$\iff \Psi = \frac{2916 \cdot 1 + 4 \cdot (-729)}{324} = \frac{2916 - 2916}{324}$$

$$\iff \Psi = \frac{0}{324} = 0.$$

Como obtemos $\Psi = 0$, obviamente teremos $\sqrt{\Psi} = 0$. Logo, a fórmula (15) nos resume:

$$x = 2\sqrt[3]{-\frac{d}{2a}} = 2\sqrt[3]{-\frac{-1}{2 \cdot 108}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{216}} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Substituindo $x = \dfrac{1}{3}$ na equação cúbica $108x^3 - 9x - 1 = 0$, teremos:

$$108 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 9 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 108 \cdot \frac{1}{27} - \frac{9}{3} - 1 = \frac{108}{27} - 3 - 1 = 4 - 4 = 0.$$

Portanto, $\dfrac{1}{3}$ é raiz da equação $108x^3 - 9x - 1 = 0$.

$\square$

Exemplo 35. *Dada a equação cúbica* $-\dfrac{1}{9}x^3 + 2x + 3 = 0$, *resolva-a.*

Solução: Para evitarmos as frações, multiplicaremos a equação dada por 9. Então, segue-se:

$$\left(-\frac{1}{9}x^3 + 2x + 3 = 0\right) \cdot 9 \iff -x^3 + 18x + 27 = 0.$$

Agora temos os seguintes coeficientes da equação: $a = -1$, $c = 18$ e $d = 27$. Calculando o valor de Ψ, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot (-1) \cdot 27^2 + 4 \cdot 18^3}{3 \cdot (-1)}$$

$$\iff \Psi = \frac{-27 \cdot 729 + 4 \cdot 5832}{-3} = \frac{-19683 + 23328}{-3}$$

$$\iff \Psi = \frac{3645}{-3} = -1215.$$

Veja que temos $\Psi = -1215$, logo $\sqrt{\Psi} = \sqrt{-1215}$ não é um número real. Porém, já sabemos calcular, como visto na seção 3.8, a raiz quadrada destes números. Então, segue-se:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{-1215} = \sqrt{1215 \cdot (-1)} = \sqrt{1215} \cdot \sqrt{-1} = 9\sqrt{15}i.$$

Pela fórmula (15), teremos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{-\frac{27}{2 \cdot (-1)} - \frac{1}{6 \cdot (-1)} \cdot 9\sqrt{15}i} + \sqrt[3]{-\frac{27}{2 \cdot (-1)} + \frac{1}{6 \cdot (-1)} \cdot 9\sqrt{15}i}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{\frac{27}{2} + \frac{9\sqrt{15}i}{6}} + \sqrt[3]{\frac{27}{2} - \frac{9\sqrt{15}i}{6}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{\frac{27}{2} + \frac{3\sqrt{15}i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{27}{2} - \frac{3\sqrt{15}i}{2}}.$$

Segue-se que $x = \sqrt[3]{\frac{27}{2} + \frac{3\sqrt{15}i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{27}{2} - \frac{3\sqrt{15}i}{2}}$ é raiz da equação cúbica $-\frac{1}{9}x^3 + 2x + 3 = 0$ (esta raiz é chamada de irredutível).

□

Observação 9. *Quando tivermos o discriminante $\Psi < 0$, a raiz da equação cúbica é o número real escrito na forma $x = \sqrt[3]{a + bi} + \sqrt[3]{a - bi}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, sendo chamado de caso irredutível.*

Como queremos resolver equações cúbicas apenas utilizando a álgebra elementar estudada no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, o estudo das raízes do caso irredutível não faz parte deste texto, pois seria necessário abordarmos os números complexos em sua forma geométrica como também as fórmulas de De Moivre.

Observemos que nos Exemplos 32 e 33 as raízes das equações são razoavelmente difíceis de se trabalhar manualmente, mesmo estes números ainda serem reais. Porém, no Exemplo 35, a raiz da equação é um número muito estranho e complicado de se entender, pois no radical aparecem números imaginários (daí o motivo destes números também serem chamados de complexos).

De posse deste método estudado nesta seção, estamos prontos para resolver os dois últimos tipos de equações cúbicas (a incompleta $ax^3+bx^2+d=0$ e a equação completa $ax^3+bx^2+cx+d=0$), os quais podem ser reduzidos ao tipo de equação $ay^3+cy+d=0$ completando-se cubos, assunto já estudado na seção 3.14.

4.5 A Equação Cúbica Incompleta $ax^3 + bx^2 + d = 0$

Para resolvermos as equações do tipo $ax^3 + bx^2 + d = 0$, aplicaremos o método de completar cubos e depois transformar a nova equação obtida numa equação cúbica do tipo $y^3 + cy + d = 0$, a qual já sabemos resolver. Vejamos isto com o exemplo abaixo:

Exemplo 36. *Resolva a equação cúbica incompleta* $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

Solução: Veja que da equação acima, podemos escrever

$$x^3 - 3x^2 = -4. \tag{16}$$

Comparando o lado esquerdo da equação (16) com o desenvolvimento do cubo da diferença, que é $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, obteremos a igualdade $-3x^2 = -3x^2y$. Então, teremos:

$$-3x^2 = -3x^2y \Longleftrightarrow y = 1.$$

Calculando agora os 3º e 4º termos do desenvolvimento do cubo da diferença, que são, respectivamente, $3xy^2$ e $-y^3$, como $y = 1$, teremos:

$$3xy^2 = 3x \cdot 1^2 = 3x \quad e \quad -y^3 = -(1)^3 = -1.$$

Somando as parcelas $3x$ e -1 a ambos os lados da equação (16), teremos:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -4 + 3x - 1 \Longleftrightarrow (x-1)^3 = 3x - 5.$$

Na equação cúbica $(x-1)^3 = 3x-5$, por simplicidade, podemos fazer a seguinte substituição $y = x-1$, de onde também temos $x = y+1$. Disto, segue-se:

$$\begin{aligned}
&y^3 = 3\cdot(y+1)-5\\
\iff &y^3 = 3y+3-5\\
\iff &y^3 = 3y-2\\
\iff &y^3-3y+2 = 0.
\end{aligned}$$

Já sabemos resolver a equação cúbica $y^3-3y+2=0$. Dela, obtemos os coeficientes $a=1$, $c=-3$ e $d=2$. Calculando Ψ, temos:

$$\Psi = \frac{27ad^2+4c^3}{3a} = \frac{27\cdot 1\cdot 2^2+4\cdot(-3)^3}{3\cdot 1} = \frac{27\cdot 4+4\cdot(-27)}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Como $\Psi = 0$, obviamente temos $\sqrt{\Psi} = \sqrt{0} = 0$. Deste fato, segue-se que:

$$y = 2\sqrt[3]{-\frac{d}{2a}} = 2\sqrt[3]{-\frac{2}{2\cdot 1}} = 2\sqrt[3]{-\frac{2}{2}} = 2\sqrt[3]{-1} = 2\cdot(-1) = -2.$$

Logo, $y=-2$ é raiz da equação $y^3-3y+2=0$. Porém, estamos interessado na raiz da equação cúbica incompleta $x^3-3x^2+4=0$. Como temos $x=y+1$, segue-se:

$$x = -2+1 = -1.$$

Portanto, $x=-1$ é raiz de $x^3-3x^2+4=0$, pois temos

$$(-1)^3-3\cdot(-1)^2+4 = -1-3+4 = 0$$

.

$\square$

Exemplo 37. *Dada a equação cúbica* $3x^3+7x^2-4=0$*, resolva-a.*

Solução: Para que esta equação fique da mesma forma da equação do exemplo anterior, basta dividi-la por 3. Então, segue-se:

$$(3x^3 + 7x^2 - 4 = 0) \quad \div \quad 3$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3}{3}x^3 + \frac{7}{3}x - \frac{4}{3} = \frac{0}{3}$$

$$\Longleftrightarrow x^3 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3} = 0$$

Da equação última igualdade acima, obtemos

$$x^3 + \frac{7}{3}x^2 = \frac{4}{3}. \tag{17}$$

Para completarmos o cubo, compararemos o lado esquerdo de (17) com o desenvolvimento do cubo da soma $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, obtendo assim a igualdade $\frac{7}{3}x^2 = 3x^2y$. Disto, segue-se:

$$\frac{7}{3}x^2 = 3x^2y \Longleftrightarrow \frac{7}{3} = 3y \Longleftrightarrow y = \frac{7}{9}.$$

Como encontramos $y = \frac{7}{9}$, podemos calcular os 3º e 4º termos do desenvolvimento do cubo da soma, que são $3xy^2$ e y^3. Segue-se:

$$3xy^2 = 3x \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2 = 3x \cdot \frac{49}{81} = \frac{49}{27}x \quad e$$

$$y^3 = \left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{343}{729}.$$

Somando-se as parcelas $\frac{49}{27}x$ e $\frac{343}{729}$ a ambos os membros da equação cúbica (17), obteremos:

$$x^3 + \frac{7}{3}x^2 + \frac{49}{27}x + \frac{343}{729} = \frac{4}{3} + \frac{49}{27}x + \frac{343}{729}$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{7}{9}\right)^3 = \frac{49}{27}x + \frac{1315}{729}.$$

Na última equação acima, para simplificar os cálculos, podemos fazer a substituição $y = x + \frac{7}{9}$, de onde também temos $x = y - \frac{7}{9}$. Logo, segue-se:

$$y^3 = \frac{49}{27} \cdot \left(y - \frac{7}{9} \right) + \frac{1315}{729}$$

$$\Longleftrightarrow y^3 = \frac{49}{27}y - \frac{343}{243} + \frac{1315}{729}$$

$$\Longleftrightarrow y^3 = \frac{49}{27}y + \frac{286}{729}$$

$$\Longleftrightarrow y^3 - \frac{49}{27}y - \frac{286}{729} = 0.$$

Para simplificarmos os cálculos evitando as frações, podemos multiplicar a última equação acima por 729. Logo, obteremos:

$$\left(y^3 - \frac{49}{27}y - \frac{286}{729} = 0 \right) \cdot 729 \Longleftrightarrow 729y^3 - 1323y - 286 = 0.$$

Agora temos os coeficientes da equação $a = 729$, $c = -1323$ e $d = -286$. Calculando o valor de Ψ, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 729 \cdot (-286)^2 + 4 \cdot (-1323)^3}{3 \cdot 729}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{19.683 \cdot 81.786 + 4 \cdot (-2.315.685.267)}{2187}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{1.609.793.838 - 9.262.741.068}{2187}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{-7.652.947.230}{2187} = -3.499.290.$$

Como temos o discriminante $\Psi = -3.499.290 < 0$, então a raiz da equação cúbica $729y^3 - 1323y - 286 = 0$ é irredutível. Continuando, temos:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{-3.499.290} = \sqrt{3.499.290 \cdot (-1)} = 3\sqrt{388.810}i.$$

Logo, pela fórmula resolutiva das equações cúbicas, obtemos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{-286}{2 \cdot 729} - \frac{1}{6 \cdot 729} \cdot 3\sqrt{388.810}i} + \sqrt[3]{-\frac{-286}{2 \cdot 729} + \frac{1}{6 \cdot 729} \cdot 3\sqrt{388.810}i}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{286}{1458} - \frac{3\sqrt{388.810}i}{4374}} + \sqrt[3]{\frac{286}{1458} + \frac{3\sqrt{388.810}i}{4374}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{143}{729} - \frac{\sqrt{388.810}i}{1458}} + \sqrt[3]{\frac{143}{729} + \frac{\sqrt{388.810}i}{1458}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{729} \cdot \left(143 - \frac{\sqrt{388.810}i}{2}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{729} \cdot \left(143 + \frac{\sqrt{388.810}i}{2}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{1}{9} \cdot \sqrt[3]{143 - \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} + \frac{1}{9} \cdot \sqrt[3]{143 + \frac{\sqrt{388.810}i}{2}}$$

Por isto, concluímos que $y = \frac{1}{9} \cdot \sqrt[3]{143 - \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} + \frac{1}{9} \cdot \sqrt[3]{143 + \frac{\sqrt{388.810}i}{2}}$ é raiz (irredutível) da equação $729y^3 - 1323y - 286 = 0$.

Finalmente, como temos $x = y - \frac{7}{9}$, segue-se que:

$$x = \frac{1}{9} \cdot \sqrt[3]{143 - \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} + \frac{1}{9} \cdot \sqrt[3]{143 + \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} - \frac{7}{9}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{9} \cdot \left(\sqrt[3]{143 - \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} + \sqrt[3]{143 + \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} - 7\right).$$

Portanto, $x = \frac{1}{9} \cdot \left(\sqrt[3]{143 - \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} + \sqrt[3]{143 + \frac{\sqrt{388.810}i}{2}} - 7\right)$ é raiz (irredutível) da equação cúbica $3x^3 + 7x^2 - 4 = 0$.

$\square$

De forma geral, dada equação cúbica incompleta do tipo

$$ax^3 + bx^2 + d = 0, \tag{18}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, podemos dividi-la por a. Então, temos:

$$ax^3 + bx^2 + d = 0 \quad \div \quad a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a}{a}x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{d}{a} = \frac{0}{a}$$

$$\Longleftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{d}{a} = 0.$$

Isolando os dois primeiros termos da última equação, teremos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 = -\frac{d}{a}. \tag{19}$$

Comparando o primeiro membro da equação (19) com o desenvolvimento do cubo da soma $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, concluímos que:

$$3x^2y = \frac{b}{a}x^2 \Longleftrightarrow 3y = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow y = \frac{b}{3a}.$$

Como encontramos $y = \dfrac{b}{3a}$, podemos agora calcular os 3º e 4º termos do cubo da soma, a saber $3xy^2$ e y^3:

$$3xy^2 = 3x \cdot \left(\frac{b}{3a}\right)^2 = 3x \cdot \frac{b^2}{9a^2} = \frac{b^2}{3a^2}x \quad e$$

$$y^3 = \left(\frac{b}{3a}\right)^3 = \frac{b^3}{27a^3}.$$

Somando as parcelas $\dfrac{b^2}{3a^2}x$ e $\dfrac{b^3}{27a^3}$ a ambos os membros da equação (19), obteremos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3} = -\frac{d}{a} + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3}$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 = \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3 - 27a^2d}{27a^3}$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{27a^2d - b^3}{27a^3} = 0$$

Por simplicidade, podemos fazer a substituição $y = x + \dfrac{b}{3a}$, de onde também temos $x = y - \dfrac{b}{3a}$, na última equação acima. Então, segue-se:

$$y^3 - \frac{b^2}{3a^2} \cdot \left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{27a^2d - b^3}{27a^3} = 0$$

$$\iff y^3 - \frac{b^2}{3a^2}y + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{27a^2d - b^3}{27a^3} = 0$$

$$\iff y^3 - \frac{b^2}{3a^2}y + \frac{2b^3 + 27a^2d}{27a^3} = 0.$$

Multiplicando a última equação acima por $27a^3$ para eliminarmos as frações, obteremos:

$$\left(y^3 - \frac{b^2}{3a^2}y + \frac{2b^3 + 27a^2d}{27a^3} = 0\right) \cdot 27a^3$$

$$\iff 27a^3y^3 - 9ab^2y + (2b^3 + 27a^2d) = 0.$$

Note que na última equação acima ainda podemos fazer as substituições $A = 27a^3$, $C = -9ab^2$ e $D = 2b^3 + 27a^2d$, obtendo assim a equação cúbica:

$$Ay^3 + Cy + D = 0. \tag{20}$$

Obviamente, $A, C, D \in \mathbb{R}$ pois os coeficientes $a, b, d \in \mathbb{R}$.

Já sabemos que a solução da equação (20) é dada por

$$y = \sqrt[3]{-\frac{D}{2A} - \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{D}{A} + \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}},$$

onde $\Psi = \dfrac{27AD^2 + 4C^3}{3A}$.

Como fizemos $x = y - \dfrac{b}{3a}$, segue-se que a solução da equação (18) é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{D}{2A} - \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{D}{A} + \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}} - \frac{b}{3a}, \tag{21}$$

onde $A = 27a^3$, $C = -9ab^2$ e $D = 2b^3 + 27a^2d$.

A equação (21) nos mostra que qualquer equação cúbica do tipo $ax^3 + bx^2 + d = 0$, com $a \neq 0$, pode ser resolvida completando-se cubos.

Em outras palavras, o que acabamos de ver acima nos mostra como proceder quando temos equações cúbicas do tipo de (18).

Para as equações cúbicas completas, isto é, quando temos $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, aplicaremos o mesmo raciocínio; já estamos prontos para isto. Vejamos isto na próxima seção.

4.6 A Equação Cúbica Completa $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Os próximos dois exemplos, veremos como completar cubos quando temos equações cúbicas completas.

Exemplo 38. *Resolva a equação cúbica completa* $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = 0$.

Solução: Isolando os dois primeiros termos da equação $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = 0$, teremos

$$x^3 - 9x^2 = -8x - 60. \tag{22}$$

Comparando a equação (22) com o desenvolvimento do cubo da diferença $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, obteremos:

$$-3x^2y = -9x^2 \iff -3y = -9 \iff y = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Como agora temos $y = 3$, podemos calcular os termos $3xy^2$ e $-y^3$ que faltam para completar o cubo da diferença. Disto, segue-se:

$$3xy^2 = 3x \cdot 3^2 = 3x \cdot 9 = 27x \quad e \quad -y^3 = -3^3 = -27.$$

Somando os termos $27x$ e -27 a ambos os membros da equação cúbica (22), obteremos:

$$\begin{aligned} &x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = -8x - 60 + 27x - 27 \\ &\iff (x-3)^3 = 19x - 87. \end{aligned}$$

Na equação $(x-3)^3 = 19x - 87$, fazendo a substituição $y = x - 3$, de onde também temos $x = y + 3$, obteremos:

$$\begin{aligned} &y^3 = 19 \cdot (y+3) - 87 \\ &\iff y^3 = 19y + 57 - 87 \\ &\iff y^3 - 19y + 30 = 0. \end{aligned}$$

Da equação cúbica $y^3 - 19y + 30 = 0$, temos os coeficientes $a = 1$, $c = -19$ e $d = 30$. Calculando o discriminantes Ψ, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 1 \cdot 30^2 + 4 \cdot (-19)^3}{3 \cdot 1}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{27 \cdot 900 + 4 \cdot (-6859)}{3} = \frac{24300 - 27436}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{-3136}{3}.$$

Obviamente, calculando $\sqrt{\Psi}$, obteremos:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{\frac{-3136}{3}} = \sqrt{\frac{3136 \cdot (-1)}{3}} = \frac{56\sqrt{-1}}{\sqrt{3}} = \frac{56\sqrt{3}i}{3}.$$

Pela fórmula resolutiva da equação cúbica, segue-se:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{30}{2 \cdot 1} - \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot \frac{56\sqrt{3}i}{3}} + \sqrt[3]{-\frac{30}{2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot \frac{56\sqrt{3}i}{3}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{30}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{56\sqrt{3}i}{3}} + \sqrt[3]{-\frac{30}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{56\sqrt{3}i}{3}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-15 - \frac{56\sqrt{3}i}{18}} + \sqrt[3]{-15 + \frac{56\sqrt{3}i}{18}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-15 - \frac{28\sqrt{3}i}{9}} + \sqrt[3]{-15 + \frac{28\sqrt{3}i}{9}}.$$

Como fizemos $x = y + 3$, então a raiz da equação $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = 0$ é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-15 - \frac{28\sqrt{3}i}{9}} + \sqrt[3]{-15 + \frac{28\sqrt{3}i}{9}} + 3.$$

Portanto, $x = \sqrt[3]{-15 - \frac{28\sqrt{3}i}{9}} + \sqrt[3]{-15 + \frac{28\sqrt{3}i}{9}} + 3$ é raiz (irredutível) da equação cúbica dada.

□

Exemplo 39. *Dada a equação cúbica* $-4x^3+9x^2-6x+1=0$, *resolva-a.*

Solução: Como temos $a=-4$, podemos dividir a equação cúbica. Disto, segue-se:

$$-4x^3+9x^2-6x+1=0 \quad \div \quad (-4)$$

$$\iff \frac{-4}{-4}x^3+\frac{9}{-4}x^2-\frac{6}{-4}x+\frac{1}{-4}=\frac{0}{-4}$$

$$\iff x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=0.$$

Isolando os dois primeiros termos da última equação acima, obteremos

$$x^3-\frac{9}{4}x^2=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}. \tag{23}$$

Completaremos o cubo nesta equação. Para isto, compararemos o lado esquerdo de (23) com o desenvolvimento do cubo da diferença $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$. Logo, temos:

$$-3x^2y=-\frac{9}{2}x^2 \iff -3y=-\frac{9}{2} \iff y=-\frac{9}{2\cdot(-3)}=\frac{3}{2}.$$

Como temos $y=\frac{3}{2}$, podemos agora calcular os termos que estão faltando para que o lado esquerdo de (23) seja um cubo perfeito. Então, teremos:

$$3xy^2=3x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=3x\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{4}x \quad e$$

$$-y^3=-\left(\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{27}{8}.$$

Somando as parcelas $\frac{27}{4}x$ e $-\frac{27}{8}$ a ambos os membros da equação (23), teremos:

$$x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{27}{4}x-\frac{27}{8}=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{27}{4}x-\frac{27}{8}$$

$$\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^3=\frac{21}{4}x-\frac{25}{8}.$$

Para simplificar os cálculos, faremos a substituição $y=x-\frac{3}{2}$, de onde também temos $x=y+\frac{3}{2}$, na última igualdade acima. Disto, segue-se:

$$y^3 = \frac{21}{4} \cdot \left(y + \frac{3}{2}\right) - \frac{25}{8}$$

$$\iff y^3 = \frac{21}{4}y + \frac{63}{8} - \frac{25}{8}$$

$$\iff y^3 = \frac{21}{4}y + \frac{19}{4}$$

$$\iff y^3 - \frac{21}{4}y - \frac{19}{4} = 0.$$

Multiplicando a última igualdade acima por 4 para eliminarmos as frações, teremos:

$$\left(y^3 - \frac{21}{4}y - \frac{19}{4} = 0\right) \cdot 4 \iff 4y^3 - 21y - 19 = 0.$$

A última igualdade acima está sob a forma $ay^3+cy+d=0$ que já sabemos resolver; os coeficientes são $a = 4$, $c = -21$ e $d = -19$. Calculando o discriminante Ψ da equação cúbica, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 4 \cdot (-19)^2 + 4 \cdot (-21)^3}{3 \cdot 4}$$

$$\iff \Psi = \frac{108 \cdot 361 + 4 \cdot (-9261)}{12} = \frac{38.988 - 37.044}{12}$$

$$\iff \Psi = \frac{1944}{12} = 162.$$

Calculando agora $\sqrt{\Psi}$, obteremos:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}.$$

Finalmente, pela fórmula resolutiva das equações cúbicas, teremos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{-19}{2 \cdot 4} - \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot 9\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-\frac{-19}{2 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot 9\sqrt{2}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{19}{8} - \frac{9\sqrt{2}}{24}} + \sqrt[3]{\frac{19}{8} + \frac{9\sqrt{2}}{24}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{19}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{19}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{19 - 3\sqrt{2}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{19 + 3\sqrt{2}}{8}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{2}}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{2}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{2}}}{2}.$$

Como temos $x = y + \dfrac{3}{2}$, segue-se que:

$$x = \frac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{2}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{2}}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{2}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{2}} + 3}{2}.$$

Portanto, $x = \dfrac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{2}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{2}} + 3}{2}$ é raiz da equação cúbica proposta.

$\square$

Para as equações cúbicas incompletas do tipo $ax^3 + bx^2 + d = 0$ e as equações completas $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, o método a ser aplicado é o mesmo, ou seja, completaremos cubos, fazendo em seguida uma mudança de variável, obtendo desse modo uma equação cúbica do tipo $ay^3 + cy + d = 0$. Vamos generalizar este processo.

Para isto, consideremos a equação cúbica completa

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{24}$$

com $a \neq 0$. Como temos $a \neq 0$, podemos dividir a equação (24) por a. Então, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \div \quad a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a}{a}x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = \frac{0}{a}$$

$$\Longleftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Isolando os dois primeiros termos da última igualdade, obteremos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 = -\frac{c}{a}x - \frac{d}{a}. \tag{25}$$

Para completarmos o cubo, comparemos o lado esquerdo da equação (25) com o desenvolvimento do cubo da soma, que é $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Desta comparação, segue-se que:

$$3x^2y = \frac{b}{a}x^2 \Longleftrightarrow 3y = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow y = \frac{b}{3a}.$$

Como temos $y = \frac{b}{3a}$, podemos calcular os 3º e 4º termos do desenvolvimento do cubo da soma, que são $3xy^2$ e y^3. Logo, teremos:

$$3xy^2 = 3x \cdot \left(\frac{b}{3a}\right)^2 = 3x \cdot \frac{b^2}{9a^2} = \frac{b^2}{3a^2}x \quad e$$

$$y^3 = \left(\frac{b}{3a}\right)^3 = \frac{b^3}{27a^3}.$$

Somando os termos $\frac{b^2}{3a^2}x$ e $\frac{b^3}{27a^3}$ a ambos os membros da equação (25), obteremos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3} = -\frac{c}{a}x - \frac{d}{a} + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3}$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 = \left(\frac{b^2 - 3ac}{3a^2}\right)x + \frac{b^3 - 27a^2d}{27a^3}$$

Para facilitar o nosso cálculo, podemos fazer a substituição $y = x + \frac{b}{3a}$, de onde também obtemos $x = y - \frac{b}{3a}$, na última igualdade acima. Disto, segue-se:

$$y^3 = \left(\frac{b^2 - 3ac}{3a^2}\right) \cdot \left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{b^3 - 27a^2d}{27a^3}$$

$$\iff y^3 = \left(\frac{b^2 - 3ac}{3a^2}\right) y + \frac{-b^3 + 3abc}{9a^3} + \frac{b^3 - 27a^2d}{27a^3}$$

$$\iff y^3 = \left(\frac{b^2 - 3ac}{3a^2}\right) y + \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2d}{27a^3}$$

$$\iff y^3 - \left(\frac{b^2 - 3ac}{3a^2}\right) y - \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2d}{27a^3} = 0$$

$$\iff y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right) y + \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3} = 0.$$

Multiplicando a última igualdade acima por $27a^3$ para eliminarmos as frações, obteremos:

$$\left[y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right) y + \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3} = 0\right] \cdot 27a^3$$

$$\iff (27a^3)y^3 + (27a^2c - 9ab^2)y + (27a^2d + 2b^3 - 9abc) = 0$$

Para simplificarmos a última igualdade acima, podemos fazer $A = 27a^3$, $C = 27a^2c - 9ab^2$ e $D = 27a^2d + 2b^3 - 9abc$, obtendo a equação cúbica

$$Ay^3 + Cy + D = 0, \tag{26}$$

a qual já sabemos resolver (obviamente, A, C e D são números reais pois os coeficientes a, b, c e d da equação (24) são números reais).

Portanto, a solução de (26) é dada pela fórmula resolutiva das equações cúbicas:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{D}{2A} - \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{D}{2A} + \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}}, \tag{27}$$

onde $\Psi = \dfrac{27AD^2 + 4C^3}{3A}$.

Como fizemos a substituição $x = y - \dfrac{b}{3a}$, a solução da equação (24) é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{D}{2A} - \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{D}{2A} + \frac{1}{6A}\sqrt{\Psi}} - \frac{b}{3a}, \tag{28}$$

onde temos $A = 27a^3$, $C = 27a^2c - 9ab^2$ e $D = 27a^2d + 2b^3 - 9abc$.

A igualdade (28) nos mostra que qualquer equação cúbica, seja ela completa ou não, pode ser resolvida através de uma fórmula algébrica.

É notório que a fórmula escrita nesta forma (28) é muito difícil para qualquer estudante aprendê-la, seja de nível médio ou superior. Por isto, reafirmamos a importância que o aluno aprenda o método de completar cubos, o qual transformará qualquer equação cúbica completa numa equação do tipo $ax^3+cx+d = 0$, a qual possui uma fórmula resolutiva bem simples de se aprender e aplicar.

A seguir, veremos como fatorar uma equação cúbica, raciocínio análogo ao que usamos para fatorar equações quadráticas.

4.7 Fatorando Uma Equação Cúbica

Como primeira ilustração, consideremos a equação cúbica $x^3 - 27 = 0$ cuja raiz foi calculada no Exemplo 28 e é $x = 3$; daqui, temos o binômio $x - 3$. A seguir:

Exemplo 40. *Efetue a divisão de* $x^3 - 27$ *por* $x - 3$.

Solução: Note que temos:

$$\begin{array}{c|c} x^3 - 27 & x - 3 \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Pelo método de Descartes, estudado na seção 3.10, existem os polinômios $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = d$ tais que:

$$\begin{aligned}
&x^3 - 27 = (x - 3) \cdot q(x) + r(x) \\
&\Longleftrightarrow x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (ax^2 + bx + c) + d \\
&\Longleftrightarrow x^3 - 27 = ax^3 + bx + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c + d \\
&\Longleftrightarrow x^3 - 27 = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x + (d - 3c).
\end{aligned}$$

Observe que podemos escrever $x^3-27 = x^3+0x^2+0x-27$. Logo, a última igualdade acima nos dá o sistema $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3b = 0 \\ d - 3c = -27 \end{cases}$.

Como temos $a = 1$, segue-se:

$$b - 3 \cdot 1 = 0 \Longleftrightarrow b - 3 = 0 \Longleftrightarrow b = 3.$$

De $b = 3$, obtemos:

$$c - 3 \cdot 3 = 0 \Longleftrightarrow c - 9 = 0 \Longleftrightarrow c = 9.$$

De $c = 9$, temos então:

$$\begin{aligned} & d - 3 \cdot 9 = -27 \Longleftrightarrow d - 27 = -27 \\ & \Longleftrightarrow d = -27 + 27 \Longleftrightarrow d = 0. \end{aligned}$$

Como encontramos $a = 1$, $b = 3$, $c = 9$ e $d = 0$, os polinômios quociente e resto são, respectivamente, $q(x) = x^2 + 3x + 9$ e $r(x) = 0$ (a divisão é exata).

Por isto, podemos escrever $x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$.

□

Note que o fator $x^2 + 3x + 9$ pode ser visto como uma equação quadrática, a qual já sabemos resolver. Calculando $x^3 + 3x + 9 = 0$, pela fórmula resolutiva das equações quadráticas, obtemos:

$$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2} \quad e \quad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}.$$

Finalmente, escrevemos a forma fatorada de

$$x^3 - 27 = (x - 3) \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}\right) = 0.$$

Isto nos mostra que a equação cúbica $x^3 - 27 = 0$ possui três raízes, uma real e duas complexas (conjugadas).

Analisemos mais uma equação cúbica $108x^3 - 9x - 1 = 0$, estudada no Exemplo 34. Sua raiz, como sabemos é $x = \frac{1}{3}$, de onde obtemos $x - \frac{1}{3} = 0$. Multiplicando esta última igualdade por 3, teremos:

$$\left(x - \frac{1}{3} = 0\right) \quad \cdot \quad 3 \Longleftrightarrow 3x - 1 = 0,$$

de onde temos o binômio $3x - 1$.

Exemplo 41. *Efetue a divisão* $108x^3 - 9x - 1 \,\underline{|\; 3x - 1\;}$.

Solução: Pelo método de Descartes, existem os polinômios $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = d$ tais que:

$$\begin{aligned}
&108x^3 - 9x - 1 = (3x-1)\cdot q(x) + r(x)\\
&\iff 108x^3 - 9x - 1 = (3x-1)\cdot(ax^2+bx+c) + d\\
&\iff 108x^3 - 9x - 1 = 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx - ax^2 - bx - c + d\\
&\iff 108x^3 - 9x - 1 = 3ax^3 + (3b-a)x^2 + (3c-b)x + (d-c).
\end{aligned}$$

Veja que podemos escrever $108x^3 - 9x - 1 = 108x^3 + 0x^2 - 9x - 1$. Então, pela última igualdade acima, temos o sistema $\begin{cases} 3a = 108 \\ 3b - a = 0 \\ 3c - b = -9 \\ d - c = -1 \end{cases}$.

Veja que temos:

$$3a = 108 \iff a = \frac{108}{3} = 36.$$

Como $a = 36$, segue-se:

$$3b - 36 = 0 \iff 3b = 36 \iff b = \frac{36}{3} = 12.$$

De $b = 12$, também temos:

$$3c - 12 = -9 \iff 3c = -9 + 12 \iff c = \frac{3}{3} = 1.$$

Como $c = 1$, finalmente segue-se:

$$d - 1 = -1 \iff d = -1 + 1 = 0.$$

Pelo fato de termos encontrados $a = 36$, $b = 12$, $c = 1$ e $d = 0$, temos os polinômios quociente e resto $q(x) = 36x^2 + 12x + 1$ e $r(x) = 0$ respectivamente (divisão exata).

Por isto, podemos escrever $108x^3 - 9x - 1 = (3x-1)\cdot(36x^2 + 12x + 1)$.

$\square$

O fator $36x^2 + 12x + 1$ é uma equação quadrática. Determinando as raízes de $36x^2 + 12x + 1 = 0$ pela fórmula, obtemos:

$$x_1 = -\frac{1}{6} \iff 6x + 1 = 0 \quad e$$

$$x_2 = -\frac{1}{6} \iff 6x + 1 = 0.$$

Agora, escrevemos a forma fatorada de

$$108x^3 - 9x - 1 = (3x - 1) \cdot (6x + 1) \cdot (6x + 1) = 0.$$

Neste caso, a equação cúbica possui duas raízes reais, sendo uma delas repetida.

Os vários exemplos estudados ao longo do texto nos sugerem que qualquer equação cúbica possui exatamente três raízes, sendo pelo menos uma delas um número real. Isto pode ser facilmente constatado no raciocínio empregado na seção 4.1 quando fizemos $m + n = x \in \mathbb{R}$, pois $m, n \in \mathbb{R}$.

Vamos generalizar o raciocínio desta seção, ou seja, vamos fatorar a equação cúbica (24). Já sabemos calcular sua raiz, a qual é dada pela fórmula (28).

Por simplicidade, seja $x = m \in \mathbb{R}$ uma raiz da equação $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Efetuaremos a divisão entre os polinômios $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ e $x - m$, a qual é exata pois m é uma raiz da equação. Então, temos:

$$\begin{array}{c|c} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x - m \\ \cline{2-2} r(x) = 0 & q(x) \end{array},$$

onde $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = 0$ são, respectivamente, os polinômios quociente e resto da divisão.

Pelo método de Descartes, temos:

$$\begin{aligned} & Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - m) \cdot q(x) + r(x) \\ \Longleftrightarrow\ & Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - m) \cdot (ax^2 + bx + c) + 0 \\ \Longleftrightarrow\ & Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = ax^3 + bx^2 + cx - max^2 - mbx - mc \\ \Longleftrightarrow\ & Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = ax^3 + (b - ma)x^2 + (c - mb)x - mc \end{aligned}$$

Da última igualdade acima, obtemos o sistema: $\begin{cases} a = A \\ b - ma = B \\ c - mb = C \\ -mc = D \end{cases}$.

Como claramente $a = A$, então segue-se:

$$b - mA = B \Longleftrightarrow b = mA + B.$$

De $b = mA + B$, também obtemos:

$$\begin{aligned} & c - m \cdot (mA + B) = C \\ \Longleftrightarrow\ & c - m^2A - mB = C \\ \Longleftrightarrow\ & c = m^2A + mB + C. \end{aligned}$$

Finalmente, da última equação do sistema, temos:

$$-mc = D \Longleftrightarrow c = -\frac{D}{m},$$

quando tivermos $m \neq 0$.

Então, encontramos $a = A$, $b = mA + B$ e $c = m^2A + mB + C$.

Perceba que todos os coeficientes de $q(x) = ax^2 + bx + c$ estão determinados, pois os coeficientes A, B, C, D e m são todos conhecidos. Por isto, podemos escrever:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - m) \cdot \left[Ax^2 + (mA + B)x + (m^2A + mB + C)\right] .$$

O fator $Ax^2 + (mA + B)x + (m^2A + mB + C)$ é quadrático. A equação

$$Ax^2 + (mA + B)x + (m^2A + mB + C) = 0,$$

como já vimos anteriormente, possui exatamente duas raízes $x_1 = k$ e $x_2 = p$, podendo ser ambas reais (duas repetidas ou duas diferentes) ou ambas imaginárias (conjugadas). Deste fato, concluímos que:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - m) \cdot (x - k) \cdot (x - p) = 0.$$

Acabamos de mostrar que toda equação cúbica possui exatamente três raízes, sendo pelo menos uma delas um número real.

Na próxima seção, veremos como resolver problemas que recaem em equações cúbicas.

5 Aplicações das Equações Cúbicas

Os dois exemplos a seguir são problemas propostos no famoso duelo matemático ocorrido entre Del Fiore e Tartaglia.

Exemplo 42. *(Del Fiore) Dois homens ganharam 100 ducados, sendo que o lucro do primeiro foi a raiz cúbica do lucro do segundo. Qual foi o lucro de cada um?*

Solução: Inicialmente, devemos transformar este problema numa equação matemática. Para isto, seja x o lucro do primeiro homem. Como este lucro é a raiz cúbica do lucro do segundo homem, então este último homem teve lucro x^3. Além disso, eles dois ganharam juntos 100 ducados, ou seja,

$$x^3 + x = 100. \tag{29}$$

É fácil notar que a equação (29) é uma equação cúbica do tipo $ax^3 + cx + d = 0$, a qual já sabemos resolver. Da equação (29), obtemos $x^3 + x - 100 = 0$, cujos coeficientes são $a = 1$, $c = 1$ e $d = -100$. Calculando o discriminante Ψ da equação cúbica, teremos:

$$\begin{aligned}
\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} &= \frac{27 \cdot 1 \cdot (-100)^2 + 4 \cdot 1^3}{3 \cdot 1} \\
\iff \Psi = \frac{27 \cdot 10.000 + 4 \cdot 1}{3} &= \frac{270.000 + 4}{3} \\
\iff \Psi = \frac{270.004}{3}.
\end{aligned}$$

Calculando $\sqrt{\Psi}$, teremos:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{\frac{270004}{3}} = \frac{2\sqrt{202503}}{3}.$$

Pela fórmula resolutiva das equações cúbicas, obteremos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{-\frac{-100}{2 \cdot 1} - \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot \frac{2\sqrt{202503}}{3}} + \sqrt[3]{-\frac{-100}{2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot \frac{2\sqrt{202503}}{3}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{\frac{100}{2} - \frac{2\sqrt{202503}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{100}{2} + \frac{2\sqrt{202503}}{18}}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{50 - \frac{\sqrt{202503}}{9}} + \sqrt[3]{50 + \frac{\sqrt{202503}}{9}}.$$

Perceba que obtemos acima a raiz exata da equação cúbica (29). Como o problema trata da quantia de dinheiro que cada homem ganhou, então daremos a resposta em sua forma decimal. Para isto, usaremos o valor de $\frac{\sqrt{202503}}{9} \cong 50,00037$. Fazendo esta substituição na última igualdade acima, teremos:

$$x = \sqrt[3]{50 - 50,00037} + \sqrt[3]{50 + 50,00037}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{-0,00037} + \sqrt[3]{100,00037}$$

$$\iff x = -0,07179 + 4,64159 \cong 4,5698.$$

Logo, $x = 4,5698$ é uma raiz aproximada da equação cúbica (29) que representa o problema.

Portanto, o primeiro homem ganhou aproximadamente 4,57 ducados, enquanto o segundo homem ganhou $4,57^3 \cong 95,44$ ducados (em números redondos, seriam 5 e 95 ducados aproximadamente).

□

Exemplo 43. *(Tartaglia) Encontre um número tal que quando lhe subtraímos a sua raiz cúbica o resultado é 10.*

Solução: Primeiramente, transformaremos o texto numa equação matemática.

Seja x a raiz cúbica do número procurado; então x^3 será o próprio número procurado. Logo, devemos ter

$$x^3 - x = 10. \tag{30}$$

A equação (30) representa o problema proposto; ela é, obviamente, da forma $ax^2 + cx + d = 0$.

Da equação (30), obtemos $x^3 - x - 10 = 0$, cujos coeficientes são $a = 1$, $c = -1$ e $d = -10$. Calculando o discriminante Ψ da equação cúbica, segue-se:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 1 \cdot (-10)^2 + 4 \cdot (-1)^3}{3 \cdot 1}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{27 \cdot 100 + 4 \cdot (-1)}{3} = \frac{2700 - 4}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi = \frac{2696}{3}.$$

Calculando agora $\sqrt{\Psi}$, obteremos:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{\frac{2696}{3}} = \frac{2\sqrt{2022}}{3}.$$

Pela fórmula resolutiva das equações cúbicas, temos a seguir:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{-10}{2 \cdot 1} - \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot \frac{2\sqrt{2022}}{3}} + \sqrt[3]{-\frac{-10}{2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 1} \cdot \frac{2\sqrt{2022}}{3}}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{10}{2} - \frac{2\sqrt{2022}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{10}{2} + \frac{2\sqrt{2022}}{18}}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{5 - \frac{\sqrt{2022}}{9}} + \sqrt[3]{5 + \frac{\sqrt{2022}}{9}}.$$

Note que encontramos a raiz exata da equação cúbica (30). Porém, daremos ao problema uma resposta decimal, a qual obviamente será aproximada. Para isto, tomaremos $\frac{\sqrt{2022}}{9} \cong 4,99629$. Fazendo esta substituição na última igualdade acima, obteremos:

$$x = \sqrt[3]{5 - 4,99629} + \sqrt[3]{5 + 4,99629}$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{0,00371} + \sqrt[3]{9,99629}$$

$$\Longleftrightarrow x = 0,15481 + 2,15417 \cong 2,30898.$$

Claramente, $x = 2,30898$ é uma raiz aproximada da equação (30).

Porém, como estamos interessados em x^3, segue-se que $x^3 = 2,30898^3 \cong 12,31007$. Portanto, o número procurado é aproximadamente 12,31.

$\square$

Exemplo 44. *É dado um número. Se a diferença entre o seu cubo e o seu quadrado é 48, determine-o.*

Solução: Transformaremos o problema proposto numa equação matemática. Então, seja x este número; obviamente, x^3 e x^2 são, respectivamente, o seu cubo e o seu quadrado. Logo, pelo texto, concluímos que

$$x^3 - x^2 = 48. \tag{31}$$

A equação cúbica (31) é do tipo $ax^3 + bx + d = 0$ já estudada na seção 4.4.; para resolvê-la, primeiramente completaremos o cubo da diferença.

Comparando a equação (31) com o desenvolvimento do cubo da diferença $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, teremos:

$$-3x^2y = -x^2 \iff -3y = -1 \iff y = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Como temos $y = \frac{1}{3}$, podemos agora calcular os dois termos que faltam. Logo, segue-se:

$$3xy^2 = 3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3x \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}x \quad e$$

$$-y^3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}.$$

Somando as parcelas $\frac{1}{3}x$ e $-\frac{1}{27}$ a ambos os membros da equação (31), obteremos:

$$x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = 48 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}$$

$$\iff \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}x + \frac{1295}{27}.$$

Por simplicidade, faremos na última igualdade acima a substituição $y = x - \dfrac{1}{3}$, de onde também temos $x = y + \dfrac{1}{3}$. Então, segue-se:

$$y^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(y + \frac{1}{3}\right) + \frac{1295}{27}$$

$$\iff y^3 = \frac{1}{3}y + \frac{1}{9} + \frac{1295}{27}$$

$$\iff y^3 = \frac{1}{3}y + \frac{1298}{27}$$

$$\iff y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{1298}{27} = 0.$$

Para nos livrarmos das frações, podemos multiplicar toda a equação acima por 27. Logo, temos:

$$\left(y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{1298}{27} = 0\right) \quad \cdot \quad 27$$

$$\iff 27y^3 - 9y - 1298 = 0$$

.

A equação cúbica acima possui uma fórmula resolutiva. Como seus coeficientes são $a = 27$, $c = -9$ e $d = -1298$, calculando o seu discriminante Ψ, teremos:

$$\Psi = \frac{27ad^2 + 4c^3}{3a} = \frac{27 \cdot 27 \cdot (-1298)^2 + 4 \cdot (-9)^3}{3 \cdot 27}$$

$$\iff \Psi = \frac{729 \cdot 1.684.804 + 4 \cdot (-729)}{81} = \frac{1.228.222.116 - 2916}{81}$$

$$\iff \Psi = \frac{1.228.219.200}{81} = 15.163.200.$$

Calculando agora $\sqrt{\Psi}$, teremos:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{15.163.200} = 1080\sqrt{13}.$$

Pela fórmula resolutiva das equações cúbicas, segue-se:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \frac{1}{6a}\sqrt{\Psi}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{-1298}{2 \cdot 27} - \frac{1}{6 \cdot 27} \cdot 1080\sqrt{13}} + \sqrt[3]{-\frac{-1298}{2 \cdot 27} + \frac{1}{6 \cdot 27} \cdot 1080\sqrt{13}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1298}{54} - \frac{1080\sqrt{13}}{162}} + \sqrt[3]{\frac{1298}{54} + \frac{1080\sqrt{13}}{162}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{649}{27} - \frac{20\sqrt{13}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{649}{27} + \frac{20\sqrt{13}}{3}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{649 - 180\sqrt{13}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{649 + 180\sqrt{13}}{27}}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{649 - 180\sqrt{13}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{649 + 180\sqrt{13}}}{3}$$

Veja que encontramos a raiz exata da equação cúbica na incógnita y. Para exibirmos um valor aproximado, basta tomarmos $\sqrt{13} \cong 3,60555$, substituindo este valor na última igualdade acima. Então, teremos:

$$y = \frac{\sqrt[3]{649 - 180 \cdot 3,60555}}{3} + \frac{\sqrt[3]{649 + 180 \cdot 3,60555}}{3}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{649 - 648,999}}{3} + \frac{\sqrt[3]{649 + 648,999}}{3}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{0,001}}{3} + \frac{\sqrt[3]{1297,999}}{3}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{0,1}{3} + \frac{10,90833}{3} = \frac{11,00833}{3}.$$

Veja que $y = \dfrac{11,00833}{3}$ é uma raiz aproximada da equação cúbica na incógnita y. Porém, desejamos encontrar a raiz da equação cúbica (31). Como fizemos $x = y + \dfrac{1}{3}$, segue-se então:

$$x = \frac{11,00833}{3} + \frac{1}{3} = \frac{12,00833}{3} \cong 4,00278.$$

Obviamente, $x = 4,00278$ é uma raiz aproximada da equação (31); o valor exato, como facilmente pode ser constatado, é $x = 4$.

Portanto, o número procurado é 4, pois $4^3 - 4^2 = 64 - 16 = 48$.

$\square$

Nesta seção, vimos alguns problemas que recaem numa equação cúbica.

6 Conclusão

Esperamos que este trabalho possa ser realmente útil no auxílio do ensino de equações cúbicas no 1º ano do Ensino Médio, mostrando a estes alunos o raciocínio empregado para o desenvolvimento de uma fórmula resolutiva.

De posse desta fórmula (Tartaglia-Cardano), tentamos mostrar ainda como aplicá-la da maneira mais fácil possível; para isto, expomos a Fórmula de Tartaglia-Cardano de maneira análoga à fórmula resolutiva das equações quadráticas, ou seja, calculamos primeiramente um discriminante Ψ, o qual nos dirá o tipo de raiz que obteremos, para então finalmente calcularmos a solução em si.

O que há além da aplicação da Fórmula de Tartaglia-Cardano é transformar equações cúbicas completas, usando a operação "completar cubos", numa equação do tipo $ax^2 + cx + d = 0$ após uma mudança de variável; e isto abordamos e tentamos deixar bem didático neste texto, de maneira que o aluno do Ensino Médio possa facilmente aplicá-lo.

Como já foi dito anteriormente, o público alvo deste texto é o estudante do 1º ano do Ensino Médio, que pelo que já estudou no 9º ano do Ensino Fundamental e aprofundado na etapa escolar seguinte, reúne as condições necessárias para aprender a resolver as equações cúbicas.

Esperamos que após a aplicação deste material em sala de aula, os estudantes possam resolver por si mesmos uma equação cúbica, além de compreender toda a argumentação utilizada no desenvolvimento da Fórmula de Tartaglia-Cardano.

Referências

ALVES, Fabrício Garcia da Silva. **Soluções Gerais de Equações do Terceiro e Quarto Graus e a Relação Entre Números Complexos e Equações Cúbicas.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Mestrado Profissional em Matemática, Profmat, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, p. 89. 2015.

FILHO, Benigno Barreto; DA SILVA, Claudio Xavier. **Matemática Aula por Aula - Volume Único**. 1ª edição. São Paulo. Editora FTD S.A. - 2000.

GABI, Gilberto Geraldo. **O Romance das Equações Algébricas - A História da Álgebra**. 3ª Edição. São Paulo. Editora Livraria da Física - 2009.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - volume 6 (Complexos, Polinômios e Equações).** 8ª edição. São Paulo. Editora Atual - 2013.

JÚNIOR, José Vicente Ferreira. **A Fórmula de Cardano Como Ferramenta Auxiliar na Resolução de Equações Cúbicas.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Mestrado Profissional em Matemática, Profmat, Universidade Federal do Pará. Abaetetuba, p. 95. 2019.

OLIVEIRA, Wagner Vieira. **Métodos de Resolução de Equações Cúbicas e Quárticas e as Equações do Quinto Grau.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Mestrado Profissional em Matemática, Profmat, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. Dourados, p. 105. 2016.

SILVA, Luiz Antonio Leal da. **Ensino e Resolução das Equações Cúbicas: A Fórmula de Cardano e a Sua Importância Para o Aprendizado da Matemática no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Mestrado Profissional em Matemática, Profmat, Universidade Federal do Amapá. Macapá, p. 78. 2021.

VERITASIUM. **How Imaginary Numbers Were Invented**. Youtube, 1º de novembro de 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cUzklzVXJwot=3s.

VIANA, Marcelo. **As Guerras da Equação Cúbica**. Youtube, 19 de julho de 2022. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=CAKTb5lDCg0.