Patrik Borges do Nascimento Leal

Sobre o Conteúdo Matemático do Processo Seletivo para o Ensino Médio Integrado do IFES

Vitória

2023

Patrik Borges do Nascimento Leal

Sobre o Conteúdo Matemático do Processo Seletivo para o Ensino Médio Integrado do IFES

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Alancardek Pereira Araújo

Vitória

2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

L433s

Leal, Patrik Borges do Nascimento, 2023-
Sobre o conteúdo matemático do processo seletivo para o ensino médio integrado do IFES / Patrik Borges do Nascimento Leal. - 2023.
254 f. : il.

Orientador: Alancardek Pereira Araújo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Matemática (Ensino médio). 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Araújo, Alancardek Pereira. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"Sobre o conteúdo matemático do processo seletivo para o ensino médio integrado do IFES"

Patrik Borges do Nascimento Leal

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23/10/2023 por:

Prof.(a) Dr.(a) Alancardek Pereira Araujo
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Membro interno – UFES

Prof. Dr.(a) José Carlos Thompson da Silva
Membro Externo – IFES

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo – Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES │ 29075-910 │ (27) 4009-2474
│www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PMPM – profmat.ufes@gmail.com

Dedico esse trabalho à minha colega de mestrado Cybelle Passos Bezerra Lara (in memorian), vítima do atentado ocorrido no dia 25/11/2022 na EEEFM Primo Bitti, em Aracruz-ES.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que sempre tem me sustentado, me dando vida e saúde para vencer e superar cada desafio e alcançar cada objetivo traçado.

À minha esposa Bárbara Machado Rodrigues Leal, que me motiva, me inspira, não me deixa nem pensar em desistir, que esteve, está e estará ao meu lado em tudo.

À minha mãe Angela do Nascimento Leal, um verdadeiro exemplo de garra e superação, que sempre buscou o melhor para seus filhos e que com muito empenho e dedicação, nos educou para que pudéssemos ser pessoas melhores a cada dia.

Ao meu professor e orientador Dr. Alancardek Pereira Araújo, que através da sua confiança e orientação, foi de suma importância para o desenvolvimento desse trabalho.

À minha amiga e colega de mestrado Jegiane Favoreto, por ser minha dupla de estudo ao longo dos dois anos em que cursamos as disciplinas e sempre estar à disposição para estudarmos juntos e ser peça fundamental para a conclusão desse curso.

À Nuciala Tureta, professora da área de linguagens que tenho como amiga e colega de trabalho, que deu uma contribuição ímpar ajudando com a revisão textual deste texto acadêmico.

E por fim, porém não menos importante, à Fundação São João Batista, nas pessoas da Prof. Dra. Adriana Recla Sarcinelli e do Prof. Dr. Harerton Oliveira Dourado que abriram as portas das mantidas FAACZ e CEA para que eu pudesse ingressar na carreira docente, e hoje ser o professor que eu me tornei, sendo uma contribuição singular não só para essa dissertação, mas para a minha formação profissional e pessoal como um todo.

Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas.
A ele seja a glória para sempre! Amém.
(Rm 11, 36)

Resumo

O IFES é uma instituição que fornece uma educação pública de qualidade. E quando se trata dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio, o acesso se dá através de uma prova de seleção. O objetivo do presente trabalho é fazer uma análise do conteúdo de matemática dessas provas desde 2011 a 2022, levantando os tópicos mais cobrados e produzir um material baseado no conteúdo programático que possa ser utilizado por professores e alunos no ensino de matemática. O desenvolvimento se deu através de abordagem dos conteúdos com foco em resolução de questões de provas anteriores sobre os cinco temas contidos no último edital, sendo eles Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Resultou, assim, um material com explicação do conteúdo de todos os subtópicos, mais de 50% das questões das provas analisadas resolvidas na forma de exemplos, além de um banco de questões como um apêndice.

Palavras-chave: Matemática. Ensino Médio Integrado. Prova do IFES.

Abstract

IFES is an institution that provides quality public education. And when it comes to technical courses integrated into high school, access is through a selection test. The objective of this work is to analyze the mathematics content of these tests from 2011 to 2022, raising the most charged topics and producing preparatory material that can be used by teachers and students. The development took place through a superficial approach to the contents with a focus on solving questions from previous tests on the five themes contained in the last public notice. This resulted in interesting material with more than 50% of the questions on the analyzed tests resolved in the form of examples, in addition to a bank of questions as an appendix.

Keywords: Math. Integrated High School. IFES exam.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O Instituto Federal do Espírito Santo tem por missão “Promover educação profissional pública de excelência, integrando Ensino, Pesquisa e Extensão para a construção de uma sociedade democrática, justa e sustentável” (BRASIL, 2019c), e uma das modalidades de ensino oferecidas pela instituição é o ensino médio integrado. Para ingressar nessa modalidade, os alunos são submetidos á uma prova, com exceção dos ingressantes de 2021 e 2022, por ocasião da pandemia do COVID-19.

Sabendo da qualidade do ensino do IFES em concomitância com a possibilidade de se fazer um curso técnico junto ao ensino médio, tudo isso gratuitamente, cada vez mais tem surgido programas públicos e privados de preparação para essa prova. O próprio IFES tem prestado apoio às escolas públicas e contribuido com alguns desses projetos através de atividades de extensão.

O presente trabalho tem por objetivo fazer uma análise das provas aplicadas entre 2011 e 2022 (ingresso em 2023) e produzir um material que possa ser utilizado no ensino de matemática por professores de escolas públicas e privadas do ensino fundamental.

O trabalho inicia-se com um capítulo sobre o instituto, citando a sua coordenadoria de extensão. No caso do Campus Aracruz, o IFES possui um programa de extensão intitulado “Semeando Talentos”, que se trata de uma parceria entre a escola e o município de Ibiraçu, onde o autor desse trabalho teve a oportunidade de ministrar as aulas de matemática no ano de 2022.

O segundo capítulo traz o resultado da análise das provas, relacionando as questões com os conteúdos programáticos previstos no último edital, mostrando quais pontos são mais cobrados e quais têm uma menor incidência. Além disso, esse capítulo traz uma análise de todas as mudanças ocorridas nos editais das provas supracitadas.

Por fim, os capítulos quatro a oito, trarão a base teórica de cada uma das cinco unidades presentes no edital, sendo utilizada uma mescla de resoluções de questões com utilização de base teórica, para levar o aluno a uma forma prática e eficiente de preparação, bem como munir o docente que estiver atuando em projetos com esse fim.

2 O Instituto Federal do Espírito Santo

O Instituto Federal do Espírito Santo – IFES é o resultado da união entre o Centro Federal de Educação Tecnológica e das Escolas Agrotécnicas Federais, essa fusão se deu nos termos da Lei n.º 11.892, de 29 de dezembro de 2008 (BRASIL, 2023c).

De acordo com o site do instituto, ele oferece de cursos técnicos a doutorado, e contém mais de 36 mil alunos. Possui ao todo 100 cursos técnicos, 63 cursos de graduação e 30 cursos de pós-graduação (especialização e aperfeiçoamento), além de 11 cursos de mestrado e um curso de doutorado profissional, que é em Ensino de Ciências e Matemática (BRASIL, 2023c).

A história do instituto se iniciou no ano de 1909, com o antigo CEFETES, fundado durante o governo de Nilo Peçanha, cujo nome era Escola de Artífices do Espírito Santo. Em 2008, ano de sua criação através da fusão mencionada, o CEFETES já possuía nove campi, estes se uniram às três escolas agrotécnicas, totalizando 12 campi já no ato da criação. Além desses, havia o CEAD (Centro de Referência em Formação e Educação a Distância), que é atualmente o CEFOR.

Passando por um processo de expansão, o IFES inaugurou entre os anos 2010 e 2015, mais 9 campi, ampliando para 21 campi presenciais. Atualmente, conta com 22 em pleno funcionamento incluindo o CEFOR (Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância). Além desses, há um recém-inaugurado na cidade de Presidente Kennedy, que no momento só tem oferecido cursos de formação continuada. Existem outros dois campi que já têm a autorização de funcionamento e estão em fase de implantação, estes nas cidades de Laranja da Terra e Pedro Canário.

De modo a aumentar sua abrangência, o IFES ainda possui 49 polos de educação a distância no Espírito Santo, o Polo de Inovação e a Cidade da Inovação. Esse número expressivo de unidades, em um estado com 78 municípios, faz com que o instituto esteja com campus presencial em quase 27% das cidades e com pelo menos um polo de educação a distância em quase 63% das cidades, abrangendo todas as microrregiões do estado.

Tendo em vista o enfoque desse trabalho, segue abaixo a tabela 1, esta contém a relação dos 21 campi e os cursos técnicos integrados ao ensino médio que são oferecidos, bem como a distribuição por campus das 2890 vagas ofertadas nessa modalidade de ensino, que embora seja um quantitativo razoável, a relação de candidato por vaga média é de 4,51 de a acordo com o último certame, no qual houve 13034 candidatos inscritos.

A figura 1 contém o mapa das unidades do IFES, vale salientar que, embora já esteja sinalizada, as unidades de Pedro Canário e Laranja da Terra ainda não estão em

Tabela 1 – Relação dos campi com seus respectivos cursos e vagas

Campus	**Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio**	**Vagas**
Alegre	Agroindústria, Agropecuária e Informática	216
Aracruz	Mecânica e Química	120
Barra de São Francisco	Agricultura e Administração	80
Cachoeiro de Itapemirim	Eletromecânica e Informática	80
Cariacica	Administração, Manutenção de Sistemas Metroferroviários e Portos	192
Centro Serrano	Agricultura e Administração	120
Colatina	Administração, Edificações, Informática para Internet e Meio Ambiente	144
Guarapari	Administração, Eletrotécnica e Mecânica	104
Ibatiba	Florestas e Meio Ambiente	140
Itapina	Agropecuária, Alimentos e Zootecnia	216
Linhares	Administração, Automação Industrial e Meio Ambiente	180
Montanha	Administração e Agropecuária	140
Nova Venécia	Edificações e Mineração	108
Piúma	Aquicultura e Pesca	144
Santa Teresa	Agropecuária, Informática para Internet e Meio Ambiente	200
São Mateus	Eletrotécnica e Mecânica	96
Serra	Informática para Internet e Mecatrônica	64
Venda Nova do Imigrante	Administração e Agroindústria	188
Viana	Logística	70
Vila Velha	Biotecnologia e Química	80
Vitória	Edificações, Eletrotécnica, Estradas, Mecânica e Meio Ambiente	208
		2890

Fonte: Elaborado pelo autor com base no edital do PS 84/2022 (BRASIL, 2022b).

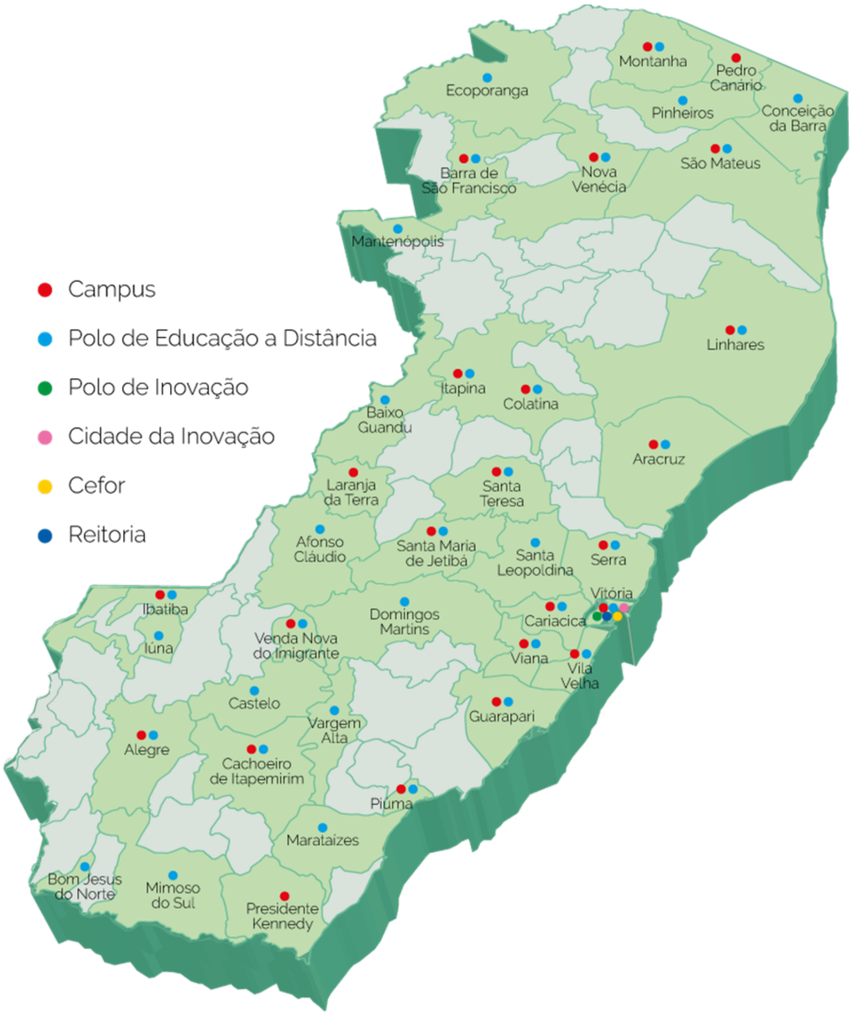
funcionamento.

2.1 Projetos de extensão do IFES

O instituto tem forte atuação nos eixos de pesquisa e extensão, tanto que cada campus possui uma Diretoria de Pesquisa, Pós-graduação e Extensão e dentro dela uma Coordenadoria Geral de Extensão, que tem por responsabilidade coordenar ações de extensão de modo a atender demandas locais e regionais e do setor produtivo.

No Campus Aracruz, essa coordenadoria tem projetos de extensão em vários eixos, e alguns projetos visam contribuir com a preparação para a própria prova de ingresso do

Figura 1 – Mapa contendo as unidades do IFES



Fonte: BRASIL (2023c)

IFES. Dois projetos com esse enfoque são o "Rumo ao Sucesso" e o "Semeando Talentos". O primeiro é uma parceria com a prefeitura local; já o segundo, já teve, além de parceria com a prefeitura de Aracruz, uma parceria com a Prefeitura Municipal de Ibiraçu, cidade vizinha.

No ano de 2022, entre os dias 24/08 e 01/11, com sede na EEEFM Nossa Senhora da Saúde, em Ibiraçu, foi oferecido aos alunos do 9º ano de duas escolas locais um curso preparatório, que teve o autor como professor de matemática. O interessante é que na aula inaugural teve a presença do diretor do campus, além de vários professores, o que gerou uma expectativa e incentivo para os alunos participantes.

Devido ao curto período, o curso teve uma carga horária de apenas 62 horas, com ministração de aulas e aplicações de simulados. O material utilizado foi uma apostila preparada pelo próprio instituto. Os professores regentes em sua maioria eram contratados pela prefeitura de Ibiraçu, entretanto algumas aulas eram conduzidas por professores do campus.

Outra ação realizada que também faz parte do projeto de extensão foi a visita dos alunos à unidade, de modo a incentivá-los ainda mais. Essa visita é parte do projeto "Ifes Portas Abertas", também gerido pela coordenadoria geral de extensão. Esse projeto de extensão chegou a atingir a marca de 1450 visitantes em 18 meses, de modo a "ampliar a percepção da comunidade em relação à possibilidade que o mercado de trabalho oferece, especialmente os cursos técnicos e de graduação" (BRASIL, 2023a).

3 A matemática do exame de seleção para entrada no IFES

A forma de entrada no Instituto Federal do Espírito Santo para os cursos técnicos integrados ao ensino médio é por meio do exame de seleção que contém 40 questões objetivas: 11 questões de Língua Portuguesa, 11 questões de Matemática, 6 questões de Ciências, 6 de História e 6 de Geografia.

Devido à pandemia da Covid-19, nos anos de 2021 e 2022, a entrada se deu por meio de análise do currículo, visto que a aplicação de provas presenciais de maneira segura era inviável.

Neste capítulo, será realizada uma análise das provas dos últimos 10 anos, compreendidas entre a prova do edital 01/2011 (prova aplicada no final de 2010 para ingresso no início de 2011), e a do edital 84/2022 (prova aplicada no final de 2022 para ingresso no início de 2023), que se dividirá em uma análise do conteúdo programático e suas alterações ao longo do ano, e uma divisão das questões contidas nas provas de acordo com esse conteúdo programático previsto no edital para ingresso em 2023.

3.1 Conteúdo Programático

Em análise a respeito dos conteúdos programáticos descritos nos editais das provas em questão, é possível observar que houveram algumas mudanças pontuais que serão comentadas na sequência desse capítulo. O primeiro edital analisado foi o de 2011, ele tinha uma divisão em 4 tópicos, sendo eles: Conjuntos; Aritmética e Álgebra; Geometria e Trigonometria; Estatística. (BRASIL, 2010b)

O conteúdo programático desse edital se manteve inalterado nos editais de 2012(BRASIL, 2011b), 2013(BRASIL, 2012b), 2014(BRASIL, 2013b) e 2015(BRASIL, 2014b). Entre 2015 e 2016(BRASIL, 2015b) o conteúdo programático teve uma mudança na sua estrutura, passando de 4 tópicos para 5 tópicos, nos editais de 2011 a 2015. No tópico 2, havia o subtópico "Funções" e o subtópico "Estudo completo das funções do 1º e 2º graus". O primeiro passou a ser o tópico v no edital seguinte; enquanto o segundo se tornou um subtópico desse novo tópico, que também recebeu "Inequações de primeiro grau" como um subtópico.

A tabela 2 mostra o conteúdo programático do edital de 2011, dividido por tópicos e subtópicos.

Tabela 2 – Conteúdo programático do exame de seleção o IFES do edital 1/2011

Tópicos	**Subtópicos**
1. Conjuntos	Noção intuitiva de conjuntos; Igualdade; Inclusão; Reunião; Intercessão; Diferença; Produto cartesiano; Representação por diagramas; Aplicações à resolução de problemas.
2. Aritmética e Álgebra	Números naturais; Números inteiros; Números racionais e reais; Fatores primos; MMC e MDC; Expressões literais e algébricas; Produtos notáveis; Equações; Problemas e inequações do 2º grau; Sistemas de equações do 2º grau; Equações e problemas do 2º grau; Equações biquadradas; Equações irracionais; Sistema métrico decimal; Razão; Proporção; Divisão em partes proporcionais; Regra de três; Porcentagem; Juros Simples; Funções; Estudo completo das funções do 1º e 2º graus; Polinômios.
3. Geometria e Trigonometria	Ângulos; Retas paralelas; Triângulos; Polígonos convexos; Principais quadriláteros convexos; Circunferência e círculo; Segmentos proporcionais; Semelhança; Relações métricas nos triângulos; Relações métricas na circunferência; Polígonos regulares; Áreas; Inscrição e circunscrição de figuras planas; Relações trigonométricas no triângulo retângulo.
4. Estatística	Cálculo da Média, Mediana e Moda de dados discretos; Construção de tabelas de frequência.

Fonte: Elaborado pelo autor com base no edital do PS 01/2011. (BRASIL, 2010b)

Além disso, a numeração dos tópicos que era decimal, passou a ser feita com algarismos romanos. Outras mudanças nessa transição foram:

No tópico “Aritmética e Álgebra”, o item Juros Simples passou a ser chamado só “Juros”; No tópico “Geometria”, os itens “Relações métricas nos triângulos” e “Áreas” passaram a ser chamados de “Relações métricas no triângulo retângulo” e “Áreas de figuras planas”, respectivamente; No tópico “Estatística”, o item “Cálculo da Média, Mediana e Moda de dados discretos” passou a ser “Cálculo da Média, Mediana, Moda e demais separatrizes”; e o item “Construção de tabelas de frequência” passou a ser “Construção de tabelas de frequência e gráficos de uma distribuição de frequência”.

A respeito das mudanças supracitadas, é importante salientar que embora a mudança de "Juros simples"para "Juros"possa deixar a dúvida se as provas passariam a contar com o conteúdo de "Juros compostos", não foi observada nenhuma questão de juros compostos nas provas a partir de 2016.

No conteúdo de geometria, as mudanças não causaram nenhuma mudança conceitual no conteúdo programático, visto que até o ano de 2015 todas as questões analisadas que envolviam áreas se tratavam de figuras planas, e as questões sobre relações métricas eram sempre associadas a triângulos retângulos. O que justifica a alteração é melhorar a precisão do conteúdo programático e evitar que o candidato estude conteúdos não cobrados.

Na parte de estatística, não foram observadas nas provas seguintes outras separatrizes, já na parte da construção de tabelas de frequências, o termo "gráfico"que é adicionado de fato passa a figurar os exames de seleção, mostrando que de fato foi uma mudança conceitual.

Entre 2016 e 2017(BRASIL, 2016b), houve outra pequena mudança no conteúdo programático. Na parte que trata de Aritmética e Álgebra (item ii), no edital de 2016 trazia o seguinte texto: “Problemas e inequações do 2º grau; Sistemas de equações do 2º grau; Equações e problemas do 2º grau”. A partir de 2017, o texto foi alterado para: “Problemas e inequações do 1º e 2º graus; Sistemas de equações do 1º e 2º graus; Equações e problemas do 1º e 2º graus”, mantendo o restante desse tópico inalterado.

No tópico iv, que trata de Estatística, passa a ter o subtópico “Gráfico de setores”, não existente no edital anterior. Já no tópico v sobre Funções, o subtópico “Inequações de primeiro grau” é substituído por “Intervalos e operações com intervalos”. Esse conteúdo programático se manteve o mesmo nos editais 01/2018 (BRASIL, 2017c), 01/2019(BRASIL, 2018b) e 01/2020(BRASIL, 2019b), entretanto passou por uma mudança para o edital 84/2022(BRASIL, 2022b).

A primeira mudança notória foi em relação aos tópicos. O tópico I passou de “Conjuntos” para “Números”; o II deixou de se chamar Aritmética e “Álgebra” e foi intitulado apenas "Álgebra”; o III passou de “Geometria e Trigonometria” para apenas “Geometria. Estatística, que era o tópico IV, passou a ser o tópico V com o nome “Probabilidade e Estatística”; e se optou para o tópico IV o conteúdo de “Grandezas e Medidas”, fazendo com que o conteúdo de “Funções” deixasse de ser um tópico específico.

Esse conteúdo programático, contido no edital 84/2022, foi o último para cursos técnicos integrados e serviu de base para análise de todas as provas de 2011 a 2022. Seu detalhamento está descrito na tabela 3. O edital 95/2023, lançado no dia 10/08/2023 para ingresso em 2024, tem exatamente o mesmo conteúdo programático e bibliografia sugerida do edital anterior (BRASIL, 2023b).

As mudanças no conteúdo programático analisadas ao longo desse capítulo mostra que a BNCC tem sido norteadora para a a definição do que será cobrado nas questões de matemática. Segundo a BNCC, "as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística)"(BRASIL, 2017a). Ou seja, a divisão do conteúdo programático do último edital leva exatamente a mesma divisão da base nacional.

Ademais, foi observado que além da mudança no conteúdo programático, foi possível observar que as questões de matemáticas passaram a ter uma maior aplicação com o cotidiano, o que também vai de encontro com a base nacional que afirma que:

A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino

Tabela 3 – Conteúdo programático do exame de seleção o IFES do edital 84/2022

Tópicos	**Subtópicos**
i. Números	Conjuntos - resolução de problemas que envolvem operações com conjuntos (união, interseção, diferença e conjunto complementar); Conjuntos numéricos; Sistema de numeração decimal; Operações com números naturais; Números primos e compostos; Múltiplos e divisores; Notação científica; Potenciação e radiciação; Razão, proporção e regra de três simples e composta; Porcentagem, acréscimos sucessivos e descontos sucessivos; Problemas de juros simples e juros compostos.
ii. Álgebra	Expressões algébricas; Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; Equações polinomiais do 1º grau; Equações do 2º grau completas e incompletas; Sistema de equações do 1º grau e do 2º grau; Fatoração e produtos notáveis; Noção de função; Sequências numéricas recursivas e não recursivas.
iii. Geometria	Plano cartesiano; Classificação de polígonos; Classificação de triângulos quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos; Cevianas e pontos notáveis de um triângulo; Planificação de prismas e pirâmides; Retas - posições relativas entre retas; Feixe de retas paralelas; Retas paralelas intersectadas por uma transversal; Semelhança e congruência de figuras; Polígonos regulares; Círculo e circunferência - área, arcos e ângulos; Inscrição e circunscrição de polígonos; Relações métricas no triângulo retângulo; Relações trigonométricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras.
iv. Grandezas e Medidas	Problemas envolvendo grandezas de comprimento, massa, tempo, área, capacidade e volume; Medida de um ângulo; Cálculo de perímetro; Comprimento da circunferência; Cálculo de áreas; Medidas de capacidade; Transformação de unidades - sistema métrico decimal.
v. Probabilidade e Estatística	Leitura e interpretação de gráficos, tabelas, infogramas e fluxogramas; Medidas de tendência central: média, moda e mediana; Princípio aditivo e multiplicativo da contagem; Análise de eventos aleatórios dependentes e independentes.

Fonte: Elaborado pelo autor com base no edital do PS 84/2022. (BRASIL, 2022b)

Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2017a)

Com isso, conclui-se que o conteúdo programático tem buscado estar em consonância com a BNCC, de modo a proporcionar que o candidato seja avaliado nas habilidades que já são normalmente desenvolvidas no ensino fundamental, e de uma maneira recíproca, a preparação para o exame de seleção através dos conteúdos contidos nos editais de ingresso podem contribuir para o desenvolvimento das habilidades essenciais que o aluno precisa consolidar.

3.2 Questões de matemática do exame de seleção

Foi realizada uma análise de cada questão das provas supracitadas a fim de comparar com o conteúdo do último edital. O resultado da análise, na forma de tabelas e separadas por tópicos, está descrita abaixo.

3.2.1 Números

De acordo com o conteúdo programático de todos os editais analisados, esse tópico era denominado "Conjuntos"até o edital anterior. Entretanto, no último edital, ela passou a se chamar “Números” e, além da parte de conjuntos, foram incluídos alguns conteúdos sobre operações básicas da matemática, desde as operações com números naturais até a parte de juros simples e compostos.

A relação entre os subtópicos e as questões contidas em cada prova estão listadas na tabela 4, de modo que na primeira coluna é possível ver cada subtópico e na segunda coluna o número das questões e à frente, entre parênteses, o edital da prova em que ela caiu.

Tabela 4 – Relação entre os subtópicos e as questões sobre “Números” contida em cada prova

Subtópicos	**Numeração das questões (edital)**
Conjuntos - resolução de problemas que envolvem operações com conjuntos;	16,17, 18 e 19 (01/2011); 29 (01/2012); 29 (01/2014); 24 (01/2015); 25 (01/2016).
Conjuntos numéricos;	30 (04/2017); 22 (01/2018); 20 (01/2019).
Sistema de numeração decimal;	Nenhuma questão
Operações com números naturais;	19 e 23 (01/2015); 17 (04/2017); 26 (01/2020); 18 e 21 (84/2022).
Números primos e compostos;	23 (01/2018);
Múltiplos e divisores;	26 (01/2013); 22 (01/2014); 25 (01/2015); 17, 28 (04/2017); 23 (01/2018); 13, 21 (84/2022).
Notação científica;	Nenhuma questão
Potenciação e radiciação;	24(01/2011); 16 e 23 (01/2014); 16, 23 e 30 (04/2017).
Razão, proporção e regra de três simples e composta;	22 e 24 (01/2012); 25 (01/2013); 27 (01/2015); 19 (04/2017); 25 (01/2018); 19 e 29 (01/2019); 24 (01/2020).
Porcentagem, acréscimos sucessivos e descontos sucessivos;	23 (01/2011); 20 e 21 (01/2013); 16 (01/2016); 20 (01/2018); 17 (84/2022); 26 e 27 (01/2019); 29 (01/2020).
Prob. de juros simples e compostos	28 (01/2015); 27 (04/2017).

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos editais anteriores que tinham apenas a parte de "Conjuntos"no primeiro tópico, a quantidade de questões era bem pequena. Agora com a inclusão de mais conteúdo, a incidência dessas questões aumentou um pouco e chegou a um total de 32,08% das questões analisadas.

Algo importante a analisar é que, embora apareça no edital, os conteúdos previstos nos subtópicos “Sistema de Numeração Decimal” e “Notação Científica não foram encontrados nas questões de matemática em nenhuma das onze provas analisadas.

Já a tabela 5 relaciona o percentual de questões sobre o tópico em relação a todas as questões de matemática contidas em cada prova. É importante salientar que as porcentagens não são limitadas a 100% devido a existência de questões interdisciplinares que são contabilizadas repetidamente em cada conteúdo que ela contém.

Tabela 5 – Quantidades de questões do tópico “Números” e seus respectivos percentuais

Edital	**Questões do tópico contidas na prova**	**Percentual em relação às questões de matemática**
2022/84	5	45,45%
2020/01	4	26,67%
2019/01	5	33,33%
2018/01	4	26,67%
2017/01	7	46,67%
2016/01	3	20,00%
2015/01	6	40,00%
2014/01	4	26,67%
2013/01	4	30,77%
2012/01	3	20,00%
2011/01	6	40,00%
Total	**51**	**32,08%**

Fonte: Produção do próprio autor.

Portanto, pode-se ver que esse tópico sempre foi cobrado em pelo menos três questões de cada prova. Além disso, é importante notar que na última prova houve cinco das onze questões de matemática com esse conteúdo, enfatizando a importância de se estudar esse tópico visando não só a preparação para o exame de seleção do IFES, mas também a aplicação que muitos desses conceitos tem no cotidiano.

3.2.2 Álgebra

A cerca do conteúdo de Álgebra, ele tinha até a penúltima prova uma incidência bem maior nos exames de seleção, chegando a compor mais de 70% das questões em alguns casos, mesmo já analisando as provas anteriores de acordo com o edital atual. A relação das questões que contém cada um dos conteúdos do tópico em questão está listada na tabela 6.

Tabela 6 – Relação entre os subtópicos e as questões sobre "Álgebra" contida em cada prova

Subtópicos	**Numeração das questões - edital**
Expressões algébricas;	22 (01/2011); 20, 26 e 28 (01/2012); 28 (01/2014); 19 (04/2017); 28 (01/2018); 28 (01/2019).
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais;	21 (01/2011); 17 (01/2016); 21 (01/2019).
Equações polinomiais do 1º grau;	25 (01/2011); 16 e 29 (01/2013); 26 e 30 (01/2014); 17 e 18 (01/2015); 16 (01/2016); 26 (04/2017); 25 (01/2018); 23 (01/2020).
Equações do 2º grau completas e incompletas;	26 e 30 (01/2012); 17 (01/2013); 19 (01/2014); 19 (01/2016); 25, 26 e 29 (04/2017); 18 e 27 (01/2018); 18 (01/2019); 19 e 30 (01/2020); 22 (84/2022).
Sistema de equações do 1º grau e do 2º grau;	28 (01/2012); 30 (01/2015); 22 e 23 (01/2016); 18 (04/2017); 23, 24, 25 e 26 (01/2019); 27 (01/2020); 15 (84/2022).
Fatoração e produtos notáveis;	22 (01/2011); 18 (01/2013); 26 (01/2015); 21 (01/2016); 30 (04/2017); 17 (01/2019); 27 (01/2020).
Noção de função;	16 e 27 (01/2012); 21 (01/2014); 29 (01/2015); 18, 19 e 20 (01/2016); 18 e 20 (04/2017); 17 e 26 (01/2018); 19, 25 e 30 (01/2020); 22 (84/2022).
Sequências numéricas recursivas e não recursivas.	21 (01/2018).

Fonte: Elaborado pelo autor

Em análise geral das provas, principalmente nas questões que envolvem "álgebra", dois pontos foram observados: o primeiro é que são raras as questões que não estão inseridas em um problema, e o segundo é a alta frequência de questões que envolvem mais de um conteúdo, deixando alguns conceitos mais básicos implícitos em problemas que também envolvem conceitos um pouco mais complexos. Com isso em muitas questões que tinham outros conteúdos como principais, era necessário usar álgebra para finalizar a resolução. Contudo, essa tendência não foi tão vista na última prova aplicada.

A tabela 7 mostra o percentual das questões de Álgebra no exame de seleção.

Tabela 7 – Quantidades de questões do tópico "Álgebra" e seus respectivos percentuais

Edital	**Questões do tópico contidas na prova**	**Percentual em relação às questões de matemática**
2022/84	2	18,18%
2020/01	5	33,33%
2019/01	8	53,33%
2018/01	7	46,67%
2017/01	7	46,67%
2016/01	8	53,33%
2015/01	5	33,33%
2014/01	5	33,33%
2013/01	4	30,77%
2012/01	6	40,00%
2011/01	3	20,00%
Total	**60**	**37,73%**

Fonte: Produção do próprio autor.

3.2.3 Geometria

O conteúdo de Geometria tem uma participação semelhante à do conteúdo de Álgebra. Um ponto interessante é que a maioria das questões sobre esse tópico acabam por envolver mais de um subtópico, podendo também, em algumas ocasiões, apresentar associação com algum conceito de álgebra. E com uma tendência parecida, tal conteúdo teve sua menor incidência no último edital dentre todos os analisados.

Na tabela 8 temos o detalhamento das questões que envolvem o tema.

Uma observação importante é a uniformidade que os exames entre 2011 e 2020 apresentaram em relação a esse conteúdo, sempre com uma incidência entre 23,08% e 40%. No ano de 2020 por exemplo, é possível ver uma prova com mais questões de Geometria (6) e menos que envolvem Álgebra (5), quebrando uma tendência dos anos anteriores. Porém, no último edital, apenas uma questão do tópico de geometria foi cobrada.

As mudanças ocorridas na BNCC e já citadas nesse trabalho, que propõe as questões de matemática de uma forma mais contextualizada, faz com que a parte de Geometria, juntamente com Grandezas e Medidas, acabem tendo uma incidência maior. Em contrapartida, é possível que seja notada uma redução nas questões de aritmética e álgebra.

A tabela 9 traz o percentual das questões de Geometria no exame de seleção.

3.2.4 Grandezas e Medidas

Esse tópico surgido no último edital já podia ser visto diluído ao longo de outros tópicos nos editais anteriores, tanto que a análise de todas as provas pôde ser feita baseada

Tabela 8 – Relação entre os subtópicos e as questões sobre "Geometria" contida em cada prova

Subtópicos	**Numeração das questões - edital**
Plano cartesiano;	26 (01/2018).
Classificação de polígonos;	Nenhuma questão
Classificação de triângulos quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos;	24 (01/2018).
Cevianas e pontos notáveis de um triângulo;	20 (84/2022).
Planificação de prismas e pirâmides;	Nenhuma questão
Retas - posições relativas entre retas;	21 (01/2014).
Feixe de retas paralelas;	23 (01/2013).
Retas paralelas intersectadas por uma transversal;	30 (01/2011)
Semelhança e congruência de figuras;	19 (01/2012); 23 (01/2013); 20 (01/2014); 21 (01/2015); 25 (04/2017); 22 e 29 (01/2019); 24 (01/2020).
Polígonos regulares;	27 (01/2013); 23 (04/2017); 17 (01/2020).
Círculo e circunferência - área, arcos e ângulos;	26 (01/2011); 23 (01/2012); 18 e 25 (01/2014); 20 (01/2015); 26, 29 e 30 (01/2016); 24 (04/2017); 16 e 29 (01/2018); 30 (01/2019); 20, 21 e 22 (01/2020).
Inscrição e circunscrição de polígonos;	29 (01/2011); 27 (01/2018); 18 (01/2020).
Relações métricas no triângulo retângulo;	25 (01/2012); 22 (01/2013); 22 e 24 (04/2017).
Relações trigonométricas no triângulo retângulo;	27 e 28 (01/2011); 21 (01/2012); 27 (01/2014); 22 (01/2015); 28 (01/2016); 24 (04/2017); 30 (01/2018); 30 (01/2019); 21 (01/2020).
Teorema de Pitágoras.	27 (01/2013); 22 (01/2015); 26 (01/2016); 22 e 23 (04/2017); 26, 27 e 30 (01/2018); 16, 22, 28 e 30 (01/2019).

Fonte: Elaborado pelo autor

no edital atual. Seu conteúdo tem uma incidência média de 20,75%, o que seria baixa, mas na última prova esse percentual foi para 36,36%, com quatro dentre as onze questões. Na tabela 10 encontra-se o detalhamento das questões de Estatística dos exames de seleção.

A última prova e as novas tendências da educação mostram que esse tópico tem tudo para ser cada vez mais cobrado, visto que tem uma forte ligação com problemas do cotidiano. Na tabela 11, está descrita a quantidade de questões por exame, bem como seu percentual.

Tabela 9 – Quantidades de questões do tópico "Geometria" e seus respectivos percentuais

Edital	**Questões do tópico contidas na prova**	**Percentual em relação às questões de matemática**
2022/84	1	9,09%
2020/01	6	40,00%
2019/01	5	33,33%
2018/01	6	40,00%
2017/01	4	26,67%
2016/01	4	26,67%
2015/01	3	20,00%
2014/01	5	33,33%
2013/01	3	23,08%
2012/01	4	26,67%
2011/01	5	33,33%
Total	**46**	**28,93%**

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 10 – Relação entre os subtópicos e as questões sobre "Grandezas e Medidas" contida em cada prova

Subtópicos	**Numeração das questões - edital**
Problemas envolvendo grandezas de comprimento, massa, tempo, área, capacidade e volume;	24 (01/2013); 18 (01/2014); 17 (01/2015); 29 (04/2017); 17 (01/2020).
Medida de um ângulo;	16 e 18 (01/2020).
Cálculo de perímetro;	30 (01/2012); 30 (01/2014); 21 (01/2015); 23 e 30 (01/2016); 23 (04/2017); 21 (84/2022).
Comprimento da circunferência;	22 (01/2020);
Cálculo de áreas;	26 (01/2011); 18 e 30 (01/2012); 18 e 20 (01/2013); 20 (01/2014); 16 (01/2015); 23, 24 e 27 (01/2016); 24 (04/2017); 24 (01/2018); 16, 21 e 30 (01/2019); 17 e 19 (01/2020); 14 (84/2022).
Medidas de capacidade;	16 (84/2022).
Transformação de unidades - sistema métrico decimal	22 (04/2017); 12 (84/2022).

Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.5 Probabilidade e Estatística

Esse tópico é o menos incidente nas provas, sendo cobrado na maioria das vezes em apenas uma questão da prova. Apenas quatro das onze provas tiveram mais de uma questão.

Tabela 11 – Quantidades de questões do tópico “Grandezas e Medidas” e seus respectivos percentuais

Edital	**Questões do tópico contidas na prova**	**Percentual em relação às questões de matemática**
2022/84	4	36,36%
2020/01	5	33,33%
2019/01	3	20,00%
2018/01	1	6,67%
2017/01	4	26,67%
2016/01	4	26,67%
2015/01	3	20,00%
2014/01	3	20,00%
2013/01	3	20,00%
2012/01	2	13,33%
2011/01	1	6,67%
Total	**33**	**20,75%**

Fonte: Produção do próprio autor.

Na última prova, mesmo com uma quantidade menor de questões, duas questões sobre o tópico foram cobradas, uma envolvendo o primeiro e outra o segundo subtópico.

A tabela 12 mostra as questões dos exames que contêm o conteúdo de Probabilidade e Estatística.

Tabela 12 – Relação entre os subtópicos e as questões sobre “Probabilidade e Estatística” contida em cada prova

Subtópicos	**Numeração das questões - edital**
Leitura e interpretação de gráficos, tabelas, infogramas e fluxogramas;	20 (01/2011); 24 (01/2014); 19 (01/2015); 16 (01/2016); 21 (04/2017); 29 (01/2018); 27 (01/2019); 28 (01/2020); 19 (84/2022).
Medidas de tendência central: média, moda e mediana;	16 e 17 (01/2011); 17 (01/2012); 19 (01/2013); 17 (01/2014); 21 (04/2017); 27 (01/2019); 18 (84/2022);
Princípio aditivo e multiplicativo da contagem;	19 (01/2018).
Análise de eventos aleatórios dependentes e independentes.	20 (01/2018).

Fonte: Elaborado pelo autor

Igual ocorreu na última prova ao aparecer uma questão de cada, os dois primeiros subtópicos são os grandes responsáveis para que esse tópico esteja ao menos presente em todas as provas.

A tabela 13 contém a quantidade de questões sobre Probabilidade e Estatística por exame, bem como seu percentual.

Tabela 13 – Quantidades de questões do tópico "Grandezas e Medidas" e seus respectivos percentuais

Edital	**Questões do tópico contidas na prova**	**Percentual em relação às questões de matemática**
2022/84	2	18,18%
2020/01	1	6,67%
2019/01	1	6,67%
2018/01	3	20,00%
2017/01	1	6,67%
2016/01	1	6,67%
2015/01	1	6,67%
2014/01	2	13,33%
2013/01	1	7,69%
2012/01	1	6,67%
2011/01	3	20,00%
Total	**17**	**10,69%**

Fonte: Produção do próprio autor.

4 Números no exame de seleção

Neste capítulo, será abordado, com base no que foi desenvolvido no capítulo anterior, o conteúdo de Números contido nos exames de seleção do IFES. Essa análise se dará através da resolução de questões como forma de exemplos e dos conceitos em si que envolvem o tema, baseando sempre no conteúdo programático e dando uma ênfase similar à que é dada nas provas.

4.1 Conjuntos – resolução de problemas que envolvem operação com conjuntos (união, interseção, diferença e conjunto complementar)

As noções mais básicas sobre esse assunto se referem aos conceitos que envolvem os conjuntos e sua respectiva simbologia, além dos conjuntos numéricos mais estudados ao longo do ensino fundamental.

Quanto a simbologia, os conjuntos são representados pelas letras maiúsculas enquanto os elementos são representados pelas letras minúsculas, conforme exemplo abaixo.

$$A = \{a, b, c, d\} \ e \ B = \{e, f, g, h\}$$

Onde A e B são conjuntos e a, b, c, d, e, f, g e h são elementos. Além disso, existem vários símbolos que são utilizados na relação entre conjuntos. A tabela 14 traz alguns desses símbolos e seus respectivos significados

Tabela 14 – Alguns símbolos usados em conjuntos

Símbolo	**Significado**
$\cup$	união
$\cap$	intersecção
$\supset$	contém
$\not\supset$	não contém
$\subset$	está contido
$\not\subset$	não está contido
$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\exists$	existe
$\nexists$	não existe
$*$	ausência de zero

Fonte: Elaborado pelo autor.

A união, também conhecida em algumas literaturas como reunião, é representada pelo símbolo ∪ e representa um terceiro conjunto que tenha todos os elementos contidos em outros dois conjuntos. Ou seja, se temos o conjunto A e o conjunto B, o conjunto $A \cup B$ será tal que todos os elementos de A e todos os elementos de B pertençam a esse conjunto, sem a adição de qualquer outro elemento que não pertença a A ou a B.

A interseção entre dois conjuntos é um conjunto que tenha apenas os elementos que pertençam aos dois conjuntos ao mesmo tempo, a interseção entre os conjuntos A e B é representada por $A \cap B$.

Já a diferença entre dois conjuntos é o conjunto que contém os elementos do primeiro conjunto retirando os elementos que estão também no segundo conjunto. A representação, por exemplo, da diferença entre os conjuntos A e B é $A - B$.

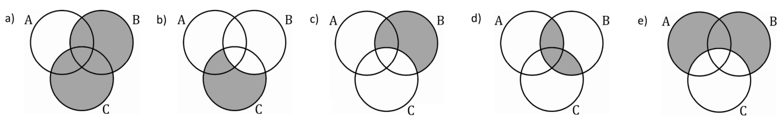
O conjunto complementar é o conjunto que contém todos os elementos que não estão no conjunto em questão. Tendo, por exemplo, um conjunto A e o conjunto universo U, o conjunto complementar de A, representado por A^C, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em U mas não estão em A, que também poderia ser visto como $U - A$.

Segue abaixo resolução de duas questões sobre o assunto.

Exemplo 4.1.1. *Questão 24 da prova 01/2015. (BRASIL, 2014a)*

O conjunto $(A \cup B) \cap (B - C)$ é melhor representado por:
Alternativas: Contidas na figura 2

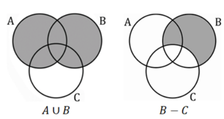
Figura 2 – Alternativas da questão 24 da prova 01/2015



Fonte: BRASIL (2014a)

Solução: Para dar início é necessário resolver separadamente A∪B e B−C, que tem os diagramas conforme figura 3:

Figura 3 – Representação dos conjuntos A∪B e B−C



Fonte: Elaborado pelo autor

À esquerda, o diagrama mostra os conjuntos A e B pintados, que representa a união entre os dois; já na direita, tem-se o conjunto B pintado sem a parte que é comum com C, o que é o conceito de diferença entre dois conjuntos.
O conjunto $(A \cup B) \cap (B - C)$, que é a interseção entre os dois acima, vai ser o próprio conjunto $B - C$, visto que ele está contido em $A \cup B$ e por isso é a interseção entre os dois. Alternativa C

Exemplo 4.1.2. *Questão 25 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

Numa turma de 42 estudantes 25 são rapazes, 21 estudantes não usam óculos e 15 rapazes usam óculos. O número de moças que usa óculos é igual a:
Alternativas: a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9
Solução: Nessa questão temos uma situação que pode ser vista como conjuntos complementares, em que o conjunto universo tem 42 elementos; o conjunto dos rapazes é complementar ao conjunto das moças e o conjunto dos que usam óculos é complementar ao conjunto dos que não usam.
Logo, se o conjunto dos que não usam óculos tem 21 elementos, então o conjunto dos que usam tem $42 - 21 = 21$ elementos.
Portanto, se 15 rapazes usam óculos, e 21 pessoas no total usam óculos, logo a quantidade de moças que usa óculos é $21 - 15 = 6$. Alternativa B

4.2 Conjuntos numéricos

Nesse subtópico será abordado os conjuntos numéricos estudados ao longo do ensino fundamental: Números naturais, Números inteiros, Números racionais, Números irracionais e Números reais.

O primeiro é o conjunto dos números naturais, que é representado por $\mathbb{N}$ e se trata dos números que utilizamos para contar, sua sequência é obtida iniciando pelo zero e acrescentando sempre uma unidade.

$$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots$$

Alguns autores consideram que o zero não faz parte do conjunto dos números naturais, entretanto Lima (1982) afirma que “Incluir ou não o número 0 no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é uma questão de preferência pessoal” e Júnior e Castrucci (2018a), material indicado pelo próprio edital, utiliza o zero como um número natural e intitula como o conjunto dos naturais não nulos o conjunto N quando excluído o zero, passando a ter a representação $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots\}$$

O conjunto dos números inteiros, representado por $\mathbb{Z}$, é o conjunto formado pelos números inteiros positivos, pelos números inteiros negativos e pelo zero. E por isso, ele contém o conjunto dos números naturais.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ldots\}$$

Já o conjunto dos números racionais, representado por Q, é um conjunto tal que o seu elemento é uma razão entre dois números inteiros, ou seja, cada elemento pode ser escrito na forma de uma fração. Uma forma de representá-lo é:

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \ \in \mathbb{Z}, b \ \in \mathbb{Z}\}$$

Os conjuntos dos números irracionais é o complementar do conjunto dos números racionais quando se tem o conjunto nos números reais como universo. E o conjunto dos números reais é a união de todos os citados anteriormente. Ou basicamente a união dos racionais com os irracionais, visto que são complementares. As representações para o conjunto dos números irracionais e o conjunto dos números reais podem ser escritas como:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} \ ou \ \mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$$

Segue resolução de uma questão sobre o tema de modo a entender um pouco mais sobre as operações entre elementos desses conjuntos.

Exemplo 4.2.1. *Questão 20 da prova 01/2019. (BRASIL, 2018a)*

A seguir, tem-se cinco afirmações sobre conjuntos numéricos:
I A subtração de um número natural por outro número natural é sempre um número natural.
II A soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
III A divisão de um número racional por outro número racional não nulo é sempre um número racional.
IV A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
V A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.

Analisando as sentenças acima, o número de afirmações VERDADEIRAS é:
Alternativas: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
Solução: Analisando as afirmações uma a uma buscando um contraexemplo para justificar as falsas temos:
Afirmação I: Pegando o natural 1 e subtraindo pelo natural 5 temos como resultado o –4, que não é um número natural, logo é FALSA!
Afirmação II: A soma de dois inteiros, independente de ser positivo ou negativo, só pode resultar em um inteiro negativo, um inteiro positivo ou em zero, logo a afirmativa é VERDADEIRA!

Afirmação III: Tendo os números racionais a/b e c/d, com a $\in \mathbb{Z}$, b $\in \mathbb{Z}$, c $\in \mathbb{Z}$ e d $\in \mathbb{Z}$, a divisão de a/b por c/d será:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Como a e d são inteiros, logo a $\times$ d também será inteiro, e a mesma coisa com b e c, que resulta em b $\times$ c, inteiro, portando a divisão de a/b por c/d será uma fração entre dois números inteiros e, portanto, um número racional. VERDADEIRA!
Afirmação IV: Pegando o número irracional 1+$\sqrt{2}$ e somando com o também irracional 1-$\sqrt{2}$ teremos como resultado 2, que não é irracional, logo é FALSA!
Afirmação V: Dado os números a/b com a $\in \mathbb{Z}$ e b $\in \mathbb{Z}$ e o número c $\in \mathbb{I}$, a soma deles será:

$$\frac{a}{b} + c = \frac{a + b \times c}{b}$$

Para a soma ser racional, tanto o denominador quanto o numerador precisa ser inteiro, e o numerador é a soma de um inteiro com um produto de um inteiro por um irracional, que vai resultar em um número também irracional, logo a soma entre um racional e um irracional sempre será um irracional. VERDADEIRA!
Portanto a resposta é 3. Alternativa C

4.3 Sistema de numeração decimal

Também chamado de Sistema de Numeração Indo-arábico, o sistema de numeração decimal foi o que prevaleceu dentre vários sistemas criados por diversas civilizações, suas características que facilitam o registro dos números e a realização dos cálculos colaboraram para sua prevalecência (SOUZA, 2018a).

Esse sistema conta com dez algarismos, de 0 a 9, e cada um desses algarismos correspondem a uma ordem, e a cada três ordens se tem uma classe, sempre considerando da direita para a esquerda. A figura 4 traz um quadro as três primeiras classes do sistema de numeração decimal e suas respectivas ordens.

Figura 4 – Quadro com as três primeiras classes do Sistema de Numeração Decimal

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas simples	Dezenas simples	Unidades simples

Fonte: Adaptado de Souza (2018a)

Observa-se que cada classe tem a ordem das unidades, das dezenas e das centenas. A separação dos algarismos contidos em cada classe se dá por meio de um espaço, podendo ser também um ponto. O número mil, duzentos e cinquenta e seis, por exemplo, pode ser escrito da forma 1 256 ou 1.256. Outras classes além das supracitadas no quadro são:

- Classe dos bilhões - 10ª, 11ª e 12ª ordem
- Classe dos triilhões - 13ª, 14ª e 15ª ordem
- Classe dos quatrilhões - 16ª, 17ª e 18ª ordem
- Classe dos quintilhões - 19ª, 20ª e 21ª ordem
- Classe dos sextilhões - 22ª, 23ª e 24ª ordem
- Classe dos sextilhões - 22ª, 23ª e 24ª ordem
- Classe dos sextilhões - 22ª, 23ª e 24ª ordem
- Classe dos septilhões - 25ª, 26ª e 27ª ordem
- Classe dos octilhões - 28ª, 29ª e 30ª ordem
- Classe dos nonilhões - 31ª, 32ª e 33ª ordem
- Classe dos decilhões - 34ª, 35ª e 36ª ordem

Segue abaixo alguns exemplos de números

- 237 838 (duzentos e trinta e sete mil, oitocentos e trinta e oito)
- 24 471 003 (vinte e quatro milhões e quatrocentos e setenta e um mil e três)
- 2 567 000 902 (dois bilhões e quinhentos e sessenta e sete milhões e novecentos e dois)

A seguir uma questão do ENEM 2022 sobre o tema.

Exemplo 4.3.1. *Questão 138 do caderno cinza do ENEM 2022.*

Ao escutar a notícia de que um filme recém-lançado arrecadou, no primeiro mês de lançamento, R$ 1,35 bilhão em bilheteria, um estudante escreveu corretamente o número que representa essa quantia, com todos os seus algarismos. O número escrito pelo estudante foi:
Alternativas: a) 135 000,00. b) 1 350 000,00. c) 13 500 000,00. d) 135 000 000,00. e) 1 350 000 000,00.

Solução: O único algarismo antes da vírgula é o 1, logo, só ele pertence à classe dos bilhões. Sendo assim, esse número é 1 bilhão e 350 milhões, que é escrito na forma $1350000000,00$.
Alternativa E

4.4 Operações com números naturais

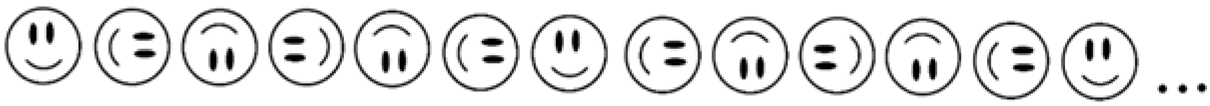
As operações com números naturais contidas nas questões das provas analisadas são: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. A maioria das questões que envolvem tais operações geralmente tem como base o conceito de outro tópico e fazem uso delas para finalizar a resolução.

Tendo em vista que tais operações já são trabalhadas a todo tempo no ensino fundamental, elas serão tratadas diretamente na resolução de duas questões.

Exemplo 4.4.1. *Questão 26 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

Caio desenhou no seu caderno uma sequência de "emojis" seguindo o padrão (ver figura 5)

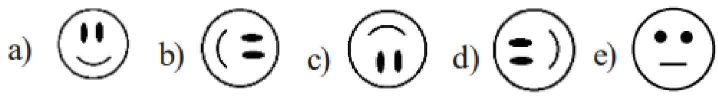
Figura 5 – Imagem contina na questão 26 da prova 01/2020



Fonte: BRASIL (2019a)

Qual foi o 500º "emoji" desenhado nesta sequência?
Alternativas: Contidas na figura 6

Figura 6 – Alternativas da questão 26 da prova 01/2020



Fonte: BRASIL (2019a)

Solução: Analisando a sequência de "emojis", é possível perceber que ela se repete a cada 6 desenhos, logo, fazendo a divisão de 500 por 6 de modo a saber qual é o resto, temos:

$$500 = 83 \times 6 + 2$$

Sabendo que o resto da divisão de 500 por 6 é dois, logo o 8º "emoji", que também deixa resto 2 quando dividido por 6, será o 500° emoji, sendo correta a Alternativa B.

Exemplo 4.4.2. *Questão 18 da prova 84/2022. (BRASIL, 2022a)*

O Sr. Paulo irá dividir a sua coleção de 4.200 moedas entre os seus três filhos, de tal forma que as quantidades entregues a cada filho sejam diretamente proporcionais às médias aritméticas das notas das provas deles na disciplina de Matemática, no ano de 2022. A tabela a seguir mostra as notas dos filhos até agora em Matemática.

Figura 7 – Imagem contina na questão 18 da prova 84/2022

Filho	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova
João	8	4	9
Marcelo	7	5	6
Vitor	6	8	10

Fonte: BRASIL (2022a)

Qual a quantidade de moedas cabe a cada um deles?
Alternativas:
a) João = 1.400, Marcelo = 1.200 e Vitor = 1.600.
b) João = 1.300, Marcelo = 1.100 e Vitor = 1.800.
c) João = 1.450, Marcelo = 1.200 e Vitor = 1.550.
d) João = 1.350, Marcelo = 1.250 e Vitor = 1.600.
e) João = 1.380, Marcelo = 1.240 e Vitor = 1.580.
Solução: Calculando a média aritmética das notas de João, Marcelo e Vitor obtém-se:

$$\begin{aligned} Média\ de\ João &= \frac{8+4+9}{3} = \frac{21}{3} = 7 \\ Média\ de\ Marcelo &= \frac{7+5+6}{3} = \frac{18}{3} = 6 \\ Média\ de\ Vítor &= \frac{6+8+10}{3} = \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

Somando as três médias chega-se ao valor de 7+6+8=21, sendo assim, pode-se considerar que o Sr. Paulo terá que dividir suas moedas em 21 partes e cada filho terá direito a quantidade de partes de acordo com sua média.
4.200 moedas $\div$ 21 partes = 200 moedas
Sendo assim, João receberá 200 moedas $\times$ 7 partes = 1.400 moedas, Marcelo terá direito a 200 moedas $\times$ 6 partes = 1.200 moedas e Vitor fará jus a 200 moedas $\times$ 8 partes = 1.600 moedas. Alternativa A

4.5 Números primos e compostos

4.5.1 Conceito

De acordo com Ávila (1991), um número primo é todo número, maior do que 1, que é divisível somente por si mesmo e pela unidade. Ou seja, um número primo apenas é divisível por 1 e por ele mesmo.

São exemplos de números primos o 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 17, pois cada um deles tem como divisores apenas o número um, além deles mesmos.

Sobre os números compostos, são números naturais maiores que 3 que possuem mais de dois divisores, pois além do 1 e dele mesmo, um número composto terá pelo menos mais um divisor.

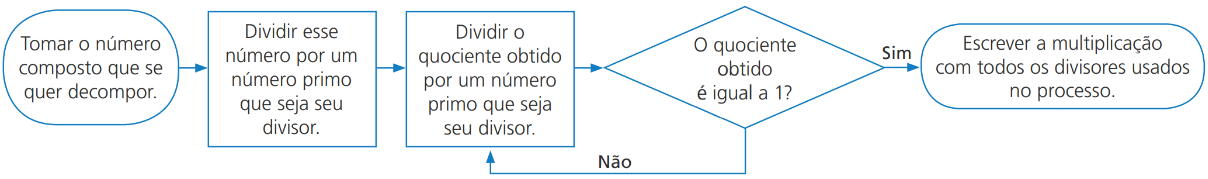
Por exemplo, 4, 6, 8, 9, 10, 12 e 14 são números que possuem mais de dois divisores, e com isso são considerados compostos. O número 1 não é considerado nem primo nem composto.

4.5.2 Decomposição em fatores primos

Todo número composto pode ser escrito como um produto de números primos. Esse processo, chamado de decomposição em fatores primos, é muito útil na determinação de seus divisores bem como resolver diversos tipos de problemas. Ele se dá através da divisão do número por primos, geralmente começando do menor.

Segundo Júnior e Castrucci (2018b), "a decomposição em fatores primos de um número natural composto nos fornece a forma fatorada completa desse número. Essa técnica consiste em (ver figura 8

Figura 8 – Decomposição do número 60 em fatores primos



Fonte: Júnior e Castrucci (2018b)

O processo da decomposição do número 60 em fatores primos se inicia dividindo 60 por 2, obtendo 30, que também é divisível por 2 e com a divisão chegamos ao número 15, esse por sua vez não é divisível por 2 mas é por 3, e o quociente da divisão é 5, que é divisível pelo próprio 5, chegando ao resultado 1, com isso o número 60 pode ser escrito como: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. A figura 9 mostra o processo da fatoração do número 60.

Figura 9 – Decomposição do número 60 em fatores primos

60	**2**	
30	**2**	$\mathbf{60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5}$
15	**3**	$\mathbf{60 = 2^2 \times 3 \times 5}$
5	**5**	
1		

Fonte: Produzida pelo autor

Segue abaixo uma questão resolvida sobre o tema:

Exemplo 4.5.1. *Questão 23 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

Considere os números $m = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 6$ e $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^4$ e as seguintes afirmações:
I – se um número inteiro divide 144 então divide m e n.
II – o máximo divisor comum entre m e n é 288.
III – o mínimo múltiplo comum entre m e n é $2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5^4$.
IV – o número n é maior do que o número m.
V – o resto da divisão de m por n é zero.
Destas, podemos afirmar que:
Alternativas
a) todas as afirmações são verdadeiras.
b) apenas as afirmações I, III e IV são verdadeiras.
c) apenas a afirmação III é falsa.
d) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
e) apenas as afirmações I, II e III são verdadeiras.

Solução: Antes de dar início à análise das alternativas, é necessário escrever os números m e n como fatores de números primos, ficando da seguinte forma:

$$m = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 6 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 2 \cdot 3 = 2^8 \cdot 3^6$$

$$n = 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^4 = 2 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2 \cdot 5^4 = 2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$$

Analisando a primeira alternativa a partir da fatoração o número 144, obtém se: $144 = 2^4 \cdot 3^2$
Como os expoentes de 144 são menores que os expoentes de m e n, logo é possível afirmar que se um número divide 144, ele também divide m e n. Alternativa I correta
Para determinar o m.d.c. entre dois números basta pegar o maior fator comum entre eles, lodo temos: $m.d.c.(m, n) = 2^5 \cdot 3^2 = 32 \cdot 9 = 288$ Alternativa II correta
O m.m.c. entre os números será o maior expoente em cada um dos fatores, logo: $m.d.c.(m, n) = 2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^4$ Alternativa III incorreta
Para testar se o número n é maior que o m basta fazer a divisão entre eles, obtendo:

$$\frac{m}{n} = \frac{2^8 \cdot 3^6}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4} = \frac{2^3 \cdot 3^4}{5^4} = \frac{648}{625}$$

Como a divisão de m por n é maior que 1, visto que o numerador é maior que o denominador, logo m é maior que n, Alternativa IV incorreta
Aproveitando a mesma divisão feita no item anterior, temos que a divisão de m por n deixa um resto de $648 - 625 = 23$, que é diferente de zero. Alternativa V incorreta
Logo as únicas afirmações corretas são I e II. <u>Alternativa D</u>

4.6 Múltiplos e divisores

Os divisores de um número são os que deixam resto zero na divisão, em outras palavras, são aqueles que dividem o número de uma maneira exata. Por exemplo o número 18 tem como divisores os números 1, 2, 3, 6, 9 e 18.

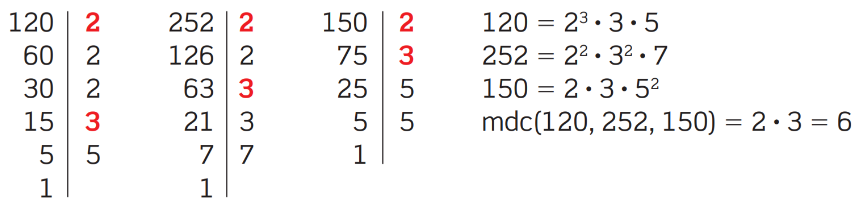
Já os múltiplos de um número são obtidos através da multiplicação desse número por um número natural qualquer. O número 4 tem por múltiplos o próprio 4, e também os números 8, 12, 16, 20, 24 e assim sucessivamente.

No estudo dos múltiplos e divisores surgem conceitos importantes como máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

Segundo Bianchini (2018b), "O maior divisor comum de dois ou mais números é chamado de máximo divisor comum e representado pelas iniciais mdc, já o "menor múltiplo comum de dois ou mais números, diferente de zero, é chamado de mínimo múltiplo comum e representado pelas iniciais mmc."

A partir da decomposição em fatores primos é possível determinar o **mdc** entre dois ou mais números, a figura 10 mostra o cálculo do máximo divisor comum para os números 120, 252 e 150.

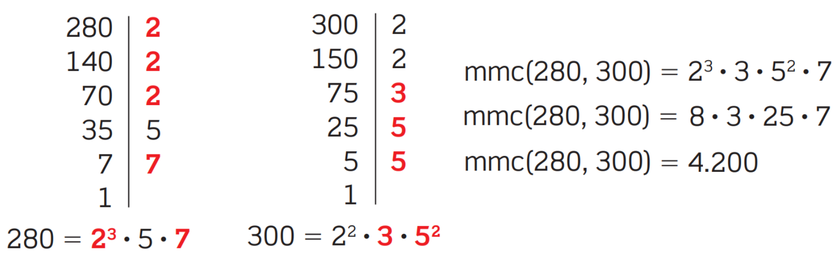
Figura 10 – Cálculo do mdc dos números 120, 252 e 150



Fonte: Adaptado de Bianchini (2018b)

O cálculo do **mmc** pode ser feito de duas formas, a primeira é através da decomposição de cada número em seus fatores primos, como foi realizado com o mdc, a outra é fazer a decomposição simultânea dos números. Abaixo temos as figuras 11 e 12 contendo o cálculo do mmc dos números 280 e 300.

Figura 11 – Cálculo do mmc dos números 280 e 300 decompondo separadamente



Fonte: Adaptado de Bianchini (2018b)

Figura 12 – Cálculo do mmc dos números 280 e 300 decompondo simultaneamente

280, 300	2	
140, 150	2	
70, 75	2	75 não é divisível por 2: deve ser repetido.
35, 75	3	35 não é divisível por 3: deve ser repetido.
35, 25	5	
7, 5	5	7 não é divisível por 5: deve ser repetido.
7, 1	7	1 não é divisível por 7: deve ser repetido.
1, 1		linha de 1: fim da decomposição.

$$\text{mmc}(280, 300) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4.200$$

Fonte: Adaptado de Bianchini (2018b)

É importante observar que, no caso da decomposição separada, a determinação do mmc levou em conta os fatores primos comuns e não comuns, sempre utilizando o maior expoente em caso de bases iguais e multiplicando tudo no final conforme mostrou a figura 11.

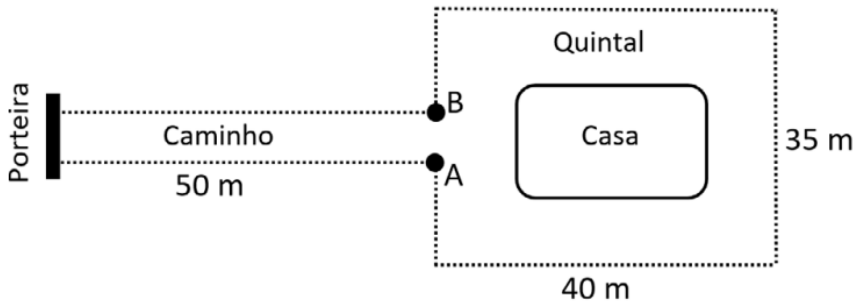
A seguir três questões sobre o tema:

Exemplo 4.6.1. *Questão 21 da prova 84/2022. (BRASIL, 2022a)*

O Sr. Paulo comprou um sítio e pretende cercar, com palmeiras imperiais, o quintal em volta da casa e todo o caminho desde a porteira até a casa, representados por linhas pontilhadas na figura a seguir. Ele pretende começar a plantar da porteira, com palmeiras espaçadas de 5 metros em 5 metros, ao longo do caminho e em volta do quintal. Na junção do caminho com o quintal, trecho AB, ele deixará livre o espaço para possibilitar a passagem. Sabendo que o caminho tem dimensões de 5 metros por 50 metros e que o quintal tem dimensões de 40 metros por 35 metros, quantas mudas de palmeiras, no mínimo, ele precisará plantar para cobrir todo o perímetro pedido?

Alternativas: a) 56 b) 54 c) 50 d) 48 e) 44

Figura 13 – Imagem contida na questão 21 da prova 84/2022



Fonte: BRASIL (2022a)

Solução: Temos 2 trechos de 50 metros do corredor, 2 trechos de 40 metros do quintal, um de 35 da parte direita do quintal e dois de 15 da parte esquerda do quintal, que totaliza:

$$2 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 15 = 245 \ metros$$

Como todas as medidas são divisíveis por cinco, basta dividirmos 245 por 5 e adicionarmos uma palmeira que será plantada no ponto zero.

$$n = \frac{245}{5} + 1 = 49 + 1 = 50$$

Alternativa C

Exemplo 4.6.2. *Questão 26 da prova 01/2013. (BRASIL, 2012a)*

No topo de um edifício dois sinalizadores "piscam" com regularidade constante. O primeiro "pisca" 12 vezes por minuto e o segundo "pisca" 15 vezes por minuto. Sabendo que em um dado instante os sinalizadores "piscam" ao mesmo tempo, o número de vezes que os sinalizadores piscam simultaneamente a cada minuto é:
Alternativas: a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.
Solução: Se o primeiro pisca 12 vezes por minuto, significa que ele pisca a cada 60/12 = 5 segundos, e o segundo, piscando a cada 15 segundos, vai piscar a cada 60/15 = 4 segundos. Para definir o número de vezes que as luzes piscam simultaneamente basta calcular o m.m.c. entre 4 e 5. Como são primos entre si, o m.m.c. será o produto entre eles, logo $m.m.c.(4, 5) = 20$.

Com isso, os sinalizadores piscarão simultaneamente a cada 20 segundos, ou seja, $60/20 = 3$ vezes por minuto. Alternativa C

Exemplo 4.6.3. *Questão 22 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

Na organização de uma festa de aniversário estão disponíveis 90 balas de chocolate, 126 balas de laranja e 162 balas de iogurte. Pretende-se dividi-las em pacotes iguais, que contenham os três sabores e não sobre balas após a divisão. Suponha que toda criança, e somente criança, receba um pacote de balas. Para que o número de crianças participantes na festa seja o máximo possível, a quantidade de balas em cada pacote deve ser igual a:
Alternativa: a) 18; b) 21; c) 24; d) 27; e) 30.
Solução: Para determinar a quantidade de pacotes de balas é necessário calcularmos o máximo divisor comum entre os tipos de balas: Fatorando cada um deles temos:
$a = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$b = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
$c = 162 = 2 \cdot 3^4$
O m.d.c. entre eles será o maior fator comum, ou seja. $m.d.c.(90, 126, 162) = 2 \cdot 3^2 = 18$
Logo, será possível fazer 18 pacotes de balas sem que nenhuma sobre. Alternativa A

4.7 Notação científica

A notação científica é utilizada na representação numérica de números que são demasiadamente grandes ou pequenos, no qual são utilizadas potencia de base 10 para tal. Como existem grandezas na física, química, astronomia e outras áreas que apresentam tais grandezas, é imprescindível o uso de notação científica.

Segundo Martins (2015), a notação científica é uma convenção para representar números, onde o coeficiente b é um número real cujo valor absoluto é igual ou maior que 1 e menor que 10 e o expoente n, a ordem da grandeza, é um número inteiro, assumindo a seguinte forma:

$$a \cdot 10^n$$

No caso de n positivo, indica quantas casas a vírgula precisa ser deslocada para direita para representar o valor real do número, ou quantas vezes esse número precisa ser multiplicado por 10. Já para n negativo, o valor dele indica quantas vezes a vírgula precisa ser deslocada para esquerda ou o número ser dividido por 10 para chegar ao seu valor original.

Por exemplo, o número 12000 pode ser escrito como $1,2 \cdot 10^4$ enquanto o número 0,000000123 pode ser escrito como $1,23 \cdot 10^{-7}$. Ela tem por objetivo não só facilitar a escrita e leitura dos números grandes e pequenos, mas também auxiliar nas operações que envolvem eles.

Como não foi encontrada nas provas analisadas nenhuma questão que envolve notação científica, segue abaixo resolução de uma questão do ENEM 2016 sobre o assunto.

Exemplo 4.7.1. *Questão 174 do caderno 14 do ENEM 2022.*

A volemia (V) de um indivíduo é a quantidade total de sangue em seu sistema circulatório (coração, artérias, veias e capilares). Ela é útil quando se pretende estimar o número total (N) de hemácias de uma pessoa, a qual é obtida multiplicando-se a volemia (V) pela concentração (C) de hemácias no sangue, isto é, $N = V \cdot C$. Num adulto normal essa concentração é de 5200000 hemácias por mL de sangue, conduzindo a grandes valores de N. Uma maneira adequada de informar essas grandes quantidades é utilizar a notação científica, que consiste em expressar N na forma $N = Q \cdot 10^n$, sendo $1 \leq Q < 10$ e n um número inteiro. Considere um adulto normal, com volemia de $5000 mL$ Qual a quantidade total de hemácias desse adulto, em notação científica?
Alternativas: a) $2,6 \cdot 10^{-10}$; b) $2,6 \cdot 10^{-9}$; c) $2,6 \cdot 10^{9}$; d) $2,6 \cdot 10^{10}$; e) $2,6 \cdot 10^{11}$.
Solução: Efetuando o produto entre 5 200 000 hemácias por mL pela quantidade de 5 000 mL obtemos 26 000 000 000, como a vírgula precisa estar depois do 2 de modo que $1 \leq Q < 10$, então a resposta ficará $2,6 \cdot 10^{10}$. Alternativa D

4.8 Potenciação e radiciação

A potenciação é uma operação no qual um número é elevado a uma determinada potência enquanto na radiciação, considerada a operação inversa, consiste em extrair a raiz de um número.

Na operação de potenciação, um número é denominado base e outro denominado potência, ou expoente, e esse último indica quantas vezes a base deve ser multiplicada por ela mesma. Por exemplo, $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Nesse caso a base é 3 e a potência, ou expoente, é 4.

Segundo Júnior e Castrucci (2018b), quando se trata de números inteiros com expoente natural, se a base for um número inteiro positivo ou negativo, considera-se dois casos:

- Se o expoente for um número par $\longrightarrow$ a potência é um número positivo;
- Se o expoente é um número ímpar $\longrightarrow$ a potência tem o mesmo sinal da base.

Na radiciação, a raiz de um número é indicado por um símbolo chamado radical, enquanto o radicando é o número que é extraído a raiz.

Potenciação e radiciação são operações matemáticas que estão relacionadas entre si. A potenciação é a operação que consiste em elevar um número a uma determinada potência, enquanto a radiciação é a operação inversa, que consiste em extrair a raiz de um número.

Na potenciação, o número que é elevado a uma determinada potência é chamado de base, e a potência é indicada por um número inteiro positivo que indica quantas vezes a base deve ser multiplicada por ela mesma. Por exemplo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Nesse exemplo, 2 é a base e 3 é a potência.

Na radiciação, a raiz é indicada por um símbolo chamado de radical, e o número que é extraído a raiz é chamado de radicando. Por exemplo: $\sqrt{25} = 5$. Nesse exemplo, 25 é o radicando e 5 é a raiz quadrada. A potenciação e a radiciação estão relacionadas entre si, já que a raiz n-ésima de um número é o mesmo que elevar esse número à potência 1/n. Por exemplo: $\sqrt{25} = 25^{1/2} = 5$.

Assim como a potenciação, a radiciação pode ser utilizada em diversas áreas da matemática e de outras áreas do conhecimento, como na física, na engenharia, entre outras.

As operações com potências e radicais envolvem algumas propriedades que visam facilitar os cálculos, a seguir temos uma tabela com algumas propriedades relacionadas a potenciação.

Tabela 15 – Propriedades da potenciação

Propriedade	**Operação**	**Simbologia**
Multiplicação de potências de mesma base	Repete a base e soma os expoentes	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Divisão de potências de mesma base	Repete a base e subtrai os expoentes	$a^m/a^n = a^{m-n}$
Potência de potência	Repete a base e multiplica os expoentes	$a^{m^n} = a^{m \cdot n}$
Potência de produto	Aplica a potência a ambos os fatores	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot a^m$
Potência de quociente	Aplica a potência ao numerador e ao denominador	$(a/b)^m = a^m/a^m$
Potência de expoente negativo	Inverte a base e torna o expoente positivo	$a^{-n} = (1/a)^n$
Potência de expoente racional	Vira uma raiz com o denominador sendo o índice e o numerador a potência	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

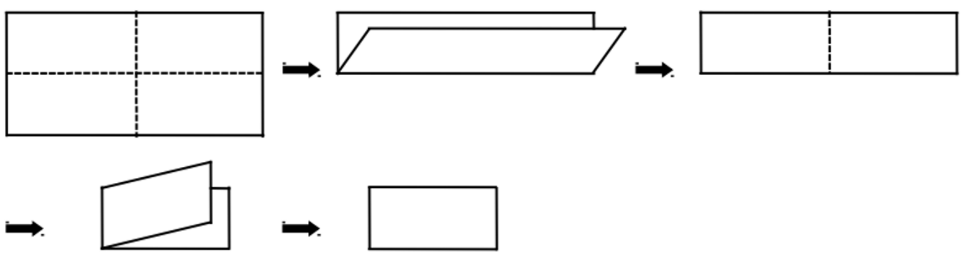
Fonte: Elaborado pelo autor.

Segue abaixo resolução de três questões sobre potenciação objetivando a melhor fixação dos conceitos envolvidos.

Exemplo 4.8.1. *Questão 16 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

Uma bandeira retangular de dimensões 16 x 8 metros é dobrada ao meio numa direção, ligando-se as duas pontas de um mesmo lado com as duas pontas correspondentes do lado oposto, seguida de uma dobradura idêntica na outra direção, obtendo-se assim, um retângulo semelhante à bandeira. A sequência de figuras esboça um exemplo de construção para esta primeira etapa. Supondo possível, esse processo é repetido até encontrar um retângulo com pelo menos um de seus lados inferior a um metro. A área do retângulo obtido na última etapa representa uma redução da bandeira, em número de vezes, igual a:

Figura 14 – Imagem contida na questão 16 da prova 01/2014



Fonte: BRASIL (2013a)

Alternativas: a) 2^5 b) 2^6 c) 2^7 d) 2^8 e) 2^9

Solução Se um dos lados da bandeira deve ser inferior a um metro, e mantendo a razão da bandeira inicial, então a bandeira final ficará com $1m \cdot 0,5m = 0,5m$š, ou $2^{-1}m^2$. Já a bandeira inicial tem área igual a $16m \cdot 8m = 128m^2$, ou 2^7m^2. Sendo assim, a redução foi de:

$$\frac{2^7}{2^{-1}} = 2^8$$

<u>Alternativa D</u>

Exemplo 4.8.2. *Questão 24 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

A expressão $\frac{2^{50}}{2} + 2^{49}$ é equivalente a:
Alternativas: a) 2^{74} ; b) 2^{50} ; c) 4^{74} ; d) 4^{49} ; e) 2^{98}.
Solução: Aplicando a propriedade da divisão da potência de mesma base, temos:

$$\frac{2^{50}}{2} = \frac{2^{50}}{2^1} = 2^{50-1} = 2^{49}$$

Somando com o outro termo temos:

$$2^{49} + 2^{49} = 2 \cdot 2^{49} = 2^1 \cdot 2^{49} = 2^{49+1} = 2^{50}$$

<u>Alternativa B</u>

Exemplo 4.8.3. *Questão 23 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

A soma dos algarismos do número $2^{106} \times 5^{100}$ é: Alternativas: a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14
Solução: Sabendo que $2 \times 5 = 10$, escreveremos o número acima como uma potência de base 10.

$$2^{106} \times 5^{100} = 2^6 \times 2^{100} \times 5^{100} = 2^6 \times 10^{100} = 64 \times 10^{100}$$

Logo, a soma dos algarismos será $6 + 4 = 10$. <u>Alternativa A</u>

4.9 Razão, proporção e regra de três simples e composta

4.9.1 Razão e Proporção

Razão e proporção são conceitos matemáticos que estão relacionados entre si. A razão é a relação entre dois números, que pode ser expressa na forma de fração ou de número decimal. Por exemplo, se temos 6 laranjas e 3 maçãs, podemos expressar a razão entre o número de laranjas e o número de maçãs como: $\frac{6}{3} = 2$

Nesse caso, a razão entre laranjas e maçãs é 2:1, o que significa que temos o dobro de laranjas em relação ao número de maçãs.

Já a proporção, segundo Júnior e Castrucci (2018c) é a igualdade entre duas razões, ou seja, a igualdade entre duas frações ou dois números decimais. Por exemplo, se temos duas razões: $\frac{4}{2}$ e $\frac{12}{6}$. Podemos dizer que essas razões estão em proporção, pois: $\frac{4}{2} = 2$ e

$\dfrac{12}{6} = 2$. Assim, podemos escrever a igualdade: $\dfrac{4}{2} = \dfrac{12}{6}$

A proporção é utilizada em diversos contextos da matemática e de outras áreas do conhecimento, como na física, na engenharia, entre outras. Ela é bastante útil para resolver problemas envolvendo grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

4.9.2 Regra de três simples e composta

A regra de três é uma ferramenta matemática utilizada para resolver problemas que envolvem proporções entre grandezas. Existem dois tipos de regra de três: a simples e a composta. A regra de três simples é utilizada para relacionar duas grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Ela é chamada de simples porque envolve apenas duas grandezas. Por exemplo: Se 3 litros de tinta pintam uma área de 9 metros quadrados, quantos litros de tinta são necessários para pintar uma área de 12 metros quadrados?

Nesse exemplo, temos duas grandezas: a quantidade de tinta e a área a ser pintada. Como a tinta e a área são diretamente proporcionais, podemos utilizar a regra de três simples para resolver o problema, montando o quadro a seguir:

Figura 15 – Resolução da regra de três simples

Quantidade de tinta	Área pintada
3 litros	9 metros quadrados
x litros	12 metros quadrados

Fonte: Arquivo do autor

Transformando as grandezas em proporções e resolvendo para encontrar o valor de x, temos:

$$\frac{3}{x} = \frac{9}{12} \Longleftrightarrow 9x = 3 \cdot 12 \Longleftrightarrow x = \frac{36}{9} = 4$$

Portanto, são necessários 4 litros de tinta para pintar uma área de 12 metros quadrados.

Já a regra de três composta é utilizada para relacionar mais de duas grandezas, que podem ser diretamente ou inversamente proporcionais. Ela é chamada de composta porque envolve mais de duas grandezas. Por exemplo: Para construir uma parede, são necessários 3 pedreiros, que trabalham durante 6 horas por dia, durante 10 dias. Quantos dias são necessários para construir a parede se forem contratados 4 pedreiros, que trabalham durante 9 horas por dia?

Nesse exemplo, temos três grandezas: o número de pedreiros, o número de horas trabalhadas por dia e o número de dias de trabalho. Utilizando a regra de três composta, podemos relacionar as três grandezas e encontrar a resposta, através do seguinte quadro:

Figura 16 – Resolução da regra de três composta

Qtde. de trabalhadores	Carga horária diária	Tempo total
3 pedreiros	6 horas	10 dias
4 pedreiros	9 horas	x

Fonte: Arquivo do autor

Nesse caso, a primeira análise é quanto à proporcionalidade de cada grandeza, tempo como base a grandeza onde está nossa incógnita, tendo como objetivo definir se é diretamente ou inversamente proporcional. No caso da quantidade de trabalhadores, é inversamente proporcional, visto que são necessários mais trabalhadores para fazer o mesmo serviço em menos tempo. Já em relação à quantidade de horas diárias, também é inversamente proporcional, visto que a mesma atividade feita por mais horas por dia, será concluída em menos tempo.

Logo, montando a fração já invertendo as grandezas inversamente proporcionais e deixando a que tem a incógnita em um lado da igualdade, temos:

$$\frac{10}{x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{6} \Longleftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{36}{18} \Longleftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{2}{1} \Longleftrightarrow 2x = 10 \Longleftrightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

Portanto, são necessários 5 dias para construir a parede com 4 pedreiros trabalhando 9 horas por dia.

Na sequência está a resolução de três questões a respeito de razão, proporção e regra de três.

Exemplo 4.9.1. *Questão 27 da prova 01/2015. (BRASIL, 2014a)*

Lendo sempre 15 páginas de um livro por dia, eu conseguiria finalizar sua leitura em 15 dias. Se pretendo finalizar a leitura do livro em 9 dias, devo ler por dia:
Alternativas:
a) 9 páginas. b) 12 páginas. c) 20 páginas. d) 25 páginas. e) 30 páginas.
Solução: Quanto mais páginas forem lidas por dia, menor será o tempo de leitura, portanto são grandezas inversamente proporcionais, logo temos que:
Montando as frações, considerando que são inversamente proporcionais, temos:

Tabela 16 – Montagem da regra de três da questão 27 da prova 01/2015

Quantidade de páginas por dia	Tempo de leitura
15 páginas	15 dias
x	9 dias

Fonte: Elaborado pelo autor

$$\frac{15}{x} = \frac{9}{15} \Longleftrightarrow 9x = 15 \cdot 15 = 225 \Longleftrightarrow x = \frac{225}{9} = 25$$

Portanto, a quantidade de páginas para que a leitura seja concluída em 9 dias é 25 páginas por dia. Alternativa D

Exemplo 4.9.2. *Questão 24 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

Em uma fábrica de copos descartáveis, funcionando em condições normais, 3 máquinas produzem 40 copos iguais em 4 minutos. O número de copos iguais que 5 máquinas produzem em 3 minutos, funcionando em condições normais, é
Alternativas: a) 50. b) 60. c) 75. d) 90. e) 100.
Solução: Montando a tabela conforme a questão, temos:

Tabela 17 – Montagem da regra de três da questão 24 da prova 01/2012

Qtde. de copos	**Qtde. de máquinas**	**Tempo**
40 copos	3 máquinas	4 minutos
x	5 máquinas	3 minutos

Fonte: Elaborado pelo autor

Quanto a proporcionalidade, nota-se que mais máquinas produzem mais copos, e de igual modo, com um tempo maior se produzem mais copos também. Logo, montando as frações, deixando a que possui a incógnita isolada, temos:

$$\frac{40}{x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} \Longleftrightarrow \frac{40}{x} = \frac{4}{5} \Longleftrightarrow x \cdot 4 = 40 \cdot 5 \Longleftrightarrow 4x = 200 \Longleftrightarrow x = \frac{200}{4} = 50$$

Alternativa A

Exemplo 4.9.3. *Questão 19 da prova 04/2017. (BRASIL, 2016a)*

De uma sacola contendo bolas vermelhas e pretas, retiram-se 8 vermelhas, ficando a relação de 1 vermelha para 3 pretas. Em seguida, retiram-se 20 pretas, restando, na sacola, bolas na razão de 3 vermelhas para 4 pretas. Assim podemos afirmar que o número total de bolas vermelhas e pretas que havia incialmente na sacola é
Alternativas: a) 64. b) 82. c) 56. d) 44. e) 92.
Solução: Montando as proporções, temos:

$$\frac{V-8}{P} = \frac{1}{3} \qquad e \qquad \frac{V-8}{P-20} = \frac{3}{4}$$

Da primeira proporção, temos:

$$P = (V-8) \cdot 3 = 3V - 24$$

Da segunda proporção, temos:

$$(P-20) \cdot 3 = (V-8) \cdot 4 \Longleftrightarrow 3P - 60 = 4V - 32$$

Substituindo a primeira equação na segunda

$$3(3v - 24) - 60 = 4V - 32 \iff 9V - 72 - 60 = 4V - 32 \iff 9V - 4V = 72 + 60 - 32$$

$$5V = 100 \iff V = \frac{100}{5} = 20$$

$$P = 3 \cdot 20 - 24 = 60 - 24 = 36$$

Logo:

$$P + V = 36 + 20 = 56$$

Alternativa C

4.10 Porcentagem, acréscimos sucessivos e descontos sucessivos

Porcentagem é uma forma de expressar uma proporção em relação a 100. Por exemplo, 50% significa que temos uma proporção de 50 para cada 100 unidades. A porcentagem é amplamente utilizada em diversos contextos, como na economia, nas finanças, na química, na biologia, entre outras áreas. Para calcular a porcentagem de um número, basta multiplicá-lo pelo valor da porcentagem e dividir o resultado por 100. Por exemplo, para calcular 30% de 100, temos:

$$\frac{30}{100} \cdot 100 = 30$$

Portanto, 30% de 100 é igual a 30.

Além disso, a porcentagem também pode ser utilizada para calcular acréscimos ou descontos em valores. Para calcular um acréscimo de x% em um valor, basta multiplicar o valor por $\left(1 + \frac{X}{100}\right)$. Por exemplo, para calcular um acréscimo de 10% em um valor de R$ 100,00, temos:

$$100 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 110$$

Desse modo, o valor com acréscimo de 10% é de R$ 110,00.

Já para calcular um desconto de x% em um valor, basta multiplicar o valor por $\left(1 - \frac{X}{100}\right)$. Por exemplo, para calcular um desconto de 20% em um valor de R$ 80,00, temos:

$$80 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 64$$

Sendo assim, o valor com desconto de 20% é de R$ 64,00.

Os acréscimos e descontos sucessivos são utilizados para calcular o valor final após várias operações de acréscimo ou desconto em um valor inicial. Essas operações podem ser realizadas em sequência ou em paralelo.

Para calcular o valor final após acréscimos sucessivos, basta multiplicar o valor inicial por cada fator de acréscimo $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$, onde x é a porcentagem de acréscimo. Por exemplo, se um produto sofre um acréscimo de 10% no primeiro ano e de 5% no segundo ano, o valor final será:

$$Valor\ final = Valor\ inicial \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)$$
$$Valor\ final = Valor\ inicial \cdot 1,1 \cdot 1,05$$

Da mesma forma, para calcular o valor final após descontos sucessivos, basta multiplicar o valor inicial por cada fator de desconto (1 - x/100), onde x é a porcentagem de desconto, e somar os resultados. Por exemplo, se um produto sofre um desconto de 20% no primeiro ano e de 10% no segundo ano, o valor final será:

$$Valor\ final = Valor\ inicial \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)$$
$$Valor\ final = Valor\ inicial \cdot 0,8 \cdot 0,9$$

No caso de acréscimos e descontos em paralelo, ou seja, quando várias operações de acréscimo ou desconto são realizadas simultaneamente, é necessário calcular o valor final de cada operação separadamente e somar os resultados. Por exemplo, se um produto sofre um acréscimo de 10% e um desconto de 5% ao mesmo tempo, o valor final será:

$$Valorfinal = Valorinicial \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)$$
$$Valorfinal = Valorinicial \cdot 1,1 \cdot 0,95$$

É importante lembrar que os acréscimos e descontos sucessivos podem influenciar significativamente o valor final de um produto ou serviço, por isso é fundamental estar atento às condições oferecidas pelos fornecedores.

Na sequência temos 3 exemplos envolvendo esse conteúdo.

Exemplo 4.10.1. *Questão 23 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

Suponha que na mercearia de seu Joaquim, o valor inicial de venda de uma determinada mercadoria M seja de R$100,00. Como a procura por M estava grande, então seu Joaquim achou que deveria aumentar o seu preço em 20%, e assim o fez. Passada a fase de grande consumo desta mercadoria, então seu Joaquim resolveu reduzir o preço que estava sendo praticado em 20%. Qual o novo valor da mercadoria M?

Alternativas: a) $R\$\ 100,00$ b) $R\$\ 60,00$ c) $R\$\ 98,00$ d) $R\$\ 80,00$ e) $R\$\ 96,00$

Solução: O valor após o primeiro aumento será de:

$$R\$\ 100,00 + 20\% = 120\%\ de\ R\$\ 100,00 = \frac{120 \cdot R\$\ 100,00}{100} = R\$\ 96,00$$

Já após o segundo reajuste, o valor será de:

$$R\$\ 120,00 - 20\% = 80\%\ de\ R\$\ 120,00 = \frac{80 \cdot R\$\ 120,00}{100} = R\$\ 96,00$$

Alternativa E

Exemplo 4.10.2. *Questão 16 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

Na tabela abaixo, estão representados os dados de uma pesquisa feita com 300 pessoas na praça de alimentação de um Shopping Center.

Tabela 18 – Tabela contida na questão 16 do edital 01/2016

Gastos em reais	**Número de pessoas**
$8 \vdash 16$	50
$16 \vdash 24$	$\frac{x}{2}$
$24 \vdash 32$	$x + 25$
Total	?

Fonte: BRASIL (2015a)

Nesse Shopping Center da pesquisa, que porcentagem dos entrevistados gasta menos de R\$24,00?
Alternativas: a) $\frac{125}{6}\%$ b) $\frac{125}{3}\%$ c) $\frac{5}{12}\%$ d) $\frac{125}{7}\%$ e) $\frac{15}{4}\%$
Solução: Montando a equação de primeiro grau para determinar o valor de x, temos:

$$50 + \frac{x}{2} + x + 25 = 300$$

$$\frac{x}{2} + x = 300 - 50 - 25$$

$$\frac{3x}{2} = 225$$

$$x = \frac{225 \times 2}{3} = 150$$

Com isso, a quantidade de pessoas que gastam menos que 24 é:

$$50 + \frac{x}{2} = 50 + \frac{150}{2} = 50 + 75 = 125$$

E o percentual equivalente será:

$$\frac{125}{300} \times 100\% = \frac{125}{3}\%$$

Alternativa B

Exemplo 4.10.3. *Questão 26 da prova 01/2019. (BRASIL, 2018a)*

Uma cooperativa de artesanato confecciona dois tipos de produtos, A e B, ao custo de $R8,00eR12{,}00$ por unidade, respectivamente. Essa cooperativa vendeu no último mês 330 unidades dos produtos A e B com preços 756.570,00 com essa venda. Determine a quantidade do produto A que foi vendida.
Alternativas: a) 150 b) 160 c) 170 d) 180 e) 190

Solução: O produto A, ao custo de R$ 8,00 e vendido por 75% a mais, teve um valor de venda de:

$$R\$8,00 + 75\% = 175\% \ de \ 8 = \frac{175}{100} \times 8,00 = R\$14,00$$

Já o produto B, ao custo de R$ 12,00 e vendido por 125% a mais, teve um valor de venda de:

$$R\$12,00 + 125\% = 225\% \ de \ 12 = \frac{225}{100} \times 12,00 = R\$27,00$$

Com isso podemos montar as seguintes equações:

$$\begin{cases} A + B = 330 \\ 14A + 27B = 6570 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 27, temos:

$$\begin{cases} 27A + 27B = 8910 \\ 14A + 27B = 6570 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira

$$13A = 2340 \iff A = \frac{2340}{13} = 180$$

<u>Alternativa D</u>

4.11 Problemas de juros simples e juros compostos

Segundo Júnior e Castrucci (2018c) "Toda compensação em dinheiro que se paga, ou que se recebe, pela quantia de dinheiro que se empresta, ou se pede emprestado, é chamada **juro**". Ou seja, os juros são valores adicionais que são cobrados em cima de um valor emprestado ou investido. Os juros podem ser simples ou compostos, dependendo da forma como são calculados.

Juros simples são calculados com base em uma taxa fixa aplicada sobre o valor inicial durante um determinado período de tempo. No caso dos juros simples, o valor dos juros é sempre o mesmo ao longo do tempo, pois é calculado apenas sobre o valor inicial. A fórmula para o cálculo dos juros simples é:

$$J = P \cdot i \cdot t$$

onde:
J = juros;
P = valor principal ou valor emprestado;
i = taxa de juros;
t = tempo em que os juros serão calculados.

Por exemplo, se você emprestou R$ 1.000,00 a uma taxa de juros de 5% ao mês, durante um período de 6 meses, o valor dos juros simples será:

$$J = 1.000 \cdot 0,05 \cdot 6 = R\$300,00$$

Ou seja, os juros simples são fixos ao longo do tempo e não levam em conta o valor acumulado do empréstimo.

Já os juros compostos são calculados a partir da taxa de juros aplicada não só sobre o valor inicial, mas também sobre os juros já acumulados ao longo do tempo. Isso significa que, com os juros compostos, os juros são reinvestidos no valor principal, gerando um novo montante que serve como base para o cálculo dos juros do período seguinte. A fórmula para o cálculo dos juros compostos é:

$$M = P \cdot (1 + i)^t$$

onde:
M = montante (valor total, incluindo os juros);
P = valor principal ou valor investido;
i = taxa de juros;
t = tempo em que os juros serão calculados.

Por exemplo, se você investiu R$ 1.000,00 a uma taxa de juros de 5% ao mês, durante um período de 6 meses, o valor total com juros compostos será:

$$M = 1.000 \cdot (1 + 0,05)^6 = R\$1.348,62$$

Ou seja, com os juros compostos, os juros gerados em cada período são adicionados ao montante total e servem como base para o cálculo dos juros do período seguinte, o que gera um efeito de "bola de neve"que aumenta o valor dos juros e do montante ao longo do tempo.

Exemplo 4.11.1. *Questão 28 da prova 01/2015. (BRASIL, 2014a)*

Tainá tinha um boleto de R$ 420,00 com vencimento para segunda-feira. Ela havia se esquecido desse compromisso e, quando foi pagar, observou que havia uma multa de 4% por não ter pago no vencimento, além de juros simples de 1% por dia de atraso, incididos sobre o valor do boleto. Quanto Tainá gastou a mais, se só efetuou o pagamento na sexta-feira daquela mesma semana?
Alternativas: a) $R\$\ 21,00$ b) $R\$\ 29,40$ c) $R\$\ 33,60$ d) $R\$\ 37,80$ e) $R\$\ 42,00$
Solução: De segunda-feira até a sexta-feira são quatro dias de juros, logo.

$$J = C \times i \times t = R\$420,00 \times \frac{1}{100} \times 4 = R\$16,80$$

A multa de 4% será de:

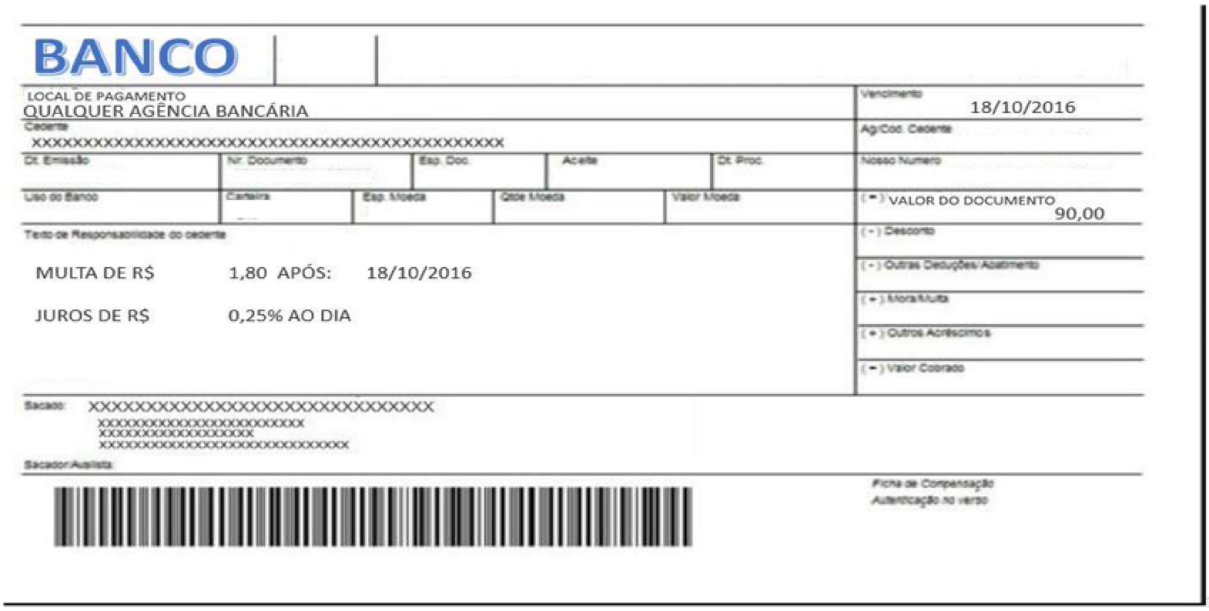
$$R\$420,00 \times \frac{4}{100} = R\$16,80$$

O valor gasto a mais é de $R\$16,80 + R\$16,80 = R\$33,60$
Alternativa C

Exemplo 4.11.2. *Questão 27 da prova 04/2017. (BRASIL, 2016a)*

Um boleto bancário, ou simplesmente boleto, é um documento largamente utilizado no Brasil como instrumento de pagamento de um produto ou serviço prestado. Através do boleto, seu emissor pode receber do pagador o valor referente àquele pagamento. As principais informações referentes ao valor do boleto são o vencimento, o valor do documento, a multa e os juros por atraso.
Considere o seguinte boleto:

Figura 17 – Imagem contida na questão 27 da prova 04/2017


BANCO
LOCAL DE PAGAMENTO
QUALQUER AGÊNCIA BANCÁRIA
Vencimento 18/10/2016
Cedente
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
(=) VALOR DO DOCUMENTO 90,00
MULTA DE R$ 1,80 APÓS: 18/10/2016
JUROS DE R$ 0,25% AO DIA
Sacado: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Fonte: BRASIL (2016a)

Se o pagamento deste boleto for feito no dia 03 de dezembro de 2016, qual dos valores abaixo mais se aproxima do valor a ser pago por este?
Considere os juros do boleto como juros simples sobre o valor do documento, sem a multa, lembre-se que os juros começam a ser cobrados a partir do dia seguinte ao vencimento e que outubro são considerados todos os 31 dias. Note que este boleto tem vencimento no dia 18 de outubro de 2016.
Alternativas: a) $R\$$ $91,80$ b) $R\$$ $102,15$ c) $R\$$ $108,25$ d) $R\$$ $112,50$ e) $R\$$ $120,80$
Solução: O total de dias de vencimento foram: Outubro (19 a 31) = 13 dias, Novembro (todos os dias) = 30 dias e Dezembro (1 a 3) = 3 dias, totalizando $13 + 30 + 3 = 46 dias$.

Como os juros são de 0,25% ao dia, logo o percentual total a ser pago é $0,25\% \cdot 46 dias = 11,5\%$. Calculando o valor total dos juros, temos:

$$R\$\ 90,00 \cdot 11,5\% = \frac{90 \cdot 11,5}{100} = R\$\ 10,35$$

Sendo assim, o valor a ser pago será de $R\$ 90,00 + R\$\ 10,35 + R\$\ 1,80 = R\$\ 102,15$.
<u>Alternativa B</u>

5 Álgebra no exame de seleção

Segundo Coelho e Aguiar (2018), "A álgebra faz parte do desenvolvimento humano e, como tal, surge inicialmente para resolver necessidades práticas, estando bastante presente em nosso cotidiano de várias formas", desse modo, a BNCC já prevê álgebra como uma unidade temática desde o ensino fundamental.

Da mesma forma que foi trabalhado com o conteúdo de "Números", será realizada nesse capítulo uma síntese dos conceitos envolvidos nessa unidade temática, reforçando os conceitos com resolução de questões das provas anteriores de ingresso no IFES.

5.1 Expressões algébricas

De acordo com Souza (2018b) "expressão algébrica é toda expressão em que há letras representando números. Essas letras são as variáveis, que podem assumir diferentes valores nas situações analisadas", em outras palavras, expressões algébricas são combinações de números, variáveis e operações matemáticas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, que podem ser usadas para representar uma grande variedade de situações matemáticas.

As variáveis são geralmente representadas por letras, como x, y e z, e podem ser usadas para representar quantidades desconhecidas ou variáveis em uma equação. Por exemplo, a expressão "4x + 3"representa um valor que depende do valor de x, que pode ser qualquer número.

As expressões algébricas podem ser simplificadas, combinando termos semelhantes e resolvendo as operações matemáticas. Por exemplo, a expressão "$6x + 3y - 4x$"pode ser simplificada para "$2x - 3y$", realizando a operação de subtração com os termos semelhantes $6x$ e $4x$ na expressão.

Além disso, podemos determinar o valor de expressões algébricas quando é dado o valor da variável substituindo a mesma pelo seu valor. Por exemplo, a expressão $x^3 + 2x^2 + 5x - 10$, quando $x = -2$, vale:

$$(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 10 = -8 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) - 10 = -8 + 8 - 10 - 10 = -20$$

As expressões algébricas também podem ser usadas para resolver problemas matemáticos, como encontrar a solução de equações lineares ou sistemas de equações, que envolvem mais de uma variável.

Por exemplo, a equação $4x - 3y = 6$ pode ser resolvida para encontrar valores de x e y que satisfazem a equação. Isso pode ser feito isolando uma das variáveis em uma das equações e substituindo-a na outra equação para encontrar o valor da outra variável. Neste caso, podemos isolar x primeiro somando o termo "$3y$"dos dois lados, ficando $4x = 6 + 3y$, e por fim dividindo ambos os lados por 4, resultando em $x = \frac{6+3y}{4}$. Com isso podem ser determinados pares ordenados que satisfazem a equação. Por exemplo, para $y = 2$, temos que $x = \frac{6+3\cdot 2}{4} = \frac{12}{4} = 3$, logo um par que satisfaz a equação é (3; 2).

Segue abaixo resolução de três questões sobre o tema, que antes da aplicação do referido conceito, contam também com outros conceitos, tendo em vista a interdisciplinaridade das provas do IFES.

Exemplo 5.1.1. *Questão 26 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

Considere R como sendo o conjunto dos números reais. Sejam x_1 e $x_2 \in R$ as raízes da equação $3x^2 + x - 2 = 0$ onde $x_1 < x_2$. Qual o valor da expressão $(3x_1x_2 + 3x_2 - x_1)$?
Alternativas: a) 1. b) $\frac{2}{3}$. c) 1. d) $\frac{3}{2}$. e) 2.
Solução: Resolvendo a equação de segundo grau temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, temos:

$$3x_1x_2 + 3x_2 - x_1 = 3\cdot(-1)\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} - (-1) = -2 + 2 + 1 = 1$$

Alternativa C

Exemplo 5.1.2. *Questão 28 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

Considere R como sendo o conjunto dos números reais. A solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = \frac{9}{2} \end{cases}$ é o par ordenado (x, y), onde $x \in R$ e $y \in R$. O valor da expressão $\frac{x+y}{2}$ é:

Alternativas:
a) $\frac{15}{2}$. b) $\frac{15}{4}$. c) $\frac{3}{2}$. d) $\frac{5}{4}$. e) $\frac{5}{2}$.
Solução: Somando as duas equações, temos:

$$(2x + y) + (x + 2y) = 3 + \frac{9}{2}$$

$$3x + 3y = \frac{15}{2}$$

Multiplicando ambos os lados por 1/6, temos:

$$\frac{1}{6} \cdot (3x + 3y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{2} \iff \frac{x+2}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Alternativa D

Exemplo 5.1.3. *Questão 28 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

Numa papelaria, X canetas custam C centavos. A quantidade de canetas que se pode comprar com R reais é:

Alternativas:

a) $\frac{RC}{100X}$. b) $\frac{RX}{100C}$. c) $\frac{100R}{CX}$. d) $\frac{100RX}{C}$. e) $\frac{R}{100CX}$.

Solução: Se X canetas custam C centavos, então cada caneta custa $\frac{C}{X}$ centavos, e o valor de cada caneta em reais será:

$$\frac{C}{X} \div 100 = \frac{C}{100X}$$

Com R reais, é possível comprar:

$$R \div \frac{C}{100X} = R \cdot \frac{100X}{C} = \frac{100RX}{C}$$

Alternativa D

5.2 Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais

Grandezas diretamente proporcionais são aquelas que variam na mesma proporção, ou seja, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui na mesma proporção. Por exemplo, a quantidade de pães produzidos é diretamente proporcional à quantidade de trigo utilizada, pois se eu quiser dobrar a quantidade de pão, também será necessária dobrar a quantidade de trigo.

Por outro lado, grandezas inversamente proporcionais são aquelas que variam na proporção inversa uma da outra. Quando uma grandeza aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa. Por exemplo, o tempo necessário para concluir uma tarefa e o número de pessoas que trabalham nessa tarefa são grandezas inversamente proporcionais, pois se o número de pessoas que trabalham na tarefa dobrar, o tempo necessário para concluí-la será reduzido pela metade.

A relação entre as grandezas proporcionais pode ser representada por uma equação do tipo $y = kx$, em que y e x são as grandezas diretamente proporcionais, k é uma constante de proporcionalidade e x e y são os valores das grandezas em questão. Já a relação entre grandezas inversamente proporcionais pode ser representada por uma equação do tipo $y = \frac{k}{x}$, em que y e x são as grandezas inversamente proporcionais, k é uma constante de proporcionalidade e x e y são os valores das grandezas em questão.

Para resolver problemas envolvendo grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, é necessário identificar a relação entre as grandezas e fazer uma igualdade de frações. A partir daí, podemos determinar os valores de uma grandeza a partir dos valores da outra grandeza, usando a equação correspondente.

Abaixo seguem duas questões sobre o tema:

Exemplo 5.2.1. *Questão 17 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

No seu primeiro mês de atividade uma pequena empresa lucrou R$ 6.500,00. Sabe-se que os dois sócios proprietários dessa empresa investiram no negócio R$ 10.000,00 e R$ 3.000,00, respectivamente. Se a divisão dos lucros será proporcional ao investimento de cada um, o menor investidor receberá:
Alternativas:
a) $R\$ \ 1.500,00$. b) $R\$ \ 3.000,00$. c) $R\$ \ 5.000,00$. d) $R\$ \ 5.500,00$. e) $R\$ \ 6.500,00$.
Solução: Se a divisão dos lucros é proporcional ao investimento, então o lucro do primeiro sócio será 10000.X e o do segundo será 3000.X, fazendo a equação, temos:

$$10000X + 3000X = 6500 \iff 13000X = 6500 \iff X = 6500/13000 = \frac{1}{2}$$

E o valor ganho pelo menor investidor será:

$$3000X = 3000 \times \frac{1}{2} = 1500$$

<u>Alternativa A</u>

Exemplo 5.2.2. *Questão 21 da prova 01/2019. (BRASIL, 2018a)*

Leia as afirmações a seguir.
I - O perímetro P de um quadrado de lado L é diretamente proporcional a L.
II - A área A de um quadrado de lado L é diretamente proporcional a L.
III - A área de um retângulo de base 10 cm é diretamente proporcional à sua altura.
IV - A altura de um retângulo de área $100cm^2$ é inversamente proporcional à sua base.
V - O comprimento de uma circunferência é inversamente proporcional à medida do seu raio.
VI A área de um círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio.
Analisando as sentenças acima, o número de afirmações FALSAS é:
Alternativas: a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

Solução: Analisando cada uma das afirmações
I – O perímetro de um quadrado é dado pelo quádruplo do lado, ou seja, $4 \times l$, sendo diretamente proporcional ao próprio l. VERDADEIRA
II – A área de um quadrado é o quadrado do seu lado, se o lado for 1, a área será $1 \times 1 = 1$, se o lado for 2, a área será $2 \times 2 = 4$, não sendo proporcional – FALSA
III – Á área de um retângulo de base 10 cm é dada pela expressão 10h, sendo diretamente proporcional à altura desse retângulo. VERDADEIRA
IV – Se a área de um retângulo é $100cm^2$, então $bxh = 100$, e $b = 100/h$, inversamente proporcional à altura. VERDADEIRA
V – O comprimento de uma circunferência é dado pela expressão $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, como 2π é constante, então o comprimento é diretamente ao raio. VERDADEIRA
VI - A área de um círculo é dada pela expressão $A = \pi \cdot r^2$, que é diretamente proporcional ao quadrado do raio visto que, assim como considerado no item anterior, π é constante. VERDADEIRA
Com isso temos 5 afirmações verdadeiras. Alternativa D

5.3 Equações polinomiais do 1º grau

De acordo com Bianchini (2018b), "equação é toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números". Quando nos referimos a equações polinomiais do 1º grau, elas podem ser escritas na forma $ax + b = 0$, onde a e b são constantes e x é a variável. A solução para essa equação é o valor de x que satisfaz a equação.

Para resolver uma equação do 1º grau, o primeiro passo é isolar a variável x em um dos lados da equação, deixando o outro lado com um valor numérico. Isso pode ser feito somando ou subtraindo os termos da equação de ambos os lados, e em seguida, dividindo ambos os lados por a, se necessário.

Por exemplo, para resolver a equação 2x + 3 = 7, podemos subtrair 3 de ambos os lados da equação, obtendo 2x = 4. Em seguida, podemos dividir ambos os lados da equação por 2, obtendo x = 2. Portanto, a solução para a equação é x = 2.

Outro exemplo seria a equação 4x - 8 = 0. Neste caso, podemos somar 8 em ambos os lados da equação, obtendo 4x = 8. Em seguida, podemos dividir ambos os lados da equação por 4, obtendo x = 2. Portanto, a solução para a equação é x = 2.

Esse conteúdo geralmente está inserido em questões que também envolvem outros conceitos e seu uso é necessário para finalizar as questões, sendo assim, segue abaixo quatro questões resolvidas que envolvem equações de primeiro grau.

Exemplo 5.3.1. *Questão 25 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

O preço de uma corrida de táxi é obtido da seguinte forma: uma parte fixa de R$ 4,50 mais R$ 0,75 por quilômetro rodado. Sabe-se que um passageiro pagou, ao final da corrida, o total de R$ 13,50. Qual a distância, em quilômetros, percorrida por este passageiro?
Alternativas: a) 18. b) 14. c) 10. d) 12. e) 16.
Solução: Considerando como X a distancia em quilômetros, a equação para o problema proposto pode ser:

$$0,75x + 4,50 = 13,50 \iff 0,75x = 13,50 - 4,50 = 9,00 \iff x = \frac{9,00}{0,75} = 12$$

Logo a distância percorrida foi de 12 quilômetros. <u>Alternativa D</u>

Exemplo 5.3.2. *Questão 18 da prova 01/2015. (BRASIL, 2014a)*

O anfitrião de uma festa infantil tinha um número N de balas, suficiente para que cada criança presente ganhasse oito balas e ainda sobrariam quatro. Enquanto realizava a distribuição, duas crianças foram embora e não receberam as balas, cabendo então, a cada uma das demais crianças nove balas e não sobrou nenhuma. O número de crianças que recebeu balas é igual a:
Alternativas: a) 17. b) 20. c) 22. d) 25. e) 28.
Solução: Sendo x o número de crianças presentes inicialmente na festa, a quantidade N de balas pode ser escrita através da expressão:

$$N = 8x + 4$$

Como duas crianças foram embora e cada um das que sobraram passou a ter direito a 9 balas, então a quantidade N também pode ser escrita através da forma:

$$N = 9(x - 2)$$

Igualando, temos:

$$9(x-2) = 8x + 4 \iff 9x - 18 = 8x + 4 \iff 9x - 8x = 18 + 4 \iff x = 22$$

Então a quantidade de crianças que receberam bala é $22 - 2 = 20$ crianças. <u>Alternativa B</u>

Exemplo 5.3.3. *Questão 25 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

Dois amigos, Cacá e Juju, compraram um pacote fechado com várias unidades de balas. Cacá retirou do pacote 4/7 destas balas. Do total que restou no pacote, Juju retirou 8/9 e ainda sobraram exatamente seis balas no pacote. Quantas balas haviam no pacote fechado?

Alternativas: a) 50 *balas*. b) 80 *balas*. c) 126 *balas*. d) 172 *balas*. e) 188 *balas*.
Solução: Se Cacá retirou 4/7 das balas, então restou 3/7. Montando a equação, temos:

$$\frac{4}{7}x + \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{7}x + 6 = x$$

Resolvendo a segunda fração, e simplificando, temos:

$$\frac{4}{7}x + \frac{8}{21}x + 6 = x$$

Multiplicando todos os termos por 21, temos:

$$21 \cdot \frac{4}{7}x + 21 \cdot \frac{8}{21}x + 21 \cdot 6 = 21 \cdot x$$

$$12x + 8x + 126 = 21x \iff 12x + 8x - 21x = -126 \iff -x = -126 \iff x = 126$$

Alternativa C

Exemplo 5.3.4. *Questão 23 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

Em um quadrado mágico n × n (n linhas e n colunas), a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal deve ser sempre a mesma. A figura abaixo apresenta um quadrado mágico 3×3 com alguns números já conhecidos. Qual é o valor de $x + y + z$?
Alternativas: a) 58. b) 62. c) 66. d) 68. e) 72.

Figura 18 – Figura contida na questão 23 da prova 01/2020

		y
5	18	x
22	z	9

Fonte: BRASIL (2019a)

Solução: Montando as equações, temos:

$$5 + 18 + x = 22 + z + 9 = y + x + 9 = 22 + 18 + y$$

Isolando a primeira e a terceira equação, temos:

$$5 + 18 + x = y + x + 9 \iff 5 + 18 = y + 9 \iff 5 + 18 - 9 = y \iff y = 14$$

Isolando a primeira e a quarta equação, temos:

$$5 + 18 + x = 22 + 18 + y \iff 5 + x = 22 + 14 \iff x = 22 + 14 - 5 \iff x = 31$$

Isolando a primeira e a segunda equação, temos:

$$5+18+x = 22+z+9 \iff 5+18+31 = 22+z+9 \iff 5+18+31-22-9 = z \iff z = 23$$

Portanto

$$x + y + z = 31 + 14 + 23 = 68$$

Alternativa D

5.4 Equações do 2º grau completas e incompletas

As equações do 2º grau são equações que podem ser escritas na forma $ax^2+bx+c=0$, onde a, b e c são constantes e x é a variável. A solução para essa equação é o valor ou valores de x que satisfazem a equação.

Existem duas formas diferentes de equações do 2º grau: completas e incompletas. Uma equação do 2º grau completa é aquela em que todos os coeficientes a, b e c são diferentes de zero. Ela pode ter até duas raízes reais, a fórmula para obtenção dessas raizes está demonstrada a seguir.

Seja $ax^2+bx+c=0$ uma equação de 2º grau de raízes x_1 e x_2. Uma forma de encontrar essa equação para as raízes é completanto quadrados. Primeiro cada termo da equação será dividido por a.

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

Adicionando $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$, temos:

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

O primeiro lado da igualdade é um quadrado perfeito, enquanto no segundo lado deixaremos as frações com mesmo denominador.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Tirando a raiz quadrada de ambos os lados, temos:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Adicionando o termo $-\frac{b}{2a}$ de ambos os lados, temos:

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2a}\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E x_1 e x_2 serão as raízes dessa equação quando substituido o $\pm$ por $+$ e por $-$.

É importante ressaltar que a expressão $b^2 - 4ac$ é conhecida como o discriminante da equação e vai indicar quantas raízes ela tem. Sendo adotada a letra grega Δ.

Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas, se $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais e iguais. Já se temos $\Delta < 0$, a equação possui não possui raízes reais.

No caso de $\Delta \geq 0$, podemos encontrar as soluções da equação utilizando a fórmula demonstrada acima, que substituindo $b^2 - 4ac$ por Δ, fica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Um exemplo de equação do 2º grau completa é $x^2 - 4x + 3 = 0$. Nesse caso, $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$. Aplicando a fórmula da resolução de uma equação de segundo grau, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$$

Assim, as soluções para essa equação são $x = 1$ e $x = 3$.

Por outro lado, uma equação do 2º grau incompleta é aquela em que um dos coeficientes b ou c é igual a zero. Nesse caso, podemos utilizar outras técnicas para encontrar as soluções da equação. Por exemplo, a equação $x^2 - 4 = 0$ é uma equação do 2º grau incompleta em que $b = 0$, já a equação $2x^2 + 4x = 0$ é uma equação em que $c = 0$.

No primeiro caso (equação $x^2 - 4 = 0$) podemos isolar x^2 no lado esquerdo da equação, obtendo:$x^2 = 4$. Em seguida, podemos tirar a raiz quadrada de ambos os lados da equação, obtendo: $x = \pm 2$. Assim, as soluções para essa equação são $x = 2$ e $x = -2$. Note que como o coeficiente de x é zero, a equação não possui a incógnita x explicitamente presente na equação. Neste caso, para encontrar as soluções, podemos simplesmente isolar x ao resolver a equação.

Já no segundo caso (equação $2x^2 + 4x = 0$), podemos colocar o $2x$ em evidência, ficando $2x(x + 2) = 0$, que tem como soluções $2x = 0 \longleftrightarrow x = 0$ e $x + 2 = 0 \longleftrightarrow x = -2$.

Da mesma maneira que ocorre com equações de primeiro grau, as equações de segundo grau podem estar contextualizadas em questões que também envolvem outros conteúdos. Na sequência estão resolvidas três questões que envolvem basicamente a resolução de uma equação dessa forma, entretanto a aplicação da fórmula de Bháskara também será notada em questões de outros conteúdos mais a frente nesse trabalho.

Exemplo 5.4.1. *Questão 17 da prova 01/2013. (BRASIL, 2012a)*

Existem dois números reais que são raízes da equação $x^2 - 12x + 32 = 0$. O quociente entre o menor e o maior vale:
Alternativas: a) 2. b) 4. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{3}{8}$. e) 0.
Solução: Os coeficientes para essa equação serão: $a = 1$, $b =$ ˘12 e $c = 32$. Com isso o valor do coeficiente DELTA será:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 144 - 128 = 16$$

E, as raízes da equação serão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{12-4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

O quociente será $\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
<u>Alternativa C</u>

Exemplo 5.4.2. *Questão 19 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

Uma das raízes da equação $x^2 + px + 8$ é a metade da outra. O valor da menor raiz positiva é:
Alternativas: a) 4. b) 3. c) 2. d) 1. e) 0.
Solução: Se uma das raízes é a metade da outra, então uma será x_1 e a outra $2x_1$, o produto das duas é:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \iff x_1 \cdot 2x_1 = \frac{8}{1} \iff 2x_1^2 = 8 \iff x_1^2 = 4 \iff x_1 = \pm 2$$

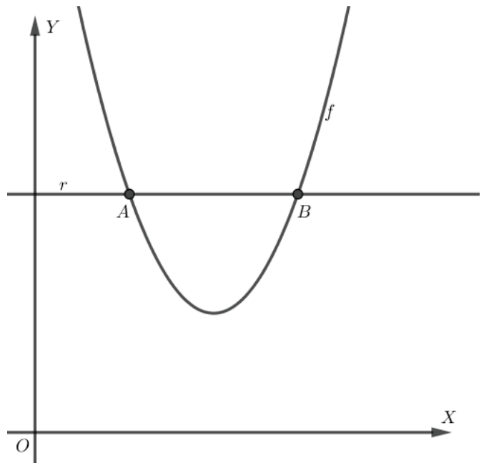
Portanto as raízes serão -2 e -4 ou 2 e 4, como ele diz que uma é positiva, então a menor raiz positiva é igual a 2. <u>Alternativa C</u>.

Exemplo 5.4.3. *Questão 18 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

Ao traçar a reta r, paralela ao eixo das abscissas passando por um ponto do plano cartesiano, intersecta-se o gráfico da função real $f(x) = x^2 - 6x + 11$ nos pontos A e B, como mostra a figura. Sabe-se que o segmento AB tem comprimento 4. Assim, a distância de AB ao eixo das abscissas é:
Alternativas: a) 6. b) 4. c) 5. d) 7. e) 8.
Solução: Os pontos A e B serão raízes da função de segundo grau que teria a reta r como eixo x, ou seja: $y = x^2 - 6x + 11 - d$.
A soma das raízes dessa equação é:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{1} = 6$$

Figura 19 – Figura contida na questão 18 da prova 01/2018



Fonte: BRASIL (2017b)

.

Já a diferença é justamente a distância entre A e B é $x_2 - x_1 = 4$
Os números que somados dão 6 e subtraídos dão 4 são 5 e 1.
E o produto dessas raízes será:

$$x_2 \cdot x_1 = 4 \iff 5 \cdot 1 = \frac{11-d}{1} \iff 5 = 11 - d \iff d = 11 - 5 = 6$$

Alternativa A

5.5 Sistema de equações do 1º grau e do 2º grau

Um sistema de equações é um conjunto de duas ou mais equações que devem ser resolvidas simultaneamente. Existem dois tipos principais de sistemas de equações: o sistema de equações do 1º grau e o sistema de equações do 2º grau.

Um sistema de equações do 1º grau é um conjunto de equações lineares que podem ser escritas na forma $ax + by = c$. O objetivo é encontrar os valores de x e y que satisfazem todas as equações do sistema simultaneamente. Existem vários métodos para resolver sistemas de equações do 1º grau, dentre eles se destaca o método da adição e o método da substituição.

No método da adição o objetivo é buscar dois termos, sendo um em cada equação, que se anulam. Dessa forma, é necessário que os coeficientes de um das duas incógnitas tenham o mesmo valor e sinais opostos.

Por exemplo, o sistema de equações: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ pode ser resolvido pelo método da adição, pois ao somarmos as duas equações o termo y e o termo $-y$ se cancelarão, sobrando a equação $2x = 10$, que tem como solução $x = 5$. Para saber o valor de y basta substituir o valor encontrado de x em uma das equações, ficando $5 + y = 8 \iff y = 3$. Logo a solução desse sistema é o par ordenado $(5,\ 3)$.

Outro sistema de equação que também pode ser resolvido pelo método da substituição é $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$, entretanto, por não ter termos com mesmo valor e sinais opostos, será necessário multiplicar a primeira equação inteira por -2, deixando o sistema da seguinte forma: $\begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$. Somando as equações teremos: $y = -1$, e aplicando esse valor em uma das equações, temos $x + y = 5 \iff x + (-1) = 5 \iff x = 5 + 1 = 6$, ficando como solução o par ordenado $(1,\ -1)$.

Outra maneira de resolver sistemas de equações de primeiro grau é através do método da substituição, que consiste em isolar uma das duas incógnitas em alguma das equações, substituir na outra equação a expressão encontrada, ficando uma equação com apenas uma incógnita; e por fim, resolver a equação de uma incógnita encontrada e substituir o valor, em uma das equações, para encontrar o valor da outra incógnita (BIANCHINI, 2018c).

Por exemplo, o sistema de equações: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ pode ser resolvido utilizando o método da substituição. Isolando y na primeira equação, temos: $y = \dfrac{8 - 2x}{3}$. Substituindo esse valor de y na segunda equação, temos: $4x - 2\left(\dfrac{8 - 2x}{3}\right) = 2$. Resolvendo essa equação, encontramos $x = 1$. Substituindo esse valor de x na primeira equação, encontramos $y = 2$. Portanto, a solução para esse sistema de equações é $x = 1$ e $y = 2$.

Já um sistema de equações do 2º grau é um conjunto de equações que envolvem uma ou mais equações do 2º grau. Essas equações podem ser escritas na forma $ax^2 + bx + c$ =0, onde a, b e c são constantes. O objetivo é encontrar os valores de x que satisfazem todas as equações do sistema simultaneamente.

Existem várias maneiras de resolver sistemas de equações do 2º grau, dependendo do número de equações e do tipo de equações envolvidas. Por exemplo, um sistema de duas equações do 2º grau pode ser resolvido utilizando a eliminação de uma das variáveis, ou utilizando a substituição. Já um sistema de três ou mais equações do 2º grau pode ser resolvido utilizando a eliminação de uma das variáveis em cada equação, até restar apenas uma equação do 2º grau, que pode ser resolvida utilizando os conceitos já tratatos anteriormente.

Por exemplo, o sistema de equações: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$ pode ser resolvido eliminando a variável y. Somando as duas equações, temos: $2x^2 = 50 \iff x^2 = 25 \iff x = \pm 5$. Substituindo esse valor de x^2 na primeira equação, temos: $25 + y^2 = 34 \iff y^2 = 9 \iff y = \pm 3$. E com isso a solução para esse sistema são os pares ordenados $(-5,\ -3)$, $(-5,\ 3)$,

$(5,\ -3)$ e $(5,\ 3)$.

Segue abaixo resolução de três questões sobre o tema.

Exemplo 5.5.1. *Questão 22 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

João e Maria têm juntos 50 anos. Sabe-se que João é 10 anos mais velho que Maria. A idade de João é:

Alternativas: a) 20 anos; b) 30 anos; c) 35 anos; d) 40 anos; e) 45 anos.

Solução: Sendo J a idade de João e M a de Maria, podemos formar as seguintes equações:

$$\begin{cases} J + M = 50 \\ J - M = 10 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$$2J = 60 \Longleftrightarrow J = \frac{60}{2} = 30$$

Alternativa B

Exemplo 5.5.2. *Questão 24 da prova 01/2019. (BRASIL, 2018a)*

Carlos e Emanuel trabalham em uma loja especializada em um determinado produto. O salário de cada um é composto por um valor fi xo mais uma comissão por vendas desse produto. Carlos recebe R$ 1.200,00 reais de salário fixo mais "a" reais por unidade vendida, enquanto Emanuel recebe R$ 1.800,00 de salário fixo mais "b" reais por unidade vendida. Se cada um vender 60 unidades no mês, seus salários serão iguais. Se cada um vender 120 unidades, o salário de Carlos será 11/10 do salário de Emanuel. Qual será o salário de Carlos se ele vender 20 unidades no mês?

Alternativas:

a) $R\$ \ 2.100,00$ b) $R\$ \ 2.500,00$ c) $R\$ \ 3.200,00$ d) $R\$ \ 4.250,00$ e) $R\$ \ 5.030,00$

Solução: O salário de Carlos e de Emanuel, podem ser dados pelas equações:

$$\begin{cases} C = 1200 + ax \\ E = 1800 + bx \end{cases}$$

Se cada um vender 60 unidades terão o mesmo salário, logo

$$1200 + 60a = 1800 + 60b \Longleftrightarrow 60a - 60b = 1800 - 1200 \Longleftrightarrow 60(a - b) = 600$$

$$a - b = \frac{600}{60} = 10$$

Se cada um vender 120 unidades Carlos receberá 11/10 do salário de Emanuel, logo:

$$1200 + 120a = 11/10(1800 + 120b) \Longleftrightarrow 1200 + 120a = 1980 + 132b$$

$$120a - 132b = 1980 - 1200 \iff 12(10a - 11b) = 780 \iff 10a - 11b = \frac{780}{12} = 65$$

Logo o sistema ficará:

$$\begin{cases} a - b = 10 \\ 10a - 11b = 65 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira por -11, temos:

$$\begin{cases} -11a + 11b = -110 \\ 10a - 11b = 65 \end{cases}$$

Somando as duas equações, tempos

$$-a = -45 \iff a = 45$$

Sendo assim o salário de Carlos de vender 20 unidades é:

$$C = 1200 + ax = 1200 + 45 \cdot 20 = 1200 + 900 = R\$\ 2.100,00$$

Alternativa A

Exemplo 5.5.3. *Questão 15 da prova 84/2022. (BRASIL, 2022a)*

No último interclasse realizado em um dos campi do Ifes, o time de futebol de salão do 1º Ano A, de um dos Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio, fez uma campanha emblemática de 10 jogos, somando 26 pontos e tornando-se campeão invicto do torneio nessa modalidade. Sabendo que, no caso de vitória, o time soma 3 pontos; de empate, soma 1 ponto e, de derrota, nenhum ponto, podemos afirmar que o número de empates nessa campanha foi de:

Alternativas: a) 8. b) 6. c) 4. d) 2. e) 1.

Solução: Sendo V o número de vitórias e E o número de empates, temos:

$$\begin{cases} V + E = 10 \\ 3V + E = 26 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3, temos:

$$\begin{cases} 3V + 3E = 30 \\ 3V + E = 26 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos:

$$2E = 4 \iff E = \frac{4}{2} = 2$$

Alternativa D

5.6 Fatoração e produtos notáveis

Segundo Júnior e Castrucci (2018d), "fatorar um polinômio, quando for possível, significa escrever esse polinômio como uma multiplicação de dois ou mais polinômios", ou seja, é o processo de decompor uma expressão algébrica em seus fatores. Ela é muito útil para simplificar e resolver equações, pois permite a identificação de fatores comuns e a aplicação das propriedades dos produtos notáveis.

Existem várias técnicas para fatorar expressões algébricas, uma delas é colocar um fator comum em evidência, outra é realizar a fatoração por agrupamento, colocando um fator comum em evidência em dois dos quatro termos do polinômio.

Os produtos notáveis são expressões algébricas que aparecem com frequência e que possuem fatores específicos. Conhecê-los pode facilitar muito o processo de fatoração.

Alguns exemplos de fatoração e produtos notáveis são:

- Fator em evidência: $a(x+y) = ax + ay$
- Fatoração por agrupamento: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Quadrado da soma: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Quadrado da diferença: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Produto da soma pela diferença: $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$
- Cubo da soma: $(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Cubo da diferença: $(a-b)^3 = (a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b) = a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Soma de cubos: $(a^3+b^3) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$
- Diferença de cubos: $(a^3-b^3) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

Por exemplo, se quisermos fatorar a expressão $xy + 3x + 2y + 6$, o método do agrupamento é o indicado, onde inicialmente podemos fatorar como $x(y+3) + 2(y+3)$, que na sequência pode ser fatorado novamente como $(x+2)(y+3)$. Já em relação a expressão $x^2 + 6x + 9$, podemos identificar que ela é um quadrado da soma, ou seja: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Já para fatorar a expressão $x^3 - 8$, podemos identificar que ela é um produto da diferença pela soma, ou seja: $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

Além de ser usado para polinômios, a fatoração também pode ser uma ferramenta para facilitar operações matemáticas de números grandes sem o uso de calculadores, por exemplo, o número $1000^2 - 999^2$ não seria tão facilmente calculado na forma que ele está escrito, entretanto se escrevermos como uma diferença de quadrados, ele ficaria $(1000 + 999)(1000 - 999) = 1999 \cdot 1 = 1999$, um cálculo que ficou mais simples usando a fatoração.

Ao fatorar uma expressão, é importante verificar se os fatores obtidos estão corretos, multiplicando-os novamente e comparando com a expressão original. A fatoração e o conhecimento dos produtos notáveis são ferramentas importantes na álgebra e podem ser aplicados em diversas áreas, como na resolução de equações, na simplificação de frações, na obtenção de raízes de funções e na resolução de problemas de geometria analítica.

A seguir temos três questões resolvidas de provas de ingresso no IFES que fazem uso desses conceitos.

Exemplo 5.6.1. *Questão 22 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

A expressão $\dfrac{123456^2 - 123455^2 - 11}{300}$ é equivalente a:
Alternativas: a) 823. b) 913. c) 512. d) 12345. e) 234.
Solução: Escrevendo $123456^2 - 123455^2$ como uma diferença de quadrados, temos:

$$123456^2 - 123455^2 = (123456 + 123455)(123456 - 123455) = 246911 \cdot 1 = 246911$$

Aplicando na nossa expressão:

$$\frac{123456^2 - 123455^2 - 11}{300} = \frac{246911 - 11}{300} = \frac{246900}{300} = 823$$

Alternativa A

Exemplo 5.6.2. *Questão 26 da prova 01/2015. (BRASIL, 2014a)*

Uma maneira mais simplificada de escrever o valor de $A = \dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$; $xy = 0$, é
Alternativas: a) 4. b) $\dfrac{2}{x}$. c) 0. d) $\dfrac{2x^2 + 2y^2}{xy}$. e) $\dfrac{2}{y}$.
Solução: Aplicando os produtos notáveis do quadrado da soma e do quadrado da diferença, temos:

$$A = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$$

$$A = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{xy}$$

$$A = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{xy} = \frac{4xy}{xy}$$

$$A = 4$$

Alternativa A

Exemplo 5.6.3. *Questão 20 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

O valor da expressão $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ é:

Alternativas: a) $\sqrt{2}$. b) 2. c) 1. d) $-\sqrt{2}$. e) 0.

Solução: Fazendo a multiplicação distributiva temos:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2\cdot 2+2\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2} = \sqrt{2}$$

Alternativa A.

Exemplo 5.6.4. *Questão 27 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

O produto entre dois números é 391 e a soma dos seus quadrados é 818. Determine o valor da diferença entre os quadrados desses números, sabendo que um é 6 unidades maior do que o outro.

Alternativas: a) 96. b) 182. c) 240. d) 380. e) 396.

Solução: As informações dadas pela questão, são:

$$x\cdot y = 391 \qquad x^2+y^2 = 818 \qquad x-y = 6$$

Fazendo o produto de $(x+y)^2$, temos:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = x^2+y^2+2\cdot xy = 818+2\cdot 391 = 1600 \iff x+y = \sqrt{1600} = 40$$

Para fazer a diferença entre os quadrados, basta fazer o produto da soma pela diferença

$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = 40\cdot 6 = 240$$

Alternativa C

5.7 Noção de função

Uma função f é uma lei que associa cada elemento x em um conjunto D exatamente a um elemento $f(x)$, em um conjunto E (SOUZA, 2018d). Dessa forma cada elemento do primeiro conjunto (chamado de domínio) está associado a um único elemento do segundo conjunto (chamado de contradomínio).

Em termos matemáticos, uma função é denotada por $f(x)$, em que f é o nome da função e x é a variável de entrada, que pertence ao domínio. O resultado da função é denotado por $f(x)$ ou y, que é a variável de saída, que pertence ao contradomínio.

Por exemplo, a função $f(x) = x + 4$ é uma função que associa cada número x do domínio aos seus respectivos dobro no contradomínio. Se escolhermos $x = 3$, então $f(x) = x + 4 = 3 + 4 = 7$.

As funções podem ser representadas graficamente em um plano cartesiano, em que o eixo horizontal, também chamado de eixo das abscissas, representa o domínio, já o eixo vertical, chamado de eixo das ordenadas, representa o contradomínio. O gráfico de uma função pode ser utilizado para visualizar a relação entre a entrada e a saída da função e para identificar características como pontos de máximo ou mínimo, assim como a inclinação da função.

Existem vários tipos de funções, como funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras. Cada tipo de função apresenta características específicas em relação à sua forma e comportamento em relação ao seu domínio e contradomínio. No caso do conteúdo abordado no ensino fundamental, as funções estudadas se limitam a funções lineares e quadráticas, conhecidas também como funções de primeiro e de segundo grau, respectivamente.

As funções são amplamente utilizadas em diversas áreas da matemática e em outras ciências, como física, engenharia, economia, entre outras, para modelar fenômenos e processos e obter resultados quantitativos que possam ser interpretados e utilizados na prática.

No caso de funções lineares, basta termos dois pares ordenadas para conhecermos a função, ela é da forma $y = ax + b$ onde a é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear, o primeiro se refere à tangente do ângulo de inclinação dessa reta com a horizontal e o segundo é o ponto em que essa reta intercepta o eixo y.

Dados dois pares ordenados $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$, o coeficiente angular a e o coeficiente linerar b podem ser calculados fazendo um sistema de equções. Olhe o sistema a seguir:

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b \\ y_2 = a \cdot x_2 + b \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos: $y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$, o que gera uma expressão para o coeficiente linear $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, e após a determinação do coeficiente angular, o valor de b pode ser facilmente calculado através da própria forma geral $y = ax + b$, tomando como referência um dos pontos dados.

Em relação à função de segunda grau, o gráfico da mesma resulta em uma parábola. Seus principais pontos que merecem atenção são os pontos notáveis, dois deles já foram estudados no conteúdo de "Equações do 2° grau"que são as raízes da equação, elas se tratam dos pontos localizados sobre o eixo x nos quais a função corta o mesmo, que conforme foi mencionado anteriormente, esses pontos podem se tratar de um só ($\Delta = 0$) ou até mesmo nem existirem ($\Delta < 0$).

Outro ponto notável é o vértice, que possui abscissa com o valor médio das raízes dessa função, logo o valor da abscissa do vértice é:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{\dfrac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

.

Já a ordenada do vértice será:

$$y_V = a \cdot (x_V)^2 + b \cdot (x_V) + c = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo, o vértice possui coordenadas $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, esse ponto representa o valor mínimo da parábola quando a mesma possui sua concavidade para cima (a>0) e o valor máximo quando a concavidade é para baixo (a<0).

Na sequência temos três questões sobre o referido conteúdo.

Exemplo 5.7.1. *Questão 16 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

O gráfico da função $y = ax + 12$ corta o eixo das abscissas no ponto de abscissa 4. O valor de a, nessas condições é

Alternativas: a) -1. b) -2. c) -3. d) 3. e) 1.

Solução: Se a abscissa é 4, então temos que o ponto (4, 0) faz parte dessa função, logo:

$$y = ax + 12 \iff 0 = a \cdot 4 + 12 \iff -4a = 12 \iff 4a = -12 \iff a = \frac{-12}{4} = -3$$

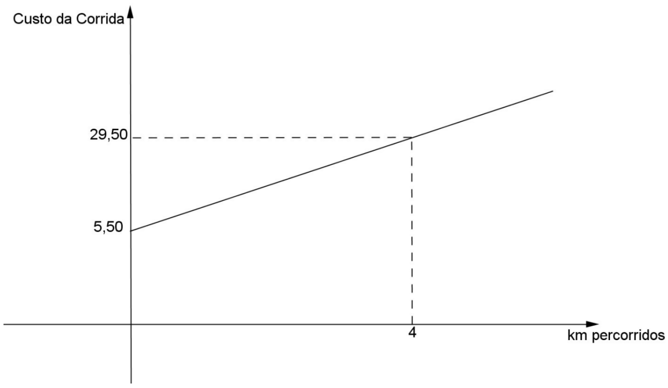
<u>Alternativa C</u>

Exemplo 5.7.2. *Questão 18 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

O esboço gráfico da função abaixo representa o custo da corrida de taxi.

João pegou um taxi na rodoviária e pediu para ir até o Shopping " Compre Feliz". Depois de percorridos 20 km ele pediu para o motorista parar na Praia "Sol Forte", para tirar umas fotos. O motorista parou 2km depois do pedido de João. O custo da corrida de taxi até a parada na Praia '"Sol Forte" foi de:

Figura 20 – Figura contida na questão 18 da prova 01/2016



Fonte: BRASIL (2015a)

Alternativas: a) $R\$\ 150,00$. b) $R\$\ 137,50$. c) $R\$\ 125,50$. d) $R\$\ 200,50$. e) $R\$\ 250,50$.
Solução: Determinando o coeficiente angular da função representada utilizando os pontos $(0,\ 5,50)$ e $(4,\ 29,50)$, temos:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{29,50 - 5,50}{4 - 0} = \frac{24,00}{4} = 6,00$$

Aplicando esse valor em um ponto para achar o valor fixo, temos:

$$y = ax + b \Longleftrightarrow 5,50 = 6,00 \cdot 0 + b \Longleftrightarrow b = 5,50$$

Para uma distância de 20 km, temos

$$y = 6,00 \cdot x + 5,50 \Longleftrightarrow y = 6,00 \cdot 20 + 5,50 \Longleftrightarrow y = 120,00 + 5,50 \Longleftrightarrow y = 125,50$$

Alternativa C

Exemplo 5.7.3. *Questão 20 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

A função $p(t) = \dfrac{125t - 1000}{25}$ representa o peso médio, em quilogramas, de um animal da espécie " azul belo" . O intervalo de tempo para o qual $10 < p(t) \leq 50$ pertence ao conjunto:
Alternativas: a) $[9, 19]$. b) $[5, 15]$. c) $[1, 10[$. d) $]9, 15[$. e) $]19, 25[$.
Solução: Para sabermos o intervalo de tempo, basta resolvermos a inequação:

$$10 < p(t) \leq 50 \Longleftrightarrow 10 < \frac{125t - 1000}{25} \leq 50$$

Multiplicando todos os termos por 25, temos:

$$10 \cdot 25 < \frac{125t - 1000}{25} \cdot 25 \leq 50 \cdot 25$$

$$250 < 125t - 1000 \leq 1250$$

Somando 1000 em cada termo, obtemos:

$$250 + 1000 < 125t - 1000 + 1000 \leq 1250 + 1000 \Longleftrightarrow 1250 < 125t \leq 2250$$

E por fim, dividindo cada termo, por 125, chegaremos a:

$$\frac{1250}{125} < \frac{125t}{125} \leq \frac{2250}{125}$$

$$10 < t \leq 18$$

Dentre os intervalos disponibilizados, o único que abrange todo o intervalo encontrado é $[9, 19]$. Alternativa A

5.8 Sequências numéricas recursivas e não recursivas

Uma sequência numérica é um conjunto de números organizados em uma determinada ordem. As sequências podem ser definidas de várias formas, uma delas é por meio de uma regra ou padrão que determina como obter cada termo da sequência a partir do seu antecessor. Nesse contexto, existem duas formas de definir sequências numéricas: recursivas e não recursivas.

Segundo Júnior e Castrucci (2018b) "uma sequência é recursiva quando cada termo depende do termo anterior ou de termos anteriores". Em outras palavras, é quando cada termo da sequência é obtido a partir do seu antecessor, aplicando uma determinada regra ou padrão. Por exemplo, a sequência de Fibonacci é uma sequência numérica recursiva em que cada termo é a soma dos dois termos anteriores da sequência:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ ...$$

O primeiro termo da sequência é 0, o segundo é 1 e, a partir do terceiro termo, cada termo é a soma dos dois antecessores. Ou seja, o terceiro termo é $0 + 1 = 1$, o quarto termo é $1 + 1 = 2$, o quinto termo é $1 + 2 = 3$ e assim por diante.

Por outro lado, as sequências não recursivas são aleatórias, e seus termos não podem ser determinados por uma regra (BIANCHINI, 2018c). Um exemplo de uma sequência numérica não recursiva são os números primos.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$$

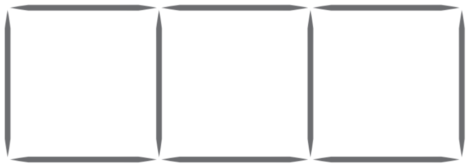
As sequências numéricas são amplamente utilizadas na matemática e em outras áreas, como a física e a engenharia, para modelar fenômenos e processos e obter resultados quantitativos que possam ser interpretados e utilizados na prática.

Segue abaixo a resolução da única questão encontrada nas provas analisadas que envolvem esse conteúdo.

Exemplo 5.8.1. *Questão 21 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

Uma pessoa brinca de arrumar palitos fazendo uma sequência de quadrados como na figura abaixo. Sabendo que ele construiu n quadrados de acordo com o padrão apresentado na imagem, pode-se afirmar que ele utilizou um número de palitos igual a:
Alternativas: a) $4n$. b) $4n + 2$. c) $3n + 1$. d) $3n + 2$. e) $\frac{n}{4}$.

Figura 21 – Figura contida na questão 21 da prova 01/2018



Fonte: BRASIL (2017b)

Solução: Para construir um quadrado, são necessários quatro palitos, já para construir o segundo quadrado, são necessários mais três palitos, visto que um palito será aproveitado do quadrado anterior. Dessa forma, para cada novo quadrado do segundo em diante são necessários três palitos, ou seja, o número de palitos para construir n quadrados será $3n + a$.
Para determinar o valor de a, iremos fazer a comparação para o primeiro, segundo e terceiro quadrado. Para o primeiro, temos $3 \cdot 1 + a = 4$, logo $a = 1$, já para o segundo temos $3 \cdot 2 + a = 7$, o que também implica em $a = 1$, e para o terceiro temos $3 \cdot 3 + a = 10$, resultando também em $a = 1$, de modo que podemos afirmar que para construir **n** quadrados são necessários $3n + 1$ palitos. <u>Alternativa C</u>

6 Geometria no exame de seleção

De acordo com Rodrigues, Barbosa e Moreira (2021), "A geometria como matéria integrante da matemática, é essencial para o desenvolvimento humano. O seu estudo contribui para a melhoria das habilidades em resolver situações problemas existentes na vida prática", sua importância faz dela, assim como Álgebra, a ser uma unidade temática no currículo do ensino fundamental. Nesse capítulo será abordado os subtópicos que envolvem o tema, com a mesma metodologia usada nos capítulos anteriores.

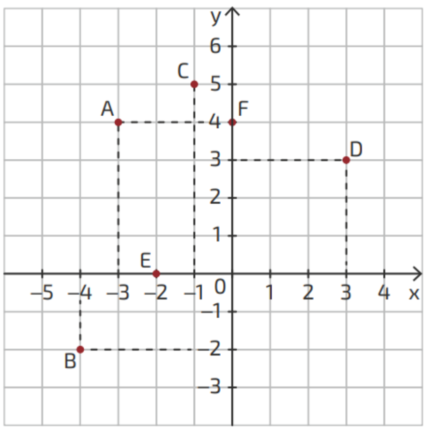
6.1 Plano cartesiano

O plano cartesiano, também conhecido como sistema de coordenadas cartesianas, é uma forma de representar graficamente pontos e figuras no espaço bidimensional. Ele foi criado pelo matemático francês René Descartes, no século XVII, e é amplamente utilizado na matemática, física, engenharia e outras áreas.

O plano cartesiano é composto de duas retas numeradas, uma horizontal e outra vertical, que se cruzam perpendicularmente em um ponto chamado origem. A reta horizontal é chamada eixo das abscissas (eixo x) e a reta vertical, eixo das ordenadas (eixo y) (PATARO; BALESTRI, 2018b).

Abaixo nós temos a figura 22, contendo um plano cartesiano com os pontos A (– 3, 4), B (– 4, – 2) , C (– 1, 5) , D (3, 3) , E (– 2, 0) e F (0, 4) representados nele.

Figura 22 – Plano Cartesiano

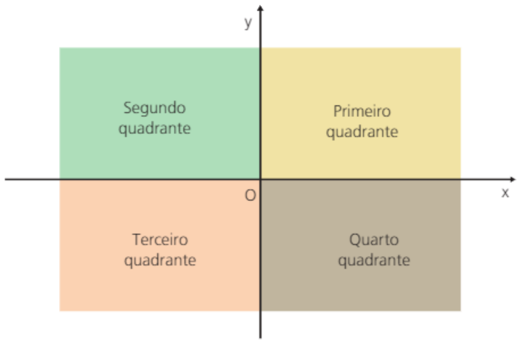


Fonte: Pataro e Balestri (2018b)

Conforme mostrado na figura 22, as coordenadas de um ponto no plano cartesiano são determinadas pela sua distância à origem ao longo dos eixos x e y. A distância horizontal é medida a partir da origem para a direita, com valores positivos, e para a esquerda, com valores negativos. A distância vertical é medida a partir da origem para cima, com valores positivos, e para baixo, com valores negativos.

Dessa forma, o plano cartesiano é dividido pelos seus eixos em quatro regiões, que também são chamados de quadrantes, de modo que um ponto estará em um dos quadrantes ou sobre um dos eixos. A figura 23 mostra essa divisão.

Figura 23 – Quadrantes de um plano cartesiano

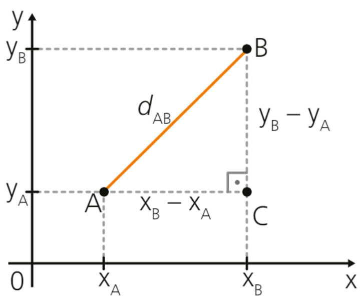


Fonte: (TRESOLAVY, 2019a)

No plano cartesiano, é possível representar retas, curvas e outras figuras geométricas por meio de equações matemáticas que relacionam as coordenadas x e y dos pontos da figura. Por exemplo, a equação $y = 2x + 1$ representa uma reta que passa pelo ponto $(0, 1)$ e tem inclinação de 2.

Algo que pode ser calculado em planos cartesianos é a distância entre pontos, que é determinado através do teorema de Pitágoras. Dados dois pontos no plano cartesiano $(x_A,\ y_A)$ e $(x_B,\ y_B)$, a distância entre eles é $d = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$

Figura 24 – Cálculo da distância entre dois pontos em um plano cartesiano



Fonte: Tresolavy (2019c)

Além de determinar a distância entre dois pontos, é possível utilizar o plano cartesiano para resolver problemas matemáticos e físicos, como calcular áreas e volumes e modelar movimentos e trajetórias de objetos.

Segue abaixo uma questão sobre o tema, embora outras questões serão vistas ao longo desse trabalho no estudo de outros conteúdos.

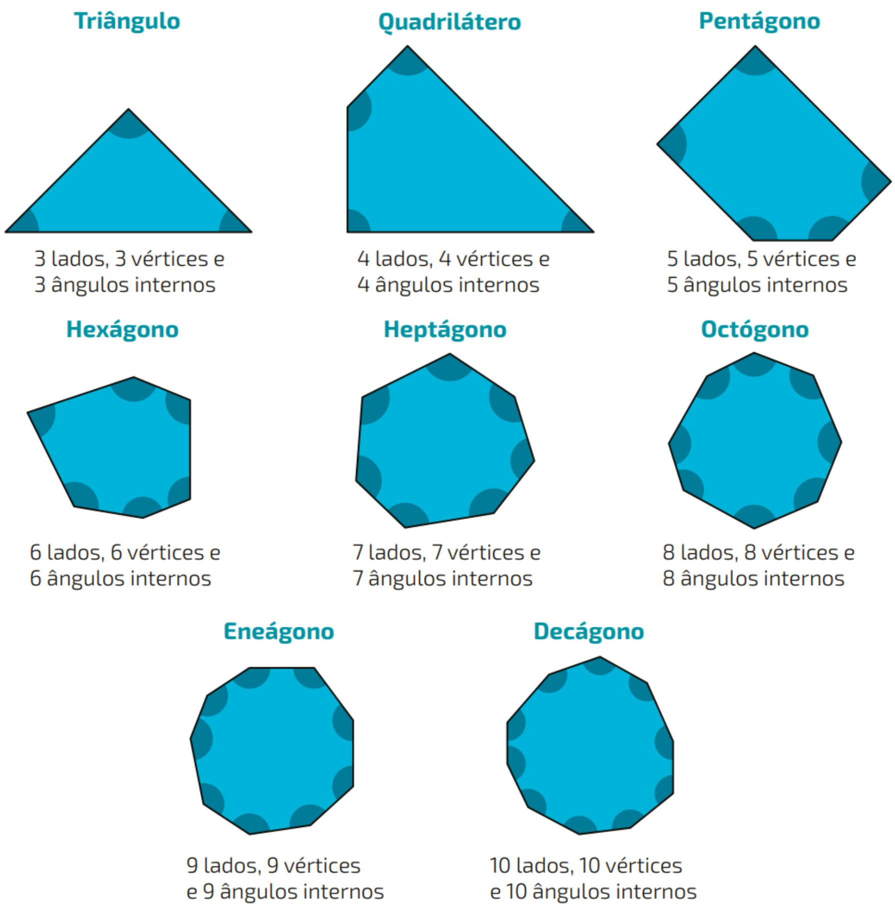
Exemplo 6.1.1. *Questão 26 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

Uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Qual a distância, no plano cartesiano, do ponto sobre o gráfico de **f** de abcissa 0 (zero) para o ponto de abcissa 4? Alternativas: a) 1. b) $3\sqrt{5}$. c) $\sqrt{41}$. d) 7. e) $4\sqrt{2}$.
Solução: O valor de $f(0)$ é $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = 0 - 0 - 4 = -4$, já o valor de $f(4)$ é $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$, com isso, os pontos formados são $(0,\ -4)$ e $(4,\ 0)$ e a distância entre eles será: $d = \sqrt{(4-0)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{2 \cdot 4^2} = 4\sqrt{2}$
<u>Alternativa E</u>

6.2 Classificação de polígonos

Os polígonos são figuras geométricas planas fechadas formadas por segmentos de reta que se encontram apenas em suas extremidades. Eles podem ser classificados de acordo com o número de lados e ângulos que possuem. Veja a figura 25 seguir:

Figura 25 – Classificação dos polígonos de acordo com a quantidade de lados, vértices e ângulos



Fonte: Pataro e Balestri (2018a)

Os polígonos também podem ser classificados de acordo com a forma dos ângulos e lados:

- Polígonos regulares: possuem todos os lados e ângulos iguais. Exemplos: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular.
- Polígonos irregulares: possuem lados e ângulos de tamanhos diferentes. Exemplos: trapézio, hexágono irregular.
- Polígonos convexos: possuem todos os ângulos internos menores que 180 graus. Exemplos: triângulo, quadrado, pentágono regular.
- Polígonos côncavos: possuem pelo menos um ângulo interno maior ou igual a 180 graus. Exemplos: estrela de cinco pontas, losango com um ângulo interno maior que 180 graus.

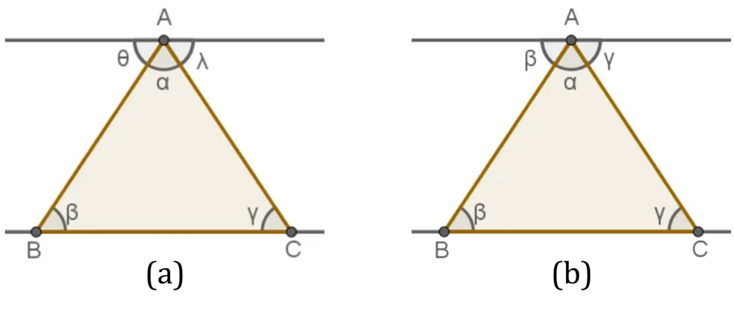
Essas são as principais classificações de polígonos. Conhecer essas características é importante para o estudo da geometria plana e para a resolução de problemas envolvendo polígonos.

A respeito especificamente dos polígonos convexos, eles podem ser identificados e classificados pela soma dos seus ângulos internos ou até mesmo o número de diagonais. A expressões para a soma dos ângulos internos S_n e do número de diagonais d estão demonstradas a seguir.

Primeiro iremos demonstrar a soma dos ângulos internos de um triângulo. Na figura 26a temos um triângulo com seus ângulos internos α, β e γ, e os ângulos θ e λ, traçados a partir de uma reta paralela ao lado BC que formam junto com que formam juntos com α um ângulo raso.

Na figura 26b está mostrado que θ e λ são congruentes, respectivamente, aos ângulos β e γ, pois são alternos externos. Logo, α, β e γ juntos formam um ângulo raso, ou seja, a soma deles é 180°.

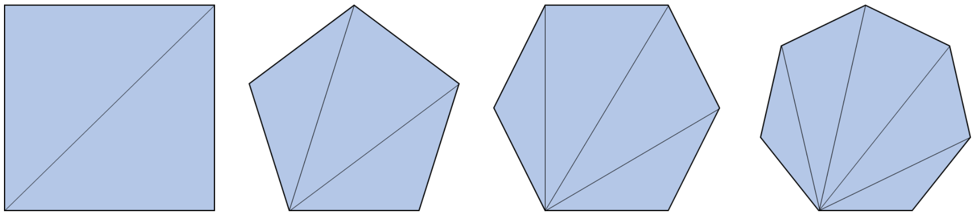
Figura 26 – Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Para demonstrar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo, vamos enxergar que um polígono com quatro lados pode ser dividido em triângulos, a divisão de um quadrilátero, pentágono, hexágono e heptágono estão mostrados na figura 27.

Figura 27 – Polígonos divididos em triângulos



Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que um quatrilátero pode ser dividido em dois triângulos, já um pentágono em três, um hexágono em quatro e um heptágono em cinco, logo, podemos afirmar que um polígono de n lados pode ser dividido em $n-2$ triângulos, logo a equação para a soma dos lados internos de um polígono é:

$$S_n = (n-2) \cdot 180°$$

Em relação à quantidade de diagonais, é notável que uma diagonal é formada pela ligação de dois vértices, porém cada vértice pode ser ligado a $n-3$ vértices, pois ele não pode ser ligado a ele mesmo e nem aos dois adjacentes, pois essa ligação forma um lado e não uma diagonal. Porém, ao fazermos isso, contaremos as diagonais duas vezes, logo, o número de diagonais de um polígono convexo é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

A seguir uma questão de autoria própria sobre o tema:

Exemplo 6.2.1. *Questão de autoria própria.*

Um polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 1080°, tem um ângulo igual a $\dfrac{x}{3} + 90°$, outro igual a $\dfrac{x}{5} + 108°$ e os demais igual a x. Esse polígono se trata de um:
Alternativas:
a) Pentágono regular.
b) Pentágono não regular.
c) Heptágono não regular
d) Octógono regular
e) Octógono não regular.
Solução: Como a soma dos ângulos internos é igual a 1080°, temos que:

$$S = (n-2) \cdot 180° \iff 1080° = (n-2) \cdot 180°$$

$$n-2=\frac{1080°}{180°}=6 \iff n=6+2=8$$

Logo, o polígono se trata de um octógono. Descobrindo o valor de x, temos:

$$\frac{x}{3}+90°+\frac{x}{5}+108°+x+x+x+x+x+x=1080°$$

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+6x=1080°-90°-108°$$

$$\frac{5x+3x+90x}{15}=882° \iff 98x=15\cdot 882°$$

$$98x=13.230° \iff x=\frac{13.230°}{15}=135°$$

Portanto, o octógono terá:

6 ângulos iguais a 135°.

1 ângulo igual a $\frac{x}{3}+90°=\frac{135\circ}{3}+90°=135°$.

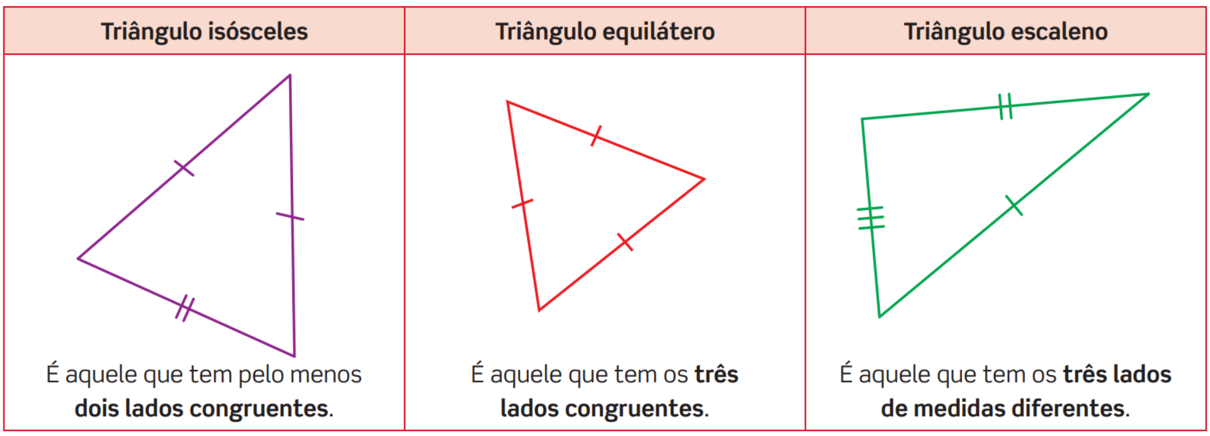
Outro igual a $\frac{x}{5}+108°=\frac{135°}{5}+108°=135°$.

O que faz desse octógono um polígono regular. <u>Alternativa D</u>

6.3 Classificação de triângulos quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras: quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos. Quanto aos lados, os triângulos podem ser classificados em isósceles, equilátero e escaleno. A figura 28 mostra essa classificação.

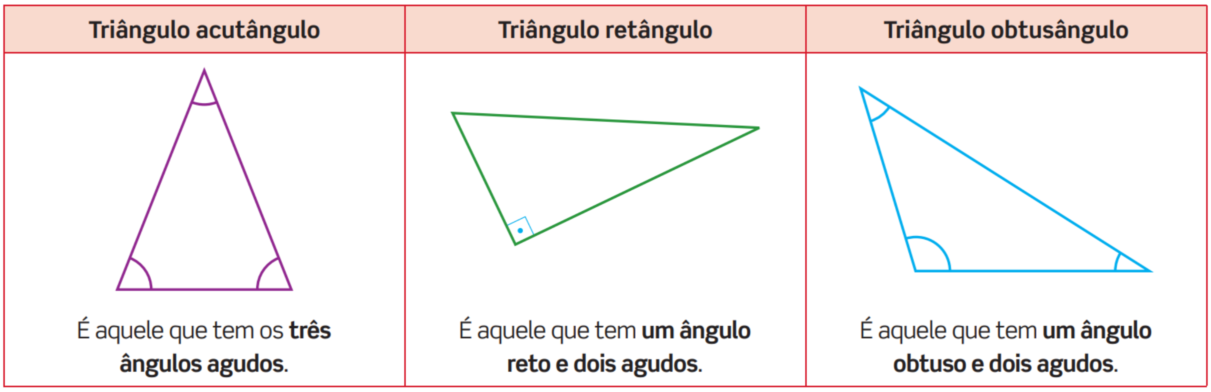
Figura 28 – Classificação dos triângulos quanto aos lados



Fonte: Bianchini (2018a)

Quanto aos ângulos, todo triângulo terá pelo menos dois ângulos agudos, e o maior ângulo interno desse triângulo irá definir se ele é acutângulo, obtusângulo ou retângulo. Essa classificação está descrita na figura 29 a seguir:

Figura 29 – Classificação dos triângulos quanto aos ângulos



Fonte: Bianchini (2018a)

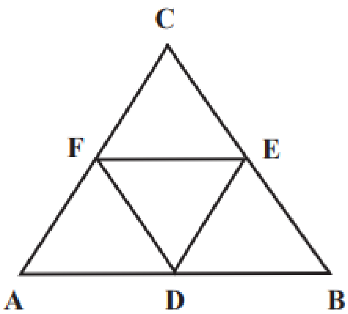
Conhecer essas classificações é importante para o estudo da geometria plana e para a resolução de problemas envolvendo triângulos.

Na sequência uma questão resolvida em que um dos conceitos envolvidos foi relacionada a classificação de triângulos.

Exemplo 6.3.1. *Questão 24 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

Considere ABC um triângulo equilátero com lado de medida a metros. Ao traçar os segmentos EF, ED e DF, sendo D, E e F os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, obtêm-se o triângulo DEF, como mostra a figura.
Abaixo, tem-se cinco afirmações a respeito desta construção.

Figura 30 – Figura contida na questão 24 da prova 01/2018



Fonte: BRASIL (2017b)

I – O triângulo DEF é equilátero.
II – O comprimento, em metro, do lado DE do triângulo DEF é a terça parte do comprimento de um lado de ABC.
III – A área, em metro quadrado, do triângulo DEF, é igual à metade da área, em metro quadrado, do triângulo ABC.
IV – Os triângulos ADF e DBE têm a mesma área.

V – A área do triângulo DEF, em função de a, em metro quadrado, é igual a $\dfrac{a\sqrt{3}}{16}$
Destas, podemos afirmar que
Alternativas:
a) todas as afirmações são verdadeiras.
b) apenas a afirmação I é verdadeira.
c) apenas as afirmações I e II são falsas.
d) apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.
e) apenas as afirmações I, IV e V são verdadeiras.
Solução: Analisando cada afirmação, temos:
I - Os pontos D, E e F dividem o triângulo ABC em 4 triângulos equiláteros de lado $l/2$, logo a afirmação é verdadeira.
II - O comprimento DE é também é um lado do triangulo equilátero DEB, cujo lado é a metade do lado CB, que é um lado do triângulo ABC, logo a afirmação é FALSA.
III - A área de DEF equivale a 1/4 da área do triângulo ABC, visto que é uma das quatro partes da divisão de ABC pelos seus pontos médios, logo a afirmação é FALSA.
IV - Os triângulos ADF e DBE tem mesmo comprimento de base e mesma altura, logo suas áreas são iguais e afirmação é VERDADEIRA.
V - O lado do triângulo ABC é **a** metros, e o lado do DEF é a metade, ou seja, $a/2$. A área do triângulo DEF é:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

Sendo também a afirmação verdadeira e resultando como verdadeiras as afirmações I, IV e V. <u>Alternativa E</u>

6.4 Cevianas e pontos notáveis de um triângulo

Cevianas são segmentos de reta que ligam um vértice de um triângulo a um ponto qualquer do lado oposto. Existem três cevianas notáveis em um triângulo: a mediana, a bissetriz e a altura.

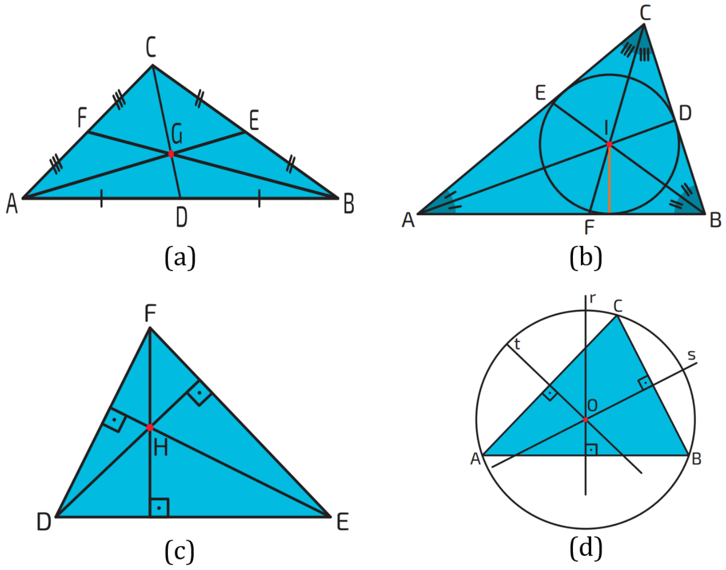
- Mediana: é uma ceviana que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Cada triângulo possui três medianas, que se intersectam no baricentro do triângulo. (Ver figura 31a)

- Bissetriz: é uma ceviana que divide o ângulo do vértice em dois ângulos iguais. Cada triângulo possui três bissetrizes, que se intersectam no incentro do triângulo, que é o centro da circunferência inscrita a esse triângulo.(Ver figura 31b)

- Altura: é uma ceviana que é perpendicular ao lado oposto. Cada triângulo possui três alturas, que se intersectam no ortocentro do triângulo.(Ver figura 31c)

- Mediatriz: é a reta perpendicular ao segmento cruzando-o em seu ponto médio. A interseção entre as três mediatrizes formam o circuncentro do triângulo, que é o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo ponto médio.(Ver figura 31d)

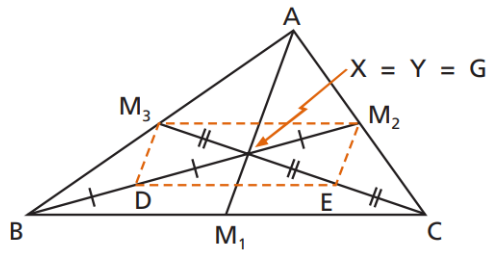
Figura 31 – Triângulos com marcação de suas cevianas e de seus centros



Fonte: Pataro e Balestri (2018c)

Em relação ao baricentro, ele divide as medianas de modo que a distância do vértice ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice. Na figura 32 temos um triângulo com a marcação dos pontos médios e das medianas e na sequência a demonstração de acordo com Dolce e Pompeo (2013).

Figura 32 – Triângulo com seus pontos médios e suas medianas



Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

Demonstração: Tomando como hipótese que $\overline{AM_1}$, $\overline{BM_2}$ e $\overline{CM_3}$ são medianas, queremos demonstrar que $\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$ e que $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}$, $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}$ e $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$.

Considerando os pontos médios D e E de $\overline{BX}$ e $\overline{CX}$, temos o que segue:

$$\left(\Delta ABC,\ \overline{AM_3} \equiv \overline{BM_3}\ \ e\ \ \overline{AM_2} \equiv \overline{CM_2}\right) \Longleftrightarrow \overline{M_2M_3} // \overline{BC}\ e\ \overline{M_2M_3} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

$$\left(\Delta XBC,\ \overline{XD} \equiv \overline{BD}\ \ e\ \ \overline{XE} \equiv \overline{CE}\right) \iff \overline{DE}//\overline{BC}\ e\ \overline{DE} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

Com isso, temos que:

$$\overline{M_2M_3}//\overline{DE}\ \ e\ \ \overline{M_2M_3} \equiv \overline{DE} \Longrightarrow M_2M_3DE\ \ é\ \ paralelogramo$$

$$\overline{DX} \equiv \overline{XM_2} \Longrightarrow \overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2} \quad (1)$$

$$\overline{EX} \equiv \overline{XM_3} \Longrightarrow \overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3} \quad (2)$$

Logo, a mediana $\overline{BM_2}$ intercepta a mediana $\overline{CM_3}$ num ponto X tal que: $\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$. Tomando as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{CM_3}$ e sendo Y o ponto tal que $\overline{AM_1} \cap \overline{CM_3} = \{Y\}$. De modo análogo concluímos que:

$$\overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3}\ \ (3) \quad e \quad \overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1}\ \ (4)$$

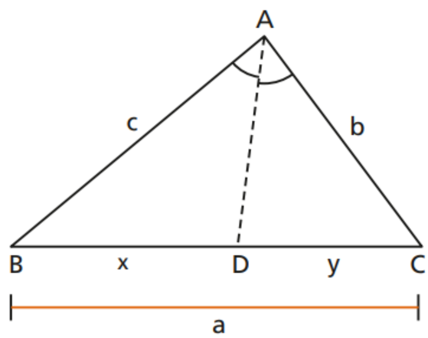
De (2) e (3) decorre que X = Y. Chamando este ponto X = Y de G e considerando (1), (2) e (4), temos:

$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \quad e \quad \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1},\ \ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2},\ \ \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

A respeito do incentro, temos algumas relações entre os seus lados que podem auxiliar na resolução de questões, como ele é a união das bissetrizes de um triângulo, logo o teorema das bissetrizes internas pode ser útil na resolução de questões.

Segue abaixo, de acordo com Dolce e Pompeo (2013), a figura 33, o enunciado do teorema 6.4.1 e a demonstração dele.

Figura 33 – Triângulo com marcação de uma de suas bissetrizes



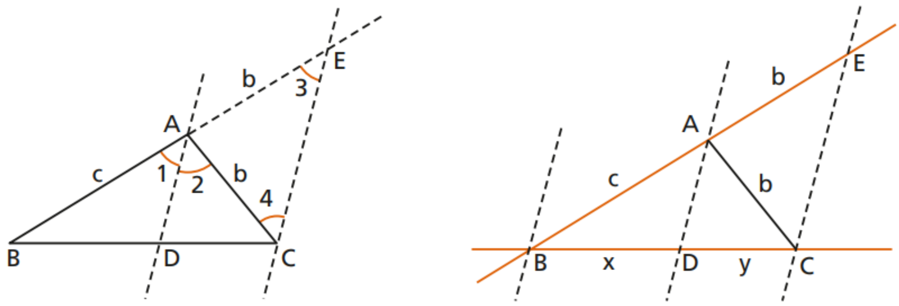
Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

Teorema 6.4.1. *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração: Sendo ABC o triângulo de lados a, b e c, $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (conforme a figura 33), $DB = x$ e $DC = y$, teremos, com base no teorema:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

Figura 34 – Triângulos utilizados para demonstração do teorema das bissetrizes



Fonte: Dolce e Pompeo (2013)

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$. ($\overleftrightarrow{CE}$ // $\overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $B\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}C = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE}$ // $\overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{1} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE}$ // $\overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{2} \equiv \hat{4}$ (correspondentes)

Como por hipótese, $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

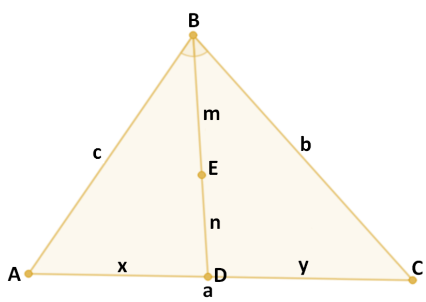
$\hat{3} \equiv \hat{4} \Longrightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Longrightarrow \overline{AE} = b$

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD}$ // $\overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \quad ou\ seja \quad \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

No triângulo abaixo, temos um triângulo onde BD é um bissetriz e E é o seu incentro.

Figura 35 – Triângulo com marcação de seu incentro



Fonte: Elaborado pelo autor

Como o ponto E é o incentro do triângulo, logo $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ também são bissetrizes desse triângulo, logo temos as relações:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{x} \Longleftrightarrow a = \frac{m \cdot x}{n} \quad e \quad \frac{m}{b} = \frac{n}{y} \Longleftrightarrow b = \frac{m \cdot y}{n}$$

Sendo assim, temos que:

$$a+b=\frac{m\cdot x}{n}+\frac{m\cdot y}{n}=\frac{m}{n}\cdot(x+y)=\frac{m}{n}\cdot c \iff \frac{a+b}{c}=\frac{m}{n}$$

Com isso, temos mais uma relação que pode ser usada na resolução de questões.

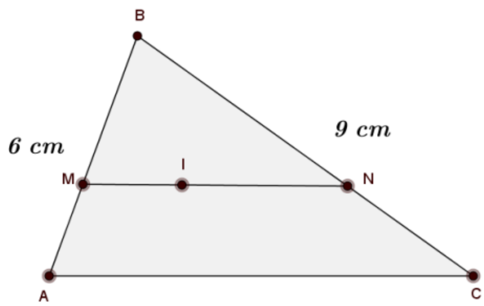
O estudo desses pontos notáveis e das cevianas é importante para o estudo da geometria do triângulo e para a resolução de problemas envolvendo triângulos. Um exemplo desse tipo de questão, contida na última prova do IFES, está resolvida a seguir.

Exemplo 6.4.2. *Questão 20 da prova 84/2022. (BRASIL, 2022a)*

Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede 6 cm, o lado $\overline{BC}$ mede 9 cm, $\overline{AB}=3\ \overline{AM}$, $\overline{BC}=3\ \overline{CN}$ e o segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao lado $\overline{AC}$. Sabendo que o **incentro** é o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo e considerando que esse ponto pertence ao segmento $\overline{MN}$, podemos afirmar que a medida do segmento $\overline{MN}$ é, em centímetros, igual a:

Alternativas: a) 4. b) 5. c) 7. d) 9. e) 10.

Figura 36 – Figura contida na questão 20 da prova 84/2022



Fonte: BRASIL (2022a)

Solução: Se o lado AB = 6cm e $\overline{AB}=3\ \overline{AM}$, temos que $3\cdot\overline{AM}=6$ e consequentemente $\overline{AM}=6/3=2$, e $\overline{MB}=6-2=4cm$. De igual modo, usando $\overline{BC}=9$ e $\overline{BC}=3\ \overline{CN}$, temos $3\overline{AM}=9$ e com isso $\overline{CN}=9/3=3$, e $\overline{NB}=9-3=6cm$.
Redesenhando o triângulo, temos:

Como $\overline{AD}$ é paralela a $\overline{MI}$, temos $\frac{\overline{BI}}{\overline{ID}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}=\frac{4}{2}=2$. E através da relação $\frac{a+b}{c}=\frac{m}{n}$, temos:

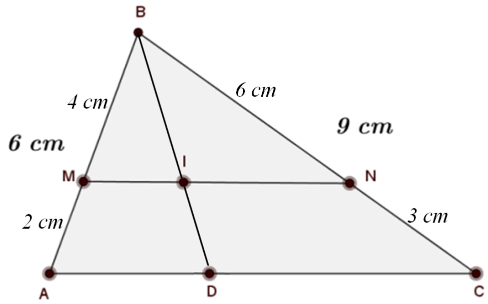
$$\frac{6+9}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{ID}}=2 \iff \frac{15}{\overline{AC}}=2 \iff \overline{AC}=\frac{15}{2}=7,5$$

Usando semelhança de triângulos em ABC e MNB, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{MN}} \iff \frac{6}{4}=\frac{7,5}{\overline{MN}} \iff 6\cdot\overline{MN}=4\cdot 7,5 \iff 6\cdot\overline{MN}=30 \iff \overline{MN}=\frac{30}{6}=5\ cm$$

<u>Alternativa B</u>

Figura 37 – Adaptação da figura contida na questão 20 da prova 84/2022



Fonte: Adaptação de BRASIL (2022a)

6.5 Planificação de prismas e pirâmides

Planificação é o processo de "desmontar" um sólido em suas faces planas para que possa ser achatado e desenhado em um plano. A partir da planificação, podemos visualizar as faces e as arestas do sólido de forma mais clara e analisar suas propriedades.

Os prismas e as pirâmides são sólidos geométricos que podem ser planificados. Um prisma é um sólido que possui duas faces paralelas e congruentes chamadas bases, que são conectadas por faces laterais retangulares. As pirâmides são sólidos que possuem uma base poligonal e faces laterais triangulares que convergem em um ponto chamado ápice.

Para planificar um prisma, basta desenhar as faces laterais do prisma em uma folha plana, separadas pelas bases. Em seguida, podemos recortar a figura desenhada e dobrá-la ao longo das arestas para formar o prisma. Já para planificar uma pirâmide, podemos desenhar a base da pirâmide em uma folha plana e desenhar as faces laterais como triângulos, que se encontram em um ponto comum. Em seguida, podemos recortar a figura desenhada e dobrá-la ao longo das arestas para formar a pirâmide.

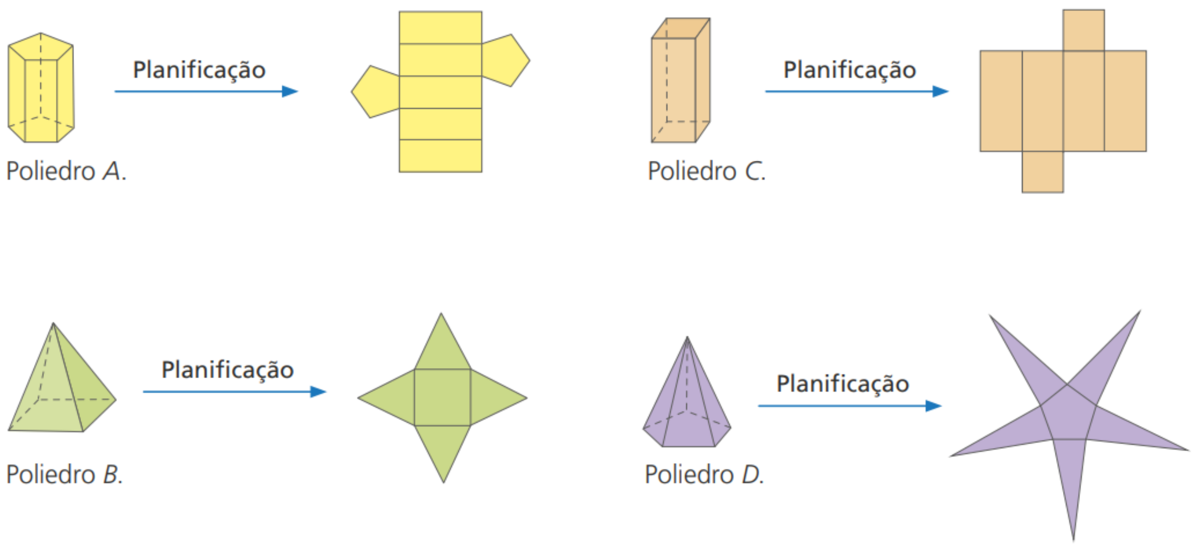
A figura 38 mostra a planificação de quatro poliedros, sendo dois prismas e duas pirâmides.

A planificação é uma ferramenta útil para a visualização e a compreensão de sólidos geométricos, além de ser utilizada em diversas aplicações práticas, como na fabricação de caixas e embalagens.

Exemplo 6.5.1. *Questão 158 da prova do ENEM 2020 (2º dia, caderno amarelo). (BRASIL, 2020)*

Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulkán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, esse templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada.
As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são:
Alternativas:

Figura 38 – Planificação de poliedros



Fonte: Júnior e Castrucci (2018a)

a) 2 quadrados e 4 retângulos.
b) 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.
c) 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.
d) 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.
e) 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

Solução: Uma pirâmide qualquer é formada por uma base que pode ser qualquer polígono e triângulos nas faces laterais, se uma pirâmide tem base quadrada e for reta, será formada por quatro triângulos e eles serão isósceles, porém como se trata de um tronco reto de pirâmide de base quadrada, esses triângulos isósceles passarão a ser trapézios isósceles, sendo a base um quadrado e a parte superior outro quadrado, porém de lado menor.
Alternativa C

6.6 Retas - posições relativas entre retas

No plano, existem várias posições relativas entre duas retas, que podem ser paralelas, concorrentes ou coincidentes. Vamos discutir cada uma dessas posições relativas em detalhes:

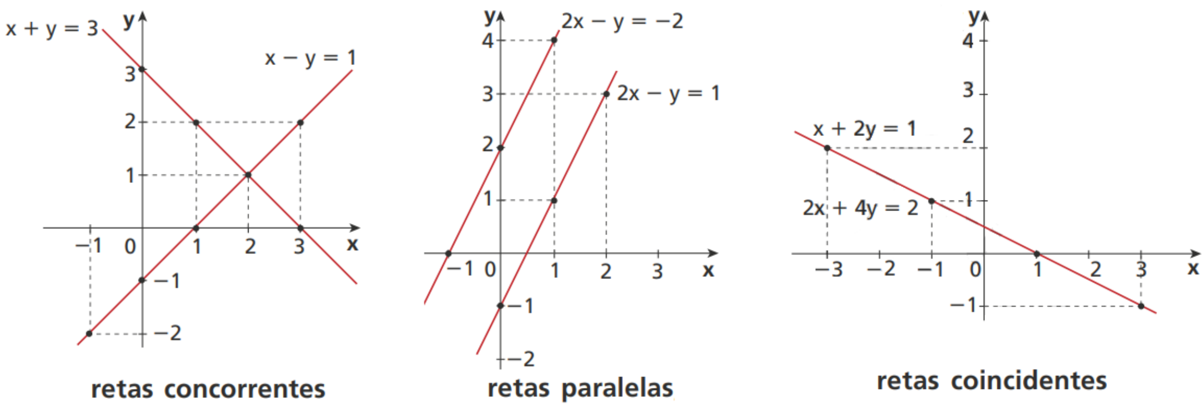
1. Retas paralelas: duas retas são paralelas se não se cruzam, ou seja, elas estão em um mesmo plano e não têm nenhum ponto em comum. As retas paralelas têm a mesma inclinação, ou seja, seus ângulos formados com o eixo x são iguais ou a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 180 graus. Por exemplo, as retas $y = 2x + 1$ e $y = 2x + 5$ são paralelas, pois têm a mesma inclinação.

2. Retas concorrentes: duas retas são concorrentes se elas se cruzam em um único ponto. As retas concorrentes têm inclinações diferentes, ou seja, seus ângulos formados com o eixo x são diferentes. Por exemplo, as retas $y = 2x + 1$ e $y = -x + 5$ são concorrentes, pois se cruzam no ponto $(2,\ 5)$.

3. Retas coincidentes: duas retas são coincidentes se elas se sobrepõem, ou seja, são a mesma reta. Duas retas coincidentes têm a mesma inclinação e interceptam o eixo y no mesmo ponto. Por exemplo, as retas $y = 2x + 1$ e $2y - 4x - 2 = 0$ são coincidentes, pois representam a mesma reta.

A figura 39 mostra exemplos dessas posições relativas entre retas.

Figura 39 – Posições relativas entre duas retas



Fonte: Souza (2018c)

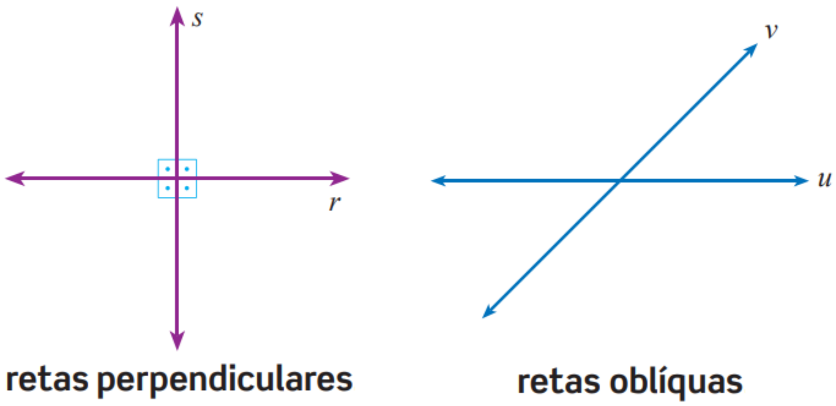
Considerando a equação de uma reta da forma $y = ax + b$, as retas concorrentes terão diferentes valores de a enquanto as retas paralelas terão o mesmo valor de a porém diferentes valores para o b, já as retas coincidentes terão os mesmos valores tanto para o coeficiente a quanto para o b.

Além dessas posições relativas, existem outras que envolvem mais de duas retas, como retas perpendiculares. Duas retas são perpendiculares quando se interceptam formando ângulos retos (BIANCHINI, 2018a), o que significa que sua inclinação é negativa inversa ($a = -1/a$). Duas retas são oblíquas se elas se cruzam em um ponto, mas não formam um ângulo de 90 graus entre si. A figura 40 mostra um exemplo de duas retas perpendiculares e um de duas retas oblíquas.

Essas posições relativas entre retas são muito importantes na geometria, e são usadas em diversas aplicações, como no desenho de estruturas, na resolução de problemas envolvendo equações lineares e na geometria analítica.

Exemplo 6.6.1. *Questão 21 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

Figura 40 – Retas perpendiculares e retas oblíquas



Fonte: Bianchini (2018a)

Se o gráfico das equações 4x+2y+5=0 e cx+5y+6=0 são retas paralelas, então o número real **c** é igual a:
Alternativas: a) 10. b) 11. c) 12. d) 13. e) 14.
Solução: Isolando o y em cada equação, temos:

$$4x + 2y + 5 = 0 \Longleftrightarrow 2y = -4x - 5 \Longleftrightarrow y = \frac{-4x-5}{2} \Longleftrightarrow y = -2x - \frac{5}{2}$$

$$cx + 5y + 6 = 0 \Longleftrightarrow 5y = -cx - 6 \Longleftrightarrow y = \frac{-cx-6}{5} \Longleftrightarrow y = -\frac{c}{5}x - \frac{6}{5}$$

Para que elas sejam paralelas, o coeficiente angular deve ser igual, logo:

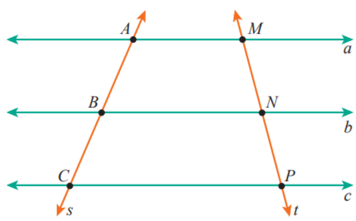
$$-\frac{c}{5} = -2 \Longleftrightarrow \frac{c}{5} = 2 \Longleftrightarrow c = 10$$

Alternativa A

6.7 Feixe de retas paralelas

De acordo com Bianchini (2018d), um conjunto de três ou mais retas paralelas de um plano chama-se feixe de paralelas. A figura 41 mostra as retas paralelas a, b e c, cortadas pelas retas transversais s e t.

Figura 41 – Feixe de retas paralelas interceptadas por transversais



Fonte: Bianchini (2018d)

A partir dessas retas paralelas interceptadas por transversais, podemos enunciar o teorema de Tales:

Teorema 6.7.1. *Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.*

Com o teorema de Tales e a figura 41, podemos determinar a seguintes relação:

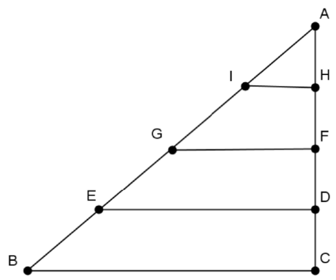
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$$

A seguir temos um exemplo resolvido de questão que envolve feixe de retas paralelas.

Exemplo 6.7.2. *Questão 23 da prova 01/2013. (BRASIL, 2012a)*

Os segmentos de reta BC, ED, GF e IH são paralelos.

Figura 42 – Figura contida na questão 23 da prova 01/2013



Fonte: BRASIL (2012a)

Se IG = 6m, AH = 2m e FH = 3 m, então a medida de AI, em metros, é:
Alternativas: a) 8. b) 6. c) 4. d) 3. e) 2.
Solução: Como as retas são paralelas, podemos usar a relação:

$$\frac{AH}{FH} = \frac{AI}{GI} \Longleftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{AI}{6} \Longleftrightarrow 3 \cdot AI = 6 \cdot 2 \Longleftrightarrow 3 \cdot AI = 12 \Longleftrightarrow AI = \frac{12}{3} = 4$$

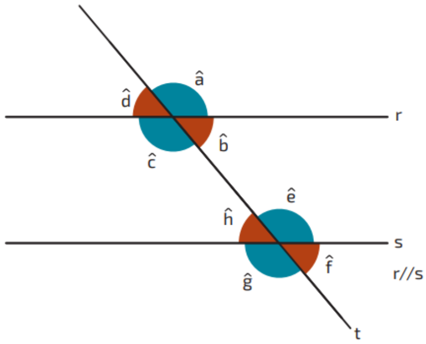
<u>Alternativa C</u>

6.8 Retas paralelas intersectadas por uma transversal

Duas retas paralelas que são interceptadas por uma transversal formam oito ângulos, sendo quatro em cada "cruzamento", nos quais os opostos pelo vértice têm medidas iguais, os alternos também têm medidas iguais e os colaterais são suplementares. Esses oito ângulos estão identificados na figura 43 abaixo.

Na figura acima, os ângulos de mesma cor ou são opostos pelo vértice ou são alternos, logo eles têm a mesma medida. E se pegarmos um ângulo de cor azul e juntarmos

Figura 43 – Retas paralelas intersectadas por uma transversal



Fonte: Pataro e Balestri (2018d)

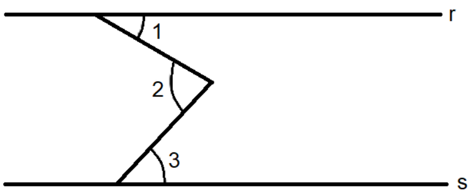
a um ângulo de cor vermelha adjacente a ele, teremos dois ângulos suplementares, logo a soma de um ângulo azul com um ângulo vermelho é 180°.

A relação entre retas paralelas e transversais é fundamental na geometria, e pode ser utilizada para resolver problemas de diversos tipos, como a determinação de medidas de ângulos, segmentos e áreas. A seguir a resolução de uma questão sobre o tema.

Exemplo 6.8.1. *Questão 30 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

Observe a figura abaixo:
As retas r e s são paralelas e o ângulo 2 mede 80°. A soma dos ângulos 1 e 3 vale:

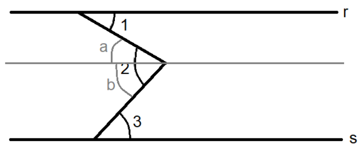
Figura 44 – Figura contida na questão 30 da prova 01/2011



Fonte: BRASIL (2010a)

Alternativas: a) 40°. b) 50°. c) 60°. d) 70°. e) 80°.
Solução: Se desenharmos outra figura, inserindo uma reta paralela passando pelo vértice que fica o angulo 2, teremos:
Como são alternos internos, a será igual o ângulo 1 e b será igual o ângulo 3, e o ângulo 2 será justamente a soma de a e b que é consequentemente a soma dos ângulos 1 e 3. Logo essa soma será o próprio angulo 2 que é 80°. Alternativa E

Figura 45 – Figura da questão 30 da prova 01/2011 adaptada

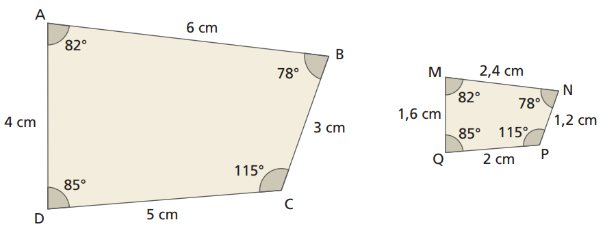


Fonte: Adaptação de BRASIL (2010a)

6.9 Semelhança e congruência de figuras

Segundo Júnior e Castrucci (2018d), "dois polígonos são semelhantes quando possuem os ângulos internos respectivamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais". A figura 46 traz dois quadriláteros semelhantes.

Figura 46 – Quadriláteros semelhantes



Fonte: Júnior e Castrucci (2018d)

Podemos confirmar que eles são semelhantes pois os ângulos correspondentes têm a mesma medida ($\hat{A} = \hat{M}$, $\hat{B} = \hat{N}$, $\hat{C} = \hat{O}$ e $\hat{D} = \hat{P}$) e os lados correspondentes são proporcionais.

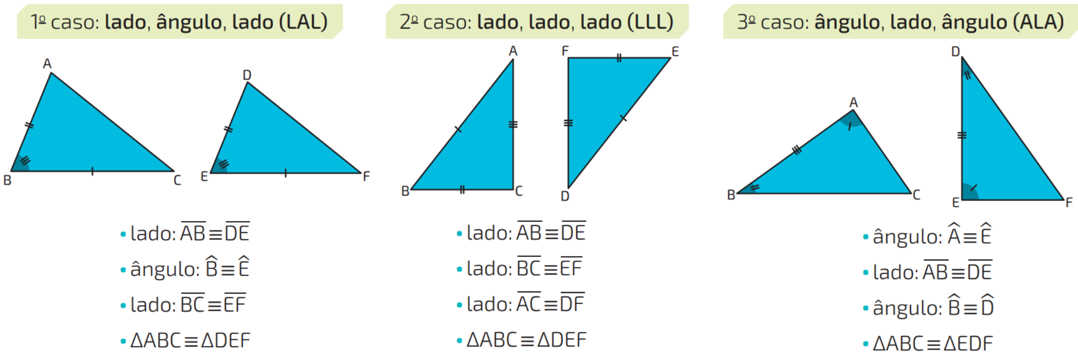
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{6}{2,4} = 2,5 \quad e \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{3}{1,2} = 2,5 \quad e \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{2} = 2,5 \quad e \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{MQ}} = \frac{4}{1,6} = 2,5$$

Já em relação à congruência de figuras, duas figuras são congruentes quando além de serem semelhantes, elas possuem os lados correspondentes com as mesmas medidas, em outras palavras, dois polígonos são congruentes se eles tiveram os ângulos e os lados correspondentes iguais.

A congruência é uma relação entre duas figuras geométricas que têm exatamente as mesmas medidas de todos os seus lados e ângulos. Quando duas figuras são congruentes, elas têm a mesma forma e tamanho, e podem ser sobrepostas uma na outra. Por exemplo, dois triângulos são congruentes se têm os três lados e ângulos correspondentes iguais.

Em relação aos triângulos, a verificação quanto a sua semelhança é um pouco mais simplificada pois dois triângulos que tem ângulos correspondentes de mesma medida, automaticamente terão seus lados proporcionais. Quando se trata da congruência, existem alguns tipos de verificação para saber se dois triângulos são congruentes que estão mostrados na figura 47 abaixo.

Figura 47 – Tipos de verificação de congruência de triângulos



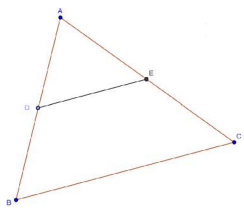
Fonte: Adaptado de Pataro e Balestri (2018c)

A semelhança e a congruência são usadas em diversos problemas de geometria, como o cálculo de áreas e volumes de figuras semelhantes ou congruentes, e a determinação de medidas desconhecidas de figuras conhecidas através de propriedades geométricas. Como é um tema bem recorrente, a seguir temos quatro exemplos resolvidos de questões sobre o assunto.

Exemplo 6.9.1. *Questão 19 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

Na figura a seguir os triângulos são semelhantes. Nessa figura os comprimentos dos seguimentos AB, AD e AE são respectivamente, 8cm, 3cm e 6cm.

Figura 48 – Figura contida na questão 19 da prova 01/2012



Fonte: BRASIL (2011a)

A soma das medidas dos lados AC, EC e BD é

Alternativas: a) 21. b) 31. c) 26. d) 17. e) 15.

Solução: Para dar início, vamos determinar o comprimento de $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 8 - 3 = 5cm$. Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} \Longleftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{\overline{EC}}{6} \Longleftrightarrow 3\overline{EC} = 5 \cdot 6 \Longleftrightarrow 3\overline{EC} = 30 \Longleftrightarrow \overline{EC} = \frac{30}{3} = 10$$

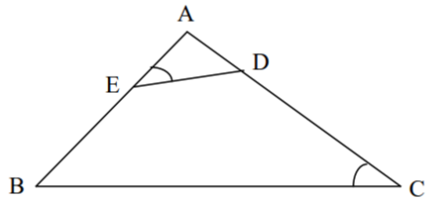
O valor de $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = 6 + 10 = 16$, com isso, $\overline{AC} + \overline{EC} + \overline{BD} = 16 + 10 + 5 = 31cm$.

<u>Alternativa B</u>

Exemplo 6.9.2. *Questão 21 da prova 01/2015.* (BRASIL, 2014a)

Os triângulos ABC e ADE, representados na figura, são semelhantes.

Figura 49 – Figura contida na questão 21 da prova 01/2015



Fonte: BRASIL (2014a)

Os ângulos AED e ACB são congruentes. Se BC = 24cm, AC = 20cm, AD = 7cm e AE = 5cm, o perímetro do quadrilátero BCDE, em centímetros, é:

Alternativas: a) 56. b) 66. c) 76. d) 86. e) 96.

Solução: Pela relação de semelhança, temos:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Substituindo pelos valores dados,temos;

$$\frac{20}{5} = \frac{AB}{7} = \frac{24}{DE}$$

Isolando as duas primeiras frações:

$$\frac{20}{5} = \frac{AB}{7} \Longleftrightarrow 5 \cdot AB = 20 \cdot 7 \Longleftrightarrow 5 \cdot AB = 140 \Longleftrightarrow AB = \frac{140}{5} = 28cm$$

Isolando a primeira e a terceira:

$$\frac{20}{5} = \frac{24}{DE} \Longleftrightarrow 20 \cdot DE = 5 \cdot 24 \Longleftrightarrow 20 \cdot DE = 120 \Longleftrightarrow DE = \frac{120}{20} = 6cm$$

Sendo assim, temos que $BE = AB - AE = 28 - 5 = 23cm$ e $CD = AC - AD = 20 - 7 = 13cm$ e assim o perímetro do quadrilátero BCDE será:

$$BCDE = BC + CD + DE + BE = 24cm + 13cm + 6cm + 23cm = 66cm$$

Alternativa B

Exemplo 6.9.3. *Questão 22 da prova 01/2019.* (BRASIL, 2018a)

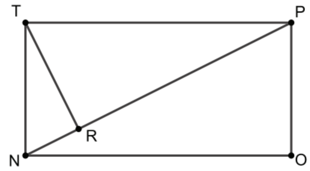
A diagonal PN do retângulo $TPON$ na figura abaixo é perpendicular à TR. Sabendo que $\overline{ON} = 6\sqrt{2}$ e $\overline{PN} = 4\sqrt{5}$, o segmento NR mede

Alternativas: a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. b) $4\sqrt{\frac{96}{15}\sqrt{15}}$. c) $\sqrt{30\sqrt{31}}$. d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. e) $4\sqrt{3}$.

Solução: Inicialmente, determinaremos o valor de OP usando teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{PN}^2 \Longleftrightarrow \overline{OP}^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 \Longleftrightarrow \overline{OP}^2 + 72 = 80 \Longleftrightarrow \overline{OP}^2 = 80 - 72$$

Figura 50 – Figura contida na questão 22 da prova 01/2019



Fonte: BRASIL (2018a)

$$\overline{OP}^2 = 8 \Longleftrightarrow \overline{OP} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{NR}}{\overline{NT}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PN}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{NR}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$$

$$\overline{NR} \cdot 4\sqrt{5} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow \overline{NR} \cdot 4\sqrt{5} = 8$$

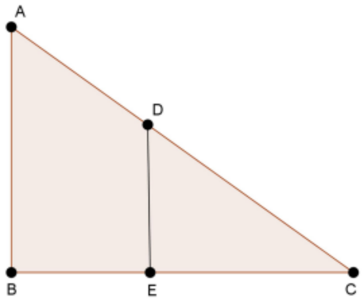
$$\overline{NR} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{8 \cdot \sqrt{5}}{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{20} = \frac{8\sqrt{5} \div 4}{20 \div 4} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Alternativa D

Exemplo 6.9.4. *Questão 25 da prova 04/2017. (BRASIL, 2016a)*

Observe o esboço abaixo:

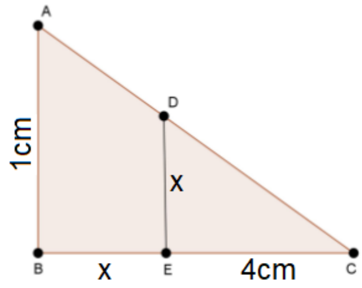
Figura 51 – Figura contida na questão 25 da prova 04/2017



Fonte: BRASIL (2016a)

Sabe-se que:
I. O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DE}$ e perpendicular ao segmento $\overline{BC}$.
II. $\overline{EC} = 4cm$, $\overline{AB} = 1cm$ e $\overline{DE} = \overline{BE}$
O comprimento do segmento $\overline{DE}$ vale:
Alternativas: a) $-2(-\sqrt{2}+1)$ cm. b) 5cm. c) $(\sqrt{2}+1)$ cm. d) $\sqrt{2}$ cm. e) $(\sqrt{2}-1)$ cm.
Solução: Considerando $\overline{DE} = \overline{BE} = x$ e inserindo as informações fornecidas, temos:

Figura 52 – Adaptação da figura contida na questão 25 da prova 04/2017



Fonte: Adaptação de BRASIL (2016a)

Fazendo a semelhança de triângulos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} \iff \frac{1}{4+x} = \frac{x}{4} \iff (4+x)\cdot x = 1\cdot 4 \iff 4x + x^2 = 4 \iff x^2 + 4x - 4 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

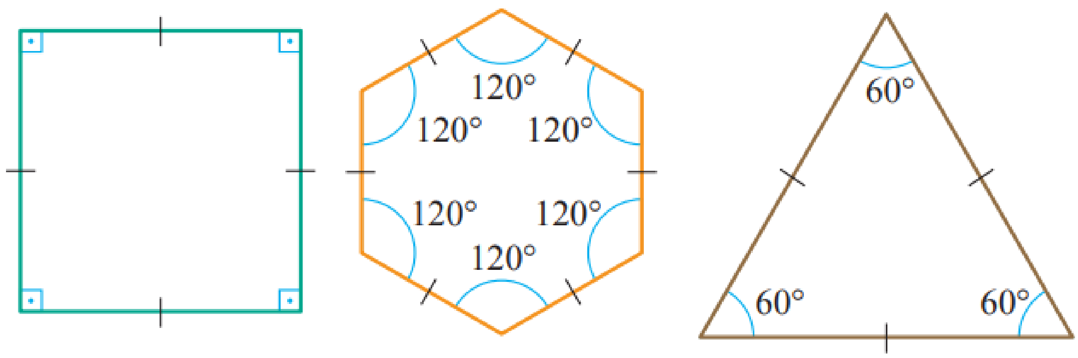
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

Como x é um valor positivo, logo: $x = -2 + 2\sqrt{2} = -2(1-\sqrt{2}) = -2(-\sqrt{2}+1)cm$
Alternativa A

6.10 Polígonos regulares

De acordo com Bianchini (2018c), "um polígono é regular quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos são congruentes entre si". A figura 53 traz alguns desses polígonos.

Figura 53 – Polígonos regulares



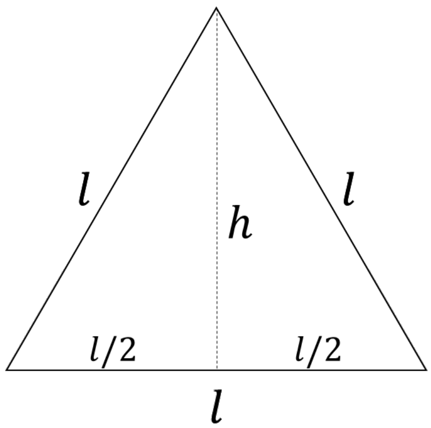
Fonte: Adaptação de Bianchini (2018c)

Os polígonos regulares são muito importantes na geometria, pois possuem propriedades matemáticas especiais e são utilizados em muitos contextos, como na arquitetura, engenharia e física. Alguns exemplos de polígonos regulares são:

- O triângulo equilátero: é um polígono de três lados iguais e três ângulos iguais de 60° cada um.
- O quadrado: é um polígono de quatro lados iguais e quatro ângulos iguais de 90° cada um.
- O pentágono regular: é um polígono de cinco lados iguais e cinco ângulos iguais de 108° cada um.
- O hexágono regular: tem seis lados e seis ângulos iguais de 120° cada um, pode ser formado pela junção de seis triângulos equiláteros.

Dentre os polígonos regulares citados, destacam-se o triângulo equilátero e o hexágono regular, principalmente em situações em que sua área precisa ser determinada. Para isso, na figura 54 temos um triângulo equilátero com a sua altura mostrada nele.

Figura 54 – Demonstração da fórmula altura de um triângulo equilátero



Fonte: Elaborado pelo autor

Usando o teorema de Pitágoras para encontrar uma expressão para altura em função do lado, temos:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2 \iff h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \iff h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \iff h^2 = \frac{3l^2}{4} \iff \sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

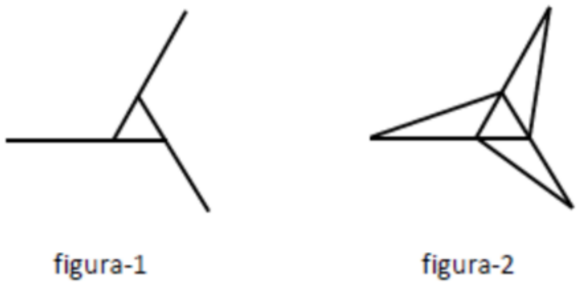
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Esses polígonos também são importantes na resolução de problemas de geometria, como cálculo de áreas e perímetros. Além disso, são frequentemente utilizados em projetos arquitetônicos e de engenharia, como na construção de pontes, torres e edifícios com fachadas poligonais. A seguir temos duas questões resolvida sobre tal conteúdo.

Exemplo 6.10.1. *Questão 27 da prova 01/2013. (BRASIL, 2012a)*

Três segmentos de reta congruentes de comprimento igual a 6 cm são arranjados no plano de modo que região central forma um triângulo equilátero de lado igual a 2 cm, mostrado na figura-1. Em seguida o extremo de cada segmento é ligado ao vértice do triângulo equilátero não pertencente a esse segmento e obtém-se um modelo de hélice para moedor de carne, esboçado na figura-2. O sentido de rotação da hélice é determinado pelo maior contato entre o corte da lâmina e a carne.

Figura 55 – Figura contida na questão 27 da prova 01/2013



Fonte: BRASIL (2012a)

Desse modo, pode-se afirmar que o comprimento de corte de cada lâmina, em cm, é:
Alternativas: a) $\sqrt{3}$. b) $\sqrt{12}$. c) $\sqrt{24}$. d) $2\sqrt{7}$. e) $3\sqrt{6}$.
Solução: Podemos formar um triângulo retângulo de hipotenusa igual o lado do corte, altura igual a altura do triângulo equilátero e a base será o comprimento da ponta da hélice até o pé da altura do triângulo, ou seja, $6 - 1 = 5cm$. A altura do triângulo equilátero será:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

E usando Pitágoras, temos:

$$x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 = 3 + 25 = 28$$

$$x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

<u>Alternativa D</u>

Exemplo 6.10.2. *Questão 17 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

Dados um hexágono regular cuja medida do lado é 6cm, um quadrado com 44cm de perímetro, um triângulo retângulo cujos catetos medem 9cm e 12cm; e um triângulo

equilátero, cujo lado mede 8cm, analise as afirmações abaixo e assinale a **ÚNICA** verdadeira.
Alternativas:
a) Os dois triângulos têm perímetros iguais.
b) A medida da área do hexágono é igual ao quádruplo da medida da área do triângulo equilátero.
c) As medidas das áreas do quadrado e do triângulo retângulo são iguais.
d) A medida da área do hexágono é igual a medida da área do triângulo retângulo.
e) A soma das medidas das áreas do hexágono e do triângulo equilátero é igual a $70\sqrt{3}cm^2$
Solução: Fazendo Pitágoras com o triângulo retângulo de catetos 9cm e 12cm, teremos a hipotenusa igual a $\sqrt{9^2+12^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$ e o perímetro é $9+12+15 = 36$, diferente do perímetro do triângulo equilátero que é $3 \cdot 8 = 24$, logo a letra **a** é incorreta.
A área do hexágono será:

$$A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 6^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 36\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$$

Já a área do triângulo equilátero é:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

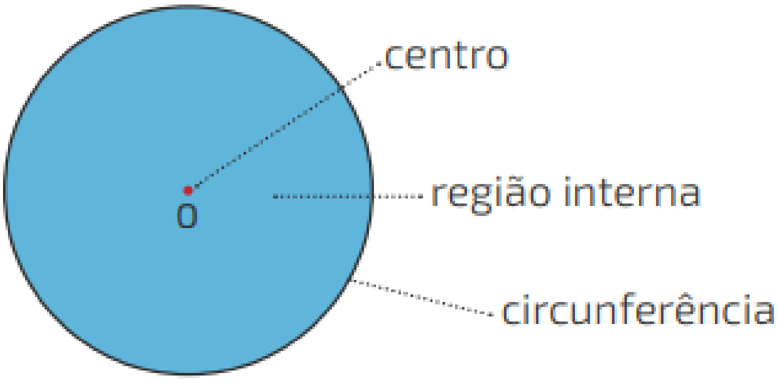
E uma não é o quádruplo da outra, e a **b** também é incorreta.
O quadrado tem perímetro 44cm, logo o o lado é $44/4 = 11cm$ e a área será $11^2 = 121cm^2$.
Já a área do triângulo retângulo será $\dfrac{9 \cdot 12}{2} = 54cm^2$, sendo também a **c** e a **d** incorretas.
A soma das áreas do hexágono e do triângulo equilátero é $16\sqrt{3} + 54\sqrt{3} = 70\sqrt{3}$.
<u>Alternativa E</u>

6.11 Círculo e circunferência - área, arcos e ângulos

O círculo e a circunferência são duas figuras geométricas importantes que possuem diversas propriedades matemáticas. A circunferência é uma linha fechada em um plano, na qual todos os seus pontos estão a uma mesma medida de distância de um ponto fixo, chamado centro. Já o círculo se trata de uma figura geométrica plana formada por uma circunferência e por todos pontos de seu interior(PATARO; BALESTRI, 2018b). Essa distância entre o centro de uma circunferência (ou círculo) a qualquer um dos pontos da mesma é chamado de raio. A figura a seguir mostra um círculo com seus respectivos elementos.

O comprimento da circunferência é dado pela fórmula $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ e a área do círculo é dada pela fórmula $A = \pi \cdot r^2$, em que r é o raio do círculo. O valor de π é uma constante matemática aproximadamente igual a 3,14. È importante frisar que em questões de provas como as do IFES, o valor de π só deve ser substituído por 3,14 caso a questão peça para fazer essa consideração, em casos contrários, a resposta ficará em função de π.

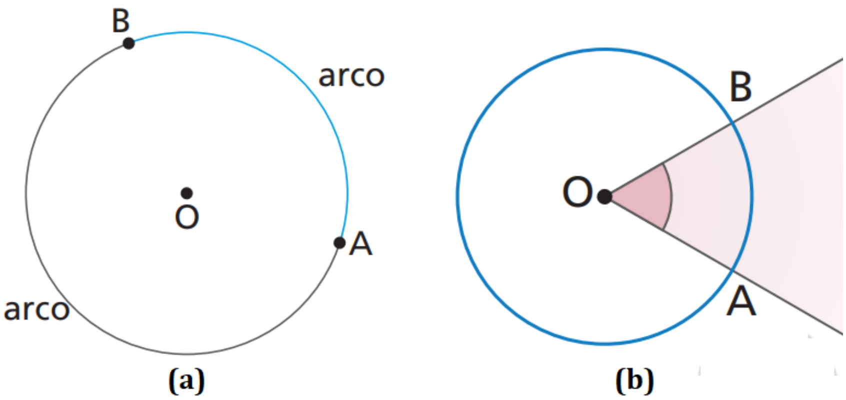
Figura 56 – Círculo e seus elementos



Fonte: Pataro e Balestri (2018b)

Se colocarmos dois pontos A e B em uma circunferência, esses pontos a dividirão em duas partes que serão chamadas de arco de circunferência, conforme figura 57(a), e qualquer ângulo que tenha vértice no centro de uma circunferência é chamado de ângulo central, conforme figura 57(b)(JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018d).

Figura 57 – Arco de circunferência e ângulo central



Fonte: Adaptação de Júnior e Castrucci (2018d)

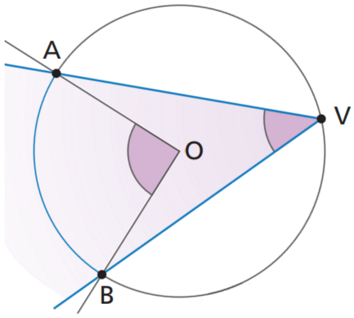
Além do ângulo central, a circunferência pode ter ângulo inscrito, que é todo aângulo cujo vértice está na circunferência e seus lados são secantes a ela (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018d). Uma importante relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central é, caso os tenham o mesmo arco, o ângulo central será o dobro do ângulo inscrito. A figura 58 mostra essa relação.

No caso da figura acima, $A\hat{V}B$ é o ângulo inscrito e $A\hat{O}B$ é o ângulo central, e com isso pode-se afirmar que: $A\hat{V}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2}$

A seguir temos três questões a respeito de círculo e circunferência.

Exemplo 6.11.1. *Questão 23 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

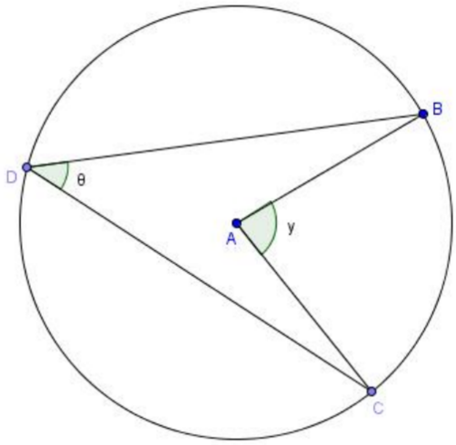
Figura 58 – Ângulo central e ângulo inscrito



Fonte: Adaptação de Júnior e Castrucci (2018d)

Na figura a seguir, $\theta = \dfrac{x}{6} + 15°$ e $y = x$, são ângulos com medidas em graus. O valor de y, em graus, é

Figura 59 – Figura contida na questão 23 da prova 01/2012



Fonte: BRASIL (2011a)

Alternativas: a) 18. b) 45. c) 60. d) 90. e) 180.
Solução: Pelo teorema do arco metade, temos que $y = 2\theta$ e dessa formar podemos montar a equação:

$$y = 2\theta \iff x = 2 \cdot \left(\frac{x}{6} + 15°\right) \iff x = \frac{x}{3} + 30° \iff x - \frac{x}{3} = 30°$$

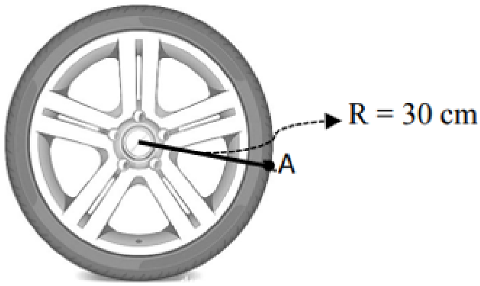
$$\frac{2x}{3} = 30° \iff 2x = 90° \iff x = \frac{90°}{2} = 45°$$

<u>Alternativa B</u>

Exemplo 6.11.2. *Questão 18 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

A figura abaixo representa a roda de um carro (aro e pneu) que possui raio R = 30 cm. Sabe-se que essa roda dá 100 voltas por minuto. Nestas condições, a distância em cm,

Figura 60 – Figura contida na questão 18 da prova 01/2014



Fonte: BRASIL (2013a)

percorrida pelo ponto A em quatro segundos é igual a:

Alternativas: a) 100π. b) 200π. c) 300π. d) 400π. e) 500π.

Solução: A distância percorrida em uma volta do pneu, em cm, é:

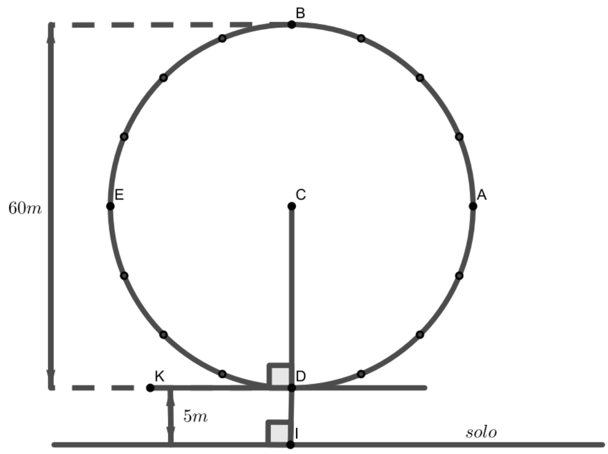
$$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 30 = 60\pi$$

Em 100 voltas, a distância percorrida será $100 \cdot 60\pi = 6000\pi$, como são 100 voltas em um minuto, então em um segundo a distância será $6000\pi \div 60 = 100\pi$. E em quatro segundos a distância será $4 \cdot 100\pi = 400\pi$. Alternativa D

Exemplo 6.11.3. *Questão 20 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

A figura abaixo apresenta o esquema de uma roda gigante.

Figura 61 – Figura contida na questão 20 da prova 01/2020



Fonte: BRASIL (2019a)

Esta roda gigante tem 60 metros de diâmetro externo e seu centro (ponto C) está localizado a 35 metros do chão. A estrutura que faz a sustentação, representada pelo segmento CI, é perpendicular ao solo. A roda gigante gira no sentido anti-horário a uma velocidade constante e faz uma volta completa, sem parar, em exatamente seis minutos. Uma pessoa embarca e inicia a sua volta na roda gigante no ponto de embarque D.

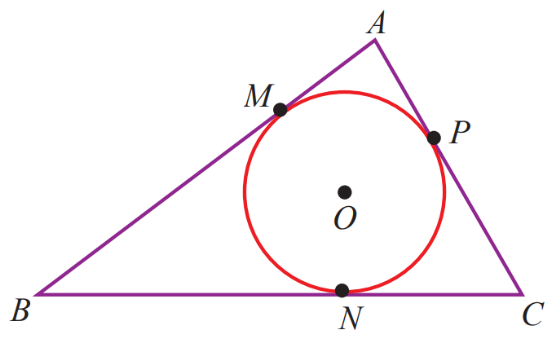
Fixando o plano cartesiano com o eixo-x paralelo ao solo e a origem coincidindo com o ponto C, em qual quadrante estará essa pessoa após cinco minutos do início da sua volta, considerando que a roda não parou após o seu embarque?
Alternativas: a) Primeiro b) Segundo c) Terceiro d) Quarto e) Sobre o eixo-x
Solução: Se a roda gigante faz uma volta ($360°$) em 6 minutos, logo ela gira $360° \div 6 = 60°$ por minuto e em 5 minutos o giro será de $5 \cdot 60° = 300°$, sendo um ângulo pertencente ao quarto quadrante (entre $270°$ e $360°$). Alternativa D

6.12 Inscrição e circunscrição de polígonos

A inscrição e a circunscrição de polígonos são conceitos relacionados à geometria que se referem à posição de uma figura geométrica em relação a outra.

Um polígono é dito inscrito em uma figura geométrica se todos os seus vértices estiverem sobre a borda da figura. por outro lado, um polígono é dito circunscrito a uma figura geométrica se todos os seus lados estiverem tangentes à borda da figura. No caso dos triângulos, todos eles são polígonos inscritíveis e circunscritíveis a circunferências. Abaixo temos um triângulo com uma circunferência inscrita nele, de onde pode ser extraída as relações: $AP = AM$, $BM = BN$ e $CP = CN$.

Figura 62 – Circunferência inscrita em triângulo



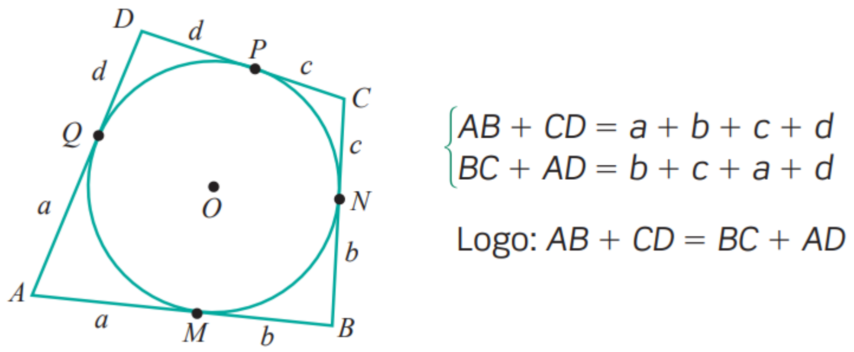
Fonte: Bianchini (2018b)

Quanto aos quadriláteros, segundo (BIANCHINI, 2018b), ele é circunscrito a uma circunferência se a soma das medidas dos lados opostos são iguais, e de maneira recíproca, se ele é circunscrito a uma circunferência, a soma as medidas dos lados opostos serão iguais, conforme figura 63 a seguir.

Segue três exemplos envolvendo o assunto:

Exemplo 6.12.1. *Questão 29 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

Figura 63 – Circunferência inscrita em quadrilátero



Fonte: Bianchini (2018b)

A razão entre as áreas dos círculos cujas circunferências estão inscritas e circunscritas a um quadrado não depende do lado desse quadrado. Essa razão sempre será:
Alternativas: a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{1}{5}$. e) $\frac{1}{6}$.
Solução: Na circunferência inscrita, o diâmetro dela será igual ao lado do quadrado, ou seja, l. Já para a circunferência circunscrita, o diâmetro dela será a diagonal do quadrado, ou seja, $l\sqrt{2}$.
A razão das áreas será o quadrado da razão dos diâmetros, que será:

$$\frac{A_{inscrita}}{A_{circunscrita}} = \left(\frac{D_{inscrita}}{D_{circunscrita}}\right)^2 = \left(\frac{l}{l\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Alternativa C

Exemplo 6.12.2. *Questão 18 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D o pé da perpendicular baixada de A sobre BC. Sabendo que o ângulo $O\hat{A}C = 37°$, determine a medida do ângulo $D\hat{A}B$.
Alternativas: a) 23°. b) 33°. c) 37°. d) 47°. e) 53°.
Solução: Desenhando a circunferência e o triângulo ABC, temos;

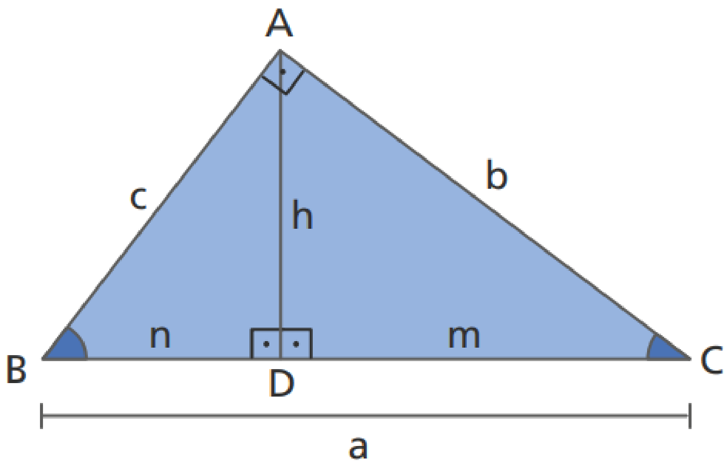
Como $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$ são raios da circunferência, então o triângulo AOC é isósceles e $O\hat{C}A = O\hat{A}C = 37°$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos que: $A\hat{O}C = 180° - O\hat{A}C - O\hat{C}A = 180° - 37° - 37° = 106°$.

Pelo teorema do arco metade, temos que $A\hat{B}C = A\hat{O}C \div 2 = 106° \div 2 = 53°$.
E como o ângulo $D\hat{A}B$ é complementar do ângulo $A\hat{B}D = A\hat{B}C$, então $D\hat{A}B = 90° - 53° = 37°$. Alternativa C

6.13 Relações métricas no triângulo retângulo

As relações métricas no triângulo retângulo são importantes conceitos da geometria que permitem calcular comprimentos de segmentos em um triângulo retângulo utilizando as medidas conhecidas de outros segmentos. Essas relações são possíveis através do conceito de semelhança de triângulos, pois, segundo Souza (2018d), "em um triângulo retângulo ABC, quando traçamos a altura relativa à hipotenusa, obtemos dois triângulos semelhantes ao triângulo ABC e semelhantes entre si". A figura 64 mostra esse triângulo ABC com a sua altura relativa à hipotenusa a e as projeções m e n dos catetos b e c.

Figura 64 – Triângulo retângulo



Fonte: Souza (2018d)

Os triângulos ABC, ADC e ADB são semelhantes, e através da semelhança desses triângulos, temos:

$$\frac{m}{b} = \frac{h}{c} = \frac{b}{a} \quad e \quad \frac{h}{b} = \frac{n}{c} = \frac{c}{a} \quad e \quad \frac{b}{c} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Com isso, isolando duas dentre as três frações das igualdades, podemos obter as relações:

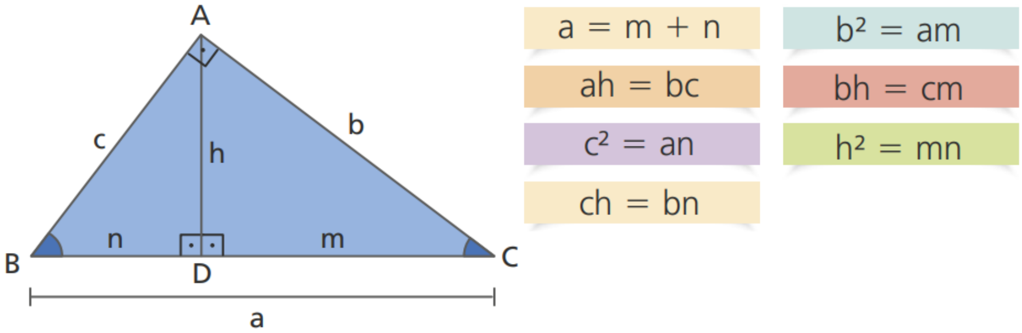
$$\frac{m}{b} = \frac{h}{c} \Longleftrightarrow b \cdot h = c \cdot m \qquad \frac{m}{b} = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow b^2 = a \cdot m \qquad \frac{h}{c} = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

$$\frac{h}{b} = \frac{n}{c} \Longleftrightarrow c \cdot h = b \cdot n \qquad \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Longleftrightarrow b \cdot c = a \cdot h \qquad \frac{n}{c} = \frac{c}{a} \Longleftrightarrow c^2 = a \cdot n$$

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{h} \Longleftrightarrow b \cdot h = m \cdot c \qquad \frac{b}{c} = \frac{h}{n} \Longleftrightarrow b \cdot n = c \cdot h \qquad \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Longleftrightarrow h^2 = m \cdot n$$

Eliminando as relações repetidas, segue a figura 65 contendo um triângulo retângulo com suas respectivas relações trigonométricas.

Figura 65 – Triângulo retângulo e suas relações métricas



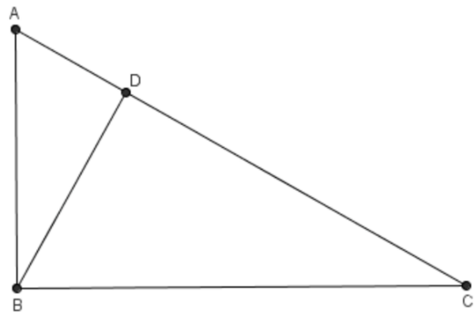
Fonte: Souza (2018d)

Uma relação métrica mais conhecida é o teorema de Pitágoras, porém o mesmo será trabalhado em tópico específico. Na sequência, temos dois exemplos de questões que envolvem essas relações métricas.

Exemplo 6.13.1. *Questão 25 da prova 01/2012. (BRASIL, 2011a)*

Observe a figura a seguir onde: $A\hat{B}C = 90°$; $B\hat{D}A = 90°$; $\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{AC} = c$; $\overline{BD} = h$; $\overline{AD} = m$ e $\overline{DC} = n$.

Figura 66 – Figura contida na questão 25 da prova 01/2012



Fonte: BRASIL (2011a)

A alternativa correta é

Alternativas: a) $a^2 = b^2 + c^2$. b) $ah = bc$. c) $c^2 = an$. d) $ch = ab$. e) $b^2 = a^2 + c^2$.

Solução: A relação trigonométrica $ah = bc$ da figura 65, trazendo para essa questão, pode ser escrita como:

$$ah = bc \Longleftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

E substituindo pelos valores dados, temos:

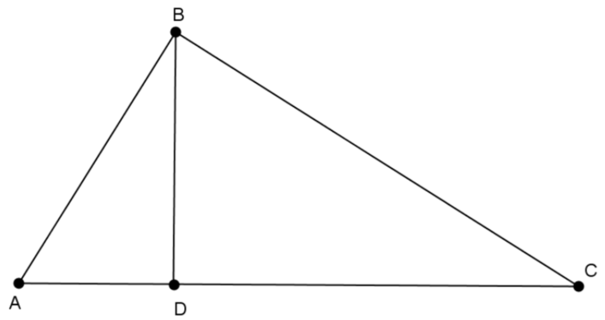
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \Longleftrightarrow c \cdot h = a \cdot b$$

<u>Alternativa D</u>.

Exemplo 6.13.2. *Questão 22 da prova 01/2013.* (*BRASIL, 2012a*)

Na figura abaixo os ângulos $A\hat{B}C$, $A\hat{D}B$ e $C\hat{D}B$ são retos. Se $AD = 3m$, $BD = \sqrt{6}m$, então $AB + BC$, em metros, vale:

Figura 67 – Figura contida na questão 22 da prova 01/2013



Fonte: BRASIL (2012a)

Alternativas: a) 7. b) $\sqrt{6}$. c) $\sqrt{28}$. d) $\sqrt{10} + \sqrt{15}$. e) $3 + \sqrt{6}$.
Solução: Fazendo Pitágoras em ABD, temos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \iff \overline{AB}^2 = 3^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \iff \overline{AB}^2 = 9 + 6$$

$$\overline{AB}^2 = 15 \iff \overline{AB} = \sqrt{15}$$

Por uma relação métrica no triângulo retângulo, temos que:

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{BD} \iff \overline{BC} \cdot 3 = \sqrt{15} \cdot \sqrt{6}$$

$$3 \cdot \overline{BC} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \frac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}$$

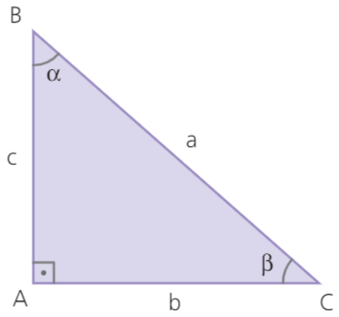
E por fim, $AB + BC = \sqrt{15} + \sqrt{10}$. Alternativa D

6.14 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As relações trigonométricas no triângulo retângulo são importantes conceitos da geometria que permitem calcular valores dos ângulos e dos lados de um triângulo retângulo utilizando as medidas conhecidas de outros segmentos. As relações trigonométricas se baseiam na utilização das razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente. A figura 68 mostra um triângulo retângulo e as relações trigonométricas dele;

Alguns ângulos agudos são chamados notáveis, e seus valores de seno e cosseno são tabelados. Com esses valores e as relações trigonométricas vários problemas de geometria envolvendo triângulos podem ser resolvidos, tais como tais como cálculo de

Figura 68 – Triângulo Retângulo e Relações Trigonométricas



Seno do ângulo α: $\text{sen}\ (\alpha) = \dfrac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

Cosseno do ângulo α: $\cos\ (\alpha) = \dfrac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

Tangente do ângulo α: $\text{tg}\ (\alpha) = \dfrac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$

I. $\text{sen}\ (\alpha) = \dfrac{b}{a}$ II. $\cos\ (\alpha) = \dfrac{c}{a}$ III. $\text{tg}\ (\alpha) = \dfrac{b}{c}$ IV. $\text{sen}\ (\beta) = \dfrac{c}{a}$ V. $\cos\ (\beta) = \dfrac{b}{a}$ VI. $\text{tg}\ (\beta) = \dfrac{c}{b}$

Fonte: Tresolavy (2019b)

Figura 69 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Tresolavy (2019b)

áreas, comprimentos de segmentos como alturas inalcançáveis e etc.. A figura 69 mostra a tabelinha contendo essas relações.

A seguir três exemplos para reforçar o tema.

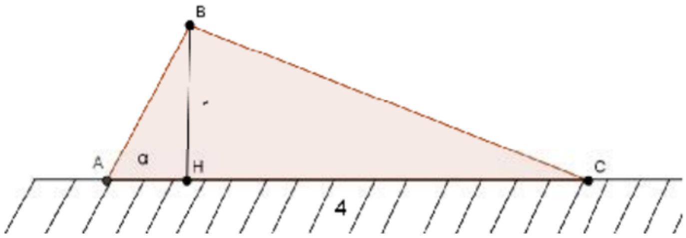
Exemplo 6.14.1. *Questão 27 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

Deseja-se construir um escorregador com a forma de um triângulo ABC, retângulo em B, conforme a figura abaixo. Os segmentos AC e BH medem e 4m e 1m, respectivamente. A escada, representada pelo segmento AB, forma um ângulo com o chão cuja medida vale:
Alternativas: a) 15°. b) 30°. c) 45°. d) 60°. e) 75°.
Solução: Usando uma relaçao métrica, temos:

$$\overline{AH} \cdot \overline{CH} = \overline{BH}^2 \iff a \cdot (4 - a) = 1^2 \iff 4a - a^2 = 1 \iff a^2 - 4a + 1 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, obteremos $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, como a é

Figura 70 – Figura contida na questão 27 da prova 01/2011



Fonte: BRASIL (2010a)

pequeno, consideraremos $a = 2 - \sqrt{3}$. Logo:

$$\tan \hat{A} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$$

Dentre as alternativas, só pelo fato de saber que $\tan 60° = \sqrt{3}$ e que $2+\sqrt{3} > \sqrt{3}$, logo $\hat{A} > 60°$. Alternativa E

Exemplo 6.14.2. *Questão 27 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

Um engenheiro deseja determinar a altura de um prédio. Para isso, ele mede com um aparelho, o ângulo que o topo do prédio forma com a linha horizontal e obtém 60°. Sabendo-se que o aparelho tem 1,5 m de altura e está a 30 m do prédio, pode-se afirmar que a altura desse prédio, em metros, é de: (Considere $\sqrt{3} = 1,73$)

Alternativas: a) $32,4$. b) $48,5$. c) $53,4$. d) $62,3$. e) $64,6$.

Solução: A relação trigonométrica que relaciona a distância do observador do prédio com a sua altura é a tangente, sendo assim, temos:

$$\tan 60° = \frac{altura}{distância} \iff \sqrt{3} = \frac{h}{30} \Longleftrightarrow h = 30 \cdot \sqrt{3} = 30 \cdot 1,73 = 51,9m$$

Considerando a altura do aparelho, a altura total do prédio será $51,9 + 1,5 = 53,4m$. Alternativa C.

Exemplo 6.14.3. *Questão 28 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

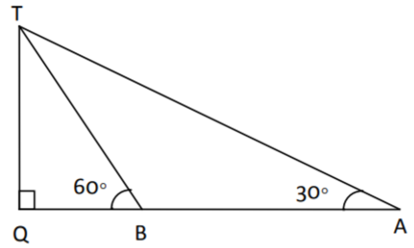
Em uma rua plana, o topo de uma torre é vista no ponto T por dois observadores A e B sob ângulos de 30° e 60° com a horizontal, respectivamente, como ilustrado na figura. A distância entre o observador B e a base da torre é de 200 metros no ponto Q onde a torre é perpendicular à rua. A distância entre os observadores, em metros, é de:

Alternativas: a) 300. b) 400. c) 500. d) 600. e) 700.

Solução: Através do triângulo TBQ, temos que:

$$\tan B = \frac{\overline{TQ}}{\overline{BQ}} \iff \tan 60° = \frac{\overline{TQ}}{200} \iff \sqrt{3} = \frac{\overline{TQ}}{200} \iff \overline{TQ} = 200\sqrt{3}$$

Figura 71 – Figura contida na questão 28 da prova 01/2016



Fonte: BRASIL (2015a)

Pelo triângulo ATQ, temos:

$$\tan A = \frac{\overline{TQ}}{\overline{AQ}} \iff \tan 30^\circ = \frac{200\sqrt{3}}{\overline{AQ}} \iff \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{\overline{AQ}} \iff \sqrt{3} \cdot \overline{AQ} = 3 \cdot 200\sqrt{3}$$

$$\overline{AQ} = \frac{3 \cdot 200\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 600$$

Sendo assim, a distância entre os observadores será:

$$\overline{AB} = \overline{AQ} - \overline{BQ} = 600 - 200 = 400$$

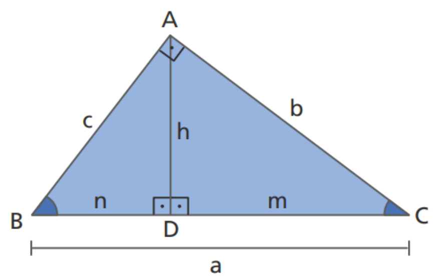
Alternativa B

6.15 Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é um dos mais conhecidos e importantes teoremas da geometria, que estabelece uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Ele afirma que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Tomando o mesmo triângulo usado na figura 64, temos as relações abaixo que foram anteriormente demonstradas.

$$b^2 = a \cdot m \qquad e \qquad c^2 = a \cdot n$$

Figura 72 – Triângulo retângulo



Fonte: Souza (2018d)

Somando as duas e sabendo que $a = m + n$, temos que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) \iff a^2 = b^2 + c^2$$

É possível, a partir do Teorema de Pitágoras e sabendo que ABD e ACD também sáo triângulos retângulos, determinar as seguintes relações.

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad c^2 = n^2 + h^2 \qquad b^2 = m^2 + h^2$$

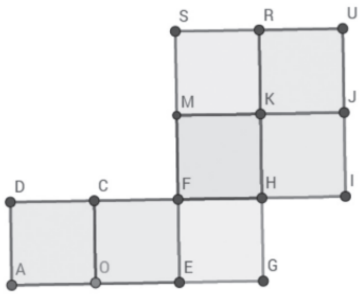
O teorema de Pitágoras é muito útil para calcular o comprimento de um dos lados de um triângulo retângulo quando conhecemos os comprimentos dos outros dois lados, para determinar a diagonal de retângulos e até mesmo paralelepípedos. Além disso, como já vimos, ele pode ser usado na determinação da distância entre dois pontos em um plano cartesiano.

A seguir, iremos trazer apenas dois exemplos resolvidos sobre o tema, visto que o mesmo, embora muito incidente, já foi abordado de maneira interdisciplinar juntamente com outros conteúdos.

Exemplo 6.15.1. *Questão 16 da prova 01/2019. (BRASIL, 2018a)*

Na figura abaixo, $SRKM$, $MKHF$, $KJIH$, $RUJK$, $FHGE$, $CFEO$ e $DCOA$ são quadrados e $\overline{AU} = 26cm$. Dos valores abaixo, assinale o que mais se aproxima da área do polígono $ADFSUIHGO$, em cm².

Figura 73 – Figura contida na questão 16 da prova 01/2019



Fonte: BRASIL (2018a)

Alternativas: a) $127,75$. b) $165,90$. c) $189,28$. d) $215,32$. e) $319,48$.

Solução: O segmento $\overline{AU}$ é a diagonal de um triângulo retangulo de lados 3l e 4l, sendo l o lado dos quadrados representados na figura. O valor de l será:

$$\overline{AU}^2 = (3l)^2 + (4l)^2 \iff \overline{AU}^2 = 9l^2 + 16l^2 \iff \overline{AU}^2 = 25l^2 \iff \overline{AU} = \sqrt{25l^2} = 5l$$

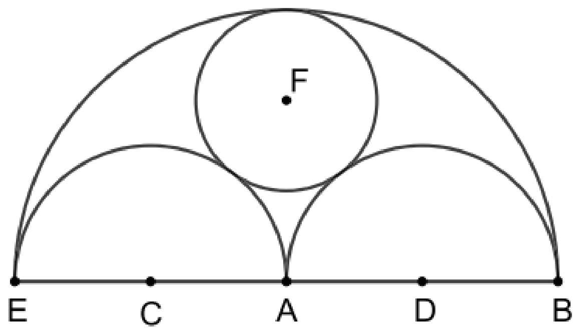
Como $\overline{AU} = 26cm$ e $\overline{AU} = 5l$, logo $l = 26/5 = 5,2cm$, e o polígono, que se trata de 7 quadrados com esse lado, terá área igual a $7 \cdot l^2 = 7 \cdot (5,2cm)^2 = 7 \cdot 27,04cm^2 = 189,28cm^2$.
Alternativa C

Exemplo 6.15.2. *Questão 28 da prova 01/2019. (BRASIL, 2018a)*

As três semicircunferências da figura abaixo tangenciam a circunferência de centro F e raio r. Sabe-se que C, D e A são os centros das três semicircunferências. Se $\overline{AE} = \overline{AB} = R$, então a medida de r é igual a:

Alternativas: a) $\frac{R}{3}$. b) $\frac{R}{2}$. c) $\frac{R\sqrt{2}}{3}$. d) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. e) $\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

Figura 74 – Figura contida na questão 28 da prova 01/2019



Fonte: BRASIL (2018a)

Solução: A distância entre F e A será a diferença entres os raios, ou seja, $R - r$. Já a distância entre F e C será a soma da metade do raio R com o raio r, sendo $\frac{R}{2} - +2$, usando Pitágoras no triângulo ACF, temos:

$$\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 \iff \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - r)^2$$

$$\frac{R}{4} + R \cdot r + r^2 = \frac{R}{4} + R^2 - 2 \cdot R \cdot r + r^2 \iff R \cdot r = R^2 - 2 \cdot R \cdot r \iff R \cdot r + 2 \cdot R \cdot r = R^2$$

$$R \cdot r + 2 \cdot R \cdot r = R^2 \iff 3 \cdot R \cdot r = R^2 \iff r = \frac{R^2}{3 \cdot R} = \frac{R^2 \div R}{3 \cdot R \div R} = \frac{R}{3}$$

Alternativa A

7 Grandezas e Medidas no exame de seleção

De acordo com Bellemain, Bibiano e Souza (2018), os "conteúdos do campo das Grandezas e Medidas estão fortemente presentes na vida cotidiana nas situações de compra e venda, na culinária, na interpretação de notícias veiculadas pela mídia, entre inúmeras outras". Por esse motivo, ele tem sido cada vez mais presente nos currículos e nas provas que envolvem o conteúdo de Matemática tanto do ensino fundamental quando do médio.

Esse capítulo traz uma abordagem bem direta sobre os cálculos envolvendo grandezas, tendo um enfoque ainda maior na resolução de questões.

7.1 Problemas envolvendo grandezas de comprimento, massa, tempo, área, capacidade e volume

Os problemas envolvendo grandezas de comprimento, massa, tempo, área, capacidade e volume são muito comuns na matemática e na vida cotidiana. Esses problemas consistem em utilizar as unidades de medida adequadas para resolver situações-problema que envolvem diferentes grandezas. Algumas das grandezas mais comuns que são utilizadas em problemas envolvendo medidas são:

- Comprimento: é a medida de uma linha reta entre dois pontos. As unidades mais comuns são o metro (m), o centímetro (cm) e o quilômetro (km).
- Massa: é a quantidade de matéria que um objeto contém. As unidades mais comuns são o grama (g) e o quilograma (kg).
- Tempo: é a duração de um intervalo de acontecimentos. A unidade mais comum é o segundo (s).
- Área: é a medida de uma superfície plana. As unidades mais comuns são o metro quadrado (m^2) e o centímetro quadrado (cm^2).
- Capacidade: é a quantidade de líquido que um recipiente pode conter. As unidades mais comuns são o litro (L) e o mililitro (mL).
- Volume: é a quantidade de espaço que um objeto ocupa. As unidades mais comuns são o metro cúbico (m^3) e o centímetro cúbico (cm^3).

Para resolver problemas envolvendo essas grandezas, é importante converter as unidades de medida para uma unidade comum, se necessário. Também é importante ter conhecimento das fórmulas e relações entre as grandezas para poder aplicá-las corretamente.

A seguir temos duas questões resolvidas sobre o tema.

Exemplo 7.1.1. *Questão 17 da prova 01/2015.*

Um reservatório de água paralelepípedo tem capacidade de $1,08m^3$. Uma torneira com vazão igual a 18 litros por minuto é ligada e após 20 minutos uma segunda torneira de vazão igual a 22 litros por minuto também é ligada, e as duas enchem o reservatório, que inicialmente estava vazio. Nestas condições, o tempo em minutos, necessário para encher o reservatório completamente é de: (dado: $1m^3 = 1000$ litros)
Alternativas: a) 26. b) 30. c) 34. d) 38. e) 42.
Solução: Em 20 minutos, a torneira A terá colocado no reservatório $20 \cdot 18 = 360$ *litros*. O reservatório completo tem $1,08 \cdot 1000 = 1080$ *litros* e restarão $1080 - 360 = 720$ *litros* com uma nova vazão que será $18 + 22 = 40$ litros por minuto. Dividindo a quantidade de água que falta pela nova vazão, resulta em $720 \div 40 = 18$ *minutos*. Somando com os 20 minutos gastos inicialmente, resultará em 38 minutos. Alternativa D

Exemplo 7.1.2. *Questão 29 da prova 04/2017. (BRASIL, 2016a)*

Dois ciclistas, digamos ciclista A e ciclista B, partem de bicicleta, em direção a um restaurante distante 144 km do ponto do qual partiram. O ciclista A percorre 2 km a mais por hora do que o ciclista B e chega ao destino 1 h antes do que o ciclista B. Supondo que mantiveram a velocidade constante durante todo o percurso o produto das velocidades (em km/h) destes dois ciclistas é:
Alternativas: a) 168. b) 224. c) 288. d) 320. e) 400.
Solução: Sabendo que a velocidade é a razão da distância pelo tempo, temos que:

$$V_A = \frac{144}{t_A} \quad e \quad V_B = \frac{144}{t_B}$$

Como o ciclista A percorre 2 km a mais por hora e gasta uma hora a menos que o ciclista B, temos que $V_A = V_B + 2$ e $t_A = t_B - 1$. Com isso, temos que:

$$V_A = \frac{144}{t_A} \Longleftrightarrow V_B + 2 = \frac{144}{t_B - 1} \Longleftrightarrow \frac{144}{t_B} + 2 = \frac{144}{t_B - 1}$$

$$\frac{144 + 2t_B}{t_B} = \frac{144}{t_B - 1} \Longleftrightarrow 144 \cdot t_B = (144 + 2t_B) \cdot (t_B - 1)$$

$$144 \cdot t_B = 144 \cdot t_B + 2{t_B}^2 - 144 - 2t_B \Longleftrightarrow 2{t_B}^2 - 2t_B - 144 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, as raízes serão:

$$t_B = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 144}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{1156}}{4} = \frac{2 \pm 34}{4}$$

$$t_{B1} = \frac{2 + 34}{4} = 9 \quad e \quad t_{B2} = \frac{2 - 34}{4} = -8$$

Como o tempo é positivo, logo $t_B = 9h$ e $V_B = \dfrac{144}{t_B} = \dfrac{144}{9} = 16km/h$, já $t_A = t_B - 1 = 9 - 1 = 8h$ e $V_A = \dfrac{144}{t_A} = \dfrac{144}{8} = 18km/h$ e o produto das velocidades será $16 \cdot 18 = 288$.
Alternativa C

7.2 Medida de um ângulo

A medida de um ângulo é uma grandeza que expressa a abertura entre duas retas ou entre dois planos que se cruzam em um determinado ponto. Essa medida é expressa em graus (°), minutos (') e segundos (") e pode variar de 0° a 360°.

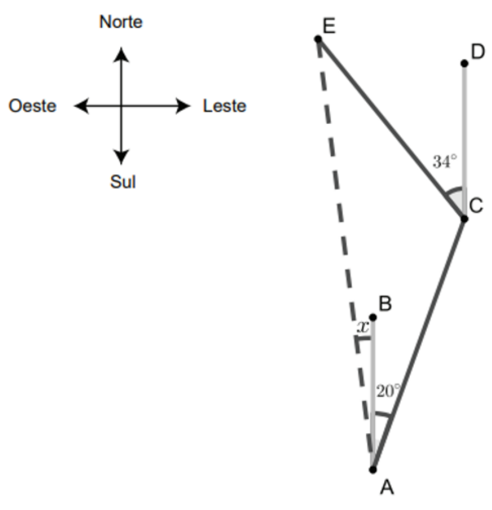
As operações que envolvem ângulos geralmente estão associadas a questões de geometria, onde alguns conceitos já foram trabalhados no tópico de retas paralelas interceptadas por uma transversal. Além disso, é importante saber que o ângulo de uma volta completa é 360° e o ângulo de meia volta, chamado de ângulo raso, é 180°.

Os ângulos têm diversas aplicações em áreas como a trigonometria, a geometria analítica, a física, a engenharia, entre outras. A seguir uma questão sobre o tema.

Exemplo 7.2.1. *Questão 16 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

A figura mostra o deslocamento de um avião que decolou na cidade A com destino a cidade E, fazendo escala na cidade C. As distâncias entre as cidades A e C e C e E são, ambas, iguais a 500km e, ambos os trechos, são retilíneos. Ao decolar da cidade A, o avião seguiu na direção de 20° à direita em relação ao norte (que está representado pelo segmento AB). Ao decolar da cidade C o avião seguiu na direção de 34° à esquerda em relação ao norte (desta vez representado pelo segmento CD).

Figura 75 – Figura contida na questão 16 da prova 01/2020

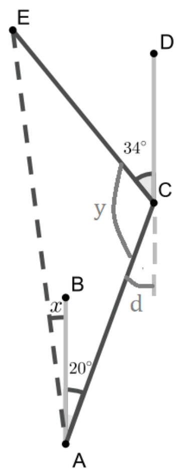


Fonte: BRASIL (2019a)

Se o avião tivesse decolado na cidade A em direção a cidade E sem fazer escala na cidade C, descrevendo o caminho representado pelo segmento de reta tracejado AE, qual seria o ângulo x desse caminho em relação ao norte?
Alternativas: a) 5°. b) 6°. c) 7°. d) 8°. e) 9°.

Solução: Fazendo uma adaptação na figura, identificando os ângulos, temos:

Figura 76 – Adaptação da figura contida na questão 16 da prova 01/2020



Fonte: Adaptação de BRASIL (2019a)

Como são alternos internos, temos que $d = 20°$ e d, y e o ângulo de 34° juntos formam um ângulo raso, logo:

$$d + y + 34° = 180° \iff y = 180° - 34° - 20° = 126°$$

Como $\overline{AC} = \overline{CE}$, o triângulo ACE é isósceles e podemos montar a expressão para a soma dos seus ângulos internos, ficando:

$$x + 20° + x + 20° + 126° = 180°$$

$$2x + 166° = 180° \iff 2x = 180° - 166° = 14°$$
$$x = \frac{14°}{2} = 7°$$

Alternativa C

7.3 Cálculo de perímetro

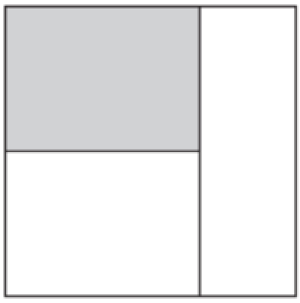
O perímetro de uma figura geométrica é a soma das medidas de todos os seus lados. Calcular o perímetro de uma figura é importante para determinar a quantidade de material necessário para cercar ou contornar a figura.

Assim como em qualquer conteúdo de grandezas e medidas, é importante lembrar que as unidades de medida dos lados devem ser as mesmas para que seja possível somá-los. Além disso, caso haja diferentes tipos de lados no polígono, como em um trapézio, é necessário somar as medidas de cada tipo de lado separadamente. A seguir temos duas questões sobre o assunto.

Exemplo 7.3.1. *Questão 30 da prova 01/2014. (BRASIL, 2013a)*

A figura abaixo representa um quadrado de lado igual a $20cm$, dividido em três retângulos que possuem mesmo perímetro. A área do retângulo sombreado, em cm^2, mede:

Figura 77 – Figura contida na questão 30 da prova 01/2014



Fonte: BRASIL (2013a)

Alternativas: a) 100. b) 125. c) 150. d) 225. e) 300.
Solução: O retângulo sombreado terá altura igual a metade do lado do quadrado, ou seja, $20 \div 2 = 10cm$, logo sendo x a medida da base desse retângulo, o outro retângulo terá medida da base igual a $20 - x$ e altura igual a 20. Como eles tem o mesmo perímetro, temos que:

$$10+x+10+x = 20+(20-x)+20+(20-x) \iff 20+2x = 80-2x \iff 2x+2x = 80-20$$

$$4x = 60 \iff x = \frac{60}{4} = 15$$

Logo, a área do retângulo sombreado será:

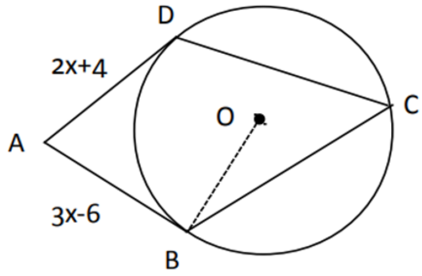
$$A = 10cm \cdot 15cm = 150cm^2$$

Alternativa C.

Exemplo 7.3.2. *Questão 30 da prova 01/2016. (BRASIL, 2015a)*

A figura mostra um ponto A no exterior do círculo de centro em O e raio igual a 10. Os segmentos AB e AD são tangentes ao círculo nos pontos B e D e, medem, respectivamente, $2x + 4$ e $3x - 6$. Se o ângulo inscrito BCD mede 30°, então o perímetro do triângulo ABD é igual a:

Figura 78 – Figura contida na questão 30 da prova 01/2016



Fonte: BRASIL (2015a)

Alternativas: a) 10. b) 24. c) 38. d) 44. e) 58.

Solução: Se o ângulo $B\hat{C}D$ mede 30°, pelo teorema do ângulo central, temos que o ângulo $B\hat{O}D$ mede o dobro, ou seja, $B\hat{O}D = 2 \cdot 30° = 60°$. Já os ângulos $O\hat{B}A$ e $O\hat{D}A$ medem 90°, visto que os segmentos AB e AD são tangentes à circunferência, além disso, eles são iguais, logo:

$$3x - 6 = 2x + 4 \iff 3x - 2x = 4 + 6 \iff x = 10$$

Como o ângulo $B\hat{O}D$ mede 60° e o triângulo BOD é isósceles, logo temos $O\hat{D}B = O\hat{B}D$, e consequentemente:

$$O\hat{D}B + O\hat{B}D + 60° = 180° \iff 2 \cdot O\hat{D}B = 180° - 60° \iff 2 \cdot O\hat{D}B = 120°$$

$$O\hat{D}B = \frac{120°}{2} = 60°$$

Logo, além de BOD ser isósceles, ele também é equilátero e com isso BD é igual ao raio (10cm) e o perímetro de ABD será:

$$2x + 4 + 3x - 6 + 10 = 2 \cdot 10 + 4 + 3 \cdot 10 - 6 + 10 = 58cm$$

Alternativa E

7.4 Comprimento da circunferência

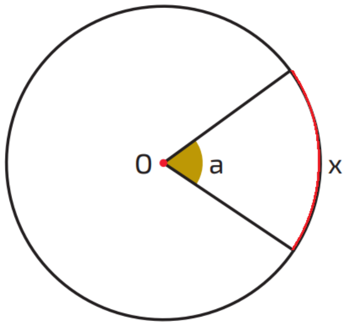
Como já visto anteriormente, o comprimento da circunferência é $C = 2\pi r$, sendo C é o comprimento da circunferência, π é a constante matemática pi, que tem valor aproximado de 3,14, e r é o raio do círculo.

Caso a circunferência não esteja completa, o seu comprimento pode ser calculado usando uma razão entre o ângulo do arco em questão e o ângulo de 360°, que representa uma volta completa, esse comprimento será:

$$x = 2\pi r \cdot \frac{a}{360°}$$

onde α é o ângulo de abertura do arco a ser calculado o comprimento.

Figura 79 – Comprimento de arco de circunferência



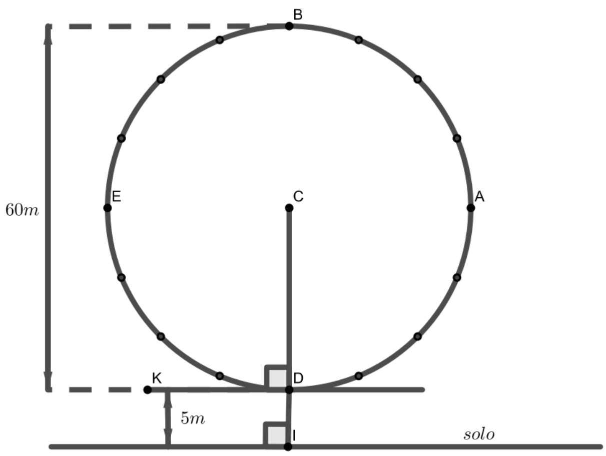
Fonte: Adaptado de Pataro e Balestri (2018d)

É importante lembrar que as unidades de medida utilizadas para o raio devem ser as mesmas utilizadas para o comprimento da circunferência. Além disso, caso seja necessário aproximar o valor de π, é recomendável utilizar o valor $3,14$, entretanto, essa aproximação só deve ser utilizada se a questão fornecer esse dado.

Exemplo 7.4.1. *Questão 22 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

A figura abaixo apresenta o esquema de uma roda gigante. Esta roda gigante tem 60 metros de diâmetro externo e seu centro (ponto C) está localizado a 35 metros do chão. A estrutura que faz a sustentação, representada pelo segmento CI, é perpendicular ao solo. A roda gigante gira no sentido anti-horário a uma velocidade constante e faz uma volta completa, sem parar, em exatamente seis minutos. Uma pessoa embarca e inicia a sua volta na roda gigante no ponto de embarque D.

Figura 80 – Figura contida na questão 20 da prova 01/2020



Fonte: BRASIL (2019a)

Quantos metros percorreu essa pessoa após cinco minutos do início da sua volta, considerando que a roda não parou após o seu embarque?

Alternativas: a) $10\pi m$ b) $\frac{50\pi}{3}m$. c) $50\pi m$ d) $\frac{175\pi}{3}m$ e) $60\pi m$

Solução: Uma volta completa na roda gigante terá comprimento:

$$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 30m = 60\pi m$$

Porém como a volta completa é dada em 6 minutos, após 5 minutos essa pessoa terá percorrido:

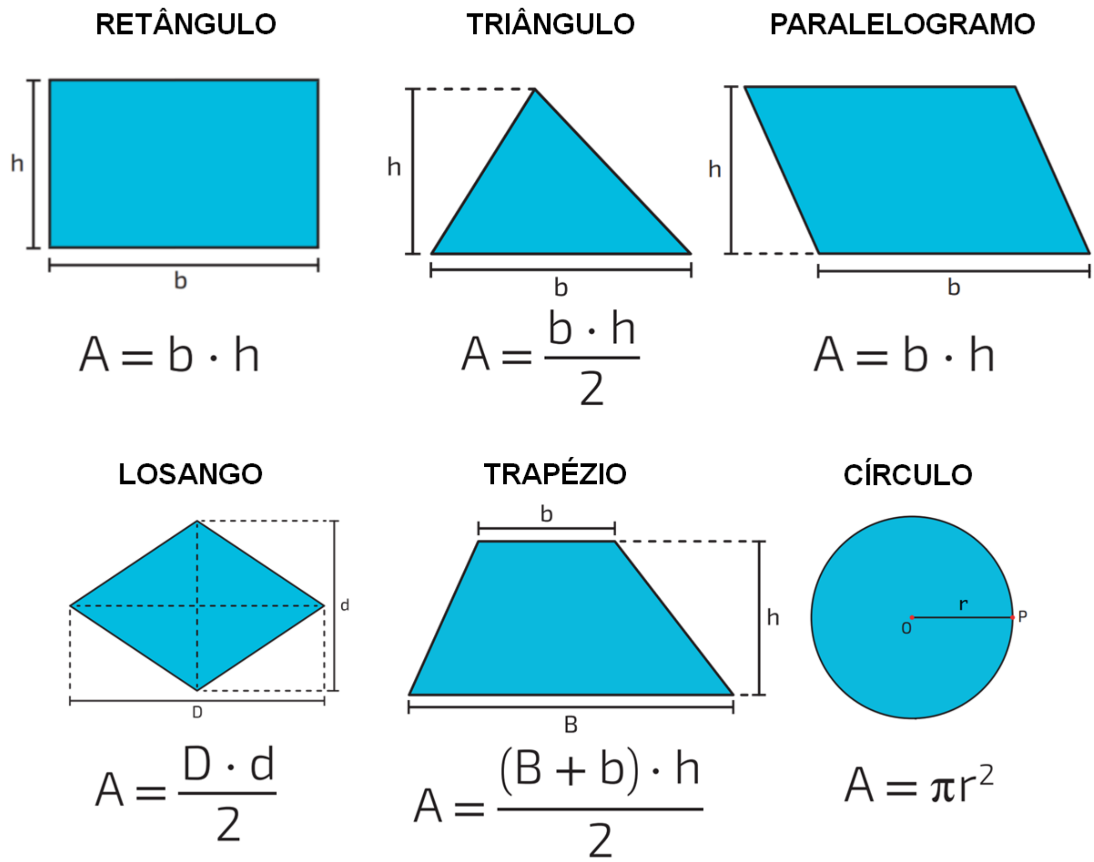
$$60\pi m \cdot \frac{5}{6} = \frac{60\pi m \cdot 5}{6} = \frac{300\pi m}{6} = 50\pi m$$

<u>Alternativa C</u>

7.5 Cálculo de áreas

A figura 81 mostra cada uma dessas figuras e suas respectivas fórmulas para cálculo da área.

Figura 81 – Áreas de figuras planas



Fonte: Adaptado de Pataro e Balestri (2018c) e Pataro e Balestri (2018d)

O cálculo de áreas é importante na geometria para determinar a quantidade de espaço ocupada por uma figura em uma superfície plana. Conforme mostrado na figura acima, existem diversas fórmulas para o cálculo de áreas de diferentes figuras geométricas, abaixo seguem algumas delas, explicando o significado de cada letra.

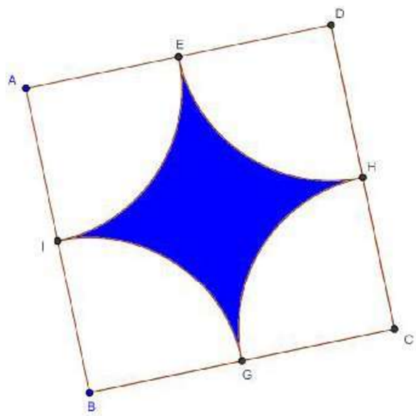
- Área do retângulo: $A = b \times h$, onde A é a área, b é a base e h é a altura.
- Área do triângulo: $A = \dfrac{b \times h}{2}$, onde A é a área, b é a base e h é a altura relativa à base.
- Área do paralelogramo: $A = b \times h$, onde A é a área, b é a base e h é a altura relativa à base.
- Área do losango: $A = \dfrac{D \times d}{2}$, onde A é a área, D é diagonal maior e d é a diagonal menor.
- Área do trapézio: $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$, onde A é a área, B é base maior, b é a base menor e h é a altura.
- Área do círculo: $A = \pi r^2$, onde A é a área, π é a constante matemática pi, que tem valor aproximado de 3,14, e r é o raio do círculo.

É importante lembrar que as unidades de medida utilizadas para as dimensões devem ser as mesmas para que seja possível efetuar os cálculos corretamente, com isso a unidade de medida da área será o quadrado da unidade de medida das dimensões, se por exemplo as dimensões estiverem em metros, as áreas encontradas serão em metros quadrados.

Exemplo 7.5.1. *Questão 18 da prova 01/2012 - corrigida. (BRASIL, 2011a)*

Observe a figura a seguir.

Figura 82 – Figura contida na questão 18 da prova 01/2012



Fonte: BRASIL (2011a)

Nessa figura:

i. os arcos IE, IG, HG e HE medem ambos o 90°.

ii. os lados do quadrado ABCD tem medida $4m$.

iii. os pontos E, I, H e G dividem os seguimentos AD, AB, DC e BC, respectivamente, em partes iguais.

Nessas condições a área sombreada IEHG, em m^2 , é:

Alternativas: a) $16(4-\pi)$. b) 16. c) $4(4-\pi)$. d) $(16-\pi)$. e) $4+\pi$.

Solução: Os quatro arcos mencionados juntos medem $4 \cdot 90° = 360°$, que representa um círculo completo, dessa forma a área do polígono IEHG será a diferença entre a área do quadrado ABCD, de lado 4 m, pela área do círculo formado pelos arcos, que tem raio igual a metade do lado do quadrado, 2m.

$$A = l^2 - \pi r^2 = 4^2 - \pi \cdot 2^2 = 16 - 4\pi = 4(4-\pi)$$

Alternativa C

Exemplo 7.5.2. *Questão 20 da prova 01/2013. (BRASIL, 2012a)*

Um triângulo equilátero tem lado de medida 5cm. Se esse triângulo tiver todos os seus lados aumentados de 20% sua área aumentará em:

Alternativas: a) 34. b) 44. c) 45. d) 48. e) 55.

Solução: A área de um triângulo equilátero de lado l é $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Se esse triângulo ter seus lados aumentados em 20%, logo o lado passará a valer $1,2l$ e sua nova área será:

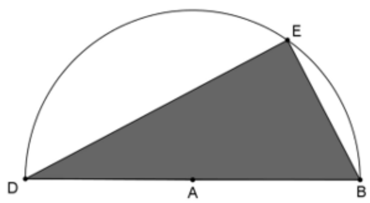
$$A = \frac{(1,2l)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1,44 \cdot l^2\sqrt{3}}{4} = 1,44 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 1,44 \cdot A_{inicial}$$

O que representa um aumento de 44% em relação à área inicial. Alternativa B

Exemplo 7.5.3. *Questão 24 da prova 04/2017. (BRASIL, 2016a)*

Observe o arco de circunferência representado no esboço abaixo:

Figura 83 – Figura contida na questão 24 da prova 04/2017



Fonte: BRASIL (2016a)

Sabe-se que:

I. Ele corresponde a metade de uma circunferência de raio 6 cm.

II. O ângulo $D\hat{B}E = 60°$.
A área não pintada no arco de circunferência apresentado no esboço abaixo, em cm^2, vale:
Alternativas: a) $36(4\pi\sqrt{3})cm^2$ b) $(144\pi - 264)cm^2$ c) $18(\pi - \sqrt{3})cm^2$ d) $18(4\pi - \sqrt{3})cm^2$ e) $36\sqrt{3}cm^2$
Solução: Por estar inscrito em uma semicircunferência, o triângulo BDE é reto em E, e como $D\hat{B}E = 60°$, logo $B\hat{D}E$ é o seu complementar, logo $B\hat{D}E = 60°$. Fazendo trigonometria para descobrir BE e DE, temos:

$$\sin 30° = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} \iff \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE}}{12} \iff 2 \cdot \overline{BE} = 1 \cdot 12 \iff 2 \cdot \overline{BE} = 12 \iff \overline{BE} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} \iff \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{DE}}{12} \iff 2 \cdot \overline{DE} = 12\sqrt{3} \iff \overline{DE} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Com isso a área do triângulo BDE será:

$$A = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = \frac{36\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

Já a área do semicírculo será:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = \frac{36\pi}{2} = 18\pi$$

E a área não pintada, será $18\pi - 18\sqrt{3} = 18(\pi - \sqrt{3})$.
<u>Alternativa C</u>

Exemplo 7.5.4. *Questão 19 da prova 01/2020. (BRASIL, 2019a)*

Considere as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -f(x)$. Determine a área do quadrilátero ABCD, sabendo que A e C são os zeros da função f, B é ponto de mínimo de f e D é ponto máximo de g.
Alternativas: a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{3}{4}$. d) 1. e) 2.
Solução: A função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ terá suas raízes sendo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \iff x_1 = 2 \;\; e \;\; x_2 = 3$$

Já o ponto mínimo de f(x) será $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-5)}{2 \cdot 1}, \frac{-((-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6)}{4 \cdot 1}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.
A função $g(x) = -f(x)$ terá seu ponto máximo $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$, pois é simétrica à função f e com isso temos que os pontos ABCD formam um losango de diagonais $AC = 3 - 2 = 1$ e $BD = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ e a área será:

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

<u>Alternativa A</u>

7.6 Medidas de capacidade

A medida de capacidade é utilizada para medir o volume de líquidos e outros materiais em recipientes. No sistema internacional de unidades (SI), a unidade padrão de medida de capacidade é o metro cúbico (m^3), entretanto outras unidades usualmente utilizadas são o litro (L), o mililitro (mL) e o centímetro cúbico (cm^3).

As principais medidas de capacidade e suas equivalências no sistema internacional de unidades são:

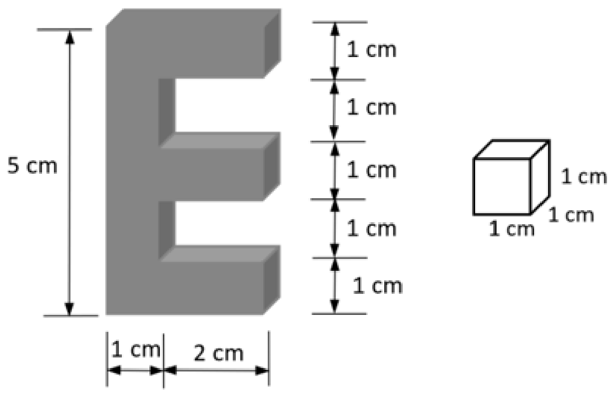
- 1 litro (L) = 1.000 mililitros (mL)
- 1 metro cúbico (m^3) = 1000 litros (L)
- 1 decímetro cúbico (dm^3) = 1 litro (L)

Sendo a capacidade de um recipiente o volume por esse ocupado ou suportado, questões que envolvem capacidade estão intimamente ligadas a questões de geometria que envolvem cálculo de volumes, como o exemplo a seguir.

Exemplo 7.6.1. *Questão 16 da prova 84/2022 - adaptada.*

Para se montar a letra E da figura a seguir, que possui dimensões 5 cm de altura, 3 cm de largura e 1 cm de espessura, foram usados alguns blocos cúbicos de lados medindo 1 cm, como o mostrado no detalhe ao lado da letra E.

Figura 84 – Adaptação da figura contida na questão 16 da prova 84/2022



Fonte: BRASIL (2022a)

Sabendo que cada bloco do detalhe mostrado tem $1cm^3$ de volume, qual o volume total da letra E, em cm^3, após sua montagem?
Alternativas: a) $10cm^2$. b) $11cm^2$. c) $12cm^2$. d) $13cm^2$. e) $14cm^2$.
Solução: A letra E mostrada pode ser dividida em quatro partes, sendo a primeira um paralelepípedo de 5cm de altura e 1cm e outras três peças de 2cm de largura e 1cm

de altura, todas elas com 1cm de espessura. Sendo assim, o volume da letra E, após a montagem, será:

$$V = (5cm \cdot 1cm + 3 \cdot 1cm \cdot 2cm) \cdot 1cm = (5cm^2 + 6cm^2) \cdot 1cm = 11cm^2 \cdot 1cm = 11cm^3$$

Alternativa B

7.7 Transformação de unidades - sistema métrico decimal

A transformação de unidades é um procedimento comum na matemática e na física, e é essencial para a realização de cálculos que envolvem grandezas físicas. No sistema métrico decimal, a unidade fundamental de medida de comprimento é o metro, e seus múltiplos e submúltiplos estão descritos na figura 85 abaixo.

Figura 85 – Múltiplos e submúltiplos do metro

Múltiplos do metro			Unidade fundamental	Submúltiplos do metro		
Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Fonte: Júnior e Castrucci (2018a)

Para realizar uma conversão entre essas unidades, se a direção for da esquerda para direita, é necessário multiplicar por 10 para cada nível percorrido, da maneira recíproca, se a direção for da direita para esquerda, deve-se dividir o valor por 10 para cada nível. Por exemplo, um comprimento de 5hm equivalem a 5000dm, pois da casa do hm para a casa do dm são três níveis da esquerda para direita, ou seja, deve ser multiplicado por 10 três vezes, o que resulta em mil. Já uma distância de 32000000mm equivalem a 32km, pois a são seis níveis que devem ser percorridos da direita para a esquerda, fazendo com o número tenha necessidade de ser dividido por 10 seis vezes, que resulta em dividi-lo por um milhão.

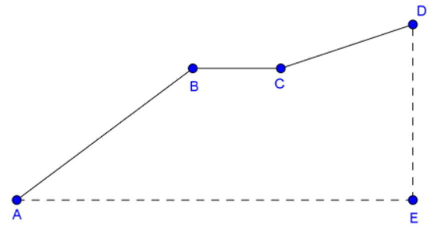
Um ponto de atenção é para medidas de área ou de volume, pois nesse caso, o fator 10 deve ser elevado ao quadrado e ao cubo, respectivamente. Como exemplo, uma área de 2 metros quadrados equivalem a 20000 centímetros quadrados, pois são apenas dois níveis entre eles, entretanto por se tratar de uma área, para cada nível será necessário multiplicar o valor por $10^2 = 100$.

Exemplo 7.7.1. *Questão 22 da prova 04/2017. (BRASIL, 2016a)*

Juca esqueceu o copo que usa para tomar água na porta da escola que está localizada no ponto A. Ele, nesse momento, se encontra no ponto D onde está o ponto de ônibus onde

pega o ônibus que usa para ir para sua casa. Juca precisa ir até a porta da escola e voltar a tempo de pegar o ônibus que passa em 15 minutos. No esboço abaixo está representado o menor caminho de A para D passando por B e C que Juca deve fazer para pegar o copo e voltar por esse mesmo caminho para pegar o ônibus para sua casa. Qual o valor, em metros, desse trajeto? (Considere $\sqrt{2} = 1,4$, apenas nessa questão)
Sabe-se que:
I. $\overline{AE} = 3600cm$; $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ m ; $\overline{BC} = 4000mm$ e $\overline{DE} = 250dm$.
II. $B\hat{A}E = 45°$; $A\hat{E}D = 90°$
III. O segmento $\overline{BC}$ é paralelo ao segmento $\overline{AE}$.

Figura 86 – Figura contida na questão 22 da prova 04/2017



Fonte: BRASIL (2016a)

Alternativas: a) $18m$. b) $45m$. c) $49m$. d) $58m$. e) $90m$.

Solução: Convertendo todas as medidas para metros, temos:

$$\overline{AE} = \frac{3600cm}{100cm/m} = 36m \qquad \overline{BC} = \frac{4000mm}{1000mm/m} = 4m \qquad \overline{DE} = \frac{250dm}{10dm/m} = 25m$$

Sendo B' e C' as projeções de B e C sobre AE, a medida do segmento $\overline{AB'}$ será:

$$\cos B\hat{A}E = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \iff \cos 45° = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \iff \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{AB'}}{20\sqrt{2}} \iff 2 \cdot \overline{AB'} = \sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2}$$

$$2 \cdot \overline{AB'} = 40 \Longleftarrow \overline{AB'} = \frac{40}{2} = 20m$$

Que também é o valor de $\overline{B'B}$, visto que o triângulo AB'B, além de retângulo é isósceles. Como $\overline{B'C'} = \overline{BC}$, o valor de $\overline{C'E}$, calculado através do segmento $\overline{AE}$, será:

$$\overline{AE} = \overline{AB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'E} \iff 36m = 20m + 4m + \overline{C'E} \iff \overline{C'E} = 36m - 20m - 4m = 12m$$

Podemos observar que o segmento $\overline{CD}$ é a hipotenusa de um triângulo de base igual ao valor de $\overline{C'E}$, ou seja, $12m$ e altura igual a $\overline{DE} - \overline{B'B} = 25m - 20m = 5m$. Dessa forma a medida do segmento $\overline{CD}$ é:

$$\overline{CD} = \sqrt{(12m)^2 + (5m)^2} = \sqrt{144m^2 + 25m^2} = \sqrt{169m^2} = 13m$$

E por fim, a distância total do trajeto é:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} = 20\sqrt{2}m + 4m + 13m = 20 \cdot 1,4m + 17m = 28m + 17m = 45m$$

<u>Alternativa B</u>

8 Probabilidade e Estatística no exame de seleção

Segundo Júnior e Castrucci (2018d), "a Estatística está presente em áreas do conhecimento que envolvem planejamento de experimentos, coleta, processamento e organização de dados e análise, interpretação e comunicação das informações obtidas". Ela é de suma importância para levantamento, organização e leitura de informações.

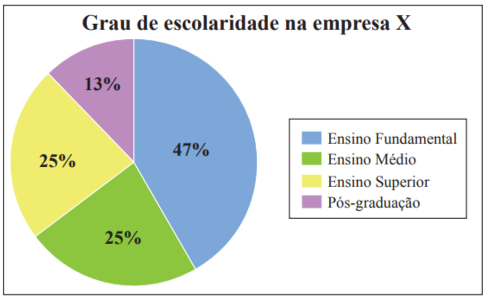
8.1 Leitura e interpretação de gráficos, tabelas, infogramas e fluxogramas

Gráficos, tabelas, infogramas e fluxogramas são importantes ferramentas que auxiliam na visualização de informações que seriam menos viáveis a sua exposição na forma textual. No caso dos gráficos, Júnior e Castrucci (2018d) traz como exemplo três tipos:

- Gráfico de setores: circular, formado por fatias que somadas compõem 100% do círculo. Existe uma relação de proporcionalidade de cada fatia com o todo.
- Gráfico de barras ou de colunas: compara dados entre várias categorias e entre itens individuais.
- Gráfico de linhas: compara dados (lineares) ao longo do tempo, ou seja, mostra a evolução de uma ou mais variáveis ao longo do tempo.

A seguir nós temos as figuras 87, 88 e 89 contendo os três tipos de gráficos mencionados.

Figura 87 – Gráfico de setores

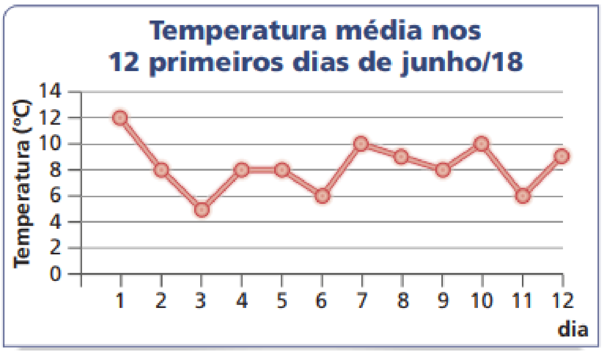


Fonte: Pataro e Balestri (2018d)

Figura 88 – Gráfico de setores

Fonte: Júnior e Castrucci (2018d)

Figura 89 – Gráfico de setores



Fonte: Júnior e Castrucci (2018d)

As tabelas, por sua vez, são representações em forma de lista, com colunas e linhas que mostram os dados de forma organizada e estruturada. As tabelas são especialmente úteis para comparar e analisar dados numéricos, e podem ser usadas em conjunto com outros tipos de gráficos. Dentre os tipos de tabelas existentes, uma muito importante é a tabela de frequência, que é quando ela apresenta os dados de forma resumida por meio de frequências (CAZORLA et al., 2017). A figura a seguir mostra algumas tabelas de frequência.

Figura 90 – Tabelas de frequência

Distribuição de frequência por categorias (a)

Mascote em casa	Nº de alunos
Cachorro	3
Pássaro	2
Gato	2
Outro	3
Nenhum	15
Total	25

Distribuição de frequência por pontos (b)

Nº de filhos	Nº de famílias
0	40
1	100
2	60
3	40
4	10
Total	250

Distribuição de frequência por intervalos (c)

Altura (em cm)	Nº de alunos
125 – 129	2
130 – 134	3
135 – 139	11
140 – 144	8
145 - 149	1
Total	25

Fonte: Cazorla et al. (2017)

Os infogramas são uma combinação de gráficos, textos e imagens, que permitem mostrar informações e dados de forma mais clara e atraente. Os infogramas são especialmente úteis para transmitir informações de forma rápida e eficiente, e são muito utilizados em jornalismo, marketing e comunicação em geral.

Já os fluxogramas são representações visuais que mostram os processos e procedimentos de forma sequencial e organizada. Os fluxogramas são especialmente úteis para visualizar as etapas de um processo e identificar possíveis problemas e oportunidades de melhoria.

Para interpretar essas ferramentas visuais, é importante observar o tipo de gráfico ou tabela, as legendas, escalas e unidades de medida, além de analisar os padrões e tendências presentes nos dados. A seguir uma questão sobre leitura de tabelas e outra sobre leitura de gráficos

Exemplo 8.1.1. *Questão 20 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

A tabela abaixo mostra a distribuição de frequência dos votos recebidos por cinco candidatos à coordenação do Grêmio Estudantil dados por três turmas de certa escola.

Figura 91 – Tabela contida da questão 20 da prova 01/2011

Candidatos	Votos		
	Turma 1	Turma 2	Turma 3
A	10	5	3
B	20	7	5
C	18	26	36
D	3	7	5
E	2	5	3
Total	53	50	52

Fonte: BRASIL (2010a)

Pode-se afirmar que: Alternativas:
a) o candidato A obteve total de 53 votos.
b) o candidato C obteve 8 vezes o total de votos do candidato E. c) os votos do candidato A mais os votos do candidato B superaram os votos recebidos pelo candidato C.
d) juntos, os candidatos A, B, D e E superaram os votos do candidato C.
e) os votos do candidato B superaram os votos do candidato D em exatamente 50%.

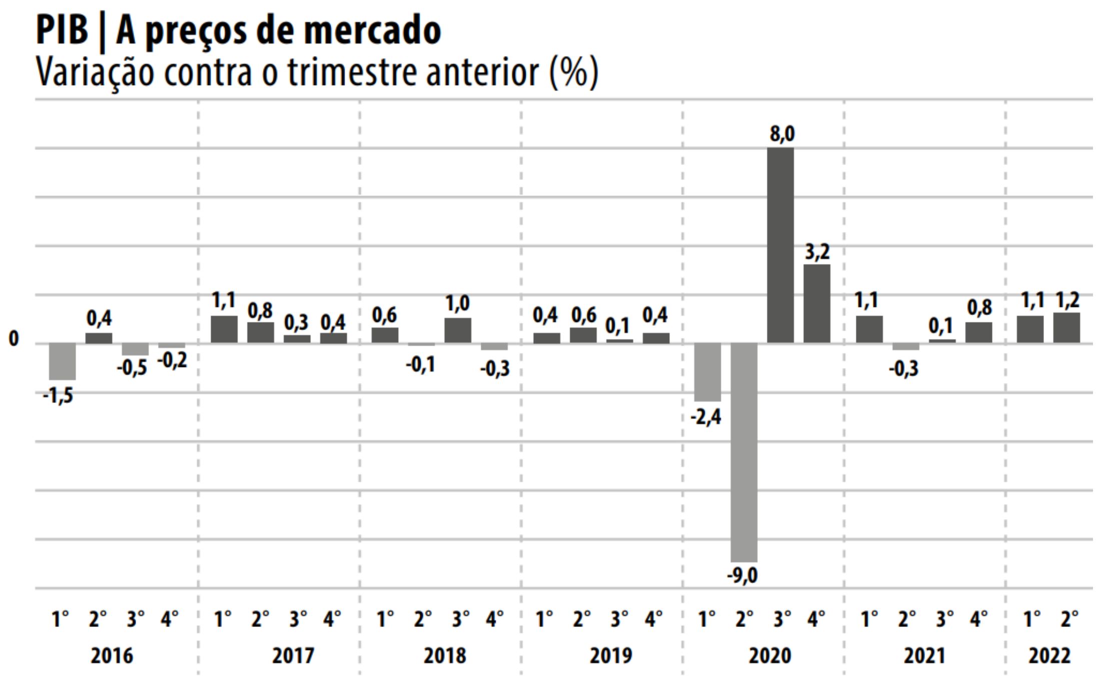
Solução: Analisando a tabela, vemos que as linhas se referem aos candidatos e as colunas às turmas, logo o total informado na última linha é do somatório dos candidatos em cada turma. Somando os votos de cada candidato temos: $A = 10 + 5 + 3 = 18$, $B = 20 + 7 + 5 = 32$, $C = 18 + 26 + 36 = 80$, $D = 3 + 7 + 5 = 15$ e $E = 2 + 5 + 3 = 10$. Logo, analisando as alternativas, temos que o candidato C obteve 80 votos, 8 vezes a quantidade de votos do candidato E, que recebeu 10. Alternativa B

Exemplo 8.1.2. *Questão 19 da prova 84/2022. (BRASIL, 2022a)*

A figura a seguir mostra os dados da variação do PIB (Produto Interno Bruto) do Brasil desde 2016, medidos trimestralmente, segundo pesquisa feita pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

Dessa forma, analisando apenas os dados dos anos de 2020 a 2022, a diferença percentual

Figura 92 – Figura contida na questão 19 da prova 84/2022



Fonte: BRASIL (2022a)

entre o maior e o menor valor medido nesse período é igual a:

Alternativas: a) $7,9\%$. b) $8,3\%$. c) $7,7\%$. d) -1%. e) 17%.

Solução: Fazendo a leitura do gráfico, o menor valor é referente ao segundo trimestre de 2020, sendo $-9,0\%$, já o maior valor é visto um trimestre depois, sendo $8,0\%$, e a diferença entre eles é $8,0\% - (-9,0)\% = 8,0\% + 9,0\% = 17,0\%$. Alternativa E

8.2 Medidas de tendência central: média, moda e mediana

As medidas de tendência central são ferramentas estatísticas que permitem resumir e representar um conjunto de dados de forma mais concisa. As três medidas mais comuns são a média, a moda e a mediana.

A média é a medida de tendência central mais conhecida e utilizada. Ela é obtida pela soma de todos os valores do conjunto de dados, dividida pelo número total de valores. A média é uma medida bastante sensível a valores extremos ou discrepantes, que podem distorcer significativamente o resultado final. A média entre n valores em um conjunto de dados é:

$$Média = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Se estivermos falando de uma distribuição de frequência, a média pode ser obtida multiplicando cada valor pela sua frequência, e em seguida dividir pelo somatório da frequência, ficando a fórmula da seguinte forma:

$$Média = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + ... + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}$$

A moda é o valor que mais se repete no conjunto de dados enquanto a mediana é o valor que divide o conjunto de dados em duas partes iguais, ou seja, metade dos valores estão acima da mediana e metade estão abaixo, e caso for uma quantidade par de dados, a mediana é a média dos dois valores que estão no meio desse conjunto de dados.

Como são bem incidentes nas provas, seguem quatro exemplos sobre o tema:

Exemplo 8.2.1. *Questão 19 da prova 01/2013. (BRASIL, 2012a)*

João deseja comprar uma pasta nova para guardar suas atividades escolares. A tabela a seguir mostra o preço da pasta encontrado em 8 papelarias pesquisadas.
Feita essa pesquisa João resolveu negociar com a papelaria de preço P2 uma redução no

Figura 93 – Figura contida na questão 19 da prova 01/2013

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
R$ 26,50	R$ 27,50	R$ 25,50	R$ 26,00	R$ 27,00	R$ 23,40	R$ 25,00	R$ 25,10

Fonte: BRASIL (2012a)

preço pesquisado. João apresentou sua planilha com os dados da pesquisa e ficou acordado que ele pagaria nessa papelaria o preço mediano pesquisado. João fez uma economia de:
Alternativas: a) $R\$1,75$. b) $R\$1,50$. c) $R\$1,25$. d) $R\$1,00$. e) $R\$0,75$.
Solução: Colocando os valores em ordem temos:

$$R\$27,50 > R\$27,00 > R\$26,50 > R\$26,00 > R\$25,50 > R\$25,10 > R\$25,00 > R\$23,40$$

E o preço mediano será a média entre o quarto e o quinto preço, que é

$$\frac{R\$26,00 + R\$25,50}{2} = \frac{R\$51,50}{2} = R\$25,75$$

Como o valor anterior era de $R\$27,50$, logo sua economia foi de:

$$R\$27,50 - R\$25,75 = R\$,75$$

<u>Alternativa A</u>

Exemplo 8.2.2. *Questão 27 da prova 01/2019. (BRASIL, 2018a)*

As inscrições para um congresso de Matemática que ocorrerá no próximo final de semana foram realizadas em três etapas distintas entre os meses de agosto e outubro. A tabela abaixo apresenta o valor de inscrição e o número de inscritos pagantes em cada uma das três etapas.

Figura 94 – Figura contida na questão 27 da prova 01/2019

Etapa	Número de inscritos pagantes	Valor da inscrição
1	140	R$ 70,00
2	110	R$ 100,00
3	325	R$ 120,00

Fonte: BRASIL (2018a)

Além desses, 8% dos inscritos ficaram isentos da taxa de inscrição. Quantos são os inscritos que não pagaram a inscrição (isentos) ou que pagaram um valor abaixo da média dos valores pagos pelos inscritos nas três etapas?
Alternativas: a) 140. b) 190. c) 250. d) 270. e) 300.
Solução: A média dos inscritos nas três etapas foi de:

$$Média = \frac{140 \times R\$70,00 + 110 \times R\$100,00 + 325 \times R\$120,00}{140 + 110 + 325}$$

$$Média = \frac{R\$9.800,00 + R\$11.000,00 + R\$39.000,00}{575} = \frac{R\$59.800,00}{575} = R\$104,00$$

Considerando que 8% ficaram isentos, esses 575 são os 92% restantes que pagaram, logo a quantidade total de pessoas no evento é $575/0,92 = 625$ pessoas, sendo $625 - 575 = 50$ isentos. E o total de pessoas que ficaram isentas ou pagaram menos que a média é $50 + 140 = 190$ pessoas. <u>Alternativa B</u>

Exemplo 8.2.3. *Questão 16 da prova 01/2011. (BRASIL, 2010a)*

Ana, Beatriz e Caio conversavam sobre as notas que haviam obtido nas seis provas de Matemática ao longo do ano de 2010. As notas de cada prova variavam entre 0 e 10 e tinham o mesmo peso. As notas eram:
Ana = 2, 3, 5, 7, 7, 8
Beatriz = 3, 4, 4, 4, 8, 9
Caio = 1, 3, 5, 7, 8, 9
Com base unicamente nessas informações, pode-se afirmar que:
Alternativas:
a) a nota modal do conjunto das 18 notas é 7.
b) a mediana das notas de Beatriz é 4.
c) o conjunto das 18 notas possui 3 modas.

d) a média aritmética das notas de Ana é maior que a média aritmética das notas de Beatriz.
e) a mediana das notas de Caio é diferente da mediana das notas de Ana.
Solução: Como as notas já estão em ordem, fica mais fácil determinar a a moda e a mediana, no caso da moda, que é a nota que mais se repete, temos as notas 3, 4, 7 e 8 se repetindo quatro vezes cada, não tendo nesse caso, uma única moda e sim quatro, já descartando as alternativas A e C. Já em relação a mediana, como são seis notas ela será a média aritmética entre a terceira e a quarta nota, logo a mediana das notas de Beatriz é $\frac{4+4}{2} = 4$, sendo correta a Alternativa B.

Exemplo 8.2.4. *Questão 21 da prova 04/2017. (BRASIL, 2016a)*

Um grupo de 100 famílias foi entrevistado sobre sua expectativa de uso do décimo terceiro para compras natalinas em 2016. A Tabela abaixo mostra o percentual do décimo terceiro que elas pretendem usar nessas compras.
O percentual médio de gastos do décimo terceiro nesse grupo para as compras natalinas

Figura 95 – Figura contida na questão 21 da prova 04/2017

Percentual de gasto do décimo terceiro (%)	Número de Famílias
0	35
25	15
50	18
65	22
100	10
Soma	100

Fonte: BRASIL (2016a)

em 2016 será de:
Alternativas: a) 15%. b) 20%. c) 22%. d) 30, 55%. e) 37, 05%.
Solução: A média aritmética, para uma distribuição de frequência, pode ser calculada pelo somatório do produto entre a frequência e o valor referente a ela, logo, essa média aritmética será:

$$Média = \frac{0 \times 35 + 25 \times 15 + 50 \times 18 + 65 \times 22 + 100 \times 10}{100} = \frac{0 + 375 + 900 + 1430 + 100}{100}$$

$$Média = \frac{3705}{100} = 37,05\%$$

Alternativa E

8.3 Princípio aditivo e multiplicativo da contagem

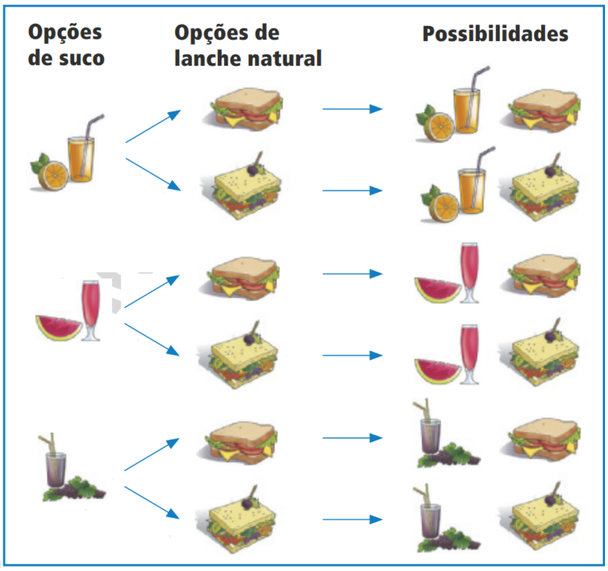
O princípio aditivo e o princípio multiplicativo da contagem são dois conceitos fundamentais da combinatória, que é a área da matemática que estuda as formas de contagem de objetos e eventos.

O princípio aditivo da contagem estabelece que, se uma tarefa pode ser realizada de m maneiras diferentes e outra tarefa pode ser realizada de n maneiras diferentes, sem que as tarefas possam ser realizadas simultaneamente, então o número total de maneiras de realizar uma ou outra tarefa é a soma de m e n. Em outras palavras, se houver m opções para uma escolha e n opções para outra escolha, e elas não puderem ser escolhidas ao mesmo tempo, então há um total de $m + n$ opções para escolher uma das tarefas.

Já o princípio multiplicativo da contagem estabelece que, se uma tarefa pode ser realizada de m maneiras diferentes e outra tarefa pode ser realizada de n maneiras diferentes, e as tarefas precisam ser realizadas simultaneamente, então o número total de maneiras de realizar as duas tarefas é o produto de m e n. Em outras palavras, se houver m opções para uma escolha e n opções para outra escolha, e elas precisarem ser escolhidas ao mesmo tempo, então há um total de $m \times n$ opções para escolher ambas as tarefas.

Como exemplo temos uma lanchonete que oferece três tipos de suco (laranja, melancia e uva) e dois tipos de lanche natural (simples ou completo). A figura 96 mostra a árvore de possibilidades das opções de escolha para um tipo de suco e um tipo de lanche natural.

Figura 96 – Árvore de possibilidades para aplicação do princípio multiplicativo da contagem



Fonte: Júnior e Castrucci (2018c)

Observe que, no final das contas, a quantidade total de opções será $2 \times 3 = 6$, pois é aplicado o princípio multiplicativo da contagem, caso só pudesse escolher uma opção de suco ou um lanche, então o princípio seria o aditivo e a quantidade de opções seria $2 + 3 = 5$. Esses princípios são muito úteis para resolver problemas de contagem em que há várias tarefas ou escolhas a serem feitas. Abaixo temos um exemplo que envolve o princípio multiplicativo.

Exemplo 8.3.1. *Questão 19 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

Um aplicativo, recém lançado para todas as plataformas de celular, está fazendo um grande sucesso dentre os adolescentes neste último mês. O jogo funciona de acordo com as seguintes regras:
No início de uma série de partidas, a máquina atribui ao jogador Q pontos.
Em cada uma das partidas, em caso de vitória ou derrota, o jogador ganha ou perde a metade dos pontos que tem no início desta partida, respectivamente.
Se uma pessoa jogar uma série de quatro partidas, nas quais ela perde duas vezes e ganha duas vezes, quantos pontos terá ao final?
Alternativas:
a) Q pontos. b) $\frac{1}{16}Q$ pontos c) $\frac{81}{16}Q$ pontos d) $\frac{9}{16}Q$ pontos e) $\frac{3}{16}Q$ pontos
Solução: Em cada derrota, o jogador perderá a metade dos pontos, logo, sua pontuação será multiplicada por $\frac{1}{2}$. Em cada vitória, ele ganhará a metade dos pontos que tem, logo, se ele tiver Q pontos, ele receberá $\frac{Q}{2}$ e passará a ficar com $Q + \frac{Q}{2} = \frac{3Q}{2}$, portanto, sua pontuação terá sido multiplicada por $\frac{3}{2}$. Após duas derrotas e duas vitórias, sua pontuação será:

$$Q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = Q \cdot \frac{9}{16}$$

Alternativa D

8.4 Análise de eventos aleatórios dependentes e independentes

Na teoria das probabilidades, a análise de eventos aleatórios pode ser dividida em duas categorias principais: eventos aleatórios dependentes e eventos aleatórios independentes.

Segundo Júnior e Castrucci (2018d) "Dois ou mais eventos são denominados eventos independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros eventos terem ocorridos ou não". Por exemplo, lançar um dado duas vezes são considerados eventos dependentes, visto que o resultado de um dado não terá nenhuma relação com o resultado do outro. Por outro lado, se eu tiver uma urna com cinco bolas brancas e cinco bolas pretas, a probabilidade de se tirar uma bola branca é 1/2, entretanto, após retirada a primeira bola, sendo ela branca, restarão quatro bolas brancas e cinco pretas, deixando a probabilidade de ser 1/2 e passando a ser 4/9 para se retirar uma bola branca, sendo assim um evento dependente.

A relação entre eventos aleatórios dependentes e independentes é importante porque afeta a forma como a probabilidade é calculada. Quando eventos são dependentes, a probabilidade é calculada usando a regra da multiplicação, que leva em conta a probabilidade de cada evento individualmente e a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem juntos. Quando eventos são independentes, a probabilidade é calculada usando a regra da adição, que leva em conta a probabilidade de cada evento individualmente, mas não leva em conta a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem juntos. Abaixo temos um exemplo resolvido sobre eventos dependentes.

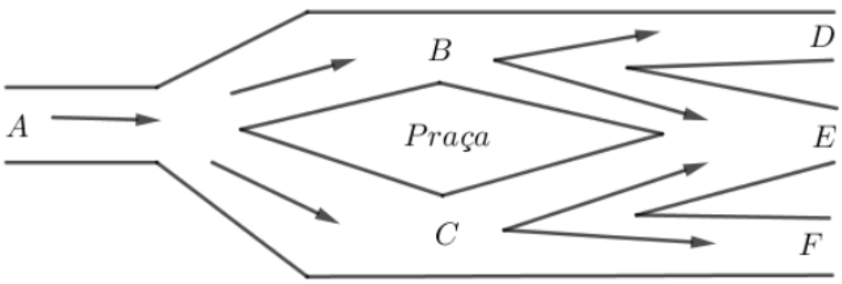
Exemplo 8.4.1. *Questão 20 da prova 01/2018. (BRASIL, 2017b)*

A figura a seguir ilustra uma sequência de bifurcações do centro de uma grande metrópole do nosso país. Sabe-se que todas as vias representadas na imagem são de mão única. Desejando fazer um estudo do percentual de veículos que trafegam diariamente neste trecho, a prefeitura coletou os seguintes dados:

– dos veículos que passam por A, 55% viram à esquerda;
– dos veículos que passam por B, 25% viram à esquerda;
– daqueles que trafegam por C, 60% dobram à esquerda.

De posse destes dados, a prefeitura constatou que o percentual dos veículos que, passando

Figura 97 – Figura contida na questão 20 da prova 01/2018



Fonte: BRASIL (2017b)

por A, entram em E é:

Alternativas: a) $68,25\%$ b) $40,75\%$ c) $31,75\%$ d) $59,25\%$ e) 50%

Solução: Se 55% dos que passam por A viram a esquerda, então vão em direção a B e os outros 45% vão em direção a C. Dos que passam por B, 25% viram à esquerda, ou seja, 75% viram a direita e vão em direção a E, porém são 75% de 55% que equivale a:

$$\frac{75}{100} \times 55\% = 41,25\%$$

Já dos 45% que passam por C, 60% dobram a esquerda e vão também em direção a E, isso equivale a:

$$\frac{60}{100} \times 45\% = 27\%$$

Somando temos $41,25\% + 27\% = 68,25\%$. Alternativa A

9 Conclusão

O primeiro objetivo desse trabalho foi elucidar o leitor a respeito do Instituto Federal do Espírito Santo, exaltando-o como uma instituição de ensino público e de qualidade que está presente em todas as microrregiões do estado, sendo uma excelente opção para a população espírito-santense.

Além disso, foi possível, com esse trabalho, mostrar o histórico do conteúdo programático da prova de seleção ao longo dos últimos 10 anos, bem como detalhar a incidência de cada subtópico da disciplina de matemática ao longo de cada edital. Nessa parte, abordada no capítulo 2, também foi possível associar cada questão de todas as provas desde 2011 a um conteúdo do último edital, gerando um material facilitador tanto para docentes quanto para discentes que estão se preparando para a referida prova.

Ademais, os próximos cinco capítulos foram dedicados a um breve conteúdo de cada um dos cinco tópicos previstos no edital com a resolução de mais de 50% das questões de todas as provas, concebendo uma fonte de pesquisas e estudos que poderão ser utilizados, principalmente, por professores de escolas públicas estaduais e municipais e alunos dessas redes que não têm acesso a materiais similares por questões financeiras.

Outrossim, foi elaborado um apêndice o qual contém um banco de questões por tema, incluindo, além das questões já respondidas no presente trabalho, as demais contidas nas provas analisadas e algumas outras, de outras fontes, visando atender os subtópicos que tiveram poucas ou nenhuma questão identificada nas provas analisadas.

Por fim, considerando que o objetivo principal era a produção de um material que pudesse atender a professores e a alunos dos anos finais do Ensino fundamental, conclui-se que tal objetivo foi alcançado, e que este trabalho, obviamente passível de melhorias, pode ser uma base interessante para o público supracitado.

Referências

ÁVILA, G. A distribuição dos números primos. *RPM 19*, 1991. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/19/4.htm>. Citado na página 41.

BELLEMAIN, P. M. B.; BIBIANO, M. F. de A.; SOUZA, C. F. de. Estudar grandezas e medidas na educação básica. *Em teia*, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/234920>. Citado na página 122.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini: 6º ano: ensino fundamental: anos finais - 9° ed.* [S.l.]: São Paulo:Moderna, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 88, 89, 97 e 98.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini: 7º ano: ensino fundamental: anos finais - 9° ed.* [S.l.]: São Paulo:Moderna, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 44, 45, 65, 112 e 113.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini: 8º ano: ensino fundamental: anos finais - 9° ed.* [S.l.]: São Paulo:Moderna, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 72, 81 e 105.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini: 9º ano: ensino fundamental: anos finais - 9° ed.* [S.l.]: São Paulo:Moderna, 2018. Citado na página 98.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2011.* [S.l.], 2010. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/integrado/prova-tecnico-integrado-2011-1.pdf>. Citado 11 vezes nas páginas 50, 55, 66, 76, 100, 101, 112, 117, 118, 138 e 141.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2011.* [S.l.], 2010. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2011/PS1_2011/edital_PS1_2011_DOU.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2012.* [S.l.], 2011. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/integrado/prova-tecnico-integrado-2012-1.pdf>. Citado 9 vezes nas páginas 53, 62, 77, 79, 102, 109, 110, 115 e 130.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2012.* [S.l.], 2011. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2012/PS_1/01-2012_edital.pdf>. Citado na página 22.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2013.* [S.l.], 2012. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/integrado/prova-tecnico-integrado-2013-1.pdf>. Citado 7 vezes nas páginas 46, 69, 99, 107, 116, 131 e 140.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2013.* [S.l.], 2012. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2013/01-2013/EDITAL_COMPLETO_PS_1_2013_Cursos_Tecnicos_multicampi_retificado2_2012-10-16.pdf>. Citado na página 22.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2014*. [S.l.], 2013. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/2014/tecnico_integrado_2014_1_publicacao.pdf>. Citado 9 vezes nas páginas 46, 49, 50, 63, 97, 110, 111, 118 e 126.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2014*. [S.l.], 2013. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/edital_ps_1-2014_retificado_27-12.pdf>. Citado na página 22.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2015*. [S.l.], 2014. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/integrado/prova-tecnico-integrado-2015-1.pdf>. Citado 6 vezes nas páginas 35, 52, 58, 66, 76 e 103.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2015*. [S.l.], 2014. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2015/1-2015/edital_retificado_22-10.pdf>. Citado na página 22.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2016*. [S.l.], 2015. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/2016/tecnico_integrado_2016_1_publicacao.pdf>. Citado 11 vezes nas páginas 36, 56, 64, 70, 73, 79, 80, 118, 119, 126 e 127.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2016*. [S.l.], 2015. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2016/multicampi/edital_01_2016_V01_retificado_27_11.pdf>. Citado na página 22.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 04/2017*. [S.l.], 2016. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/2017/ifes_prova_tecnicos_integrado_concomitante_2017.pdf>. Citado 9 vezes nas páginas 53, 59, 104, 105, 123, 131, 134, 135 e 142.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 04/2017*. [S.l.], 2016. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2017/04-2017/edital_4_2017_13_10_certidao.pdf>. Citado na página 24.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2018*. [S.l.], 2017. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/integrado/prova-tecnico-integrado-2018-1.pdf>. Citado 9 vezes nas páginas 43, 66, 70, 71, 82, 85, 89, 144 e 145.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2018*. [S.l.], 2017. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2018/2018-01/edital_01-2018_ret-19-12.pdf>. Citado na página 24.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2019*. [S.l.], 2018. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/comunidade/coletanea_provas/integrado/prova-tecnico-integrado-concomitante-2019-1.pdf>. Citado 9 vezes nas páginas 37, 56, 64, 73, 103, 104, 120, 121 e 141.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2019.* [S.l.], 2018. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/files/estude_aqui/_2019/2019-01/edital-cursos-tecnicos-01-2019.pdf>. Citado na página 24.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 01/2020.* [S.l.], 2019. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/-publicacoes/coletanea-provas/cursos-tecnicos/prova-tecnico-integrado-01-2020.pdf>. Citado 10 vezes nas páginas 40, 67, 77, 107, 111, 113, 124, 125, 128 e 132.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 01/2020.* [S.l.], 2019. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/-publicacoes/processos-seletivos/alunos/2020/2020-01/edital-2020-01-tecnico-integrado-retificado-23-12-2019.pdf>. Citado na página 24.

BRASIL. *Plano de Desenvolvimento Institucional do IFES 2019/2 - 2024/1.* 2019. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/Res_CS_48_2019_-_PDI_-_Anexo.pdf>. Citado na página 17.

BRASIL. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, Caderno de provas do ENEM 2020 - 2º dia, caderno 5 - amarelo.* [S.l.], 2020. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Citado na página 95.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Caderno de provas do PS 84/2022.* [S.l.], 2022. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/-publicacoes/processos-seletivos/alunos/2022/2022-84/2022-11-07-edital-84-prova.pdf>. Citado 8 vezes nas páginas 40, 41, 45, 74, 94, 95, 133 e 139.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo do PS 84/2022.* [S.l.], 2022. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/-publicacoes/processos-seletivos/alunos/2022/2022-84/2022-09-23-edital-84-2022-retificado.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 24 e 25.

BRASIL. *IFES Portas Abertas.* 2023. Disponível em: <https://aracruz.ifes.edu.br/projetos-de-pesquisa-e-extensao/266-campus/diretorias/diretoria-de-pesquisa-pos-graduacao-e-extensao/17043-ifes-portas-abertas>. Citado na página 21.

BRASIL. *Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Edital completo - Processo Seletivo para Cursos Técnicos Integrados (PS 95/2022).* [S.l.], 2023. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/images/stories/-publicacoes/processos-seletivos/alunos/2023/95-2023/edital-95-2023-cursos-tecnicos-integrados-18-08-2023.pdf>. Citado na página 24.

BRASIL. *O IFES.* 2023. Disponível em: <https://www.ifes.edu.br/o-ifes>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.

CAZORLA, I. et al. *Estatística para os anos iniciais do ensino fundamental - 1° ed.* [S.l.]: Brasília: SBEM, 2017. Citado na página 137.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. *USP, Estudos avançados 94*, 2018. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/eav/article/view/152688/149180>. Citado na página 61.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana - 9ª ed.* [S.l.]: São Paulo:Atual, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 91, 92 e 93.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais*. [S.l.]: Rio de Janeiro:FTD, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 36, 96 e 134.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 7º ano: ensino fundamental: anos finais - 4° ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro:FTD, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 42, 48 e 81.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 8º ano: ensino fundamental: anos finais - 4° ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro:FTD, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 50, 57 e 143.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais - 4° ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro:FTD, 2018. Citado 7 vezes nas páginas 75, 101, 109, 110, 136, 137 e 144.

LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias. *RPM 01*, 1982. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/1/2.htm>. Citado na página 36.

MARTINS, M. d. C. Notação científica : uma forma eficaz de representar e operar com pequenos e grandes números. *Correio dos Açores: ensino*, 2015. Disponível em: <https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/3736>. Citado na página 47.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial: 6º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:Scipione, 2018. Citado na página 85.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial: 7º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:Scipione, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 83, 108 e 109.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial: 8º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:Scipione, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 91, 102 e 129.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial: 9º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:Scipione, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 100, 128, 129 e 136.

RODRIGUES, T. A.; BARBOSA, E. M. N.; MOREIRA, R. M. M. A importância da geometria na vida real: Ênfase na área da educação. *Scientia Generalis 2675-2999*, 2021. Disponível em: <http://scientiageneralis.com.br/index.php/SG/article/view/345/270>. Citado na página 83.

SOUZA, J. R. de. *Matemática Realidade & Tecnologia: 6º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:FTD, 2018. Citado na página 38.

SOUZA, J. R. de. *Matemática Realidade & Tecnologia: 7º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:FTD, 2018. Citado na página 61.

SOUZA, J. R. de. *Matemática Realidade & Tecnologia: 8º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:FTD, 2018. Citado na página 97.

SOUZA, J. R. de. *Matemática Realidade & Tecnologia: 9º ano: ensino fundamental: anos finais - 1° ed.* [S.l.]: São Paulo:FTD, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 77, 114, 115 e 119.

TRESOLAVY, R. L. *Matemática (Ensino Médio) - Cadernos 1 a 4 - 1ª ed.* [S.l.]: São Paulo : Saraiva, 2019. Citado na página 84.

TRESOLAVY, R. L. *Matemática (Ensino Médio) - Cadernos 5 a 8 - 1ª ed.* [S.l.]: São Paulo : Saraiva, 2019. Citado na página 117.

TRESOLAVY, R. L. *Matemática (Ensino Médio) - Cadernos 9 a 12 - 1ª ed.* [S.l.]: São Paulo : Saraiva, 2019. Citado na página 84.

APÊNDICE A – Banco de Questões

A.1 Números

A.1.1 Conjuntos - resolução de problemas que envolvem operações com conjuntos (união, interseção, diferença e conjunto complementar)

001 *Questão 16 da prova 01/2011*

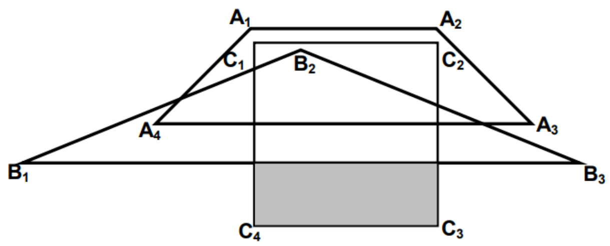
Ana, Beatriz e Caio conversavam sobre as notas que haviam obtido nas seis provas de Matemática ao longo do ano de 2010. As notas de cada prova variavam entre 0 e 10 e tinham o mesmo peso. As notas eram:
Ana = 2, 3, 5, 7, 7, 8
Beatriz = 3, 4, 4, 4, 8, 9
Caio = 1, 3, 5, 7, 8, 9
Com base unicamente nessas informações, pode-se afirmar que:
a) a nota modal do conjunto das 18 notas é 7.
b) a mediana das notas de Beatriz é 4.
c) o conjunto das 18 notas possui 3 modas.
d) a média aritmética das notas de Ana é maior que a média aritmética das notas de Beatriz.
e) a mediana das notas de Caio é diferente da mediana das notas de Ana.

002 *Questão 17 da prova 01/2011*

Em uma rua na cidade de Colatina, moram seis crianças cujas idades no ano de 2010 são 9, 10, 10, 11, 15 e 16. Em 2011, após todas as crianças já terem feito aniversário, pode-se afirmar que o novo conjunto das idades terá, em relação a 2010:
a) média aritmética inalterada.
b) mediana aumentada em mais de seis unidades.
c) moda igual a 11,5.
d) média aritmética aumentada em uma unidade.
e) mediana igual a 11.

003 *Questão 18 da prova 01/2011*

Na figura abaixo estão representados três conjuntos não vazios: um conjunto A representado pelo trapézio $A_1A_2A_3A_4$, outro conjunto B representado pelo triângulo $B_1B_2B_3$ e, por fim, um conjunto C representado pelo quadrado $C_1C_2C_3C_4$.



A região sombreada pode ser representada corretamente pela expressão:
a)$(A - B) \cap C$
b)$C - A - B$
c)$(A - B) \cup C$
d)$[(A \cup B) \cap C] - A$
e)$B - A - C$

004 *Questão 19 da prova 01/2011*
De acordo com a teoria dos conjuntos, marque a única identidade falsa.
a)$\{1, 1, 1, 2, 2\} = 1, 2$
b)$\emptyset \in \{\emptyset, \{1\}\}$
c)$\emptyset \subset \{\emptyset, \{1\}\}$
d)$\emptyset = \{\emptyset\}$
e)$\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \ e \ x \geq 0\} = \emptyset$

005 *Questão 29 da prova 01/2012*
Um professor de educação física, querendo saber entre vôlei e futebol qual era o esporte preferido de uma turma com 30 alunos, fez as seguintes perguntas:
i. Quem gosta de praticar vôlei? 15 alunos levantaram a mão.
ii. Quem gosta de futebol? 20 alunos levantaram a mão.
Considerando que os alunos gostam apenas de vôlei ou apenas de futebol, ou de ambos os esportes, o número de alunos que gostam tanto de vôlei quanto de futebol é:
a) 15
b) 10
c) 5
d) 2
e) 1

006 *Questão 29 da prova 01/2014*
Numa pesquisa com alunos do IFES Campus Vitória sobre a preferência em relação às disciplinas Física, Química e Matemática, obteve-se o seguinte resultado:

Disciplina	Preferência por disciplina
Física	220
Química	180
Matemática	300
Física e Química	40
Física e Matemática	50
Química e Matemática	35
Física, Química e Matemática	30
Nenhuma das três disciplinas	20

Com base nessas informações, o número de alunos entrevistados foi:

a) 500

b) 625

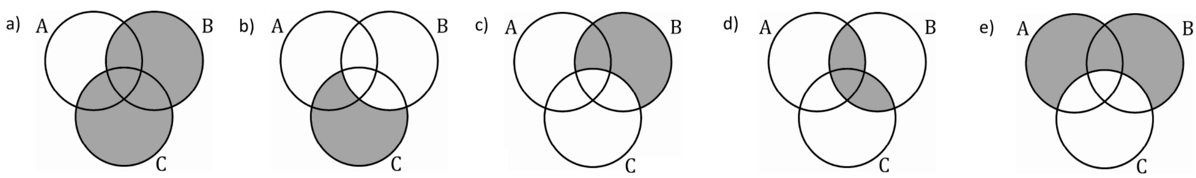
c) 670

d) 705

e) 875

007 *Questão 24 da prova 01/2015*

O conjunto $(A \cup B) \cap (B - C)$ é melhor representado por:



008 *Questão 25 da prova 01/2016*

Numa turma de 42 estudantes 25 são rapazes, 21 estudantes não usam óculos e 15 rapazes usam óculos. O número de moças que usa óculos é igual a:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

A.1.2 Conjuntos numéricos

009 *Questão 30 da prova 04/2017*

Leia com ATENÇÃO as seguintes afirmações:

I. O número 0,456783215 é irracional

II. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ac$ para todos os números reais a, b e c.

III. Para todo número real positivo x, se $\sqrt{x^2} \leq 16$ então $0 \leq x \leq 4$

Assinale a alternativa correta:

a) Todas as afirmações são incorretas.
b) Somente as afirmações I e II são corretas.
c) Somente as afirmações I e III são corretas.
d) Somente as afirmações II e III são corretas.
e) Somente a afirmação II é correta.

010 *Questão 22 da prova 01/2018*
Considerando $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, sendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ – o conjunto dos números naturais – qual das regras de associação abaixo define uma função de em , isto é, uma função tendo como domínio e contradomínio o conjunto dos números naturais?
a) **n** é associado ao seu antecessor.
b) **n** é associado a sua terça parte.
c) **n** é associado a **m** tal que **m** é divisor de **n**.
d) **n** é associado ao resto de sua divisão por 5.
e) **n** é associado a **p** tal que **p** é primo e $\mathbf{p} < \mathbf{n}$.

011 *Questão 20 da prova 01/2019*
A seguir, tem-se cinco afirmações sobre conjuntos numéricos:
I A subtração de um número natural por outro número natural é sempre um número natural.
II A soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
III A divisão de um número racional por outro número racional não nulo é sempre um número racional.
IV A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
V A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.
Analisando as sentenças acima, o número de afirmações VERDADEIRAS é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

A.1.3 Sistema de numeração decimal

012 *Questão 138 do caderno cinza do ENEM 2022*
Ao escutar a notícia de que um filme recém-lançado arrecadou, no primeiro mês de lançamento, R$ 1,35 bilhão em bilheteria, um estudante escreveu corretamente o número que representa essa quantia, com todos os seus algarismos. O número escrito pelo estudante foi:

a) 135 000,00.

b) 1 350 000,00.

c) 13 500 000,00.

d) 135 000 000,00.

e) 1 350 000 000,00.

013 *Questão 12 da prova para o cargo Agente de Obras e Construções do Concurso Público 001/19 da Prefeitura Municipal de Santo Antônio do Sudoeste*

Um número tem 5 centenas, 3 unidades e 6 dezenas. Assinale a alternativa que representa o número descrito na questão.

a) 536

b) 563

c) 653

d) 365

e) 635

014 *Questão 157 do caderno 5 do ENEM 2012*

João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 1 3 _ 9 8 2 0 7, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu.

De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de

a) centena

b) dezena de milhar

c) centena de milhar

d) milhão

e) centena de milhão

A.1.4 Operações com números naturais

015 *Questão 19 da prova 01/2015*

A tabela abaixo mostra a freqüência atual da distribuição de salários de uma Empresa.

Frequência	Salário em reais
8	730
6	850
4	1200
2	1500

Um valor de R$ 4.000,00 será distribuído igualmente entre os funcionários e, somado ao salário atual, representará o novo salário. Nestas condições, pode-se dizer que o menor salário, em reais, será de:

a) 930,00

b) 1.137,00

c) 1.230,00

d) 1.270,00

e) 1.730,00

016 *Questão 23 da prova 01/2015*

Deseja-se trocar R$ 15,00 em moedas de 5 e 10 centavos. O número de maneiras distintas que se pode fazer essa troca é igual a:

a) 147

b) 148

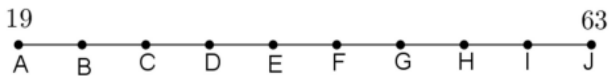
c) 149

d) 150

e) 151

017 *Questão 17 da prova 04/2017*

A figura abaixo representa uma secção do eixo das abscissas onde os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são igualmente espaçados. Sabendo que a abscissa dos pontos A e J são respectivamente 19 e 63, determine a abscissa do ponto G.



a) 479/9

b) 52

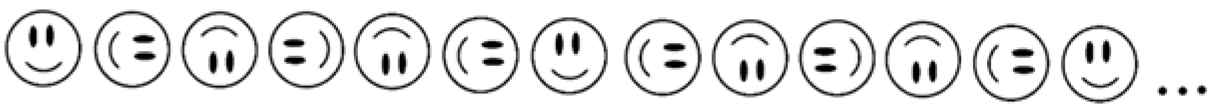
c) 115/2

d) 145/3

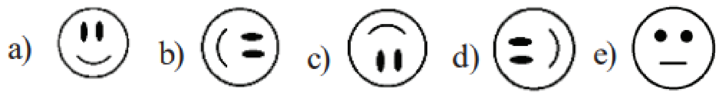
e) 50

018 *Questão 26 da prova 01/2020*

Caio desenhou no seu caderno uma sequência de "emojis" seguindo o padrão (ver figura 5)



Qual foi o 500º "emoji" desenhado nesta sequência?



019 *Questão 18 da prova 84/2022*

O Sr. Paulo irá dividir a sua coleção de 4.200 moedas entre os seus três filhos, de tal forma que as quantidades entregues a cada filho sejam diretamente proporcionais às médias aritméticas das notas das provas deles na disciplina de Matemática, no ano de 2022. A tabela a seguir mostra as notas dos filhos até agora em Matemática.

Filho	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova
João	8	4	9
Marcelo	7	5	6
Vitor	6	8	10

Qual a quantidade de moedas cabe a cada um deles?

a) João = 1.400, Marcelo = 1.200 e Vitor = 1.600.

b) João = 1.300, Marcelo = 1.100 e Vitor = 1.800.

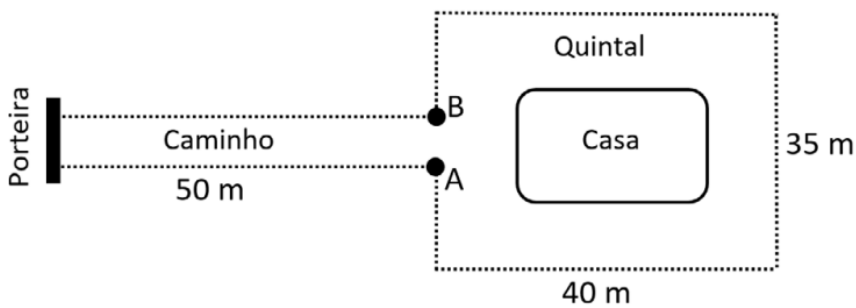
c) João = 1.450, Marcelo = 1.200 e Vitor = 1.550.

d) João = 1.350, Marcelo = 1.250 e Vitor = 1.600.

e) João = 1.380, Marcelo = 1.240 e Vitor = 1.580.

020 *Questão 21 da prova 84/2022*

O Sr. Paulo comprou um sítio e pretende cercar, com palmeiras imperiais, o quintal em volta da casa e todo o caminho desde a porteira até a casa, representados por linhas pontilhadas na figura a seguir. Ele pretende começar a plantar da porteira, com palmeiras espaçadas de 5 metros em 5 metros, ao longo do caminho e em volta do quintal. Na junção do caminho com o quintal, trecho AB, ele deixará livre o espaço para possibilitar a passagem. Sabendo que o caminho tem dimensões de 5 metros por 50 metros e que o quintal tem dimensões de 40 metros por 35 metros, quantas mudas de palmeiras, no mínimo, ele precisará plantar para cobrir todo o perímetro pedido?



a) 56
b) 54
c) 50
d) 48
e) 44

A.1.5 Números primos e compostos

021 *Questão 23 da prova 01/2018*
Considere os números $m = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 6$ e $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^4$ e as seguintes afirmações:
I – se um número inteiro divide 144 então divide m e n.
II – o máximo divisor comum entre m e n é 288.
III – o mínimo múltiplo comum entre m e n é $2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5^4$.
IV – o número n é maior do que o número m.
V – o resto da divisão de m por n é zero.
Destas, podemos afirmar que:
a) todas as afirmações são verdadeiras.
b) apenas as afirmações I, III e IV são verdadeiras.
c) apenas a afirmação III é falsa.
d) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
e) apenas as afirmações I, II e III são verdadeiras.

022 *Questão 26 da prova para o cargo de Tesoureiro do Concurso público 01/2023 da Prefeitura de Bom Retiro do Sul - RS*
O número 1.032, escrito em fatores primos, é apresentado corretamente em qual alternativa?
a) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 43$
b) $2 \times 2 \times 6 \times 43$
c) $4 \times 6 \times 43$
d) $86 \times 2 \times 2 \times 3$
e) 86×12

023 *Questão 19 do vestibular da UERJ 2021*
De acordo com o teorema fundamental da aritmética, todo número natural maior do que 1 é primo ou é um produto de números primos. Observe os exemplos:
$1964 = 2^2 \times 491 \qquad 1994 = 2 \times 997$
O maior número primo obtido na fatoração de 1716 é:
a) 17
b) 13
c) 11
d) 7
e) 23

A.1.6 Múltiplos e divisores

024 *Questão 26 da prova 01/2013*

No topo de um edifício dois sinalizadores "piscam" com regularidade constante. O primeiro "pisca" 12 vezes por minuto e o segundo "pisca" 15 vezes por minuto. Sabendo que em um dado instante os sinalizadores "piscam" ao mesmo tempo, o número de vezes que os sinalizadores piscam simultaneamente a cada minuto é:

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) 5.

025 *Questão 22 da prova 01/2014*

Na organização de uma festa de aniversário estão disponíveis 90 balas de chocolate, 126 balas de laranja e 162 balas de iogurte. Pretende-se dividi-las em pacotes iguais, que contenham os três sabores e não sobre balas após a divisão. Suponha que toda criança, e somente criança, receba um pacote de balas. Para que o número de crianças participantes na festa seja o máximo possível, a quantidade de balas em cada pacote deve ser igual a:

a) 18; b) 21; c) 24; d) 27; e) 30.

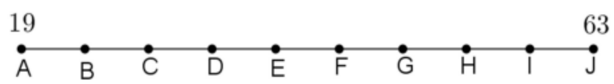
026 *Questão 25 da prova 01/2015*

Uma instituição de caridade distribuiu doces, em comemoração ao Dia da Criança. Foram doados 512 chocolates, 768 pirulitos e 1280 balas. Os doces foram colocados em saquinhos, a fim de garantir que todas as crianças ganhassem o mesmo número de chocolates, o mesmo número de pirulitos e o mesmo número de balas. Se o objetivo era atender o número máximo de crianças, essa distribuição foi feita de forma tal que:

a) Confeccionou-se mais de 500 saquinhos de doces.
b) Cada criança ganhou 6 pirulitos.
c) Cada criança ganhou 5 chocolates.
d) O número de chocolates em cada saquinho era maior que o número de pirulitos.
e) Cada criança ganhou 10 doces.

027 *Questão 17 da prova 04/2017*

A figura abaixo representa uma secção do eixo das abscissas onde os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são igualmente espaçados. Sabendo que a abscissa dos pontos A e J são respectivamente 19 e 63, determine a abscissa do ponto G.



a) 479/9

b) 52

c) 115/2

d) 145/3

e) 50

028 *Questão 28 da prova 04/2017*

Uma pequena indústria de beneficiamento de mármores e granitos possui 4 máquinas cortadeiras, digamos a cortadeira A, cortadeira B, cortadeira C e a cortadeira D. Cada cortadeira precisa ser desativada para manutenção em períodos já determinados, a saber:

cortadeira A	120 em 120 dias
cortadeira B	150 em 150 dias
cortadeira C	80 em 80 dias
cortadeira D	100 em 100 dias

Os dias em que todas as cortadeiras são desativadas (no mesmo dia) para manutenção, foram batizados pelo dono da indústria como "Dia do Reparo". Se o último Dia do Reparo foi no dia 12 de dezembro de 2015, quantos Dias do Reparo terão nos próximos 20 anos (ou seja, de 2016 a 2036)? a) 6

b) 8

c) 9

d) 12

e) 20

029 *Questão 23 da prova 01/2018*

Considere os números $m = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 6$ e $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^4$ e as seguintes afirmações:

I – se um número inteiro divide 144 então divide m e n.

II – o máximo divisor comum entre m e n é 288.

III – o mínimo múltiplo comum entre m e n é $2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5^4$.

IV – o número n é maior do que o número m.

V – o resto da divisão de m por n é zero.

Destas, podemos afirmar que:

a) todas as afirmações são verdadeiras.

b) apenas as afirmações I, III e IV são verdadeiras.

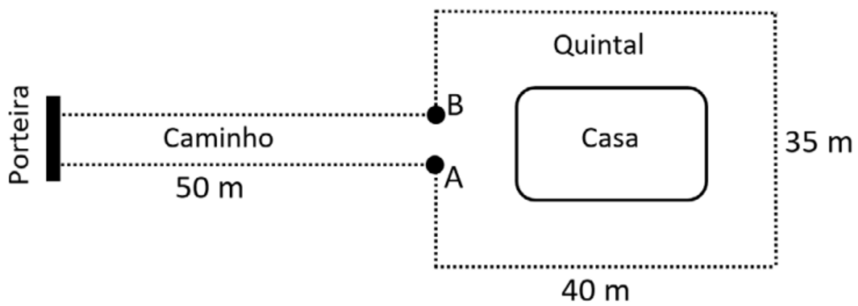
c) apenas a afirmação III é falsa.

d) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

e) apenas as afirmações I, II e III são verdadeiras.

030 *Questão 13 da prova 84/2022*
Para realização de uma visita técnica com as 3 turmas de 2º ano, do Curso Técnico de Mecânica de um dos campi do Ifes, os professores das disciplinas envolvidas deveriam dividir as turmas em grupos com a mesma quantidade de alunos, de maneira que cada grupo tivesse a maior quantidade possível, respeitando o limite de 10 alunos, previsto pelas normas de segurança da empresa. Sabendo que a quantidade de estudantes de cada turma é de 48, 36 e 42, pode-se afirmar que o número de grupos formados é igual a:
a) 6
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21

031 *Questão 21 da prova 84/2022*
O Sr. Paulo comprou um sítio e pretende cercar, com palmeiras imperiais, o quintal em volta da casa e todo o caminho desde a porteira até a casa, representados por linhas pontilhadas na figura a seguir. Ele pretende começar a plantar da porteira, com palmeiras espaçadas de 5 metros em 5 metros, ao longo do caminho e em volta do quintal. Na junção do caminho com o quintal, trecho AB, ele deixará livre o espaço para possibilitar a passagem. Sabendo que o caminho tem dimensões de 5 metros por 50 metros e que o quintal tem dimensões de 40 metros por 35 metros, quantas mudas de palmeiras, no mínimo, ele precisará plantar para cobrir todo o perímetro pedido?



a) 56
b) 54
c) 50
d) 48
e) 44

A.1.7 Notação científica

032 *Questão 174 do caderno 14 do ENEM 2022*
A volemia (V) de um indivíduo é a quantidade total de sangue em seu sistema circulatório (coração, artérias, veias e capilares). Ela é útil quando se pretende estimar o número total (N) de hemácias de uma pessoa, a qual é obtida multiplicando-se a volemia (V) pela concentração (C) de hemácias no sangue, isto é, $N = V \cdot C$. Num adulto normal essa concentração é de 5200000 hemácias por mL de sangue, conduzindo a grandes valores de N. Uma maneira adequada de informar essas grandes quantidades é utilizar a notação científica, que consiste em expressar N na forma $N = Q \cdot 10^n$, sendo $1 \leq Q < 10$ e n um número inteiro. Considere um adulto normal, com volemia de $5000mL$ Qual a quantidade total de hemácias desse adulto, em notação científica?
a) $2,6 \cdot 10^{-10}$;
b) $2,6 \cdot 10^{-9}$;
c) $2,6 \cdot 10^{9}$;
d) $2,6 \cdot 10^{10}$;
e) $2,6 \cdot 10^{11}$.

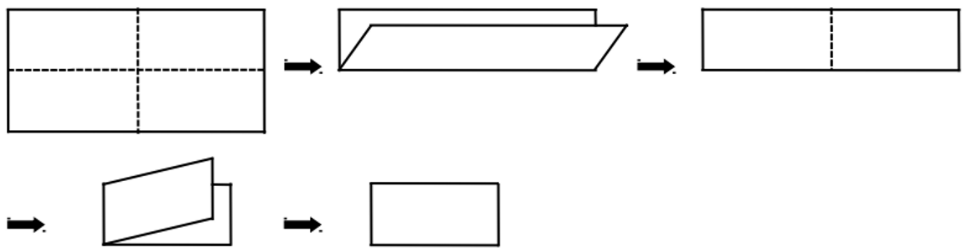
033 *Questão 158 do caderno 12 do ENEM 2017*
Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos.
a) $0,4318 \times 10^2$
b) $4,318 \times 10^1$
c) $43,18 \times 10^0$
d) $431,8 \times 10^{-1}$
e) $4\ 318 \times 10^{-2}$

034 *Questão 19 da Prova Ensino Técnico Concomitância Externa CEFET-MG 2008-2*
Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou próximos de zero, são escritos em notação científica, que consiste em um número x, tal que 1 < x < 10 multiplicado por uma potência de base 10. Assim sendo, 0,00000045 deve ser escrito da seguinte forma:
a) $0,45 \times 10^{-7}$
b) $4,5 \times 10^{-7}$
c) 45×10^{-6}
d) $4,5 \times 10^{8}$
e) 450×10^{7}

A.1.8 Potenciação e radiciação

035 *Questão 24 da prova 01/2011*
A expressão $\frac{2^{50}}{2} + 2^{49}$ é equivalente a:
a) 2^{74};
b) 2^{50};
c) 4^{74};
d) 4^{49};
e) 2^{98}.

036 *Questão 16 da prova 01/2014*
Uma bandeira retangular de dimensões 16 x 8 metros é dobrada ao meio numa direção, ligando-se as duas pontas de um mesmo lado com as duas pontas correspondentes do lado oposto, seguida de uma dobradura idêntica na outra direção, obtendo-se assim, um retângulo semelhante à bandeira. A sequência de figuras esboça um exemplo de construção para esta primeira etapa. Supondo possível, esse processo é repetido até encontrar um retângulo com pelo menos um de seus lados inferior a um metro. A área do retângulo obtido na última etapa representa uma redução da bandeira, em número de vezes, igual a:



a) 2^5
b) 2^6
c) 2^7
d) 2^8
e) 2^9

037 *Questão 23 da prova 01/2014*
A soma dos algarismos do número $2^{106} \times 5^{100}$ é:
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

038 *Questão 16 da prova 04/2017*

Considere as seguintes afirmações sobre os números reais positivos x e y,

A. Se $x > 5$ e $y < 3$, então $x^3 10y > 95$.

B. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - y < 0$.

C. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - y^2 > 0$.

Assim, destas, podemos afirmar que:

a) apenas A é verdadeira.

b) apenas A e B são verdadeiras.

c) apenas B e C são verdadeiras.

d) apenas A e C são verdadeiras.

e) as sentenças A, B e C são verdadeiras.

039 *Questão 23 da prova 04/2017*

Analise as afirmativas abaixo.

I. Se r é o raio do círculo circunscrito a um hexágono regular então o apótema m desse hexágono vale $m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

II. Se a hipotenusa de um triângulo retângulo mede 4cm e um dos catetos mede 3cm o outro cateto mede 5cm.

III. $\sqrt{16 + 25} = 4 + 5$.

IV. O perímetro de uma circunferência de raio r vale $2\pi r$

Se "C" significa que a afirmativa está correta e "E" que ela está errada, assinale alternativa que representa a sequência correta do item "I" ao item "IV".

a) CCEE

b) CEEC

c) EECC

d) EEEC

e) CECE

040 *Questão 30 da prova 04/2017*

Leia com ATENÇÃO as seguintes afirmações:

I. O número 0,456783215 é irracional

II. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ac$ para todos os números reais a, b e c.

III. Para todo número real positivo x, se $\sqrt{x^2} \leq 16$ então $0 \leq x \leq 4$

Assinale a alternativa correta:

a) Todas as afirmações são incorretas.

b) Somente as afirmações I e II são corretas.

c) Somente as afirmações I e III são corretas.

d) Somente as afirmações II e III são corretas.

e) Somente a afirmação II é correta.

A.1.9 Razão, proporção e regra de três simples e composta

041 *Questão 22 da prova 01/2012*

Pedro repartiu, em partes iguais, uma quantidade x de balas entre seus filhos: João, Helena, Tiago e José. Helena consumiu 1/5 de sua parte. Que fração do total de balas ela consumiu?

a) $\frac{x}{2}$
b) $\frac{x}{4}$
c) $\frac{x}{5}$
d) $\frac{x}{9}$
e) $\frac{x}{20}$

042 *Questão 24 da prova 01/2012*

Em uma fábrica de copos descartáveis, funcionando em condições normais, 3 máquinas produzem 40 copos iguais em 4 minutos. O número de copos iguais que 5 máquinas produzem em 3 minutos, funcionando em condições normais, é

a) 50.
b) 60.
c) 75.
d) 90.
e) 100.

043 *Questão 25 da prova 01/2013*

Um operário realiza uma tarefa em seis horas de trabalho. Outro operário realiza a mesma tarefa em quatro horas de trabalho. Se a mesma tarefa fosse realizada em trabalho conjunto de ambos operários, cada um trabalhando no seu ritmo original, o tempo requerido para realização da tarefa é de:

a) 1 hora e 30 minutos
b) 2 horas e 24 minutos
c) 3 horas e meia
d) 4 horas
e) 6 horas

044 *Questão 27 da prova 01/2015*

Lendo sempre 15 páginas de um livro por dia, eu conseguiria finalizar sua leitura em 15 dias. Se pretendo finalizar a leitura do livro em 9 dias, devo ler por dia:

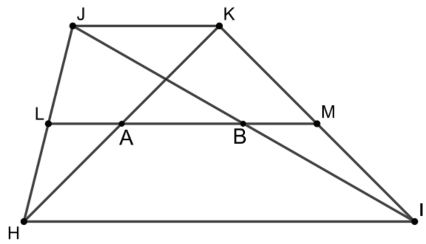
a) 9 páginas.
b) 12 páginas.
c) 20 páginas.
d) 25 páginas.
e) 30 páginas.

045 *Questão 19 da prova 04/2017*
De uma sacola contendo bolas vermelhas e pretas, retiram-se 8 vermelhas, ficando a relação de 1 vermelha para 3 pretas. Em seguida, retiram-se 20 pretas, restando, na sacola, bolas na razão de 3 vermelhas para 4 pretas. Assim podemos afirmar que o número total de bolas vermelhas e pretas que havia incialmente na sacola é
a) 64.
b) 82.
c) 56.
d) 44.
e) 92.

046 *Questão 25 da prova 01/2018*
Dois amigos, Cacá e Juju, compraram um pacote fechado com várias unidades de balas. Cacá retirou do pacote 4/7 destas balas. Do total que restou no pacote, Juju retirou 8/9 e ainda sobraram exatamente seis balas no pacote. Quantas balas haviam no pacote fechado?
a) 50 $balas$.
b) 80 $balas$.
c) 126 $balas$.
d) 172 $balas$.
e) 188 $balas$.

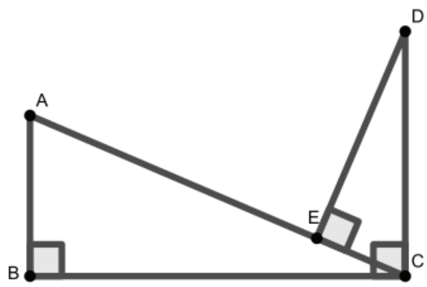
047 *Questão 19 da prova 01/2019*
Para fazer um bolo, é comum, na constituição da massa do tipo A, utilizar-se manteiga, trigo e açúcar na seguinte proporção: 1 parte de manteiga, 4 partes de trigo e 2 partes de açúcar. Com o objetivo de comemorar o aniversário da cidade de Vitória, a prefeitura encomendou 168 Kg dessa massa. Quantos quilogramas de trigo foram necessários para fazer essa massa?
a) 24
b) 42
c) 48
d) 84
e) 96

048 *Questão 29 da prova 01/2019*
As diagonais IJ e HK do trapézio $HIKJ$ intersectam o segmento LM nos pontos A e B. Sabe-se que L e M são os pontos médios de HJ e KI, respectivamente. Sejam p_1 e p_2 os perímetros dos trapézios $HIML$ e $LMKJ$, respectivamente. Sabendo que $\overline{JK} = 20$ e $\overline{AB} = \frac{3}{5}\overline{JK}$, o valor de $d = p_1 - p_2$ é igual a:



a) 16
b) 24
c) 28
d) 32
e) 44

049 *Questão 24 da prova 01/2020*
A figura abaixo ilustra dois triângulos ABC e CDE. Sabendo que os ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{E}D$ são retos, os pontos A, E e C são colineares, $\overline{AB} = 8$ e $\overline{BC} = 15$, determine o valor da razão entre os segmentos DE e DC.



a) 1
b) $\dfrac{13}{15}$
c) $\dfrac{15}{17}$
d) $\dfrac{17}{25}$
e) $\dfrac{19}{13}$

A.1.10 Porcentagem, acréscimos sucessivos e descontos sucessivos

050 *Questão 23 da prova 01/2011*
Suponha que na mercearia de seu Joaquim, o valor inicial de venda de uma determinada mercadoria M seja de R\$100,00. Como a procura por M estava grande, então seu Joaquim achou que deveria aumentar o seu preço em 20%, e assim o fez. Passada a fase de grande consumo desta mercadoria, então seu Joaquim resolveu reduzir o preço que estava sendo praticado em 20%. Qual o novo valor da mercadoria M?

a) $R\$ \ 100,00$
b) $R\$ \ 60,00$
c) $R\$ \ 98,00$
d) $R\$ \ 80,00$
e) $R\$ \ 96,00$

051 *Questão 20 da prova 01/2013*
Um triângulo equilátero tem lado de medida 5cm. Se esse triângulo tiver todos os seus lados aumentados de 20% sua área aumentará em:
a) 34.
b) 44.
c) 45.
d) 48.
e) 55.

052 *Questão 21 da prova 01/2013*
Uma bolsa custa R$ 30,00. Se esse preço for reajustado em 25% ela custará?
a) R$ 30,00
b) R$ 37,50
c) R$ 39,40
d) R$ 43,75
e) R$ 50,00

053 *Questão 16 da prova 01/2016*
Na tabela abaixo, estão representados os dados de uma pesquisa feita com 300 pessoas na praça de alimentação de um Shopping Center.

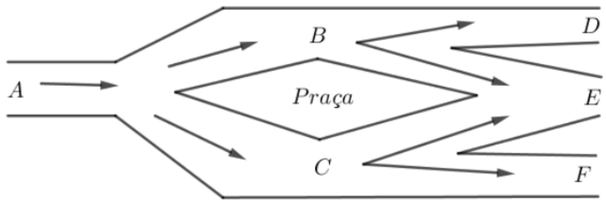
Gastos em reais	**Número de pessoas**
$8 \vdash 16$	50
$16 \vdash 24$	$\frac{x}{2}$
$24 \vdash 32$	$x + 25$
Total	?

Nesse Shopping Center da pesquisa, que porcentagem dos entrevistados gasta menos de R$24,00?
a) $\frac{125}{6}\%$
b) $\frac{125}{3}\%$
c) $\frac{5}{12}\%$
d) $\frac{125}{7}\%$
e) $\frac{15}{4}\%$

054 *Questão 20 da prova 01/2018*

A figura a seguir ilustra uma sequência de bifurcações do centro de uma grande metrópole do nosso país. Sabe-se que todas as vias representadas na imagem são de mão única. Desejando fazer um estudo do percentual de veículos que trafegam diariamente neste trecho, a prefeitura coletou os seguintes dados:

– dos veículos que passam por A, 55% viram à esquerda;
– dos veículos que passam por B, 25% viram à esquerda;
– daqueles que trafegam por C, 60% dobram à esquerda.



De posse destes dados, a prefeitura constatou que o percentual dos veículos que, passando por A, entram em E é:

a) $68,25\%$
b) $40,75\%$
c) $31,75\%$
d) $59,25\%$
e) 50%

055 *Questão 26 da prova 01/2019*

Uma cooperativa de artesanato confecciona dois tipos de produtos, A e B, ao custo de R$8,00eR$12,00 por unidade, respectivamente. Essa cooperativa vendeu no último mês 330 unidades dos produtos A e B com preços 756.570,00 com essa venda. Determine a quantidade do produto A que foi vendida.

a) 150
b) 160
c) 170
d) 180
e) 190

056 *Questão 27 da prova 01/2019*

As inscrições para um congresso de Matemática que ocorrerá no próximo final de semana foram realizadas em três etapas distintas entre os meses de agosto e outubro. A tabela abaixo apresenta o valor de inscrição e o número de inscritos pagantes em cada uma das três etapas.

Etapa	Número de inscritos pagantes	Valor da inscrição
1	140	R$ 70,00
2	110	R$ 100,00
3	325	R$ 120,00

Além desses, 8% dos inscritos ficaram isentos da taxa de inscrição. Quantos são os inscritos que não pagaram a inscrição (isentos) ou que pagaram um valor abaixo da média dos valores pagos pelos inscritos nas três etapas? a) 140.
b) 190.
c) 250.
d) 270.
e) 300.

057 *Questão 29 da prova 01/2020*
Um tênis que custava R$ 160,00 em outubro, teve um aumento de 5% em seu preço para o mês de novembro. O salário de Celso também teve um aumento de 5% em novembro, de modo que o tênis, em novembro, passou a custar 8% do salário de Celso. Qual era o salário de Celso em outubro?
a) R$ 1600,00
b) R$ 1980,00
c) R$ 2000,00
d) R$ 2100,00
e) R$ 2178,00

058 *Questão 17 da prova 84/2022*
Uma pessoa foi ao shopping para comprar uma TV que estava em promoção. Ao chegar na loja, o vendedor informou que havia duas opções para pagamento dessa mercadoria: à vista, com desconto de 5% sobre o valor anunciado, ou a prazo, 30 dias após a efetivação da compra, com um acréscimo de 10% sobre o valor anunciado. Nessas condições, sabendo que, se optar pela compra a prazo, o consumidor terá que desembolsar o valor de R$ 3.850; se for pagar à vista, deverá desembolsar:
a) R$ 3.500
b) R$ 3.450
c) R$ 3.325
d) R$ 3.250
e) R$ 3.150

A.1.11 Problemas de juros simples e juros compostos

059 *Questão 28 da prova 01/2015*

Tainá tinha um boleto de R$ 420,00 com vencimento para segunda-feira. Ela havia se esquecido desse compromisso e, quando foi pagar, observou que havia uma multa de 4% por não ter pago no vencimento, além de juros simples de 1% por dia de atraso, incididos sobre o valor do boleto. Quanto Tainá gastou a mais, se só efetuou o pagamento na sexta-feira daquela mesma semana?

a) $R\$ \ 21,00$

b) $R\$ \ 29,40$

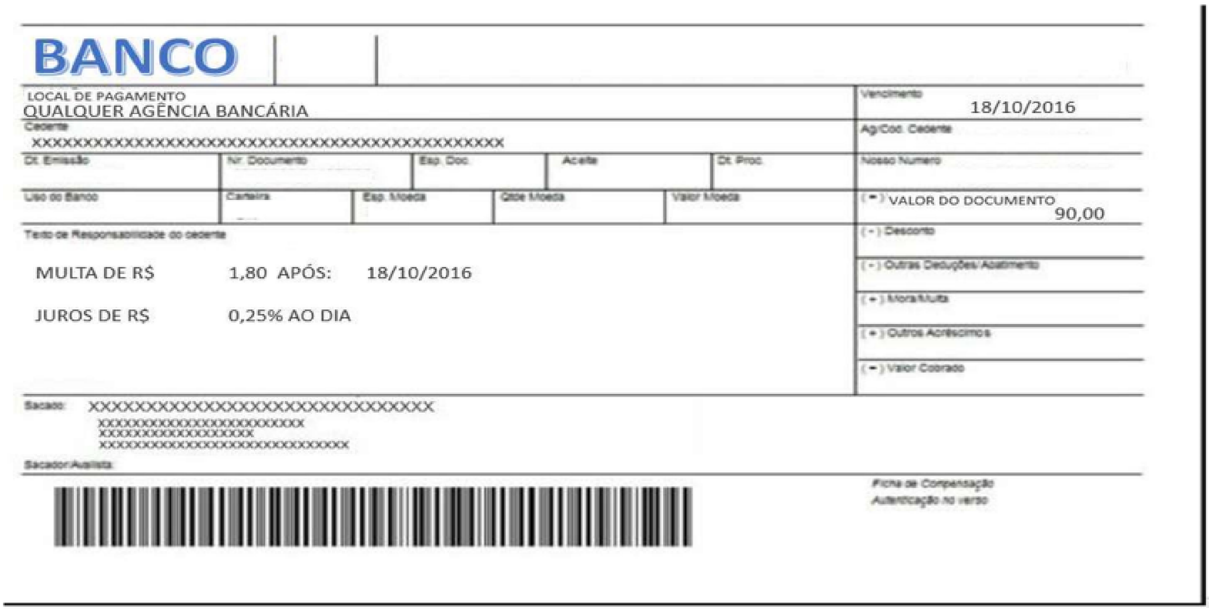
c) $R\$ \ 33,60$

d) $R\$ \ 37,80$

e) $R\$ \ 42,00$

060 *Questão 27 da prova 04/2017*

Um boleto bancário, ou simplesmente boleto, é um documento largamente utilizado no Brasil como instrumento de pagamento de um produto ou serviço prestado. Através do boleto, seu emissor pode receber do pagador o valor referente àquele pagamento. As principais informações referentes ao valor do boleto são o vencimento, o valor do documento, a multa e os juros por atraso. Considere o seguinte boleto:



BANCO

LOCAL DE PAGAMENTO
QUALQUER AGÊNCIA BANCÁRIA

Vencimento 18/10/2016

(=) VALOR DO DOCUMENTO 90,00

MULTA DE R$ 1,80 APÓS: 18/10/2016

JUROS DE R$ 0,25% AO DIA

Se o pagamento deste boleto for feito no dia 03 de dezembro de 2016, qual dos valores abaixo mais se aproxima do valor a ser pago por este?

Considere os juros do boleto como juros simples sobre o valor do documento, sem a multa, lembre-se que os juros começam a ser cobrados a partir do dia seguinte ao vencimento e que outubro são considerados todos os 31 dias. Note que este boleto tem vencimento no dia 18 de outubro de 2016.

a) $R\$ \ 91,80$
b) $R\$ \ 102,15$
c) $R\$ \ 108,25$
d) $R\$ \ 112,50$
e) $R\$ \ 120,80$

061 *Questão 22 da Prova Ensino Técnico Concomitância Externa CEFET-MG 2008-2* Uma loja de eletrodomésticos publicou o seguinte anúncio:
“Compre uma geladeira por R$ 950,00 para pagamento em 30 dias, ou à vista, com um desconto promocional de 20%”.
Se um cliente optar pela compra com pagamento em 30 dias, a taxa de juros a ser paga, ao mês, é
a) 20%
b) 22%
c) 25%
d) 28%
e) 30%

A.2 Álgebra

A.2.1 Expressões algébricas

062 *Questão 22 da prova 01/2011*
A expressão $\dfrac{123456^2 - 123455^2 - 11}{300}$ é equivalente a:
a) 823.
b) 913.
c) 512.
d) 12345.
e) 234.

063 *Questão 20 da prova 01/2012*
O valor da expressão $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ é:
a) $\sqrt{2}$.
b) 2.
c) 1.
d) $-\sqrt{2}$.
e) 0.

064 *Questão 26 da prova 01/2012*
Considere R como sendo o conjunto dos números reais. Sejam x_1 e $x_2 \in R$ as raízes da equação $3x^2 + x - 2 = 0$ onde $x_1 < x_2$. Qual o valor da expressão $(3x_1x_2 + 3x_2 - x_1)$?

a) 1.
b) $\frac{2}{3}$.
c) 1.
d) $\frac{3}{2}$.
e) 2.

065 *Questão 28 da prova 01/2012*

Considere R como sendo o conjunto dos números reais. A solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = \frac{9}{2} \end{cases}$ é o par ordenado (x, y), onde $x \in R$ e $y \in R$. O valor da expressão $\frac{x+y}{2}$ é:

a) $\frac{15}{2}$.
b) $\frac{15}{4}$.
c) $\frac{3}{2}$.
d) $\frac{5}{4}$.
e) $\frac{5}{2}$.

066 *Questão 28 da prova 01/2014*

Numa papelaria, X canetas custam C centavos. A quantidade de canetas que se pode comprar com R reais é:
Alternativas:
a) $\frac{RC}{100X}$.
b) $\frac{RX}{100C}$.
c) $\frac{100R}{CX}$.
d) $\frac{100RX}{C}$.
e) $\frac{R}{100CX}$.

067 *Questão 19 da prova 04/2017*

De uma sacola contendo bolas vermelhas e pretas, retiram-se 8 vermelhas, ficando a relação de 1 vermelha para 3 pretas. Em seguida, retiram-se 20 pretas, restando, na sacola, bolas na razão de 3 vermelhas para 4 pretas. Assim podemos afirmar que o número total de bolas vermelhas e pretas que havia incialmente na sacola é
a) 64.
b) 82.
c) 56.
d) 44.
e) 92.

068 *Questão 28 da prova 01/2018*

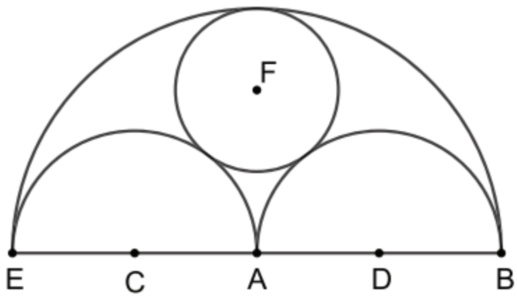
Quantos números inteiros existem entre x e y, sendo

$$\frac{4-x}{3x-2} - 1 = \frac{5}{4-6x} \qquad e \qquad \sqrt{2}(y-\sqrt{35}) - 3 = -y$$

a) 2
b) 3
c) 6
d) 9
e) 12

069 *Questão 28 da prova 01/2019*

As três semicircunferências da figura abaixo tangenciam a circunferência de centro F e raio r. Sabe-se que C, D e A são os centros das três semicircunferências. Se $\overline{AE} = \overline{AB} = R$, então a medida de r é igual a:



a) $\dfrac{R}{3}$.
b) $\dfrac{R}{2}$.
c) $\dfrac{R\sqrt{2}}{3}$.
d) $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.
e) $\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.

A.2.2 Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais

070 *Questão 21 da prova 01/2011*

Três pessoas se associaram e montaram uma empresa na qual cada uma delas aplicou R\$20.000,00, R\$30.000,00 e R\$40.000,00 respectivamente. No balanço anual dessa empresa verificou-se um lucro de R\$ 45.000,00. Sabendo que este lucro deverá ser dividido entre os 3 sócios em partes diretamente proporcionais ao capital aplicado, determine o valor do lucro recebido pelo sócio que mais aplicou:

a) R$ 24.000,00
b) R$ 22.000,00
c) R$ 20.000,00
d) R$ 15.000,00
e) R$ 19.000,00

071 *Questão 17 da prova 01/2016*
No seu primeiro mês de atividade uma pequena empresa lucrou R$ 6.500,00. Sabe-se que os dois sócios proprietários dessa empresa investiram no negócio R$ 10.000,00 e R$ 3.000,00, respectivamente. Se a divisão dos lucros será proporcional ao investimento de cada um, o menor investidor receberá:
a) $R\$ 1.500,00$.
b) $R\$ 3.000,00$.
c) $R\$ 5.000,00$.
d) $R\$ 5.500,00$.
e) $R\$ 6.500,00$.

072 *Questão 21 da prova 01/2019*
Leia as afirmações a seguir.
I - O perímetro P de um quadrado de lado L é diretamente proporcional a L.
II - A área A de um quadrado de lado L é diretamente proporcional a L.
III - A área de um retângulo de base 10 cm é diretamente proporcional à sua altura.
IV - A altura de um retângulo de área $100cm^2$ é inversamente proporcional à sua base.
V - O comprimento de uma circunferência é inversamente proporcional à medida do seu raio.
VI A área de um círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio.
Analisando as sentenças acima, o número de afirmações FALSAS é:
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

A.2.3 Equações polinomiais do 1º grau

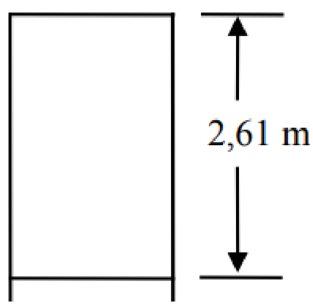
073 *Questão 25 da prova 01/2011*
O preço de uma corrida de táxi é obtido da seguinte forma: uma parte fixa de R$ 4,50 mais R$ 0,75 por quilômetro rodado. Sabe-se que um passageiro pagou, ao final da corrida, o total de R$ 13,50. Qual a distância, em quilômetros, percorrida por este passageiro?

a) 18.
b) 14.
c) 10.
d) 12.
e) 16.

074 *Questão 16 da prova 01/2013*
A professora Fernanda passou uma lista com 40 exercícios para serem feitos durante o recesso de 10 dias. Paulo recebeu a lista e no primeiro dia resolveu $\frac{2}{5}$ dos exercícios. No dia seguinte resolveu $\frac{1}{2}$ do que sobrou e finalizou no terceiro dia a lista. Nesse último dia de trabalho, ele resolveu:
a) 8 exercícios.
b) 10 exercícios.
c) 12 exercícios.
d) 14 exercícios.
e) 16 exercícios.

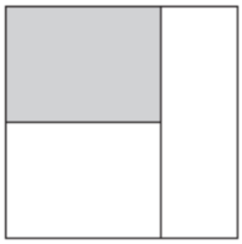
075 *Questão 29 da prova 01/2013*
Numa "Corrida de taxi" é cobrado um valor fixo de R$3,70 adicionado de R$ 0,50 por cada quilometro rodado. Pagou-se R$ 9,80 por uma corrida, então a distância percorrida pelo taxi, em quilômetros, foi de:
a) 12
b) 13
c) 14
d) 15
e) 16

076 *Questão 26 da prova 01/2014*
A figura mostra um esboço frontal de uma estante para livros contendo apenas a primeira e a última prateleira com distância entre elas igual a 2,61 metros. Pretende-se colocar outras prateleiras de modo que o espaçamento entre duas prateleiras vizinhas seja 30 centímetros. Se cada prateleira tem três centímetros de espessura, o número total de prateleiras nesta estante é igual a:



a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

077 *Questão 30 da prova 01/2014*
A figura abaixo representa um quadrado de lado igual a $20cm$, dividido em três retângulos que possuem mesmo perímetro. A área do retângulo sombreado, em cm^2, mede:



a) 100.
b) 125.
c) 150.
d) 225.
e) 300.

078 *Questão 17 da prova 01/2015*
Um reservatório de água paralelepípedo tem capacidade de $1,08m^3$. Uma torneira com vazão igual a 18 litros por minuto é ligada e após 20 minutos uma segunda torneira de vazão igual a 22 litros por minuto também é ligada, e as duas enchem o reservatório, que inicialmente estava vazio. Nestas condições, o tempo em minutos, necessário para encher o reservatório completamente é de: (dado: $1m^3 = 1000$ litros)
a) 26.
b) 30.
c) 34.
d) 38.
e) 42.

079 *Questão 18 da prova 01/2015*
O anfitrião de uma festa infantil tinha um número N de balas, suficiente para que cada criança presente ganhasse oito balas e ainda sobrariam quatro. Enquanto realizava a distribuição, duas crianças foram embora e não receberam as balas, cabendo então, a cada uma das demais crianças nove balas e não sobrou nenhuma. O número de crianças que recebeu balas é igual a:

a) 17.
b) 20.
c) 22.
d) 25.
e) 28.

080 *Questão 16 da prova 01/2016*
Na tabela abaixo, estão representados os dados de uma pesquisa feita com 300 pessoas na praça de alimentação de um Shopping Center.

Gastos em reais	**Número de pessoas**
$8 \vdash 16$	50
$16 \vdash 24$	$\frac{x}{2}$
$24 \vdash 32$	$x + 25$
Total	?

Nesse Shopping Center da pesquisa, que porcentagem dos entrevistados gasta menos de R$24,00?
a) $\frac{125}{6}\%$
b) $\frac{125}{3}\%$
c) $\frac{5}{12}\%$
d) $\frac{125}{7}\%$
e) $\frac{15}{4}\%$

081 *Questão 26 da prova 04/2017*
Considere as igualdades

$$4x - \frac{3-x}{2} = 21 \qquad e \qquad \frac{y-3}{2} = \frac{1}{y+2} + \frac{3}{2}$$

A soma do valor real de x que satisfaz a primeira igualdade com a soma de todos os valores reais de y que satisfazem a segunda igualdade é:
a) -3
b) 9
c) 73/7
d) 11
e) 87/7

082 *Questão 25 da prova 01/2018*
Dois amigos, Cacá e Juju, compraram um pacote fechado com várias unidades de balas. Cacá retirou do pacote 4/7 destas balas. Do total que restou no pacote, Juju retirou 8/9 e ainda sobraram exatamente seis balas no pacote. Quantas balas haviam no pacote fechado?
a) 50 $balas$.
b) 80 $balas$.
c) 126 $balas$.
d) 172 $balas$.
e) 188 $balas$.

083 *Questão 23 da prova 01/2020*
Em um quadrado mágico n × n (n linhas e n colunas), a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal deve ser sempre a mesma. A figura abaixo apresenta um quadrado mágico 3×3 com alguns números já conhecidos. Qual é o valor de $x + y + z$?

		y
5	18	x
22	z	9

a) 58.
b) 62.
c) 66.
d) 68.
e) 72.

A.2.4 Equações do 2º grau completas e incompletas

084 *Questão 26 da prova 01/2012*
Considere R como sendo o conjunto dos números reais. Sejam x_1 e $x_2 \in R$ as raízes da equação $3x^2 + x - 2 = 0$ onde $x_1 < x_2$. Qual o valor da expressão $(3x_1x_2 + 3x_2 - x_1)$? a) 1.
b) $\frac{2}{3}$.
c) 1.
d) $\frac{3}{2}$.
e) 2.

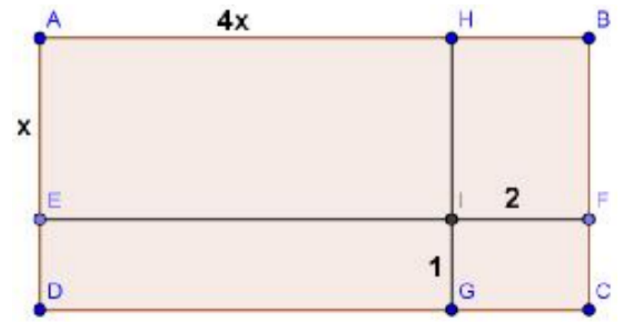
085 *Questão 30 da prova 01/2012*

Considere R sendo o conjunto dos números reais. Na figura a seguir tem-se:

i. o retângulo AHIE de lados de medida x e 4x metros, respectivamente, onde $x \in R$;

ii. a área do retângulo ABCD é 12 m^2;

iii. os lados FC e CG, do retângulo FCGI, medem 1 e 2 metros, respectivamente.



O perímetro, em metros, do retângulo AHIE vale:

a) 4

b) 12

c) 14

d) 5

e) 10

086 *Questão 17 da prova 01/2013*

Existem dois números reais que são raízes da equação $x^2 - 12x + 32 = 0$. O quociente entre o menor e o maior vale:

a) 2.

b) 4.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{3}{8}$.

e) 0.

087 *Questão 19 da prova 01/2014*

O número de raízes reais da equação $x^2 - 4 = \sqrt{5x^2 - 20}$ é igual a:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

088 *Questão 19 da prova 01/2016*

Uma das raízes da equação $x^2 + px + 8$ é a metade da outra. O valor da menor raiz positiva é:

a) 4.

b) 3.

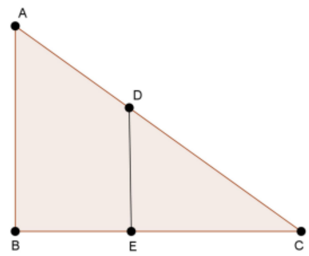
c) 2.

d) 1.

e) 0.

089 *Questão 25 da prova 04/2017*

Observe o esboço abaixo:



Sabe-se que:

I. O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DE}$ e perpendicular ao segmento $\overline{BC}$.

II. $\overline{EC} = 4cm$, $\overline{AB} = 1cm$ e $\overline{DE} = \overline{BE}$

O comprimento do segmento $\overline{DE}$ vale:

a) $-2(-\sqrt{2} + 1)$ cm.

b) 5cm.

c) $(\sqrt{2} + 1)$ cm.

d) $\sqrt{2}$ cm.

e) $(\sqrt{2} - 1)$ cm.

090 *Questão 26 da prova 04/2017*

Considere as igualdades

$$4x - \frac{3-x}{2} = 21 \qquad e \qquad \frac{y-3}{2} = \frac{1}{y+2} + \frac{3}{2}$$

A soma do valor real de x que satisfaz a primeira igualdade com a soma de todos os valores reais de y que satisfazem a segunda igualdade é:

a) -3

b) 9

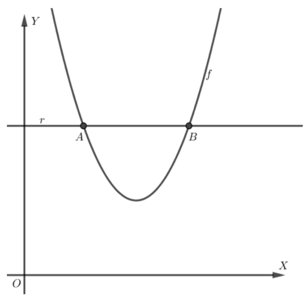
c) 73/7

d) 11

e) 87/7

091 *Questão 29 da prova 04/2017*
Dois ciclistas, digamos ciclista A e ciclista B, partem de bicicleta, em direção a um restaurante distante 144 km do ponto do qual partiram. O ciclista A percorre 2 km a mais por hora do que o ciclista B e chega ao destino 1 h antes do que o ciclista B. Supondo que mantiveram a velocidade constante durante todo o percurso o produto das velocidades (em km/h) destes dois ciclistas é:
a) 168.
b) 224.
c) 288.
d) 320.
e) 400.

092 *Questão 18 da prova 01/2018*
Ao traçar a reta r, paralela ao eixo das abscissas passando por um ponto do plano cartesiano, intersecta-se o gráfico da função real $f(x) = x^2 - 6x + 11$ nos pontos A e B, como mostra a figura. Sabe-se que o segmento AB tem comprimento 4. Assim, a distância de AB ao eixo das abscissas é:



a) 6.
b) 4.
c) 5.
d) 7.
e) 8.

093 *Questão 27 da prova 01/2018*
A diferença entre os dois menores lados de um triângulo retângulo, inscrito em uma circunferência com 8,5 cm de raio, é 7 cm. Determine o perímetro deste triângulo.
a) $28cm$
b) $21 + 4\sqrt{17}cm$
c) $7 + 6\sqrt{31}cm$
d) $8,5 + 7\sqrt{17}cm$
e) $40cm$

094 *Questão 18 da prova 01/2019*
Das alternativas abaixo, assinale a que representa uma raiz da equação $a + bx + cx^2 = 0$, sabendo que a, b e c são números reais positivos e distintos.
a) $\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
b) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
c) a
d) $\dfrac{-c-\sqrt{a^2-4bc}}{2b}$
e) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

095 *Questão 19 da prova 01/2020*
Considere as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -f(x)$. Determine a área do quadrilátero ABCD, sabendo que A e C são os zeros da função f, B é ponto de mínimo de f e D é ponto máximo de g.
a) $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{1}{2}$.
c) $\frac{3}{4}$.
d) 1.
e) 2.

096 *Questão 30 da prova 01/2020*
Em uma festa, o valor da entrada era R\$ 1000,00. Porém, os organizadores devolverão, no fim da festa, para cada um que comprou entrada, 10 reais vezes a quantidade de entradas vendidas para a festa. Dessa forma, se forem vendidos, por exemplo, 5 entradas, cada comprador pagará R\$ 1000,00 e receberá de volta R\$ 50,00 no fim da festa. Qual a arrecadação máxima possível para essa festa, assumindo que a quantidade máxima de entradas disponível é 90?
a) R\$ 9.000,00
b) R\$ 12.000,00
c) R\$ 15.000,00
d) R\$ 25.000,00
e) R\$ 40.000,00

097 *Questão 22 da prova 84/2022*
O carro-chefe das vendas de uma lanchonete é o hambúrguer artesanal “Brutão”, que é vendido por R\$ 20,00. A esse valor, são vendidas 200 unidades em uma noite. Devido ao aumento nos preços dos produtos utilizados em sua fabricação, a lanchonete pretende reajustar o preço do “Brutão” e, para tanto, após realizar uma pesquisa com seus clientes, percebeu que a cada reajuste de R\$ 0,40 no valor, a lanchonete deixa de vender 2 hambúrgueres. Mantida a proposta de reajuste, qual deverá ser o valor do produto que

fará com que a arrecadação com a sua venda seja a maior possível?

a) R$ 30,00

b) R$ 27,50

c) R$ 25,00

d) R$ 23,50

e) R$ 22,50

A.2.5 Sistema de equações do 1º grau e do 2º grau;

098 *Questão 28 da prova 01/2012*

Considere R como sendo o conjunto dos números reais. A solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$ é o par ordenado (x, y), onde $x \in R$ e $y \in R$. O valor da expressão $\dfrac{x+y}{2}$ é:

a) $\dfrac{15}{2}$.

b) $\dfrac{15}{4}$.

c) $\dfrac{3}{2}$.

d) $\dfrac{5}{4}$.

e) $\dfrac{5}{2}$.

099 *Questão 30 da prova 01/2015*

O músico Paul McCartney alcançou fama internacional como integrante de uma das bandas de maior sucesso de todos os tempos, The Beatles. Seu único filho homem, James McCartney, também músico, ganhou sua primeira guitarra do pai ainda na infância. Na ocasião, o papai McCartney tinha um ano a menos que o quíntuplo da idade do filho. Vinte e três anos mais tarde, quando James McCartney fez a primeira apresentação de sua carreira solo nos EUA, seu pai tinha três anos a mais que o dobro de sua idade. Se Paul McCartney nasceu em 18 de junho de 1942, seu filho James, que faz aniversário em 12 de s4etembro, nasceu em:

a) 1964

b) 1965

c) 1966

d) 1977

e) 1980

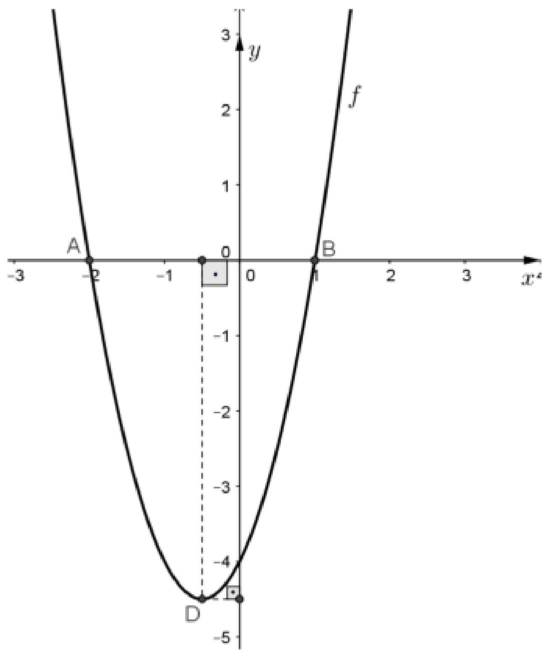
100 *Questão 22 da prova 01/2016*

João e Maria têm juntos 50 anos. Sabe-se que João é 10 anos mais velho que Maria. A idade de João é:

a) 20 anos;
b) 30 anos;
c) 35 anos;
d) 40 anos;
e) 45 anos.

101 *Questão 23 da prova 01/2016*
A área e o perímetro de um retângulo medem $28cm^2$ e 22 cm, respectvamente. A diagonal desse retângulo mede, em cm:
a)65
b)$\sqrt{50}$
c)50
d) $\sqrt{65}$
e)6

102 *Questão 18 da prova 04/2017*
Seja f a função real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é dado a seguir, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$. O valor de $a + b + c$, sabendo que as coordenadas dos pontos A, B e D são $(-2, 0)$, $(1, 0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$, é:



a) 6
b) -6
c) 4
d) 0
e) -4

103 *Questão 23 da prova 01/2019*
Quantos números inteiros existem entre dois números reais positivos, tais que um é 3 unidades maior do que o dobro do outro e o produto entre esses dois números é 10?
a) 0
b) 1
c) 5
d) 8
e) 12

104 *Questão 24 da prova 01/2019*
Carlos e Emanuel trabalham em uma loja especializada em um determinado produto. O salário de cada um é composto por um valor fi xo mais uma comissão por vendas desse produto. Carlos recebe R$ 1.200,00 reais de salário fixo mais "a" reais por unidade vendida, enquanto Emanuel recebe R$ 1.800,00 de salário fixo mais "b" reais por unidade vendida. Se cada um vender 60 unidades no mês, seus salários serão iguais. Se cada um vender 120 unidades, o salário de Carlos será 11/10 do salário de Emanuel. Qual será o salário de Carlos se ele vender 20 unidades no mês?
a) $R\$ \ 2.100,00$
b) $R\$ \ 2.500,00$
c) $R\$ \ 3.200,00$
d) $R\$ \ 4.250,00$
e) $R\$ \ 5.030,00$

105 *Questão 25 da prova 01/2019*
Os alunos de uma turma fi zeram uma "vaquinha" para juntar 800 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, quatro alunos desistiram e receberam seu dinheiro de volta. Com isso, a parte dos que irão viajar sofreu um aumento de dez reais. Quantos alunos tem a turma?
a) 16
b) 18
c) 20
d) 22
e) 24

106 *Questão 26 da prova 01/2019*
Uma cooperativa de artesanato confecciona dois tipos de produtos, A e B, ao custo de R$8,00eR$12,00 por unidade, respectivamente. Essa cooperativa vendeu no último mês 330 unidades dos produtos A e B com preços 756.570,00 com essa venda. Determine a quantidade do produto A que foi vendida.
a) 150
b) 160

c) 170
d) 180
e) 190

107 *Questão 27 da prova 01/2020*
O produto entre dois números é 391 e a soma dos seus quadrados é 818. Determine o valor da diferença entre os quadrados desses números, sabendo que um é 6 unidades maior do que o outro.
a) 96.
b) 182.
c) 240.
d) 380.
e) 396.

108 *Questão 15 da prova 84/2022*
No último interclasse realizado em um dos campi do Ifes, o time de futebol de salão do 1º Ano A, de um dos Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio, fez uma campanha emblemática de 10 jogos, somando 26 pontos e tornando-se campeão invicto do torneio nessa modalidade. Sabendo que, no caso de vitória, o time soma 3 pontos; de empate, soma 1 ponto e, de derrota, nenhum ponto, podemos afirmar que o número de empates nessa campanha foi de:
a) 8.
b) 6.
c) 4.
d) 2.
e) 1.

A.2.6 Fatoração e produtos notáveis

109 *Questão 22 da prova 01/2011*
A expressão $\dfrac{123456^2 - 123455^2 - 11}{300}$ é equivalente a:
a) 823.
b) 913.
c) 512.
d) 12345.
e) 234.

110 *Questão 20 da prova 01/2012*
O valor da expressão $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ é:
a) $\sqrt{2}$.
b) 2.

c) 1.
d) $-\sqrt{2}$.
e) 0.

111 *Questão 18 da prova 01/2013*
Os lados de um retângulo medem $b^2 - 4$ e $\dfrac{1}{b+2}$. A área desse retângulo, para valores de $b > 10$, vale:
a) $b - 4$
b) $b + 4$
c) $b - 2$
d) $b + 2$
e) $b^2 - 4$

112 *Questão 26 da prova 01/2015*
Uma maneira mais simplificada de escrever o valor de $A = \dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$; $xy = 0$, é
a) 4.
b) $\dfrac{2}{x}$.
c) 0.
d) $\dfrac{2x^2 + 2y^2}{xy}$.
e) $\dfrac{2}{y}$.

113 *Questão 21 da prova 01/2016*
Considere os itens abaixo: I. $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$, para $m,\ n \in \mathbb{R}$
II. $(m-n)^2 = m^2 - n^2$ para $m,\ n \in \mathbb{R}$
III. $(k+l)^3 = k^3 + 3kl^2 + 3k^2l + l^3$, para $k,\ l \in \mathbb{R}$
IV. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, para $a,\ b \in \mathbb{R}$
Assinale a única afirmativa CORRETA.
a)Apenas I e IV estão corretas.
b)Apenas I, II e IV estão corretas.
c)Apenas III é correta.
d)Apenas IV é falsa.
e)Apenas I e III estão corretas

114 *Questão 30 da prova 04/2017*
Leia com ATENÇÃO as seguintes afirmações:
I. O número 0,456783215 é irracional
II. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ac$ para todos os números reais a, b e c.
III. Para todo número real positivo x, se $\sqrt{x^2} \leq 16$ então $0 \leq x \leq 4$

Assinale a alternativa correta:
a) Todas as afirmações são incorretas.
b) Somente as afirmações I e II são corretas.
c) Somente as afirmações I e III são corretas.
d) Somente as afirmações II e III são corretas.
e) Somente a afirmação II é correta.

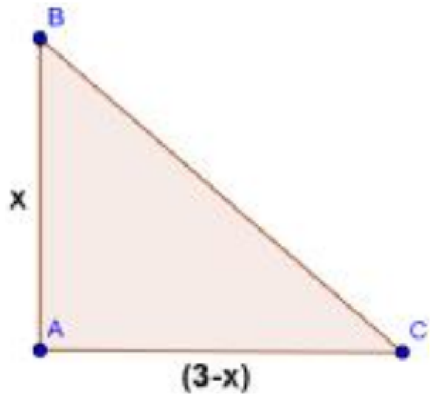
115 *Questão 17 da prova 01/2019*
Se a e b são números reais tais que $(a-b)$š $= 8$ e $ab = 6$, então o valor da soma $a+b$ é:
a) $4\sqrt{2}$
b) $5\sqrt{3}$
c) 9
d) $6\sqrt{5}$
e) $\sqrt{26}$

116 *Questão 27 da prova 01/2020*
O produto entre dois números é 391 e a soma dos seus quadrados é 818. Determine o valor da diferença entre os quadrados desses números, sabendo que um é 6 unidades maior do que o outro.
a) 96.
b) 182.
c) 240.
d) 380.
e) 396.

A.2.7 Noção de função

117 *Questão 16 da prova 01/2012*
O gráfico da função $y = ax + 12$ corta o eixo das abscissas no ponto de abscissa 4. O valor de a, nessas condições é
a) -1.
b) -2.
c) -3.
d) 3.
e) 1.

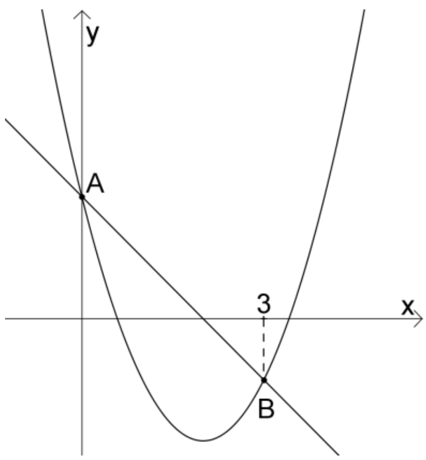
118 *Questão 27 da prova 01/2012*
O triângulo representado pela figura a seguir tem ângulo o $B\hat{A}C = 90°$ e possui catetos medindo x metros e $(3-x)$ metros.



Qual o valor de x , em metros, para o qual a área do triângulo tem valor máximo?
a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{9}{8}$
c) $\frac{3}{4}$
d) 2
e) 1

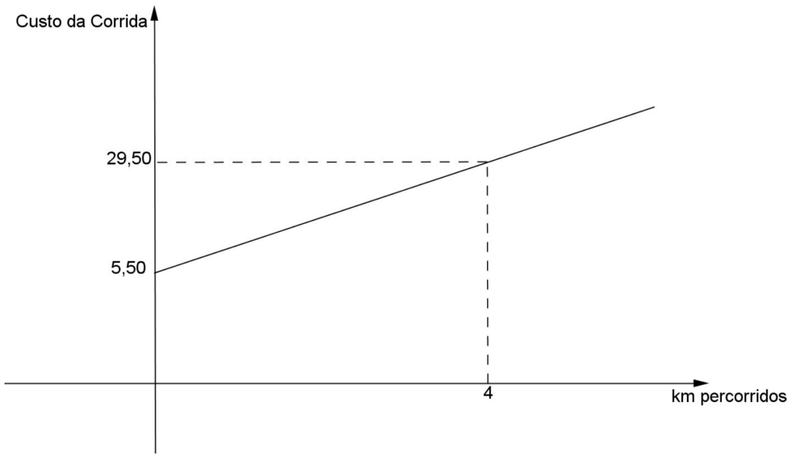
119 *Questão 21 da prova 01/2014*
Se o gráfico das equações 4x+2y+5=0 e cx+5y+6=0 são retas paralelas, então o número real **c** é igual a:
a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

120 *Questão 29 da prova 01/2015*
No plano cartesiano a seguir, estão representadas as funções f e g . Os pontos A e B são pontos comuns aos dois gráficos. Sabendo que $f(x) = x^2 - 4x + 2$, é correto afirmar que:



a) As raízes de f são 1 e 4.
b) O coeficiente angular de g é 1.
c) Se $g(x) = ax + b$, então $a + b = 1$.
d) $g(x) > 0$ se $x > 2$.
e) $f(x)$ é crescente se $x < 2$.

121 *Questão 18 da prova 01/2016*
O esboço gráfico da função abaixo representa o custo da corrida de taxi.

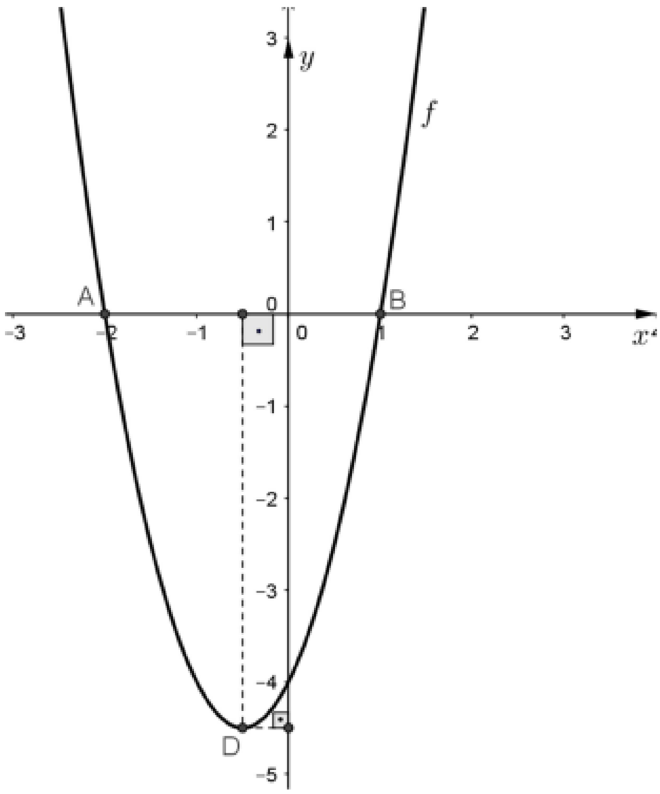


João pegou um taxi na rodoviária e pediu para ir até o Shopping " Compre Feliz". Depois de percorridos 20 km ele pediu para o motorista parar na Praia "Sol Forte", para tirar umas fotos. O motorista parou 2km depois do pedido de João. O custo da corrida de taxi até a parada na Praia '"Sol Forte" foi de:
a) $R\$ \ 150,00$.
b) $R\$ \ 137,50$.
c) $R\$ \ 125,50$.
d) $R\$ \ 200,50$.
e) $R\$ \ 250,50$.

122 *Questão 19 da prova 01/2016*
Uma das raízes da equação $x^2 + px + 8$ é a metade da outra. O valor da menor raiz positiva é:
a) 4.
b) 3.
c) 2.
d) 1.
e) 0.

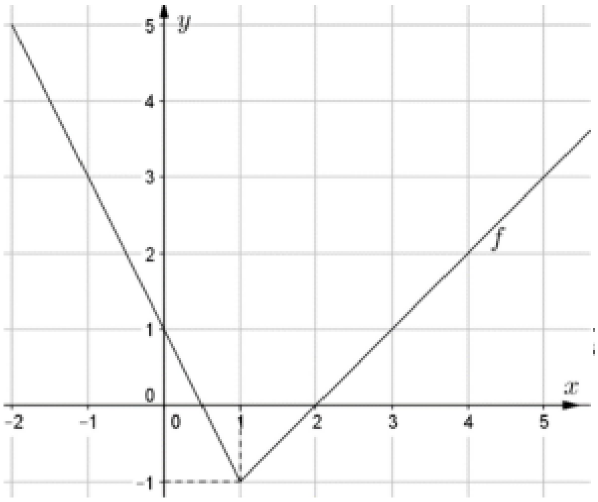
123 *Questão 20 da prova 01/2016*
A função $p(t) = \dfrac{125t - 1000}{25}$ representa o peso médio, em quilogramas, de um animal da espécie " azul belo" . O intervalo de tempo para o qual $10 < p(t) \leq 50$ pertence ao conjunto:
a) $[9, 19]$.
b) $[5, 15]$.
c) $[1, 10[$.
d) $]9, 15[$.
e) $]19, 25[$.

124 *Questão 18 da prova 04/2017*
Seja f a função real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é dado a seguir, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$. O valor de $a + b + c$, sabendo que as coordenadas dos pontos A, B e D são $(-2, 0)$, $(1, 0)$ e $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$, é:

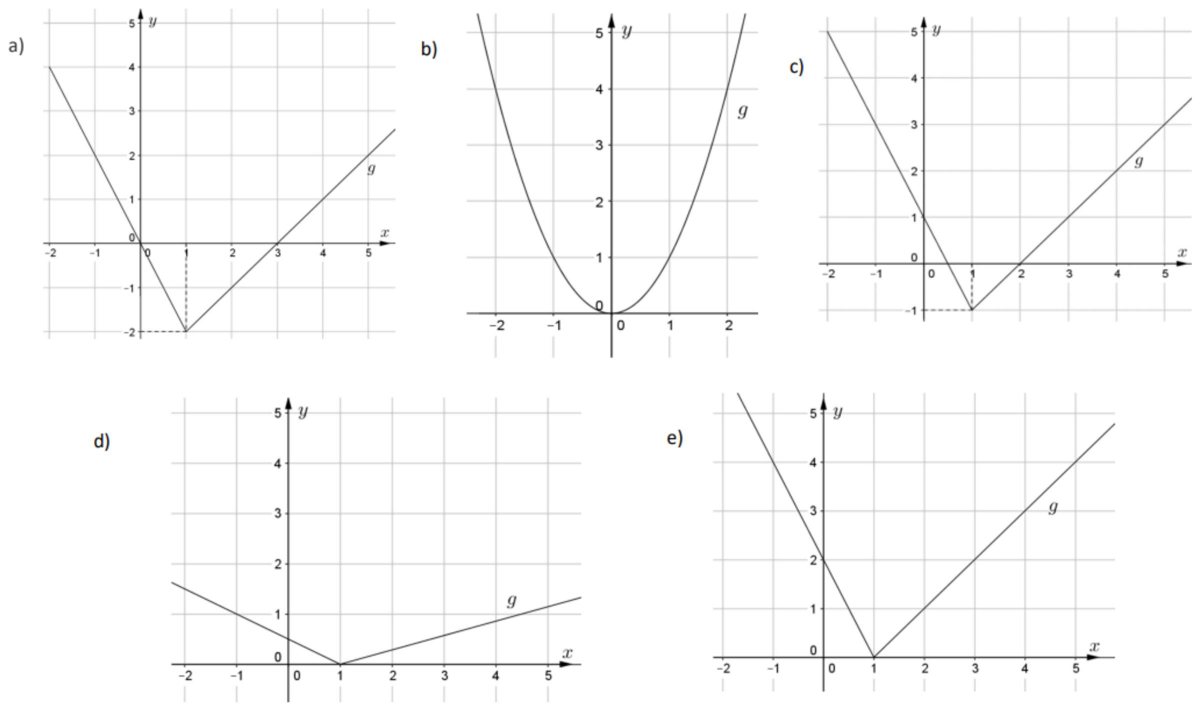


a) 6
b) -6
c) 4
d) 0
e) -4

125 *Questão 20 da prova 04/2017*
A imagem a seguir representa o gráfico de uma função real f.



Com base no gráfico da função acima podemos concluir que o gráfico da função g, definida por $g(x) = f(x) - 1$, é:



126 *Questão 17 da prova 01/2018*
A mitose é um processo de divisão celular, no qual a partir de uma célula formada, originamse duas células com a mesma composição genética. Este processo de divisão celular é comum a todos os seres vivos, dos animais e plantas multicelulares até os organismos unicelulares, nos quais, muitas vezes, este é o principal ou, até mesmo, o único

processo de reprodução. Considere que cada processo de mitose dura uma hora. Se um grupo de uma única célula se torna um grupo de X células em 100 horas, sendo que cada nova célula inicia a mitose imediatamente após o término do processo que a originou, em quantas horas um grupo de duas células se tornará um grupo de X células nas mesmas condições descritas?

a) 101
b) 99
c) 50
d) 100
e) 98

127 *Questão 26 da prova 01/2018*

Uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Qual a distância, no plano cartesiano, do ponto sobre o gráfico de **f** de abcissa 0 (zero) para o ponto de abcissa 4? a) 1.

b) $3\sqrt{5}$.
c) $\sqrt{41}$.
d) 7.
e) $4\sqrt{2}$.

128 *Questão 19 da prova 01/2020*

Considere as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -f(x)$. Determine a área do quadrilátero ABCD, sabendo que A e C são os zeros da função f, B é ponto de mínimo de f e D é ponto máximo de g.

a) $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{1}{2}$.
c) $\frac{3}{4}$.
d) 1.
e) 2.

129 *Questão 25 da prova 01/2020*

Dado o conjunto $A = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, considere uma função de A em $\mathbb{N}°$ tal que $f(a + b) = f(a)f(b)$ e $f(1) = 1$. O conjunto imagem de f possui quantos elementos?

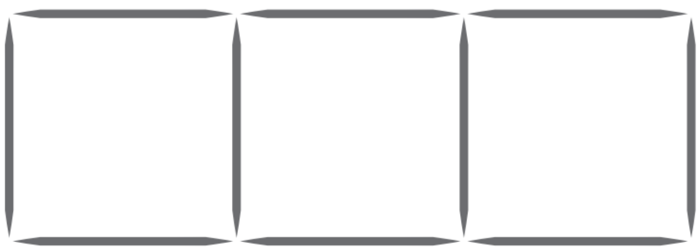
a) 1
b) 2
c) 5
d) 9
e) 10

130 *Questão 30 da prova 01/2020*
Em uma festa, o valor da entrada era R$ 1000,00. Porém, os organizadores devolverão, no fim da festa, para cada um que comprou entrada, 10 reais vezes a quantidade de entradas vendidas para a festa. Dessa forma, se forem vendidos, por exemplo, 5 entradas, cada comprador pagará R$ 1000,00 e receberá de volta R$ 50,00 no fim da festa. Qual a arrecadação máxima possível para essa festa, assumindo que a quantidade máxima de entradas disponível é 90?
a) R$ 9.000,00
b) R$ 12.000,00
c) R$ 15.000,00
d) R$ 25.000,00
e) R$ 40.000,00

131 *Questão 22 da prova 84/2022*
O carro-chefe das vendas de uma lanchonete é o hambúrguer artesanal "Brutão", que é vendido por R$ 20,00. A esse valor, são vendidas 200 unidades em uma noite. Devido ao aumento nos preços dos produtos utilizados em sua fabricação, a lanchonete pretende reajustar o preço do "Brutão" e, para tanto, após realizar uma pesquisa com seus clientes, percebeu que a cada reajuste de R$ 0,40 no valor, a lanchonete deixa de vender 2 hambúrgueres. Mantida a proposta de reajuste, qual deverá ser o valor do produto que fará com que a arrecadação com a sua venda seja a maior possível?
a) R$ 30,00
b) R$ 27,50
c) R$ 25,00
d) R$ 23,50
e) R$ 22,50

A.2.8 Sequências numéricas recursivas e não recursivas

132 *Questão 21 da prova 01/2018*
Uma pessoa brinca de arrumar palitos fazendo uma sequência de quadrados como na figura abaixo. Sabendo que ele construiu n quadrados de acordo com o padrão apresentado na imagem, pode-se afirmar que ele utilizou um número de palitos igual a:



a) $4n$
b) $4n + 2$
c) $3n + 1$
d) $3n + 2$
e) $\frac{n}{4}$

133 *Questão 26 da prova para o cargo de Analista em Tecnologia da Informação e Comunicação do Concurso Público 2019 da Prefeitura de Itapevi-SP*
A sequência dos cinco números a seguir foi composta, a partir do 2° número, por uma regra.
1, 3, 7, 15, 31.
Admitindo-se que a regra de formação dos elementos seguintes da sequência permaneça a mesma, pode-se concluir corretamente que o sétimo número será
a) 53
b) 73
c) 77
d) 127
e) 135

134 *Questão 19 da prova para o cargo de Motorista Cat. D do Processo Seletivo Simplificado da Prefeitura de Canto do Buriti - Edital 001/2023*
Sabendo que a sequência: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13... possui um padrão de repetição e mantendo-se esse padrão, qual seria o próximo elemento da sequência?
a) 18
b) 20
c) 21
d) 24
e) 26

A.3 Geometria

A.3.1 Plano cartesiano

135 *Questão 26 da prova 01/2018*
Uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Qual a distância, no plano cartesiano, do ponto sobre o gráfico de **f** de abcissa 0 (zero) para o ponto de abcissa 4?
a) 1.
b) $3\sqrt{5}$.
c) $\sqrt{41}$.
d) 7.
e) $4\sqrt{2}$.

136 *Questão 28 da Prova Ensino Técnico Concomitância Externa CEFET-MG 2005-2* Sendo A um ponto de coordenadas (2x + 4, 3x - 9) do quarto quadrante do plano cartesiano, é correto afirmar que x pertence ao intervalo real

a) $-2 < x < 3$

b) $2 < x < 3$

c) $-3 < x < 2$

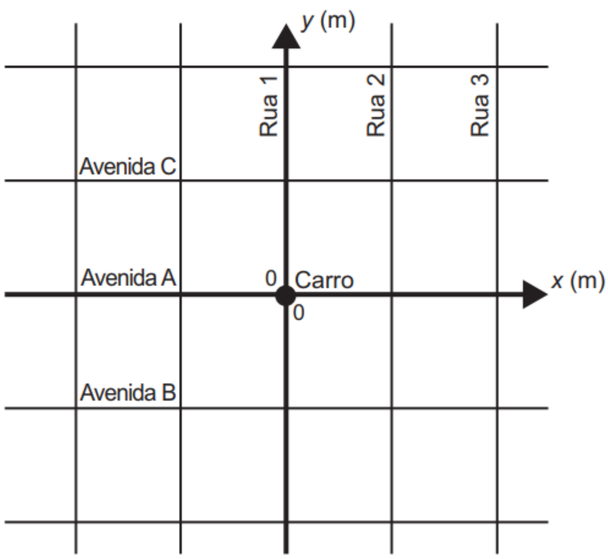
d) $-3 < x < -2$

e) $x < -2$

137 *Questão 160 do Caderno Cinza do ENEM 2021 - 2ª aplicação*

Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B.

No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem (0, 0) o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.



A ordenada do ponto que representa a localização do hotel é

a) -60

b) -40.

c) 0.

d) 40.

e) 60.

A.3.2 Classificação de polígonos

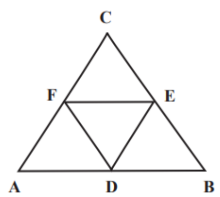
138 *Questão de autoria própria.* Um polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 1080°, tem um ângulo igual a $\frac{x}{3} + 90°$, outro igual a $\frac{x}{5} + 108°$ e os demais igual a x. Esse polígono se trata de um:
a) Pentágono regular.
b) Pentágono não regular.
c) Heptágono não regular
d) Octógono regular
e) Octógono não regular.

139 *Questão de autoria própria.*
Um polígono regular possui ângulos externos iguais a 72°. Esse polígono se trata de um:
a) Quadrilátero
b) Pentágono
c) Hexágono
d) Heptágono
e) Octógono.

140 *Questão 9 da Prova para o cargo de Técnico em Informática do Concurso 01/2022 do Conselho Regional de Farmácia do Estado do Paraná*
Assinale a alternativa que apresenta o número de diagonais de um hexacontágono (polígono de 60 lados).
a) 1.377
b) 1.484
c) 1.595
d) 1.710
e) 1.829

A.3.3 Classificação de triângulos quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos

141 *Questão 24 da prova 01/2018*
Considere ABC um triângulo equilátero com lado de medida a metros. Ao traçar os segmentos EF, ED e DF, sendo D, E e F os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, obtêm-se o triângulo DEF, como mostra a figura.



Abaixo, tem-se cinco afirmações a respeito desta construção.

I – O triângulo DEF é equilátero.

II – O comprimento, em metro, do lado DE do triângulo DEF é a terça parte do comprimento de um lado de ABC.

III – A área, em metro quadrado, do triângulo DEF, é igual à metade da área, em metro quadrado, do triângulo ABC.

IV – Os triângulos ADF e DBE têm a mesma área.

V – A área do triângulo DEF, em função de a, em metro quadrado, é igual a $\frac{a\sqrt{3}}{16}$

Destas, podemos afirmar que

a) todas as afirmações são verdadeiras.

b) apenas a afirmação I é verdadeira.

c) apenas as afirmações I e II são falsas.

d) apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.

e) apenas as afirmações I, IV e V são verdadeiras.

142 *Questão de autoria própria.*

Um triângulo possui lados iguais a 5cm, 5cm e 8cm, esse triângulo pode ser classificado como:

a) Retângulo e escaleno

b) Retângulo e isósceles

c) Obtusângulo e isósceles

d) Acutângulo e retângulo

e) Acutângulo e escaleno.

143 *Questão de autoria própria.*

Um triângulo tem lados iguais a 6 cm e 8 cm, o valor do terceiro lado, obrigatóriamente inteiro, para que esse triângulo seja acutângulo deve pertencer ao intervalo:

a) $4 < x < 9$

b) $4 < x < 10$

c) $4 < x < 11$

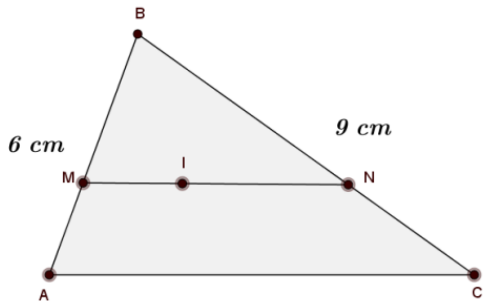
d) $5 < x < 9$

e) $5 < x < 10$

A.3.4 Cevianas e pontos notáveis de um triângulo

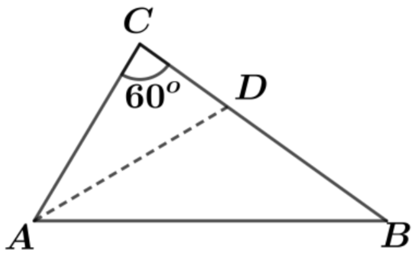
144 *Questão 20 da prova 84/2022*

Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede 6 cm, o lado $\overline{BC}$ mede 9 cm, $\overline{AB} = 3\ \overline{AM}$, $\overline{BC} = 3\ \overline{CN}$ e o segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao lado $\overline{AC}$. Sabendo que o **incentro** é o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo e considerando que esse ponto pertence ao segmento $\overline{MN}$, podemos afirmar que a medida do segmento $\overline{MN}$ é, em centímetros, igual a:



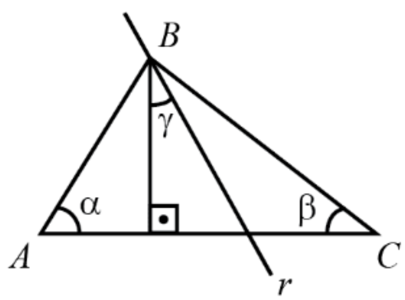
a) 4.
b) 5.
c) 7.
d) 9.
e) 10.

145 *Questão 65 do Vestibular UNICAMP 2019).*
No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A, e $AD = DB$. O ângulo interno em A é igual a



a) 50°.
b) 60°.
c) 70°.
d) 80°.
e) 90°.

146 *Questão do Vestibular FATEC 1978).*
Na figura sequinte, r é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Se $\alpha = 40°$ e $\beta = 30°$, então:

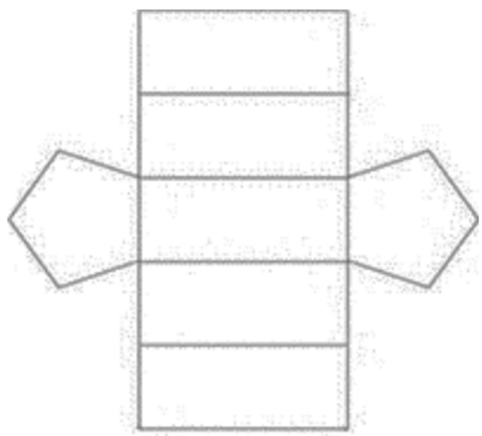


a) $\gamma = 0°$
b) $\gamma = 5°$
c) $\gamma = 15°$
d) $\gamma = 25°$
e) $\gamma = 35°$

A.3.5 Planificação de prismas e pirâmides

147 *Questão 158 da prova do ENEM 2020 (2º dia, caderno amarelo).*
Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulkán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, esse templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada.
As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são:
a) 2 quadrados e 4 retângulos.
b) 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.
c) 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.
d) 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.
e) 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

148 *Questão 69 da prova para o para o cargo de Professor 1 do Concurso FGV-2023 da Prefeitura de Jaboatão dos Guararapes-PE*
Observa figura a seguir.



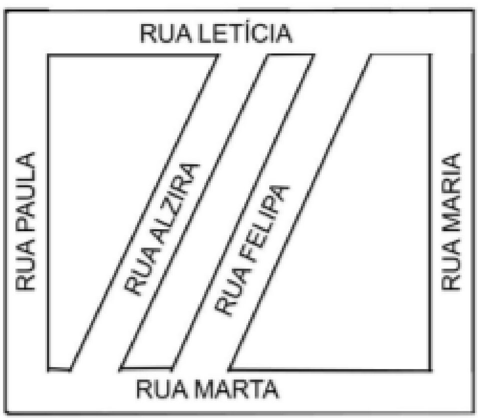
A planificação que está na figura se refere ao sólido geométrico chamado
a) prisma de base quadrangular.
b) prisma de base pentagonal.
c) paralelepípedo.
d) pirâmide.
e) cilindro.

149 *Questão 158 da prova para o cargo de Enfermeiro do Concurso Público de Saúde da Microrregião de Crateús - Edital 001/2023*
Leia a afirmação a seguir.
O(A) ____________ é um sólido geométrico que possui base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um ponto conhecido como vértice.
Marque a opção que completa corretamente a lacuna.
a) pirâmide
b) cone
c) prisma
d) cilindro
e) esfera

A.3.6 Retas - posições relativas entre retas

150 *Questão 21 da prova 01/2014*
Se o gráfico das equações 4x+2y+5=0 e cx+5y+6=0 são retas paralelas, então o número real **c** é igual a:
a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

151 *Questão 37 da prova para o para o cargo de Professor de Matemática do Processo Seletivo Público Simplificado Edital 001/2021 da Prefeitura Municipal de Blumenau-SC*
Analise a imagem e os itens dados abaixo:



I-As ruas Alzira e Felipa não são paralelas.
II-As ruas Paula e Maria são paralelas.

III-As ruas Maria e Marta são perpendiculares.

IV-As ruas Felipa e Marta não são concorrentes.

Após análise, indique a alternativa CORRETA.

a) As afirmativas III e IV não estão corretas.

b) As afirmativas I e II não estão corretas.

c) As afirmativas II e IV não estão corretas.

d) As afirmativas II e III não estão corretas.

e) As afirmativas I e IV não estão corretas.

152 *Questão 10 da prova para o para o cargo de Psicólogo ESF do Processo Seletivo Edital 001/2021 da Prefeitura Municipal de Itamarati de Minas-MG*

No plano cartesiano, consideremos as retas $r : ax + b$ e $s : mx + n$, e que sobre os valores de a, b, m e n e a posição relativa entre as retas, assinale o que for CORRETO.

a) Se $a = m$, então as retas r e s são paralelas e não tem pontos em comum.

b) Se $a \neq m$, então as retas r e s são perpendiculares.

c) Se $b = n$, então as retas r e s são coincidentes.

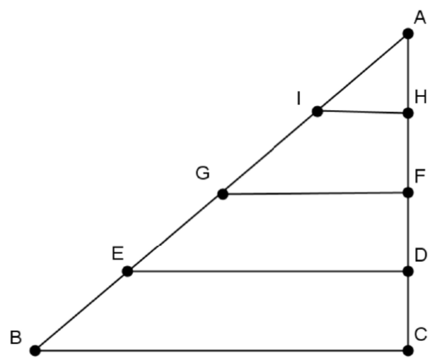
d) Se $a = -\dfrac{1}{m}$, com $m = 0$ então as retas r e s são perpendiculares.

e) Se $b = n$, então as retas r e s são paralelas.

A.3.7 Feixe de retas paralelas

153 *Questão 23 da prova 01/2013*

Os segmentos de reta BC, ED, GF e IH são paralelos.



Se $IG = 6m$, $AH = 2m$ e $FH = 3m$, então a medida de AI, em metros, é:

a) 8.

b) 6.

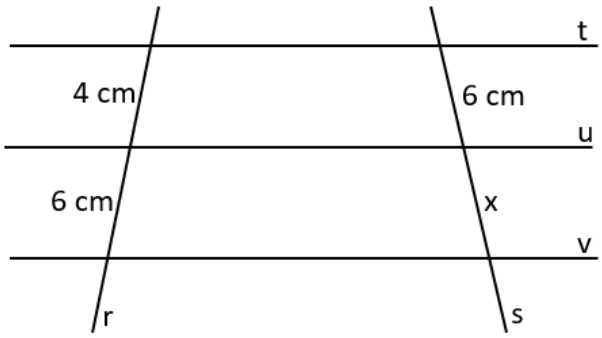
c) 4.

d) 3.

e) 2.

154 *Questão de autoria própria*

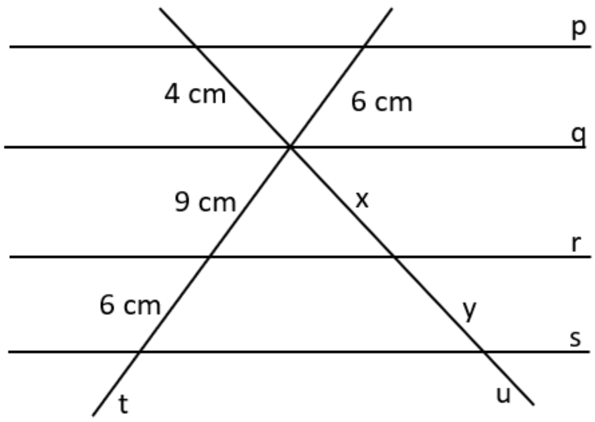
Sabendo que as retas t, u e v são paralelas, o valor da medida do segmento x, em cm, é:



a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 9.

155 *Questão de autoria própria*

Sabendo que as retas p, q r e s são paralelas, o valor da soma das medidas dos segmento x e y, em cm, é:

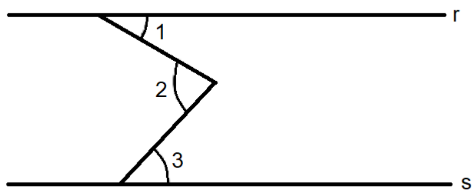


a) 6.
b) 8.
c) 10.
d) 12.
e) 14.

A.3.8 Retas paralelas intersectadas por uma transversal

156 *Questão 30 da prova 01/2011*

Observe a figura abaixo:



As retas r e s são paralelas e o ângulo 2 mede 80°. A soma dos ângulos 1 e 3 vale:

a) 40°.

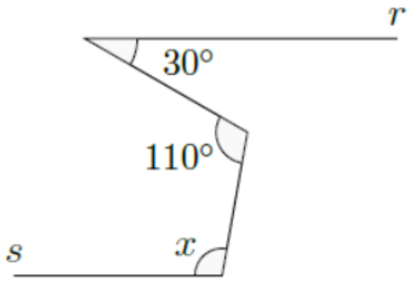
b) 50°.

c) 60°.

d) 70°.

e) 80°.

157 *Questão 7 da lista de exercícios do dia 14/10 do Portal da Obmep - adaptada*
A medida do ângulo x, sabendo que as retas r e s são paralelas, é:



a) 70°.

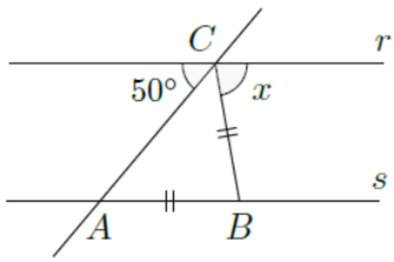
b) 80°.

c) 90°.

d) 100°.

e) 110°.

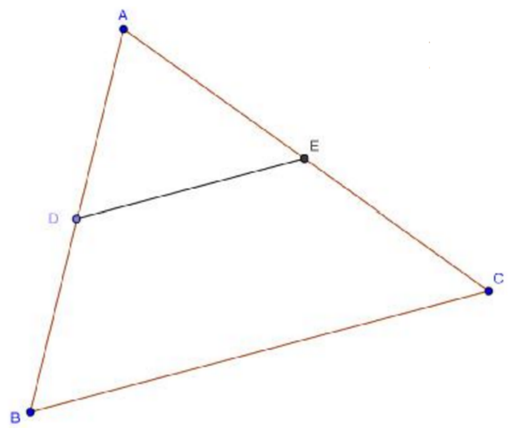
158 *Questão 8 da lista de exercícios do dia 14/10 do Portal da Obmep - adaptada*
Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Se $\overline{AB} = \overline{CB}$, a medida do ângulo x é:



a) 50°.
b) 60°.
c) 70°.
d) 80°.
e) 90°.

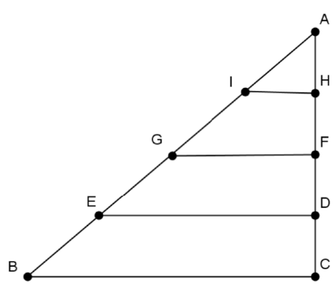
A.3.9 Semelhança e congruência de figuras

159 *Questão 19 da prova 01/2012*
Na figura a seguir os triângulos são semelhantes. Nessa figura os comprimentos dos seguimentos AB, AD e AE são respectivamente, 8cm, 3cm e 6cm.



A soma das medidas dos lados AC, EC e BD é
a) 21.
b) 31.
c) 26.
d) 17.
e) 15.

160 *Questão 23 da prova 01/2013*
Os segmentos de reta BC, ED, GF e IH são paralelos.



Se IG = 6m, AH = 2m e FH = 3 m, então a medida de AI, em metros, é:

a) 8.

b) 6.

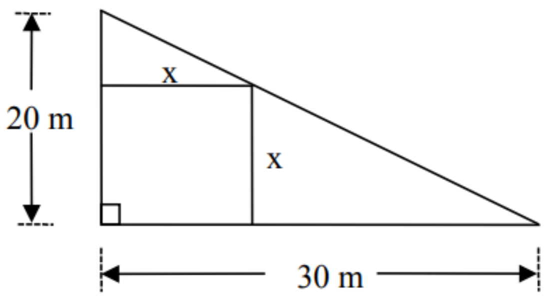
c) 4.

d) 3.

e) 2.

161 *Questão 20 da prova 01/2014*

A figura abaixo representa um terreno onde se deseja construir uma casa na região demarcada pelo quadrado. O restante do terreno será reservado para jardim e área de lazer. Pode-se afirmar que a área, em m^2, reservada para construção da casa é de:



a) 81

b) 100

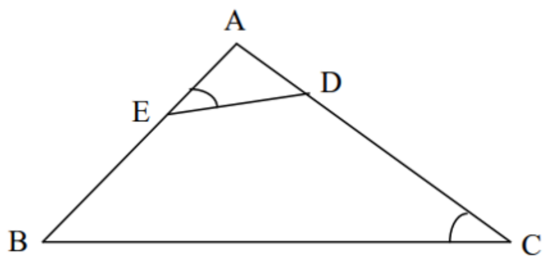
c) 121

d) 144

e) 169

162 *Questão 21 da prova 01/2015*

Os triângulos ABC e ADE, representados na figura, são semelhantes. Os ângulos AED e ACB são congruentes. Se BC = 24cm, AC = 20cm, AD = 7cm e AE = 5cm, o perímetro do quadrilátero BCDE, em centímetros, é:



a) 56

b) 66

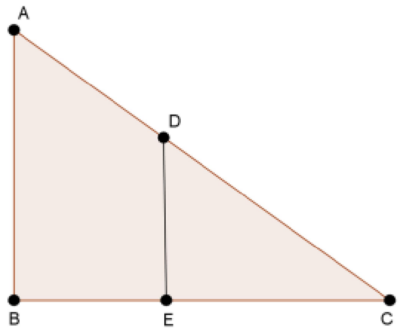
c) 76

d) 86

e) 96

163 *Questão 25 da prova 04/2017*

Observe o esboço abaixo:



Sabe-se que:

I. O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DE}$ e perpendicular ao segmento $\overline{BC}$.

II. $\overline{EC} = 4cm$, $\overline{AB} = 1cm$ e $\overline{DE} = \overline{BE}$

O comprimento do segmento $\overline{DE}$ vale:

a) $-2(-\sqrt{2}+1)$ cm.

b) 5cm.

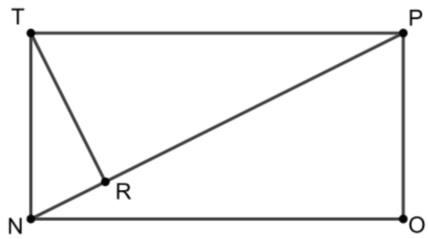
c) $(\sqrt{2}+1)$ cm.

d) $\sqrt{2}$ cm.

e) $(\sqrt{2}-1)$ cm.

164 *Questão 22 da prova 01/2019*

A diagonal PN do retângulo $TPON$ na figura abaixo é perpendicular à TR. Sabendo que $\overline{ON} = 6\sqrt{2}$ e $\overline{PN} = 4\sqrt{5}$, o segmento NR mede



a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

b) $4\sqrt{\dfrac{96}{15}\sqrt{15}}$.

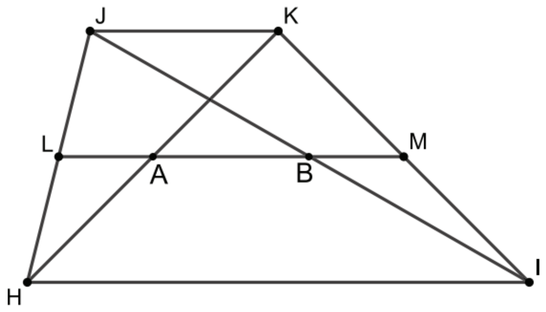
c) $\sqrt{30\sqrt{31}}$.

d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

e) $4\sqrt{3}$.

165 *Questão 29 da prova 01/2019*

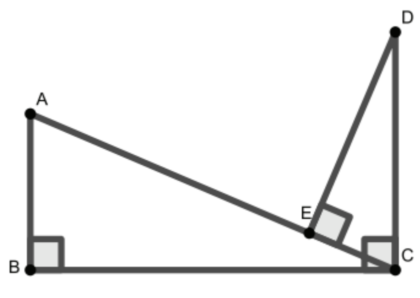
As diagonais IJ e HK do trapézio $HIKJ$ intersectam o segmento LM nos pontos A e B. Sabe-se que L e M são os pontos médios de HJ e KI, respectivamente. Sejam p_1 e p_2 os perímetros dos trapézios $HIML$ e $LMKJ$, respectivamente. Sabendo que $\overline{JK} = 20$ e $\overline{AB} = \frac{3}{5}\overline{JK}$, o valor de $d = p_1 - p_2$ é igual a:



a) 16
b) 24
c) 28
d) 32
e) 44

166 *Questão 24 da prova 01/2020*

A figura abaixo ilustra dois triângulos ABC e CDE. Sabendo que os ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{E}D$ são retos, os pontos A, E e C são colineares, $\overline{AB} = 8$ e $\overline{BC} = 15$, determine o valor da razão entre os segmentos DE e DC.



a) 1
b) $\frac{13}{15}$
c) $\frac{15}{17}$
d) $\frac{17}{25}$
e) $\frac{19}{13}$

A.3.10 Polígonos regulares

167 *Questão 27 da prova 01/2013*

Três segmentos de reta congruentes de comprimento igual a 6 cm são arranjados no plano de modo que região central forma um triângulo equilátero de lado igual a 2 cm, mostrado na figura-1. Em seguida o extremo de cada segmento é ligado ao vértice do triângulo equilátero não pertencente a esse segmento e obtém-se um modelo de hélice para moedor de carne, esboçado na figura-2. O sentido de rotação da hélice é determinado pelo maior contato entre o corte da lâmina e a carne.

figura-1

figura-2

Desse modo, pode-se afirmar que o comprimento de corte de cada lâmina, em cm, é:

a) $\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{12}$.

c) $\sqrt{24}$.

d) $2\sqrt{7}$.

e) $3\sqrt{6}$.

168 *Questão 23 da prova 04/2017*

Analise as afirmativas abaixo.

I. Se r é o raio do círculo circunscrito a um hexágono regular então o apótema m desse hexágono vale $m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

II. Se a hipotenusa de um triângulo retângulo mede 4cm e um dos catetos mede 3cm o outro cateto mede 5cm.

III. $\sqrt{16+25} = 4+5$.

IV. O perímetro de uma circunferência de raio r vale $2\pi r$

Se "C" significa que a afirmativa está correta e "E" que ela está errada, assinale alternativa que representa a sequência correta do item "I" ao item "IV".

a) CCEE

b) CEEC

c) EECC

d) EEEC

e) CECE

169 *Questão 17 da prova 01/2020*

Dados um hexágono regular cuja medida do lado é 6cm, um quadrado com 44cm de perímetro, um triângulo retângulo cujos catetos medem 9cm e 12cm; e um triângulo equilátero, cujo lado mede 8cm, analise as afirmações abaixo e assinale a **ÚNICA** verdadeira.

a) Os dois triângulos têm perímetros iguais.

b) A medida da área do hexágono é igual ao quádruplo da medida da área do triângulo equilátero.

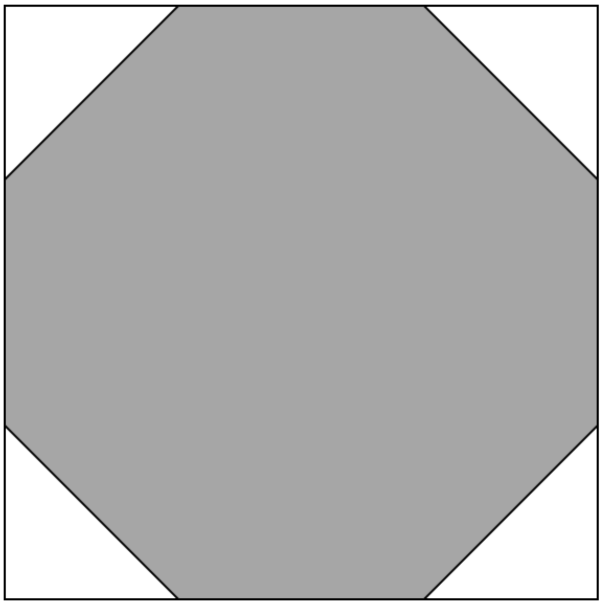
c) As medidas das áreas do quadrado e do triângulo retângulo são iguais.

d) A medida da área do hexágono é igual a medida da área do triângulo retângulo.

e) A soma das medidas das áreas do hexágono e do triângulo equilátero é igual a $70\sqrt{3}cm^2$

170 *Questão de autoria própria*

Um octógono regular por se inscrito em um quadrado de modo que quatro dos seus lados fiquem situados sobre os lados do quadrado, como mostra a figura. Sendo l^2 a área do quadrado, a área do octógono é:



a) $\dfrac{l^2\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{l^2\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{2}$

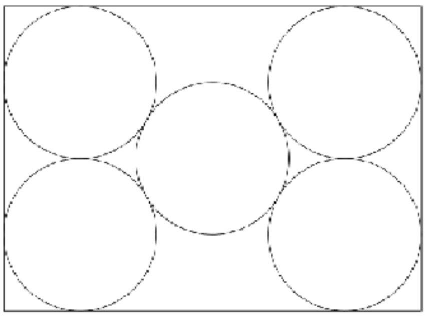
d) $l^2(\sqrt{2}-1)$

e) $l^2(\sqrt{3}-1)$

A.3.11 Círculo e circunferência - área, arcos e ângulos

171 *Questão 26 da prova 01/2011*

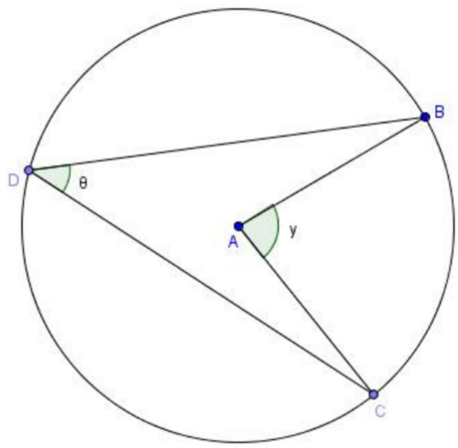
s circunferências da figura abaixo são tangentes e de raio igual a 3 cm. Nessas condições, a área do retângulo mostrado na figura abaixo, em cm^2, é:



a) $72(1+\sqrt{3})$
b) $48(1+\sqrt{3})$
c) $72\sqrt{3}$
d) $48\sqrt{3}$
e) 216

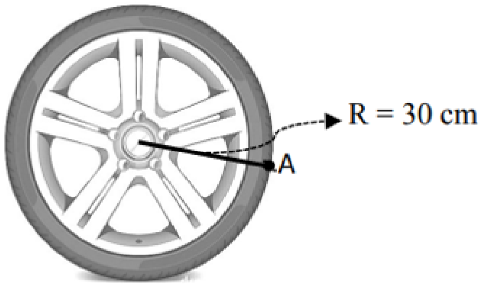
172 *Questão 23 da prova 01/2012*

Na figura a seguir, $\theta = \dfrac{x}{6} + 15°$ e $y = x$, são ângulos com medidas em graus.



O valor de y, em graus, é
a) 18.
b) 45.
c) 60.
d) 90.
e) 180.

173 *Questão 18 da prova 01/2014*
A figura abaixo representa a roda de um carro (aro e pneu) que possui raio R = 30 cm. Sabe-se que essa roda dá 100 voltas por minuto. Nestas condições, a distância em cm, percorrida pelo ponto A em quatro segundos é igual a:

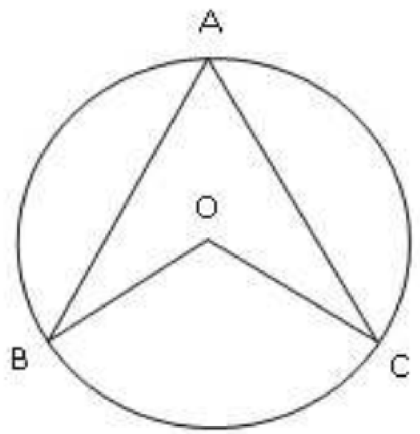


a) 100π.
b) 200π.
c) 300π.
d) 400π.
e) 500π.

174 *Questão 25 da prova 01/2014*
O mostrador do relógio está marcando oito horas. A medida do menor ângulo, em graus, formado pelos ponteiros desse relógio é:

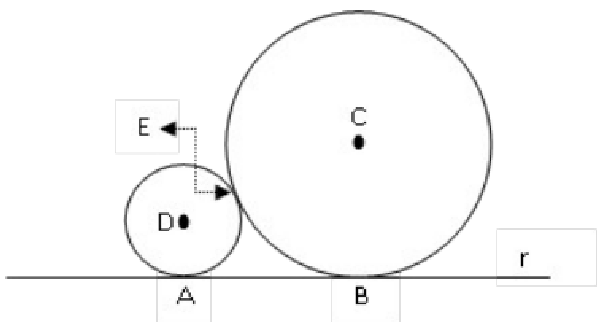
a) 100
b) 120
c) 150
d) 180
e) 240

175 *Questão 20 da prova 01/2015*
Se o ângulo central BOC na figura mede 92 graus e os segmentos AB e AC são congruentes então o ângulo OCA, em graus, mede:



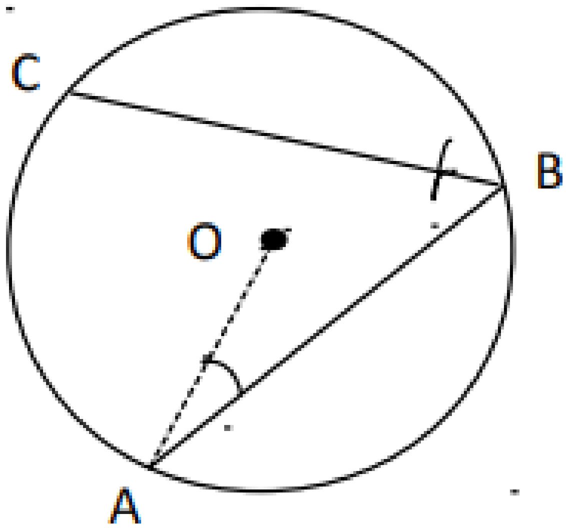
a) 23
b) 44
c) 48
d) 67
e) 68

176 *Questão 26 da prova 01/2016*
Os círculos de centros C e D são tangentes entre si no ponto E e têm raios iguais a 3cm e 1cm, respectivamente. A reta r tangencia os círculos nos pontos A e B, como mostra a figura. A medida do segmento AC, em cm, é igual a:



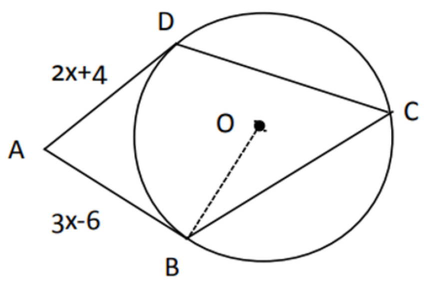
a) $\sqrt{11}$
b) $\sqrt{12}$
c) $\sqrt{18}$
d) $\sqrt{21}$
e) $\sqrt{24}$

177 *Questão 29 da prova 01/2016*
Considere o ângulo ABC de 30° inscrito numa circunferência de centro O. Se os segmentos AB e BC são congruentes, o ângulo OAB, em graus, mede:



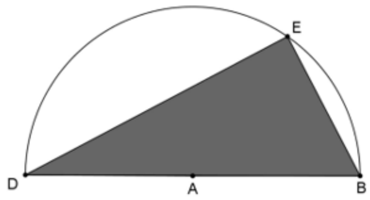
a)10
b)15
c)20
d)40
e)50

178 *Questão 30 da prova 01/2016*
A figura mostra um ponto A no exterior do círculo de centro em O e raio igual a 10. Os segmentos AB e AD são tangentes ao círculo nos pontos B e D e, medem, respectivamente, $2x + 4$ e $3x - 6$. Se o ângulo inscrito BCD mede 30°, então o perímetro do triângulo ABD é igual a:



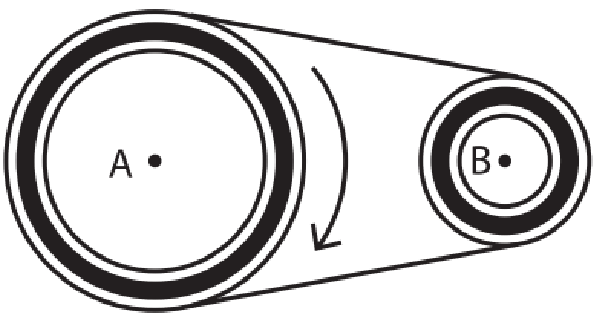
a) 10.
b) 24.
c) 38.
d) 44.
e) 58.

179 *Questão 24 da prova 04/2017*
Observe o arco de circunferência representado no esboço abaixo:



Sabe-se que:
I. Ele corresponde a metade de uma circunferência de raio 6 cm.
II. O ângulo $D\hat{B}E = 60°$.
A área não pintada no arco de circunferência apresentado no esboço abaixo, em cm^2, vale:
a) $36(4\pi\sqrt{3})cm^2$ b) $(144\pi - 264)cm^2$ c) $18(\pi - \sqrt{3})cm^2$ d) $18(4\pi - \sqrt{3})cm^2$ e) $36\sqrt{3}cm^2$

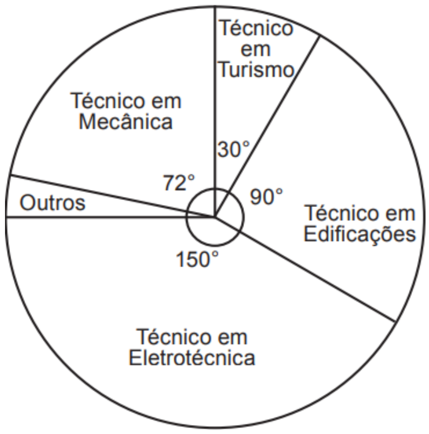
180 *Questão 16 da prova 01/2018*
As polias e correias formam a base de equipamentos de transmissão de energia mecânica. A sua principal função é transferir movimento e força de um lado a outro da máquina, configurando um sistema de transferência de força e movimento altamente confiável. Motores de automóveis, máquinas de tração, esteiras e linhas de produção são alguns tipos de maquinário que precisam do uso constante dessas peças. A figura abaixo representa um sistema composto por discos A e B representando polias de diâmetros 8 e 2 cm, respectivamente, unidas por correias que se movimentam sem deslizar. Quando o disco A dá uma volta completa no sentido horário, o disco B gira:



a) 4 voltas no sentido horário
b) 2 voltas no sentido horário
c) 6 voltas no sentido anti-horário
d) 4 voltas no sentido anti-horário
e) 2 voltas no sentido horário

181 *Questão 29 da prova 01/2018*

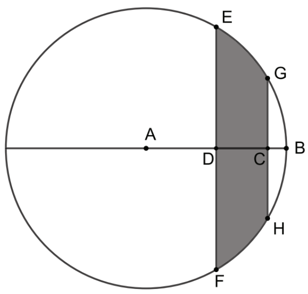
O gráfico de setores abaixo apresenta os dados de uma entrevista realizada com 480 pessoas sobre a preferência de curso técnico. As medidas dos ângulos centrais respectivos aos setores estão destacadas na figura. Qual a quantidade de entrevistados prefere o curso de Técnico em Mecânica, sendo que cada pessoa optou por apenas um curso?



a) 88 entrevistados
b) 96 entrevistados
c) 112 entrevistados
d) 136 entrevistados
e) 140 entrevistados

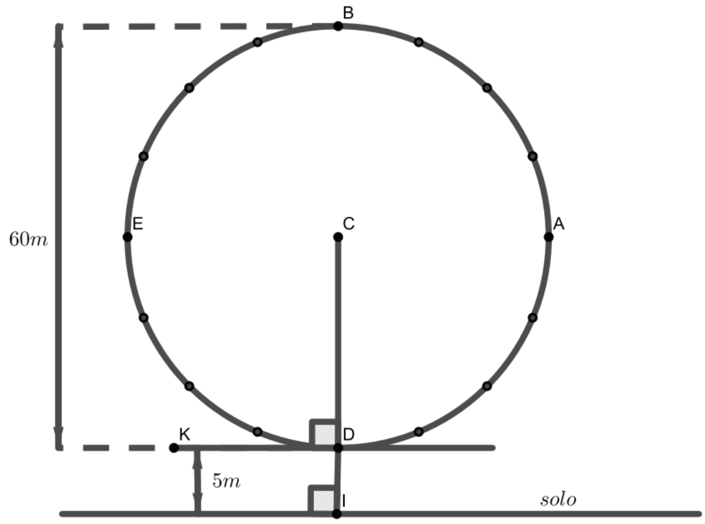
182 *Questão 30 da prova 01/2019*

A circunferência de centro A abaixo contém os pontos B, E, G, H e F. Além disso, sabe-se que as cordas GH e EF são perpendiculares ao segmento AB, o ponto D é ponto médio de AB, $\overline{AC} = 5\sqrt{3}mm$ e $\overline{AB} = 10mm$. A área sombreada é:



a) $25\pi mm^2$
b) $10\pi mm^2$
c) $\dfrac{25\pi}{4} mm^2$
d) $20\pi mm^2$
e) $\dfrac{25\pi}{3} mm^2$

Texto referente às questões 183, 184 e 185 (20, 21 e 22 da prova 01/2020)
A figura abaixo apresenta o esquema de uma roda gigante. Esta roda gigante tem 60 metros de diâmetro externo e seu centro (ponto C) está localizado a 35 metros do chão. A estrutura que faz a sustentação, representada pelo segmento CI, é perpendicular ao solo. A roda gigante gira no sentido anti-horário a uma velocidade constante e faz uma volta completa, sem parar, em exatamente seis minutos. Uma pessoa embarca e inicia a sua volta na roda gigante no ponto de embarque D.



183 *Questão 20 da prova 01/2020*
Quantos metros percorreu essa pessoa após cinco minutos do início da sua volta, considerando que a roda não parou após o seu embarque?

a) $10\pi m$
b) $\dfrac{50\pi}{3}m.$
c) $50\pi m$
d) $\dfrac{175\pi}{3}m$
e) $60\pi m$

184 *Questão 21 da prova 01/2020*
A que altura em relação ao solo, estará essa pessoa após cinco minutos do início da sua volta, considerando que a roda não parou após o seu embarque?

a) 10 m
b) 15 m
c) 20 m
d) 25 m
e) 30 m

185 *Questão 22 da prova 01/2020*
Quantos metros percorreu essa pessoa após cinco minutos do início da sua volta, considerando que a roda não parou após o seu embarque?

a) $10\pi m$
b) $\dfrac{50\pi}{3}m.$
c) $50\pi m$
d) $\dfrac{175\pi}{3}m$
e) $60\pi m$

A.3.12 Inscrição e circunscrição de polígonos

186 *Questão 29 da prova 01/2011*
A razão entre as áreas dos círculos cujas circunferências estão inscritas e circunscritas a um quadrado não depende do lado desse quadrado. Essa razão sempre será:
a) $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{1}{2}$.
d) $\frac{1}{5}$.
e) $\frac{1}{6}$.

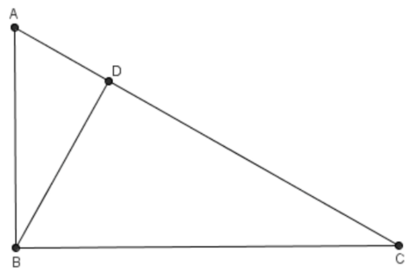
187 *Questão 27 da prova 01/2018*
A diferença entre os dois menores lados de um triângulo retângulo, inscrito em uma circunferência com 8,5 cm de raio, é 7 cm. Determine o perímetro deste triângulo.
a) $28cm$
b) $21 + 4\sqrt{17}cm$
c) $7 + 6\sqrt{31}cm$
d) $8,5 + 7\sqrt{17}cm$
e) $40cm$

188 *Questão 18 da prova 01/2020*
Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D o pé da perpendicular baixada de A sobre BC. Sabendo que o ângulo $O\hat{A}C = 37°$, determine a medida do ângulo $D\hat{A}B$.
a) $23°$.
b) $33°$.
c) $37°$.
d) $47°$.
e) $53°$.

A.3.13 Relações métricas no triângulo retângulo

189 *Questão 25 da prova 01/2012*

Observe a figura a seguir onde: $A\hat{B}C = 90°$; $B\hat{D}A = 90°$; $\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{AC} = c$; $\overline{BD} = h$; $\overline{AD} = m$ e $\overline{DC} = n$.



A alternativa correta é

a) $a^2 = b^2 + c^2$.

b) $ah = bc$.

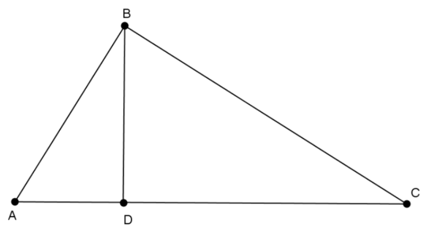
c) $c^2 = an$.

d) $ch = ab$.

e) $b^2 = a^2 + c^2$.

190 *Questão 22 da prova 01/2013*

Na figura abaixo os ângulos $A\hat{B}C$, $A\hat{D}B$ e $C\hat{D}B$ são retos.



Se $AD = 3m$, $BD = \sqrt{6}m$, então $AB + BC$, em metros, vale:

a) 7.

b) $\sqrt{6}$.

c) $\sqrt{28}$.

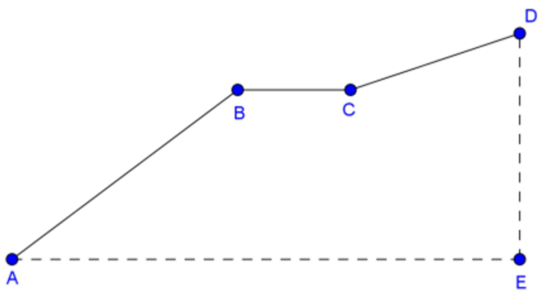
d) $\sqrt{10} + \sqrt{15}$.

e) $3 + \sqrt{6}$.

191 *Questão 22 da prova 04/2017*

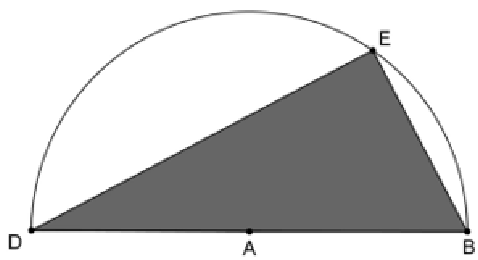
Juca esqueceu o copo que usa para tomar água na porta da escola que está localizada no ponto A. Ele, nesse momento, se encontra no ponto D onde está o ponto de ônibus onde pega o ônibus que usa para ir para sua casa. Juca precisa ir até a porta da escola e voltar a tempo de pegar o ônibus que passa em 15 minutos. No esboço abaixo está representado o menor caminho de A para D passando por B e C que Juca deve fazer para pegar o copo

e voltar por esse mesmo caminho para pegar o ônibus para sua casa. Qual o valor, em metros, desse trajeto? (Considere $\sqrt{2} = 1,4$, apenas nessa questão)
Sabe-se que:
I. $\overline{AE} = 3600cm$; $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ m ; $\overline{BC} = 4000mm$ e $\overline{DE} = 250dm$. II. $B\hat{A}E = 45°$; $A\hat{E}D = 90°$



III. O segmento $\overline{BC}$ é paralelo ao segmento $\overline{AE}$.
a) $18m$.
b) $45m$.
c) $49m$.
d) $58m$.
e) $90m$.

192 *Questão 24 da prova 04/2017*
Observe o arco de circunferência representado no esboço abaixo:

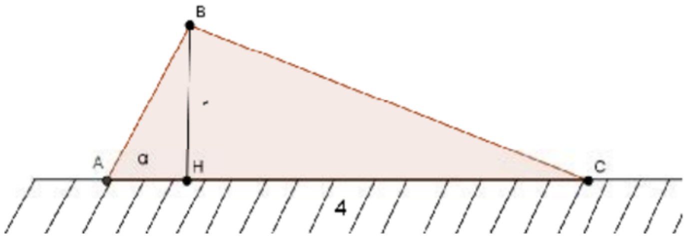


Sabe-se que:
I. Ele corresponde a metade de uma circunferência de raio 6 cm.
II. O ângulo $D\hat{B}E = 60°$.
A área não pintada no arco de circunferência apresentado no esboço abaixo, em cm^2, vale:
a) $36(4\pi\sqrt{3})cm^2$
b) $(144\pi - 264)cm^2$
c) $18(\pi - \sqrt{3})cm^2$
d) $18(4\pi - \sqrt{3})cm^2$
e) $36\sqrt{3}cm^2$

A.3.14 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

193 *Questão 27 da prova 01/2011*

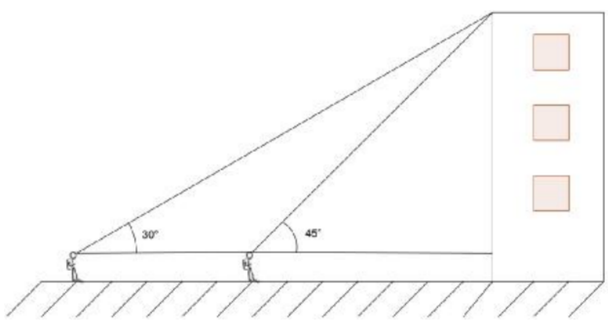
Deseja-se construir um escorregador com a forma de um triângulo ABC, retângulo em B, conforme a figura abaixo. Os segmentos AC e BH medem e 4m e 1m, respectivamente. A escada, representada pelo segmento AB, forma um ângulo com o chão cuja medida vale:



a) 15°.
b) 30°.
c) 45°.
d) 60°.
e) 75°.

194 *Questão 28 da prova 01/2011*

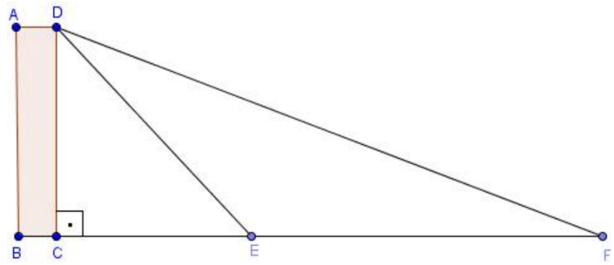
Como tarefa de casa, Joãozinho deveria medir a altura de um prédio próximo a sua casa. Então fez o seguinte: ficou de pé no mesmo nível do prédio e mediu o ângulo com que avistava o topo do mesmo, encontrando 30°. Em seguida, caminhou dez metros na direção do prédio e mediu novamente o ângulo com que avistava o topo, encontrando 45°. Se a altura de Joãozinho é e ele fez todas as contas certas, o valor inteiro que mais se aproxima da altura do prédio encontrada por ele é (use $\sqrt{3} = 1,73$):



a) 10 m
b) 12 m
c) 15 m
d) 17 m
e) 19 m

195 *Questão 21 da prova 01/2012*

Um gavião se encontra em um poste de altura $\overline{CD} = 0,5m$, no ponto D. Nesse ponto ele observa um rato se mover de E até F. Quando o rato está no ponto E é visto sob o ângulo $C\hat{D}E = 45°$ e quando está em F é visto sob o ângulo $E\hat{D}F = 15°$.



A distância percorrida pelo rato para ir do ponto E ao ponto F é

a)$1m$.

b)$2m$.

c)$3\sqrt{3}m$.

d)$\sqrt{3}m$.

e)$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)m$.

196 *Questão 27 da prova 01/2014*

Um engenheiro deseja determinar a altura de um prédio. Para isso, ele mede com um aparelho, o ângulo que o topo do prédio forma com a linha horizontal e obtém 60°. Sabendo-se que o aparelho tem 1,5 m de altura e está a 30 m do prédio, pode-se afirmar que a altura desse prédio, em metros, é de: (Considere $\sqrt{3} = 1,73$)

a) $32,4$.

b) $48,5$.

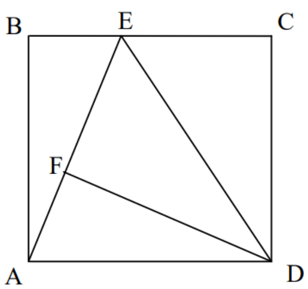
c) $53,4$.

d) $62,3$.

e) $64,6$.

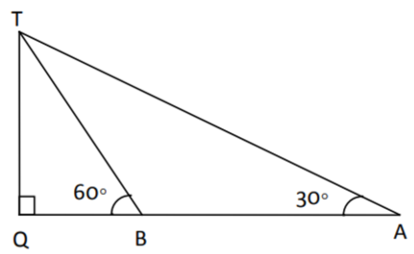
197 *Questão 22 da prova 01/2015*

O quadrado ABCD é formado por quatro triângulos retângulos, como mostra a figura. Se o ângulo BAE mede 30 graus e BE = 1cm, o segmento DE mede, em cm:



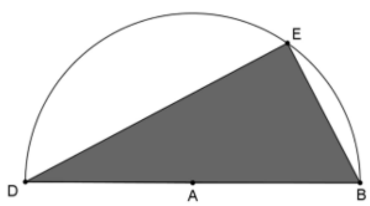
a) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$
b) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$
c) $\sqrt{6-\sqrt{2}}$
d) $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$
e) $\sqrt{9-2\sqrt{3}}$

198 *Questão 28 da prova 01/2016*
Em uma rua plana, o topo de uma torre é vista no ponto T por dois observadores A e B sob ângulos de 30° e 60° com a horizontal, respectivamente, como ilustrado na figura. A distância entre o observador B e a base da torre é de 200 metros no ponto Q onde a torre é perpendicular à rua. A distância entre os observadores, em metros, é de:



a) 300.
b) 400.
c) 500.
d) 600.
e) 700.

199 *Questão 24 da prova 04/2017*
Observe o arco de circunferência representado no esboço abaixo:



Sabe-se que:
I. Ele corresponde a metade de uma circunferência de raio 6 cm.
II. O ângulo $D\hat{B}E = 60°$.
A área não pintada no arco de circunferência apresentado no esboço abaixo, em cm^2, vale:
a) $36(4\pi\sqrt{3})cm^2$
b) $(144\pi - 264)cm^2$
c) $18(\pi - \sqrt{3})cm^2$
d) $18(4\pi - \sqrt{3})cm^2$
e) $36\sqrt{3}cm^2$

200 *Questão 30 da prova 01/2018 - corrigida*

A Figura 1, abaixo, representa uma escada com um corrimão com início em E e término em D medindo 2,40 metros. Para aproveitar melhor o espaço, esta escada será modificada, de modo que o seu início, que era no ponto A, passará a ser no ponto M, médio de AB, e a sua altura, que equivale ao comprimento do segmento CD, será mantida, como está representado na Figura 2. O ângulo BÂC mede 30°, os segmentos AE e BD são perpendiculares ao segmento AB, o corrimão representado pelo segmento DE é paralelo a AC e o corrimão representado pelo segmento DE' é paralelo à CM. Qual deverá ser o comprimento do corrimão na escada modificada, com início em E' e término em D, apresentado na Figura 2?

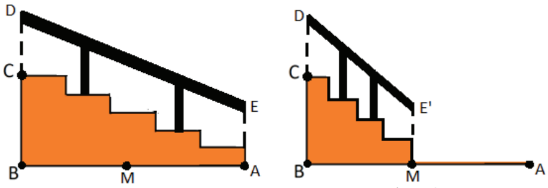
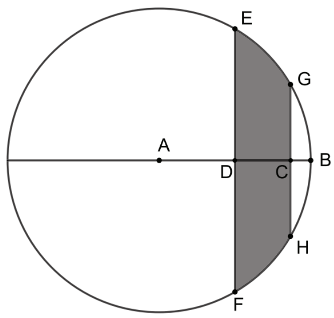


Figura 1 Figura 2

a) $0,7\sqrt{7} metros$
b) $0,6\sqrt{7} metros$
c) $0,9\sqrt{7} metros$
d) $1,2\sqrt{7} metros$
e) $1,5\sqrt{7} metros$

201 *Questão 30 da prova 01/2019*

A circunferência de centro A abaixo contém os pontos B, E, G, H e F. Além disso, sabe-se que as cordas GH e EF são perpendiculares ao segmento AB, o ponto D é ponto médio de AB, $\overline{AC} = 5\sqrt{3}mm$ e $\overline{AB} = 10mm$. A área sombreada é:



a) $25\pi mm^2$
b) $10\pi mm^2$
c) $\dfrac{25\pi}{4} mm^2$
d) $20\pi mm^2$
e) $\dfrac{25\pi}{3} mm^2$

202 *Questão 21 da prova 01/2020*
A que altura em relação ao solo, estará essa pessoa após cinco minutos do início da sua volta, considerando que a roda não parou após o seu embarque?
a) 10 m
b) 15 m
c) 20 m
d) 25 m
e) 30 m

A.3.15 Teorema de Pitágoras

203 *Questão 27 da prova 01/2013*
Três segmentos de reta congruentes de comprimento igual a 6 cm são arranjados no plano de modo que região central forma um triângulo equilátero de lado igual a 2 cm, mostrado na figura-1. Em seguida o extremo de cada segmento é ligado ao vértice do triângulo equilátero não pertencente a esse segmento e obtém-se um modelo de hélice para moedor de carne, esboçado na figura-2. O sentido de rotação da hélice é determinado pelo maior contato entre o corte da lâmina e a carne.

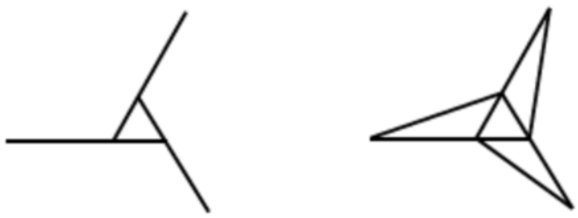
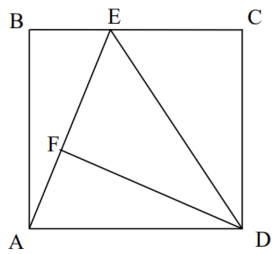


figura-1 figura-2

Desse modo, pode-se afirmar que o comprimento de corte de cada lâmina, em cm, é:
a) $\sqrt{3}$.
b) $\sqrt{12}$.
c) $\sqrt{24}$.
d) $2\sqrt{7}$.
e) $3\sqrt{6}$.

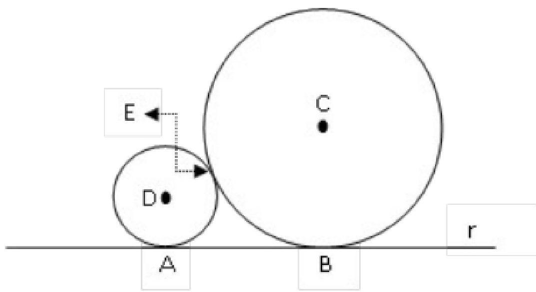
204 *Questão 22 da prova 01/2015*
O quadrado ABCD é formado por quatro triângulos retângulos, como mostra a figura. Se o ângulo BAE mede 30 graus e BE = 1cm, o segmento DE mede, em cm:



a) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$
b) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$
c) $\sqrt{6-\sqrt{2}}$
d) $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$
e) $\sqrt{9-2\sqrt{3}}$

205 *Questão 26 da prova 01/2016*

Os círculos de centros C e D são tangentes entre si no ponto E e têm raios iguais a 3cm e 1cm, respectivamente. A reta r tangencia os círculos nos pontos A e B, como mostra a figura. A medida do segmento AC, em cm, é igual a:



a) $\sqrt{11}$
b) $\sqrt{12}$
c) $\sqrt{18}$
d) $\sqrt{21}$
e) $\sqrt{24}$

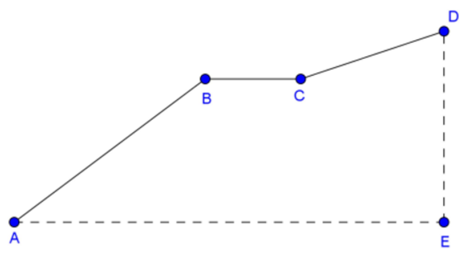
206 *Questão 22 da prova 04/2017*

Juca esqueceu o copo que usa para tomar água na porta da escola que está localizada no ponto A. Ele, nesse momento, se encontra no ponto D onde está o ponto de ônibus onde pega o ônibus que usa para ir para sua casa. Juca precisa ir até a porta da escola e voltar a tempo de pegar o ônibus que passa em 15 minutos. No esboço abaixo está representado o menor caminho de A para D passando por B e C que Juca deve fazer para pegar o copo e voltar por esse mesmo caminho para pegar o ônibus para sua casa. Qual o valor, em metros, desse trajeto? (Considere $\sqrt{2} = 1,4$, apenas nessa questão)

Sabe-se que:

I. $\overline{AE} = 3600cm$; $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ m ; $\overline{BC} = 4000mm$ e $\overline{DE} = 250dm$.

II. $B\hat{A}E = 45°$; $A\hat{E}D = 90°$



III. O segmento $\overline{BC}$ é paralelo ao segmento $\overline{AE}$.

a) $18m$.

b) $45m$.

c) $49m$.

d) $58m$.

e) $90m$.

207 *Questão 23 da prova 04/2017*

Analise as afirmativas abaixo.

I. Se r é o raio do círculo circunscrito a um hexágono regular então o apótema m desse hexágono vale $m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

II. Se a hipotenusa de um triângulo retângulo mede 4cm e um dos catetos mede 3cm o outro cateto mede 5cm.

III. $\sqrt{16+25} = 4+5$.

IV. O perímetro de uma circunferência de raio r vale $2\pi r$

Se "C" significa que a afirmativa está correta e "E" que ela está errada, assinale alternativa que representa a sequência correta do item "I" ao item "IV".

a) CCEE

b) CEEC

c) EECC

d) EEEC

e) CECE

208 *Questão 26 da prova 01/2018*

Uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Qual a distância, no plano cartesiano, do ponto sobre o gráfico de **f** de abcissa 0 (zero) para o ponto de abcissa 4?

a) 1.

b) $3\sqrt{5}$.

c) $\sqrt{41}$.

d) 7.

e) $4\sqrt{2}$.

209 *Questão 30 da prova 01/2018 - corrigida*
A Figura 1, abaixo, representa uma escada com um corrimão com início em E e término em D medindo 2,40 metros. Para aproveitar melhor o espaço, esta escada será modificada, de modo que o seu início, que era no ponto A, passará a ser no ponto M, médio de AB, e a sua altura, que equivale ao comprimento do segmento CD, será mantida, como está representado na Figura 2. O ângulo BÂC mede 30°, os segmentos AE e BD são perpendiculares ao segmento AB, o corrimão representado pelo segmento DE é paralelo a AC e o corrimão representado pelo segmento DE' é paralelo à CM. Qual deverá ser o comprimento do corrimão na escada modificada, com início em E' e término em D, apresentado na Figura 2?

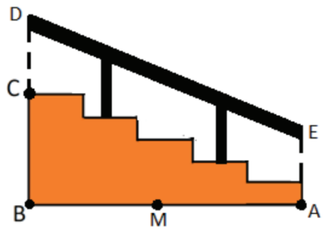


Figura 1

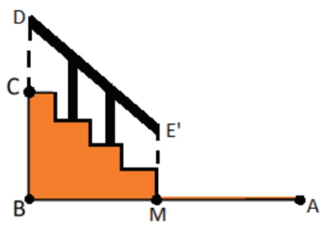
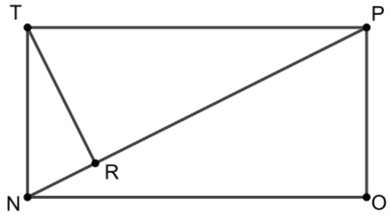


Figura 2

a) $0,7\sqrt{7} metros$
b) $0,6\sqrt{7} metros$
c) $0,9\sqrt{7} metros$
d) $1,2\sqrt{7} metros$
e) $1,5\sqrt{7} metros$

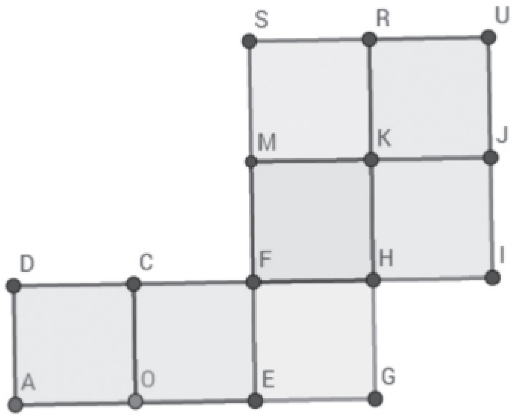
210 *Questão 22 da prova 01/2019*
A diagonal PN do retângulo $TPON$ na figura abaixo é perpendicular à TR. Sabendo que $\overline{ON} = 6\sqrt{2}$ e $\overline{PN} = 4\sqrt{5}$, o segmento NR mede



a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
b) $4\sqrt{\dfrac{96}{15}\sqrt{15}}$.
c) $\sqrt{30\sqrt{31}}$.
d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
e) $4\sqrt{3}$.

211 *Questão 16 da prova 01/2019*

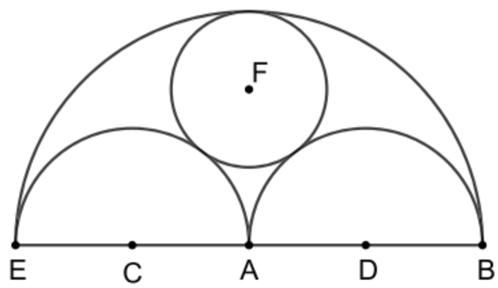
Na figura abaixo, *SRKM*, *MKHF*, *KJIH*, *RUJK*, *FHGE*, *CFEO* e *DCOA* são quadrados e $\overline{AU} = 26cm$. Dos valores abaixo, assinale o que mais se aproxima da área do polígono *ADFSUIHGO*, em cm².



a) $127,75$.
b) $165,90$.
c) $189,28$.
d) $215,32$.
e) $319,48$.

212 *Questão 28 da prova 01/2019*

As três semicircunferências da figura abaixo tangenciam a circunferência de centro F e raio r. Sabe-se que C, D e A são os centros das três semicircunferências. Se $\overline{AE} = \overline{AB} = R$, então a medida de r é igual a:



a) $\dfrac{R}{3}$.
b) $\dfrac{R}{2}$.
c) $\dfrac{R\sqrt{2}}{3}$.
d) $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.
e) $\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.

213 *Questão 27 da prova 01/2018*

A diferença entre os dois menores lados de um triângulo retângulo, inscrito em uma circunferência com 8,5 cm de raio, é 7 cm. Determine o perímetro deste triângulo.

a) $28cm$

b) $21 + 4\sqrt{17}cm$

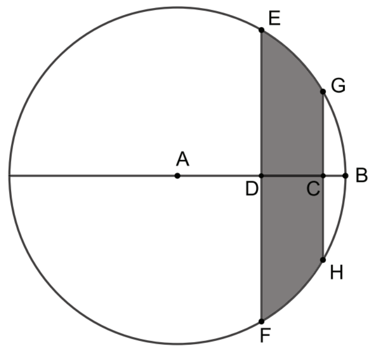
c) $7 + 6\sqrt{31}cm$

d) $8,5 + 7\sqrt{17}cm$

e) $40cm$

214 *Questão 30 da prova 01/2019*

A circunferência de centro A abaixo contém os pontos B, E, G, H e F. Além disso, sabe-se que as cordas GH e EF são perpendiculares ao segmento AB, o ponto D é ponto médio de AB, $\overline{AC} = 5\sqrt{3}mm$ e $\overline{AB} = 10mm$. A área sombreada é:



a) $25\pi mm^2$

b) $10\pi mm^2$

c) $\dfrac{25\pi}{4}mm^2$

d) $20\pi mm^2$

e) $\dfrac{25\pi}{3}mm^2$

A.4 Grandezas e Medidas

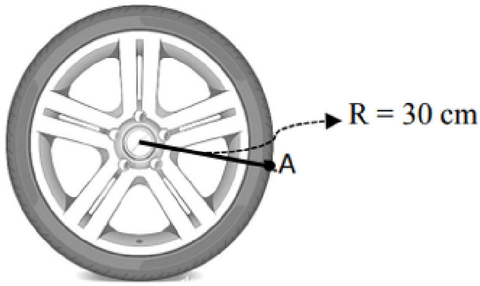
A.4.1 Problemas envolvendo grandezas de comprimento, massa, tempo, área, capacidade e volume

215 *Questão 24 da prova 01/2013*

Durante uma viagem de ônibus um passageiro observou que todos os 45 assentos estavam ocupados e ainda havia 35 pessoas que viajavam em pé. Sabendo que todos os passageiros tinham o mesmo destino ele sugeriu um esquema para a utilização dos assentos de modo que todos os passageiros pudessem sentar-se pelo mesmo período de tempo até o final da viagem. Sabendo-se que o esquema iniciou quando faltavam quatro horas para o destino, pode-se dizer que o tempo de assento para cada passageiro, em minutos, é de:

a) 110
b) 115
c) 120
d) 125
e) 135

216 *Questão 18 da prova 01/2014*
A figura abaixo representa a roda de um carro (aro e pneu) que possui raio R = 30 cm. Sabe-se que essa roda dá 100 voltas por minuto. Nestas condições, a distância em cm, percorrida pelo ponto A em quatro segundos é igual a:



a) 100π.
b) 200π.
c) 300π.
d) 400π.
e) 500π.

217 *Questão 17 da prova 01/2015*
Um reservatório de água paralelepípedo tem capacidade de $1,08m^3$. Uma torneira com vazão igual a 18 litros por minuto é ligada e após 20 minutos uma segunda torneira de vazão igual a 22 litros por minuto também é ligada, e as duas enchem o reservatório, que inicialmente estava vazio. Nestas condições, o tempo em minutos, necessário para encher o reservatório completamente é de: (dado: $1m^3 = 1000$ litros)
a) 26.
b) 30.
c) 34.
d) 38.
e) 42.

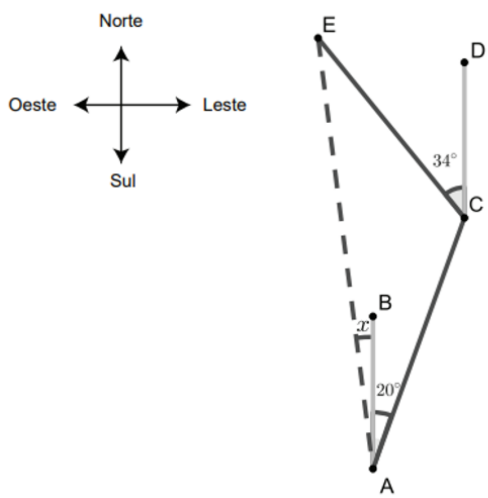
218 *Questão 29 da prova 04/2017*
Dois ciclistas, digamos ciclista A e ciclista B, partem de bicicleta, em direção a um restaurante distante 144 km do ponto do qual partiram. O ciclista A percorre 2 km a mais por hora do que o ciclista B e chega ao destino 1 h antes do que o ciclista B. Supondo que mantiveram a velocidade constante durante todo o percurso o produto das velocidades (em km/h) destes dois ciclistas é:

a) 168.
b) 224.
c) 288.
d) 320.
e) 400.

219 *Questão 17 da prova 01/2020*
Dados um hexágono regular cuja medida do lado é 6cm, um quadrado com 44cm de perímetro, um triângulo retângulo cujos catetos medem 9cm e 12cm; e um triângulo equilátero, cujo lado mede 8cm, analise as afirmações abaixo e assinale a **ÚNICA** verdadeira.
Alternativas:
a) Os dois triângulos têm perímetros iguais.
b) A medida da área do hexágono é igual ao quádruplo da medida da área do triângulo equilátero.
c) As medidas das áreas do quadrado e do triângulo retângulo são iguais.
d) A medida da área do hexágono é igual a medida da área do triângulo retângulo.
e) A soma das medidas das áreas do hexágono e do triângulo equilátero é igual a $70\sqrt{3}cm^2$

A.4.2 Medida de um ângulo

220 *Questão 16 da prova 01/2020*
A figura mostra o deslocamento de um avião que decolou na cidade A com destino a cidade E, fazendo escala na cidade C. As distâncias entre as cidades A e C e C e E são, ambas, iguais a 500km e, ambos os trechos, são retilíneos. Ao decolar da cidade A, o avião seguiu na direção de 20° à direita em relação ao norte (que está representado pelo segmento AB). Ao decolar da cidade C o avião seguiu na direção de 34° à esquerda em relação ao norte (desta vez representado pelo segmento CD).



Se o avião tivesse decolado na cidade A em direção a cidade E sem fazer escala na cidade C, descrevendo o caminho representado pelo segmento de reta tracejado AE, qual seria o ângulo x desse caminho em relação ao norte?
a) 5°.
b) 6°.
c) 7°.
d) 8°.
e) 9°.

221 *Questão 18 da prova 01/2020*
Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D o pé da perpendicular baixada de A sobre BC. Sabendo que o ângulo $O\hat{A}C = 37°$, determine a medida do ângulo $D\hat{A}B$.
a) 23°.
b) 33°.
c) 37°.
d) 47°.
e) 53°.

222 *Questão de autoria própria*
A medida aproximada de um ângulo de 0,28 radianos é:
a) 12°.
b) 14°.
c) 16°.
d) 18°.
e) 20°.

A.4.3 Cálculo de perímetro

223 *Questão 23 da prova 01/2016*
A área e o perímetro de um retângulo medem $28cm^2$ e 22 cm, respectvamente. A diagonal desse retângulo mede, em cm:
a)65
b)$\sqrt{50}$
c)50
d) $\sqrt{65}$
e)6

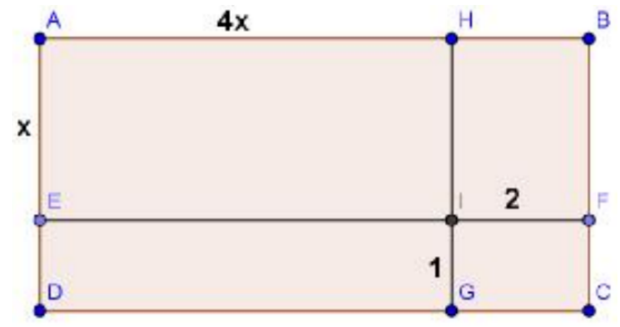
224 *Questão 30 da prova 01/2012*

Considere R sendo o conjunto dos números reais. Na figura a seguir tem-se:

i. o retângulo AHIE de lados de medida x e 4x metros, respectivamente, onde $x \in R$;

ii. a área do retângulo ABCD é $12m^2$;

iii. os lados FC e CG, do retângulo FCGI, medem 1 e 2 metros, respectivamente.



O perímetro, em metros, do retângulo AHIE vale:

a) 4

b) 12

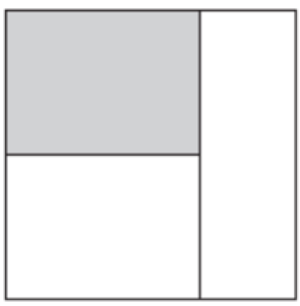
c) 14

d) 5

e) 10

225 *Questão 30 da prova 01/2014*

A figura abaixo representa um quadrado de lado igual a $20cm$, dividido em três retângulos que possuem mesmo perímetro. A área do retângulo sombreado, em cm^2, mede:



a) 100.

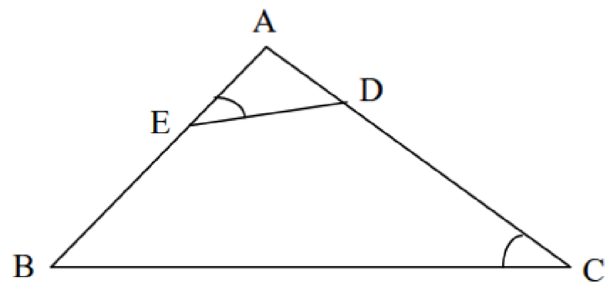
b) 125.

c) 150.

d) 225.

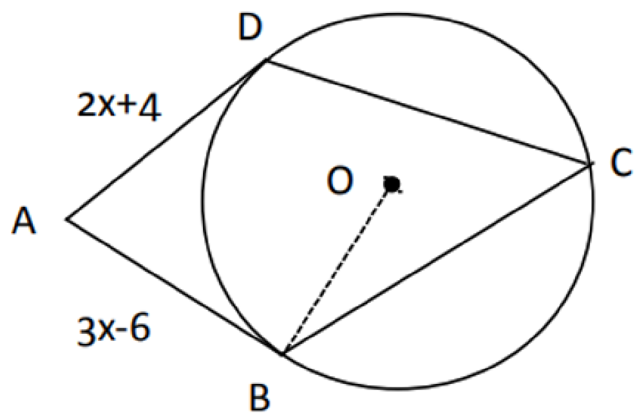
e) 300.

226 *Questão 21 da prova 01/2015*
Os triângulos ABC e ADE, representados na figura, são semelhantes. Os ângulos AED e ACB são congruentes. Se BC = 24cm, AC = 20cm, AD = 7cm e AE = 5cm, o perímetro do quadrilátero BCDE, em centímetros, é:



a) 56
b) 66
c) 76
d) 86
e) 96

227 *Questão 30 da prova 01/2016*
A figura mostra um ponto A no exterior do círculo de centro em O e raio igual a 10. Os segmentos AB e AD são tangentes ao círculo nos pontos B e D e, medem, respectivamente, $2x + 4$ e $3x - 6$. Se o ângulo inscrito BCD mede 30°, então o perímetro do triângulo ABD é igual a:



a) 10.
b) 24.
c) 38.
d) 44.
e) 58.

228 *Questão 23 da prova 04/2017*

Analise as afirmativas abaixo.

I. Se r é o raio do círculo circunscrito a um hexágono regular então o apótema m desse hexágono vale $m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

II. Se a hipotenusa de um triângulo retângulo mede 4cm e um dos catetos mede 3cm o outro cateto mede 5cm.

III. $\sqrt{16+25} = 4+5$.

IV. O perímetro de uma circunferência de raio r vale $2\pi r$

Se "C" significa que a afirmativa está correta e "E" que ela está errada, assinale alternativa que representa a sequência correta do item "I" ao item "IV".

a) CCEE

b) CEEC

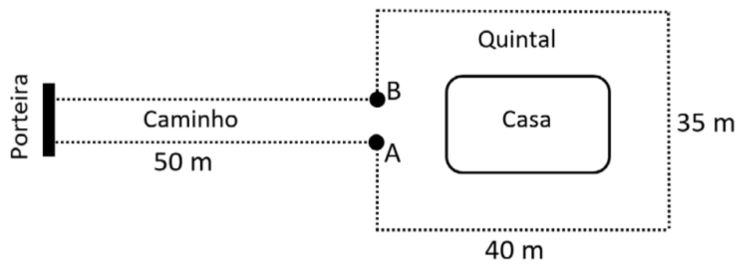
c) EECC

d) EEEC

e) CECE

229 *Questão 21 da prova 84/2022*

O Sr. Paulo comprou um sítio e pretende cercar, com palmeiras imperiais, o quintal em volta da casa e todo o caminho desde a porteira até a casa, representados por linhas pontilhadas na figura a seguir. Ele pretende começar a plantar da porteira, com palmeiras espaçadas de 5 metros em 5 metros, ao longo do caminho e em volta do quintal. Na junção do caminho com o quintal, trecho AB, ele deixará livre o espaço para possibilitar a passagem. Sabendo que o caminho tem dimensões de 5 metros por 50 metros e que o quintal tem dimensões de 40 metros por 35 metros, quantas mudas de palmeiras, no mínimo, ele precisará plantar para cobrir todo o perímetro pedido?



a) 56

b) 54

c) 50

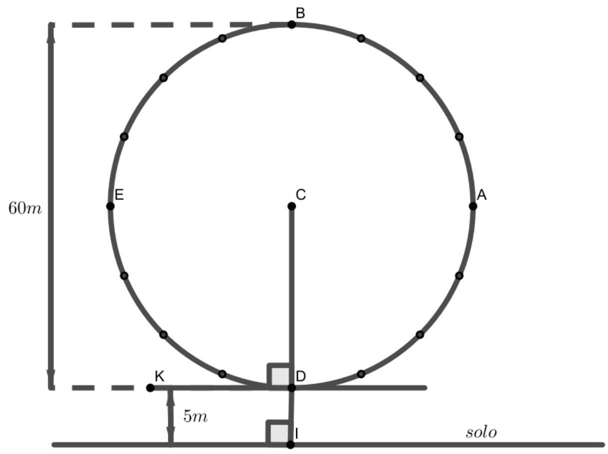
d) 48

e) 44

A.4.4 Comprimento da circunferência

230 *Questão 22 da prova 01/2020*

A figura abaixo apresenta o esquema de uma roda gigante. Esta roda gigante tem 60 metros de diâmetro externo e seu centro (ponto C) está localizado a 35 metros do chão. A estrutura que faz a sustentação, representada pelo segmento CI, é perpendicular ao solo. A roda gigante gira no sentido anti-horário a uma velocidade constante e faz uma volta completa, sem parar, em exatamente seis minutos. Uma pessoa embarca e inicia a sua volta na roda gigante no ponto de embarque D.



Quantos metros percorreu essa pessoa após cinco minutos do início da sua volta, considerando que a roda não parou após o seu embarque?

a) $10\pi m$

b) $\dfrac{50\pi}{3}m.$

c) $50\pi m$

d) $\dfrac{175\pi}{3}m$

e) $60\pi m$

231 *Questão 22 da prova para o cargo de Mecânico de Veículos Pesados do Concurso 01/2023 da Prefeitura de Santa Bárbara d'Oeste-SP*

O Código Florestal considera como área de preservação a região circular formada em torno de uma nascente, com raio de 50 (cinquenta) metros. Considerando que o cálculo do comprimento da circunferência pode ser feito através da equação: comprimento $=2 \cdot Pi \cdot raio$, e considerando Pi = 3, qual o valor do comprimento da circunferência, em metros, da área de preservação ambiental em torno de uma nascente?

a) 50

b) 150

c) 200

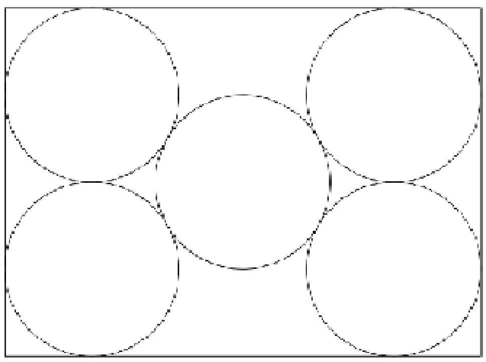
d) 300

e) 450

232 *Questão de autoria própria*
Um paisagista deseja cercar um jardim circular de diâmetro 6 metros com uma cerca viva que custa R$ 15,00 por metro linear. Considerando $\pi = 3,14$, o valor gasto para cercar esse jardim será:
a) $R\$ \ 105,97$.
b) $R\$ \ 141,30$.
c) $R\$ \ 211,95$.
d) $R\$ \ 282,60$.
e) $R\$ \ 423,90$.

A.4.5 Cálculo de áreas

233 *Questão 26 da prova 01/2011*
As circunferências da figura abaixo são tangentes e de raio igual a 3 cm. Nessas condições, a área do retângulo mostrado na figura abaixo, em cm^2, é:

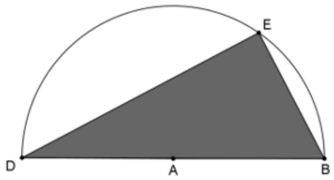


a) $72(1+\sqrt{3})$
b) $48(1+\sqrt{3})$
c) $72\sqrt{3}$
d) $48\sqrt{3}$
e) 216

234 *Questão 18 da prova 01/2013*
Os lados de um retângulo medem $b^2 - 4$ e $\dfrac{1}{b+2}$. A área desse retângulo, para valores de $b > 10$, vale:
a) $b - 4$
b) $b + 4$
c) $b - 2$
d) $b + 2$
e) $b^2 - 4$

235 *Questão 24 da prova 04/2017*

Observe o arco de circunferência representado no esboço abaixo:



Sabe-se que:

I. Ele corresponde a metade de uma circunferência de raio 6 cm.

II. O ângulo $D\hat{B}E = 60°$.

A área não pintada no arco de circunferência apresentado no esboço abaixo, em cm^2, vale:

a) $36(4\pi\sqrt{3})cm^2$

b) $(144\pi - 264)cm^2$

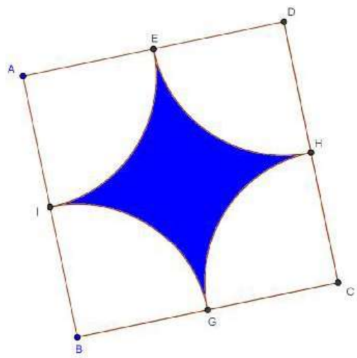
c) $18(\pi - \sqrt{3})cm^2$

d) $18(4\pi - \sqrt{3})cm^2$

e) $36\sqrt{3}cm^2$

236 *Questão 18 da prova 01/2012 - corrigida*

Observe a figura a seguir.



Nessa figura:

i. os arcos IE, IG, HG e HE medem ambos o 90°.

ii. os lados do quadrado ABCD tem medida $4m$.

iii. os pontos E, I, H e G dividem os seguimentos AD, AB, DC e BC, respectivamente, em partes iguais.

Nessas condições a área sombreada IEHG, em m^2 , é:

a) $16(4 - \pi)$.

b) 16.

c) $4(4 - \pi)$.

d) $(16 - \pi)$.

e) $4 + \pi$.

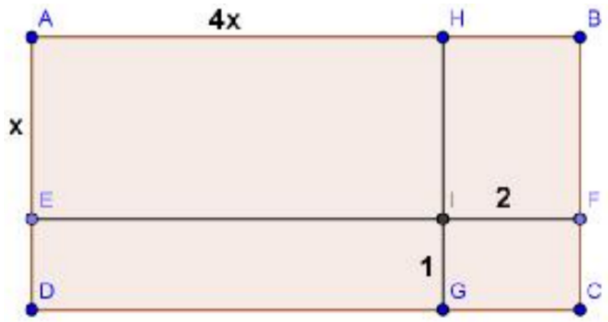
237 *Questão 30 da prova 01/2012*

Considere R sendo o conjunto dos números reais. Na figura a seguir tem-se:

i. o retângulo AHIE de lados de medida x e 4x metros, respectivamente, onde $x \in R$;

ii. a área do retângulo ABCD é $12m^2$;

iii. os lados FC e CG, do retângulo FCGI, medem 1 e 2 metros, respectivamente.



O perímetro, em metros, do retângulo AHIE vale:

a) 4

b) 12

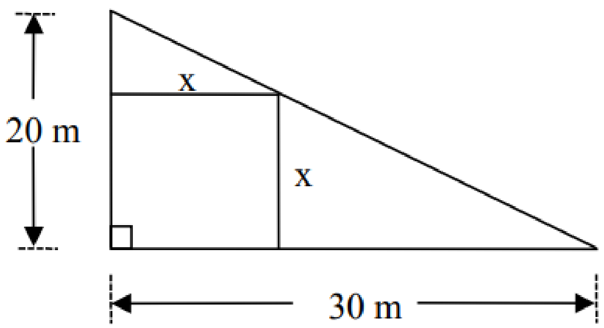
c) 14

d) 5

e) 10

238 *Questão 20 da prova 01/2014*

A figura abaixo representa um terreno onde se deseja construir uma casa na região demarcada pelo quadrado. O restante do terreno será reservado para jardim e área de lazer. Pode-se afirmar que a área, em m^2, reservada para construção da casa é de:



a) 81

b) 100

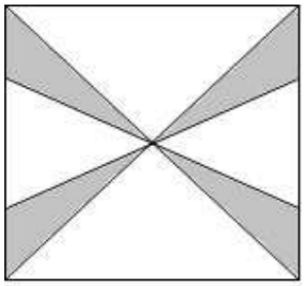
c) 121

d) 144

e) 169

239 *Questão 16 da prova 01/2015*

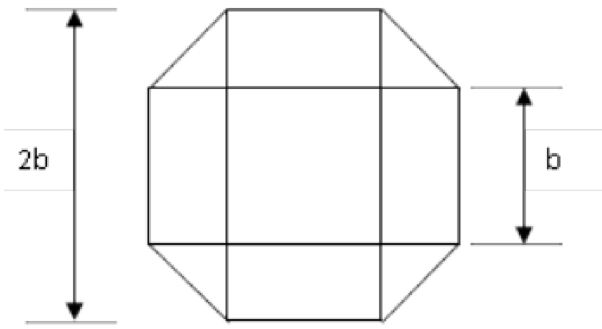
No interior de um quadrado de lado igual a 8 cm, desenhou-se uma hélice de quatro pás triangulares e idênticas, como mostra a figura. Se o menor lado de uma pá mede um centímetro, a fração que representa a área da hélice em relação à área do quadrado é:



a) $\frac{1}{32}$
b) $\frac{1}{16}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{2}$

240 *Questão 24 da prova 01/2016*

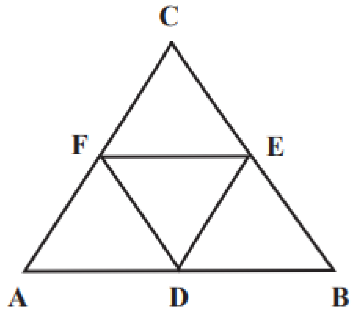
O octógono convexo da figura foi construído a partir de dois retângulos concêntricos e congruentes de lados b e 2b. Se os lados congruentes desses retângulos são ortogonais, a área do octógono tem medida igual a:



a) $2b^2$
b) $5b^2$
c) $\frac{5b^2}{2}$
d) $7b^2$
e) $\frac{7b^2}{2}$

241 *Questão 24 da prova 01/2018*

Considere ABC um triângulo equilátero com lado de medida a metros. Ao traçar os segmentos EF, ED e DF, sendo D, E e F os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, obtêm-se o triângulo DEF, como mostra a figura.



Abaixo, tem-se cinco afirmações a respeito desta construção.
I – O triângulo DEF é equilátero.
II – O comprimento, em metro, do lado DE do triângulo DEF é a terça parte do comprimento de um lado de ABC.
III – A área, em metro quadrado, do triângulo DEF, é igual à metade da área, em metro quadrado, do triângulo ABC.
IV – Os triângulos ADF e DBE têm a mesma área.
V – A área do triângulo DEF, em função de a, em metro quadrado, é igual a $\dfrac{a\sqrt{3}}{16}$
Destas, podemos afirmar que
a) todas as afirmações são verdadeiras.
b) apenas a afirmação I é verdadeira.
c) apenas as afirmações I e II são falsas.
d) apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.
e) apenas as afirmações I, IV e V são verdadeiras.

242 *Questão 17 da prova 01/2020*

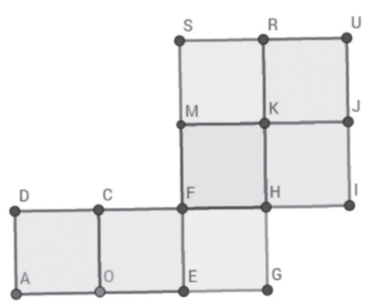
Dados um hexágono regular cuja medida do lado é 6cm, um quadrado com 44cm de perímetro, um triângulo retângulo cujos catetos medem 9cm e 12cm; e um triângulo equilátero, cujo lado mede 8cm, analise as afirmações abaixo e assinale a **ÚNICA** verdadeira.
Alternativas:
a) Os dois triângulos têm perímetros iguais.
b) A medida da área do hexágono é igual ao quádruplo da medida da área do triângulo equilátero.
c) As medidas das áreas do quadrado e do triângulo retângulo são iguais.
d) A medida da área do hexágono é igual a medida da área do triângulo retângulo.
e) A soma das medidas das áreas do hexágono e do triângulo equilátero é igual a $70\sqrt{3}cm^2$

243 *Questão 20 da prova 01/2013*
Um triângulo equilátero tem lado de medida 5cm. Se esse triângulo tiver todos os seus lados aumentados de 20% sua área aumentará em:
a) 34.
b) 44.
c) 45.
d) 48.
e) 55.

244 *Questão 23 da prova 01/2016*
A área e o perímetro de um retângulo medem $28cm^2$ e 22 cm, respectvamente. A diagonal desse retângulo mede, em cm:
a)65
b)$\sqrt{50}$
c)50
d) $\sqrt{65}$ e)6

245 *Questão 27 da prova 01/2016*
Em que condição dois triângulos ABC e ABD têm medidas de áreas iguais?
a)Para todo ponto C e D do plano
b)Quando AC e BD são congruentes
c)Se AB é paralelo a CD
d)Unicamente quando $C \equiv D$
e)Distintas para todo C e D do plano

246 *Questão 16 da prova 01/2019*
Na figura abaixo, *SRKM*, *MKHF*, *KJIH*, *RUJK*, *FHGE*, *CFEO* e *DCOA* são quadrados e $\overline{AU} = 26cm$. Dos valores abaixo, assinale o que mais se aproxima da área do polígono *ADFSUIHGO*, em cm².



a) $127,75$.
b) $165,90$.
c) $189,28$.
d) $215,32$.
e) $319,48$.

247 *Questão 21 da prova 01/2019*

Leia as afirmações a seguir.

I - O perímetro P de um quadrado de lado L é diretamente proporcional a L.

II - A área A de um quadrado de lado L é diretamente proporcional a L.

III - A área de um retângulo de base 10 cm é diretamente proporcional à sua altura.

IV - A altura de um retângulo de área $100cm^2$ é inversamente proporcional à sua base.

V - O comprimento de uma circunferência é inversamente proporcional à medida do seu raio.

VI A área de um círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio.

Analisando as sentenças acima, o número de afirmações FALSAS é:

a) 2.

b) 3.

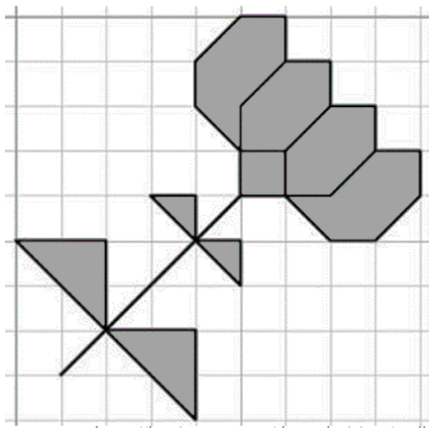
c) 4.

d) 5.

e) 6.

248 *Questão 14 da prova 84/2022*

Supondo que a malha quadriculada a seguir é formada por quadrados de lados iguais a 2 cm, qual a área ocupada pela flor nesta malha?



a) 38 cm^2

b) 72 cm^2

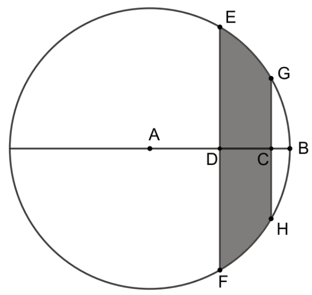
c) 76 cm^2

d) 48 cm^2

e) 36 cm^2

249 *Questão 30 da prova 01/2019*

A circunferência de centro A abaixo contém os pontos B, E, G, H e F. Além disso, sabe-se que as cordas GH e EF são perpendiculares ao segmento AB, o ponto D é ponto médio de AB, $\overline{AC} = 5\sqrt{3}mm$ e $\overline{AB} = 10mm$. A área sombreada é:



a) $25\pi mm^2$

b) $10\pi mm^2$

c) $\frac{25\pi}{4}mm^2$

d) $20\pi mm^2$

e) $\frac{25\pi}{3}mm^2$

250 *Questão 19 da prova 01/2020*

Considere as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -f(x)$. Determine a área do quadrilátero ABCD, sabendo que A e C são os zeros da função f, B é ponto de mínimo de f e D é ponto máximo de g.

a) $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{2}$.

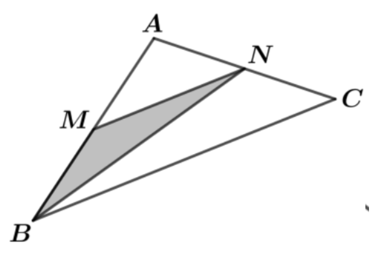
c) $\frac{3}{4}$.

d) 1.

e) 2.

251 *Questão 65 do Vestibular UNICAMP 2019).*

No triângulo ABC exibido na figura a seguir, M é o ponto médio do lado AB, e N é o ponto médio do lado AC. Se a área do triângulo MBN é igual a t, então a área do triângulo ABC é igual a:



a) $2t$.

b) $3t$.

c) $2\sqrt{3}t$.

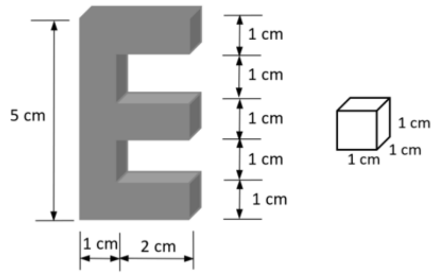
d) $4t$.

e) $3\sqrt{2}t$.

A.4.6 Medidas de capacidade

252 *Questão 16 da prova 84/2022 - adaptada*

Para se montar a letra E da figura a seguir, que possui dimensões 5 cm de altura, 3 cm de largura e 1 cm de espessura, foram usados alguns blocos cúbicos de lados medindo 1 cm, como o mostrado no detalhe ao lado da letra E.



Sabendo que cada bloco do detalhe mostrado tem $1cm^3$ de volume, qual o volume total da letra E, em cm^3, após sua montagem?
a) $10cm^2$.
b) $11cm^2$.
c) $12cm^2$.
d) $13cm^2$.
e) $14cm^2$.

253 *Questão de autoria própria*

O professor Patrik deseja construir uma piscina retangular com dimansões 4m x 5m em sua residência, sabendo que ele deseja que a capacidade máxima da piscina seja de 28000 litros, a profundidade da mesma deve ser:
a) $1,0m$.
b) $1,2m$.
c) $1,4m$.
d) $1,6m$.
e) $1,8m$.

254 *Questão de autoria própria*

Em um determinado dia na cidade de Aracrus/ES choveu 32 mm, sabendo que um fazendeiro possui uma fazenda de 5 km^2, a quantidade de água que caiu no sua fazenda foi de:
a) 160 000 *litros*.
b) 1 600 000 *litros*.
c) 16 000 000 *litros*.
d) 160 000 000 *litros*.
e) 1 600 000 000 *litros*.

A.4.7 Transformação de unidades - sistema métrico decimal

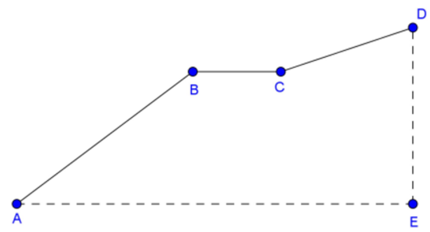
255 *Questão 22 da prova 04/2017*

Juca esqueceu o copo que usa para tomar água na porta da escola que está localizada no ponto A. Ele, nesse momento, se encontra no ponto D onde está o ponto de ônibus onde pega o ônibus que usa para ir para sua casa. Juca precisa ir até a porta da escola e voltar a tempo de pegar o ônibus que passa em 15 minutos. No esboço abaixo está representado o menor caminho de A para D passando por B e C que Juca deve fazer para pegar o copo e voltar por esse mesmo caminho para pegar o ônibus para sua casa. Qual o valor, em metros, desse trajeto? (Considere $\sqrt{2} = 1,4$, apenas nessa questão)

Sabe-se que:

I. $\overline{AE} = 3600cm$; $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ m ; $\overline{BC} = 4000mm$ e $\overline{DE} = 250dm$.

II. $B\hat{A}E = 45°$; $A\hat{E}D = 90°$



III. O segmento $\overline{BC}$ é paralelo ao segmento $\overline{AE}$.

a) $18m$.

b) $45m$.

c) $49m$.

d) $58m$.

e) $90m$.

256 *Questão 12 da prova 84/2022*

A unidade de medida usada no armazenamento e transmissão de informações na computação é o Byte, que equivale a 8 bits, sendo este a base do sistema binário. O sistema se baseia nas potências de 2. Assim, de acordo com a tabela a seguir, um pen drive com uma memória de 10 KB, pode armazenar 10 x 1.024 Bytes = 10.240 Bytes = 81.920 bits.

Símbolo	Unidade de Medida	Relação	Nº de Caracteres
B	1 Byte	8 bits	1
KB	1 Kilobyte	1024 Bytes	2^{10}
MB	1 Megabyte	1024 Kilobytes	2^{20}
GB	1 Gigabyte	1024 Megabytes	2^{30}
TB	1 Terabyte	1024 Gigabytes	2^{40}

Se uma rede de internet pode transmitir 2.048 Kbps (2.048 kilobits por segundo), qual a velocidade em KBps (kilobytes por segundo) dessa rede?
a) 512
b) 256
c) 128
d) 32
e) 2

257 *Questão de autoria própria*
Pedro precisa contornar com barbante cinco figuras geométricas que estão desenhadas em um grande painel numa mostra de matemática. Essas figuras são:
Um triângulo com lados iguais a 60 cm, 70 cm e 80 cm
Um quadrado com lado igual a 750 mm
Um hexágono regular com lado igual a 0,5 m
Um octógono regular com lado igual a 4 dm
Um triângulo equilátero com lado igual a 0,055 dam
A figura que necessitará da maior quantidade de barbante é:
a) O triângulo escaleno
b) O quadrado
c) O hexágono regular
d) O octógono regular
e) O triângulo equilátero

A.5 Probabilidade e Estatística

A.5.1 Leitura e interpretação de gráficos, tabelas, infogramas e fluxogramas

258 *Questão 20 da prova 01/2011*
A tabela abaixo mostra a distribuição de frequência dos votos recebidos por cinco candidatos à coordenação do Grêmio Estudantil dados por três turmas de certa escola.

Candidatos	Votos		
	Turma 1	Turma 2	Turma 3
A	10	5	3
B	20	7	5
C	18	26	36
D	3	7	5
E	2	5	3
Total	53	50	52

Pode-se afirmar que:

a) o candidato A obteve total de 53 votos.

b) o candidato C obteve 8 vezes o total de votos do candidato E. c) os votos do candidato A mais os votos do candidato B superaram os votos recebidos pelo candidato C.

d) juntos, os candidatos A, B, D e E superaram os votos do candidato C.

e) os votos do candidato B superaram os votos do candidato D em exatamente 50%.

259 *Questão 24 da prova 01/2014*

Um supermercado oferece três tipos de extrato de tomate, cujos preços estão representados na seguinte tabela:

	A	B	C
Massa (gramas)	100	200	400
Preço (reais)	3,00	4,00	7,00

Para comprar 600 gramas do extrato de tomate neste supermercado, a opção mais econômica é:

a) 6A

b) 2A + 2B

c) B + C

d) 2A + C

e) 3B

260 *Questão 19 da prova 01/2015*

A tabela abaixo mostra a freqüência atual da distribuição de salários de uma Empresa.

Frequência	Salário em reais
8	730
6	850
4	1200
2	1500

Um valor de R$ 4.000,00 será distribuído igualmente entre os funcionários e, somado ao salário atual, representará o novo salário. Nestas condições, pode-se dizer que o menor salário, em reais, será de: a) 930,00

b) 1.137,00

c) 1.230,00

d) 1.270,00

e) 1.730,00

261 *Questão 16 da prova 01/2016*

Na tabela abaixo, estão representados os dados de uma pesquisa feita com 300 pessoas na praça de alimentação de um Shopping Center.

Gastos em reais	**Número de pessoas**
$8 \vdash 16$	50
$16 \vdash 24$	$\frac{x}{2}$
$24 \vdash 32$	$x + 25$
Total	?

Nesse Shopping Center da pesquisa, que porcentagem dos entrevistados gasta menos de R$24,00?

a) $\frac{125}{6}\%$

b) $\frac{125}{3}\%$

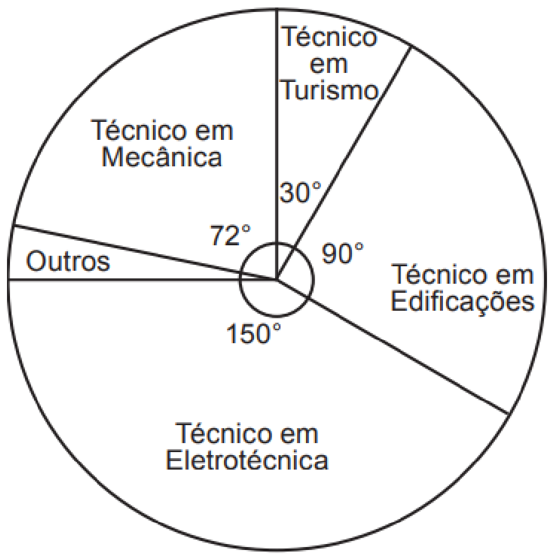
c) $\frac{5}{12}\%$

d) $\frac{125}{7}\%$

e) $\frac{15}{4}\%$

262 *Questão 29 da prova 01/2018*

O gráfico de setores abaixo apresenta os dados de uma entrevista realizada com 480 pessoas sobre a preferência de curso técnico. As medidas dos ângulos centrais respectivos aos setores estão destacadas na figura. Qual a quantidade de entrevistados prefere o curso de Técnico em Mecânica, sendo que cada pessoa optou por apenas um curso?



a) 88 entrevistados

b) 96 entrevistados

c) 112 entrevistados

d) 136 entrevistados

e) 140 entrevistados

263 *Questão 21 da prova 04/2017*

Um grupo de 100 famílias foi entrevistado sobre sua expectativa de uso do décimo terceiro para compras natalinas em 2016. A Tabela abaixo mostra o percentual do décimo terceiro que elas pretendem usar nessas compras.

Percentual de gasto do décimo terceiro (%)	Número de Famílias
0	35
25	15
50	18
65	22
100	10
Soma	100

O percentual médio de gastos do décimo terceiro nesse grupo para as compras natalinas em 2016 será de:

a) 15%.

b) 20%.

c) 22%.

d) $30,55\%$.

e) $37,05\%$.

264 *Questão 27 da prova 01/2019*

As inscrições para um congresso de Matemática que ocorrerá no próximo final de semana foram realizadas em três etapas distintas entre os meses de agosto e outubro. A tabela abaixo apresenta o valor de inscrição e o número de inscritos pagantes em cada uma das três etapas.

Etapa	Número de inscritos pagantes	Valor da inscrição
1	140	R$ 70,00
2	110	R$ 100,00
3	325	R$ 120,00

Além desses, 8% dos inscritos ficaram isentos da taxa de inscrição. Quantos são os inscritos que não pagaram a inscrição (isentos) ou que pagaram um valor abaixo da média dos valores pagos pelos inscritos nas três etapas?

a) 140.

b) 190.

c) 250.

d) 270.

e) 300.

265 *Questão 28 da prova 01/2020*

A tabela abaixo apresenta o número de alunos frequentando cada série em uma certa cidade:

1º ano	2646
2º ano	2394
3º ano	1890

Deseja-se contratar "tutores" para acompanhar "grupos de alunos tutorados", com as seguintes condições:

- Todos os grupos devem ter a mesma quantidade de alunos por série e cada aluno deve pertencer a um único grupo.
- Cada grupo deverá ter exatamente um tutor.
- Deve-se contratar o número mínimo de tutores.

Quantos tutores devem ser contratados?

a) 14

b) 55

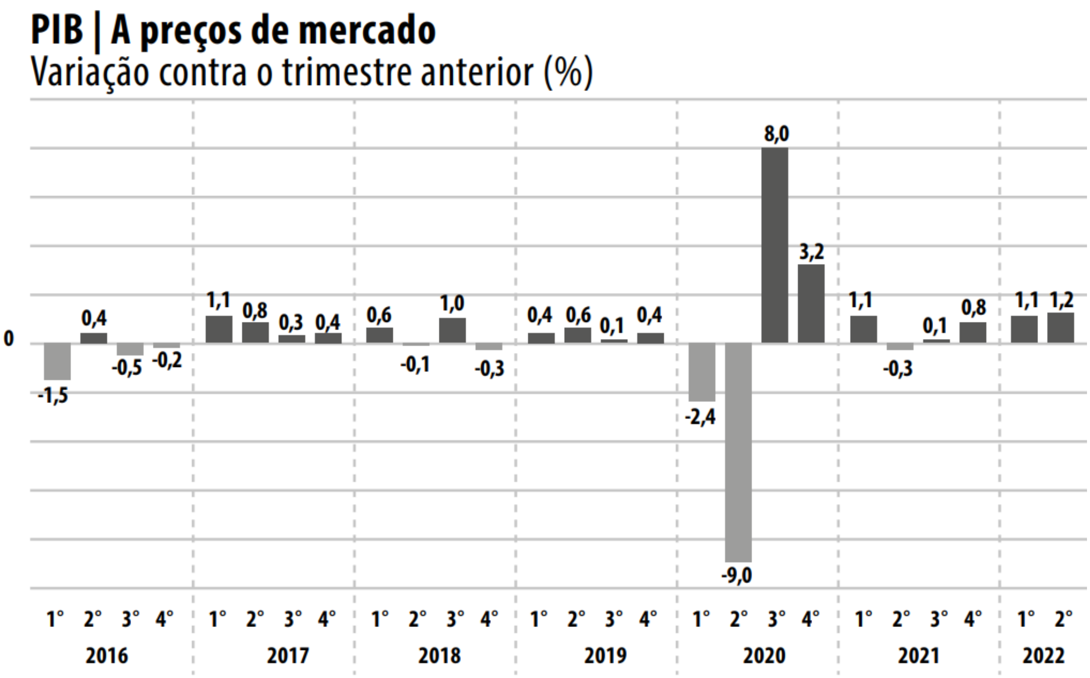
c) 88

d) 126

e) 189

266 *Questão 19 da prova 84/2022*

A figura a seguir mostra os dados da variação do PIB (Produto Interno Bruto) do Brasil desde 2016, medidos trimestralmente, segundo pesquisa feita pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).



Dessa forma, analisando apenas os dados dos anos de 2020 a 2022, a diferença percentual entre o maior e o menor valor medido nesse período é igual a:
a) $7,9\%$.
b) $8,3\%$.
c) $7,7\%$.
d) -1%.
e) 17%.

A.5.2 Medidas de tendência central: média, moda e mediana

267 *Questão 16 da prova 01/2011*
Ana, Beatriz e Caio conversavam sobre as notas que haviam obtido nas seis provas de Matemática ao longo do ano de 2010. As notas de cada prova variavam entre 0 e 10 e tinham o mesmo peso. As notas eram:
Ana = 2, 3, 5, 7, 7, 8
Beatriz = 3, 4, 4, 4, 8, 9
Caio = 1, 3, 5, 7, 8, 9
Com base unicamente nessas informações, pode-se afirmar que:
a) a nota modal do conjunto das 18 notas é 7.
b) a mediana das notas de Beatriz é 4.
c) o conjunto das 18 notas possui 3 modas.
d) a média aritmética das notas de Ana é maior que a média aritmética das notas de Beatriz.
e) a mediana das notas de Caio é diferente da mediana das notas de Ana.

268 *Questão 17 da prova 01/2012*
O quadro a seguir informa a quantidade de cartas e a massa de cada carta enviada por uma empresa num determinado dia.

Massa de cada carta (gramas)	200	143	223	208	125	232	182	243	249	217	238	84
Quantidade enviada	2	1	3	5	1	3	2	3	2	3	3	2

O valor modal da massa, em gramas, da carta que essa empresa enviou nesse dia é
a) 206.
b) 249.
c) 212.
d) 208.
e) 84.

269 *Questão 17 da prova 01/2011*

Em uma rua na cidade de Colatina, moram seis crianças cujas idades no ano de 2010 são 9, 10, 10, 11, 15 e 16. Em 2011, após todas as crianças já terem feito aniversário, pode-se afirmar que o novo conjunto das idades terá, em relação a 2010:

a) média aritmética inalterada.

b) mediana aumentada em mais de seis unidades.

c) moda igual a 11,5.

d) média aritmética aumentada em uma unidade.

e) mediana igual a 11.

270 *Questão 19 da prova 01/2013*

João deseja comprar uma pasta nova para guardar suas atividades escolares. A tabela a seguir mostra o preço da pasta encontrado em 8 papelarias pesquisadas.

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
R$ 26,50	R$ 27,50	R$ 25,50	R$ 26,00	R$ 27,00	R$ 23,40	R$ 25,00	R$ 25,10

Feita essa pesquisa João resolveu negociar com a papelaria de preço P2 uma redução no preço pesquisado. João apresentou sua planilha com os dados da pesquisa e ficou acordado que ele pagaria nessa papelaria o preço mediano pesquisado. João fez uma economia de:

a) $R\$1,75$.

b) $R\$1,50$.

c) $R\$1,25$.

d) $R\$1,00$.

e) $R\$0,75$.

271 *Questão 17 da prova 01/2014*

Os dados da tabela abaixo se referem ao consumo de energia elétrica de um condomínio residencial, em quilowatt-hora (kWh), no período de janeiro a maio do ano de 2013.

MÊS	CONSUMO (kWh)
Janeiro	520
Fevereiro	554
Março	512
Abril	514
Maio	530

De acordo com essas informações, o valor do consumo mediano, em kWh é:

a) 520

b) 554

c) 512

d) 514

e) 530

272 *Questão 21 da prova 04/2017*

Um grupo de 100 famílias foi entrevistado sobre sua expectativa de uso do décimo terceiro para compras natalinas em 2016. A Tabela abaixo mostra o percentual do décimo terceiro que elas pretendem usar nessas compras.

Percentual de gasto do décimo terceiro (%)	Número de Famílias
0	35
25	15
50	18
65	22
100	10
Soma	100

O percentual médio de gastos do décimo terceiro nesse grupo para as compras natalinas em 2016 será de:

a) 15%.

b) 20%.

c) 22%.

d) $30,55\%$.

e) $37,05\%$.

273 *Questão 27 da prova 01/2019*

As inscrições para um congresso de Matemática que ocorrerá no próximo final de semana foram realizadas em três etapas distintas entre os meses de agosto e outubro. A tabela abaixo apresenta o valor de inscrição e o número de inscritos pagantes em cada uma das três etapas.

Etapa	Número de inscritos pagantes	Valor da inscrição
1	140	R$ 70,00
2	110	R$ 100,00
3	325	R$ 120,00

Além desses, 8% dos inscritos ficaram isentos da taxa de inscrição. Quantos são os inscritos que não pagaram a inscrição (isentos) ou que pagaram um valor abaixo da média dos valores pagos pelos inscritos nas três etapas?

a) 140.

b) 190.

c) 250.

d) 270.

e) 300.

274 *Questão 18 da prova 84/2022*

O Sr. Paulo irá dividir a sua coleção de 4.200 moedas entre os seus três filhos, de tal forma que as quantidades entregues a cada filho sejam diretamente proporcionais às médias aritméticas das notas das provas deles na disciplina de Matemática, no ano de 2022. A tabela a seguir mostra as notas dos filhos até agora em Matemática.

Filho	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova
João	8	4	9
Marcelo	7	5	6
Vitor	6	8	10

Qual a quantidade de moedas cabe a cada um deles?
a) João = 1.400, Marcelo = 1.200 e Vitor = 1.600.
b) João = 1.300, Marcelo = 1.100 e Vitor = 1.800.
c) João = 1.450, Marcelo = 1.200 e Vitor = 1.550.
d) João = 1.350, Marcelo = 1.250 e Vitor = 1.600.
e) João = 1.380, Marcelo = 1.240 e Vitor = 1.580.

A.5.3 Princípio aditivo e multiplicativo da contagem

275 *Questão 19 da prova 01/2018*

Um aplicativo, recém lançado para todas as plataformas de celular, está fazendo um grande sucesso dentre os adolescentes neste último mês. O jogo funciona de acordo com as seguintes regras:

- No início de uma série de partidas, a máquina atribui ao jogador Q pontos.
- Em cada uma das partidas, em caso de vitória ou derrota, o jogador ganha ou perde a metade dos pontos que tem no início desta partida, respectivamente.

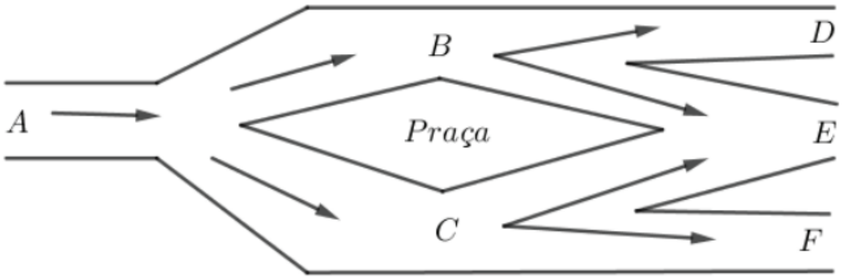
Se uma pessoa jogar uma série de quatro partidas, nas quais ela perde duas vezes e ganha duas vezes, quantos pontos terá ao final?
a) Q pontos.
b) $\frac{1}{16}Q$ pontos
c) $\frac{81}{16}Q$ pontos
d) $\frac{9}{16}Q$ pontos
e) $\frac{3}{16}Q$ pontos

276 *Questão 22 da prova para o cargo de Assistente Administrativo do Concurso 2021 do Conselho Regional de Fisioterapia e Terapia Ocupacional*
Diante do agravamento da pandemia de covid-19, sobretudo no Brasil, muitos hospitais se dedicaram a tratar apenas os casos dessa doença em suas UTIs. Um diretor de um pequeno hospital conta com 5 médicos e 14 enfermeiros, em seu quadro de colaboradores, e precisa formar a equipe de UTI que trabalhará no primeiro dia desde que a medida entrou em vigor. Com base nesse caso hipotético, é correto afirmar que ele poderá organizar o primeiro plantão, contando com uma equipe de 6 profissionais, sendo 2 médicos e 4 enfermeiros, de
a) 48 modos diferentes
b) 70 modos diferentes
c) 101 modos diferentes
d) 1 010 modos diferentes
e) 10 010 modos diferentes

277 *Questão 30 da prova para o cargo de Assistente Administrativo do Concurso 2021 do Conselho Regional de Fisioterapia e Terapia Ocupacional*
Duas fisioterapeutas estão participando de uma entrevista de emprego. Na sala em que elas aguardam a sua vez de fazer a entrevista, existem 10 cadeiras enfileiradas e numeradas de 1 a 10.
Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que as duas pessoas podem se sentar nas cadeiras, deixando ao menos uma cadeira entre elas (um espaço vago), de
a) 12 modos diferentes
b) 20 modos diferentes
c) 40 modos diferentes
d) 72 modos diferentes
e) 80 modos diferentes

A.5.4 Análise de eventos aleatórios dependentes e independentes

278 *Questão 20 da prova 01/2018*
A figura a seguir ilustra uma sequência de bifurcações do centro de uma grande metrópole do nosso país. Sabe-se que todas as vias representadas na imagem são de mão única. Desejando fazer um estudo do percentual de veículos que trafegam diariamente neste trecho, a prefeitura coletou os seguintes dados:
– dos veículos que passam por A, 55% viram à esquerda;
– dos veículos que passam por B, 25% viram à esquerda;
– daqueles que trafegam por C, 60% dobram à esquerda.



De posse destes dados, a prefeitura constatou que o percentual dos veículos que, passando por A, entram em E é:

a) $68,25\%$

b) $40,75\%$

c) $31,75\%$

d) $59,25\%$

e) 50%

279 *Questão de autoria própria*

Em uma urna há 3 bolas pretas e 3 bolas brancas, para ganhar um prêmio, você deve tirar 3 bolas, com reposição, e todas elas serem da mesma cor. De modo a dificultar as chances de você ganhar o prêmio, as regras são modificadas e agora é necessário tirar as 3 bolas sem reposição. A diferença entre a probabilidade de se ganhar o jogo com reposição e sem reposição é de:

a) $5,0\%$

b) $7,5\%$

c) $10,0\%$

d) $12,5\%$

e) $15,0\%$

280 *Questão de autoria própria*

Um pescador utiliza dois tipos de anzóis de pesca A e B, quando utiliza o anzol A, 40% dos peixes capturados pesam mais de 1 kg, já quando utiliza o anzol B, esse percentual cai para 30%. Se em uma tarde de pescaria ele utilizou o anzol B em 70% do tempo, o percentual de peixes capturados acima de 1 kg foi de:

a) 28%

b) 30%

c) 33%

d) 37%

e) 40%

A.6 Gabarito

1 - B	41 - E	81 - B	121 - B	161 - D	201 - E	241 - D
2 - D	42 - A	82 - C	122 - C	162 - B	202 - C	242 - E
3 - B	43 - B	83 - D	123 - A	163 - A	203 - D	243 - B
4 - D	44 - D	84 - C	124 - D	164 - D	204 - D	244 - D
5 - C	45 - C	85 - E	125 - A	165 - B	205 - D	245 - C
6 - B	46 - C	86 - C	126 - B	166 - C	206 - E	246 - C
7 - C	47 - E	87 - E	127 - E	167 - D	207 - B	247 - A
8 - B	48 - B	88 - C	128 - A	168 - C	208 - E	248 - C
9 - A	49 - C	89 - A	129 - A	169 - E	209 - B	249 - E
10 - D	50 - E	90 - B	130 - D	170 - D	210 - D	250 - A
11 - C	51 - B	91 - C	131 - A	171 - A	211 - C	251 - D
12 - E	52 - B	92 - A	132 - C	172 - B	212 - A	252 - B
13 - B	53 - B	93 - E	133 - D	173 - D	213 - E	253 - C
14 - C	54 - A	94 - E	134 - C	174 - B	214 - E	254 - D
15 - A	55 - D	95 - A	135 - E	175 - A	215 - E	255 - E
16 - E	56 - E	96 - D	136 - A	176 - D	216 - D	256 - B
17 - D	57 - C	97 - A	137 - B	177 - B	217 - D	257 - D
18 - B	58 - C	98 - D	138 - D	178 - E	218 - C	258 - B
19 - A	59 - C	99 - D	139 - B	179 - C	219 - E	259 - C
20 - C	60 - B	100 - B	140 - D	180 - A	220 - C	260 - A
21 - D	61 - C	101 - D	141 - D	181 - B	221 - C	261 - B
22 - A	62 - A	102 - D	142 - C	182 - E	222 - C	262 - B
23 - B	63 - A	103 - C	143 - E	183 - C	223 - D	263 - E
24 - C	64 - C	104 - A	144 - B	184 - C	224 - E	264 - E
25 - B	65 - D	105 - C	145 - D	185 - C	225 - C	265 - D
26 - E	66 - D	106 - D	146 - B	186 - C	226 - B	266 - E
27 - D	67 - C	107 - C	147 - C	187 - E	227 - E	267 - B
28 - A	68 - A	108 - D	148 - B	188 - C	228 - B	268 - D
29 - D	69 - A	109 - A	149 - A	189 - D	229 - C	269 - D
30 - E	70 - C	110 - A	150 - A	190 - D	230 - C	270 - A
31 - C	71 - A	111 - C	151 - D	191 - E	231 - D	271 - A
32 - D	72 - A	112 - A	152 - D	192 - C	232 - D	272 - E
33 - B	73 - D	113 - E	153 - C	193 - E	233 - A	273 - E
34 - B	74 - E	114 - A	154 - E	194 - C	234 - C	274 - A
35 - B	75 - A	115 - A	155 - C	195 - C	235 - C	275 - D
36 - D	76 - E	116 - C	156 - E	196 - C	236 - C	276 - A
37 - A	77 - C	117 - C	157 - D	197 - D	237 - E	277 - B
38 - B	78 - D	118 - A	158 - D	198 - B	238 - D	278 - A
39 - B	79 - B	119 - A	159 - B	199 - C	239 - C	279 - B
40 - A	80 - B	120 - C	160 - C	200 - B	240 - E	280 - C