



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT



NELSON BATISTA DA SILVA

**A PLATAFORMA DIGITAL KHAN ACADEMY NO ENSINO DE MATRIZES: DESAFIOS E  
POTENCIALIDADES**

Vitória  
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT



NELSON BATISTA DA SILVA

**A PLATAFORMA DIGITAL KHAN ACADEMY NO ENSINO DE MATRIZES: DESAFIOS E  
POTENCIALIDADES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior

Vitória  
2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

B333p Batista da Silva, Nelson, 1977-  
A plataforma digital Khan Academy no ensino de matrizes : desafios e potencialidades / Nelson Batista da Silva. - 2023.  
103 f. : il.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Khan Academy. 2. Ensino de matrizes. 3. Matemática. I. Gonçalves Júnior, Etereldes. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

## REGISTRO DE JULGAMENTO DA DISSERTAÇÃO DO(A) CANDIDATO(A) AO GRAU DE MESTRE PELO PROFMAT/UFES.

A Comissão Examinadora da Dissertação de Mestrado intitulado “A plataforma digital KhanAcademy no ensino de matrizes: desafios e potencialidades”, elaborado(a) por **Nelson Batista da Silva**, candidato(a) ao Grau de MESTRE EM MATEMÁTICA, recomendou, após apresentação da Dissertação, realizada no dia 11 de outubro de 2023, que a mesma seja:

**APROVADO**

Os membros da Comissão deverão indicar a natureza de sua decisão através de sua assinatura na coluna apropriada que segue:

Nome	Função	Resultado
Dr. Etereldes Gonçalves Junior	Orientador(a) - UFES	<b>APROVADO</b>
Dr. Alcebíades Dal Col Junior	Membro Interno - UFES	<b>APROVADO</b>
Dr. Paulo Roberto Prezotti Filho	Membro Externo - IFES-Guarapari	<b>Aprovado</b>

Campus Universitário Alair de Queiroz Araújo – Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES | 29075-910 | (27) 4009-2474  
| [www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PMPM](http://www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PMPM) – [profmatt.ufes@gmail.com](mailto:profmatt.ufes@gmail.com)

Documento assinado eletronicamente nos moldes do art. 10 da MP 2200/01 e Lei 14063/20  
[Hash SHA256] f3cfd329ce9065a44274608c1293d0f87a03a6847e97e516027be802e7e815d3





### Registro de Julgamento Nelson Batista da Silva

Data e Hora de Criação: 11/10/2023 às 08:43:32

Documentos que originaram esse envelope:

- Registro de Julgamento Nelson Batista da Silva.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



### Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: f3cfd329ce9065a44274608c1293d0f87a03a6847e97e516027be802e7e815d3

[SHA512]: 79ed7e9d46773382dc9848d7e6947a03267e885d4dbe0857aea582370ed8f1b3fdf71d6b9ca30878ab99c66e53bc766e8ce52e5a6e9d787b2da47c9d67412c6b

### Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



#### ASSINADO - Alcebiades Dal Col Júnior (alcebiades.col@ufes.br)

Data/Hora: 11/10/2023 - 14:09:37, IP: 200.137.65.102, Geolocalização: [-20.275566, -40.304077]

[SHA256]: c40375904a0ba66bed2b17d9a7296430d3b926f360ad19d849cb0e58bcd75da0



#### ASSINADO - Etereldes Gonçalves Júnior (etereldes.goncalves@ufes.br)

Data/Hora: 11/10/2023 - 14:03:36, IP: 200.137.65.107, Geolocalização: [-20.287305, -40.302610]

[SHA256]: 1b4dce4f86fe19ba309e1bb77c44bedc4557853d439852cb724b1a8244e11fd4



#### ASSINADO - Paulo Roberto Prezotti Filho (pprezotti@ifes.edu.br)

Data/Hora: 11/10/2023 - 12:50:25, IP: 179.102.137.106

[SHA256]: 096adc814e29c940e5e2c7817842728889fc399c15a831cba6870d2e6bfd40c0

### Histórico de eventos registrados neste envelope

11/10/2023 14:09:37 - Envelope finalizado por alcebiades.col@ufes.br, IP 200.137.65.102

11/10/2023 14:09:37 - Assinatura realizada por alcebiades.col@ufes.br, IP 200.137.65.102

11/10/2023 14:08:53 - Envelope visualizado por alcebiades.col@ufes.br, IP 200.137.65.102

11/10/2023 14:03:36 - Assinatura realizada por etereldes.goncalves@ufes.br, IP 200.137.65.107

11/10/2023 14:03:15 - Envelope visualizado por etereldes.goncalves@ufes.br, IP 200.137.65.107

11/10/2023 12:50:25 - Assinatura realizada por pperezotti@ifes.edu.br, IP 179.102.137.106

11/10/2023 12:49:38 - Envelope visualizado por pperezotti@ifes.edu.br, IP 179.102.137.106

11/10/2023 08:50:55 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.102

11/10/2023 08:50:54 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.102

11/10/2023 08:43:33 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.102

Documento em conformidade com o padrão de assinatura digital ICP-Brasil e  
validado de acordo com o Instituto Nacional de Tecnologia da Informação

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus todos os dias pela dádiva da vida e pelas bênçãos que Ele me concede.

À minha esposa amada, Flávia Arlete Lovatti, por seu amor, carinho e apoio incansável ao longo deste estudo. Sua paciência, compreensão e encorajamento são fundamentais para meu progresso.

Ao meu sogro, Flávio Marcelo Lovatti, e à minha sogra, Irene de Freitas Padilha Lovatti, quero agradecer a generosidade, amor e apoio inabaláveis ao longo desta jornada acadêmica. Sua presença em minha vida é inestimável.

À minha mãe, Luisa Maria Batista da Silva, e ao meu pai, Nerli José Da Silva, que me ensinaram os valores da persistência e determinação. Suas lições moldam minha jornada acadêmica.

Aos meus tios, Marlene do Carmo Silva e Antônio José de Freitas, por terem me acolhido em sua casa na Grande Vitória quando precisei sair do interior de Aimorés – MG para estudar.

Quero expressar minha sincera gratidão a todos os meus queridos irmãos, cunhados, cunhada e sobrinhos. Sua presença em minha vida é um presente que valorizo profundamente. Obrigado por todos os momentos especiais que compartilhamos juntos.

Ao meu orientador, Prof. Dr, Etereldes Gonçalves Júnior, pelas orientações, acolhimento, disponibilidade e incentivo sem os quais eu não teria concluído este trabalho.

Aos meus professores do PROFMAT, Valmecir, Moacir, Rosa Elvira, Etereldes, Fabio Correa, Alancardek, Florêncio, pela dedicação e ensinamentos.

Aos meus diretores e pedagogos pela colaboração.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram e me incentivaram nesse período de desafio, superação e aprendizado.

## RESUMO

A tecnologia está presente no dia a dia das pessoas e, no meio escolar, vemos nossos alunos cada vez mais conectados, portanto, não faz sentido continuar a fazer como antes quando o conteúdo é dado pelo professor que explica a matéria, passa atividades a serem resolvidas e corrige. Em uma sociedade onde as tecnologias estão presentes, é necessário mudar e implementar ferramentas tecnológicas que auxiliem no processo educacional. O objetivo dessa pesquisa é praticar atividades na plataforma Khan Academy, aplicando uma metodologia ativa denominada gamificação usando o conteúdo de matrizes a fim de que o estudante possa desenvolver sua capacidade de estudar de forma autônoma e exercitar o uso de tecnologias com a finalidade de aprimorar seus conhecimentos em matrizes de forma divertida e atraente. A pesquisa teve como participantes alunos da EEEFM Teófilo Paulino, localizada no município de Domingos Martins - ES.

Palavras-chave: Khan Academy, matrizes.

## **ABSTRACT**

Technology is present in people's daily lives and in the school environment we see our students increasingly connected. That's why it doesn't make sense to continue doing everything as it was done before, the content is given by the teacher who explains the subject, gives activities to be solved and corrects. We think that in a society where technologies are present, it is necessary to change and implement technological tools that help in the educational process. The objective of the research was to practice activities on the Khan Academy platform, seeking to work with an active methodology called gamification with the content of matrices so that the student can develop their ability to study autonomously and exercise the use of technologies in order to improve their knowledge in matrices in a more fun and attractive way for students. The research had as participants students from EEEFM Teófilo Paulino, located in the municipality of Domingos Martins.

Keywords: Khan Academy, matrices.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Página inicial do <i>site</i> Portal da Matemática.....	21
Figura 2	Módulos do Portal da Matemática.....	22
Figura 3	Página das Videoaulas do Portal da Matemática.....	22
Figura 4	Videoaulas dos conteúdos disponíveis no Portal da Matemática...	23
Figura 5	Modelo de atividade no Portal da Matemática.....	24
Figura 6	Página inicial do <i>Senecalearning.com</i> .....	26
Figura 7	Página de atividades do <i>Seneca Learning</i> .....	27
Figura 8	Modelo de atividade no <i>Seneca Learning</i> .....	27
Figura 9	Página de finalização de atividade no <i>Seneca Learning</i> .....	28
Figura 10	Outras ferramentas de progresso do <i>Seneca learning</i> .....	29
Figura 11	Página de visualização do progresso do aluno.....	30
Figura 12	Atividade proposta no <i>Khan Academy</i> .....	40
Figura 13	Aluno utilizando a plataforma <i>Khan Academy</i> .....	41
Figura 14	Exemplo de estudo da plataforma <i>Khan Academy</i> .....	42
Figura 15	Modelo de atividade da Plataforma.....	44
Figura 16	Modelo de atividade da Plataforma.....	45
Figura 17	Modelo de atividade da Plataforma.....	45
Figura 18	Aluno desenvolvendo atividade.....	46
Figura 19	Modelo de correção da Plataforma.....	47
Figura 20	Modelo de correção da Plataforma.....	48
Figura 21	Aluno desenvolvendo atividade.....	49
Figura 22	Aluno desenvolvendo atividade.....	53
Figura 23	Aluno desenvolvendo atividade.....	56
Figura 24	Modelo de estudo da Plataforma.....	56
Figura 25	Modelo de Atividade da Plataforma.....	57
Figura 26	Aluno desenvolvendo atividade.....	60
Figura 27	Aluno desenvolvendo atividade.....	61
Figura 28	Aluno desenvolvendo atividade.....	63
Figura 29	Aluno desenvolvendo atividade.....	65
Figura 30	Modelo de estudo da Plataforma.....	66
Figura 31	Aluno desenvolvendo atividade.....	68
Figura 32	Modelo de atividade da Plataforma.....	70
Figura 33	Modelo de atividade da Plataforma.....	72
Figura 34	Aluno desenvolvendo atividade.....	73
Figura 35	Modelo de estudo da Plataforma.....	74
Figura 36	Modelo de atividade da Plataforma.....	75
Figura 37	Modelo de atividade da Plataforma.....	77
Figura 38	Modelo de estudo da Plataforma.....	78
Figura 39	Modelo de estudo da Plataforma.....	79
Figura 40	Modelo da Regra de Sarrus.....	82
Figura 41	<i>Prints</i> de conteúdo exibido na Plataforma.....	85
Figura 42	Exemplos de videoaulas da Plataforma.....	90
Figura 43	Atividade realizada na Plataforma.....	91
Figura 44	Atividade realizada na Plataforma.....	92
Figura 45	Atividade realizada na Plataforma.....	92
Figura 46	Atividade realizada na Plataforma.....	93
Figura 47	Atividade realizada na Plataforma.....	94

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
<b>2 FUNDAMENTOS</b> .....	<b>11</b>
2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DE TECNOLOGIAS .....	11
2.2 O ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO .....	13
<b>3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> .....	<b>15</b>
3.1 METODOLOGIAS ATIVAS .....	16
3.2 GAMIFICAÇÃO.....	19
3.3 UM POUCO SOBRE O PORTAL DA MATEMÁTICA (OBMEP), <i>SENECALEARNING.COM</i> E O <i>BRICSMATH</i> .....	21
3.4 A <i>KHAN ACADEMY</i> .....	30
3.5 LOCAL DA PESQUISA.....	35
3.6 OS ENVOLVIDOS NA PESQUISA .....	35
3.7 O CONTEXTO DA PANDEMIA DA COVID-19 .....	35
3.8 PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS.....	36
<b>4 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES</b> .....	<b>36</b>
4.1 UNIDADE: INTRODUÇÃO ÀS MATRIZES:.....	36
4.2 UNIDADE: SOMA E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES .....	51
4.3 UNIDADE: COMO MULTIPLICAR UM ESCALAR POR UMA MATRIZ E MATRIZES POR MATRIZES.....	62
4.4 UNIDADE: DETERMINANTES .....	81
<b>5 FRAGILIDADES DA <i>KHAN ACADEMY</i></b> .....	<b>95</b>
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>99</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>100</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, vamos relatar como surgiu a proposta de trabalhar com a plataforma Khan Academy no ensino de matrizes a partir da experiência profissional. Durante o tempo em que estivemos em sala de aula, percebemos o interesse e a necessidade de os estudantes compreenderem e experimentarem o uso de tecnologias em seu dia a dia e, a fim de que se tornem mais ativos e menos dependentes, é necessário que tenham habilidade e domínio das ferramentas.

Tudo a nossa volta tem uma ligação com um meio tecnológico, desde nossa locomoção diária até o que comemos. Todas as áreas do conhecimento humano fazem uso da tecnologia para maximizar seu aproveitamento e devemos a essa maximização as facilidades do mundo de hoje, porém a educação ainda faz pouco uso desta ferramenta para seu benefício. (FARIA, LUZ, 2016, p.1)

É possível perceber que estamos vivendo em tempos onde os meios tecnológicos nos cercam e precisamos estar preparados para lidar com as diversas situações em que nos deparamos, sendo essa mais uma tarefa da escola. A partir daí surgiu a ideia de utilizar ferramentas digitais para desenvolver e/ou aprimorar o aprendizado dos alunos nos conteúdos de matemática. Utilizei a Khan Academy, o senecaja.com, matfic, bricsmath.com e o portal da matemática (OBMEP). Dentre esses, a Khan Academy foi o mais utilizado, pois, de acordo com minhas perspectivas, era o mais completo e de fácil compreensão e, assim, foi a plataforma escolhida para essa pesquisa. A partir dessa plataforma, é possível indicar conteúdos a serem trabalhados separados por tópicos onde o aluno tem a opção de assistir a videoaulas, ler resumo do conteúdo e praticar com exercícios propostos. Além disso, feitos os exercícios, é possível fazer a verificação da resposta e, caso o aluno tenha errado, a Khan Academy oferece dicas para o estudante visualizar onde errou e tentar fazer novamente.

Sobre as vantagens e facilidades de se utilizar a Khan Academy, Muniz (2019, p. 51) nos fala:

Os alunos podem visualizar as atividades recomendadas ativas (as que ainda estão no prazo para serem feitas), bem como realizá-las em seu *smartphone*. Como uma espécie de jogo, tudo o que é feito na plataforma gera pontos. As atividades realizadas sem erro e sem dicas, visualizar os vídeos disponíveis e estudar pelos artigos disponibilizados. O aluno também pode adicionar tópicos a uma lista de favoritos, facilitando o acesso ao mesmo. Em seu perfil, visualiza seu total de pontos e medalhas adquiridas ao longo de seu estudo na plataforma.

Esse formato que traz a ideia de jogos pode contribuir para um maior engajamento e

motivação dos estudantes no que está sendo proposto e está de acordo com a metodologia ativa gamificação que será tratada mais adiante nesse trabalho.

Utilizar esse método para trabalhar com os alunos faz do professor um facilitador do processo de ensino e aprendizagem, deixando a cargo do aluno buscar o conhecimento. Com isso, o educando se faz atuante na própria educação enquanto o professor é o mediador para alcançar o objetivo da aula.

Dessa forma, a plataforma é um ótimo recurso para auxiliar o professor a desenvolver a aprendizagem dos alunos, alcançar as habilidades necessárias e diminuir as dificuldades encontradas com relação à matemática.

Em relação ao estudo de matrizes, percebemos, durante a experiência profissional, que os alunos têm grandes dificuldades na interpretação de problemas que envolvem esse conteúdo. Visando atenuar as ansiedades e os obstáculos encontrados, esse trabalho tem por objetivo explorar as potencialidades e desafios encontrados para o processo de ensino e aprendizagem no conteúdo de matrizes utilizando a plataforma Khan Academy.

A partir das preocupações citadas acima, surgiu o problema dessa pesquisa: **Como a plataforma Khan Academy, por meio da metodologia ativa gamificação, pode auxiliar no aprendizado do conteúdo de matrizes apoiado em tecnologias digitais?**

A fim de responder ao problema, temos como objetivo geral: Desenvolver atividades na plataforma Khan Academy com o conteúdo de matrizes, utilizando a metodologia ativa gamificação a fim de que o estudante possa desenvolver sua capacidade de estudar de forma autônoma e exercite o uso de tecnologias.

Para atingir o objetivo geral, temos os seguintes objetivos específicos:

- Possibilitar o manuseio de tecnologia com a plataforma Khan Academy.
- Proporcionar a busca de informações que auxiliem na compreensão do conteúdo de matrizes.
- Analisar se o aprendizado do conteúdo de matrizes foi facilitado por meio da utilização da metodologia ativa gamificação com a Khan Academy, quais os

desafios e potencialidades da plataforma.

- Elaborar uma sequência didática para o ensino de matrizes por meio da plataforma Khan Academy.

Esse trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1, temos a introdução que expõe como surgiu a ideia do trabalho bem como os objetivos a serem alcançados; no capítulo 2, trazemos os fundamentos que norteiam a pesquisa; no capítulo 3, apresentamos os procedimentos metodológicos utilizados para alcançar os objetivos propostos; no capítulo 4, trazemos e analisamos as atividades desenvolvidas; e, no capítulo 5, expomos as considerações finais.

## **2 FUNDAMENTOS**

Nesse capítulo, vamos relatar os fundamentos teóricos nos quais a pesquisa foi sustentada.

### **2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DE TECNOLOGIAS**

A educação tem a importante tarefa de preparar o indivíduo para o exercício da cidadania, ou seja, é necessário experimentar, na escola, os desafios encontrados no dia a dia a fim de desenvolver habilidades necessárias para enfrentar as adversidades que irão surgir fora dos muros da escola. Tratando do papel da escola em educar D'Ambrosio (1996, p.8) nos fala:

A educação em geral depende de variáveis que se aglomeram em direções muito amplas: a) o aluno está no processo educativo, como um indivíduo procurando realizar suas aspirações e responder às suas inquietudes; b) sua inserção na sociedade e as expectativas da sociedade com relação a ele; c) as estratégias dessa sociedade para realizar essas expectativas; d) os agentes e os instrumentos para executar essas estratégias; e) o conteúdo que é parte dessa estratégia.

Dessa forma, podemos perceber o quanto é importante o processo pelo qual o aluno passa durante sua formação escolar. Os conteúdos fazem parte do que o educando precisa estudar para se desenvolver e as metodologias utilizadas para ensinar tais conteúdos darão suporte a fim de que ele saiba utilizar os conhecimentos adquiridos no cotidiano de acordo com as necessidades. A fim de que o educando não seja um mero repetidor, é preciso que o educador entenda seu papel que não é de transferir conhecimentos. Segundo Freire (1996, p. 23),

É preciso que, pelo contrário, desde os começos do processo, vá ficando cada vez mais claro que, embora diferentes entre si, quem forma se forma e re-forma ao formar e quem é formado forma-se e forma ao ser formado. É neste sentido que ensinar não é transferir conhecimentos, conteúdos nem formar é ação pela qual um sujeito criador dá forma, estilo ou alma a um corpo indeciso e acomodado. Não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto, um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.

Sabe-se que o ensino de matemática precisa passar por transformações para acompanhar o que está acontecendo no mundo atual. Uma dessas transformações foi o desenvolvimento das tecnologias e a educação não pode ignorá-la. É importante que o professor de matemática utilize a tecnologia para elaborar suas aulas. Segundo Zanchettin (2020, p.16),

Em tempos nos quais a sociedade passa por continuas transformações, devido ao desenvolvimento acelerado da tecnologia, torna-se essencial que os indivíduos estejam preparados para o convívio e interações com este novo mundo sejam nas relações políticas, econômicas ou sociais.

Além disso, as ferramentas tecnológicas podem ser aliadas no ensino de matemática. É comum encontrar, em sala de aula, alunos que não atingiram os conhecimentos prévios que são pré-requisitos para estudar um determinado conteúdo. O professor sozinho não consegue sanar todas as dificuldades. Dessa forma, o acesso à internet bem como o uso dos materiais lá disponíveis são excelentes recursos que o aluno pode ter para recuperar o que ficou faltando e avançar de acordo com suas possibilidades. Conforme Bierwagen (2018, p. 6):

No que concerne ao aprendizado de matemática, os alunos de modo geral têm dificuldades: com relações espaciais, distâncias e sequenciamento; em ter pensamento abstrato; com relação à linguagem e vocabulário matemático; o uso da memória; raciocínio; em fazer generalizações; em ter atenção, focagem e fixação de dados; em ter motivação espontânea; e na utilização de conhecimentos prévios na resolução de situações-problema.

O acesso às tecnologias educacionais está cada vez maior e o interesse dos alunos em estudar por meio de metodologias diferentes do ensino tradicional é perceptível para quem está em sala de aula. As aulas expositivas são importantes, mas trabalhar com elas o tempo todo torna o processo cansativo e desinteressante para os alunos e também para o professor que precisa ser desafiado a fim de que saia da rotina e não torne sua profissão monótona. Para Freire (1996, p. 22), “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção”. Entendemos que incluir ferramentas tecnológicas na ação educativa contribui para

que o educando possa construir o conhecimento sendo ativo nessa busca e não um mero repetidor daquilo que lhe é exposto.

Sobre sair da zona de conforto e buscar novos meios para ensinar, Faria e Luz (2016, p. 2) apontam:

Entende-se que os educadores não devem se deixar acomodar, especialmente, quando confrontados com as novas tecnologias e nem reprimir o seu uso em sala de aula, mas é necessário que saibam selecionar as informações que realmente interessam.

Ainda sobre as mudanças na forma de ensinar, para Zanchettin (2020), é necessário que a educação passe por transformações e deve inovar de modo a apresentar novos paradigmas que influenciem o ambiente escolar para alunos e professores. Para Freire (1996, p.57):

A consciência do mundo e a consciência de si como ser inacabado necessariamente inscrevem o ser consciente de sua inconclusão num permanente movimento de busca.

Entendemos que essa busca deve estar constantemente presente no educador para que não se acomode e procure inovar e aprimorar suas formas de ensino. Um professor acomodado se fecha para as transformações do mundo e não inclui em suas aulas as novas metodologias que vão surgindo.

Para Menegais, Fagundes, Sauer (2013), “no atual contexto educacional, em que os estudantes são nativos digitais, é preciso considerar a efetiva integração das tecnologias digitais no currículo escolar”.

Muitos alunos estão acostumados a acessar informações por meio do celular, computador ou *tablet* e isso já faz parte do cotidiano. Ignorar a constante evolução tecnológica e continuar trabalhando em sala de aula da mesma forma como se fazia antes da internet é excluir a oportunidade de cumprir uma das missões do professor, a de cultivar a busca de informações de forma autônoma e crítica do educando, já que a internet vem sendo uma das principais ferramentas de informação na atualidade.

## 2.2 O ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

O conteúdo de matrizes tem grande utilidade no cotidiano como, por exemplo, na apresentação e organização de dados em tabelas, podendo ser dados estatísticos ou uma tabela de preços. É comum que o estudo de matrizes seja feito de forma

mecanizada sem contextualização e, como nos diz Pereira (2015, p.31), “O estudo das matrizes necessita, como tantos outros conceitos da Matemática, ser ensinado de modo contextualizado e mostrar a aplicabilidade da mesma pode ser um caminho para facilitar sua compreensão”.

É importante que os professores reflitam sobre sua prática docente a fim de aperfeiçoar ou mudar, se necessário, a fim de que o educando aprenda os conteúdos e consiga pensar criticamente sobre os mesmos e sua aplicabilidade social. Segundo Freire (1996, p.39):

O de que se precisa é possibilitar, que, voltando-se para si mesma, através da reflexão sobre a prática, a curiosidade ingênua, percebendo-se como tal, se vá tornando crítica.

Por isso é que, na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática. É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática

A sociedade passa por diversas transformações ao longo do tempo. A escola e o professor devem se sensibilizar com essas mudanças e buscar inovar nos métodos de ensinar a fim de tornar o aluno mais ativo e crítico. Segundo Zanchettin (2020, p.17):

As metodologias ativas de aprendizagem constituem processos amplos que podem englobar diferentes práticas de sala de aula e possuem como principal característica a inserção do aluno como agente principal e maior responsável pela construção da própria aprendizagem. Sendo assim, o objetivo principal desse paradigma de ensino é estimular a capacidade de adquirir conhecimentos de maneira autônoma e participativa.

Uma das transformações que a sociedade vive é o crescente acesso às tecnologias e estas têm trazido várias opções de tecnologias educacionais. Assim, o professor necessita se aprimorar nessas ferramentas para tirar proveito em suas aulas e proporcionar mais uma opção aos alunos de buscarem pelas informações necessárias e conseguir aprendizagem.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o aluno deve ser capaz de:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 535)

A BNCC cita, ainda, que o educando deve ter a habilidade de:



(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

Dessa forma, podemos perceber a importância de explorar matrizes no ensino médio, já que é possível escrever e resolver sistemas lineares por meio de matrizes e determinantes.

Estudar matrizes utilizando ferramentas tecnológicas pode facilitar essa contextualização, como nos mostra Pereira (2015, p.32) “Um modo de contextualizar o ensino de Matrizes, o que é positivo para que haja compreensão do conceito matemático pelo aluno, é a utilização de recursos tecnológicos”.

Ao se referir à vida em sociedade e à educação utilizando a tecnologia, Bierwagen (2018, p. 1) nos fala:

Atualmente, por estarmos imersos em uma sociedade que se encontra em constantes transformações, nota-se a alta pertinência em práticas apoiadas em tecnologias digitais de comunicação e informação (TDIC) na educação básica tanto em suas relações sociais, culturais, econômicas e está potencialmente conectada em rede, dependente das TDIC.

Observando a presença da tecnologia na vida dos estudantes fora da escola e a necessidade de saber usar recursos tecnológicos, entende-se que a utilização do computador e o *site* Khan Academy é importante aliado e pode contribuir, positivamente, no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de matrizes.

### **3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Vamos tratar, nesse capítulo, sobre a metodologia que foi adotada na pesquisa. Falaremos sobre o local onde realizamos o estudo, os sujeitos envolvidos e também como foi a produção e análise de dados.

Utilizamos a ideia da metodologia ativa gamificação que será abordada abaixo e uma forma sugerida no *site* da Khan Academy chamada de Prática Guiada. No início de cada aula, fizemos uma breve apresentação do conteúdo e, depois, os alunos acessaram o *site* da Khan Academy para realizar as atividades recomendadas. No momento em que os alunos estiveram realizando as atividades, o professor observou-os de forma individual e, ao perceber as dificuldades de alguns alunos em resolver as

atividades, fez as intervenções necessárias para ajudar.

### 3.1 METODOLOGIAS ATIVAS

Em uma sociedade em que os jovens estão cada vez mais conectados e recebendo grande quantidade de informações em uma velocidade bem diferente de alguns anos atrás, trabalhar exclusivamente o método tradicional de ensino vem se tornando desinteressante para os estudantes. O ensino tradicional tem o professor como o centro de processo de ensino e aprendizagem e as metodologias ativas vêm como uma opção para mudar para o estudante o foco nesse processo. Segundo Valente (2018, p.26):

As metodologias ativas são entendidas como práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional. Em vez disso baseado na transmissão de informação da instrução bancária, como criticou Paulo Freire (1970), na metodologia ativa, o aluno assume uma postura mais participativa, na qual ele resolve problemas, desenvolve projetos e, com isso, cria oportunidades para a construção de conhecimento.

Freire (1996) aponta sobre a importância da curiosidade no educando e o que essa curiosidade proporciona.

O exercício da curiosidade convoca a imaginação, a intuição, as emoções, a capacidade de conjecturar, de comparar, na busca da perfilização do objeto ou do achado de sua razão de ser. (FREIRE, 1996, p.88)

Acreditamos que trabalhar com metodologias ativas contribui para que os alunos assumam postura de autonomia na busca de informações e conhecimento além de incentivar a curiosidade e, dessa forma, estarão preparados para utilizar os conhecimentos adquiridos no tempo escolar para resolver problemas futuros que irão encontrar em sua vida. Pensamos também que, dessa forma, serão capazes de aprender sozinhos sem alguém para transmitir o conhecimento e tornar-se-ão cidadãos críticos e reflexivos acerca das decisões que precisarão tomar. Berbel (2011, p.29) nos diz:

O engajamento do aluno em relação a novas aprendizagens, pela compreensão, pela escolha e pelo interesse, é condição essencial para ampliar suas possibilidades de exercitar a liberdade e a autonomia na tomada de decisões em diferentes momentos do processo que vivencia, preparando-se para o exercício profissional futuro.

Ao tratar sobre o papel do professor de buscar meios para que seus alunos se tornem autônomos do processo de aprendizagem, Freire (1996, p.70) aponta:

Como professor, se minha opção é progressista e venho sendo coerente com ela, se não me posso permitir a ingenuidade de pensar-me igual ao educando, de desconhecer a especificidade da tarefa do professor, não posso, por outro lado, negar que o meu papel fundamental é contribuir positivamente para que o educando vá sendo o artífice de sua formação com a ajuda necessária do educador.

Quando trazemos algo relacionado ao uso de tecnologias para o contexto escolar, é perceptível o interesse e a empolgação dos estudantes que se concentram no que foi proposto e desenvolvem com motivação as atividades. É claro que nem todos os alunos irão gostar e chegar aos mesmos objetivos na mesma medida. Cada um tem seu tempo e forma de aprender, daí a importância de trabalhar metodologias variadas a fim de atingir o maior número possível de educandos. Tratando sobre o planejamento do professor ter que priorizar a motivação dos alunos, Diesel, Baldez e Martins (2017, p.270) apontam:

[...] acredita-se que toda e qualquer ação proposta com a intenção de ensinar deve ser pensada na perspectiva daqueles que dela participarão, que via de regra, deverão apreciá-la. Desse modo, o planejamento e a organização de situações de aprendizagem deverão ser focados nas atividades dos estudantes, posto que é a aprendizagem destes, o objetivo principal da ação educativa.

Além disso, temos o que Berbel (2011, p. 37) traz sobre a necessidade de abordar conteúdos com diferentes metodologias:

Uma só forma de trabalho pode não atingir a todos os alunos na conquista de níveis complexos de pensamento e de comprometimento em suas ações, como desejados, ao mesmo tempo e em curto tempo. Essa é a razão da necessidade de se buscar diferentes alternativas que contenham, em sua proposta, as condições de provocar atividades que estimulem o desenvolvimento de diferentes habilidades de pensamento dos alunos e possibilitem ao professor atuar naquelas situações que promovem autonomia, substituindo, sempre que possível, as situações evidentemente controladoras.

As metodologias ativas visam possibilitar ao educando desenvolver sua capacidade de investigação, crítica e reflexão acerca de assuntos de forma que não tenha que aceitar de forma passiva tudo aquilo que é dito por alguém. Dessa forma, a metodologia ativa se apresenta de forma oposta ao método tradicional de ensino onde um indivíduo (o professor) transmite o que sabe e o educando apenas absorve o que é dito. Segundo Freire (1996, p.33):

[...] transformar a experiência educativa em puro treinamento técnico é amesquinhar o que há de fundamentalmente humano no exercício educativo: o seu caráter formador.

Com a acelerada transformação pela qual a sociedade passa, principalmente, em consequência do avanço tecnológico, o ensino tradicional parece não fazer mais sentido e por isso as metodologias ativas vêm sendo utilizadas como alternativa para colocar o estudante como protagonista em seu aprendizado. Sobre as metodologias ativas, Valente (2018, p.28) traz:

O fato de elas serem ativas está relacionado com a realização de práticas pedagógicas para envolver os alunos, engajá-los em atividades práticas nas quais eles sejam protagonistas da sua aprendizagem nas quais os aprendizes possam fazer coisas, pensar e conceituar o que fazem e construir conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos nas atividades que realizam, bem como desenvolver a capacidade crítica, refletir sobre as práticas realizadas, fornecer e receber feedback, aprender a interagir com colegas e professor, além de explorar atitudes e valores pessoais.

Nesse sentido, o papel do professor, nessas metodologias, deixa de ser o de transferir o conhecimento e passa a ser o de mediar a busca pelo conhecimento dos estudantes. A importância do professor como aliado no processo de aprendizagem do educando e não como o único responsável por ela já vinha sendo discutido por Freire (1996, p.39):

[...] é fundamental que, na prática da formação docente, o aprendiz de educador assuma que o indispensável pensar certo não é presente dos deuses nem se acha nos guias de professores que iluminados intelectuais escrevem desde o centro do poder, mas, pelo contrário, o pensar certo que supera o ingênuo tem que ser produzido pelo próprio aprendiz em comunhão com o professor formador.

Além disso, é necessário planejamento das atividades a serem propostas bem como acompanhar o desenvolvimento dos estudantes e avaliar o que foi aprendido por meio da metodologia utilizada e adequar de acordo com a necessidade.

Segundo Moran (2013, p.2):

O papel do professor é o de ajudar na escolha e validação dos materiais mais interessantes, (impressos e digitais), roteirizar a sequência de ações prevista e mediar a interação com o grande grupo, com os pequenos grupos e com cada um dos alunos. É um papel mais complexo, flexível e dinâmico. Antes podia preparar uma mesma aula para todos. Hoje precisa ir além e concentrar-se no essencial, que é aprofundar o que os alunos não percebem, ajudar a cada um de acordo com o seu ritmo e necessidades [...]

Ainda sobre o professor, Diesel, Baldez, Martins (2017, p.278) apontam:

[...] ensinar a pensar significa não transferir ou transmitir a um outro que recebe de forma passiva, mas o contrário, provocar, desafiar ou ainda promover as condições de construir, refletir, compreender, transformar, sem perder de vista o respeito à autonomia e dignidade deste outro. Esse olhar reflete a postura do professor que se vale de uma abordagem pautada no método ativo.

O uso de tecnologias digitais aparece como uma forma de trabalhar com metodologias ativas na educação. Grande parte das pessoas já vivenciaram a situação de estar jogando. Os jogos são interessantes, pois trazem regras, desafios e recompensas. Utilizar elementos de jogos na educação é uma alternativa para estimular o interesse dos estudantes. A seguir vamos expor o conceito de gamificação que traz essa ideia.

### 3.2 GAMIFICAÇÃO

Na realidade atual, a tecnologia e suas facilidades estão presentes na vida da maioria das pessoas, porém a escola não acompanhou, na mesma velocidade, esses avanços. Trabalhar com a plataforma Kahn Academy é uma maneira de utilizar a tecnologia em favor da educação. Essa plataforma traz elementos parecidos com os encontrados em jogos e é possível abordar, por meio dela, estudos de matemática com a metodologia ativa gamificação. Murr e Ferrari (2020, p. 7) nos dizem:

A gamificação, tradução do termo em inglês “gamification”, pode ser entendida como a utilização de elementos de jogos em contextos fora de jogos, isto é, da vida real. O uso desses elementos – narrativa, feedback, cooperação, pontuações etc. – visa a aumentar a motivação dos indivíduos com relação à atividade da vida real que estão realizando.

É comum para os educadores a preocupação em aumentar o interesse dos alunos nas atividades propostas bem como a participação no desenvolvimento das mesmas. Sendo assim, estudos buscam metodologias diferenciadas que auxiliem nesse processo e a metodologia ativa de gamificação aparece como uma opção. Orlandi, Duque, Mori (2018, p. 2) trazem essa ideia:

[...] é recorrente a necessidade de despertar o engajamento e a motivação do estudante para o saber, para o querer saber, para o porquê saber, instigar sua curiosidade, levá-lo ao entendimento do complexo contexto onde está inserido, para que possa fazer escolhas, tomar decisões, vencer desafios com a desenvoltura desejada e ter plena consciência de sua individualidade e de suas capacidades como parte integrante de uma sociedade.

Instigar e respeitar a curiosidade é algo que podemos perceber no que nos diz Freire (1996, p. 26):

O educador democrático não pode negar-se o dever de, na sua prática docente, reforçar a capacidade crítica do educando, sua curiosidade, sua insubmissão.

E acrescenta:

Faz parte das condições em que aprender criticamente é possível a pressuposição por parte dos educandos de que o educador já teve ou continua tendo experiência da produção de certos saberes e que estes não podem a eles, os educandos, ser simplesmente transferidos. (FREIRE, 1996, p.26).

A gamificação, como caminho para motivar e incentivar a curiosidade dos educandos a aprender, pode trabalhar a autonomia e o trabalho em grupo para superar os obstáculos e chegar a um objetivo. Segundo Murr e Ferrari (2020, p. 14):

O processo de engajamento no jogo deve ser voluntário, é colaborativo e gera competição saudável entre as pessoas que participam da atividade. Esses aspectos são importantes ao se transpor a gamificação para a educação, pensando na dimensão social do conhecimento e na necessidade de envolvimento voluntário por parte do aluno, para que o processo de aprendizado tenha sucesso. Além disso, favorece o engajamento, incentiva a autoconfiança e a superação, além de fornecer ao estudante feedback constante[...].

É importante ressaltar que a competição provocada por jogos pode levar a pontos negativos dentro da educação e, portanto, o professor precisa planejar cuidadosamente para conseguir extrair, em suas aulas, os pontos positivos de se utilizar a gamificação quando provoca a competitividade.

Tratando ainda sobre o interesse dos alunos, os autores Orlandi, Duque, Mori (2018, p. 4) acrescentam:

Sob o prisma da educação, em que pese todos os recursos tecnológicos hoje disponíveis, deve ser considerado o aspecto motivacional dos alunos, considerando que determina o seu envolvimento no processo de aprendizagem. Com todos os atrativos que o mundo contemporâneo apresenta, faz-se necessário o uso de estratégias que capturem o interesse dos alunos, considerando-se também suas particularidades e qual o perfil motivacional que poderia ser aplicado. Neste contexto, a Multimodalidade tem muito a contribuir utilizando tecnologias contemporâneas, tais como vídeos, podcasts e imagens, entre outros, para motivar os alunos na sua jornada de aprendizagem.

A metodologia ativa gamificação por meio da plataforma Khan Academy possibilita um retorno contínuo do aprendizado. Dessa forma, a avaliação da aprendizagem também pode ser feita de um modo diferenciado. A plataforma dá esse retorno para o aluno e também para o professor sobre as questões certas e erradas e, por consequência, os conteúdos considerados como aprendidos e o que ainda falta compreender. Sobre a avaliação da aprendizagem, Murr e Ferrari (2020, p. 15) apontam:

A avaliação pode tomar também outra dimensão por causa desta característica dos games: sempre há uma nova chance. Podem-se abordar problemas e estratégias de forma diferente. Esse processo de tentar novamente, refazer, superar sua pontuação anterior etc. envolve aprender a se relacionar com o fracasso de forma positiva, e é importante também para o próprio processo de aprendizado. Muitos alunos vão conseguir superar os obstáculos na primeira vez; outros precisarão de várias chances. Nos games, isso é normal, e a motivação envolvida em alcançar um objetivo no universo dos jogos pode ser aproveitada, também, para alcançar objetivos educacionais.

A plataforma utilizada neste trabalho, a Khan Academy, traz essa oportunidade de repetir o quanto for preciso até alcançar o objetivo pretendido. Além disso, oferece dicas, vídeos e explicações por escrito sobre os conteúdos estudados. Sendo assim, os educandos têm a oportunidade de continuar avançando cada um em seu ritmo.

### 3.3 UM POUCO SOBRE O PORTAL DA MATEMÁTICA (OBMEP), O SENECALEARNING.COM E O BRICSMATH

#### O PORTAL DA MATEMÁTICA

O Portal da Matemática é um *site* que traz os conteúdos separados por série e, dentro de cada série, os conteúdos estão divididos em módulos. Abaixo, temos a imagem (figura 1) de como aparecem as séries para que se faça a escolha.

Figura 1 – Página inicial do *site* Portal da Matemática



Fonte: Portal da Matemática: <https://portaldaobmp.impa.br/index.php/site/index?a=1>. Acesso em:

2de jul. 2023.

Dentro da série escolhida aparecem os módulos onde estão os conteúdos a serem estudados que devem ser escolhidos, como podemos observar na imagem abaixo.

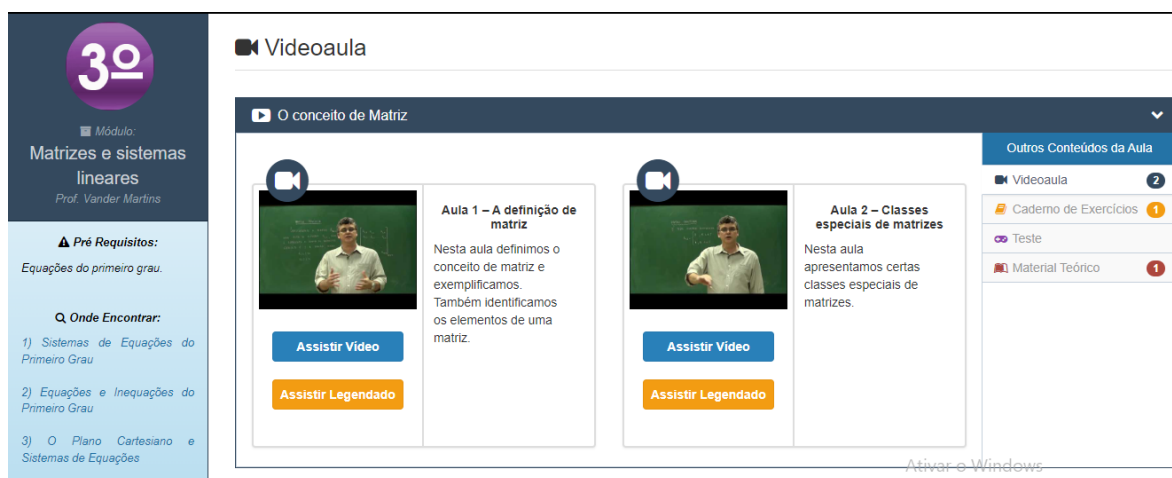
Figura 2 – Módulos do Portal da Matemática



Fonte: Portal da Matemática: <https://portaldaoimpepa.br/index.php/site/index?a=1>. Acesso em: 21 de jul. 2023

Ao acessar o módulo de matrizes, aparecem videoaulas separadas por conteúdo, material teórico, caderno de exercícios e um teste, conforme é possível observar na imagem abaixo.

Figura 3 – Página das Videoaulas do Portal da Matemática



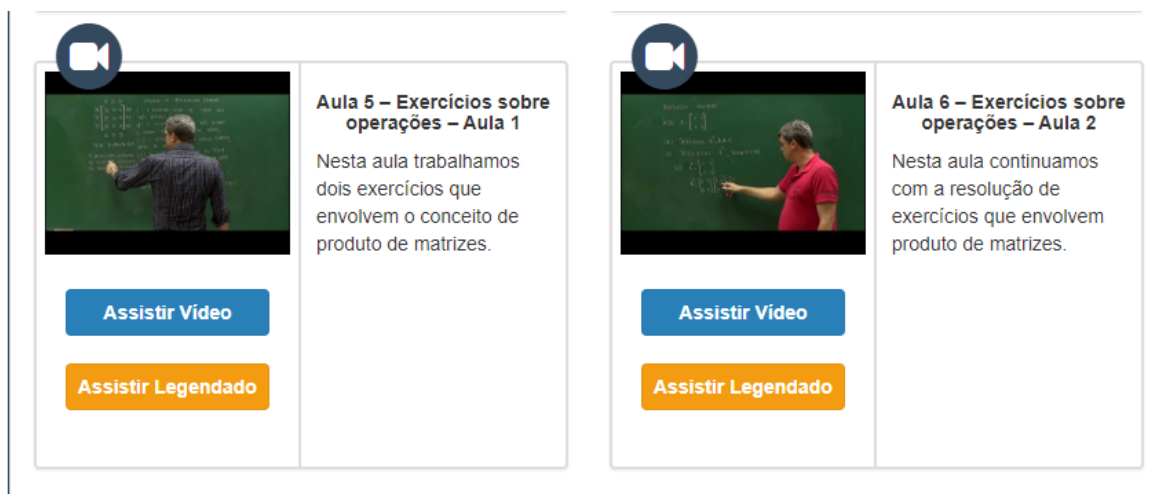
Fonte: Portal da Matemática: <https://portaldaoimpepa.br/index.php/modulo/ver?modulo=75>.

Acesso em: 21 de jul. 2023.

Além de videoaulas com a explicação dos conteúdos, há também videoaulas com exercícios resolvidos, conforme aparece na imagem abaixo.



Figura 4 – Videoaulas dos conteúdos disponíveis no Portal da Matemática



The image shows two side-by-side lesson cards from the Portal da Matemática. Each card features a video player icon at the top left, a video thumbnail showing a teacher at a chalkboard, a title, a brief description, and two buttons: 'Assistir Vídeo' (blue) and 'Assistir Legendado' (orange).

**Aula 5 – Exercícios sobre operações – Aula 1**  
 Nesta aula trabalhamos dois exercícios que envolvem o conceito de produto de matrizes.

**Aula 6 – Exercícios sobre operações – Aula 2**  
 Nesta aula continuamos com a resolução de exercícios que envolvem produto de matrizes.

Fonte: Portal da Matemática: <https://portaldabmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=75>.

Acesso em: 21 de jul. 2023

Considero um excelente *site* para trabalhar com os alunos quando o objetivo é o aprofundamento nos conteúdos e sempre indico para eles acessarem e estudarem por meio do portal da matemática. O *site* também trabalha bastante a autonomia dos estudantes que podem estudar sozinhos por meio das videoaulas apresentadas, material teórico e atividades. “O respeito à autonomia e à dignidade de cada um é um imperativo ético e não um favor que podemos ou não conceder uns aos outros”. (FREIRE, 1966, p.59)

Algumas características do *site* aparecem em desvantagem quando comparamos à plataforma utilizada em nossa pesquisa devido ao nosso objetivo de trabalhar em diferentes níveis de aprendizagem, por isso nossa escolha pela Khan Academy. Observe uma das atividades envolvendo o conceito de matriz e como o Portal da Matemática trata o erro do aluno.

Figura 5 – Modelo de atividade no Portal da Matemática

**Teste - Aula O conceito de Matriz**

**Pergunta**

Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 40 \end{pmatrix}.$$

**Resposta**

Resposta:

**Enviar resposta**

**Progresso**

**Acertos** 0 **Erros** 1

**Tempo**

**Ver Tempo**

---

**Resposta Incorreta**

**Pergunta**

Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 40 \end{pmatrix}.$$

**Sua Resposta**

12

**Resposta Correta**

56

**Explicação**

A soma dos elementos da diagonal principal é  $11 + 5 + 40 = 56$ .

Fonte: Portal da Matemática: <https://portaldabmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=75&tipo=6>.

Acesso em: 21 de jul. 2023

Quando o aluno erra a questão, o Portal da Matemática indica que a resposta está incorreta, descreve a solução da atividade e, em seguida, sugere outra atividade parecida. O site não oferece dicas para fazer o educando pensar sobre o exercício antes de ver a resposta nem videoaula para relembrar o conteúdo durante a atividade. Acreditamos que oferecer dicas ao invés de dar a resposta pronta pode incentivar a curiosidade do aluno em busca da solução, o que contribui para o aprendizado. Para

Freire (1996, p. 85):

Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino. Exercer a minha curiosidade de forma correta é um direito que tenho como gente e a que corresponde o dever de lutar por ele, o direito à curiosidade. Com a curiosidade domesticada, posso alcançar a memorização mecânica do perfil deste ou daquele objeto, mas não o aprendizado real ou o conhecimento cabal do objeto.

Segundo Berbel (2011, p.28):

As metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando-as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos.

Entendemos que respostas prontas não estimulam o aluno a raciocinar, dialogar com colegas e professores para alcançar o conhecimento pretendido com tal atividade e, muito menos, desperta a curiosidade do educando.

Além disso, não conseguimos identificar uma forma de acompanhar o progresso dos alunos por questão para visualizar em quais atividades estão tendo mais dificuldades. Só conseguimos ver quando o aluno completa uma tarefa, quando ganha um troféu e quantas questões ele realizou para conseguir atingir o objetivo. Acreditamos na importância de o professor ter uma visão mais ampla do que está ocorrendo durante a resolução dos exercícios a fim de que possa identificar, intervir, discutir, revisar e aprofundar nos conceitos com maiores dificuldades.

Pensar certo, do ponto de vista do professor, tanto implica o respeito ao senso comum no processo de sua necessária superação quanto o respeito e o estímulo à capacidade criadora do educando. Implica o compromisso da educadora com a consciência crítica do educando cuja "promoção" da ingenuidade não se faz automaticamente. (FREIRE, 1966, p.29)

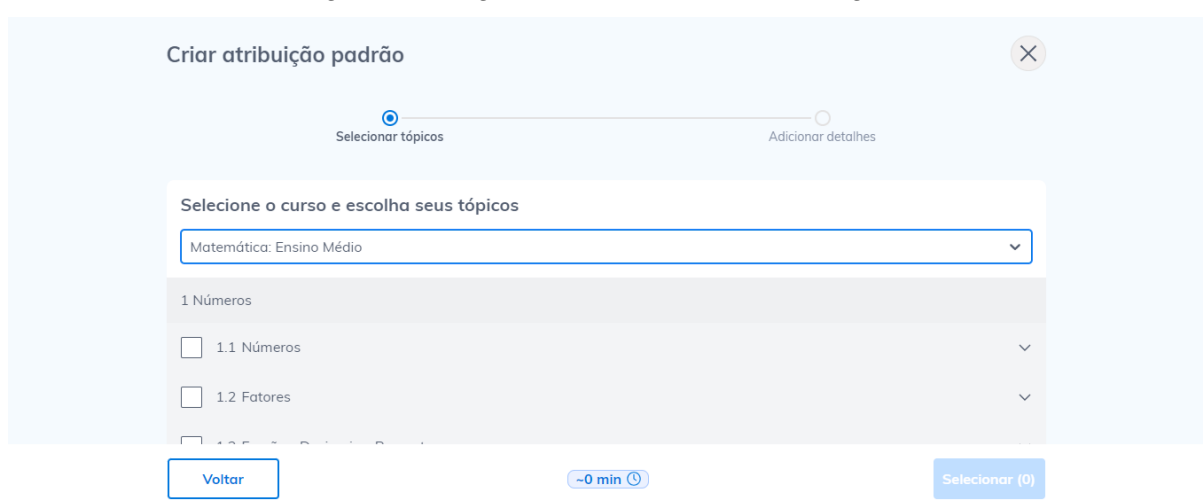
Acreditamos que não dar a resposta pronta para o aluno que erra a questão e mostrar ao professor o progresso do aluno com mais detalhes vai contribuir para o papel do professor como mediador na busca por conhecimentos e vai estimular a criatividade do aluno no processo de discussões para resolver os problemas.

## O SENECALEARNING.COM

O *site* senecalearning.com também é uma ótima opção para trabalhar com a metodologia ativa gamificação. Entretanto o conteúdo trabalhado em nossa pesquisa não foi encontrado neste *site*. Além disso, a forma como o portal trata os erros e acertos do aluno não trazem, em nossa opinião, a motivação e meios necessários para que o aluno entenda seu erro e consiga buscar o conhecimento para acertar como veremos mais adiante. Por isso a Khan Academy é, em nossa visão, mais completa e, portanto, foi a escolhida. Contudo, acreditamos na importância de falar um pouco sobre o senecalearning.com, já que também traz ferramentas diferenciadas que deixam o estudante participar da aula de forma ativa e não como mero repetidor de conteúdos.

Ao abrir o *site*, o professor encontra a página abaixo para escolher a atividade que será dada à turma.

Figura 6 – Página inicial do Senecalearning.com



Fonte: <https://app.senecalearning.com/teacher/assignments/create/topics>. Acesso em: 21 de jul.

2023

Importante observar que, antes de selecionar as atividades, o professor consegue ver como a tarefa aparecerá para os alunos.

Após selecionado o tópico e indicada a tarefa para a turma, os alunos visualizam suas atividades para fazerem suas resoluções como podemos observar na imagem abaixo:

Figura 7 – Página de atividades do Seneca Learning

Fonte: <https://app.senecalearning.com/teacher/class/q1gm9o9afo/assignments/overview>. Acesso em: 21 de jul. 2023

Observamos que, ao apresentar uma atividade, o *site* já dá uma dica antes mesmo de o aluno tentar. Seria interessante deixar o aluno pensar sozinho, tentar e a dica vir caso o estudante erre a questão. A explicação vem antes da atividade. Observe abaixo um exemplo de como aparece uma das atividades.

Figura 8 – Modelo de atividade no Seneca Learning

Fonte: <https://app.senecalearning.com/teacher/class/q1gm9o9afo/assignments/overview>. Acesso em: 21 de jul. 2023

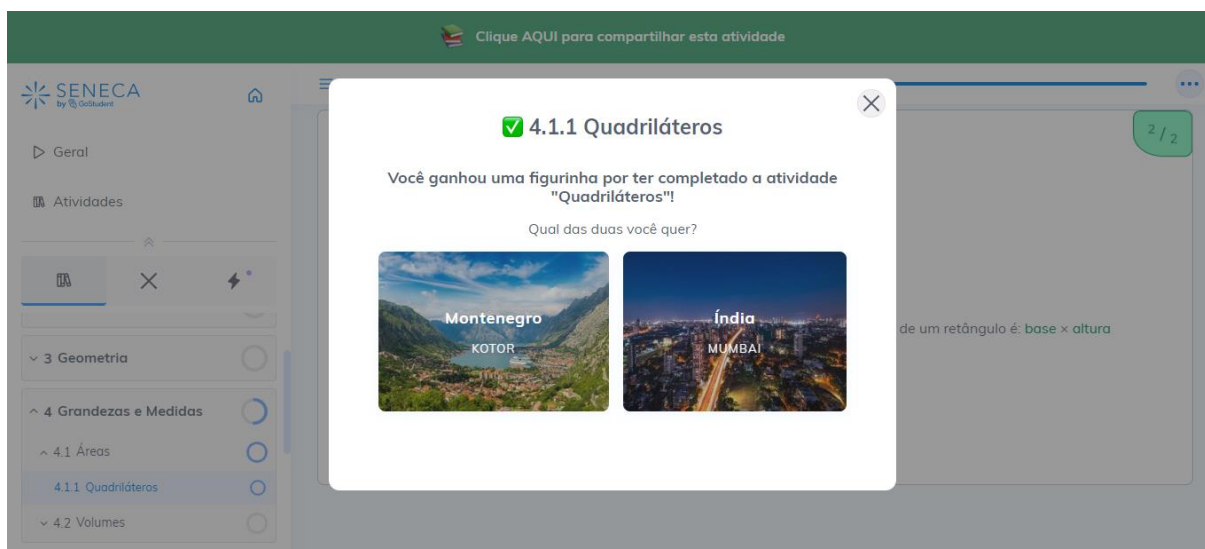
Quando o aluno acerta a questão, aparece uma mensagem rápida dizendo que está correto e já pula para a próxima questão. Caso o estudante erre a questão, o *site* mostra imediatamente a resposta correta e não traz dicas nem vídeos explicativos que

auxiliem na correta resolução dos problemas propostos e pula para a próxima pergunta. Acreditamos que uma proposta em que o educando não terá acesso a respostas prontas e sim disponibiliza meios para pesquisar e encontrar o que for preciso vai contribuir mais para despertar a curiosidade, a participação dos alunos nas aulas e para uma educação em que os indivíduos irão agir ativamente em sociedade e em sua vida pessoal após sair do contexto escolar, que são características da metodologia ativa gamificação. Segundo Orlandi, Duque, Mori (2018, p.23):

A Gamificação surge como uma proposta educacional de abordagem multimodal que visa fortalecer o processo de aprendizagem, pretendendo despertar o interesse, a curiosidade e a participação nos indivíduos, e ainda utilizar elementos modernos e prazerosos para a realização de tarefas e a conquista de objetivos.

Ao completar uma tarefa, o aluno ganha uma figurinha conforme pode ser vista na seguinte imagem:

Figura 9 – Página de finalização de atividade no Seneca Learning

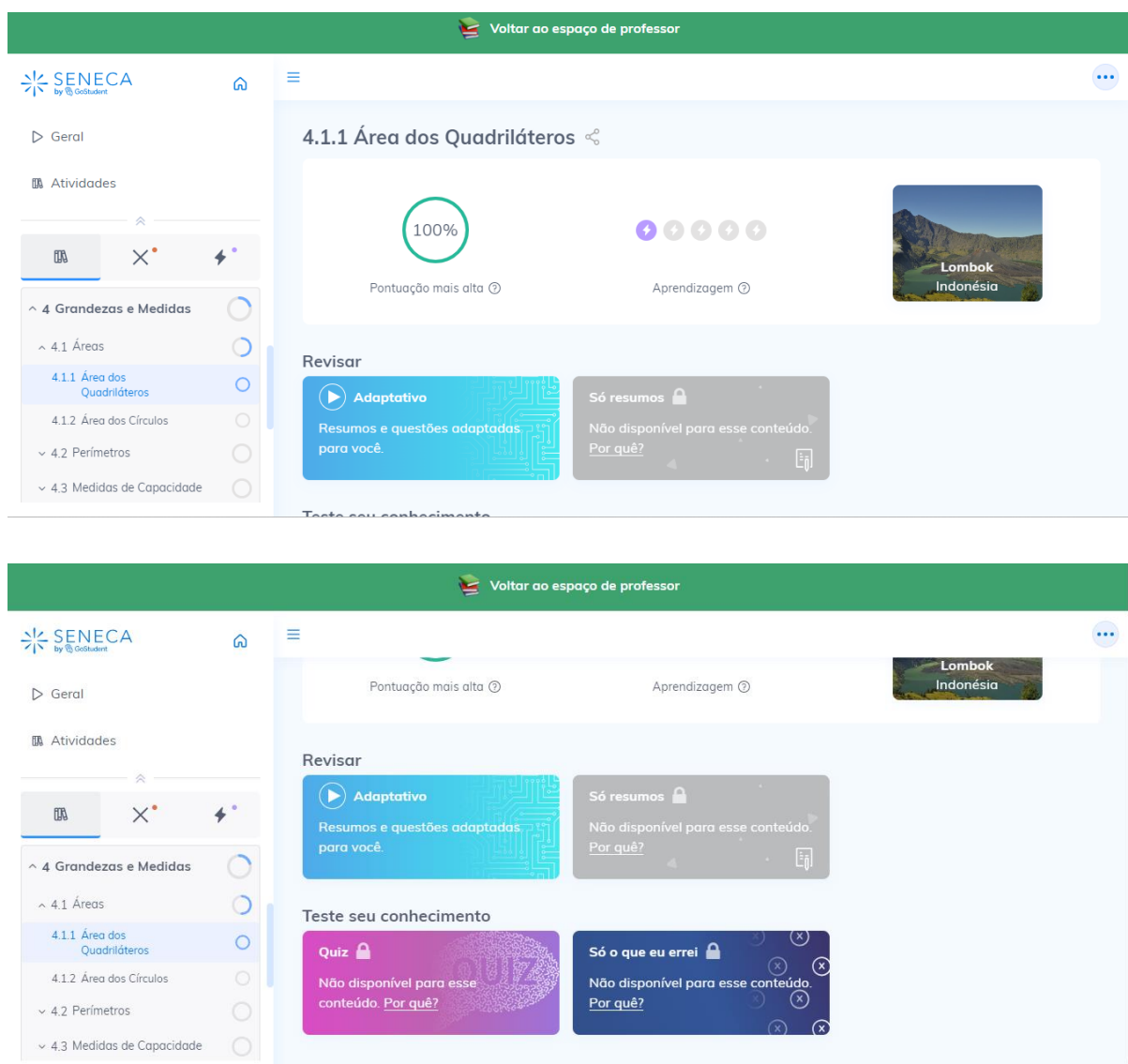


Fonte: <https://app.senecalearning.com/teacher/class/q1gm9o9afo/assignments/overview> Acesso em:

21 de jul. 2023

Ganhando uma figurinha, aparecem outras ferramentas de estudo para o estudante dar continuidade em seu progresso. Observe:

Figura 10 – Outras ferramentas de progresso do Seneca learning



Fonte: Site Seneca learning. <https://app.senecalearning.com/courses>. Acesso em: 21 de jul. 2023

Os recursos apresentados acima têm potencial para que o educando busque mais conhecimento de forma autônoma. Não é necessário que o professor indique a continuidade do estudo. O próprio *site* traz essas opções, o que contribui para a independência do estudante. Essa característica significa que o professor não está com o foco na transmissão de conhecimento e sim na mediação pela busca do mesmo e, segundo Moran (2013, p. 14), tem como consequência:

Importância maior do aluno ser mais protagonista, participante, através de situações práticas, produções individuais e de grupo e sistematizações progressivas. Inversão da forma tradicional de ensinar, (depois que o aluno tem as competências básicas mínimas de ler, escrever, contar): o básico o aluno aprende sozinho, no seu ritmo e o mais avançado, com atividades em grupo e a supervisão de professores.

A verificação do progresso dos alunos não é feita questão por questão. O professor visualiza o aluno que finalizou a atividade, a porcentagem de acertos e o tempo gasto pelo aluno para realizar as tarefas. Observe:

Figura 11 – Página de visualização do progresso do aluno

✗	-	-	-
✗	-	-	-
✓	2min 1s	100%	100%
✓	13min 17s	92%	92%
✗	-	-	-
✓	2min 9s	92%	92%
✓	5min 46s	100%	100%
✓	23min 24s	100%	100%
✗	-	-	-
✗	-	-	-
✓	4min 33s	83%	83%
✓	27min 55s	71%	71%
✗	-	-	-

Legend: ✓ Completo | ⌚ Atrasado | ✗ Incompletas

Page: 1 - 1 de 1

Fonte: Site Seneca learning. <https://app.senecalearning.com/courses>. Acesso em: 21 de jul. 2023

Esse formato em que o professor não visualiza o progresso questão por questão dificulta o papel do professor mediador que precisa entender onde estão as dúvidas dos alunos para fazer as intervenções necessárias.

## BRICSMATH

O BRICSMATH é um *site* em que também é possível trabalhar com a metodologia ativa gamificação. Entretanto não é uma ferramenta que traz o estudo de matemática por conteúdo e sim com desafios de raciocínio lógico. Como nossa intenção foi trabalhar com o conteúdo de matrizes, esse *site* não se adequa.

### 3.4 A KHAN ACADEMY

A Khan Academy é uma plataforma educacional que apresenta conteúdos de matemática, língua portuguesa, ciências, computação, ciências e engenharia, matemática avançada, economia e finanças e ciências humanas. Nessa plataforma, o professor recomenda atividades para os alunos que deverão realizá-las. Os alunos que não tiverem dificuldades para fazer a primeira atividade recomendada irão para



as próximas atividades. Já o aluno que encontrar dificuldades tem a opção de ver dicas ou assistir a um vídeo explicativo para tentar superar os obstáculos e conseguir resolver os exercícios propostos. Dessa forma, cada estudante vai aprendendo de acordo com o seu tempo e um não precisa esperar o outro para prosseguir ou o professor não precisa seguir adiante com o conteúdo mesmo tendo alunos com dificuldades ainda.

A criação da plataforma foi feita por Salman Khan em 2008. Tudo começou em 2004 quando Salman decidiu ajudar sua prima que estava com dificuldades em aprender matemática. Inicialmente, essa ajuda foi por telefone e, como a prima havia melhorado seu desempenho escolar em matemática, outros parentes buscaram sua ajuda. Devido a dificuldades em conciliar os horários, Salman começou a gravar vídeos e postar no Youtube, em 2006.

Em 2008, foi incorporado o modelo da plataforma Khan Academy em que Salman trabalhou durante o tempo livre até 2009. Depois, ele pediu demissão do seu emprego e passou a dedicar-se à plataforma conseguindo apoio financeiro para dar continuidade a seu projeto.

Sobre os motivos que levaram a Khan Academy a ser conhecida mundialmente:

Para cada estudante, dos 8 aos 80 anos, o próximo vídeo sempre seria uma descoberta pessoal. O conjunto seguinte de problemas e exercícios constituiria um desafio que cada um poderia enfrentar em seu próprio ritmo; não haveria vergonha ou estigma em um processo lento, nenhum horrível momento em que a turma precisa avançar. O arquivo de vídeos nunca iria embora; os alunos poderiam revê-los e refrescaram a memória sempre que precisassem. E erros seriam permitidos! Não haveria medo de desapontar um professor que está de olho nem de parecer burro perante os colegas. (Khan, 2013, p. 16)

Para Khan (2013), o modelo de sala de aula não atende às necessidades do mundo atual, pois é uma forma de aprendizagem passiva e precisamos de um processamento de informação mais ativo. Segundo o autor, o ensino a distância viabiliza que a educação de qualidade chegue a vários lugares do mundo e pessoas sem condições de estudar em escolas bem equipadas têm a mesma oportunidade de aprender que os outros alunos. Tratando sobre a forma de aprendizagem passiva comentada por Khan, conforme descrito acima, e colocando o aluno no centro do processo educativo como sujeito ativo, temos o que nos diz Freire (1996, p. 26):

[...] nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo.

Sobre a Khan Academy, Otobelli, Giron, Dall'Acua, Poloni, Puziski, Padilha, Webber, Spindola (2018, p.1) informam:

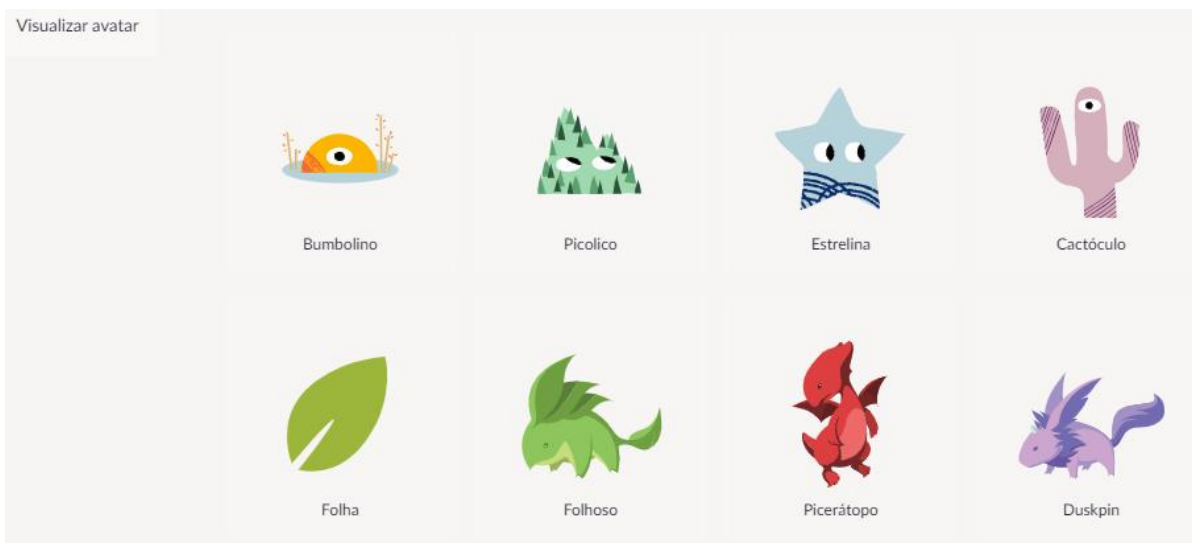
Essa instituição, criada por Salman Amin, possibilita a crianças, jovens e adultos do mundo inteiro, o acesso a todo material didático, disponibilizado em seu site, bem como oferece uma série de exercícios que ajudam na fixação de conteúdo. Além disso, possui um sistema que mapeia o desempenho do aluno em todo o processo de aprendizagem, o que habilita os estudantes a aprender no seu próprio ritmo, dentro e fora da sala de aula.

Além disso, a Khan Academy tem um formato que lembra um jogo, pois os alunos precisam subir o nível de domínio e alcançar o nível Proficiente para ganhar mais pontos de energia e depois medalhas que poderão utilizar para trocar por avatares, como é possível observar nas imagens abaixo.

The screenshot shows the 'Medalhas' (Badges) section of a user's profile on Khan Academy. On the left is a navigation menu with options: MEUS ITENS, Cursos, MINHA CONTA, Progresso, Perfil (selected), and Professores. The main content area is titled '< Perfil Medalhas' and displays six categories of badges: Medalhas de desafio, Medalhas Buraco negro, Medalhas Sol, Medalhas Terra, Medalhas Lua, and Medalhas Meteorito. Below this, there is a link to 'Verificar se há novas medalhas e avatares'. The 'Medalhas Meteorito' section is expanded, showing a list of specific achievements with their counts and last obtained dates:

- Boa sequência**: x9, Obtido pela última vez há 2 anos
- Ato I Cena I**: Obtido pela última vez há 3 anos
- Ganhando força**: x3, Esta medalha não existe mais! Você pode guardá-la para sempre, mas ninguém mais pod...
- Benjamin Franklin**: Obtido pela última vez há 7 anos
- Dedos das mãos ou dos pés**: Esta medalha não existe mais! Você pode guardá-la para sempre, mas ninguém mais pod...
- Nota dez**: Esta medalha não existe mais! Você pode guardá-la para sempre, mas ninguém mais pod...

Fonte: <https://pt.khanacademy.org/profile/nelsonbtsilva/badges>. Acesso em: 24 de out. 2023.



Fonte: <https://pt.khanacademy.org/profile/nelsonbtsilva/badges>. Acesso em: 24 de out. 2023.

Com essa configuração, a metodologia se torna atrativa para os estudantes que gostam de jogos e proporciona uma forma interessante e animada de estudar.

É muito comum os alunos se sentirem desmotivados a estudar matemática seja pelas dificuldades encontradas ou por não conseguirem relacionar o que está sendo trabalhado na escola com sua realidade, sendo assim é importante que professores tentem encontrar novas metodologias de ensino que estimulem a curiosidade e a vontade de aprender como nos dizem Menegais, Fagundes, Sauer (2015, p.3):

[...] buscar métodos inovadores que contribuam para a superação das dificuldades encontradas na disciplina de Matemática, que motivem e que envolvam o estudante em seu processo de desenvolvimento do raciocínio matemático, tomando consciência de que é preciso compreender os problemas para resolvê-los, é um desafio, tanto para as instituições educacionais, quanto para os professores.

Pensamos que o professor precisa estimular a criatividade do aluno e sair do método tradicional em alguns momentos, pelo menos, para que os estudantes experimentem outras formas de estudar e aprender estimulando sua capacidade criativa e curiosidade.

[...] a inconclusão que se reconhece a si mesma implica necessariamente a inserção do sujeito inacabado num permanente processo social de busca. Histórico-socioculturais, mulheres e homens nos tornamos seres em que a curiosidade, ultrapassando os limites que lhe são peculiares no domínio vital, se torna fundante da produção do conhecimento. Mais ainda, a curiosidade é já conhecimento. Como a linguagem que anima a curiosidade e com ela se anima, é também conhecimento e não só expressão dele. (FREIRE, 1966, p.55)

Segundo Faria, Luz (2016, p.2), “É fundamental que a escola e o professor busquem alternativas para se ensinar matemática para os alunos realmente aprenderem. Nada melhor do que a tecnologia para isso, uma vez que ela permeia tudo a nossa volta”.

Segundo Khan (2013, p. 17):

A tecnologia tem o poder de nos libertar dessas limitações, de fazer com que a educação seja muito mais portátil, flexível e pessoal; de incentivar a iniciativa e a responsabilidade individual; de restaurar a empolgação de se considerar o processo de aprendizagem uma caça ao tesouro. A tecnologia também oferece outro benefício em potencial: a internet pode tornar a educação muito, muito mais acessível, de modo que conhecimento e oportunidade sejam distribuídos de maneira mais ampla e igualitária. Educação de qualidade não precisa depender de instalações luxuosas.

Refletindo sobre o que nos diz Khan quanto à educação de qualidade não depender de instalações luxuosas, podemos citar Freire (1996) sobre lutar por transformação da realidade. Acreditamos que a educação tem um importante papel social e necessita trabalhar a criticidade do educando para que ele consiga entender o contexto em que vive e tenha ferramentas para modificar para melhor sua realidade.

A capacidade de aprender, não apenas para nos adaptar, mas sobretudo para transformar a realidade, para nela intervir, recriando-a, fala de nossa educabilidade a um nível distinto do nível do adestramento dos outros animais ou do cultivo das plantas. (FREIRE, 1996, p.69)

Dessa forma, a plataforma Khan Academy vem como uma opção de inovar as metodologias utilizadas e tentar atingir o maior número de estudantes possível. Nesse caso, o professor se torna o mediador na busca pelo conhecimento e os estudantes participam de forma ativa do processo. Sobre o papel do professor, Freire (1996, p.26, 27) aponta:

Percebe-se, assim, a importância do papel do educador, o mérito da paz com que viva a certeza de que faz parte de sua tarefa docente não apenas ensinar os conteúdos mas também ensinar a pensar certo.

Entender a educação diferente daquela dita por Freire (1996) como educação bancária e buscar metodologias que auxiliem no processo de ensinar e aprender sem que os alunos se tornem meros repetidores é um desafio constante e a tecnologia precisa ser incluída nas opções para inovar as metodologias tradicionais.

Sempre que é trabalhado um conteúdo novo, o professor precisa de avaliações que mostrem o que foi aprendido e o que ainda é preciso rever para alcançar o objetivo. Segundo Abe (2020, p.16):

Em relação ao processo ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica do Ensino Médio Público, é importante realizar avaliações periódicas para verificar se a finalidade apresentada está sendo atingida, ou seja, as verificações da aprendizagem buscam evidenciar se o ensino da Matemática está promovendo o pleno desenvolvimento de conhecimentos e habilidades dos estudantes, propiciando-lhes o exercício pleno de sua cidadania – associada aos conhecimentos matemáticos – e a sua qualificação para o mercado de trabalho.

Para avaliação da aprendizagem na Khan Academy, o professor pode acompanhar, em tempo real, a evolução bem como as dificuldades dos alunos por meio dos relatórios Visão Geral da Atividade, Progresso ou Notas. É possível verificar o tempo que cada aluno estuda na plataforma e as habilidades em que ocorreram o progresso. Dessa forma, o professor consegue planejar outras atividades para aprofundar o que foi aprendido ou reforçar aquilo que os alunos continuam tendo dificuldades.

### 3.5 LOCAL DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada na EEEFM TEÓFILO PAULINO. A escola se localiza no município de Domingos Martins – Espírito Santo, possui 15 salas de aula, biblioteca e um laboratório móvel de informática com 40 *Chromebooks*.

### 3.6 OS ENVOLVIDOS NA PESQUISA

Os sujeitos envolvidos foram alunos que cursavam a 2ª série do ensino médio, em 2021, e vêm dos municípios de Domingos Martins e Viana. Na escola, temos alunos que moram no centro de Domingos Martins e Viana e temos também aqueles que moram no interior e ajudam os pais no trabalho rural.

### 3.7 O CONTEXTO DA PANDEMIA DA COVID-19

A pesquisa foi realizada com os alunos no ano de 2021. Neste ano, a escola vivenciou uma situação diferente devido à pandemia da Covid-19, época em que os alunos não estiveram na escola todos os dias do ano. No início, havia um rodízio semanal de alunos que estudavam uma semana na escola e uma semana em casa no, então, chamado ensino remoto. Depois, esse rodízio passou a ser um dia na escola e um dia em casa e, por fim, no mês de outubro, tornou-se obrigatória a presença de todos os alunos na escola todos os dias.

Uma das formas mais frequentes no ensino remoto foi a utilização de ferramentas tecnológicas que favoreciam o aprendizado em casa enquanto os alunos estavam

distantes de seus professores. Nas turmas em que eu era o professor, a plataforma Khan Academy foi bastante utilizada, pois é bem completa, contém explicação do conteúdo de maneira escrita, apresenta videoaulas e exercícios para praticar o conhecimento adquirido.

Naquele contexto, que já vinha desde o ano de 2020, os problemas encontrados no processo de ensino e aprendizagem se intensificaram e tornaram-se mais evidentes os diferentes níveis alcançados por cada aluno. Fato que ampliou a desigualdade educacional. Aqueles que tinham computador e internet em casa conseguiram estudar com mais facilidade e os estudantes que não dispunham desses instrumentos ficaram mais defasados na aprendizagem. Com isso, os desafios da escola para garantir o aprendizado de todos aumentou significativamente.

O conteúdo abordado nessa pesquisa deveria ter sido trabalhado no segundo trimestre, porém, como tivemos menos tempo com os alunos, na sala de aula em 2021, o conteúdo atrasou e só conseguimos falar sobre matrizes no terceiro trimestre. Esse atraso na abordagem dos conteúdos foi uma das consequências da pandemia do coronavírus.

### 3.8 PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Os dados foram reunidos por meio de observação e registrados no diário de bordo.

## 4 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Vamos discutir, a seguir, sobre as atividades desenvolvidas nessa pesquisa com a utilização da plataforma Khan Academy, no ensino de matrizes, segundo as ideias da metodologia ativa gamificação.

### 4.1 UNIDADE: INTRODUÇÃO ÀS MATRIZES:

Nesta unidade, o objetivo foi trabalhar o conceito de matrizes apresentando as matrizes como tabelas.

Conteúdo: Matrizes

Tempo: 2 aulas de 50 minutos

Recursos didáticos: *Chromebooks*

Metodologia: Na primeira aula, foi feita uma breve exposição e discussão sobre o conceito de matrizes por meio de apresentação de tabelas e de identificação dos elementos bem como as dimensões de matrizes. Abaixo, seguem os conceitos que foram trabalhados de forma expositiva.

#### O CONCEITO DE MATRIZES:

EXEMPLO 1: Suponha que, em uma empresa de comercialização de veículos, as vendas, no primeiro semestre do ano de 2021, foram organizadas em uma tabela conforme apresentamos abaixo.

VEÍCULO	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
VEÍCULO A	2.457	3.851	2.936	3.232	1.101	2.789
VEÍCULO B	3.896	1.436	1.999	1.664	1.299	3.564
VEÍCULO C	2.538	1.987	1.457	1.099	2.322	1.088
VEÍCULO D	5.612	3.174	2.223	998	2.003	1.798

Dada a tabela acima, foram feitos os seguintes questionamentos:

- 1) Qual a quantidade de veículos do tipo C vendidos no mês de abril?
- 2) Qual a quantidade de veículos do tipo A vendidos no mês de fevereiro?
- 3) Ao todo, quantos veículos foram vendidos no mês de junho?
- 4) Quantos veículos do tipo D foram vendidos no primeiro semestre de 2021?

Os alunos, que já possuíam um conhecimento prévio para leitura e interpretação de tabela, conseguiram responder a esses questionamentos. A partir das respostas, o professor começou a tratar a ideia de linhas e colunas na apresentação da tabela fazendo as observações abaixo citadas.

Para responder à primeira pergunta, basta olhar o elemento que se encontra na terceira linha e quarta coluna.

Para responder à segunda pergunta, basta olhar o elemento que se encontra na

primeira linha e segunda coluna.

À terceira pergunta se responde somando os elementos da sexta coluna.

Para responder à quarta pergunta, foi feita a soma dos elementos da quarta linha.

Além de responder às perguntas e tratar da posição dos elementos, também fizemos a observação de que essa tabela (considerando apenas os valores) possui 4 linhas e 6 colunas.

EXEMPLO 2: Uma família que desejava contabilizar suas despesas com alimentação, durante os quatro primeiros meses do ano, registrou o consumo em Kg de alguns alimentos, conforme a tabela abaixo:

ALIMENTO	JANEIRO	FEVEREIRO	MARÇO	ABRIL
ARROZ	5 Kg	6 Kg	4 Kg	5 Kg
FEIJÃO	8 Kg	7 Kg	7 Kg	6 Kg
LEGUMES	7 Kg	8 Kg	6 Kg	7 Kg
CARNE	6 Kg	4 Kg	6 Kg	5 Kg

Dada a tabela acima, foram feitos os seguintes questionamentos:

- 1) Qual foi o consumo de arroz no mês de março?
- 2) Em que mês a família consumiu mais legumes?
- 3) Qual foi o total do consumo de carne nos quatro meses?

Para responder à primeira pergunta, precisamos verificar o elemento da primeira linha e terceira coluna. A fim de obter a resposta da segunda pergunta, é necessário comparar os valores da quarta linha e verificar qual é o maior. Para responder à terceira pergunta, precisamos somar os valores da quarta linha.

A tabela acima pode ser representada utilizando-se somente as informações numéricas da seguinte maneira:



$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Em tabelas onde colocamos somente os valores entre parênteses ou colchetes, como no exemplo acima, excluindo as linhas e as descrições, chamamos de matrizes. A enumeração das linhas é feita de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita. Para nomear uma matriz, utilizamos uma letra maiúscula do alfabeto e seus elementos são identificados por meio da mesma letra, porém minúscula, seguidos da sua posição na matriz. Na matriz acima, o elemento que consta na terceira linha e segunda coluna é o número 8. Dizemos que esse é o elemento  $a_{32}$ .

A dimensão de uma matriz é dada pelo número de linhas e o número de colunas. No exemplo acima, temos uma matriz 4 x 4 onde o primeiro número representa o número de linhas e o segundo o número de colunas. No primeiro exemplo da venda de veículos, obtemos uma matriz 4 x 6, com 4 linhas e 6 colunas.

Durante a aula, tivemos uma boa participação dos alunos. Entretanto, algumas dificuldades foram observadas pelo professor como a identificação dos elementos de acordo com sua posição indicada pela linha e pela coluna.

Visando minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos e proporcionar uma nova ferramenta para a aprendizagem, foram selecionados conteúdo e atividades na plataforma Khan Academy.

Tratando sobre um dos objetivos da educação D'Ambrosio (1996, p. 10) aponta:

[...] só faz sentido insistirmos em educação se for possível conseguir por meio dela um desenvolvimento pleno, e desenvolvimento pleno não significa melhores índices de alfabetização, ou melhores índices econômicos e controle da inflação, ou qualidade total na produção, ou quaisquer dos vários índices propostos por filósofos, políticos, economistas e governantes. Tudo se resume em atingirmos melhor qualidade de vida e maior dignidade da humanidade como um todo e isso se manifesta no encontro de cada indivíduo com outros.

Dessa forma, entendemos que apresentar uma nova metodologia para a aprendizagem que favorece o estudo autônomo contribui para que os indivíduos, após o período escolar, tenham conhecimentos que os ajudem a melhorar sua qualidade de vida, já que terá alguma prática em buscar por conhecimentos sem um professor.

Essa ideia está de acordo com os princípios das metodologias ativas segundo Diesel, Baldez, Martins (2017, p. 276):

[...] à medida que são oportunizadas situações de aprendizagem envolvendo a problematização da realidade em que esteja inserido, nas quais o estudante tenha papel ativo como protagonista do seu processo de aprendizagem, interagindo com o conteúdo ouvindo, falando, perguntando e discutindo, estará exercitando diferentes habilidades como refletir, observar, comparar, inferir, dentre outras, e não apenas ouvindo aulas expositivas, muitas vezes mais monologadas que dialogadas.

O protagonismo do educando citado acima, a autonomia e a reflexão sobre a prática do professor foi observado por nós também no que nos diz Freire (1996, p.64):

Ao pensar sobre o dever que tenho, como professor, de respeitar a dignidade do educando, sua autonomia, sua identidade em processo, devo pensar também, como já salientei, em como ter uma prática educativa em que aquele respeito, que sei dever ter ao educando, se realize em lugar de ser negado. Isto exige de mim uma reflexão crítica permanente sobre minha prática através da qual vou fazendo a avaliação do meu próprio fazer com os educandos.

Na segunda aula, cada aluno abriu a Khan Academy (onde já possuíam cadastro) e fizeram as atividades recomendadas da unidade Introdução às Matrizes. O professor acompanhou o progresso dos alunos por meio da plataforma e também por meio de observação.

Segue abaixo uma das atividades propostas que trabalhou a ideia de identificação dos elementos por meio da sua posição (linha  $i$  x coluna  $j$ ):

Figura 12 – Atividade proposta na Plataforma Khan Academy

× **Elementos da matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & -14 & 12 & -4 \\ 6 & -18 & 3 & -25 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

$A_{4,5} =$

Enroscou? [Veja os artigos/vídeos relacionados ou use uma dica.](#) [Relatar um problema](#)

Resolva todos os 4 problemas ○○○○

Nessa atividade, os estudantes deveriam saber identificar o elemento pedido de acordo com a sua posição na tabela. Alguns alunos confundiram linha com coluna e vice-versa. Nos momentos em que os alunos apresentaram dificuldades, o professor orientou a ver as dicas e assistir aos vídeos sugeridos na plataforma. Se, ainda assim, o aluno não conseguiu, foi feita uma intervenção para ajudar na compreensão.

Nos momentos em que foi necessária a intervenção do professor para auxiliar na compreensão, observamos o papel do professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem que é uma característica das metodologias ativas e, mais, especificamente, gamificação. Segundo Moran (2013, p. 9):

O articulador das etapas individuais e grupais é o docente, com sua capacidade de acompanhar, mediar, de analisar os processos, resultados, lacunas e necessidades, a partir dos percursos realizados pelos alunos individual e grupalmente.

Figura 13 – Aluno utilizando a Plataforma Khan Academy



Fonte: Arquivo pessoal

Trabalhar os conteúdos, utilizando ferramentas tecnológicas, traz novas possibilidades de ensino convidando o aluno para participar ativamente do processo e o torna protagonista da sua busca pela aprendizagem. Zanchettin (2020, p.21) nos aponta que:

Atualmente uma das formas mais utilizadas para aplicação de metodologias ativas é o ensino híbrido, que consiste em combinar o ensino presencial e experiências de ensino digital. A ideia é que educadores e estudantes possam ensinar e aprender em tempos e espaços variados constituindo um equilíbrio entre os espaços físicos e virtuais, potencializando o aprendizado.

Sobre a importância de levar aos estudantes o acesso à tecnologia para aprender Moran (2013, p. 2) aponta:

A tecnologia em rede móvel e as competências digitais são componentes fundamentais de uma educação plena. Um aluno não conectado e sem o domínio digital perde importantes chances de informar-se, de acessar materiais muito ricos disponíveis, de comunicar-se, de tornar-se visível para os demais, de publicar suas ideias e de aumentar sua empregabilidade futura.

Assim, utilizando a plataforma Khan Academy, foi possível proporcionar aos alunos essa experiência de ensino digital e verificar o progresso dos alunos no estudo de matrizes de forma virtual. As atividades propostas foram feitas de modo que o tempo de cada aluno fosse respeitado e alguns finalizaram mais rápido que outros. Com a utilização do *site* Khan Academy é possível rever os conceitos e receber dicas, se necessário, até conseguir o objetivo e avançar nos conhecimentos.

Segue abaixo como aparece o estudo dessa unidade na plataforma utilizada.

Figura 14 – Exemplo de estudo da Plataforma Kahn Academy

### Introdução às matrizes

Uma **matriz** é um arranjo retangular de números em linhas e colunas.

Por exemplo, a matriz  $A$  tem duas **linhas** e três **colunas**.

3 colunas

↓ ↓ ↓

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

← ← 2 linhas

## Dimensões de matrizes

As **dimensões** de uma matriz nos dizem seu tamanho: o número de linhas e colunas, *nessa ordem*.

Como a matriz  $A$  tem **duas linhas** e **três colunas**, nós escrevemos as dimensões como  $2 \times 3$ , pronuncia-se "dois por três".

Por outro lado, a matriz  $B$  tem **três linhas** e **duas colunas**, então é uma matriz  $3 \times 2$ .

Por outro lado, a matriz  $B$  tem **três linhas** e **duas colunas**, então é uma matriz  $3 \times 2$ .

$$B = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 23 & 12 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$$

Ao trabalhar com dimensões de matrizes, lembre-se de **linhas**  $\times$  **colunas**!

## Elementos de matrizes

Um **elemento de matriz** é simplesmente um dos números dentro dela. Cada elemento em uma matriz é identificado nomeando a linha e a coluna nas quais ele aparece.

Por exemplo, considere a matriz  $G$ :

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 14 & -7 \\ 18 & 5 & 13 \\ -20 & 4 & 22 \end{bmatrix}$$

O elemento  $g_{2,1}$  é aquele na **segunda linha** e na **primeira coluna**.

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 14 & -7 \\ 18 & 5 & 13 \\ -20 & 4 & 22 \end{bmatrix}$$

Neste caso  $g_{2,1} = 18$ .

Em geral, o elemento em **linha  $i$**  e **coluna  $j$**  da matriz  $A$  é denotado como  $a_{i,j}$ .

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

Seguem algumas das atividades que os alunos fizeram no estudo dessa unidade.

Figura 15 – Modelo de atividade da Plataforma

### Teste seu conhecimento

1) Quais são as dimensões da matriz  $D$ ?

$$D = \begin{bmatrix} -7 & 24 & 2 \\ 1 & 15 & 11 \\ -9 & 12 & 0 \\ 8 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

×

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 maio 2021

O objetivo dessa atividade foi observar o conhecimento adquirido pelos alunos para descrever a dimensão de uma matriz identificando o número de linhas e o número de colunas.

Figura 16 – Modelo de atividade da Plataforma

**Teste seu conhecimento**

4)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 1 & 5 & -5 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$a_{1,3} =$

**Verificar**

[\[Preciso de ajuda!\]](#)

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 maio 2021

Essa tarefa teve como objetivo perceber se o aluno era capaz de identificar os elementos em uma matriz dada a sua posição.

Figura 17 – Modelo de atividade da Plataforma

6)  $C$  é uma matriz  $2 \times 3$  com  $c_{1,2} = 6$ .

**Qual pode ser a matriz  $C$ ?**

Escolha 1 resposta:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

<input type="radio"/>	$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
<input type="radio"/>	$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 maio 2021

A finalidade dessa atividade também foi perceber se o aluno era capaz de identificar os elementos em uma matriz dada a sua posição.

Figura 18 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo Pessoal

De forma geral, os estudantes não tiveram grandes dificuldades para fazer essas tarefas propostas na plataforma Khan Academy. As dúvidas ocorreram, pois confundiram, em alguns momentos, se o primeiro valor se referia à linha ou coluna e vice-versa. Neste sentido, a utilização da plataforma foi bastante útil para auxiliar os estudantes, pois, quando o aluno erra a questão, a Khan Academy mostra uma mensagem informando o erro e pede para tentar novamente oferecendo ajuda. Veja abaixo:

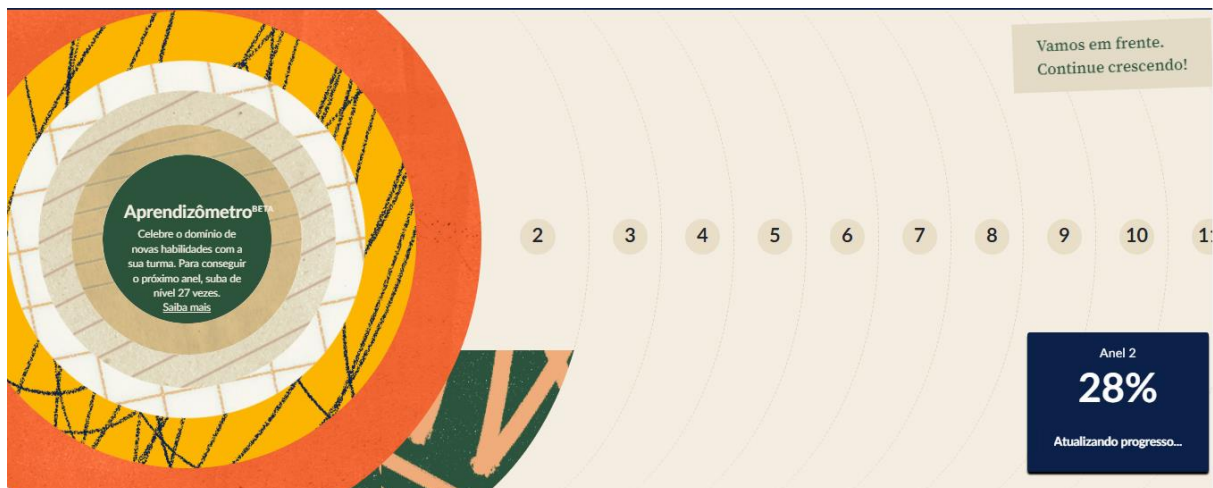


Figura 19 – Modelo de correção da Plataforma



Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 maio 2021

Esse formato em que o estudante, quando erra a questão, tem a oportunidade de refazer para chegar ao objetivo segue um modelo parecido com o de jogos. Quando o aluno acerta uma questão, ele vai ganhando pontos e, de acordo com seu progresso e quantidade de pontos, estes podem ser trocados por um avatar e, ainda, a plataforma tem o que se chama de aprendizômetro, conforme mostramos na imagem abaixo, que registra as competências e habilidades dos alunos.



Fonte: <https://pt.khanacademy.org/teacher/class/RQJFUZRY/learnstorm>. Acesso em: 24 de out. 2023

Assim, pudemos observar características da metodologia ativa gamificação na plataforma utilizada. Segundo Murr, Ferrari (2020, p.9):

Os elementos de jogos mais usados em gamificação são pontos, níveis, rankings, desafios, missões, medalhas, conquistas, integração, loops de engajamento, personalização, feedback, regras, narrativa, entre outros.

Observe que as atividades oferecidas pela plataforma trazem uma sequência que contribui para a assimilação de um conceito por vez para evoluir e dominar os conceitos. Segundo Khan (2013, p.15):

O que eu não queria era o melancólico processo que às vezes ocorria nas salas de aula – memorização mecânica e fórmulas automáticas dirigidas a nada mais duradouro ou significativo que uma nota boa na próxima prova. Ao contrário, eu esperava ajudar os alunos a enxergar as relações, a progressão, entre uma aula e a seguinte; ajudá-los a afiar suas intuições de modo que a mera informação, absorvendo um conceito por vez, pudesse evoluir para um verdadeiro domínio do tema. Em uma palavra, eu queria restaurar o entusiasmo – a participação ativa na aprendizagem, e a consequente empolgação – que os currículos convencionais às vezes pareciam subjugar à força.

Pudemos observar que as atividades dispostas dessa forma contribuíram para o progresso dos alunos no estudo do conceito de matrizes, entendendo a posição dos elementos e as dimensões. Além disso, usar a plataforma foi interessante, pois não só o professor observou o avanço dos alunos, mas também eles próprios acompanharam seu progresso.

Se o aluno acerta uma questão, a plataforma o parabeniza com uma mensagem de incentivo a continuar estudando. Veja:

Figura 20 – Modelo de correção da Plataforma



Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 maio 2021

As mensagens de incentivo que a plataforma inclui são motivadoras e ajudam para

que o estudante tenha vontade de continuar. Essas mensagens dão a ideia de desafio conquistado. Sobre essa motivação, Orlandi, Duque, Mori (2018, p.21) dizem:

Motivar o indivíduo leva a bons resultados pessoais e profissionais. Gamificar é valorizar a motivação intrínseca que enfatiza o significado pessoal, e leva à percepção do valor interno do indivíduo. Tem como base a autonomia (controle sobre sua própria vida), o domínio (fazer algo de valor por alguém ou por alguma coisa que importa) e propósito (objetivo e meta a alcançar).

Figura 21 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

Sentimos falta, nessa unidade, de atividades que envolvam aplicações cotidianas da ideia de matrizes. Acreditamos que problemas envolvendo o conceito de matrizes trazem a oportunidade de raciocinar sobre o tema e foca mais na interpretação, o que contribui para o desenvolvimento do educando e auxilia em sua vida após o período escolar. Segundo Zanini (2012, p.7), o estudo de matrizes:

[...] oferece aplicações em áreas diversas das exatas, além de propagandas, anúncios, pesquisas, organização de dados, aplicações essas não percebidas pelos alunos. Ocorre que, muitas vezes, é abordada apenas como mais um tópico a ser cumprido para a grade curricular, na qual se enfatiza a importância dos determinantes que são extraídos pelas matrizes.

D'Ambrosio (1996, p. 89) nos mostra:

O currículo dinâmico reconhece que nas sociedades modernas as classes são heterogêneas, reconhecendo-se entre os alunos interesses variados e enorme gama de conhecimentos prévios. Os alunos têm naturalmente grande potencial criativo, porém orientado em direções imprevistas, e com as motivações mais variadas.

Sendo assim, concluímos que questões contextualizadas desenvolvem o potencial criativo e aumentam a motivação dos alunos em estudar matrizes, além de valorizar os conhecimentos adquiridos fora do contexto escolar. Segundo Freire (1996, p.30):

Por isso mesmo pensar certo coloca ao professor, ou, mais amplamente, à escola, o dever de não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os das classes populares, chegam a ela saberes socialmente construídos na prática comunitária – mas também, como há mais de trinta anos venho sugerindo, discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino dos conteúdos.

Acreditamos que valorizando as experiências dos alunos fora da escola vamos estimular sua curiosidade e interesse nos conteúdos que, com a ajuda do professor, vão progredindo até formalizar os conceitos pretendidos e ampliar sua visão crítica do que foi aprendido e sua relação com a vida no exterior da escola.

Não há para mim, na diferença e na “distância” entre a ingenuidade e a criticidade, entre o saber de pura experiência feito e o que resulta dos procedimentos metodicamente rigorosos, uma ruptura, mas uma superação. A superação e não a ruptura se dá na medida em que a curiosidade ingênua, sem deixar de ser curiosidade, pelo contrário, continuando a ser curiosidade, se critica. (FREIRE, 1996, p.31)

A avaliação da aprendizagem foi feita por meio do acompanhamento do progresso de cada aluno na Khan Academy e observação do envolvimento nas atividades. O progresso pode ser analisado de acordo com a porcentagem de acertos em cada atividade proposta, conforme podemos observar na imagem abaixo.

**Painel de professor**  
**Pontuações de recomendações**

Veja aqui como seus alunos se saíram no conteúdo que você recomendou. Toque no nome de uma recomendação para ver relatórios mais detalhados.

Desde o início

Anterior | Próximo | Baixar arquivo CSV

ALUNOS	Determinante de uma matriz 3x3 Nov 29	Determinante de uma matriz 2x2 Nov 28	Soma e subtração matrizes Nov 28	Encontre a inversa de uma matriz 2x2 Nov 28	Multiplicação de matrizes por escalares Out 28	Dimensões da matriz Out 29	Elementos da matriz Out 30	Soma e subtração matrizes Out 30
<b>ALUNO 01</b>	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>ALUNO 02</b>	-	-	-	-	✓	-	-	50
<b>ALUNO 03</b>	-	100	100	100	✓	-	-	-
<b>ALUNO 04</b>	-	-	-	-	✓	100	100	75
<b>ALUNO 05</b>	-	100	100	-	✓	-	-	-
<b>ALUNO 06</b>	-	100	-	-	-	100	100	-

Fonte: [pt.khanacademy.org/teacher/class/MF6Y6F6D/assignment-scores](https://pt.khanacademy.org/teacher/class/MF6Y6F6D/assignment-scores). Acesso em: 30 out. 2023

Essa forma de avaliação difere daquela que tradicionalmente é aplicada nas escolas

com uma prova apenas e sem a chance de o aluno tentar novamente caso erre a questão. Sobre isso e a metodologia gamificação Murr, Ferrari (2020, p.14) apontam:

Quanto às formas de avaliação, esta é uma das mudanças que é preciso promover quando a gamificação é introduzida: em vez de uma só prova, várias tarefas precisam ser idealizadas, para que o processo faça sentido.

A metodologia ativa com uso de tecnologias que utiliza um material didático diferente de caderno, quadro branco e livros fez com que os alunos gostassem da proposta e se envolvessem nas atividades com empolgação e vontade de continuar.

## 4.2 UNIDADE: SOMA E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Nesta unidade, o objetivo é trabalhar a soma e a subtração de matrizes.

Conteúdo: Soma e Subtração de Matrizes

Tempo: 2 aulas de 50 minutos

Recursos didáticos: *Chromebooks*

Metodologia: Na primeira aula, foi feita uma breve exposição de como somar e subtrair matrizes. Abaixo seguem os conceitos que foram trabalhados de forma expositiva.

### ADIÇÃO DE MATRIZES

Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , a soma delas, representada por  $A + B$ , é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , em que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . Isto é, cada elemento da matriz  $C$  é a soma dos elementos correspondentes das matrizes  $A$  e  $B$ .

EXEMPLO 1: Dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ , temos que:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 + 17 & -2 + 8 \\ -4 + 6 & 1 + (-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO 2: Sabendo que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 12 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -11 \\ 6 & 9 & 14 \end{pmatrix}$ , vamos calcular a matriz  $C = A + B$ .

Solução:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 + (-4) & 7 + (-8) & 12 + (-11) \\ 5 + 6 & -3 + 9 & -1 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 11 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

### SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , a diferença entre elas, representada por  $A - B$ , é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , em que  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ , com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . A diferença entre as matrizes  $A$  e  $B$  também pode ser obtida por meio da adição de  $A$  com a oposta de  $B$ , isto é,  $A - B = A + (-B)$ .

EXEMPLO 1: Dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ , temos que:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} -4 - 13 & -1 - 0 \\ -4 - (-6) & 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO 2: Sabendo que  $A = \begin{pmatrix} 22 & 7 & 12 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ 6 & 9 & 14 \end{pmatrix}$ , vamos calcular a matriz  $C = A - B$ .

Solução:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 22 - (-4) & 7 - (-8) & 12 - (-4) \\ 5 - 6 & -6 - 9 & -1 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 16 \\ -1 & -15 & -15 \end{pmatrix}.$$

Durante a explicação, os alunos consideraram a soma e subtração de matrizes fácil de se fazer e participaram com entusiasmo na resolução dos exemplos.

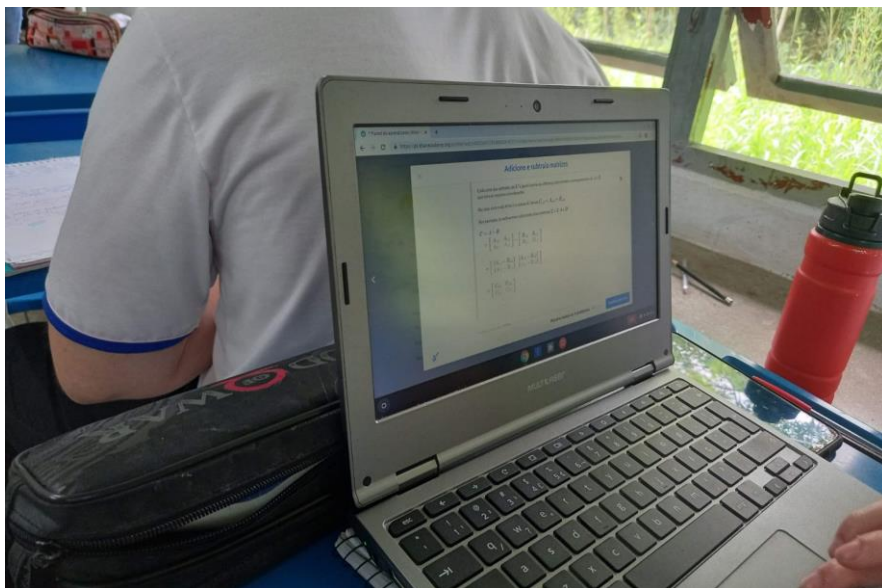
Na segunda aula, cada aluno abriu a Khan Academy e fez as atividades recomendadas da unidade "Soma e subtração de matrizes". O professor acompanhou o progresso dos alunos por meio da plataforma bem como por meio de observação. Alguns alunos apresentaram falta de atenção na resolução dos exercícios propostos na plataforma. Os erros ocorreram principalmente devido a não observação da operação indicada soma ou subtração também com relação aos elementos correspondentes nas matrizes dadas. O professor levantou questões que auxiliaram os alunos a pensarem e interpretar o que foi pedido e, também, orientou a ver as dicas e assistir aos vídeos sugeridos na plataforma. Nesse momento, observamos o papel do professor como mediador no processo de ensino e aprendizagem como nos mostra D'Ambrosio (1996, p.79,80):

O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar e processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos, e isso é essencialmente o que justifica a pesquisa.

Com relação ao levantamento de questões pelo professor para fazer com que os estudantes raciocinem sobre o assunto, traz a proposta de professor mediador que coloca o aluno como sujeito do processo de aprendizagem e não como alguém passivo que apenas escuta e absorve o que é dito. Podemos verificar essa ideia no que nos diz Freire (1996, p.58, 59):

Quando saio de casa para trabalhar com os alunos, não tenho dúvida nenhuma de que, inacabados e conscientes do inacabamento, abertos à procura, curiosos, “programados, mas, para aprender”, exercitaremos tanto mais e melhor a nossa capacidade de aprender e de ensinar quanto mais sujeitos e não puros objetos do processo nos façamos.

Figura 22 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

O professor como mediador e não como o responsável por transmitir conhecimento e a utilização de plataformas digitais que favorecem estudos independentes são importantes características de metodologias ativas em que o aluno é o centro do processo o que favorece o desenvolvimento da autonomia dos educandos. Segundo Berbel (2011, p. 28):



A implementação dessas metodologias pode vir a favorecer uma motivação autônoma quando incluir o fortalecimento da percepção do aluno de ser origem da própria ação, ao serem apresentadas oportunidades de problematização de situações envolvidas na programação escolar, de escolha de aspectos dos conteúdos de estudo, de caminhos possíveis para o desenvolvimento de respostas ou soluções para os problemas que se apresentam alternativas criativas para a conclusão dos estudos ou da pesquisa, entre outras possibilidades.

Falando em alternativas criativas, podemos incluir o que nos diz Freire (1996, p.107) sobre autonomia e liberdade.

A autonomia, enquanto amadurecimento do ser para si, é processo, é vir a ser. Não ocorre em data marcada. É neste sentido que uma pedagogia da autonomia tem de estar centrada em experiências estimuladoras da decisão e da responsabilidade, vale dizer, em experiências respeitosas da liberdade.

Dessa forma, entendemos que a metodologia ativa gamificação por meio da plataforma Khan Academy dá mais liberdade para o aluno pensar, discutir e desenvolver meios para resolver o que é preciso. Assim acreditamos ser um caminho para favorecer a criticidade do educando que, posteriormente, poderá utilizar os conhecimentos e experiências vividos em sala de aula para modificar a realidade social para melhor. Segundo Freire (1996, p.98):

Outro saber de que não posso duvidar um momento sequer na minha prática educativo-crítica é o de que, como experiência especificamente humana, a educação é uma forma de intervenção no mundo. Intervenção que além do conhecimento dos conteúdos bem ou mal ensinados e/ou aprendidos implica tanto o esforço de reprodução da ideologia dominante quanto o seu desmascaramento.

Ao tratar das formas de aprendizagem e o tempo das pessoas para alcançar os objetivos de aprendizagem, Khan (2013, p. 23) afirma:

[..] Elas aprendem em ritmos diferentes. Algumas parecem assimilar tudo em rápidos lampejos de intuição; outras avançam a duras penas rumo à compreensão. Mais rápido não significa necessariamente mais inteligente, mais devagar com certeza não significa mais burro, e entender depressa não é o mesmo que entender bem. Logo, o ritmo da aprendizagem é uma questão de estilo, não de inteligência relativa. É bem possível que a tartaruga acabe obtendo mais conhecimento – conhecimento mais útil, mais duradouro – do que a lebre.



Para aqueles alunos que apresentaram dificuldades, o tempo para finalizar as tarefas dessa unidade foi diferente dos alunos que facilmente fizeram todas as tarefas propostas. Essa é uma característica importante que a plataforma apresenta na compreensão e evolução do conhecimento. Cada estudante tem um tempo diferente para aprender e estudar adição e subtração de matrizes por meio da Khan Academy respeitou o tempo de cada um. Dessa forma, percebe-se que o uso de ferramentas tecnológicas pode auxiliar o processo de aprendizagem conforme o tempo de cada aluno.

Segundo Faria, Luz (2016, p.2):

[...] torna-se cada vez mais necessário que a escola se aproprie dos recursos tecnológicos, dinamizando o processo de aprendizagem. Como a educação e a comunicação são indissociáveis, o professor pode utilizar-se de um aparato tecnológico na escola visando à transformação da informação em conhecimento.

D'Ambrosio (1996, p. 90) diz que:

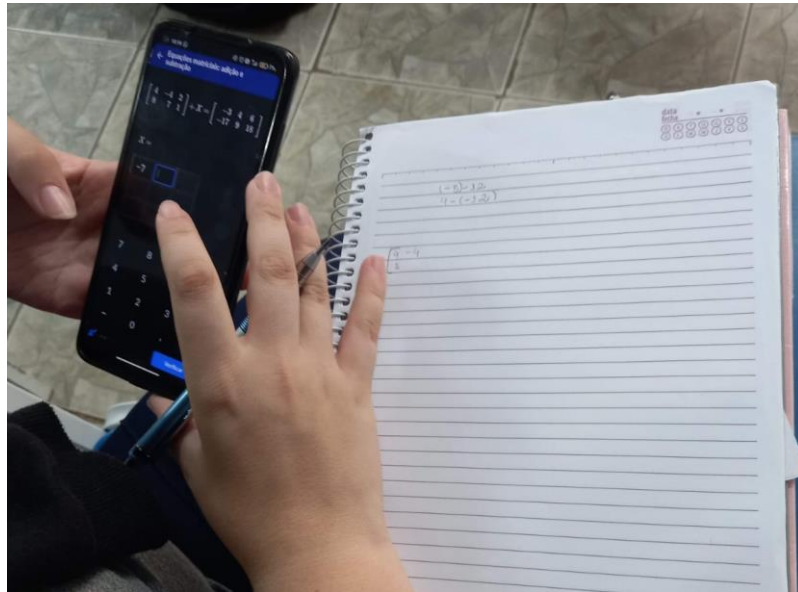
A função do professor é a de um associado aos alunos na consecução da tarefa, e conseqüentemente na busca de novos conhecimentos. Alunos e professores devem crescer, social e intelectualmente, no processo.

Vendo a função do professor como um associado ao aluno e que alunos e professores devem crescer no processo como foi citado por D'Ambrósio, identificamos uma citação de Freire (1996, p. 69, 70):

[...] toda prática educativa demanda a existência de sujeitos, um que, ensinando, aprende, outro que, aprendendo, ensina, daí o seu cunho gnosiológico; a existência de objetos, conteúdos a serem ensinados e aprendidos; envolve o uso de métodos, de técnicas, de materiais; implica, em função de seu caráter diretivo, objetivo, sonhos, utopias, ideais.

Assim, destacamos o uso da plataforma Khan Academy no estudo de soma e subtração de matrizes que foi aprimorado, durante a realização das tarefas, bem como as discussões que as dúvidas trouxeram para a intervenção do professor. As discussões feitas nas aulas para que o educando consiga chegar ao conhecimento pretendido é uma característica de metodologias ativas onde o professor é o mediador da troca de informações entre professor e alunos.

Figura 23 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

Segue abaixo como aparece o estudo dessa unidade na Plataforma utilizada.

Figura 24 – Modelo de estudo da Plataforma

## Soma de matrizes

Dadas  $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ , vamos calcular  $A + B$ .

Podemos calcular a soma simplesmente somando os elementos correspondentes nas matrizes  $A$  e  $B$ . Isso é mostrado abaixo.

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 1 & 8 + 0 \\ 3 + 5 & 7 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, para subtrair matrizes, subtraímos os elementos correspondentes.

Por exemplo, vamos considerar  $C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ .

Podemos calcular  $C - D$  subtraindo os elementos correspondentes nas matrizes  $C$  e  $D$ . Isso é mostrado abaixo.

$$C - D = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 5 & 8 - 6 \\ 0 - 11 & 9 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

Seguem algumas das atividades que os alunos fizeram no estudo dessa unidade.

Figura 25 – Modelo de Atividade da Plataforma

## Teste seu conhecimento

1)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

$A + B =$ 


Verificar

2)

$$\begin{bmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Verificar

### Teste seu conhecimento

$$3) X = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 10 & 22 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$X - Y = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Verificar

4)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & 6 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

Verificar

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

Essas atividades tiveram como objetivo praticar e aprimorar o conhecimento aprendido na sala de aula. Nesse caso, o conceito de soma e subtração de matrizes. Os alunos não tiveram grandes dificuldades nessas tarefas e as dicas que a plataforma apresentou foram importantes para que os estudantes conseguissem tirar

suas dúvidas sem a necessidade da intervenção do professor em cada dificuldade ou erro apresentado. Sobre a Khan Academy, segundo Otobelli, Giron, Dall'Acua, Poloni, Puziski, Padilha, Webber, Spindola (2018, p.1):

Com o avanço da tecnologia e a facilidade de acesso à internet, o processo de ensino e aprendizagem pode ser beneficiado por recursos tecnológicos tais como o *site* da Khan Academy. Assim, diversos materiais estão disponíveis na internet com o intuito de auxiliar o aprendizado e dar certa independência aos estudantes, permitindo o acesso a qualquer momento, conforme a necessidade e o tempo de aprendizagem.

A ideia de utilizar a plataforma no ensino de soma e subtração de matrizes tinha como objetivo a autonomia dos alunos durante o estudo e concluímos que a Khan Academy cumpriu esse papel de acordo com as expectativas. Como já foi dito anteriormente, os alunos, em sua maioria, conseguiram tirar suas dúvidas a partir dos recursos oferecidos pelo *site* em questão ou em discussões entre eles. Segundo D'Ambrosio (1996, p. 68):

Conceituo educação como uma estratégia da sociedade para facilitar que cada indivíduo atinja o seu potencial e para estimular cada indivíduo a colaborar com outros em ações comuns na busca do bem comum.

Utilizar meios tecnológicos para promover discussões entre os educandos é uma das opções de metodologias ativas que auxiliam no processo de independência para se aprender. É por meio das discussões e intervenção do professor mediador que se destaca o aluno como o centro do estudo e não simplesmente indivíduos passivos que apenas recebem uma grande quantidade de informações. Valente (2018, p.27) diz:

As metodologias ativas constituem alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem no aprendiz, envolvendo-o na aprendizagem por descoberta, investigação ou resolução de problemas. Essas metodologias contrastam com a abordagem pedagógica do ensino tradicional centrado no professor, que é quem transmite a informação aos alunos.

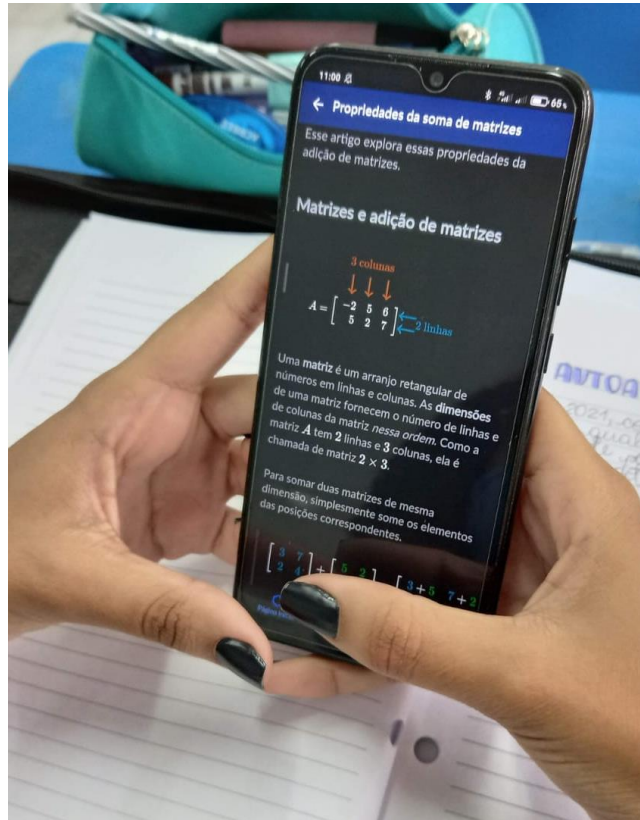
Tratando da evolução que vivemos, Orlandi, Duque, Mori (2018, p. 18) nos mostram:

O segmento da educação deve acompanhar a evolução da sociedade contemporânea, estabelecer novos valores, procurar novas descobertas, absorver novas ideias, entendimentos e rotinas que permitam a criação de um ambiente propício para o aprendizado, delineando experiências significativas e despertando os indivíduos para o saber de forma a ajudá-los no seu desenvolvimento pessoal e intelectual.

Dessa forma, podemos incluir as tecnologias utilizadas cada vez mais por toda população no cotidiano. Os celulares estão nas mãos dos adolescentes em sala de

aula e aproveitá-los para estudar traz uma alternativa a fim de aumentar a motivação dos aprendizes.

Figura 26 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

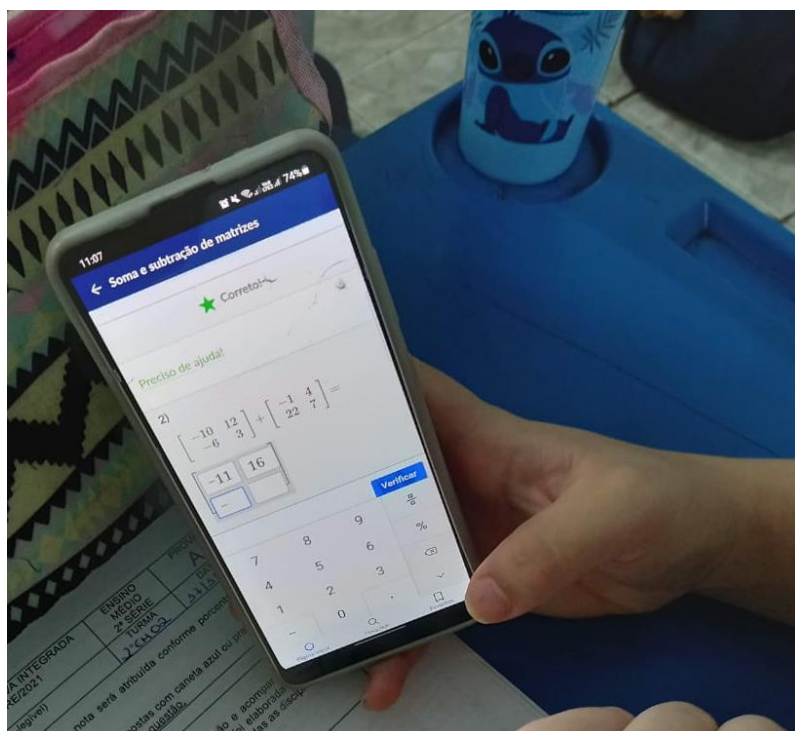
Além da autonomia dos alunos, praticar adição e subtração de matrizes por meio de tecnologias educacionais, partindo de uma metodologia ativa, é uma forma de buscar o interesse dos alunos pela atividade desenvolvida. Para os jovens, o uso das ferramentas tecnológicas faz parte do dia a dia e, nesse caso, eles são chamados a se envolverem no processo de construção do conhecimento. Segundo Diesel, Baldez, Martins (2017, p.275):

[...] é possível afirmar que as metodologias ativas, quando tomadas como base para o planejamento de situações de aprendizagem, poderão contribuir de forma significativa para o desenvolvimento da autonomia e motivação do estudante à medida que favorece o sentimento de pertença e de coparticipação, tendo em vista que a teorização deixa de ser o ponto de partida e passa a ser o ponto de chegada, dado os inúmeros caminhos e possibilidades que a realidade histórica e cultural dos sujeitos ensina.

Assim, vimos que a plataforma contribuiu para que os estudantes agissem de acordo com a proposta de educação, buscando por informações até atingir o objetivo, seja

individualmente ou em grupos.

Figura 27 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

Novamente queremos destacar que as atividades da plataforma não vieram contextualizadas e não exigiram a interpretação de texto dos alunos. Para aprimorar as questões dadas pela plataforma, acreditamos ser necessário buscar atividades que mostrem a aplicabilidade do conteúdo em questão. Sobre as matrizes, segundo Zanini (2012, p.9):

Em uma análise mais aprofundada, é possível perceber que elas fazem parte do cotidiano, seja em anúncios de propagandas ou uma mostra de opiniões de determinada pesquisa, em tabelas de comparações de preços, em jogos de passatempo, em organização de tabelas de horários de uma empresa e outras situações que não percebemos devido ao uso corriqueiro.

Dessa forma, é possível perceber o papel do professor que precisa buscar, em outros materiais, diferentes formas de trabalhar exercícios a fim de complementar o estudo de matrizes. Segue abaixo um exemplo de atividade contextualizada, retirada do livro **Matemática Interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica** (ANDRANDE, 2020), que foi trabalhada em aula.

A matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$  representa os veículos vendidos pela filial **A** de uma

concessionária, sendo o elemento  $a_{ij}$  a quantidade de veículos vendidos no mês  $i$  do trimestre  $j$  de 2020. De maneira análoga, a matriz  $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$  representa as vendas de veículos realizadas pela filial **B**, no mesmo período.

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 16 & 20 & 21 \\ 19 & 10 & 14 & 17 \\ 21 & 15 & 14 & 28 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 32 & 21 & 20 & 22 \\ 26 & 18 & 17 & 21 \\ 21 & 19 & 16 & 34 \end{pmatrix}$$

- Em quais meses as filiais venderam a mesma quantidade de veículos?
- Determine a matriz  $A + B$ .
- Quantos veículos, no total, foram vendidos pelas duas filiais no 3º trimestre de 2020?

A avaliação da aprendizagem foi feita por meio do acompanhamento do progresso de cada aluno na Khan Academy. Observe que a avaliação da aprendizagem não foi com aplicação de questionários e provas como tradicionalmente é feito. Utilizamos a ferramenta tecnológica que nos possibilitou analisar o que o aluno havia aprendido e o que ainda havia para aprender. Essa forma de avaliação cumpre seu objetivo conforme nos ensina D'Ambrósio (1996, p. 70):

A avaliação serve para que o professor verifique o que de sua mensagem foi passado, se seu objetivo de transmitir ideias foi atingido – transmissão de ideias e não a aceitação e a incorporação dessas ideias e muito menos treinamento.

#### 4.3 UNIDADE: COMO MULTIPLICAR UM ESCALAR POR UMA MATRIZ E MATRIZES POR MATRIZES

Nesta unidade, o objetivo foi trabalhar a multiplicação de matrizes.

Conteúdo: Multiplicação de Matrizes

Tempo: 2 aulas de 50 minutos

Recursos didáticos: *Chromebooks*

Metodologia: Fizemos, na primeira aula, uma breve exposição de como multiplicar um escalar por uma matriz e como multiplicar matrizes. Abaixo seguem os conceitos que



foram trabalhados de forma expositiva.

### MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ

Sejam a matriz  $A = (a_{ij})$  de ordem  $m \times n$  e um número real  $k$ . Ao multiplicarmos  $k$  pela matriz  $A$ , obtemos a matriz  $B = (b_{ij})$  de ordem  $m \times n$ , tal que  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ , com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

EXEMPLO 1: Se  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$  e  $K = 2$ , temos:

$$KA = 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

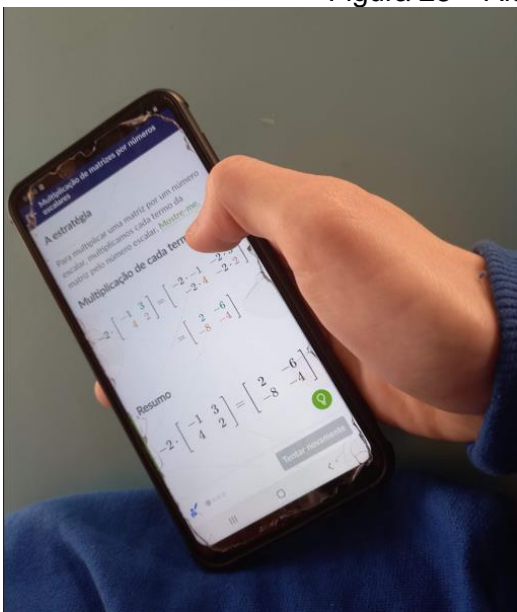
EXEMPLO 2: Dados  $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 3 \\ 7 & -20 \end{bmatrix}$  e  $K = -1$ , determine  $KA$ .

Solução:

$$KA = -1 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 3 \\ 7 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 10 & -1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 & -1 \cdot 3 \\ -1 \cdot 7 & -1 \cdot (-20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -1 \\ -2 & -3 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}$$

Multiplicar um número real por uma matriz não foi de difícil compreensão pelos alunos. Por isso, feitos os exemplos de multiplicação de um número real por uma matriz e as atividades da plataforma, já demos início ao conceito de multiplicação de matrizes.

Figura 28 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

## MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})$  de ordem  $m \times n$  e  $B = (b_{ij})$  de ordem  $n \times p$ , o produto de A por B é a matriz  $C = (c_{ij})$  de ordem  $m \times p$ , em que cada elemento  $c_{ij}$  é a soma dos produtos dos elementos da linha  $i$  de A pelos elementos da coluna  $j$  de B, tomados ordenadamente. Indicamos o produto dessas matrizes por  $A \cdot B$  ou  $AB$ .

O produto  $A \cdot B$  de duas matrizes só é possível se a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B. Dessa maneira, a matriz C terá a mesma quantidade de linhas de A e a mesma quantidade de colunas de B.

$$A \ m \times \ n \ . \ B \ n \times \ p = C \ m \times \ p$$

EXEMPLO: Dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , determine a matriz C, tal que  $C = A \cdot B$ .

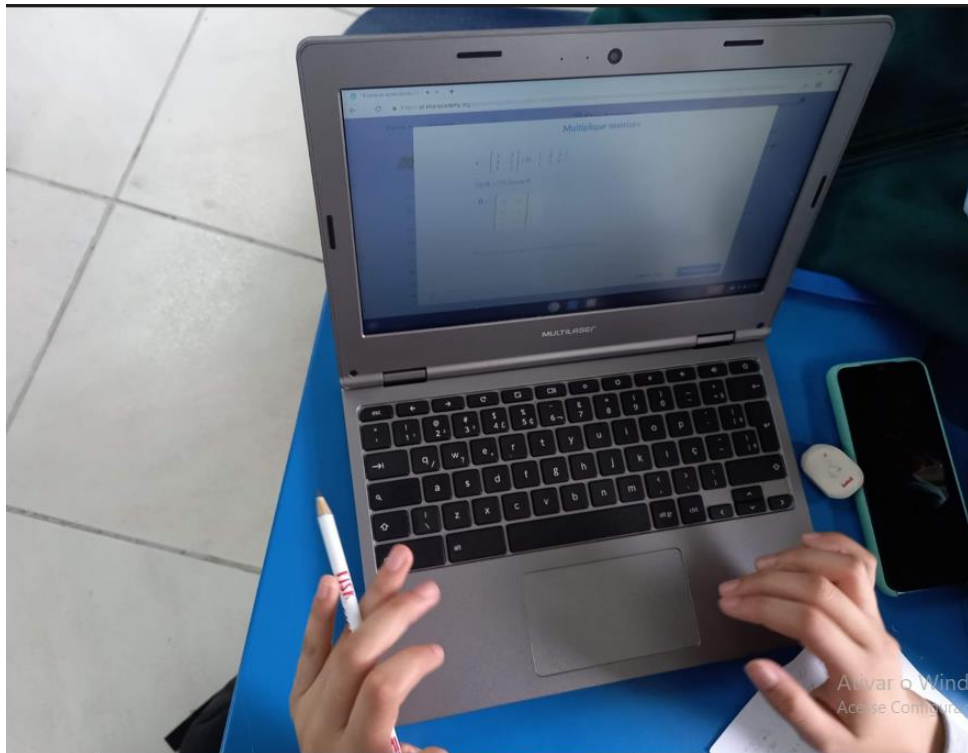
$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \cdot 6 + (-3) \cdot (-7) & 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) \\ -2 \cdot 6 + 1 \cdot (-7) & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 6 + 4 \cdot (-7) & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 51 & 5 & 13 \\ -19 & -2 & -5 \\ -28 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Este foi o conceito de maior dificuldade para o entendimento dos alunos. Além da dificuldade para interpretar problemas, os estudantes tiveram dúvidas para executar a multiplicação de matriz por matriz.

Na segunda aula, cada aluno abriu a Khan Academy e todos fizeram as atividades recomendadas da unidade: Como multiplicar matrizes por matrizes.

Figura 29 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

O professor acompanhou o progresso dos alunos por meio da plataforma e também por meio de observação. Sendo assim, o professor orientou aos alunos estudarem o conteúdo apresentado na plataforma tirando suas dúvidas (com o professor) acerca dos exemplos resolvidos. Após estudar o conteúdo, fazer as atividades, ver as dicas e assistir aos vídeos sugeridos na plataforma. Quando ainda assim o aluno não conseguiu, foi feita uma intervenção para ajudar na compreensão. Importante observar que essa intervenção do professor foi por meio de diálogos em que o professor buscou fazer os alunos pensarem e discutirem a respeito de suas dúvidas e não apenas explicou de forma a transmitir o conhecimento como é feito no ensino tradicional. Sobre isso D'Ambrosio (1996, p. 107) aponta:

O diálogo é importante e dar oportunidade para essa prática é uma estratégia que vem sendo mais e mais adotada. O objetivo principal do diálogo é criar um ambiente menos inibidor para os ouvintes.

Freire (1996, p.86) também comenta sobre isso:

A dialogicidade não nega a validade de momentos explicativos, narrativos em que o professor expõe ou fala do objeto. O fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam

epistemologicamente curiosos.

Essa característica do professor atuar como mediador no desenvolvimento da aprendizagem é um dos aspectos importantes das metodologias ativas, no nosso trabalho, a gamificação. Com o trabalho de mediação e não o de transmissão de conhecimento, contribui-se para o desenvolvimento dos educandos em capacidade de raciocinar criticamente bem como para o engajamento dos mesmos em seus estudos. Segundo Berbel (2011, p. 26):

Na escola, o professor é o grande intermediador desse trabalho, e ele tanto pode contribuir para a promoção de autonomia dos alunos como para a manutenção de comportamentos de controle sobre os mesmos.

Cabe à escola procurar fazer com que seus alunos saiam do período escolar com capacidade para tomar suas próprias decisões de forma crítica sem se deixarem levar por outras pessoas. Trabalhar com metodologias ativas usando a gamificação, além de estimular a motivação, também ajuda no desenvolvimento da autonomia e diálogos entre os alunos. Segue abaixo como aparece o estudo da unidade multiplicação de matrizes na plataforma utilizada.

Figura 30 – Modelo de estudo da Plataforma

## Multiplicação de matrizes

Agora, estamos prontos para examinar um exemplo de multiplicação de matrizes.

Dadas  $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ , vamos calcular a matriz  $C = AB$ .

Para nos ajudar a compreender, vamos rotular as linhas na matriz  $A$  e as colunas na matriz  $B$ . Podemos definir o produto das matrizes, matriz  $C$ , como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{c}
 \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \vec{a}_1 \rightarrow \left[ \begin{array}{cc} 1 & 7 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} 3 & 3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{array} \right] \\
 \vec{a}_2 \rightarrow \left[ \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} 5 & 2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{array} \right] \\
 A \qquad \qquad B \qquad \qquad C
 \end{array}$$

Note que cada entrada na matriz  $C$  é o **produto escalar** entre uma linha na matriz  $A$  e uma coluna na matriz  $B$ . Mais especificamente, a entrada  $c_{i,j}$  é o produto escalar entre  $\vec{a}_i$  e  $\vec{b}_j$ .

Por exemplo,  $c_{1,2}$  é o produto escalar de  $\vec{a}_1$  e  $\vec{b}_2$ .

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & 17 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{array} \right]$$

[\[Gostaríamos de ver os cálculos, por favor!\]](#)

Podemos completar os produtos escalares para encontrar a matriz produto completa:

$$C = \left[ \begin{array}{cc} 38 & 17 \\ 26 & 14 \end{array} \right]$$

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

Estudar o conteúdo por meio da plataforma (mesmo já tendo visto uma vez em sala de aula com a explicação do professor) proporciona aos estudantes a oportunidade de desenvolver seus conhecimentos de forma autônoma o que contribui para um aluno independente, capaz de buscar a compreensão de conceitos por meio de tecnologias sem a necessidade de uma pessoa o tempo todo sendo o transmissor de conhecimento. Segundo Mariano (2019, p.14):

[...] a existência de uma educação “bancária” (isto é, aquela que olha o educando como um receptáculo vazio e passivo que apenas armazena as informações ofertadas pelo educador) acaba sendo um meio de controle social, pois emergir desse cenário autonomamente é um desafio diante das limitações experienciadas por ambos.

Freire (1996, p.112) afirma que:

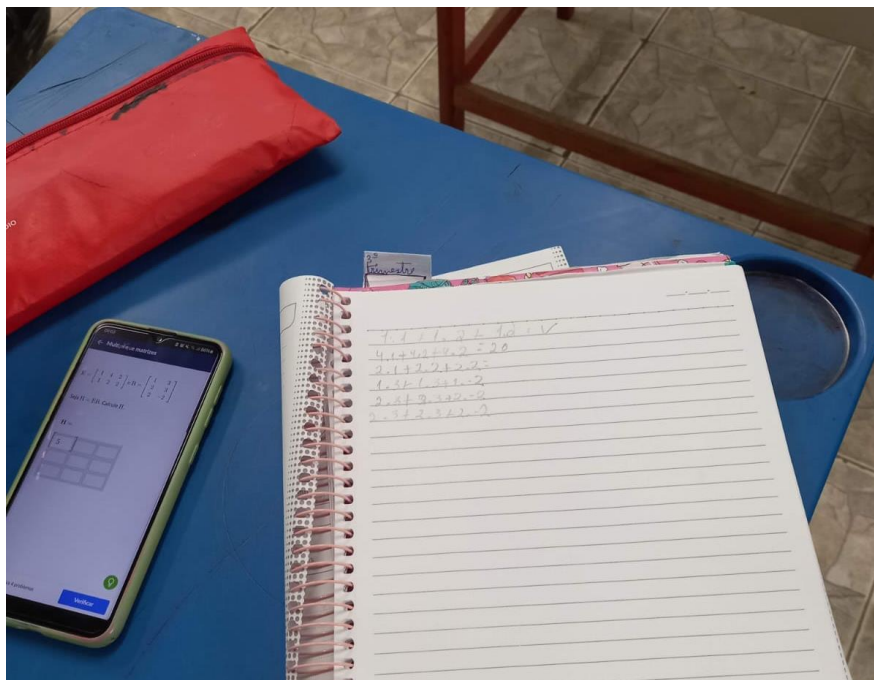
O educador e a educadora críticos não podem pensar que, a partir do curso que coordenam ou do seminário que lideram, podem transformar o país. Mas podem demonstrar que é possível mudar. E isto reforça nele ou nela a importância de sua tarefa político-pedagógica.

A busca pela independência do aluno ao aprender é muito importante para que os educandos tenham capacidade de pensar por si só e atuem na sociedade como protagonistas e não como seres que apenas absorvem o que os outros impõem de alguma forma. Metodologias ativas têm como prioridade o foco nos alunos para que eles pratiquem a capacidade de pensar, discutir e desenvolver sua habilidade e capacidade de aprender sem a necessidade de alguém que “transmita” informações como no ensino tradicional. Segundo Diesel, Baldez, Martins (2017, p.271):

[...] em contraposição ao método tradicional, em que os estudantes possuem postura passiva de recepção de teorias, o método ativo propõe o movimento inverso, ou seja, passam a ser compreendidos como sujeitos históricos e, portanto, a assumir um papel ativo na aprendizagem, posto que têm suas experiências, saberes e opiniões valorizadas como ponto de partida para a construção do conhecimento.

Dessa forma, incentivar que os alunos busquem por aprendizados e questões sociais relevantes de maneira independente auxilia os mesmos a exercer sua cidadania com capacidade de procurar por seus direitos e deveres.

Figura 31 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

Segundo Freire (1996, p.119):

Não é difícil compreender, assim, como uma de minhas tarefas centrais como educador progressista seja apoiar o educando para que ele mesmo vença suas dificuldades na compreensão ou na inteligência do objeto e para que sua curiosidade, compensada e gratificada pelo êxito da compreensão alcançada, seja mantida e, assim, estimulada a continuar a busca permanente que o processo de conhecer implica.

Além de trabalhar a capacidade de tomar decisões de forma livre e racional, é importante pensar também em despertar a curiosidade e o interesse dos educandos em aprender. A gamificação trouxe para as aulas de multiplicação de matrizes o engajamento que educadores procuram. Os alunos gostaram da plataforma Khan Academy para fazer as atividades. O formato do *site* que lembra jogos com elementos como pontuação, desafios a serem vencidos e objetivos a serem alcançados aguça a animação dos educandos em continuar. Sobre os benefícios dessa metodologia na educação, Murr, Ferrari (2020, p.12) apontam:

O envolvimento do indivíduo alcançado nos jogos se deve a vários fatores ligados à estrutura de seu funcionamento e estética, por exemplo, sendo que seu sucesso está conectado aos elementos que são emprestados dos jogos para promover a gamificação. A educação pode se beneficiar muito desse quadro, especialmente quando se pensa que o indivíduo, jogando, se deixa levar pela atitude lúdica, quando, na verdade, está em um processo de aprendizagem, motivado pelo jogo.

Os elementos de jogos presentes na plataforma Khan Academy, no conteúdo de matrizes, aguçaram a curiosidade dos alunos que estavam sempre na expectativa do que viria depois. Tratando da curiosidade do educando e do papel do educador, Freire (1996, p.118) diz:

Sou tão melhor professor, então, quanto mais eficazmente consiga provocar o educando no sentido de que prepare ou refine sua curiosidade, que deve trabalhar com minha ajuda, com vistas a que produza sua inteligência do objeto ou do conteúdo de que falo.

Abaixo seguem algumas das atividades propostas pela plataforma a partir do estudo de multiplicação de matrizes.

Figura 32 – Modelo de atividade da Plataforma

**Teste seu conhecimento**

4)  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

Seja  $F = C \cdot D$ .

a) Quais dos seguintes números é  $f_{2,1}$ ?

Escolha 1 resposta:

9

---

11

---

15

---

32

---

[Explicação](#)

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

Essa atividade tinha por objetivo identificar se o aluno entendeu o conceito da multiplicação de matrizes fazendo o cálculo de apenas um dos valores da matriz  $F = C \cdot D$ . Os alunos tiveram dificuldade em perceber o que exatamente a questão estava pedindo. Alguns fizeram a multiplicação das matrizes  $C$  e  $D$  inteira sem interpretar o que foi cobrado no enunciado da questão. Aqueles que fizeram a multiplicação de forma correta conseguiram identificar o elemento pedido, mas só perceberam no final que não eram necessários todos os cálculos. Para o aluno que não acerta o exercício, a plataforma dá a oportunidade de fazer novamente e apresenta dicas e vídeos para auxiliar a tirar suas dúvidas. Terminando novamente a questão, aparece “conferir de novo” para verificar se acertou. A ideia é que o aluno só avance em um conceito



quando já aprendeu o que precisava para seguir em frente, o que respeita o tempo de aprendizado de cada um e não deixa um aprendizado com “falhas” na apreensão dos conceitos. Sobre isso, Khan (2013, p.43) aponta:

Numa sala de aula tradicional, é muito pouco provável que o professor seja capaz de identificar cada falha de aprendizagem em cada um dos estudantes. E, mesmo que pudesse fazer isso, não conseguiria conduzir revisões sob medida para cada caso. Simplesmente não há tempo em sala suficiente para isso, especialmente se o grosso do estudo é organizado em aulas expositivas. Além disso, a unidade seguinte já está aí, assombrando. A turma precisa seguir em frente.

É importante destacar que uma metodologia que respeite e valorize as diferenças em que cada um aprende em determinado tempo está também trabalhando a autonomia dos educandos que buscam a aprendizagem independente do professor explicando a todo momento. Dessa forma, o aprendiz vai se tornando responsável e livre para continuar aprendendo o que quiser e for necessário. Freire (1996, p. 94)

O papel da autoridade democrática não é, transformando a existência humana num “calendário” escolar “tradicional”, marcar as lições de vida para as liberdades mas, mesmo quando tem um conteúdo programático a propor, deixar claro, com seu testemunho, que o fundamental no aprendizado do conteúdo é a construção da responsabilidade da liberdade que se assume.

Com isso, entendemos que incluir a ferramenta tecnológica Khan Academy nas aulas de matemática, no estudo de matrizes, contribui para que os estudantes tenham a oportunidade de estudar no seu ritmo e rever sempre que precisar conceitos que foram esquecidos ou não compreendidos. O que trazemos em sala de aula o educando pode utilizar em qualquer outro espaço que tenha acesso à internet.

Figura 33 – Modelo de atividade da Plataforma

$$5) X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $Z = X \cdot Y$ .

$Z =$ 


[Verificar](#)

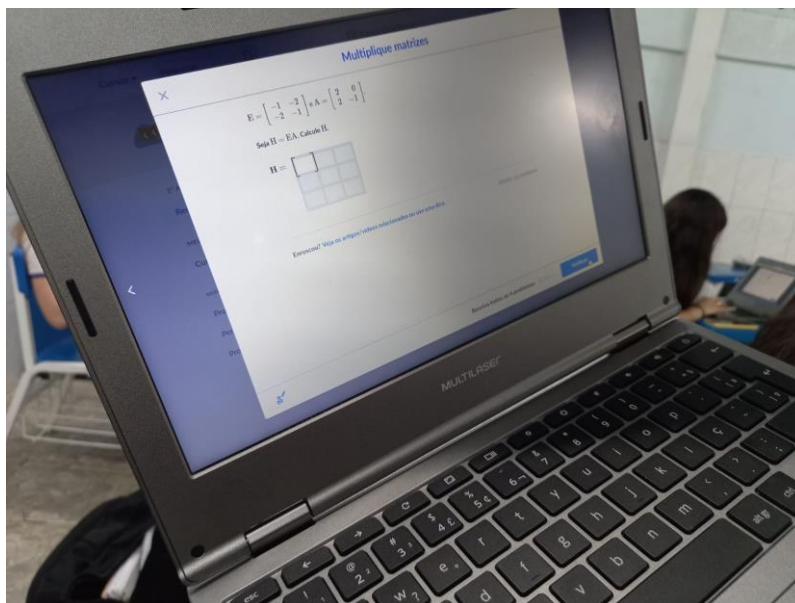
[Explicação](#)

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

O objetivo da atividade acima foi praticar a multiplicação de matrizes. Nessa atividade, os alunos cometeram erros como, por exemplo, multiplicar a segunda linha pela primeira coluna e colocar o resultado na primeira linha e segunda coluna na resposta. A orientação do professor foi para que visualizassem a explicação proposta na plataforma. Para grande parte dos estudantes que tiveram dúvidas, isso foi suficiente, e para aqueles que não conseguiram interpretar a explicação mostrada, o professor fez uma intervenção com a utilização de outros exemplos e explicou novamente. Dessa forma, o professor atuou como intermediador da aprendizagem que, segundo Berbel (2011, p.29):

[...] o professor atua como facilitador ou orientador para que o estudante faça pesquisas, reflita e decida por ele mesmo, o que fazer para atingir os objetivos estabelecidos.

Figura 34 – Aluno desenvolvendo atividade



Fonte: Arquivo pessoal

Assim, podemos observar que, apesar das dificuldades, os alunos conseguiram praticar e ampliar seu conhecimento a partir das atividades e explicações que a plataforma Khan Academy apresenta o que tornou a aprendizagem menos dependente do professor e autônoma. Além disso, destacamos a metodologia ativa gamificação que foi utilizada e despertou a curiosidade e a autonomia dos alunos, saindo do ensino tradicional, o de transmitir conteúdo. Para Freire (1996, p.118, 119):

Ensinar e aprender tem que ver com o esforço metodicamente crítico do professor de desvelar a compreensão de algo e com o empenho igualmente crítico do aluno de ir entrando como sujeito em aprendizagem, no processo de desvelamento que o professor ou professora deve deflagrar. Isso não tem nada que ver com a transferência de conteúdo e fala da dificuldade, mas, ao mesmo tempo, da boniteza da docência e da discência.

Ao estudarmos as características, aplicarmos as ferramentas da Khan Academy e, observarmos, durante as aulas, nos certificamos de que o uso da tecnologia na educação não retira a necessidade da mediação do professor. Sena (2014, p. 13) nos diz:

O grande diferencial da Khan Academy é que ela se adapta a cada usuário, permitindo que os alunos aprendam matemática no seu próprio ritmo. Entendemos que é necessário que os educadores librem-se do receio em perder espaço para as tecnologias atualmente disponíveis, em favor do aprendizado. A tecnologia por si só não atende às necessidades da aprendizagem, ela é apenas um instrumento, uma ferramenta, essas tecnologias estão possibilitando algumas modificações com relação à educação e à aprendizagem.

D'Ambrosio (1996, p.79) também faz observações acerca do papel do professor e a utilização de meios tecnológicos na educação:


Não há dúvida quanto à importância do professor no processo educativo. Fala-se e propõe-se tanto educação a distância quanto outras utilizações tecnológicas na educação, mas nada substituirá o professor. Todos esses serão meios auxiliares para o professor. Mas o professor, incapaz de se utilizar desses meios, não terá espaço na educação.

Observe abaixo como a plataforma traz quando a multiplicação de matrizes é definida.

Figura 35 - Modelo de estudo da Plataforma

Para que a multiplicação de matrizes seja definida, o número de colunas na primeira matriz deve ser igual ao número de linhas na segunda matriz.

$$(m \times n) \cdot (n \times k)$$

  
 o produto é definido

Para entender o porquê, considere as duas matrizes a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular  $AB$ , fazemos o produto escalar entre uma linha em  $A$  e uma coluna em  $B$ . Isso significa que o número de elementos em cada linha de  $A$  deve ser igual ao número de elementos em cada coluna de  $B$ . [\[Por quê?\]](#)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que se uma matriz tem dois elementos em cada linha, então ela tem duas colunas. Da mesma forma, se uma matriz tem dois elementos em cada coluna, então ela deve ter duas linhas.

2 entradas da linha  
= 2 colunas

↓

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2 entradas da coluna  
= 2 linhas

↓

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, segue-se que para a multiplicação de matrizes ser definida, **o número de colunas na primeira matriz deve ser igual ao número de linhas na segunda matriz.**

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 maio 2021

Mostramos, a seguir, algumas das atividades sobre o assunto tratado acima.

Figura 36 - Modelo de atividade da Plataforma

**Teste seu conhecimento**

1)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ .

$AB$  é definida?

Escolha 1 resposta:

Sim

Não

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

Nesta tarefa, o aluno precisava identificar o número de colunas da matriz A e o número de linhas da matriz B e verificar se eram iguais para concluir se o produto AB está definido. As dúvidas que surgiram foram pela não interpretação do conceito e alguns alunos trocaram analisando se a quantidade de linhas de A era igual à quantidade de colunas de B, levando ao erro da questão. Errar faz parte do processo de ensino e

aprendizagem. Como a plataforma, além das dicas e vídeos explicativos, também traz várias questões abordando o mesmo assunto, possibilitou aos alunos que erraram a questão praticar mais vezes para conseguir alcançar a aprendizagem que tínhamos como objetivo. O professor interveio quando necessário para auxiliar na compreensão tanto das atividades quanto dos conceitos exibidos nos vídeos e dicas da plataforma. A intervenção feita não foi com respostas prontas e sim com perguntas que estimularam o raciocínio dos alunos a fim de que conseguissem chegar às conclusões pretendidas. Segundo Freire (1996, p. 86):

Estimular a pergunta, a reflexão crítica sobre a própria pergunta, o que se pretende com esta ou aquela pergunta em lugar da passividade em face das explicações discursivas do professor, espécies de respostas a perguntas que não foram feitas. Isto não significa que realmente devemos reduzir a atividade docente em nome da defesa da curiosidade necessária, a puro vai-e-vem de perguntas e respostas, que burocraticamente se esterilizam.

Ao discorrer sobre a utilização de tecnologias na educação, Valente (2018, p. 29) diz:

Essas tecnologias têm alterado a dinâmica da escola e da sala de aula, modificando, por exemplo, a organização dos tempos e espaços da escola, as relações entre o aprendiz e a informação, as interações entre alunos e entre alunos e professor.

É claro que aqueles estudantes que precisaram praticar mais para alcançar o objetivo necessitam de um tempo maior. O fato de a plataforma estar disponível o tempo todo, somente com a necessidade de acesso à internet, contribui para que esse educando continue seus estudos após a aula, se necessário, respeitando as diferenças no ritmo de aprendizagem entre os educandos. Sobre isso, Khan (2013, p.44) afirma:

Ao aprender em ritmo próprio, em contrapartida, o andamento se ajusta a cada aluno porque é estabelecido por ele mesmo. Se um determinado conceito é apreendido com facilidade, ele pode saltar adiante, evitando a monotonia. Se um assunto está se mostrando difícil, é possível apertar o botão de pausa, ou retroceder e tentar resolver mais problemas conforme o necessário, sem constrangimento e em pedir que toda a turma vá mais devagar.

Observe, na atividade abaixo, que o enunciado não traz as matrizes e sim a ordem das matrizes, se quer identificar se existe o produto entre elas ou não a fim de estimular os alunos a pensarem sobre o produto das matrizes, olhando somente para suas dimensões.

Figura 37 - Modelo de atividade da Plataforma

3)  $A$  é uma matriz  $4 \times 2$  e  $B$  é uma matriz  $2 \times 3$ .

$AB$  é definida?

Escolha 1 resposta:

Sim

Não

$BA$  é definida?

Escolha 1 resposta:

Sim

Não

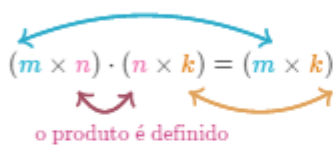
Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

As tarefas, como a apresentada acima, trouxeram dificuldade em um primeiro momento, pois os alunos acreditavam que precisariam das matrizes explícitas para dizer se a multiplicação é possível ou não. Daí foi necessária a intervenção do professor para que voltassem aos conceitos e percebessem que é necessário apenas as dimensões delas. Após essas atividades, vem o conteúdo com a explicação da propriedade das dimensões na multiplicação de matrizes como podemos observar abaixo.

Figura 38 - Modelo de estudo da Plataforma

## Propriedade das dimensões

O produto de uma matriz  $m \times n$  e uma matriz  $n \times k$  é uma matriz  $m \times k$ .



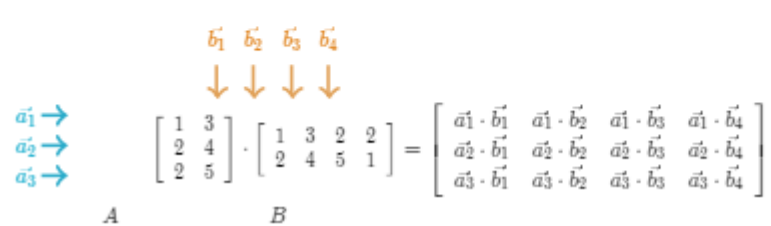
$(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$   
o produto é definido

Vamos considerar o produto  $AB$ , em que  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Já sabemos que  $AB$  é definida, pois o número de colunas em  $A_{3 \times 2}$  (2) corresponde ao número de linhas em  $B_{2 \times 4}$  (2).

Para calcular  $AB$ , devemos encontrar o produto escalar entre cada linha de  $A$  e cada coluna de  $B$ . Assim, a matriz resultante terá o mesmo número de linhas que a matriz  $A_{3 \times 2}$  (3) e o mesmo número de colunas que a matriz  $B_{2 \times 4}$  (4). Será uma matriz  $3 \times 4$ .



$$\begin{array}{l} \vec{a}_1 \rightarrow \\ \vec{a}_2 \rightarrow \\ \vec{a}_3 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_4 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_4 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_4 \end{bmatrix}

$A \qquad B$$$

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2021

Abaixo seguem algumas das atividades desenvolvidas na plataforma Khan Academy que tratam da dimensão das matrizes.



Figura 39 - Modelo de estudo da Plataforma

**Teste seu conhecimento**

4)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ .

Quais são as dimensões de  $AB$ ?

×

6)  $A$  é uma matriz  $2 \times 3$  e  $B$  é uma matriz  $3 \times 4$ .

Quais são as dimensões de  $AB$ ?

×

[\[Preciso de ajuda!\]](#)

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 maio 2021

Para responder a essas perguntas, era necessário lembrar do conceito trabalhado sobre as dimensões na multiplicação de matrizes. Novamente os erros que ocorreram se deram por falta de atenção e interpretação incorreta da propriedade estudada. Fazendo a verificação do erro e vista a dica que a plataforma traz, foi possível para os alunos entenderem em que estavam errando e aprender o correto. Dessa forma, é possível verificar como a utilização da Khan Academy auxilia o estudante a aprender de forma autônoma sem a necessidade do professor explicando a todo momento. Assim como nas unidades mencionadas anteriormente, nesta que trata da multiplicação de matrizes também observamos a falta de questões contextualizadas que exijam mais da interpretação dos textos e problemas variados. Seria importante que a plataforma trabalhasse esse tipo de questão para que o educando se aproprie

do conhecimento de matrizes em sua aplicabilidade cotidiana e não somente a partir de definições formais. Zanini (2012, p.10) aponta:

Atualmente o estudo de matrizes na escola se reduz a aprender e identificar uma matriz, além de organizar seus dados de maneira a calcular uma solução para um sistema de equações lineares. Tal aplicação deixa a desejar quanto a sua utilidade em muitos processos importantes, configurando distante da ideal, a abordagem nas escolas. Interessante seria desenvolver aulas práticas, visando o uso de matrizes e suas aplicações em áreas de exatas.

Dessa forma, observamos que a plataforma Khan Academy poderia aumentar seu potencial trazendo questões relevantes e contextualizadas sobre o conteúdo como, por exemplo, a atividade que apresentamos abaixo retirada do livro **Matemática Interligada**: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica (ANDRADE, 2020).

Um restaurante oferece três opções de refeição para viagem: pequena, média e grande. Veja, nos quadros, a quantidade de refeições vendida nesse restaurante durante dois dias e o preço de cada uma delas.

	Quantidade de refeições vendida		
	Pequena	Média	Grande
Sexta-feira	21	35	15
Sábado	30	47	18

Preço das refeições (R\$)	
Pequena	11
Média	14
Grande	18

Fonte de pesquisa: SILVEIRA, 2019. G1.

Calcule o quanto em R\$ esse restaurante arrecadou com a venda das refeições na sexta-feira e no sábado.

Em referência à avaliação da aprendizagem, D'Ambrosio (1996, p.62) aponta:

Naturalmente deve-se procurar instrumentos de avaliação de outra natureza daqueles que vêm sendo erroneamente utilizados para testar alunos, tais como provas, exames, questionários similares. O efeito de um sistema só pode ser avaliado por meio da análise do comportamento, individual e social, que resultou da passagem pelo sistema. Uma análise de impacto social, assim como de comportamento dos indivíduos e da sociedade como um todo, é que deveria ser aplicada.

A avaliação foi feita por meio de observação das aulas para verificar a participação e envolvimento dos alunos durante o estudo de matrizes na plataforma Khan Academy. Além disso, o professor verificou o progresso dos educandos na plataforma a fim de averiguar em quais conceitos já haviam progredido e em quais pontos ainda não haviam chegado ao objetivo. Essa forma de avaliação é diferente daquela em que o professor elabora uma prova para a turma que deve ser feita em determinado dia e horário. O estudo por meio da plataforma é mais dinâmico e permite que cada aluno atinja o objetivo em seu tempo.

#### 4.4 UNIDADE: DETERMINANTES

Nesta unidade, o objetivo é trabalhar o cálculo do determinante de matrizes.

Conteúdo: Determinantes.

Tempo: 2 aulas de 50 minutos

Recursos didáticos: *Chromebooks*

Metodologia: Na primeira aula, foi feita breve exposição de como calcular o determinante de matrizes. Abaixo seguem os conceitos que foram trabalhados de forma expositiva.

##### DETERMINANTE DE ORDEM 1

O determinante de uma matriz de ordem 1, ou seja,  $A = \{a_{11}\}$ , é o próprio elemento  $a_{11}$ . Indicamos esse determinante por  $\det A = a_{11}$ .

Exemplo 1:  $J = \{13\}$ , então  $\det J = 13$ .

Exemplo 2:  $S = \{-10\}$ , então  $\det S = -10$

##### DETERMINANTE DE MATRIZ 2 X 2

O determinante da matriz quadrada  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo: Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ , temos que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-4) \cdot (-3) = -2 - (+12) = -2 - 12 = -14.$$

### DETERMINANTE DE MATRIZ 3 X 3

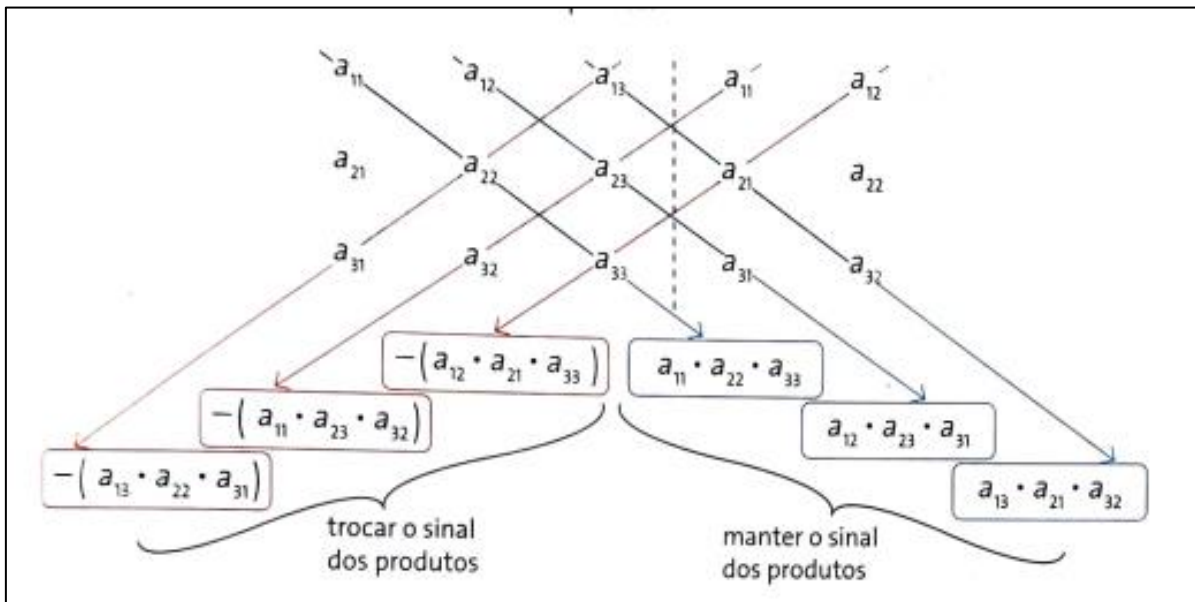
Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ , podemos obter o  $\det A$  por meio do seguinte

cálculo:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Para obter os produtos acima, utilizamos uma regra prática conhecida como regra de Sarrus. De acordo com essa regra, repetimos a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz; em seguida, efetuamos as multiplicações, conforme as indicações das setas no esquema.

Figura 40 – Modelo da Regra de Sarrus



**Exemplo**

Utilizando a regra de Sarrus, vamos obter o determinante da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

os produtos já estão com os sinais trocados

$\det A = -12 + 0 + 140 + 8 - 50 + 0 = 86$

Fonte: Livro matemática interligada. (ANDRADE, 2020)

O cálculo de determinantes não foi de difícil compreensão pelos alunos. Feito o exemplo no quadro, partimos para o trabalho com as atividades na plataforma Khan Academy. Durante a aula em que os estudantes estavam fazendo os exercícios propostos pelo *site*, o professor acompanhou o progresso de cada um por meio da plataforma e por meio de observação. Alguns erros ocorreram por falta de atenção, principalmente com relação aos sinais. Foi possível observar que os estudantes discutiram entre eles para tentar encontrar os erros e resolver corretamente. Essa interação que ocorre durante as aulas tem importância no papel social da educação, é o momento em que os educandos aprendem a trabalhar de forma colaborativa. Segundo Moran (2013, p.5):

É na síntese dinâmica da aprendizagem personalizada e colaborativa que desenvolvemos todo o nosso potencial como pessoas e como grupos sociais, ao enriquecer-nos mutuamente com as múltiplas interfaces do diálogo dentro de cada um, alimentando e alimentados pelos diálogos com os diversos grupos nos quais participamos, com a intensa troca de ideias, sentimentos e competências em múltiplos desafios que a vida nos oferece.

O diálogo entre alunos, e com o professor, citados acima traz a característica das metodologias ativas em que o estudante participa ativamente das aulas e atividades propostas em busca do conhecimento. O educando, nesse caso, não é um receptor passivo de teorias. Conforme Diesel, Baldez, Martins (2017, p.271):

[...] enquanto o método tradicional prioriza a transmissão de informações e tem sua centralidade na figura do docente, no método ativo, os estudantes ocupam o centro das ações educativas e o conhecimento é construído de forma colaborativa.

Os autores ainda acrescentam:

Assim, em contraposição ao método tradicional, em que os estudantes possuem postura passiva de recepção de teorias, o método ativo propõe o movimento inverso, ou seja, passam a ser compreendidos como sujeitos históricos e, portanto, a assumir um papel ativo na aprendizagem, posto que têm suas experiências, saberes e opiniões valorizadas como ponto de partida para construção do conhecimento.

Além das discussões entre os alunos, quando necessário, o professor mediou a discussão para auxiliar na compreensão dos alunos de seus erros e de como fazer corretamente. O professor também orientou que os educandos visualizassem as dicas propostas pelo *site* bem como os vídeos explicativos. A presença do professor, durante o processo de discussão em busca da aprendizagem, é importante para que os alunos avancem além do que conseguiriam sozinhos, visto que o professor desempenha o papel de mediar as discussões de forma a estimular os alunos a pensarem nos caminhos e possibilidades na resolução dos problemas propostos. Sobre isso, Moran (2013, p.5) aponta:

O terceiro movimento na aprendizagem acontece no contato com profissionais mais experientes (professores, tutores, mentores). Eles podem ajudar-nos a ir além de onde sozinhos e em grupos de pares conseguimos chegar. Eles desempenham o papel de curadores para que cada estudante avance mais na aprendizagem individualizada; desenham algumas estratégias para que a aprendizagem entre pares seja bem sucedida e conseguem ajudar os aprendizes a que ampliem a visão de mundo que conseguiriam nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses.

Sendo assim, observamos que utilizar a Khan Academy para praticar o cálculo de determinante foi importante para trabalhar uma postura ativa e desenvolver a autonomia por parte dos estudantes, uma característica importante das metodologias ativas e, mais precisamente, a gamificação.

Segundo Diesel, Baldez, Martins (2017, p.285):

[...] a (re)significação da sala de aula, enquanto espaço de interações entre os sujeitos históricos e o conhecimento, o debate, a curiosidade, o questionamento, a dúvida, a proposição e a assunção de posição resultam, sem dúvida, em protagonismo e em desenvolvimento da autonomia.

A seguir, apresentamos como a plataforma trata o conteúdo de cálculo de determinantes.

Figura 41 – Prints de conteúdo exibido na Plataforma

## Como calcular determinantes

Agora que temos uma boa noção do que os determinantes representam, vamos ver como podemos calcular o determinante de uma matriz. Vamos abordar como fazer isso para matrizes  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ .

### Como calcular determinantes bidimensionais

Há duas formas de escrever o determinante.

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

A fórmula do determinante bidimensional é  $ad - bc$ . Por exemplo:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = -11$$

[\[Por que essa fórmula faz sentido?\]](#)

Veamos uma questão prática.

PROBLEMA 1

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right) = \text{[input box]}$$

Verificar

Explicação

## Como calcular determinantes tridimensionais

A fórmula geral do determinante de uma matriz  $3 \times 3$  é bem grande, então vamos começar com um exemplo específico. A linha superior está em destaque porque vamos passar por ela, uma entrada por vez, para calcular o determinante.

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \right) = ???$$

Por fim, multiplicamos o determinante menor pelo número de âncora **2** para obter  $2 \cdot 2 = 4$ . Esse 4 é o primeiro dos três termos que vamos somar para calcular o determinante tridimensional completo.

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \right) = 4 + ??$$

Vamos para a próxima etapa. Desta vez, nosso número de âncora é **1**.

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 3 & & 1 \\ 1 & & 2 \end{bmatrix}$$



Primeiro, considere o 2 na partes superior esquerda da matriz. Vamos chamá-lo de nosso "número de âncora". Imagine que ignoramos todas as demais entradas que estão na mesma linha ou na mesma coluna que nosso número de âncora. A matriz ficaria assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & 1 \\ & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora tiramos o determinante bidimensional da matriz que encontramos.

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2$$

Calculamos o determinante bidimensional da nossa nova submatriz para obter  $3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ . Isso é um pouco estranho, mas multiplicamos o resultado pelo *negativo* do número de âncora para que nosso segundo termo seja  $-1 \cdot 5 = -5$ . Normalmente, alternamos a multiplicação do determinante pequeno pelo número de âncora e pelo valor *negativo* do número de âncora, formando um padrão assim:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Agora temos dois dos três termos.

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \right) = 4 - 5 + ?$$

Para a última etapa, o número de âncora é 2. De acordo com o padrão, não precisamos multiplicar pelo valor negativo no final. Pare um momento e tente imaginar a submatriz que vamos obter desta vez. O determinante dela é  $3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 9$ . Multiplicamos isso pelo número de âncora para obter  $2 \cdot 9 = 18$ .

Por fim, podemos somar todos os termos que descobrimos para ver que o determinante é  $4 - 5 + 18 = 17$ . Calcular o determinante de uma matriz  $3 \times 3$  dá bastante trabalho! Parabéns por ter conseguido.

Temos aqui um outro exemplo, feito inteiramente de uma vez. Tente imaginar como passamos pelas entradas da linha e da coluna de cada número de âncora para ver de onde a submatriz vem.

$$= -30$$

Se aplicarmos o mesmo procedimento a uma matriz  $3 \times 3$  geral, vamos obter uma fórmula bem grande. O mais importante é aprender a estratégia usada para calcular o determinante, não a fórmula em si.

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right) = a \det \left( \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} \right) \\ - b \det \left( \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} \right)$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4 \det \left( \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ - 1 \det \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ + 3 \det \left( \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ = 4(-6) - 1(-12) + 3(-6)$$

$$+ c \det \left( \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\ = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Vamos resolver um problema prático.

PROBLEMA 2

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right) = \text{[input box]}$$

Verificar

Explicação

Para aprender mais sobre o cálculo de determinantes tridimensionais, assista a [este vídeo](#).

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2023

Geralmente, ao explicar o conteúdo em tela, expomos um método que chamamos de dispositivo prático para o cálculo de determinantes de matrizes 3 x 3. Não observamos diretamente essa explicação no material teórico. Entretanto, além do material teórico,

há videoaulas que explicam o cálculo de determinantes e, em um desses vídeos, é apresentado o dispositivo prático citado com o título “método atalho” como podemos verificar nas imagens abaixo.

Figura 42 – Exemplos de videoaulas da Plataforma

The figure consists of three screenshots of video lessons from the Khan Academy platform. Each screenshot shows a navigation sidebar on the left and a video player on the right.

- Top Screenshot:** The video title is "Determinante de uma matriz 2x2". The sidebar shows the course "Álgebra (todo o conteúdo)" and "Lição 11: Determinante de uma matriz 2x2". The video player shows a 2x2 matrix  $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$  and its determinant calculation  $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$ .
- Middle Screenshot:** The video title is "Determinante de uma matriz 3x3: método padrão (1 de 2)". The sidebar shows "Lição 15: Determinantes e inversas de matrizes grandes". The video player shows a 3x3 matrix  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  and its determinant calculation  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ .
- Bottom Screenshot:** The video title is "Determinante de uma matriz 3x3: método atalho (2 de 2)". The sidebar shows "Lição 15: Determinantes e inversas de matrizes grandes". The video player shows the same 3x3 matrix  $A$  and its determinant calculation using the shortcut method, with the matrix  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  and the shortcut calculation  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 0 - 1 \cdot 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot (-2) = 0 + 10 - 8 = 2$ .

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2023

Importante destacar a importância do planejamento do professor ao utilizar a tecnologia em suas aulas. O professor precisa analisar o material, escolher o que mais se adequa à turma e identificar o que foi contemplado ou não para acrescentar em

suas aulas aquilo que faltar. Segundo Prezotti Filho (2014, p.12):

É papel do professor apresentar uma matemática mais coesa, de forma que seus diversos campos de estudo não fiquem tão separados, possibilitando ao aluno a percepção da inter-relação entre os conhecimentos algébricos, aritméticos e geométricos.

Ao tratar do planejamento, Moran (2013, p.3) nos diz:

Quanto mais tecnologias móveis, maior é a necessidade de que o professor planeje quais atividades fazem sentido para a classe, para cada grupo e para cada aluno. As atividades exigem o apoio de materiais bem elaborados. Os conteúdos educacionais – atualizados e atraentes – podem ser muito úteis para que os professores possam selecionar materiais textuais, audiovisuais – impressos e/ou digitais – que sirvam para momentos diferentes do processo educativo: para motivar, para ilustrar, para contar histórias, para orientar atividades, organizar roteiros de aprendizagem, para a avaliação formativa.

Não identificamos na plataforma a motivação para o determinante e também percebemos que, por vezes, essa motivação não aparece em livros didáticos. Daí a responsabilidade do professor em suprir essa deficiência do material didático.

Segundo Prezotti Filho (2014, p.12):

Quando, em nossas aulas, apresentamos as diversas formas de visualização, aritmética, geométrica e algébrica, do mesmo problema, além de eliminarmos a fragmentação da matemática, fortalecemos o potencial de compreensão dos alunos, estabelecendo uma matemática conexa, com uma pluralidade de possibilidades para conteúdos semelhantes.

Observe abaixo uma das atividades de determinantes de matrizes 2 x 2 que os estudantes fizeram na Khan Academy.

Figura 43 – Atividade realizada na Plataforma

The screenshot shows a Khan Academy interface for a math problem. On the left, a sidebar lists the course 'Álgebra (todo o conteúdo)' and the current lesson 'Lição 11: Determinante de uma matriz 2x2'. The main area displays the title 'Determinante de uma matriz 2x2' and the matrix  $F = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ . Below the matrix, the question asks 'Qual é o determinante de F?' and the user has entered '-15' in a text box. A feedback message with a star icon says 'Bom trabalho! Isso mesmo. Vamos lá!'. The interface also includes a 'Recomendar' button at the top right and a 'Google Sala de Aula' icon.

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2023

Destacamos as mensagens que parabenizam o aluno quando acerta a questão como pode ser observado na imagem acima bem como as mensagens oferecendo ajuda caso o estudante erre a questão, como pode ser verificado na imagem abaixo.

Figura 44 – Atividade realizada na Plataforma

The screenshot shows the Khan Academy interface for a 2x2 matrix determinant problem. On the left, a sidebar displays the course structure: 'Álgebra (todo o conteúdo)', 'CURSO: ÁLGEBRA (TODO O ... > UNIDADE 20)', and 'Lição 11: Determinante de uma matriz 2x2'. The main content area is titled 'Determinante de uma matriz 2x2' and shows the matrix  $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ . The question asks 'Qual é o determinante de E?' and the user has entered '17'. A feedback message states 'Não é bem isso! Tente de novo, Obter ajuda ou pular a pergunta por enquanto.'

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2023

Esse formato em que o educando avança quando acerta uma questão e precisa tentar novamente até acertar para avançar quando erra a questão é uma característica de jogos e traz a ideia da metodologia ativa gamificação. Segundo Murr, Ferrari (2020, p.31):

Outro fator importante que faz parte da estrutura de jogos é a sensação de progresso e a motivação para completar as tarefas e o jogo todo. A progressão em níveis traz esse sentimento, responsável por engajar cada vez mais, na superação de outros desafios.

Observe, a seguir, uma das atividades de determinantes de matrizes 3 x 3 que os estudantes fizeram na Khan Academy.

Figura 45 – Atividade realizada na Plataforma

The screenshot shows the Khan Academy interface for a 3x3 matrix determinant problem. On the left, a sidebar displays the course structure: 'Álgebra (todo o conteúdo)', 'CURSO: ÁLGEBRA (TODO O ... > UNIDADE 20)', and 'Lição 15: Determinantes e inversas de matrizes grandes'. The main content area is titled 'Determinante de uma matriz 3x3' and shows the matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ . The question asks 'Qual é o determinante de A?' and there is an empty input field. A button labeled 'Mostrar calculadora' is visible. A hint says 'Você pode precisar de: Calculadora'.

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2023

Nas atividades que envolveram o cálculo de determinantes 3 x 3, foram comuns os erros de sinal. Nesta parte do conteúdo, os alunos utilizaram mais as dicas do site. Quando a dica oferecida não foi suficiente para que o aluno encontrasse seus erros,

observamos as discussões entre os alunos e, quando necessário, foi feita a intervenção do professor para mediar as discussões e auxiliar na compreensão do erro e como proceder corretamente na resolução da atividade.

Ao se referir ao papel do professor como mediador, Moran (2013, p.5) diz:

Os bons professores e orientadores sempre foram e serão fundamentais para avançarmos na aprendizagem. Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões, os caminhos a serem percorridos. O diferente hoje é que eles não precisam estar o tempo todo juntos com os alunos, nem precisam estar explicando as informações para todos. A combinação no projeto pedagógico de aprendizagens personalizadas, grupais e tutoriais é poderosa para obter os resultados desejados.

Em relação às características das metodologias ativas e as interações entre professor e estudantes, Diesel, Baldez, Martins (2017, p.277) dizem:

O trabalho com metodologias ativas de ensino favorece a interação constante entre os estudantes. A aula expositiva, na qual os alunos sentam-se em carteiras individuais e em que são “proibidos” de trocar ideias com os colegas, dá lugar a momentos de discussão e trocas.

Entendemos que a troca de ideias que ocorreu entre os alunos com a intervenção do professor favoreceu a aprendizagem no cálculo de determinantes.

Observe, na imagem abaixo, que a primeira dica oferecida pela Khan Academy é apresentar o método para o cálculo do determinante de uma matriz 3 x3 genérica.

Figura 46 – Atividade realizada na Plataforma

The screenshot shows the Khan Academy interface. On the left, there is a navigation menu with the title 'Álgebra (todo o conteúdo)' and a sub-section 'CURSO: ÁLGEBRA (TODO O ... > UNIDADE 20)'. Below this, it says 'Lição 15: Determinantes e inversas de matrizes grandes'. There are three items in the list, all titled 'Determinante de uma matriz 3x3...'. The main content area on the right shows a question: 'Qual é o determinante de A?' with an input field containing '15'. Below the question, it says '1 / 5' and 'O determinante de qualquer matriz 3x3 pode ser calculado da seguinte maneira:'. A large mathematical formula is displayed: 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
. Below the formula, there is a link '+ Ver outra dica (1/5)' and a button 'Mostrar calculadora'.

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2023

Observe, na imagem acima, que, se o aluno ainda não souber como responder corretamente ou errar novamente a questão, o *site* oferece outra dica. Veja como aparece a próxima dica.

Figura 47 – Atividade realizada na Plataforma

1 / 5 O determinante de qualquer matriz 3x3 pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

2 / 5  $-(f \times h) - b((d \times i) - (f \times g)) + c((d \times h) - (e \times g))$

3 / 5 Neste caso, especificamente,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

+ Ver outra dica (3/5)

Fonte: Plataforma Khan Academy. <https://pt.khanacademy.org/> Acesso em: 08 mai. 2023

A primeira dica ofereceu o método para o cálculo do determinante em uma matriz genérica de mesma ordem da que foi pedida na atividade. A segunda dica substituiu os valores de acordo com a matriz dada. O *site* segue com as dicas, resolvendo passo a passo, até dar a resposta do exercício.

Sentimos falta da contextualização do conteúdo de determinantes na plataforma Khan Academy. Prezotti Filho (2014) traz uma proposta de como apresentar esse conteúdo de forma contextualizada e não apenas como uma fórmula a ser aplicada. Segundo Prezotti Filho (2014, p.13):

É consenso dentre os autores de livros didáticos de ensino médio trazer a definição de determinantes como um simples valor numérico associado a matrizes quadradas. Infelizmente perguntas como:

- De onde surgiu esse valor numérico?
- Qual é a finalidade de tal número?
- Por que somente matrizes quadradas têm determinante?

ficam sem respostas e, mesmo que ano após ano, sempre sejam feitas, nunca são respondidas em seus livros.

Acreditamos que trabalhar com essa contextualização e responder às perguntas apresentadas por Prezotti Filho traz mais sentido aos educandos ao estudar o conteúdo de matrizes.



## 5 FRAGILIDADES DA KHAN ACADEMY

A partir dos estudos feitos na plataforma Khan Academy, observamos que faltam discussões necessárias ao estudo dos temas propostos.

Entre as competências que a BNCC prevê que os estudantes precisam desenvolver, temos:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018, p. 531)

Para que um estudante seja capaz de interpretar situações em diversos contextos, acreditamos ser necessário que os conteúdos sejam trabalhados de forma contextualizada. Não basta saber “fazer a conta”, é preciso que se exemplifique onde e como esses cálculos são necessários. De acordo com Mariano (2019, p.28):

Quanto à aquisição do conhecimento em matemática, ainda há uma tendência ao acúmulo de regras e normas replicadas pelo livro didático e pautada na reprodução de semi-informações, que deixam de lado as contextualizações e os questionamentos quanto à relevância daquele conhecimento para a formação crítico-social do indivíduo. Os exercícios são mecânicos e pautados na repetição. As aplicações possuem contextos abstratos que pouco se aplicam à realidade do estudante e a formação intelectual parece voltada à aprovação em avaliações.

Observamos que a Khan Academy trabalha os conteúdos de matrizes e os exercícios de forma mecanizada. Acreditamos que esse aprendizado mecânico não contribui para o desenvolvimento do educando como cidadão crítico e reflexivo a respeito da sua vida em sociedade. Segundo Freire (1996, p. 69):

A memorização mecânica do perfil do objeto não é aprendizado verdadeiro do objeto ou do conteúdo. Neste caso, o aprendiz funciona muito mais como paciente da transferência do objeto ou do conteúdo do que como sujeito crítico, epistemologicamente curioso, que constrói o conhecimento do objeto ou participa de sua construção.

Entendemos que incluir a contextualização dos conceitos e problemas traz benefícios para o engajamento dos estudantes para que eles consigam visualizar criticamente as situações reais em que tal conteúdo pode ser aplicado.

Em se tratando da metodologia ativa gamificação, temos a ideia de motivar os estudantes. Segundo Orlandi, Duque, Mori (2018, p. 27):

Dessa forma, a Gamificação visa a potencialização do ensino e da aprendizagem, com foco na resolução ou atenuação de problemas que envolvem o interesse e participação dos alunos e evolução dos docentes no processo educativo.

Entendemos que exercícios do tipo “arme e efetue” são necessários para aprender, mas não são suficientes. O estudante precisa ter contato com atividades que trabalhem a utilização dos conceitos aprendidos para se sentirem motivados e entenderem o porquê de estudar tal conteúdo.

Sobre as metodologias ativas, Berbel (2011, p.29) aponta a prática social dentro do processo de aprender:

Podemos entender que as Metodologias Ativas se baseiam em formas de desenvolver o processo de aprender, utilizando experiências reais ou simuladas, visando às condições de solucionar, com sucesso, desafios advindos das atividades essenciais da prática social, em diferentes contextos.

Utilizar a plataforma Khan Academy traz benefícios dentro de um contexto social como, por exemplo, o trabalho e discussões em grupo. Entretanto ainda é possível melhorar e ampliar os benefícios se a plataforma trazer um pouco da história e contextualização dos conteúdos. Segundo D’Ambrosio (1996, p. 32), “O grande desafio é desenvolver um programa dinâmico, apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse dos alunos”. O autor também destaca sobre a responsabilidade do professor com relação ao exercício da cidadania e sua relação com a contextualização dos conteúdos: “O conhecimento está subordinado ao exercício pleno da cidadania e, conseqüentemente, deve ser contextualizado no momento atual, com projeções para o futuro”. (D’Ambrosio, 1996, p.86)

É possível observar que aprender por meio de tecnologias faz parte de um contexto atual e auxilia os estudantes a perceberem as várias ferramentas e meios disponíveis para desenvolverem uma aprendizagem autônoma, o que contribui significativamente para o desenvolvimento de competências essenciais de cidadania. Pensando sobre a tecnologia no dia a dia do jovem, é importante mencionar o que Freire (1966) nos fala quando se refere ao respeito aos educandos e às condições em que vivem.

Não é possível respeito aos educandos, à sua dignidade, a seu ser formando-

se, à sua identidade fazendo-se, se não se levam em consideração as condições em que eles vêm existindo, se não se reconhece a importância dos “conhecimentos de experiência feitos” com que chegam à escola. (FREIRE, 1996, p.64).

Portanto, não basta incluir a tecnologia nas aulas com atividades mecânicas que não exigem interpretação de situações-problema, a ferramenta em estudo não utiliza todo o seu potencial nesse papel. Com relação à presença da tecnologia na sociedade, Mariano (2019, p.29) afirma:

Focada na repetição de regras que gera condicionamento e dirime o questionamento, a sociedade tecnológica vem sendo moldada para evitar pensar profundamente o meio social ao qual pertence.

Acreditamos que as ferramentas tecnológicas podem ser utilizadas de forma a que trabalhem criticidade e capacidade de questionar dos educandos como cidadãos.

Sobre o conteúdo de matrizes, Zanini (2012, p.10) ensina:

É possível afirmar que várias operações realizadas por máquinas e cérebros eletrônicos são fundamentadas nas matrizes, sendo utilizadas largamente nas estatísticas, na economia, em física e nos mais diversos campos das ciências exatas.

Entendemos que a plataforma poderia explorar essas ideias em seu conteúdo e em suas atividades a fim de situar o estudante no contexto em que matrizes se encaixam. Além da contextualização, o *site* também não conta a história da construção dos conceitos. Deste modo, para suprir as deficiências assinaladas foi necessário que o professor trouxesse as discussões para a sala de aula, utilizando a forma expositiva. Reiteramos. Assim, a importância do papel do professor como aquele que planeja as aulas, faz a mediação necessária e analisa o que “falta” para complementar os estudos. Segundo Bierwagen (2018, p. 4):

O professor também precisa ser protagonista, ou seja, deve ter condição de dialogar com seus alunos e com a comunidade a que o mesmo pertence tendo a preocupação de buscar uma ação, um pensamento crítico e não papel de mero reproduzidor.

Outrossim, entendemos que, para complementar o que o *site* da Khan Academy traz no conteúdo de matrizes, o professor precisa conhecer a realidade em que a comunidade escolar está inserida para contextualizar o conteúdo em estudo.

Trabalhar com uma metodologia diferente do método tradicional de ensino é sair do conforto de saber exatamente o que e como as aulas irão acontecer e se desafiar a

enfrentar os obstáculos que aparecem. De acordo com Freire (1996, p. 35):

É próprio do pensar certo a disponibilidade ao risco, a aceitação do novo que não pode ser negado ou acolhido só porque é novo, assim como o critério de recusa ao velho não é apenas o cronológico, o velho que preserva sua validade ou que encarna uma tradição ou marca uma presença no tempo continua novo.

De acordo com o que foi investigado, a plataforma Khan Academy nos trouxe a possibilidade do novo com desafios a serem vencidos e novas possibilidades de descobertas. Todavia, vimos que não podemos descartar completamente o método tradicional que, no caso desse estudo, foi usado para trabalhar e expor aquilo que consideramos importante e a plataforma não contemplou.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudar de forma autônoma e conseguir aprender os conceitos necessários é um dos saberes e aprendizagens que precisamos estimular em nossos alunos. Isso porque, ao sair da escola, os jovens precisarão lidar com diversas situações cotidianas que terão que resolver sozinhos, sem o auxílio de um professor. Assim, quando aprendem, ainda na escola, a pesquisar, ler sobre determinado assunto e tirar conclusões de maneira crítica e independente, terão mais facilidade para enfrentar e modificar a condição existente. Pudemos observar que, com a metodologia ativa gamificação, a partir da plataforma Khan Academy, a possibilidade de estudar em outros ambientes fora da sala de aula e, em um ritmo próprio, sem se preocupar com os colegas mais avançados ou menos avançados, contribuiu de forma positiva para que alcançassem o aprendizado pretendido. Nesse ambiente de aprendizagem, o papel do professor não foi o de transferir conhecimentos e sim de mediar as discussões necessárias para que o educando atingisse o objetivo de aprender. A mediação do professor define o ritmo e a rotina de estudos. O aluno vai estudar no tempo que ele quer e precisar, de acordo com o nível de aprendizado dele, sob a orientação do professor, que irá direcionar quais os conteúdos e em qual etapa esses conteúdos serão apresentados. Importante ressaltar que, durante a pesquisa, estávamos passando pela pandemia da Covid-19 e muitos alunos ficaram estudando de casa com atestados médicos. Dessa forma, a plataforma Khan Academy foi essencial para que esses estudantes tivessem acesso aos estudos de onde estivessem com a condição de terem acesso à internet. Além disso, trazer para a escola uma metodologia que incluiu tecnologia fez com que os educandos se sentissem mais empolgados e animados durante as aulas e essa empolgação ajudou na busca de forma autônoma pelos conhecimentos. Em contrapartida, estudar por meio da plataforma, não trouxe a oportunidade de desenvolver a capacidade de interpretar problemas contextualizados e buscar soluções, visto que a Khan Academy, nas unidades estudadas, não trouxe questões com a aplicabilidade cotidiana do conteúdo de matrizes. Daí a relevância do papel do professor neste contexto. É ele quem complementar com o que for necessário e vai orientar os caminhos a serem percorridos na busca pelo conhecimento.

## REFERÊNCIAS

ABE, M. M. **Reflexões sobre a educação matemática na rede pública** – Propostas estruturantes e pedagógicas com o uso de material concreto. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

ANDRADE, T. M. **Matemática Interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica**. 1ª Ed, São Paulo: Scipione, 2020.

BERBEL, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciências Sociais e Humanas**, [S. l.], v. 32, n. 1, p. 25–40, 2012. DOI: 10.5433/1679-0383.2011v32n1p25. Disponível em: <https://ojs.uel.br/revistas/uel/index.php/seminasoc/article/view/10326>. Acesso em: 14 maio. 2023.

BIERWAGEN, G. S. Plataforma Khan Academy na educação básica. In: **Educação e Tecnologias inovação em cenários em transição**, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 26/06/2023

BRICSMATH.COM+. **Bricsmath**: competição de matemática. C. 2019. Página Inicial. Disponível em: <https://bricsmath.com>. Acesso em 18/07/2023.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: Da teoria à prática**. 17ª Ed. Campinas, SP: Papyrus, 1996.

DIESEL, Aline; BALDEZ, Alda Leila Santos; MARTINS, Silvana Neumann. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. **Revista Thema**, 2017, Volume 14, Nº 1, p. 268 a 288. Disponível em <[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4650060/mod\\_resource/content/1/404-1658-1-PB%20%281%29.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4650060/mod_resource/content/1/404-1658-1-PB%20%281%29.pdf)>. Acessado em 14. maio.2023.

FARIA, D. J. A.; LUZ, R. N. Uma experiência com a Plataforma Khan Academy no ensino de Matemática. In: **Revista interdisciplinar de Tecnologias e Educação**, 2016.

FREIRE, P.; **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 27ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

SILVEIRA, Daniel. Brasileiros estão comendo mais fora de casa e consumindo mais alimentos prontos, diz IBGE. **G1 Economia**. Rio de Janeiro, 04/10/ 2019. Disponível em: <<https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/10/04/brasileiros-estao-comendo-mais-fora-de-casa-e-consumindo-mais-alimentos-prontos-diz-ibge.ghtml>>. Acesso em: 25 ago. 2020

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Portal da obmep**, c2005. Página inicial. Disponível em: <https://portaldaoimpa.br>. Acesso em 18/07/2023

KHAN, S. **Um mundo, uma escola A educação reinventada**. Edição digital: 2013. Rio de Janeiro – RJ: Intrínseca, 2013.

KHAN ACADEMY. **Khan Academy**: plataforma de estudos. C.2008. Página inicial. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/khan-for-educators/khan-academy-para-educadores/bncc-khan-1/bncc-khan/a/khan-academy-e-bncc-alinhamento-curricular?modal=1>. Acesso em 08/05/2021

MARIANO, J. A. R. **A Teoria Crítica na Educação Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2019.

MENEGAIS, D. A. F. N.; FAGUNDES, L. C.; SAUER, L. Z. A análise do impacto da integração da plataforma Khan Academy na prática docente de professores de matemática. In: **Novas Tecnologias na Educação**, v. 13, n. 1, 2015.

MORAN, J. **Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda**. Disponível em: [https://moran.eca.usp.br/wp-content/uploads/2013/12/metodologias\\_moran1.pdf](https://moran.eca.usp.br/wp-content/uploads/2013/12/metodologias_moran1.pdf) Acesso em: 20/08/2023.

MUNIZ, R. S. S. **O ensino de função pela perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica apoiado por tecnologias digitais**. Dissertação (Matemática) Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2019.

MURR, C. E.; FERRARI, G. **Entendendo e Aplicando a Gamificação**: o que é, para que serve, potencialidades e desafios. Florianópolis: UFSC: UAB, 2020. Disponível em: <https://sead.paginas.ufsc.br/files/2020/04/eBOOK-Gamificacao.pdf> Acesso em: 14/05/2023

ORLANDI, T. R. C.; DUQUE, C. G.; MORI A. M. **Gamificação**: uma nova abordagem multimodal para a educação. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/322777577\\_Gamificacao\\_uma\\_nova\\_abordagem\\_multimodal\\_para\\_a\\_educacao](https://www.researchgate.net/publication/322777577_Gamificacao_uma_nova_abordagem_multimodal_para_a_educacao). Acesso em: 14/05/2023

OTOBELLI, E. S.; GIRON, G.R.; DALL'ACUA, G. POLONI, L.; PUZISKI, M.; PADILHA, R.; WEBBER, C.; SPINDOLA, M. M. O uso da plataforma Khan Academy como uma proposta diferenciada no ensino da Matemática. In: **Revista Interdisciplinar de Ciência Aplicada**, v.3, n.6, 2018.

PEREIRA, N. M. O. **Uma proposta Para o Ensino do Conceito de Matrizes em Ambiente computacional**. Dissertação (Ensino de Ciências Exatas) Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2015.

PREZOTTI FILHO, P. R. **Uma proposta de ensino dos temas sistemas lineares e determinantes**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

SENA, I. V. O. **Aprendendo matemática, através do “KHAN ACADEMY”**. Monografia (Especialização em Fundamentos da Educação) Universidade Estadual

da Paraíba, Princesa Isabel, 2014.

SENECA LEARNING. **Plataforma de aprendizagem Seneca Learning**. C.2018. Página inicial. Disponível em: <https://senecalearning.com>. Acesso em 18/07/2023

VALENTE, Armando José. **A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado**: uma experiência com a graduação em midialogia. In: BACICH, Lilian; MORAN, José. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 26-44.

ZANCHETTIN, L. **Transformações geométricas e matrizes**: Uma proposta de ensino com base na sala de aula invertida. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2020.

ZANINI, N. J. **Matrizes e as dificuldades de aprendizagem**. Monografia (Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Curso de Graduação em Matemática) Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2012.